

高校生のための現代数学基礎教程

** 千葉大学サマースクール **

志賀 弘典

はじめに

1996年7月28日から8月1日までの5日間、上記のいわゆる「パイロット講義」が開催された。高校1年から3年までの40名であったが、県内、東京都および近県の他、近畿地方からの参加者もあり、熱心で積極的な聴講生たちであった。

最終日の授業を終えて、すぐにさる会議の席に急いだが、カメラ持参の高校生たちが記念撮影のために私を追いかけて探しまわっていたとか、後でその話を聞いて、高校生のメンタリティーをかわいいと思い、同時に済まないことをしたと思った。

授業は連日午前、午後にわたり、演習を伴って進められる主講義と、3つのトピック講義「組み合わせ論の話題から」、「今年の世界数学オリンピックの問題から」、「暗号と数学」との組み合わせで行われた。ここでは、世話人の筆者が受け持った主講義の概要を紹介する。

出来るだけ系統的に数学の手法と思想スケールを紹介すること、実践を通じて数学を理解してもらうことを心がけたつもりである。

1 正多面体

定義 1.1 すべてが合同な正多角形を有限個用意して、互いの辺どうしを貼りあわせてすきまなく閉じられた図形がつけられたとする。このとき得られた図形が凸図形で、各頂点に同数の辺が集まっているとき正多面体という。

定義 1.2 有限個の多角形を用意する。これらのうちの等しい長さの辺をもつものを貼りあわせていって、すきまなく閉じられた図形ができたとき、これを多面体という。

定義 1.3 多面体 P の内部にある2点を任意にとったとき、その2点を結ぶ線分が P の内部にあるとき P は凸多面体であるという。

[別の定義] 有限個の平面によって限られた空間内の有界な図形を凸多面体という。

例 1.1 いくつかの多面体で頂点の数, 辺の数, 面の数を数えてみよう。

定理 1.1 (Euler の等式)

凸多面体 P においてその頂点の数を v , 辺の数を e , 面の数を s とすると等式

$$v - e + s = 2$$

が成り立つ。

証明については後に述べることにするが, この定理を用いると正多面体を決定することができる。

定理 1.2 (テアイテートス・ユークリッド)

正多面体は, 正 4 面体, 正 6 面体, 正 8 面体, 正 12 面体, 正 20 面体の 5 種類のみ存在する。

[その証明] ひとつの正多面体を想定する。それは, 正 p 角形が s 個でつくられ, ひとつの頂点に q 個の多角形が集まっているものとして, p, q, s についての可能な組み合わせを限定してゆく。実際,

$$(1 - 2/p) \times 3\pi < (1 - 2/p) \times q\pi < 2\pi$$

から, $3 \leq p \leq 6$ となり, Euler の等式から定まる整数解を列举すると, 必要条件として 5 つの (p, q, s) の組み合わせのみに限定され, その 5 種類に対応する正多面体は実際に存在する。

[疑問] ここでもしかして次のような疑問が生じてこないだろうか? この多面体あるいは正多面体が置かれている空間はどこにあるのか? 現実の空間なのだろうか? それとも架空の空間なのだろうか?

[正多面体余談] 正多面体の決定と、プラトン派の宇宙論. ルネッサンス期にプラトンの哲学が復活したこと, さらにケプラーの宇宙論の出発点に正多面体に基づくプラトンの宇宙観(太陽中心説)があったことなどを紹介した. 詳細は割愛する.

[演習問題 1]

[1.1] a, b, c は $2 \leq a \leq b \leq c$ なる整数とする.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

となる組 (a, b, c) をすべて決定せよ.

[1.2] (エジプト分数の問題) $\frac{1}{n}$ の形の分数を単位分数ということにする. $\frac{2}{n}$ の形の分数は, 2つの異なる単位分数の和に書けることを証明せよ.

(Erdoős の問題): $\frac{4}{n}$ の形の分数は異なる3つの単位分数の和に表わせるか?(現在未解決)

[1.3] 正五角形を定規とコンパスのみを用いて作図せよ.

2 正多面体群

\mathbf{R}^3 における4点

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を考えると, 各点間の距離は等しく, これらを頂点とする正四面体が考えられる. これら4頂点 v_1, v_2, v_3, v_4 の入れ替えを引き起こす球面回転を調べてみよう.

その前に簡単な幾何学的考察を行っておく. v_i, v_j の中点を M_{ij} と表わすことにすると, x -軸は M_{13}, M_{24} を通っている. 同様に, y -軸は M_{14}, M_{23} を通っており, z -軸は M_{12}, M_{34} を通っている. また, $z = c$ での切り口は c の値ごとに形の変化する長方形となって現われる.

さて, 正四面体の頂点を入れ替える球面回転の軸は, 頂点(たとえば v_1)を通るものと, ねじれの位置にある対辺の中点を結ぶもの(すなわち座標軸)とが考えられる. 後者はこの軸に関して 180° の回転となり計3個, 前者は軸の回りを 120° 回るものと 240° 回るものとが考えられ, 軸は4本あるから計8個の回転が現われる. さらに, 回転させないという恒等変換 I を加えた12個の変換 ($SO(3, \mathbf{R})$ の元) を 正四面体群 とよび \mathbf{T} で表わす.

正4面体群 T を考察しよう. z -軸のまわりを反時計回りに 120° 回転させる変換を S , M_{14} , M_{23} を通る軸すなわち y -軸のまわりの 180° 回転を T と名付ける. さらに x -軸のまわりの 180° 回転を U としておく.

