平地健吾氏の２００６年ステファン ベルグマン賞受賞紹介

野口 潤次郎（東京大学大学院数理科学研究科）

２００６年ステファン ベルグマン賞を受賞した平地健吾氏の業績を簡単に紹介します.

S. ベルグマン賞については、この文の最後に説明がありますのでご覧下さい. 日本人が昨年の倉西正武氏（コロンビア大学教授）に続き二人目となり, 日本の数学界との縁が深まった感があります.

受賞理由となった研究業績の多くは雑誌「数学」に掲載された本人による論説 [平地 00] があります. より詳しくはそちらをご参照下さい. またアメリカ数学会の「Notices」(http://www.ams.org/notices/200603/people.pdf) には氏の写真付きの紹介記事があります.

平地健吾氏は, これまでベルグマン核およびセゲー核の漸近展開と CR 多様体の不変量の研究を続け, １９７９年に C. Fefferman が提案した複素領域の幾何・解析の研究プログラムにおいていくつかの重要なかつ本質的な進展を与えてきました. このプログラムはベルグマン核をリーマン幾何における熱核の類似とみなして理論を展開するものです. その第一歩は核関数の漸近展開を幾何的な不変量を用いて記述することでした. 平地氏は, ２０００年に出版された論文 [H00] で, 強擬凸領域のベルグマン核の対数的特異性を境界の CR 不変量を用いて記述し, プログラムの最初の目標を達成しました.

複素ユークリッド空間 $\mathbf{C}^n$ の有界領域 D のベルグマン核は $L^2(D)$ から正則 L^2 関数のなす閉部分空間への直交射影の積分核として定義されます. D が強擬凸（より一般に, $\bar\partial$-ノイマン問題が準楕円型）であるときにはベルグマン核 $K(z,w)$ は $\bar D\times\bar D\setminus\Delta$ 上で滑らか (C^∞) である. ここで, $\bar D$ は D の閉包, Δ は D の境界の直積空間 $\partial D\times\partial D$ の対角線集合を表す. １９７４年, C. Fefferman は Δ 上のベルグマン核の特異性の漸近展開は次の形であることを示しました.

$$K(z,z)=\varphi(z)r(z)^{-n-1}+\psi(z)\log r(z).$$

ここで, r は ∂D の滑らかな定義関数, $\varphi(z),\psi(z)$ は $\bar D$ 上の滑らかな関数です. さらに１９７９年, C. Fefferman は CR 幾何とリーマン幾何の類似性に注目し φ と ψ を境界 ∂D の CR 不変量を用いて記述することを試みました. この問題にはその後多くの研究者が参加し, 複素モンジュ・アンペール方程式と不変式論を用いてベルグマン核と田中-Chern-Moser 不変量を結びつける手法が形作られてきました. その結果１９９４年には Bailey-Eastwood-Graham 等により極型の特異性 φr^{-n-1} の CR 不変量による記述が完成しました. しかし, 対数項の係数 ψ については殆ど情報は得られませんでした. 平地氏はパラメータを含むワイル汎関数という, 境界の近傍で定義される新しい CR 幾何の不変量の族を導入し, $\psi\log r$ の漸近展開を完全に与えることに成功し

ました（[H00]）．この一般論の構築では小松玄氏，中沢則之氏と共同でおこなった２次元領域での ψ の具体的な計算（[HKN99]）が重要な指針となっています．

更に，平地氏はセゲー核についても重要な結果を得ています．セゲー核はベルグマン核と同様に，領域の境界 ∂D 上の滑らかな面素 dm によって定まる L^2 関数空間から正則関数の境界値のなす部分空間への直交射影の核関数として定義されます．強擬凸領域のセゲー核もベルグマン核と同様な漸近展開 $\widetilde{\varphi}(z)r(z)^{-n}+\widetilde{\psi}(z)\log r(z)$ を持ちます．この場合 $\widetilde{\varphi}$，$\widetilde{\psi}$ はともに dm に依存するため CR 不変量で記述することはできません．しかし同氏は積分 $\int_{\partial D}\widetilde{\psi}dm$ は dm に依存しない CR 不変量であり, さらにそれは強擬凸領域の滑らかな変形に関して保存されるという著しい結果を最近得ました（[H06]）．とくに強凸領域では $\int_{\partial D}\widetilde{\psi}dm=0$ が導かれることになります。$\widetilde{\psi}$ の解析は，これからの課題です。また同氏は，２次元領域を含む多くの場合で $\int_{\partial D}\widetilde{\psi}dm=0$ の成立することを示しています．この過程で２次元領域の場合の $\widetilde{\psi}|_{\partial D}$ の不変式 (現在では Q 曲率と呼ばれている) としての特徴付けを与えています（[H92]）．Q 曲率の定義はその後 C. Fefferman との共同研究により高次元の場合にも拡張され（[FH03]），放物型幾何という枠組みで盛んに研究されています．

