楕円関数論から見た初等超越関数論

目次

1 関数マンダラ

角という図形，角の値としての角度，角度の絶対値としての角の大きさ等,「角」という言葉はかなり乱用されている．角度というものの定義が定らないと，三角関数の定義もあやふやなものとなってしまう．正三角形の一つの角の値は $\pi/3$ と答えられるが，ピタゴラスの三角形として有名な三辺の長さがそれぞれ 3， 4， 5 である三角形の 3 の長さの辺と 5 の長さの辺で挟まれた角の値はいくつかというと，首を傾げたくなる．$\tan^{-1}\frac{4}{3}$ という答を用意すると，今度は関数 $\tan^{-1}x$ の定義が気になる．どうも，トートロジカルな議論に終始しそうである．

対数関数は指数関数の逆関数として定義される場合が多いが，対数関数は有理関数による積分表示を持っている．このことは高校の数学の教科書ならどの本にも書いてある．

また，三角関数はその定義から単位円と密接なつながりを持っている．そこで，高校の数学の教科書に散在している次なる項目

数学 I　第２章　三角比
数学 II　第２章　三角関数
　　　　第３章　指数関数・対数関数
数学 III　第２章　微分法とその応用　§２　種々の関数の導関数
数学 C　第２章　いろいろな曲線　§２　２次曲線

を，次のような表にまとめてみた．

$x^2+y^2=1$		三角関数
	対数関数	指数関数
$x^2-y^2=1$		

何か見えてこないであろうか．

微分積分学の基本的な事柄は理解しているが，具体的な関数は一つも知らないと仮定しよう．このとき，初等超越関数呼ばれる，３角関数，指数関数，対数関数は如何に定義されるべきか．これが，この論説の出発点となる問題意識である．

ある種の量を表現すべく，幾何学的な事実から積分で定義された関数は，幾何学的な背景を色濃く反映している．ここでは「級数」という手段ではなく,「積分」という手段で初等超越関数を捉え直す．既存の方法に背を向け，無理関数のみを既知として，関数を積分という手法で定義する．自分の持っている知識を他の視点から見ることは，その知識の表す数学的現象のより深い本質に迫る行為であると考えられる．

視点は楕円積分である．

２次曲線と初等超越関数には如何なる関係があるのか，これが我々の調べる目標である．以下の表の？を埋めて下さい．

$x^2+y^2=1$	？	三角関数
？	対数関数	指数関数
$x^2-y^2=1$	？	？

ヒントは次の用語と公式群です：

逆関数

$$y=e^x \iff x=\log y$$

陰関数を解く

$$x^2+y^2=1 \iff \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

回転

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)=1 \iff XY=1$$

実際，教科書，問題集，大学の入試問題等に，上記の表の？の部分を問うているものがあります．例を見てみましょう．

秋田大学

次の問に答えよ．
(1) $x+\sqrt{x^2-1}=t$ とおくことにより，不定積分 $\int \sqrt{x^2-1}dx$ を求めよ．
(2) 曲線 $x^2-y^2=1$ 上に点 $P(p,q)$ $(p>1, q>0)$ と点 $A(1,0)$ がある．２直線ＯＡ，ＯＰとこの曲線とで囲まれる図形の面積 S を p の式で表せ．
(3) (2) における S を $\frac{\theta}{2}$ とおくとき，p，q を θ の式で表せ．

中央大学（理工）

時刻 $t=0$ に点 $(0,1)$ を出発した点 P が曲線 $C: y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ の上を動く．時刻 t における P の座標を $(f(t), g(t))$ と表すとき，次の (i)，(ii) が成立している．
(i) $f(t)$ は $t=0$ で連続である．　(ii) $t>0$ に対して，$\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2=1, f'(t)>0$．
このとき，
(1) $f(t)$ を求めよ．　(2) 曲線 C と x 軸，y 軸，$x=f(1)$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

防衛医科大学校

$y=\sin x$ $(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2})$ の逆関数を $y=f(x)$ $(-1\leq x\leq 1)$ とする．
(1) xy 平面に上に $y=f(x)$ のグラフの概形をえがけ．
(2) $f'(x)$ を x を用いて表せ．ここで $-1<x<1$ とする．
(3) $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$，$f'''(0)$ の値を求めよ．