T の元はそれぞれ頂点 v_1, v_2, v_3, v_4 の入れ換えを引き起こしているが, 異なる変換は異なる入れ換えをもたらしている. したがって T の元は頂点の入れ換えによって指定されてしまう. 4つの文字からなる集合 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ から自分自身への全単射を 4文字の置換 とよび, 4文字の置換の全体を4次対称群と呼んで S_4 で表わす.

上の考察は, T から S_4 への単射な写像が得られることを示している. この対応を正確に述べてみよう. 変換 S について考える. S においては

v_1 は入れ換わらない.

v_2 の席が v_4 の席になった.

v_3 の席が v_2 の席になった.

v_4 の席が v_3 の席になった.

と考えられる. このことをダイヤグラム

$$P(S) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

で表わし, 写像

$$1 \rightarrow 1$$

$$2 \rightarrow 4$$

$$3 \rightarrow 2$$

$$4 \rightarrow 3$$

と同一視する. つぎに変換 T を考えると同様にして

$$P(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られる. ここで S をやってから T をほどこす変換を $T \circ S$ で表わす. (それは行列としてのこの順番に作った積と一致する) 一方, 変換 $T \circ S$ に対応する置換 $P(T \circ S)$ が定まるがそれはつぎのような演算で計算できる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \underline{3} & \bar{4} \\ 4 & 3 & \underline{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{2} & 3 & \underline{4} \\ 1 & \bar{4} & 2 & \underline{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \bar{2} & 3 & \underline{4} \\ 4 & \bar{1} & 3 & \underline{2} \end{pmatrix}$$

以下同様にして, さまざまな T の変換に対する4文字の置換を計算することができる.

$$P(I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad P(U) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
 P(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & P(T \circ U) = \\
 P(S) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} & P(S \circ T) = \\
 P(S \circ U) = & P(S \circ T \circ U) = \\
 P(S^2) = & P(S^2 \circ T) = \\
 P(S^2 \circ U) = & P(S^2 \circ T \circ U) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

例 2.1 上の空欄を埋めよ

これらはすべて異なるゆえ， T の元をすべてとり尽くしている．すなわち， T の元はすべて S, T, U の組み合わせで表わされることが分かる．

*** まとめ ***

正 4 面体群 T の各元は，ひとつひとつ 4 文字の置換 と対応し，全体として S_4 の半分の 12 個の置換からなる集合 A_4 と 1:1 に対応する． T における回転の合成は， A_4 における置換の合成によって翻訳され，この意味で両者は同一視することができる．

*** さらに ***

他の正多面体についても，同様の議論ができる．実際正 8 面体群は S_4 全体と，正 20 面体群は 5 文字の交代群 A_5 と同一視されるが，幾何学的な翻訳のプロセスは上で見たものほどは単純でない．

3 集合・写像・一般的記号，幾何学が展開される空間とは？

N :自然数の全体

Z :有理整数環=整数の全体

Q :有理数体=有理数の全体

これらは既知のものと考え (この段階では実数はまだ定められていない)．

数学的对象の集まりで，その要素であるかどうかを確定するものを集合という． x が集合 X の要素であることを $x \in X$ と表わし， $x \notin X$ でその否定を表わす．

一般に，集合は要素を $\{ \}$ ではさんで表わす．空集合を \emptyset で表わし，ひとつだけの要素 x からなる集合も，それを集合と考えるときには $\{x\}$ で表わす．

[余談：ラッセルのパラドックス] ”自分自身を要素に含まないような集合すべての集まり” X を考えてみる． X 自身は X の要素であろうか？

もし、そうだとすると、 X の定義”自分自身を要素として含まない”に反する。そこで、 X 自身は X の要素でないとしよう。すると、 X は自分自身を要素として含まない集合であるから、 X の要素になってしまう！結局、 X 自身が X に属するかどうか決定できない。したがって、このような巨大な対象は数学で扱う集合とはみなせない。

[余談の余談] ラッセルのパラドックスは聴講生にはかなり難解だったみたいだ。アシスタントをしてくれた大学院生から教わった、ラッセルのパラドックスの変形を紹介する。

** 図書館のパラドックス **

可能な限りの世の中の図書目録をすべて考える。某 R 図書館では、自分自身がそのリストに載せられていない図書目録だけをすべてとり揃えてある（他の書物は何も置いていない）。今、自分自身がそのリストに載っていない図書目録をすべてリストアップした図書目録を考える。その図書目録は R 図書館に置いてあるか？

話をもとにもどして、どのくらいの大きさの集合ならば、このパラドックスにひっかかったりせずヤブくないのか？ 決定的な基準は今日でもない。このように、数学を論理体系として完結したものにしようとすると、いつも未確定な部分がのこされるが、それは数学基礎論の課題である。一般の数学者はその点に関しては楽観的に考えている。つまり、数学の形式的な体裁は、数学的事実を叙述するための道具と捉えている。

[集合と写像に関する定義と記号]

二つの集合 X, Y を考える。 X の任意の元が Y の元になっているとき、 X は Y の部分集合であるといい、このことを $X \subset Y$ で表わす。空集合 \emptyset はすべての集合の部分集合と考える。 $X \subset Y$ かつ $Y \subset X$ のとき X と Y とは等しいといい $X = Y$ でこのことを表わす。

$A, B \subset X$ とする。 $A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ または } x \in B\}$ と定め、これを A と B の和集合という。

$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ かつ } x \in B\}$ と定め、これを A と B のまじわりまたは共通部分という。

