共形場理論入門

土屋 昭博 述　　　　桑原 敏郎 記

平成 16 年 9 月 17 日

前書き

この講義録は 2002 年 5 月 6〜10 日にわたって名古屋大学教授土屋昭博氏によって「共形場理論入門 — 作用素積展開の使い方教えます」という題で行なわれた講義を桑原がまとめたものです. 講義録中の証明の誤りなどの責任はすべて桑原にあることをあらかじめ断っておきます.

講義の目的は, [TUY] において一般のアフィン Lie 代数と安定代数曲線について構成された共形場理論を, 基本的な $\mathbb{P}^1$ 上で $\widehat{sl}_2$ を使う場合により, 具体的な形で説明することです.

主要な話題は 3 つあります.

(1) 作用素積展開 (OPE) の計算とその応用

(2) 共形場理論から作られる頂点作用素代数

(3) 真空の空間に対する factorization property

(1) は講義の副題になっている話題であり主に 1 章, 2 章, 4 章で扱います. (2) は 4 章で, (3) は 7 章で扱っています.

講義録の構成は講義のものとほぼ一致しています. 1 章, 2 章は肩ならしであり, OPE を具体的に計算してみることでとにかく慣れることが目的です. 本格的な共形場理論は 3 章以降で展開され, 主に $\mathbb{P}^1$ 上の n 個の点をパラメタとする真空の空間というベクトル空間の構造を調べることが目的です. 3 章でそのための基本的な舞台設定を用意し, 4 章では真空の空間を利用して頂点作用素代数と呼ばれる代数を考えます. また, 5 章では相関函数を真空の空間から構成します. 6 章, 7 章では真空の空間を配位空間上の層にしたものを扱います. 6 章ではその層の上に定義された接続を考え, 7 章では factorization property と呼ばれる性質を示して真空の空間の次元がそれから計算できることを明らかにします.

作用素積展開の計算などはかなり冗長ですが, もとの講義の副題にもあるとおり実際に計算できるようになるというのが目的の 1 つですから, なるべく省略せずに書いてあります. またなるべく前提知識を要求しないように書いてありますが, Lie 代数の表現や層についての基本的な知識は仮定します. アフィン Lie 代数についての基本的事実は 2 章にまとめてありますので, 必要に応じてその部分や [K] などを参照してください.

講義録の作成にあたって多くの方々のご助力をいただきました. 特にお茶の水女子大学の武部尚志先生には定理 5.2, 定理 7.9 の証明を教えていただきました. 定理 5.2 の補題 3.4 [1]を用いた証明は東北大学の黒木玄先生に依るものであり, 定理 7.9 に同様の方法を適用した武部先生の証明と併わせて, 本講義録ではこれら定理に明解な証明を与えることができました. また大阪大学の永友清和先生には定理 6.21 の証明を教えていただいたほか, 6 章, 7 章を書くにあたって筆者の理解に誤りが無いか確認していただくなどの御指導をいただきました. また, 早稲田大学上野喜三雄研究室の方々には原稿の間違いを数多く指摘していただきました. これらの方々にはこの場を借りて感謝をいたします. また, このような機会を設けてくださった土屋, 三輪両先生にも感謝いたします.

[1]補題自体は [KL] によるもの

目 次

第1章　ボゾン場

本格的な共形場理論にはいる準備として，まずはボゾン場の場合に作用素値函数を定義しその OPE (operator product expansion – 作用素積展開) を考えてみよう．

1.1　Heisenberg 代数とその表現

まず Heisenberg 代数と呼ばれる基本的な無限次元 Lie 代数の多項式環の上での表現を調べることから始めよう．

定義 1.1. 無限次元 Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ を次の様に定義する:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}a_n \oplus \mathbb{C}c, \\ [a_m, a_n] &= m\delta_{n+m,0}c, \\ [\mathcal{B}, c] &= 0. \end{aligned}$$

