おもしろ数学教室講演

関孝和の出生地とされる群馬県藤岡市から, 日本数学会関孝和賞受賞者に対して, 併せて市として顕彰したいとの申し出がありました. 会報 82 号等で既にお知らせしたとおり, 日本数学会としてこの申し出をお受けすることに致しました. この合意に基づいて, 昨年 11 月 9 日に東京大学で開催された日本数学会 50 周年記念講演会での日本数学会関孝和賞の授賞式に際し, 群馬県藤岡市による顕彰が行われました. 詳細は「数学通信」第 1 巻 4 号でお知らせした通りです.

これに先立って藤岡市から, 当地の中学生を対象として数学の講演会を開催したいので講師を派遣してほしい, との申し出がありました. この申し出についても日本数学会としてお受けすることに決め, 理事長が藤岡市主催の「おもしろ数学教室講演」で,「大きな数はどれくらい大きいか」と題する講演を行いました. 昨年 9 月 8 日の日曜日, 当地の中学生と父兄を中心に 600 人が参加し, なかなか盛大な講演会でありました.

このような講演会が行われたことは, 会報 83 号に広報委員会からの報告があります. この記事を読まれた会員の方から,「話の内容はどんなものであるか」教えてほしい, との問い合わせもありました. また, このような市民講演会は今後も続けられるものでありますから, ここに講演内容の記録を掲載します. ただし, 以下の記事は準備した原稿をもとに, 対象を中学生と見て再構成したものであり, 実際の講演とは細部が異なっている部分もあります.

講演に際しては, 黒板やＯＨＰは使わず, 要点を書いた 2 枚のメモを全員に配布して, これを参照しながら話を進めました. ($\star$) の付いている式, 文字や数字はレジュメに書いたものです.

> 個人的には高校生を対象とする講演は経験がありましたが, 一般の中学生相手となるとどのような内容にしたらよいか, 大いに悩み, 結局大きな自然数の話をしました. といっても, 整数論の入門をはなしたわけでは決してありません. 中学校 1 年生は, 素数についてもきちんと習っていないので, それでも十分難しかったようです. 時間の都合もあり, 素数についてはあまり話ができませんでした.
>
> 私の経験不足のせいで参加した中学生に迷惑をかけたかもしれませんが, 今後の教訓にはなったと思います.

前理事長　岡本和夫

大きな数はどれくらい大きいか

岡本　和夫

1　大きな数の表し方

これから大きな数の話をします. まず, 数の読み方や書き方について考えてみましょう. たとえば, 今年は

$$1996 \quad \text{年} \tag{$\star$}$$

です. これを日本式に漢字で書けば

$$\text{一千九百九十六}\quad\text{年} \tag{$\star$}$$

となります. 全然違う数字の書き方もあって, 昔のヨーロッパでは

$$\text{M CM XC VI}\quad\text{年} \tag{$\star$}$$

という記号で数字を表していました. M は千, C は百, X は十, V は五, I は一です. 小さい数が右に並ぶときは 2 つの数を加えます. だから VI は, $5+1=6$ です. 逆に小さい数が左にあるときは, 大きい数から小さい数を引いた値を取ります. つまり, CM は $1000-100=900$, XC は $100-10=90$, というわけです. M CM XC VI は, $1000+900+90+6=1996$ となるわけです. 最近でもこの数字は時計などに使うことがありますからみなさんも見たことがあるでしょう.

もう少し大きな数を書いてみましょう.

$$1000,0000,0000,0003 \tag{$\star$}$$

は, 日本語で読むと「千兆三」です. 「船長さん」ではありません. 日本では数字を 4 つずつくぎって, 百, 千, 万, その後は億, 兆, と続くことは良くご存じでしょう. では, 「千兆三」を英語ではどう読むのでしょうか.

$$\text{one quadrillion three} \tag{$\star$}$$

と言います. みなさんもご存じの通り, 英語では数字を 1,000,000,000,000,003 のように, 3 つずつ区切って書きます. 百と千は

$$\text{hundred, thousand} \tag{$\star$}$$

ですがその後は, 万, 億, ではなくて, 3 桁ごとに新しい位の名前を作り

$$\text{million, billion, trillion, quadrillion, quintillion, } \ldots \tag{$\star$}$$

とします. 日本語に直すと順に, 百万, 十億, 一兆, 千兆, となります. 日本の数字の読み方はずっと昔中国から習ったものですがなかなか便利ですね.