$A_i \subset X$ ($i \in I$) とする。（ I はある添え字集合を表わす）

$$\cup_{i \in I} A_i := \{x \in X : x \in A_i \quad \exists i \in I\}$$

と定める。また、

$$\cap_{i \in I} A_i := \{x \in X : x \in A_i \quad \forall i \in I\}$$

ここで \exists^* は “ある $*$ に対して” または “ \dots となる $*$ が存在する” という文章の省略記号である。

また \forall^* は “すべての $*$ に対して” という文章の省略記号である。

例 3.1 (i) $A_n = \{x \in \mathbf{Q} : -1/n \leq x \leq 1/n\} \subset \mathbf{Q}$ ($n \in \mathbf{N}$) のとき

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n = ?$$

(ii) $B_n = \{x \in \mathbf{Q} : 0 < x \leq 1/n\} \subset \mathbf{Q}$ ($n \in \mathbf{N}$) のとき

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} B_n = ?$$

(iii) $C_n = \{x \in \mathbf{Q} : n \leq x\} \subset \mathbf{Q}$ ($n \in \mathbf{N}$) のとき

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} C_n = ?$$

定義 3.1 2つの集合 X, Y を考える. X の各元 x に対して Y の元 $f(x)$ を対応させる規則が確定しているとき f は X から Y への写像であるという.

$$f(X) = \{f(x) \in Y : x \in X\}$$

を f による X の像とよぶ. また, $y \in Y$ に対して

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$$

を y の f による 原像という.

写像 $f : X \rightarrow Y$ に対して, $f(X) = Y$ となるとき f は全射であるという. 各 $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y)$ がただかただ一つの要素からなるとき f は単射であるという. 全射かつ単射な写像を全単射という.

例 3.2 以下の写像について単射, 全射, 全単射となっているかどうか判定せよ.

(i) $f_1(x) = 2x$ で定まる写像 $f_1 : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$

(ii) $f_2(x) = 2x$ で定まる写像 $f_2 : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$

(iii) $f_3(x) = x^2$ で定まる写像 $f_3 : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$

次の事実を証明せよ.

(iv) \mathbf{N} から \mathbf{Q} への全単射が存在する.

実数体 \mathbf{R} について

実数の全体 \mathbf{R} は \mathbf{Q} を含む集合として次のように定義される.

2つの実数 x, y に対して, 和 $x+y$ と積 $x \cdot y$ が定まっていて以下の性質が成り立つ:

(I)

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$

$$x+0=x$$

x に対して $x+x'=0$ となる x' が存在する.

(この x' を $-x$ と表わす)

$$x+y=y+x$$

(I')

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$x \cdot 1 = x$$

$x \neq 0$ ならば $xx^* = 1$ となる x^* が存在する.

(この x^* を x^{-1} と表わす)

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$$

以後, $a \cdot b$ を ab と略記する.

(II)

任意の2元 $a, b \in \mathbf{R}$ に対して $a < b, a = b, a > b$ のいずれかの関係が成り立ち,

$$a < b, b < c \text{ ならば } a < c$$

$$a < b, c \in \mathbf{R} \text{ ならば } a + c < b + c$$

$$a < b, c > 0 \text{ ならば } ac < bc$$

$$a < b \text{ ならば } -a > -b$$

(III)

$$a, b \in \mathbf{R} \text{ のとき } a > 0 \text{ ならば } \exists n \in \mathbf{N}; b < na$$

(IV) (実数の連続性の1表現: 区間縮小法の原理)

閉区間列 $I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$ は縮小列, すなわち $I_n \supset I_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とすると,

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} I_n \neq \emptyset$$

以上 (I)~(IV) の性質をもつ集合 (構造体) を実数体と定義し, これを \mathbf{R} で表わす. 実数体の元を実数という.

数学的な論点としては, そのような数学的対象の存在を確認すること, またそのような存在は”本質的に”ただひとつしかないこと, また, それはどのように構成されるのかを論じる必要がある.

性質 (I)~(III) は有理数体 \mathbf{Q} に対しても成立するから, (IV) がとりわけ重要である. これは, 直観的には \mathbf{R} が隙間なく分布していることを表現しているのである.

ここではそれらの議論は割愛し, 以上の性質を既定のものとして認めて議論する.

[注意] 任意の実数 a は無限小数

$$a = a_0.\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n\cdots$$

に展開される. これは, 縮小区間列

$$I_n = \left[a_0 + \frac{\varepsilon_1}{10} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{10^n}, a_0 + \frac{\varepsilon_1}{10} + \cdots + \frac{\varepsilon_n + 1}{10^n} \right]$$

から定まる数である.

実数体の直積空間

集合 X と集合 Y の直積を

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

によって定義する. これによって

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$$

一般に

$$\mathbf{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R} \quad i = 1, \dots, n\}$$

が定義される. これらが, 数学で扱われる (ユークリッド) 空間であり, とくに \mathbf{R}^3 が, 多面体たちが論じられる空間なのである. それは, 現実の空間ではなく, 思弁的に構成された架空の世界である.

[問題 3]

[3.1] $A = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ から $B = \{1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ への全単射を定めよ.

[3.2] 半開区間 $(0, 1]$ から開区間 $(0, 1)$ への全単射を構成せよ.

[3.3] \mathbf{N} から \mathbf{R} (または開区間 $(0, 1)$) への全単射は存在しないことを証明せよ.
(背理法で考えよ)

4 オイラーの等式の証明

第1節で述べたオイラーの等式 (Theorem 1.1) を平面図形の問題に言い替えて証明する. そのために, 以下に述べる”押しつぶし操作”を行う.