2　初等超越関数

３角関数 $x=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ は当然，単位円の方程式 $x^2+y^2=1$ を満たす．この意味において，３角関数は円関数とも呼ばれている．また，それらの逆関数は（代数関数による）積分表示をもっている．

$$\theta=\cos^{-1}x=\int_1^x\frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}\qquad \theta=\sin^{-1}x=\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

双曲線関数

$$x=\cosh\theta=\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}\qquad y=\sinh\theta=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}$$

も当然，双曲線の方程式 $x^2-y^2=1$ を満たす．これらの逆関数も積分表示を持っている．

$$\theta=\cosh^{-1}x=\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\log(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$\theta=\sinh^{-1}x=\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

指数関数 $y=e^\theta$ の逆関数 $\theta=\log y$ も積分表示を持つ．

$$\theta=\log y=\int_1^y\frac{dt}{t}$$

この場合，3角関数の単位円にあたる式がない．無理に探さなくとも容易に見つかる．実は，$xy=1$ がそれにあたる．表の3行目を $\pi/4$ だけ回転して，$\sqrt{2}$ 倍したものが第2行目であることを考えれば，それは当然のことである．

$$\theta=\log x=\int_1^x\frac{dt}{t}\qquad\theta=\log y=\int_1^y\frac{-dt}{t}$$

では，積分表示に表れた被積分関数と2次曲線との間に何らかの canonical な関係があるのだろうか．また，積分の幾何学的な意味はなんだろう．次節で考察する．

3　微分形式

3.1　微分形式・外微分

ここでは$\boldsymbol{R}^2$の開集合において微分形式を考察するが，誤解の恐れがないときは，その定義域である開集合を明記しない．

さて，$\boldsymbol{R}^2$の座標を (x,y) とすると，1次微分形式 ω とは，

$$\omega=f(x,y)dx+g(x,y)dy$$

と表されるものである．ここで，$f(x,y)$，$g(x,y)$ は然るべき開集合で定義された x，y の関数で，必要に応じて滑らかさを仮定する．

例1

(1) xdy

(2) $-ydx$

(3) $\dfrac{1}{2}(xdy-ydx)$

(4) $\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

次に，2次微分形式Ωとは,

$$\Omega = f(x,y)dx \wedge dy$$

と表されるものである．ただし,

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0, \quad dy \wedge dx = -dx \wedge dy$$

と定める．関数は0次微分形式と考える．

以上のことをまとめると以下のようになる,

$$\text{微分形式} = \begin{cases} 0\text{次微分形式} & f(x,y) \\ 1\text{次微分形式} & f(x,y)dx + g(x,y)dy \\ 2\text{次微分形式} & f(x,y)dx \wedge dy \end{cases}$$

C^1級0次微分形式，すなわち関数fに対して，その微分（外微分 (exterior derivative)）を

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

と定義する．

例2

(1) $d\log\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$

(2) $d\arctan\dfrac{y}{x} = \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

(3) $d\dfrac{ax^2+2hxy+by^2}{x^2+y^2} = 2\left(\dfrac{hx^2+xy(b-a)-hy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)(xdy-ydx)$

次に，1次微分形式に対しては，その外微分を

$$\begin{aligned} d(fdx+gdy) &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy\right) \wedge dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}dx \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial y}dy \wedge dy \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

と定義する．

C^2級の関数 $f(x,y)$ に対して

$$\begin{aligned} d^2f = d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right) \wedge dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.

例３

(1) $d(-ydx) = -dy \wedge dx = dx \wedge dy, \quad d(xdy) = dx \wedge dy$

したがって，特に

(2) $d\left\{\frac{1}{2}(xdy - ydx)\right\} = dx \wedge dy$

(3) $d\left(\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}\right) = d\left(d\arctan\frac{y}{x}\right) = d^2\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = 0$

[注意]

(1) $\boldsymbol{R}^n$においても同様である.

