解 説

第63巻 第4号 2011年10月 秋季号「共形場理論，モジュラー関手とモジュラーなテンソル圏，永友清和」訂正

訂正 1: 411(43) ページ第 4.7 節 Verlinde の公式は正確でない記述を含む．ここで第 4.7 節全文を以下のように訂正する．

4.7 Verlinde の公式

Verlinde の公式は Y. Z. Huang[1] により証明がアナウンスされている．著者はその証明をチェックしていないが，第 5.3 節で述べるモジュラー関手と関連する重要な論点であるので説明を与える．

頂点作用素代数 V は単純かつ DV と同型で Zhu の有限性条件をみたすとする．さらに任意の $\mathbb{N}$-gradable V-加群[1)] は完全可約であるとする．頂点作用素代数 V の既約加群のリストを $\{L_0 = V, L_1, \ldots, L_r\}$ とし，その指標を $\chi_0(\tau), \chi_1(\tau), \cdots, \chi_r(\tau)$ とおく．

Huang[1] の 5354 ページによれば

$$\operatorname{tr}_{L_i} J\left(\left(e^{-\frac{2\pi iz}{\tau}L_0}\right)\left(-\frac{1}{\tau}\right)^{L_0} u, e^{-\frac{2\pi iz}{\tau}}\right) e^{-\frac{2\pi i}{\tau}(L_0 - c_V/24)} = \sum_{j=0}^{r} s_{ij} \operatorname{tr}_{L_j} J\left(e^{2\pi izL_0}u, e^{2\pi iz}\right) e^{2\pi i\tau(L_0 - c_V/24)}$$

をすべての $u \in V$ に対してみたすような複素行列 (s_{ij}) が存在する．ここで $v \in V_\Delta$ に対して

$$J(v, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(v) z^{-n-\Delta}$$

である．

既約加群の指標の生成する線型空間を $\mathcal{X}$ で表す．Huang の公式において特に $u = |\,0\,\rangle$ とすると反転写像 $\mathcal{H} \to \mathcal{H} : \tau \mapsto -1/\tau$ による指標の変換則

$$\chi_i(-1/\tau) = \sum_{j=0}^{r} s_{ij}\chi_j(\tau) \quad (s_{ij} \in \mathbb{C},\, 0 \leqq i, j \leqq r)$$

を得る．よって線型空間 $\mathcal{X}$ にはモジュラー群 $SL(2,\mathbb{Z})$ が作用していることがわかる．

Verlinde は [50] において射影直線上の 3 点に L_i, L_j, $D(L_k)$ を対応させる余真空の層の階数が

$$N_{ij}^k = \sum_t \frac{s_{it}s_{jt}s_{tk^\dagger}}{s_{0t}}$$

と表現されることを主張した．ここで $L_{k^\dagger} \cong D(L_k)$ である．なお，関数 s_{0t} が零でないことも主張に含まれる．この公式を因子化定理と共に用いれば，Huang の仮定した条件をみたす頂点作用素代数

にもとづく共形場理論においては既約加群の跡関数に対するモジュラー群の作用を調べることにより共形ブロックの層の階数を求めることができる.

訂正 2： 415(47) ページ第 7 行の式を次の 2 行で置き換える.

$$N_{ij}^{k} = \sum_{t} \frac{s_{it}s_{jt}s_{k^*t}}{s_{0t}} = \sum_{t} \frac{s_{it}s_{jt}s_{tk^*}}{s_{0t}}$$

ここで S 行列が対称であることを用いた.

注 釈

1) $\mathbb{N}$-gradable V-加群とは $\mathbb{N}$ で次数付けることの可能な $\mathcal{U}(V)$ 加群で $J_n(v)M_{(m)} \subseteq M_{(m-n)}$ ($m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, v \in V$) が成り立つものである.

文 献

[1] Yi-Zhi Huang, Vertex operator algebras, The Verlinde conjecture and modular tensor categories, Proc. Nat. Acad. Sci., **102**, (2005), 5352–5356.