正4面体の場合を考える. その一つの面を底面と考え, (x, y) -平面上に置く. この立体図形を (x, y) -平面に射影すると, 頂点が底面の中心に落ちていて, 各稜線はそこから底面の3角形の各頂点に伸びる線分となっている. こうして得られた平面図形では, 平面が3個の有限な領域と, 外側の無限領域と計4つ現われ, それらを区切る境界線が6本, 3個以上の境界線が集まる点すなわち頂点が4点となる. したがって, 領域の数 s , 境界線の数 e , 頂点の数 v として

$$s - e + v = 2$$

が成り立っている.

一般の凸多面体の場合には, 一つの面を底面としてそれを (x, y) -平面上におき, 空間の z -座標を用いて $z \geq 0$ なる点 (x, y, z) はある値 K によって

$$x' = x(1 - z/K), y' = y(1 - z/K)$$

などと変形して, (x, y) -平面からの高さに応じて圧縮してゆく. このとき底面は不変であるから, 適当な K の値によって射影がすべて底面に含まれるように変形される. この変形操作で, 問題にしている面, 辺, 頂点の勘定はもちろん変わらない. このような, 頂点と辺とのつながり方だけが反映されるように変形と平面への射影を組み合わせたものを, 凸多面体での押しつぶし操作とよぼう.

例 4.1 正8面体を押しつぶし操作した平面図形を求めよ.

さらに考察を続けるために, 次の定義を行う.

平面上に置かれた有限個の頂点を有限個の線分で結んだ図形を平面グラフという. ただし, 線の両端は必ず頂点になっているものとし, 点を結ぶ線は直線でも曲線でもよ

い。線どうしは頂点以外の点を共有しないものとする。幾つかの線で囲まれていてそれ以上分割されない図形をこの平面グラフの領域とよぶ。平面グラフには必ず一個の無限領域がある。無限領域以外に領域を持たない平面グラフを単純であるという。また、全体がひとつながりになった平面グラフを連結であるという。

上の押しつぶし操作を経て、オイラーの等式はつぎの平面グラフの定理の証明に帰着される。

定理 4.1 連結な平面グラフ G において、その領域の数 r 、境界の数 b 、頂点の数 p とすると、

$$r - b + p = 2$$

が成り立つ。

例 4.2 幾つかの連結な平面グラフで上の事実を確認する。

まず簡単な場合を考察しておく。

命題 4.1 単純連結な平面グラフに対しては、上の定理が成立する。すなわち

$$-b + p = 1$$

である。

証明も頂点の個数についての帰納法によって明らかであろう。

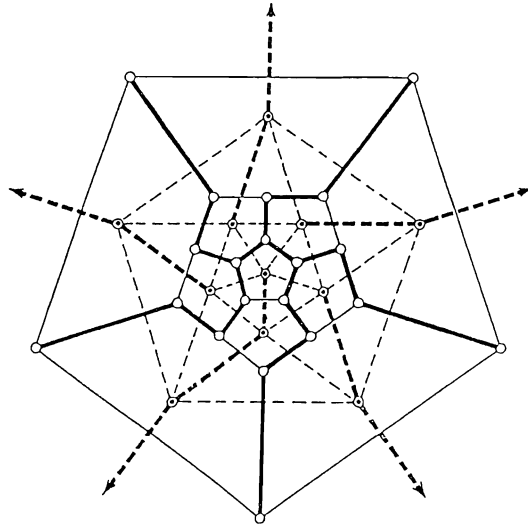
本定理の証明は次のように行う。

連結な平面グラフ G の各有限領域の境界をひとつずつ消去して連結単純グラフ G_1 にする。グラフの外側には水が満たされているとして、各部屋の壁をひとつずつ取り壊して、すべての部屋に水が浸水するようにしたのである。つぎに、各領域の内部に頂点を定め、これらを、消去された境界を通して結んでゆく。このようにして新たに連結単純領域 G_2 がつくられる。 G_1 の頂点の数 $p_1 = p$ である。 G_1 の境界の数を b_1 とする。 G_2 の頂点の数 $p_2 = r$ であり、境界の数 b_2 とすると、つくり方から、 $b_1 + b_2 = b$ である。これと、上の命題とから、

$$2 = (-b_1 + p_1) + (-b_2 + p_2) = -b + p + r$$

となり、証明が完成する。

正12面体での図を参考に挙げておく (Coxeter の教科書から借用).



5 置換と対称群

4人で引くあみだくじをつくってみよう. くじの上下両端に数字1,2,3,4を書き込んで, 間に”はしご”を渡して各人のあたり番号をつくる方式でつくることにする. うまくはしごをかけてやれば, どのような組み合わせのあたりかたでも思い通りにつくることができる. いくつかの例をやってみよう.

n 個の要素からなる集合 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ から自分自身への全単射を n 文字の置換 という.

n 文字の置換

$$\sigma : \begin{cases} 1 \rightarrow i_1 \\ 2 \rightarrow i_2 \\ \dots \\ \dots \\ n \rightarrow i_n \end{cases}$$

を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

のように表わす.

2つの n 文字の置換 σ, τ に対して

σ をやってから τ をほどこすことを $\tau\sigma$ で表わし, σ と τ の積という. 上の σ に対して逆写像

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 \rightarrow 1 \\ i_2 \rightarrow 2 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ i_n \rightarrow n \end{array} \right.$$

で与えられる置換を σ の逆置換とよび σ^{-1} で表わす. 恒等写像で与えられる置換を恒等置換と呼び, id で表わす.