(2) 一般の可微分多様体においては，r 階共変テンソル場をr次微分形式 (differential form) と呼ぶ. $\boldsymbol{R}^2$においては，座標を x，y とすると，上記のような表現をとる.

(3) 関数の微分はもはや関数ではない. それは（１次）微分形式と呼ばれるものである.

3.2　微分形式の積分

$\boldsymbol{R}^1$の区間 $a \leqq t \leqq b$ から$\boldsymbol{R}^2$の中への C^1級写像 $(\phi(t), \psi(t))$ による像 Cを，向きづけられた滑らかな曲線 (smooth curve) という.

例４

(1) $x = p + at, \ y = q + bt, \ (a,b) \neq (0,0), \ \text{i.e.,} \ b(x-p) = a(y-q)$

(2) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ y = \frac{2t}{1+t^2}, \ \text{i.e.,} \ x^2+y^2 = 1 \quad (x \neq -1)$

(3) $x = \frac{t}{1+t^3}, \ y = \frac{t^2}{1+t^3}, \ t \neq -1, \ \text{i.e.,} \ x^3+y^3 = xy$

(4) $x = t^2, \ y = t^3, \ \text{i.e.,} \ y^2 = x^3$

$\boldsymbol{R}^2$内の曲線 Cの近傍 Uで定義された連続関数 $f(x,y)$，$g(x,y)$ に対して，積分

$$\int_a^b f(\phi(t),\psi(t))\frac{d\phi(t)}{dt}dt + g(\phi(t),\psi(t))\frac{d\psi(t)}{dt}dt$$

を，微分形式 $fdx + gdy$ の Cに沿う**線積分**といい，

$$\int_C fdx + gdy$$

で表す．この積分は曲線を表現する変数には無関係である．

例 5

$$\int_{\partial D} \frac{1}{2}(xdy - ydx) = \text{領域 } D\text{の面積}$$

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \text{曲線 } C\text{の偏角の増分}$$

2 次微分形式 $f(x,y)dx \wedge dy$ に対しては，**面積分**を

$$\int_D f(x,y)dx \wedge dy = \int_D f(x,y)dxdy$$

で定義する．したがって，

$$\int_D dx \wedge dy = \text{領域 } D\text{の面積}$$

となる．

[注意] 線素 $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ は微分形式ではないが，微分形式もどきの積分として掲げておく．

$$\int_C \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \text{曲線 } C\text{の長さ}$$

3.3 Green-Stokes の公式

定理（ Green-Stokes の公式）

$D \subset \boldsymbol{R}^2$は相対コンパクトな領域とし，その境界は何個かの有限個の区分的に滑らかな曲線からなるもとのとする．ω は一次微分形式で$\overline{D}$で連続，かつ Dで C^1ならば

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

ただし，∂Dは Dの境界を表し，その向きは Dに関して正，すなわち領域 Dを左にみて進むものとする．

系

$$\int_{\partial D} \frac{1}{2}(xdy - ydx) = \int_D dx \wedge dy = \int_D 1dxdy = \text{領域 } D\text{の面積}$$

ここで，2 つほど例を挙げてみよう．

(1) $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $(-\infty < t < \infty)$ で囲まれる領域 Dの面積 S

$$\begin{aligned} S &= \int_{\partial D} \frac{1}{2}(xdy - ydx) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt})dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

(2) $x = \dfrac{t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{t^2}{1+t^3}$ $(-\infty < t < \infty, t \neq -1)$ で囲まれる領域 D の面積 S
これは，Descartes の正葉形 (folium of Descartes) といわれる．

$$\begin{aligned} S &= \int_{\partial D} \frac{1}{2}(xdy - ydx) \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt})dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$x^3 + y^3 = xy$ が $x = \dfrac{t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{t^2}{1+t^3}$ $(-\infty < t < \infty, t \neq -1)$ のような媒介変数表示をもつということは $x^3 + y^3 = xy$ が特異点を持った有理曲線であるという事実に対応している．ちなみに，$x^3 + y^3 = xy$ において，$t = \dfrac{y}{x}$ とおくと，$y = tx$ となり，$x = \dfrac{t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{t^2}{1+t^3}$ となる．