$\mathcal{B}$ の表現を構成しよう．まず $\mathcal{B}_1 \underset{\text{def}}{=} \mathbb{C}a_1 \oplus \mathbb{C}a_{-1} \oplus \mathbb{C}c \subset \mathcal{B}$ は 3 次元 Heisenberg 代数であるので，この表現を考える．成立すべき交換関係は

$$[a_1, a_{-1}] = c$$

なので 1 変数の多項式環 $\mathbb{C}[x]$ 上の x を左からかける作用素 $x\cdot$ と微分作用素 d/dx により

$$\begin{cases} a_1 &= \dfrac{d}{dx} \\ a_{-1} &= x \\ c &= \mathrm{id} \end{cases} \tag{1.1}$$

とおくと，$c = 1$ の表現となる．実際

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx}, x\right] &= \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり (1.1) は確かに $\mathcal{B}_1$ の表現である．この事実を用いると，$\mathcal{B}$ の $c = 1$ の表現が各正整数 n に対して変数 x_n を導入して無限変数の多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots]$ 上で次のように構成できる．

命題 1.2. 次の対応は $\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots]$ 上の $\mathcal{B}$ の表現である．

$$\begin{cases} a_n &= \dfrac{\partial}{\partial x_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ a_{-n} &= nx_n \quad (n \in \mathbb{N}) \\ a_0 &= 0 \\ c &= \mathrm{id} \end{cases} \tag{1.2}$$

さらに，a_0 に対応する変数 x_0 を導入することで命題 1.2 を一般化した表現を考えることができる．

定義 1.3. Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ の表現を次で定義する.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\lambda &= \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots] \otimes |\lambda\rangle & (1.3) \\ |\lambda\rangle &= e^{\lambda x_0} & (1.4) \\ a_0 &= \frac{\partial}{\partial x_0} & (1.5) \\ c &= \mathrm{id} & (1.6) \end{aligned}$$

$a_n (n \neq 0)$ は (1.2) と同じとする.

上の表現では $|\lambda\rangle$ は a_0 の固有ベクトルであり

$$a_0|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

となることに注意する. 従って特に $\lambda = 0$ のとき

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &\longrightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots] \\ x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots \otimes |0\rangle &\mapsto x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots \end{aligned}$$

は $\mathcal{B}$ 加群の同型である. ただし, $\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots]$ は命題 1.2 の表現とする.

定義 1.4. Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ の表現 V で 0 でないベクトル $v_0 \in V, \lambda \in \mathbb{C}$ で次を満たすものが存在するとき λ を最高ウェイトとする最高ウェイト表現という.

(1) v_0 に対して $a_n (n \geq 0)$ は次のように作用する.

$$\begin{aligned} a_n v_0 &= 0 \ \ (\forall n > 0) \\ a_0 v_0 &= \lambda v_0 \end{aligned}$$

(2) V は $a_{-n}\,(n > 0)$ で v_0 から生成される. つまり

$$V = \sum_{(m_1, m_2, \ldots)} \mathbb{C} a_{-1}^{m_1} a_{-2}^{m_2} \cdots v_0$$

をみたす. ただし上で $(m_1, m_2, \ldots)$ は全ての m_i は正整数であり, 有限個の i を除いて 0 となるすべての組について和をとるものとする.

また, このとき v_0 を最高ウェイトベクトルという.

命題 1.5. Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ の表現 $\mathcal{F}_\lambda$ は $|\lambda\rangle$ を最高ウェイトベクトルとする最高ウェイト λ の最高ウェイト表現である.

命題 1.6. $\mathcal{F}_\lambda$ は $\mathcal{B}$ の表現として既約である.

証明. $V \subset \mathcal{F}_\lambda$ を 0 でない任意の部分表現とする. 0 でないベクトル $v \in V$ をとり,

$$v = \sum_{(m_1, m_2, \ldots)} c_{(m_1, m_2, \ldots)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots |\lambda\rangle$$

とおく. $c_{(n_1, n_2, \ldots)} \neq 0$ となる項は有限個であるので $c_{(n_1, n_2, \ldots)} \neq 0$ なる $(n_1, n_2, \ldots)$ で $(m_1, m_2, \ldots)$ がすべての i に対して $m_i \geq n_i$ を満たすとき $c_{(m_1, m_2, \ldots)} = 0$ であるようなものが存在する. すると $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots \cdot x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots |\lambda\rangle \neq 0$ ならば, すべての i について $m_i \geq n_i$ であるので,