例 5.1 置換の積をいくつか計算してみる.

n 文字の置換全体を S_n で表わす. S_n は置換の合成に関して閉じていて次の性質を持つことが分かるであろう. このことにより S_n を n 次対称群 という:

- 1) $(\sigma\tau)\lambda = \sigma(\tau\lambda)$ for $\sigma, \tau, \lambda \in S_n$
- 2) $\sigma 1 = 1\sigma = \sigma$ for $\forall \sigma \in S_n$
- 3) $\forall \sigma \in S_n$ に対して $\sigma\lambda = 1$ となる λ すなわち σ^{-1} が存在する.

この性質を一般化して, 群という概念を定義する. ある集合 G に対して, その任意の2元 a, b の間の演算 ab によって G の元が定まっているものとする. この演算が次の性質をみたすとき G を群とよぶ.

- 1) (結合法則) $(ab)c = a(bc)$ for $a, b, c \in G$
- 2) (単位元の存在) G に特別な元 (単位元という) e が存在していて

$$ae = ea = a \quad \text{for } \forall a \in G$$

3) (逆元の存在) $\forall a \in G$ に対して $aa^* = e$ となる a^* (a の逆元) が存在する. これを a^{-1} で表わす.

[考察] 群は数学のさまざまな対象のもつ最も基本的な構造 (の一つ) であり, その基本構造だけを抽象化した対象である. 群の例をいくつかすぐに挙げる事ができる.

*** 対称群の性質 ***

2つの文字 (i, j) を入れ換え, その他の文字を変えない置換を互換とよび, (i, j) で表わす.

命題 5.1 すべての置換は有限個の互換の積として表わされる. ひとつの置換 σ を表わす表わし方はいく通りもあるが, そのときに用いられる互換の個数の偶奇は一定となる. それに応じて σ は偶置換または奇置換と呼ばれる.

証明はここでは割愛する.

〔考察〕あみだくじは, "1, 2, ..., n の席にいたものがそれぞれ, i_1, i_2, \dots, i_n の席に動く" ものと考え, これを置換 σ と同一視する.

すると, 上から順に見て行くと, はしごが次々に現われる. ひとつひとつのはしごは, 渡されている2つの席の互換であるから, ひとつのあみだくじは互換の積として表わされた置換と見なされる.

例 5.2 あみだくじによって4文字の置換を互換の積に表わす実例

上の命題の応用:

どのような置換でも, あみだくじによって実現することができる.

定義 5.1 $A_n = \{\sigma \in S_n : \text{signature}(\sigma) = 1\}$ を n次交代群という.

〔由来〕 n 個の変数 x_1, \dots, x_n の多項式 $f(x_1, \dots, x_n)$ に対して 置換 $\sigma \in S_n$ の作用を

$$f^\sigma(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

で定める. $x_1^2 + \dots + x_n^2, x_1 \cdots x_n$ のように, n 文字の置換すべてに関して不変な多項式を対称式という. また,

$$(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)(x_2 - x_3) \cdots (x_{n-1} - x_n)$$

のようにすべての偶置換で不変な多項式を交代式という. 対称群, 交代群という名は対称式, 交代式から由来している.

〔話題〕対称群を利用して3次方程式の解法を見つける: 実数係数の3次方程式

$$X^3 + a_1 X^2 + a_2 X + a_3 = 0 \tag{1}$$

を考える. $X' = X + \frac{1}{3}a_1$ とおくと X' について2乗の項のない方程式となるから, 最初から

$$X^3 + a_2 X + a_3 = 0 \tag{2}$$

を考察する. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ をこの方程式の 3 根とする (α_1 は実根としておく). $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$ として

$$\begin{aligned}\rho_1 &= A = \alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3 \\ \rho_2 &= \omega A \\ \rho_3 &= \omega^2 A \\ \rho_4 &= B = \alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3 \\ \rho_5 &= \omega B \\ \rho_6 &= \omega^2 B\end{aligned}$$

とおき, ρ_1, \dots, ρ_6 を根とする 6 次方程式 (E) を考える. このとき,

$$\alpha_1 = (A + B)/3, \alpha_2 = (\omega^2 A + \omega B)/3, \alpha_3 = (\omega A + \omega^2 B)/3$$

となる. したがって, (E) が解ければ (2) の根が分かる. 計算によって (E) は

$$Y^6 + 27a_3Y^3 - 27a_2^3 = 0 \tag{3}$$

となり, これから

$$\begin{aligned}A &= 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-a_3 + \sqrt{a_3^2 + \frac{4}{27}a_2^3})} \\ B &= 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-a_3 - \sqrt{a_3^2 + \frac{4}{27}a_2^3})}\end{aligned}$$

が得られる. 以上から次の公式が導かれる.

定理 5.1 (カルダノ・タルタリアの公式, 1535年)

$X^3 + a_2X + a_3 = 0$ の根は上の A, B を用いて

$$\frac{1}{3}(\omega^k A + \omega^{2k} B) \quad (k = 0, 1, 2)$$

で与えられる. ただし, 3 乗根は複素数でとられ $A + B$ が実数となるように定める.

6 線形変換

\mathbf{R}^n において単位ベクトル

$$\vec{e}_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_i = {}^t(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = {}^t(0, \dots, 0, 1)$$

を定めておく. 任意のベクトル $\vec{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ は

$$(\vec{x} =) x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

と表わされる (ただし t は転置を表わす). ここで, 上の式の右辺は左辺の式を意味するものとして定義される.

\mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への写像 f で, 任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ 任意の $c \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ f(c\vec{x}) &= cf(\vec{x}) \end{aligned}$$

をみたすものを線形写像という. $n = m$ のときは線形変換と呼ばれる.