ところで, 次の数はいくつでしょう？

$$999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999 + 1 \tag{$\star$}$$

藤岡市は関孝和の生まれたところとして知られていますが, その関孝和の時代にはこのような大きな数の読むために, 億や兆のずっと先まで位取りの名前が準備されていました. それによると, この数の 9 がいっぱい並んでいるところは

九千九百九十九無量大数	九千九百九十九不可思議	九千九百九十九那由他
九千九百九十九阿僧祇	九千九百九十九恒河沙	九千九百九十九極
九千九百九十九載	九千九百九十九正	九千九百九十九澗
九千九百九十九溝	九千九百九十九穣	九千九百九十九杼
九千九百九十九垓	九千九百九十九京	九千九百九十九兆
九千九百九十九億	九千九百九十九万	九千九百九十九　(⋆)

と読みます. でも, これでおしまいですから私が書いたように, この数に 1 を加えたら, もう読めなくなってしまいますね. 昔はそんなに大きな数は必要なかったのでしょう.

> 塵劫記の話はしませんでしたが, この東洋式位取りを紹介したときに, 「千載というのを数と見れば, 千載一週というのは本当に滅多に無いことである」という主旨の話をしました. しかし, 千載一週という熟語を知っているのは父兄だけのようでした.

上で紹介した位に出てくる, 「那由他」, 「阿僧祇」, 「恒河沙」という不思議な言葉は, 仏教のお経から取った名前で, とにかく大きな数を表しています. たとえば, 「恒河沙」というのはインドのガンジス河の砂の数を表すんだそうです.

2 小さい数の表し方

大きな数が出てきたので, 今度は小さい数についても位取りの名前を紹介しましょう. 私の言う小さい数というのは負の数ではありません. 1 より小さい正の数のことです.

次の数はいくつ?

$$3+\frac{14159265358979323846 2}{10000000000000000000000} \qquad (\star)$$

小数を使ってかくと, 3.14159265358979323846 2 となります. 3 の後の小数点以下の部分を, 日本式に読んでみましょう.

一分	四厘	一毛	五糸	九忽	二微	六繊	
五沙	三塵	五埃	八渺	九莫	七模糊	九逡巡	
三須臾	二瞬息	三弾指	八刹那	四六徳	六空虚	二清浄	$(\star)$

となります. 「一分四厘」というのは, 野球の勝率や打率を言うときに, 今でも使われていますね.

> $\frac{1}{10}$ が 1 分ですが, 野球の例を挙げたので, 「三割一分四厘」の「割」とは何か, という質問がありました. この場合, 「割」が単位であり, その $\frac{1}{10}$ が「分」, となっている, というのが私の説ですが本当の所は良く知りません. ご存じの方はご教示下さい.
>
> ところで, ここでも「刹那的というのはずいぶん短い時間である」ということを懲りもせずに言いました. 「刹那的」という単語も, 中学生にはなじみのない言葉のようでした.

ずっと小さい数の位取りの名前も, あまり使う必要は無いようですね. 確かに小数というのは便利な数の表し方だとは思いませんか. 大きな数の大きな位を表す「那由他」という言葉や, 小さい数の位を表す「弾指」という言葉を知らなくても困ることはありません. でも, 昔の人たちがどのように数を読んでいたかを知ることは楽しいことです.

大きな数や小さい数を表すことが本当に必要ないか, というと, 実はそうではありません. 今度は自然の中から大きな数と小さい数を探してみましょう.