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots v = c_{(n_1, n_2, \ldots)} n_1! n_2! \cdots |\lambda\rangle$$

となる. 従って, $|\lambda\rangle \in V$ であり, 命題 1.5 より $V = \mathcal{F}_\lambda$ を得る. □

定義 1.7. Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ とその表現 $\mathcal{F}_\lambda$ を以下のように次数付けする:

$$\begin{aligned}\deg a_n &= -n,\\ \deg c &= 0,\\ \deg x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots|\lambda\rangle &= \sum_{j\in\mathbb{N}} jm_j.\end{aligned}$$

ただし, $(m_1, m_2, \ldots)$ は $m_i \geq 0$ で有限個の i を除いて $m_i = 0$ とする. 上で定義した次数による $\mathcal{F}_\lambda$ の d 次の部分空間を $\mathcal{F}_\lambda(d)$ とする. つまり

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\lambda &= \bigoplus_{d\geq 0}\mathcal{F}_\lambda(d)\\ \mathcal{F}_\lambda(d) &= \{v\in\mathcal{F}_\lambda \mid \deg v = d\}\\ &= \mathrm{span}\left\{x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots|\lambda\rangle \,\middle|\, \sum jm_j = d\right\}\end{aligned}$$

と定義する.

命題 1.8. この次数付けで Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ の元 a_n は次数を n 下げる. つまり,

$$a_n\mathcal{F}_\lambda(d) \subset \mathcal{F}_\lambda(d-n)$$

命題 1.9. 表現空間 $\mathcal{F}_\lambda$ の d 次部分の次元は

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{F}_\lambda(d) &= \#\left\{(m_1, m_2, \cdots) \,\middle|\, d = \sum jm_j\right\}\\ &= p(d)\end{aligned}$$

である. ここで, $p(d)$ は分割数である. また $\dim\mathcal{F}_\lambda(d)$ の母函数 $\mathrm{ch}\mathcal{F}_\lambda$ は

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\mathcal{F}_\lambda &\underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{d\geq 0}\dim\mathcal{F}_\lambda(d)q^d\\ &= \sum_{d\geq 0}p(d)q^d\\ &= \prod_{n\geq 1}^{\infty}(1-q^n)^{-1}\end{aligned}$$

となる.

1.2 $\mathcal{F}_\lambda$ 上の作用素値函数と OPE

$\mathcal{B}$ の表現から $\mathcal{F}_\lambda$ 上の作用素値函数を定義して, その作用素積展開 (OPE) を議論したい. まずカレント $a(z)$ を形式巾級数として定義する.

定義 1.10. z を変数として a_n を係数とする形式級数

$$a(z) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$$

をボゾン場のカレントと言う.

$a(z) : \mathcal{F}_\lambda \longrightarrow \mathcal{F}_\lambda[[z, z^{-1}]]$ ゆえ, $a(z)$ は演算子としては形式的であり, z に値を代入することはできないので函数とは言えない. しかし $a(z)$ の行列要素 $\langle\varphi|a(z)|u\rangle$ を見ることで $a(z)$ が $\mathbb{P}^1$ 上の函数と考えられることを示す.

行列要素を考えるために $\mathcal{F}_\lambda$ の双対空間を定義する．ただし $\mathcal{F}_\lambda$ は無限次元空間であるので双対空間として普通の意味での双対空間を考えても行列要素 $\langle\varphi|a(z)|u\rangle$ は無限和になってしまってうまくいかない．そこで $\mathcal{F}_\lambda$ が次数付けされていることを利用して通常よりは制限された意味での双対空間 (restricted dual) を考える．

定義 1.11. 次数付けされた表現空間 $\mathcal{F}_\lambda = \sum_{d\geq 0} \mathcal{F}_\lambda(d)$ の双対空間 (restricted dual) $\mathcal{F}_\lambda^*$ を以下で定義する．まず

$$\mathcal{F}_\lambda(d)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_\lambda(d), \mathbb{C})$$