[注意] Green-Stokes の公式の原型はやはり 1 変数の定積分の公式である．

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

とすると，

$$\int_{[a,b]} dF(x) = \int_{[a,b]} \frac{dF(x)}{dx}dx = \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \int_{\partial[a,b]} F(x)$$

となるので，

$$\int_{[a,b]} dF(x) = \int_{\partial[a,b]} F(x)$$

4 角度

1 点 O から発する 2 つの半直線 OA，OB からなる図形を角 (angle)AOB といい，∠AOB で表す．O をその頂点 (vertex)，OA，OB をその辺 (side) という．合同な角は同じ大きさをもつ．∠AOB の大きさを |∠AOB| と書くこともある．

角度というものは xy 平面ではその多価性のゆえに大域的な表現をもち得ない．しかし，局所的に限るなら角度は座標関数 x，y による表現をもつ．たとえば，$0 < x$ に限るなら，原点 O と点 (x, y) を結ぶ半直線が x 軸の正の向きとなす角の大きさを θ（ラジアン）とすると，

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

となる．同様にして，$0 < y$ とすると，

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}$$

$x < 0$ とすると，

$$\theta = \pi + \arctan\frac{y}{x}$$

$y < 0$ とすると，

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}$$

となる．

実際，$0 < x$ かつ $0 < y$ の場合，

$$\arctan\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}$$

が成り立つ．他の場合も同様である．

したがって，いずれの場合も

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

となる．しかし，われわれは角度を定義し，三角関数を定義するのが目的である．級数などを用いて天下りに $\arctan x$ を定義することもできるが，その場合諸概念の因果的構造が見えなくなってしまう．応用を目的とするならともかく，そのような構成はわれわれの目的ではない．しかし，後半の式

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

はわれわれに何をすべきかを教えている．すなわち，θ は $\boldsymbol{R}^2 - \{(0,0)\}$ の普遍被覆空間の関数であって，$\boldsymbol{R}^2 - \{(0,0)\}$ では大域的な表現をもち得ない．しかし，$d\theta$ はそれが可能であるといっているのである．したがって，あとはこれを積分すればよいのである．$d\theta$ こそ角素と呼ばれるにふさわしいものである．$d\theta$ と書くと，すでに θ が存在するかのごとく思われるので，以後 ω と書くことにする．

[注意]

$\displaystyle\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1)$ を積分して $\displaystyle\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1)$ を得る．

OA 上に点 P をとり，OB 上に点 Q をとる．点 P と点 Q を滑らかな曲線 C で結ぶ．積分

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

の値は Green-Stokes の公式から点 P，点 Q，および曲線 C の選び方によらない．

実際，点 O を中心とした単位円と半直線 OA，OB との交点をそれぞれ R，S とする．曲線 C，線分 PR，円弧 RS，線分 SQ で囲まれた領域を D とする．Green-Stokes の公式より

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = 0 \quad \left(\text{ただし，} \omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}\right)$$

ところで，微分形式 ω は，線分 SQ と RP の上では，定方向比 (p, q) に対して $x = pt$，$y = qt$ であるから，0 である．よって，円弧 SR を γ とすると，

$$\int_{-\gamma} \omega + \int_C \omega = 0$$

すなわち

$$\int_\gamma \omega = \int_C \omega$$

これが，まさに∠ AOB の開き具合，すなわち角度を表現しているのである．曲線 C の向きに応じて，角度は向きをもつ．

では，次に，弧 γ での ω の積分 $\int_\gamma \omega$ の値を実際に計算してみよう．

γ 上では $x^2 + y^2 = 1$ であるから，$xdx + ydy = 0$ となり，

$$\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_\gamma xdy - ydx = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

したがって，角度とは円弧 RS の長さであるという解釈ができる．また, 線分 OS，円弧 RS，線分 OR で囲まれた領域を E とすると，微分形式 ω は，線分 OS と OR の上では 0 であることと Green-Stokes の公式から

$$\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\int_{\partial E} \frac{1}{2}(xdy - ydx) = 2\int_E dx \wedge dy = (\text{領域 } E \text{の面積}) \text{ の 2 倍}$$