3　自然の中の大きな数と小さい数

光は 1 秒間に地球を 7 周り半する，ということを聞いたことがあるでしょう．光の速さは，秒速で大体

$$30000000000 \quad \text{メートル}$$

です．もう少し正確な値は後で紹介します．光の速さは，自然を調べる学問，つまり自然科学で大切な量です．このような大切な数を表すときに，いちいち 11 個も数字を書いているのでは大変です．そこで，私達はこの数を 3×10^{10} と表します．この意味は，3 の後に，0 が 10 個並んでいる，ということです．別の例を挙げましょう．250000000000 は，この表し方では 2.5×10^{11} となります．

鉄でも空気でも，物質は原子という小さい物の集まりで出来ています．この原子という小さい粒の大きさは大体

$$0.00000000005 \quad \text{メートル}$$

です．この数をもう少し簡単に表すのに，5×10^{-11} という書き方をします．これは，0. のあと，小数点以下に 0 がずっと並んでいて，11 番目に初めて 5 が出てくる，という意味です．たとえば，0.00000025 は，私達の書き方だと，2.5×10^{-7} となります．ここで，自然の中から大きな数と小さい数をもっと探してみましょう．その例を次のような表にしてみました．いずれも自然科学では大切な量ばかりです．中学校では習わない事柄ですから，知らないことばかりでしょうが，気にしないで下さい．

アボガドロ定数	6.0221367	$\times 10^{23}$	/mol
150 億年	4.73358389	$\times 10^{17}$	秒
パーセク	3.0856776	$\times 10^{16}$	m
天文単位	1.4959787	$\times 10^{11}$	m
光の速さ	2.99792458	$\times 10^{10}$	m/s
ボーア半径	5.29177249	$\times 10^{-11}$	m
エネルギー単位	1.60217733	$\times 10^{-19}$	J
原子質量単位	1.6605402	$\times 10^{-27}$	kg
プランク定数	6.626075	$\times 10^{-34}$	J s

$(\star)$

150 億年というのは, 大体宇宙が誕生してから今までの時間です. 「アボガドロ数」は, 約 56 グラムの鉄の塊の中にある, 原子の個数です. 「パーセク」とか「天文単位」というのは, 天文学で使う長さの単位です. よく大きな数を「天文学的数」といいますが, ほんの一粒の鉄の塊の中にある原子の個数はもっとずっと大きいのです. みなさんがこれから高等学校, 大学と, 自然科学の勉強を続けていくと, 上の表にある言葉の意味とその大切さがわかってくるでしょう.

難しいことがでてきたついでに, 大きな数と小さな数を表すために自然科学で使う単位を表にしておきましょう.

倍数	名前	記号	倍数	名前	記号
10^{18}	エクサ	E	10^{-1}	デシ	d
10^{15}	ペタ	P	10^{-2}	センチ	c
10^{12}	テラ	T	10^{-3}	ミリ	m
10^{9}	ギガ	G	10^{-6}	マイクロ	μ
10^{6}	メガ	M	10^{-9}	ナノ	n
10^{3}	キロ	k	10^{-12}	ピコ	p
10^{2}	ヘクト	h	10^{-15}	フェムト	f
10	デカ	da	10^{-18}	アット	a

$(\star)$

4 自然数の「原子」, 素数

鉄のような物質が原子という小さい物の集まりである, というお話をしました. 鉄の塊をどんどん細かくしていくと, 最後には原子になるわけです. そこで今度は, 1, 2, 3, $\cdots$ という数, つまり自然数の, 「原子」のお話をしましょう.

5 や 11 のように, 1 と自分自身でしか割り切れない数を「素数」といいます. 1 は素数と呼びませんので, 一番小さい素数は 2 です. 13, 17 や 19 は素数です. 8167 や 65537 のように, もっと大きな素数もあります. では, 「素数」はいくつあるのでしょうか？実は, いくらでも大きい素数があることは, 二千年以上前から知られています.