としてベクトル空間としての自然な埋め込み

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\lambda(d)^* & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_\lambda, \mathbb{C}) \\ \varphi & \mapsto & \tilde{\varphi} \\ \tilde{\varphi}(u) & \underset{\mathrm{def}}{=} & \begin{cases} \varphi(u) & (u \in \mathcal{F}_\lambda(d)) \\ 0 & (u \in \mathcal{F}_\lambda(d') \quad (d' \neq d)) \end{cases} \end{array}$$

を考え, 上の写像による $\mathcal{F}_\lambda(d)^*$ の像を $\mathcal{F}_\lambda^*(d)$ とおく．そして $\mathcal{F}_\lambda^*$ を次で定義する．

$$\mathcal{F}_\lambda^* = \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{F}_\lambda^*(d)$$

定義 1.12. 双対空間 $\mathcal{F}_\lambda^*$ の元は $\mathcal{F}_\lambda$ 上の函数である．以下, 記法として $\langle\varphi| \in \mathcal{F}_\lambda^*, |u\rangle \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して, その pairing を $\langle\varphi|u\rangle$ と書く．

命題 1.13. 双対空間 $\mathcal{F}_\lambda^*$ 上 a_n の作用は次数を n 上げる．つまり

$$a_n \mathcal{F}_\lambda^*(d) \subset \mathcal{F}_\lambda^*(d+n)$$

が成立する．

定義 1.12 の pairing を用いて定義 1.10 のような作用素値形式級数が作用素値有理函数であることを次の様に定義する．

定義 1.14. 変数 $z_1, \ldots, z_k$ に対する作用素値形式級数

$$F(z_1, \ldots, z_k) : \mathcal{F}_\lambda \longrightarrow \mathcal{F}_\lambda[[z_1, z_1^{-1}, z_2, z_2^{-1}, \ldots]]$$

が $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{P}^1$ を変数とする作用素値有理函数であるとは, 任意の $|u\rangle \in \mathcal{F}_\lambda$ と $\langle\varphi| \in \mathcal{F}_\lambda^*$ に対して $\langle\varphi|F(z_1, \ldots, z_k)|u\rangle \in \mathbb{C}[[z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_k, z_k^{-1}]]$ が $(z_1, \ldots, z_k) = (0, \ldots, 0)$ を中心とするある円環領域で絶対収束して, $(z_1, \ldots, z_k) \in (\mathbb{P}^1)^k$ を変数とするある有理函数の $(z_1, \ldots, z_k) = (0, \ldots, 0)$ のまわりでの Laurent 級数展開に一致することとする．

命題 1.15. 作用素値形式級数 $a(z)$ は $z = 0, \infty$ にのみ極を持つ作用素値有理函数である．すなわち任意の $\langle\varphi| \in \mathcal{F}_\lambda^*$ と任意の $|u\rangle \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して

$$\langle\varphi|a(z)|u\rangle \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$$

である．

証明. $\langle\varphi|a(z)|u\rangle$ を z について展開すれば

$$\langle\varphi|a(z)|u\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle\varphi|a_n|u\rangle z^{-n-1} \tag{1.7}$$

である．今, $\langle\varphi| \in \mathcal{F}_\lambda(d_1)^*$, $|u\rangle \in \mathcal{F}_\lambda(d_2)$ としていい．命題 1.8 より

$$\langle\varphi|a_n|u\rangle \neq 0 \Longrightarrow d_1 = d_2 - n$$

であるので, (1.7) は $z^{d_1-d_2-1}$ の定数倍であるから $\mathbb{P}^1$ の有理函数となり, 極は $z = 0, \infty$ のみにある． □

次に 1 変数の作用素値函数 $a(z)$ を 2 つ "合成" することで 2 変数の作用素値函数を考えてみる. ただし "合成" $a(z)a(w)$ の意味は行列要素の意味で考える. つまり $\langle\varphi| \in \mathcal{F}_\lambda^*$ と $|u\rangle \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して $\langle\varphi|a(z)a(w)|u\rangle$ が意味を持つかを調べる.