となり，扇形 RSO の面積の 2 倍であるという別の解釈ができる．

この解釈は $xy = 1$，$x^2 - y^2 = 1$ にも適用できる．これが三角関数と双曲線関数の類似の一因である．

角度の絶対値を角の大きさと呼ぶ．しからば，原点を頂点とする角の大きさとは，その角が切りとる単位円の円弧の長さということになる．そこで，単位円の弧長を θ (もちろん，右回りに計るときは負の値をとる) とすると，

$$\theta = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$$

ここにいたってはじめて，局所的ではあるが角度の表現を手に入れたことになる．この角度 θ を変数の y で微分すると，

$$\frac{d\theta}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

となる．微分が正であるから，単調増加，よって逆関数が存在する．それを

$$y=\sin\theta$$

とおく．これがまさに三角関数の正弦関数である．逆関数の微分の公式より

$$\frac{dy}{d\theta}=\sqrt{1-y^2}$$

したがって，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\left.\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right|_{\theta=0}=\left.\frac{dy}{d\theta}\right|_{y=0}=1$$

をうる．さて，

$$x=\sqrt{1-y^2}$$

であるから，

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

と定める．これより

$$(\sin\theta)'=\frac{d\sin\theta}{d\theta}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$$

となる．また，

$$(\cos\theta)'=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{1-\sin^2\theta}}=-\sin\theta$$

となり，$\sin\theta$ は無限回微分可能である．

1 次微分形式

$$\omega=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

は，全平面から原点を除いた領域 M で定義され，$d\omega=0$ である．従って，ストークスの定理より，局所的には積分可能であり，二つの積分路がホモトープであるなら，これら二つの積分路での ω の積分は同じ値をとる．即ち，積分の値は積分路の選び方に依らず，始点と終点のみで決る．

x-y 平面から原点と x 軸の負の部分を除いた領域 D において

$$\theta(x,y):=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

とおくと，D は単連結であり，$\theta(x,y)$ は D 上の 1 価関数として確定する．θ は原点と点 (x,y) を結ぶ線分が x 軸の正の部分となす角度である．

[注意]

勿論，弧度法による三角関数が定義されていれば，極座標 (r,θ) が使えるので

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

より

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta,\quad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

となり

$$\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = d\theta$$

となる.

ちなみに，この ω は

$$\frac{dz}{z} = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + i\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

の虚部である.

等式

$$\frac{|dz|}{|z|} = \left|\frac{dz}{z}\right|$$

より

$$\frac{(dx)^2+(dy^2)}{x^2+y^2} = \left(\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\right)^2$$

$D=\{x^2+y^2\le 1\}$, $C=\partial D$ とすると

$$\int_C \omega = \int_C xdy - ydx = 2\int_D dx\wedge dy = 2\pi$$

5　2次曲線上の Gorenstein 形式

補題　$f(x,y)=0$ が特異点のない曲線 $C=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | f(x,y)=0\}$ を定義するとき，曲線 C 上において

$$f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = 0$$

従って，

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{dy}{f_x} & (f_x\ne 0) \\ \\ -\dfrac{dx}{f_y} & (f_y \ne 0) \end{cases}$$

とするとき，ω は C 上の1次微分形式となる．C 上の点 P から Q までの積分

$$\int_P^Q \omega$$

は確定する.