定理 6.1 \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への写像 f を

$$f(\vec{x}) = {}^t(f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) = {}^t(y_1, \dots, y_m)$$

と書いたとき, 各 $f_i(\vec{x}) = f_i(x_1, \dots, x_n)$ が定数項を含まない x_1, \dots, x_n の一次関数になっているとき f は線形写像であり, 逆に線形写像はそのようなものに限られる.

その証明] ここでは割愛する.

$n = m = 2$ の場合, このような写像は

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = f_2(x_1, x_2) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

の形で与えられる. このとき

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

を f の表現行列という. すると, f は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と表わされる.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

に対して、線形変換 $\vec{x}' = A\vec{x}$, $\vec{x}'' = B\vec{x}'$ を合成すると

$$\vec{x}'' = (BA)\vec{x}$$

が得られる。ここで BA は行列の積

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

を表わす。

定義 6.1 $M(m, n; R)$ で R に要素をもつ (m, n) 型行列全体を表わす。また、 $M(n; R)$ で R に要素をもつ n 次正方行列全体を表わす。

$A = (a_{ik}) \in M(m, \ell; R)$, $B = (b_{kj}) \in M(\ell, n; R)$ の積 AB は

$$AB \text{ の } (i, j)\text{-成分} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$$

によって定義される。 $M(n; \mathbf{R})$ の元で (i, i) -成分 ($i = 1, \dots, n$) がすべて 1, (i, j) -成分 ($i \neq j$) はすべて 0 となっているものを単位行列とよび $E_n = E$ で表わす。

定義 6.2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して、 $\det A = ad - bc$ と定め A の行列式という。これは、単位正方形を A によって写像して得られる平行 4 角形の面積である。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (5)$$

に対しては、

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (6)$$

と定める。これは、単位立方体を A によって写像して得られる平行 6 面体の体積である。

逆行列と連立 1 次方程式

正方行列 A に対して、 $AB = BA = E$ となる行列 B が存在するとき、 B を A の逆行列とよび、 B を A^{-1} で表わす。このとき、行列 A を正則行列とよぶ。

定理 6.2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して A^{-1} が存在するためには, $\det A \neq 0$ となることが必要十分である. このとき

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる. 同様に, 3次正方行列 A に対して A^{-1} が存在するためには $\det A \neq 0$ となることが必要十分である.

定義 6.3 ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

に対して

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

と定めて \vec{a}, \vec{b} の内積 という. また,

$$\sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = |\vec{a}|$$

とおき, $|\vec{a}|$ の長さという.

命題 6.1 \vec{a}, \vec{b} のなす角を θ を $0 < \theta < \pi$ の範囲で定めると,

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

となる.

また,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

を \vec{a} と \vec{b} の外積という.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}$$

となり, その値は \vec{a}, \vec{b} のつくる平行4辺形の面積に適当に符号をつけたものと等しい.

さらに定義と (6) 式から, ベクトル $\vec{c} = {}^t(z_1, z_2, z_3)$ に対して

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$$

となることがわかる.

命題 6.2 $A, B \in M(n; \mathbf{R})$ に対して

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

が成り立つ.

定義 6.4 すべての $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ に対して $(f(\vec{a}), f(\vec{b})) = (\vec{a}, \vec{b})$ となる線形変換 f を直交変換, その表現行列を直交行列という. n 次直交行列の全体を $O(n; \mathbf{R})$ で表わす. また,

$$SO(n; \mathbf{R}) = \{A \in O(n; \mathbf{R}) : \det A = 1\}$$

と定める.

定理 6.3 $A \in M(3, \mathbf{R})$ が直交行列であるためには, ${}^tAA = E$ となることが必要十分である.

例 6.1 平面上の回転の合成から 3 角関数の加法公式が導かれる.

例 6.2 A が 3 次正則行列ならば連立一次方程式 $A\vec{x} = \vec{c}$ の解がただひと組定まり, $\vec{x} = A^{-1}\vec{c}$ で与えられる.

7 複素数の導入

定義 7.1 $X = \mathbf{R}^2$ の任意の 2 元 $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2)$ に対して

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ \alpha \cdot \beta &= (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)\end{aligned}$$

によって和と積を定義する. このような演算を定めた X を複素数体と呼び \mathbf{C} で表わす. また, その元を複素数という. $A = \{(a_1, 0) \in X\}$ は自然に実数体 \mathbf{R} と同一視される. 以後, この同一視を断わりなしに用いる. また積の記号 \cdot を省略する.

$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ となる. この元を i で表わす. すると一般の複素数

$\alpha = (a, b)$ は

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$$

と書かれる。以後この表記によって複素数を表わす。

複素数 $z = x + yi$ を座標平面上の点 (x, y) によって表わす。このときの平面を複素平面とよび、これも \mathbb{C} で表わす。このときの x を表わす座標軸を実軸、 y を表わす座標軸を虚軸という。

複素数 $z = x + iy$ に対して、 $\bar{z} = x - iy$ を z の共役複素数という。また、 $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ を z の絶対値という。 z が 0 でなければ、ある角度 θ によって $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表わされる。この角度 θ を z の偏角とよび $\arg z$ で表わす。偏角は z に対して一通りではなく、 $2\pi n$ ($n = 1, 2, \dots$) だけのとりかたの自由度が残されている。

命題 7.1

- (i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- (ii) $||z_1| - |z|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- (iii) $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対して

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)),$$
 とくに $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
 $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$

命題 7.2 1 の n 乗根はつぎの式で与えられる n 個である。

$$\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

8 鏡映群概説

定義 8.1 \mathbb{R}^n におけるベクトル $\alpha (\neq 0)$ をとってくる。 \mathbb{R}^n の変換

$$\sigma_\alpha : x \mapsto x - 2 \frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

を α に関する鏡映という。鏡映は線形変換でありその行列を M_α としておく。

鏡映についての以下の性質は定義から容易に導かれる。

- (1) $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$
- (2) $(x, \alpha) = 0$ なら $\sigma_\alpha(x) = x$ となる。

(3) σ_α は直交変換で $\sigma_\alpha^2 = I$ かつ $\det \sigma_\alpha = -1$.