まず, 作用素の正規順序を導入する. Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ の普遍展開環 $U(\mathcal{B})$ を

$$U(\mathcal{B}) = T(\mathcal{B})/\langle a_m a_n - a_n a_m - [a_m, a_n]\rangle$$

と定義する. ここで $T(\mathcal{B})$ は $\mathcal{B}$ から作られるテンソル代数であり, $\langle\cdots\rangle$ は $T(\mathcal{B})$ の両側イデアルとする. 普遍展開環の基本的な性質については定義 2.20 とそれに続く議論を参照せよ. 特に, 事実 2.26 より $c = 1$ とした普遍展開環 $U(\mathcal{B})/\langle c-1\rangle$($\langle c-1\rangle$ は $c-1$ で生成される両側イデアル) はベクトル空間としては a_n $(n \in \mathbb{Z})$ を変数とする多項式環 $\mathbb{C}[a_n\ (n \in \mathbb{Z})]$ と同型である.

定義 1.16. Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ の正規順序 (normal order) とは, $a_n (n \in \mathbb{Z})$ を変数とする多項式環 $\mathbb{C}[a_n\ (n \in \mathbb{Z})]$ から $\mathcal{B}$ の普遍展開環 $U(\mathcal{B})$ への線型写像 $:\cdots:$ で

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[a_n\ (n \in \mathbb{Z})] &\longrightarrow U(\mathcal{B}) \\ :a_{i_1}^{m_1} a_{i_2}^{m_2} \cdots a_{i_s}^{m_s}: &\underset{\mathrm{def}}{=} a_{i_1}^{m_1} a_{i_2}^{m_2} \cdots a_{i_s}^{m_s} \qquad (i_1 < i_2 < \cdots < i_s,\ m_j \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

なるものを言う. 正規順序は a_n を係数とする級数 $a(z)$ には線型に拡張する.

命題 1.17. 正規順序で考えた合成 $:a(z)a(w): = \sum_{m,n} :a_m a_n:\, z^{-m-1} w^{-n-1}$ は任意の $\langle\varphi| \in \mathcal{F}_\lambda^*$ と任意の $|u\rangle \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して

$$\langle\varphi|\, :a(z)a(w):\, |u\rangle \in \mathbb{C}[z, z^{-1}, w, w^{-1}]$$

証明. 命題 1.8, 命題 1.13 より, 十分大きな n に対して

$$\begin{aligned} a_n|u\rangle &= 0 \\ \langle\varphi|a_{-n} &= 0 \end{aligned}$$

である. $:a_m a_n: = :a_n a_m:$ に注意すると

$$\langle\varphi|\, :a(z)a(w):\, |u\rangle = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle\varphi|\, :a_m a_n:\, |u\rangle z^{-m-1} w^{-n-1}$$

は有限和となる. 従って

$$\langle\varphi|\, :a(z)a(w):\, |u\rangle \in \mathbb{C}[z, z^{-1}, w, w^{-1}]$$

である. □

では $\langle\varphi|a(z)a(w)|u\rangle$ を考えよう.

命題 1.18. 任意の $\langle\varphi| \in \mathcal{F}_\lambda^*$ と任意の $|u\rangle \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して $\langle\varphi|a(z)a(w)|u\rangle$ は領域 $|z| > |w| > 0$ で絶対収束してこの領域で次の等式を満たす:

$$\langle\varphi|a(z)a(w)|u\rangle = \frac{1}{(z-w)^2}\langle\varphi|u\rangle + \langle\varphi|\, :a(z)a(w):\, |u\rangle.$$

従って, $a(z)a(w)$ は $(z, w) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の 2 変数作用素値有理函数で, その極が z, $w = 0, \infty$ と $z = w$ にあるものに解析接続される.

今後, 上の式の $\langle\varphi|, |u\rangle$ を省略して

$$a(z)a(w) = \frac{1}{(z-w)^2} + :a(z)a(w): \tag{1.8}$$

と書く. この式は作用素値函数の "合成" によって新しく生れた極 $z = w$ での singular part の様子を表した式と読める. このような式を作用素積展開 (operator product expansion — OPE) という.