補題　$g(x,y) = y^2 - f(x) = 0$ のとき

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{2dy}{f'} & (f' \neq 0) \\ \\ \dfrac{dx}{\sqrt{f(x)}} & (f \neq 0) \end{cases}$$

補題　$h(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2 - c = 0$ のとき

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{dy}{ax+hy} & (ax+hy \neq 0) \\ \\ \dfrac{-dx}{hx+by} & hx+by \neq 0) \end{cases}$$

従って，加比の理より

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{xh_x + yh_y} = \frac{xdy - ydx}{c}$$

6　3角関数

$$x^2 + y^2 = 1$$

のとき

$$2xdx + 2ydy = 0$$

であるから

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{dy}{x} & (x \neq 0) \\ \\ -\dfrac{dx}{y} & (y \neq 0) \end{cases}$$

とおくと

$$\omega = \frac{dy}{x} = -\frac{dx}{y} = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = xdy - ydx$$

$$dx = -y\omega, \quad dy = x\omega$$

従って

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = |\omega|$$

即ち，角素の絶対値は線素である．

$$\int_C \omega = \int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} xdy - ydx = 2\int_D dx \wedge dy = 2(D\text{の面積})$$

$x^2+y^2=1$ の右半分 $x=\sqrt{1-y^2}$ では

$$\theta=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\quad(-1<y<1)$$

$$\theta=\arcsin y\quad i.e.,\quad y=\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\sqrt{1-y^2}=x=\cos\theta$$

$x^2+y^2=1$ の上半分 $y=\sqrt{1-x^2}$ では

$$\theta=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_1^x\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)$$

$$\theta=\arccos x\quad i.e.,\quad x=\cos\theta$$

$x>0$ では

$$\theta=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_{(1,0)}^{(1,\frac{y}{x})}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{\frac{y}{x}}\frac{dy}{1+y^2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

よって

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

7 加法定理

平面 $\mathbf{R}^2$ の点 P，A，B，C の座標をそれぞれ $P(1,0)$，$A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,-\sin\beta)$，$C(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$ とする．θ 回転，即ち角度が θ である回転を点 (x,y) に

$$(x,y)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

を対応させる一次変換とすると，点 B に β 回転を施すと点 P となる．では，β 回転を A に施したら点 C になるであろうか．それは，3角関数の加法定理が成り立てば可能である．即ち

$$(\cos\alpha,\sin\alpha)\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}=(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$$

が成り立つ．そこで，3角関数の加法定理を示しておこう．

定理

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

証明

$$f(x,y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

とおくと，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

となるから，$f(x,y)$ は $x+y$ だけの関数となる．即ち，ある一変数関数 ϕが存在して

$$f(x,y) = \phi(x+y)$$

今，$y=0$ とすると

$$\sin x = \phi(x)$$

よって

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

［附記］

命題

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

証明

単位円を C とすると

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 2\pi$$

である．$\pi/2$ 回転，即ち一次変換

$$(x,y) \longrightarrow (-y,x)$$

により積分

$$\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

は

$$\int_{(0,1)}^{(-1,0)} \frac{(-y)dx - xd(-y)}{(-y)^2+x^2} = \int_{(0,1)}^{(-1,0)} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

へと変換される．同様にして

$$\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int_{(0,1)}^{(-1,0)} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int_{(-1,0)}^{(0,-1)} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

従って，積分の加法性より

$$2\pi = 4\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

より

$$\frac{\pi}{4}=\int_{(1,0)}^{(0,1)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\lim_{t\to 0}\int_{(1,0)}^{(t,\sqrt{1-t^2})}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\lim_{t\to 0}\int_0^{\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}}\frac{dy}{1+y^2}=\lim_{s\to\infty}\int_0^s\frac{dy}{1+y^2}$$

さて，積分

$$y=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}$$

によって x の連続関数 y が区間 $\infty<x<\infty$ において定義される．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}>0$$

であるから，関数 y は，単調 $(-\pi/2$ から$\pi/2)$ に増大するから，逆関数

$$x=\tan y$$

が確定する．

8 対数関数・指数関数

対数関数の逆関数として指数関数が定義される．

$$xy=1$$

より

$$xdy+ydx=0$$

であるから

$$\omega=\begin{cases}\dfrac{dx}{x} & (x\neq 0)\\[2ex] -\dfrac{dy}{y} & (y\neq 0)\end{cases}$$

とおくと

$$\omega=\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}=\omega=\frac{1}{2}(xdy-ydx)$$