ベルグマン核とセゲー核の漸近展開にどのような関係があるのか，というのは自然な疑問です．これに答えるため，同氏は［H04］でウェイト付きのベルグマン核を用いてベルグマン核とセゲー核を特殊値として含む核関数の正則族を構成しています．この研究は小松玄氏とともに行ったもので，ソボレフ空間のベルグマン核の漸近解析［HK99］の一般化であり，種々の再生核に含まれる CR 不変量を統一的に記述する手法を与えています．これらの解析は柏原正樹氏によって与えられたベルグマン核の単純ホロノミー系による特徴付けの自然な拡張になっています．ホロノミー系の応用としてはこの他に，実エリプソイドのベルグマン核の計算があります（[H93]）．ここでは特に，球に近い実エリプソイドのベルグマン核の対数項が消えるのは球に限ることを示しています．これは Ramadanov 予想「ベルグマン核の対数項が消えるのは球に限る」をサポートするものです（この予想は，２次元の場合を除いて未解決）．

このように平地健吾氏の仕事は，ベルグマン核・セゲー核の特異性の研究を通じて複素解析と CR 幾何学の深い結びつきを確立するもので，今後の益々の発展が期待されます．

参考文献

[H92] K. Hirachi: Scalar pseudo-hermitian invariants and the Szegö kernel on three-dimensional CR manifolds, in “Complex Geometry,” Lect. Notes in Pure and Appl. Math. **143**, 67–76, Dekker, 1992.

[H93] K. Hirachi: The second variation of the Bergman kernel of ellipsoids, Osaka J. Math. **30** (1993), 457-473.

[HKN99] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa: CR invariants of weight five in the Bergman kernel, Adv. in Math. **143** (1999), 185–250.

[HK99] K. Hirachi and G. Komatsu: Local sobolev Bergman kernel of strictly pseudoconvex domains, in "Analysis and Geometry in Several Complex Variables," Trends in Mathematics, pp. 63–96, Birkhauser 1999.

[H00] K. Hirachi: Construction of boundary invariants and the logarithmic singularity of the Bergman kernel, Ann. Math. **151** (2000), 151–190.

[平地 00] 平地健吾：強擬凸領域におけるベルグマン核の不変式論, 数学 **52** (2000), pp. 360–375, 岩波書店

[FH03] C. Fefferman and K. Hirachi: Ambient metric construction of Q-curvature in conformal and CR geometries, Math. Res. Lett. **10** (2003), 819–832.

[H04] K. Hirachi: A link between the asymptotic expansions of the Bergman kernel and the Szegö kernel, in "Complex Analysis in Several Variables," Advanced Studies in Pure Mathematics **42**, 115–121, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.

[H06]K. Hirachi: Logarithmic singularity of the Szegö kernel and a global invariant of strictly pseudoconvex domains, Ann. Math. **163** (2006), 499–515

ステファン ベルグマン賞について

同賞は，S. ベルグマン婦人の遺言に基づく基金により１９８８年に設立され，選考委員会の設立がアメリカ数学会に依嘱された．対象とされる数学分野は，S. ベルグマンが研究した分野及びそれに関連する分野として，(1) the theory of the kernel function and its applications in real and complex analysis, (2) function-theoretic methods in the theory of partial differential equations of elliptic type with attention to Bergman's operator method, とされていて，毎年または隔年に賞を授与するとなっています．賞金として，現在約２万５千米ドルが受賞者に贈られます.

これまでの受賞者は，次の通り．David W. Catlin (1989), Steven R. Bell and Ewa Ligocka (1991), Charles Fefferman (1992), Yum Tong Siu (1993), John Erik Fornaess (1994), Harold P. Boas and Emil J. Straube (1995), David E. Barrett と Michael Christ (1997), John P. D'Angelo (1999), 倉西正武 (2000), László Lempert と Sidney Webster (2001), M. Salah Baouendi と Linda Preiss Rothschild (2003), Joseph J. Kohn (2004), Elias M. Stein (2005).

詳しくは，http://www.ams.org/prizes/supported-prizes.html をご覧下さい.