$2701 = 37 \times 73$ のように, どんな自然数も, いくつかの「素数」の積で表すことができますから, 「素数」は自然数の「原子」です. 小さい素数を表にしてみま

した．「原子」の表の初めの部分です．

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 & 23 & 29 & 31 & 37 \\
41 & 43 & 47 & 53 & 59 & 61 & 67 & 71 & 73 & 79 & 83 & 89 \\
97 & 101 & 103 & 107 & 109 & 113 & 127 & 131 & 137 & 139 & 149 & 151 \\
157 & 163 & 167 & 173 & 179 & 181 & 191 & 193 & 197 & 199 & 211 & 223 \\
227 & 229 & 233 & 239 & 241 & 251 & 257 & 263 & 269 & 271 & 277 & 281 \quad \ldots
\end{array}
\tag{$\star$}
$$

どんな自然数でも素因数に分解できる，といいました．けれど

$$
\begin{aligned}
&4214\,3595\,1227\,0590\,9452\,6040\,2776\,7407\,2269\,9228\,9293\,6899 \qquad (\star)\\
&\quad = 6491\,8098\,4954\,9346\,5472\,0369 \times 6491\,8098\,4954\,9346\,5472\,0371
\end{aligned}
$$

のような計算をするのは簡単ではありませんね．右辺に大きな 2 つの数字が並んでいますが，これは素数です．これらの数が素数であることを確かめるのは，とても手で計算するわけにはいきませんから，私達はコンピュータを使います．この 2 つの数は，差が 2 しかありません．間の数は偶数ですから素数ではありません．このように，2 つのつながった奇数が両方とも素数であるときに，これら 2 つの素数を「双子素数」といいます．11 と 13, 137 と 139, 1997 と 1999, 等は双子素数です．

与えられた大きな数が素数であるかどうか判断したり，その数が素数でないときにはそれを素数の積の形に書いたりすることは，難しいことですがとても大切な事柄です．そのために，たくさんの人たちが努力して，見事な成果を挙げています．現代でも数学の大切な主題の 1 つです．

5　おおきな素数

これからお話しすることは，少し難しいと思います．でも，中学校の高学年から高校生になるとわかるようになります．今日は話を聞いていて，何年か経ったらお配りしてある紙をもう一度見直して下さい．そのときには，きっと皆さんは全部わかることばかりです．

大きな素数をどうやって作るのでしょうか？昔，フェルマーさんという人は次のようなことを考えました．

$F_n = 2^{2^n} + 1$ は素数でしょうか？

2^n は 2 を n 回掛け合わせる，ということを表しています．$2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^{10} = 1024$ です．ただし，$2^0 = 1$ と約束します．初めのいくつかを計算してみましょう．$2^2 = 4$ ですから，$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$ です．フェルマーさんは最初の 5 つを計算しました．

$$F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65537 \qquad (\star)$$

これらは皆素数なので，こうやってたくさんの素数が作れるのではないか，とフェルマーさんは考えました．

ところが，まことに残念ながら

$$F_5 = 641 \times 6700417,\ F_6 = 274177 \times 67280421310721 \qquad (\star)$$

ですから，素数ではありません．大きな数がでてきましたが，この次は

$$F_7 = 59649589127497217 \times 5704689200685129054721 \qquad (\star)$$

です．こんな計算は，もちろんコンピュータを上手に使わないとできません．さらに

$$F_{37} = 2^{2^{37}} + 1 \qquad (\star)$$

は素数ではないことがわかっていますが，この数を素数の積の形に書いたとき，どんな素数が現れるかは知られていません．不思議に思われるかもしれませんが，コンピュータでもまだ無理なのです．この数を計算して見たとすると，30000000000 桁以上の数となります．もし，お配りしてある紙に数字を全部書くとすると，それだけで 80000000 ページになります！

フェルマーさんの考えと違って，この数の列には初めの 5 つ以外には素数が出てこないと思われています．でも証明はまだされていません．このフェルマーさんは「フェルマー予想」と呼ばれている，有名な問題を出しました．この問題は去年から今年にかけて約 350 年ぶりに解かれました．これは新聞にも書かれていましたので，ご存じの方もいらっしゃるでしょう．