三点 $(0,0),(x,y),(1,1)$ が囲む面積を θ とすると

$$\theta=\log x=\int_1^x\frac{dx}{x}$$

$$\log(uv)=\int_1^{uv}\frac{dx}{x}=\int_1^u\frac{dx}{x}+\int_u^{uv}\frac{dx}{x}$$

$$\log(uv)=\log u+\log v$$

$$x=\exp\theta,\quad y=-\exp\theta$$

9　逆双曲線関数・双曲線関数

逆双曲線関数の逆関数として双曲線関数が定義される.

$$x^2 - y^2 = 1$$

より

$$2xdx - 2ydy = 0$$

であるから

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{dy}{x} & (x \neq 0) \\ \\ \dfrac{dx}{y} & (y \neq 0) \end{cases}$$

と定めると

$$\omega = \frac{dy}{x} = \frac{dx}{y}$$

従って

$$\theta = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \omega = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{dy}{x} = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{dx}{y} = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{d(x+y)}{x+y} = \log(x+y)$$

θ の意味は

$$\theta = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{dy}{x} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \log(\sqrt{y^2+1}+y)$$

$$\theta = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{dx}{y} = \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log(x+\sqrt{x^2-1})$$

従って

$$y = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \qquad x = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

さらに

$$\omega = \frac{dy}{x} = \frac{dx}{y} = \frac{xdy - ydx}{x^2 - y^2} = xdy - ydx = 2\frac{xdy - ydx}{2}$$

でもある. この事実は以下のような意味となる.

「双曲線 $x^2 - y^2 - 1$ 上の 1 点 P をとり, 原点 $O(0,0)$ と双曲線の頂点 $A(1,0)$ とを結ぶ線分, 線分 OP, および双曲線の弧 AP で囲まれた面積が $\theta/2$ であるとき, P の座標を θ の関数と考えて $\cosh\theta$,　$\sinh\theta$ とすれば

$$y = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \quad x = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

となる.」

さて

$$\omega = xdy - ydx$$

より

$$2ydx = xdy + ydx - \omega$$

これを積分して

$$2\int_1^x \sqrt{x^2-1}dx = x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{1-x^2})$$

$$2xdy = xdy - ydx + \omega$$

これを積分して

$$2\int_0^y \sqrt{y^2+1}dy = \sqrt{y^2+1}y + \log(\sqrt{y^2+1}+y)$$

10　複素化

最初に掲げた表の第１列，第２列，第３列でそれぞれ複素化を行うことができる．例えば第２列で複素化するとどうなるか？

$$u + iv = \log z = \int_1^z \frac{dt}{t} = \log\sqrt{x^2+y^2} + i\theta(x,y)$$

この逆として

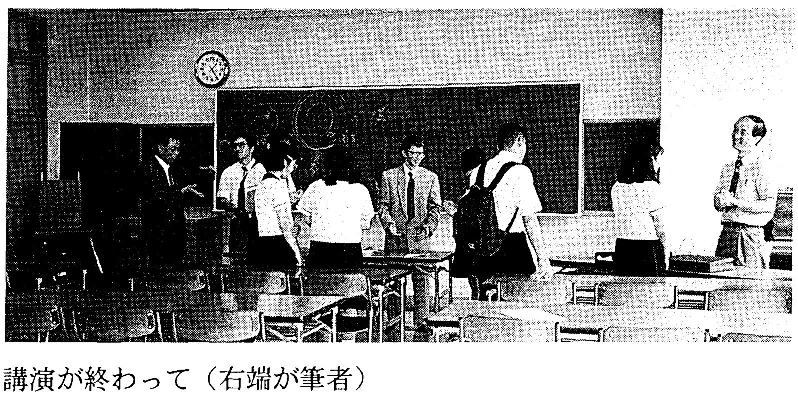
$$x + iy = e^u(\cos v + i\sin v)$$

を得る．この事実から、いろいろおもしろい数学へ発展する．しかし，ここで時間がなくなってしまった．

「複素化」はまたの機会に詳しく述べることにしよう．乞うご期待！

参考文献
岩波数学辞典第３版　日本数学会編集　岩波書店
高木貞治「解析概論」岩波書店

（わたなべ　きみお，筑波大学数学系）



講演が終わって（右端が筆者）