矢野孝次さんの文部科学大臣表彰若手科学者賞受賞に寄せて

京都大学名誉教授
渡辺 信三

矢野孝次さん (神戸大理）が平成 22 年度の「文部科学大臣表彰若手科学者賞」を受賞された．受賞業績名は「周遊理論に基づく極限定理の研究」である．心から祝福するとともに，矢野さんのこの業績について若干の解説を与えたい．

矢野さんの研究は確率過程論における拡散過程の周遊 (excursion) 理論に関するものである．今日の確率論では，偶然現象を確率過程という数学モデルを通して研究するが，その状態の変化は状態空間に値をとる道 (path) で表され，**見本関数**という道の空間に値をとる確率変数が確率過程を記述する．そして研究の方法も，確率過程を特性付けるその平均的基本量の記述に解析学の手段を用いる従来の解析的方法と共に，確率過程の見本関数を直接取り扱う確率的方法が次第に発展し，この後者の方法は今日，**確率解析**と呼ばれている．確率解析の発展における最大の功労者が伊藤清先生 (1915-2008) であり，先生がこの業績で 2006 年に第一回の IMU Gauss 賞，2008 年に文化勲章を受賞されたことは私達の記憶に新しい．

伊藤先生の確率解析における重要な業績の一つに，**周遊ポアソン点過程** (Poisson point process of excursions) の理論がある．これは，1 次元拡散過程の見本関数を完全に記述することに成功した先生と Henry McKean との共同研究から派生したものであり， Feller の境界条件に関する伊藤 - McKean の理論の難解な部分をより平易で理解し易いものにし，その本質を明らかにしたのであった．そして矢野さんの業績は，その更なる深化，発展と重要な応用に関するものである．

そこで，拡散過程の周遊の概念と理論を，簡単な場合に限って概観しよう．状態空間は，直線上の半区間 $[0,\infty)$ とし，その上の拡散過程で内部消滅がなく，自然尺度として通常の座標 x がとられているものを考える．すると，その区間の内部での行動は speed measure と呼ばれる $(0,\infty)$ 上の Radon 測度 $m(dx)$ によって決定され，境界へ到達するまでの拡散過程（m-吸収壁拡散過程）が定まる．境界へ到達後の行動は多様な可能性があるが，その在り方を定めるのが Feller の境界条件である．簡単のため，それが Neumann 条件，即ち境界が反射壁の場合を考える．反射壁が可能なのは，境界 0 が**正則**，即ち，$m\{(0,1)\}<\infty$，の場合，かつその場合のみである．このとき，この反射壁過程の見本関数の零点は，確率 1 で，時間区間 $[0,\infty)$ 内の完全集合 $\mathcal{Z}$ を成し， $[0,\infty)\setminus\mathcal{Z}$ は，互いに交わらない可算個の開区間の合併となる．各々の開区間を**周遊区間**，その部分の見本関数を**周遊**という．

伊藤理論によると周遊の全体は**周遊空間**と呼ばれるある関数空間 $\mathcal{E}$ に値をとるポアソン点過程 $\mathbf{p}^m$ を定め，ポアソン点過程の一般論より，その**特性測度** $\mathbf{n}^m$ が周遊空間 $\mathcal{E}$ 上の σ-有限な測度として定まる．$\mathbf{p}^m$ と $\mathbf{n}^m$ はそれぞれ，伊藤の**周遊ポアソン点過程**，伊藤の**周遊測度**と呼ばれる．最も典型的で重要な場合は反射壁ブラウン運動のとき，即ち，$m(dx)=2dx$ の場合で，このとき，それぞれ，$\mathbf{p}^{BE}$, $\mathbf{n}^{BE}$ と表す．これらの概念が正確に確立されたことで，ブラウン運動の見本関数の挙動に関

する従来の研究は統一的に見直され，より深い理解が進み，それは更に新しい研究の有効な方法や道具を提供するようになった．

矢野さんの重要な業績の一つは，境界点 0 が，正則である場合より更に広い**流出**である場合，即ち $\int_{(0,1]} x\ m(dx) < \infty$ が満たされる場合に，伊藤の周遊測度 $\mathbf{n}^m$ に相当するものを周遊空間 $\mathcal{E}$ 上の σ-有限な測度として正確に構成したことである．境界点 0 が流出であっても正則でないときは，反射壁過程は存在しないので，それを周遊を通して定義することは不可能であるが，無限の流入法則をもつ m-吸収壁過程の法則としての定義は，この場合まで拡張可能であることを，固有関数展開などの解析的方法で示した． そして， $\mathbf{n}^{BE}$ のもつ生存時間分解公式や最大値分解公式（D. Williams の公式）のような基本公式が，この場合にも成立することを示した．$\mathbf{n}^m$ が定まれば，$\mathbf{p}^m$ の方は， $\mathbf{n}^m$ をその特性測度としてもつ $\mathcal{E}$-値ポアソン点過程として定まる．そして，矢野さんの更に目覚しい成果は，P. Fitzsimmons との共同研究によって，$\mathbf{p}^m$ や $\mathbf{n}^m$ が，それぞれ，$\mathbf{p}^{BE}, \mathbf{n}^{BE}$ の， $\mathcal{E}$ の時間変更が定める変換による像点過程，像測度，として実現されることを示したことである．

境界点 0 が 流出かつ非正則のときは，m-反射壁過程は存在しないから，$\mathbf{p}^m$ や $\mathbf{n}^m$ を定義してもそれらが果たして有効なのか少々疑問である．ところが，矢野さんはそれが拡散過程の研究，特にその極限定理の研究に重要な役割を果たすことを示したのであった．矢野さんの方法では，極限の確率過程や確率変数（とその法則）は，$\mathbf{p}^m$ や $\mathbf{n}^m$ を用いて表現される．その際重要になる speed measure のクラスは，次の場合である： $\alpha > 0$ に対し，$m^{(\alpha)}(dx) = \frac{1}{\alpha}\ x^{\frac{1}{\alpha}-2}dx.$ このとき，$0 < \alpha < 1$ で境界点 0 は正則，$\alpha \geq 1$ で流出かつ非正則である．これに対応して，極限定理における収束条件として，典型的なのは，拡散過程の speed measure m が,「$0 < \alpha < 1$ に対し，$x \mapsto m\{(0, x]\}$ が，$x = \infty$ で（Karamata の意味で） $\frac{1}{\alpha} - 1$ 次正則変動」，あるいは「$\alpha \geq 1$ に対し，$m\{(0, \infty)\} < \infty,$ かつ，$x \mapsto m\{(x, \infty)\}$ が，$x = \infty$ で $\frac{1}{a} - 1$ 次正則変動」のような条件である（$\alpha = 1$ のときの条件はもっと精密に述べる必要がある）． そして，矢野さんは色々な興味ある極限定理を証明したが，その方法は，Fitzsimmons の共同研究の成果に基づき，固定した $\mathbf{p}^{BE}, \mathbf{n}^{BE}$ をとって，その上に必要な周遊測度や周遊点過程を時間変更によって実現することを基本アイデアとしている．大変賢明な方法である．最後に，一言，これからも矢野さんの研究が更に進み，広い分野で優れた成果を挙げられることを切に願うものである．