証明. 交換関係 $[a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0}c$ と正規順序を用いて

$$\begin{aligned}\langle\varphi|a(z)a(w)|u\rangle - \langle\varphi|\,{:}a(z)a(w){:}\,|u\rangle &= \sum_{n\geq 1}\langle\varphi|\,[a_n, a_{-n}]\,|u\rangle z^{-n-1}w^{n-1} \\ &= z^{-2}\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{w}{z}\right)^{n-1}\langle\varphi|u\rangle \\ &= \frac{1}{(z-w)^2}\langle\varphi|u\rangle\end{aligned}$$

となる. ただし最後の等号は, 左辺が $|z| > |w| > 0$ で絶対収束してそこで成立している. □

系 1.19. 領域 $|z| > |w| > 0$ で定義された作用素値函数 $a(z)a(w)$ と領域 $|w| > |z| > 0$ で定義された作用素値函数 $a(w)a(z)$ を比較してみると, その定義域は異なるがそれぞれを解析接続すると $z, w \in \mathbb{P}^1$ の作用素値有理函数として一致する:

$$a(z)a(w) = a(w)a(z). \tag{1.9}$$

つまり, 任意の $\langle\varphi| \in \mathcal{F}_\lambda^*$ と $|u\rangle \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して $\langle\varphi|a(z)a(w)|u\rangle$ と $\langle\varphi|a(w)a(z)|u\rangle$ はそれぞれ解析接続すると 2 変数有理函数として

$$\langle\varphi|a(z)a(w)|u\rangle = \langle\varphi|a(w)a(z)|u\rangle$$

を満たす. この意味で (1.9) のように書くのである.

証明. 命題 1.18 の (1.8) で ${:}a(z)a(w){:}={:}a(w)a(z){:}$ に注意すれば (1.9) を得る. □

定義 1.20. $\lambda = 0$ のとき, 最高ウェイトベクトル $|0\rangle \in \mathcal{F}_0(0)$, $\langle 0| \in \mathcal{F}_0^*(0)$ を $\langle 0|0\rangle = 1$ と正規化する. $z_1, \ldots, z_k$ を変数とする作用素値有理函数 $F(z_1, \ldots, z_k)$ に対してその真空期待値 (vacuum expectation) を

$$\langle F(z_1, \ldots, z_k)\rangle = \langle 0|F(z_1, \ldots, z_k)|0\rangle$$

と定義する.

系 1.21. 作用素値函数 $a(z)a(w)$ の真空期待値は

$$\langle{:}a(z)a(w){:}\rangle = 0 \tag{1.10}$$

$$\langle a(z)a(w)\rangle = \frac{1}{(z-w)^2} \tag{1.11}$$

を満たす.

証明. (1.10) を示す.

$$\begin{aligned}\langle{:}a(z)a(w){:}\rangle &= \langle 0|\,{:}a(z)a(w){:}\,|0\rangle \\ &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\langle 0|\,{:}a_m a_n{:}\,|0\rangle z^{-m-1}w^{-n-1} \\ &= \sum_{m<0,n\in\mathbb{Z}}\langle 0|a_m a_n|0\rangle z^{-m-1}w^{-n-1} + \sum_{m\geq 0,n\in\mathbb{Z}}\langle 0|a_n a_m|0\rangle z^{-m-1}w^{-n-1}\end{aligned} \tag{1.12}$$

ここで命題 1.13 より $m < 0$ のとき $\langle 0|a_m = 0$, また命題 1.8 より $m > 0$ のとき $a_m|0\rangle = 0$ であり, 定義 1.3 より $a_0|0\rangle = 0$ であるので, (1.12) は 0 となる.

(1.11) は (1.10) と (1.8) から正規化 $\langle 0|0\rangle = 1$ を用いて得られる. □

注意 1.22. (1.8) と系 1.21 より

$$a(z)a(w) = {:}a(z)a(w){:} + \langle a(z)a(w)\rangle$$

と表わせる. この等式は $\mathcal{F}_\lambda$ $(\lambda \neq 0)$ 上においても成立している.

3 つ以上の作用素値函数 $a(z)$ の "合成" についても次の形の公式が成り立つ. それらをまとめて Wick の定理という.