*** \mathbf{R}^2 における鏡映と回転の関係 ***

$\alpha = {}^t(\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2})$ のとき,

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} & 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} & 1 - 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

となる. これを $\beta = {}^t(0, 1)$ に関する鏡映 σ_β と合成すると

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = M_\alpha M_\beta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となり, 角度 θ の回転が得られる.

$\theta = \pi/m$ ($m \geq 3$) のとき,

σ_α と σ_β の合成で得られる変換たちは, 正 m 角形の回転による重ね合せ (計 m 個) と, 頂点または辺の中点を通る軸での折り返し (計 m 個) との総計 $2m$ 個の変換の集合となる.

これらは群をなす. これを正 2 面体群とよび $I_2(m)$ で表わす. これは正多角形を裏表のある煎餅状の”立体”とみての形状を保つ直交変換たちと対応する.

例 8.1 \mathbf{R}^3 における鏡映のいくつかの例

[余談]

このように鏡映から生成される有限群のことを有限鏡映群という. 一般には, あらかじめ有限個の鏡映を用意しても, それらで生成される変換たちは有限個では済まない. 3次元の鏡映を有限個用意すると, その鏡映面で仕切られた”鏡の部屋”がつけられる. その部屋に入ると, ふつう自分の姿が無限に続いているだろう. また, 2個の鏡映から生成される鏡映群は合わせ鏡の像となって, これも一般には無限に像が現われる. したがって, うまい配置に鏡を置かなければ有限鏡映群は現われない. では, どのような鏡映を用意しておくとも有限鏡映群になるのだろうか. それは興味ある問題であるが, 今日完全に決定されている.

さらに鏡映群は Lie 群の分類, 特異点論, 超幾何関数論とも深い関係があり, 今日の数学と直接つながっている.

*** 3次元での有限鏡映群 ***

空間内の4点

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を考える。これらは、すでに考察した正4面体の頂点たちであった。さらに

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおき、これら $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に関する鏡映を、それぞれ M_1, M_2, M_3 とする。 M_1 は

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

で定まる頂点の入れ換えを引き起こし、 M_2, M_3 はそれぞれ

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

によって定まる入れ換えを引き起こす。 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ たちのさまざまな組み合わせで得られる置換すべての集合を、システム $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ によって生成される群とよび

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle$$

で表わす。この”によって生成される群”という言葉は、他の場合にも同様の意味で用いる。

命題 8.1

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle = S_4$$

が成り立つ。

証明は、これらから6個すべての互換がつけられることを見ればよい。

この命題によって、鏡映 M_1, M_2, M_3 によって生成される変換群 G は有限鏡映群となり、それは S_4 と1:1対応している(同型である)ことを示している。したがって、

命題 8.2 $\langle M_1, M_2, M_3 \rangle =$ 正4面体の形状を保つ直交変換全体
が成り立つ。

証明] 左辺は右辺に含まれるし、右辺の元は頂点の入れ換えを生じ、頂点を動かさなければそれは恒等変換であることから示される。

*** 有限鏡映群の分類と正多面体 ***

ここでつぎの事実を用いる：

\mathbb{R}^n における有限鏡映群 W は高々 n 個のベクトル $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ による鏡映

$$M(\alpha_1), \dots, M(\alpha_n)$$

から生成される. もし, n 個より少ない個数の鏡映で生成されるなら, W はより低い次元での鏡映群に還元される. さらに, W を定めるベクトル α_i, α_j たちのなす角度 θ_{ij} は

$$\cos \theta_{ij} = -\cos \frac{\pi}{m_{ij}} < 0$$

の形になるようにとれる. ここで m_{ij} はある自然数である.

定義 8.2 上で述べたベクトルたち

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

のことを有限鏡映群 W の Simple System と呼ぶ.

Simple System はそれらの交角から定まり, それらは, 数 m_{ij} たちで決定される.

例 8.2 正 4 面体から定まる鏡映群 G_4 の場合に Simple System $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ から命題 6.1 を用いて m_{ij} を計算してみよう. (こたえ: $m_{12} = m_{23} = 3, m_{13} = 2$)

また, 正 6 面体についても同様の考察ができる. 実際

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと, これらに関する鏡映によって生成される変換群 G_6 は

$$v_1^\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, v_2^\pm = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, v_3^\pm = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, v_4^\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

を頂点とする正 6 面体の形状を保つ直交変換全体と一致する. これから $m_{12} = 3, m_{13} = 2, m_{23} = 4$ を得る.