大きな素数を作る他の方法はのないのでしょうか？メルセンヌさんという人の考えを紹介しましょう．

p が素数のとき，$M_p = 2^p - 1$ は素数でしょうか？

今度も初めのいくつかを計算してみましょう. $p=2$ のとき, $p=3$ のとき, と計算すると

$$M_2 = 3,\ M_3 = 7,\ M_5 = 31,\ M_7 = 127,\ M_{13} = 2^{13}-1 = 8191 \quad (\star)$$

となります. これらは確かに素数です. 11 も素数ですが, この場合は

$$M_{11} = 2047 = 23 \times 89 \quad (\star)$$

ですから, 素数ではありません. p が素数であるとしても, M_p は素数であるとは限らないのですが, この数の列にはたくさん大きな素数が現れます. 大きな数としては

$$M_{113} = 3391 \times 23279 \times 65993 \times 1868569 \times 1066818132868207 \quad (\star)$$

というのもありますが, とにかく今度はたくさん素数ができるのです. 本当にこの方法でいくらでも素数が作れるのかどうかはわかっていません. でも, 多くの人がコンピュータを駆使して, 大きな素数を見つけています. 最近の記録はを表にして見ましょう.

大きな素数	発見された年	大きな素数	発見された年
$2^{132049}-1$	1983 年	$2^{216091}-1$	1985 年
$2^{756839}-1$	1992 年	$2^{859433}-1$	1993 年

$(\star)$

最後の数は 258690 桁の数で, 書くと 65 ページにもなります！

6　不思議な素数

この他にどんな素数があるのでしょうか？最後に不思議な素数をいくつか紹介して私の話を終わることにしましょう.

$$11,\quad 1111111111111111111,\quad 11111111111111111111111 \quad (\star)$$

は素数です. でも, 11111 は素数ではありません. このように, 1 を 317 個並べてできる大きな数は素数出あることが知られています. 他にも 1 を 1031 個並べた

ら素数です. でも, 1 を 23000 個まで並べてできる数のうち素数になるのは, ここで挙げたものしかありません. もっと変な素数もあります.

$$1(0)_{2415}(1)_9(0)_{2415}1 \qquad (\star)$$

この式の意味は, 1 の次に 0 を 2415 個並べ, 続いて 1 を 9 個, もう 1 回 0 を 2415 個ならべて最後に 1 を書いてできる 4841 の数を表しています.

$$(9)_{2874}2(9)_{2874} \qquad (72323252323272325252)_{156} + 1 \qquad (\star)$$

は素数です. この他にも次のような素数もあります.

$$1(2)_2(3)_4(4)_8(5)_{16}(6)_{32}(7)_{64}(8)_{128}(9)_{4220} \qquad (\star)$$

自然数の中には素数がバラバラに散らばっています. 素数はどんな様子で散らばっているのでしょうか？24 から 28 までの数には 1 つも素数がありません. 6204484017332394393600002 から 6204484017332394393600024 までの数は全部素数ではありません. 先ほど双子素数のお話をしましたが, 大きな双子素数もあります.

$$570918348 \times 10^{5120} - 1 \quad と \quad 570918348 \times 10^{5120} + 1$$

は双子素数で, 1995 年 10 月 9 日 に発見されました. 素数の散らばっている様子を調べることは, 難しいけれど大切で面白い問題なのです.

素数は式で表すことができるのでしょうか？これも難しい問題なので, 2 つだけ例を挙げて私の話を終わることにします.

$$n^2 + n + 41 \qquad (\star)$$

は, $n = 0, 1, 2, \ldots, 40$ のとき, 全部素数です. 試して見て下さい.

$$36n^2 - 810n + 2753 \qquad (\star)$$

は, $n = 0, 1, 2, \ldots, 44$ が全部素数です.

おしまいの方は駆け足になって, 難しかったと思いますが, 大きな素数の不思議な様子はわっかていただけたのではないでしょうか. 現在, 素数は数学の学問的な対象としてだけ調べられているのではありません. 携帯電話の通信の機密性など, プライバシーの保護のために, いろいろなところで暗号が使われていますが, その基礎には素数が使われています. 何時の日にか, 興味を持って自分自身でいろいろ調べてみて下さい.

（おかもと　かずお　日本数学会前理事長）