定理 1.23 (Wick). $\mathcal{F}_\lambda$ 上の変数 $z_1^{(1)}, \ldots, z_{i_1}^{(1)}, z_1^{(2)}, \ldots, z_{i_2}^{(2)}, \ldots, z_1^{(k)}, \ldots, z_{i_k}^{(k)}$ の作用素値函数の "合成" に対して次の公式が成立する:

$$
\begin{aligned}
&:a(z_1^{(1)})\cdots a(z_{i_1}^{(1)})::a(z_1^{(2)})\cdots a(z_{i_2}^{(2)}):\cdots:a(z_1^{(k)})\cdots a(z_{i_k}^{(k)}):\\
&= \sum \langle a(z_{j_{p_1}}^{(p_1)})a(z_{j_{q_1}}^{(q_1)})\rangle\cdots\langle a(z_{j_{pn}}^{(p_n)})a(z_{j_{qn}}^{(q_n)})\rangle :\cdots\check{a}(z_{j_{p_1}}^{(p_1)})\cdots\check{a}(z_{j_{q_1}}^{(q_1)})\cdots\check{a}(z_{j_{pn}}^{(p_n)})\cdots\check{a}(z_{j_{qn}}^{(q_n)})\cdots:
\end{aligned}
$$

ここで $n \geq 0$, $p_1 < q_1, \ldots, p_n < q_n$ で, 右辺の和はこのような条件を満たす全ての組についてとる. また $:\cdots\check{a}(z_{j_{p_1}}^{(p_1)})\cdots\check{a}(z_{j_{q_1}}^{(q_1)})\cdots\check{a}(z_{j_{pn}}^{(p_n)})\cdots\check{a}(z_{j_{qn}}^{(q_n)})\cdots:$ は $a(z_{j_{p_1}}^{(p_1)}), a(z_{j_{q_1}}^{(q_1)}), \ldots, a(z_{j_{pn}}^{(p_n)}), a(z_{j_{qn}}^{(q_n)})$ を除いた全てについて正規順序で積をとったものである.

Wick の定理のいくつかの例を示す.

$$
a(z_1)a(z_2)a(z_3) =: a(z_1)a(z_2)a(z_3): +\langle a(z_1)a(z_2)\rangle a(z_3) + \langle a(z_1)a(z_3)\rangle a(z_2) + \langle a(z_2)a(z_3)\rangle a(z_1) \tag{1.13}
$$

$$
\begin{aligned}
a(z_1)a(z_2)a(z_3)a(z_4) =:a(z_1)a(z_2)a(z_3)a(z_4): &+ \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2}\langle a(z_{i_1})a(z_{i_2})\rangle :a(z_{j_1})a(z_{j_2}):\\
&+ \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2}\langle a(z_{i_1})a(z_{i_2})\rangle\langle a(z_{j_1})a(z_{j_2})\rangle
\end{aligned} \tag{1.14}
$$

$$
:a(z_1)a(z_2): a(z_3) = :a(z_1)a(z_2)a(z_3): + \langle a(z_1)a(z_3)\rangle a(z_2) + \langle a(z_2)a(z_3)\rangle a(z_1) \tag{1.15}
$$

$$
\begin{aligned}
:a(z_1)a(z_2)::a(z_3)a(z_4): =&:a(z_1)a(z_2)a(z_3)a(z_4): +\langle a(z_1)a(z_3)\rangle :a(z_2)a(z_4):\\
&+ \langle a(z_1)a(z_4)\rangle :a(z_2)a(z_3): +\langle a(z_2)a(z_3)\rangle :a(z_1)a(z_4): +\langle a(z_2)a(z_4)\rangle :a(z_1)a(z_3):\\
&+ \langle a(z_1)a(z_3)\rangle\langle a(z_2)a(z_4)\rangle + \langle a(z_1)a(z_4)\rangle\langle a(z_2)a(z_3)\rangle
\end{aligned} \tag{1.16}
$$

定理 1.23 の応用を示そう.