Simple system は交角 θ_{ij} たちで決まるのであったが, さらにそれを視覚的に明確にするために次の方法でグラフ化する:

まず, 各ベクトル α_i をまるで表わす. さらに, α_i, α_j をつぎのルールで線分で結ぶ:

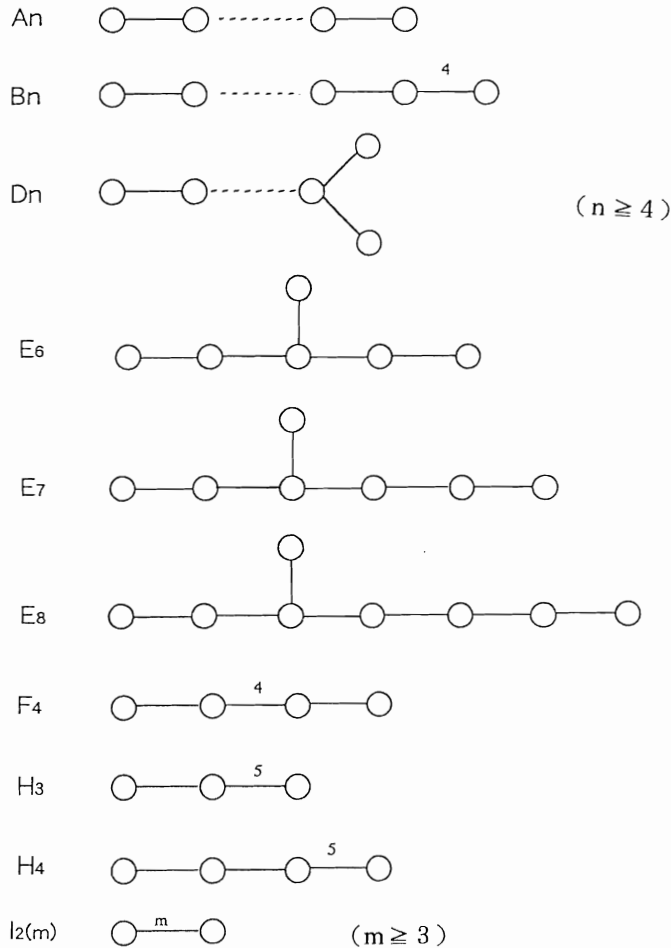
$m_{ij} = 2$ のとき, すなわち α_i, α_j が直交するとき, 結ばない.

$m_{ij} = 3$ のとき, 線分で結ぶ.

$m_{ij} \geq 4$ のとき, 線分で結んでその上に数 m_{ij} を書き込む. このようにして得られたグラフを有限鏡映群 W の Coxeter Graph という.

定理 8.1 (有限鏡映群の分類定理)

有限鏡映群に対応する Coxeter Graph の一覧表は次で与えられる :



例 8.3 (1) G_4 の Simple system $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ に対しての Coxeter Graph

(2) G_6 の Simple system $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ に対しての Coxeter Graph

[考察] 第1節で正多面体の決定を行ったが、そのときの決め手は Theorem 1.1 のオイラーの等式であった。では、 $\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^5$ 等の高次元の空間での”正多面体”を決定するにはどのようにしたらよいのだろうか。オイラーの等式の高次元版は存在するが、次元が高くなると幾何学的な図形を定めるための条件は複雑化し、その等式から得た情報だけで正多面体を決定してゆくことはできない。

3次元の場合にもどって考えたとき、正多面体は、正多面体群という空間の変換群で不変となるような対称性を持った図形として特徴づけられることに注目する。そして、正多面体群はすべて有限鏡映群と対応している。したがって、 \mathbf{R}^3 における正多面

体を決定することは、3個の元で生成される有限鏡映群を決定することから導かれる(だろう)。そして、高次元空間 \mathbf{R}^n の正多面体も n 個の元から生成される有限鏡映群を決定すれば分かる。

このような展望のもとに、有限鏡映群の Coxeter Graph の一覧表を見てみよう。

まず、長さ2のグラフは $I_2(m)$ のみである。これらは、正 m 角形あるいは、それを表裏はり合わせた正2面体に対応する。つぎに、長さ3のグラフは A_3, B_3, H_3 の3種のみである。 A_3 は Example 8.3 で見たように、正4面体に対応し、Example 8.3 で見たように、正6面体から B_3 が導かれる。また正8面体は、正6面体の各面の中心を頂点として得られる双対の図形であり、この2つが B_3 に対応する。同様にして H_3 は正12面体および正20面体に対応する。

このようにして、Coxeter Graph の一覧表の中には、高次元正多面体の秘密が書き込まれている。つまり、あらゆる次元の可能なかぎりの正多面体の作り方がこの表一枚の中に指示されている！

では、実際 \mathbf{R}^4 ではどのような正多面体が存在できるのかを調べよう。長さ4のグラフは、 A_4, B_4, D_4, F_4, H_4 の5種類である。これらの中で、 D_4 は枝分かれしている。この枝分かれによって、図形の対称性が下がり、このグラフに対応する図形は正多面体にはならない。また、 A_4, F_4 は左右対称でこのとき双対はもとの図形と一致する。 B_4, H_4 では双対が異なった図形として現われる。このようにして、6種の4次元正多面体の存在が確認される。さらに、5次元以上になると、枝分かれのないグラフは A_n, B_n 以外にはなく、錐体と、高次元立方体およびその双対の3種類のみになっていることも分かる。

このように、変換群的考察によって、素朴な方法では到達できない数学的世界の探索が楽しめるのである。

9 不変式と特異点

この節の内容は、拙論「数学の技法としての本歌取り」(数学48巻4号(1996))中の例と重複するので割愛する。ただ、単純特異点の分類が対応する Coxeter Graph = Dynkin Graph で定まること、さらに、特異点のグラフ $A_2, A_3, D_4, D_5, E_6, E_7, E_8$ は8次元までのパッキング問題の最良解を与えるもので、トピック講義の組み合わせ論の話題とも結び付いて、聴衆の興味を引いたことを付け加えておく。

(しが ひろのり 千葉大学理学部)