定義 1.24. エネルギー運動量テンソル (energy-momentum tensor) と呼ばれる作用素値有理函数 $T(z)$ およびその Fourier mode L_n を次のように定義する:

$$
T(z) = \frac{1}{2}:a(z)a(z):, \tag{1.17}
$$

$$
T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}. \tag{1.18}
$$

命題 1.18 より $a(z)^2$ という式は発散するが, (1.17) は正規順序で積をとっているので, 命題 1.17 より任意の $\langle\varphi| \in \mathcal{F}_\lambda^*$ と任意の $|u\rangle \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して行列要素 $\langle\varphi|T(z)|u\rangle$ は $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ に入る.

$T(z)$ と $a(w)$ の間の OPE を計算してみよう.

命題 1.25. 作用素値 Laurent 級数 $T(z)a(w)$ は領域 $|z| > |w| > 0$ で, $a(w)T(z)$ は $|w| > |z| > 0$ で, $T(z)T(w)$ は $|z| > |w| > 0$ でそれぞれ絶対収束して $z, w = 0, \infty$ および $z = w$ にのみ極を持つ有理函数に解析接続される. さらに $z = w$ のまわりでの singular part は

$$
\begin{aligned}
T(z)a(w) &\sim a(w)T(z) \qquad (1.19)\\
&\sim \frac{1}{(z-w)^2}a(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w a(w)
\end{aligned}
$$

$$
T(z)T(w) \sim \frac{1/2}{(z-w)^4}\mathrm{id} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} \tag{1.20}
$$

である. ただしここで $\sim$ は $z = w$ での regular part を除いて一致するという意味とする.

証明. (1.15) を用いると

$$\begin{aligned} T(z)a(w) &= \frac{1}{2} :a(z)^2: a(w) \\ &= \frac{1}{2} :a(z)^2 a(w): + \langle a(z)a(w)\rangle a(z) \end{aligned}$$

であるが, ここで, $(1/2) :a(z)^2 a(w):$ は $z=w$ で正則で, $a(z)$ は $z=w$ で展開すれば

$$a(z) = a(w) + \partial_w a(w)(z-w) + \frac{1}{2}\partial_w^2 a(w)(z-w)^2 + \cdots$$

となる. また系 1.21 より $\langle a(z)a(w)\rangle = 1/(z-w)^2$ であるから, これらを代入して (1.19) を得る.
同様に (1.15) の代わりに (1.16) を用いると

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{1}{4} :a(z)^2::a(w)^2: \\ &= \frac{1}{4} :a(z)^2 a(w)^2: \\ &\qquad + \langle a(z)a(w)\rangle :a(z)a(w): + \frac{1}{2}\langle a(z)a(w)\rangle\langle a(z)a(w)\rangle \\ &= :T(z)T(w): + \frac{1}{(z-w)^2} :a(w)(a(w)+\partial_w a(w)(z-w)+\cdots): + \frac{1}{2(z-w)^4} \\ &\sim \frac{1/2}{(z-w)^4}\mathrm{id} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} \end{aligned}$$

となり (1.20) が得られる. □

(1.8), (1.19), (1.20) の 3 式は作用素値函数の合成の $z=w$ での singular part しか求めていないが, 実はその Fourier mode $\{a_n\}$, $\{L_n\}$ の間の交換関係がこの 3 式から全て計算できてしまう.

補題 1.26. 表現空間 $\mathcal{F}_\lambda$ 上で

$$[L_m, a(w)] = w^m \left\{ w\frac{d}{dw} + (m+1) \right\} a(w) \tag{1.21}$$

$$[L_m, T(w)] = w^m \left\{ w\frac{d}{dw} + 2(m+1) \right\} T(w) + \frac{m^3-m}{12} w^{m-2} \tag{1.22}$$

が成立する.

証明. 命題 1.25 より $T(z)a(w)$ は領域 $|z|>|w|>0$ で絶対収束する. $T(z)a(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n a(w) z^{-n-2}$ なので $z=\infty$ の積分を考えて

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{z=\infty} T(z)a(w)z^{m+1}dz &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{z=\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n a(w) z^{m-n-1}dz \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{z^{-1}=0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n a(w)(z^{-1})^{n-m-1}d(z^{-1}) \\ &= L_m a(w) \end{aligned}$$

である. 従って留数定理を用いて

$$\begin{aligned} L_m a(w) &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{z=\infty} T(z)a(w)z^{m+1}dz \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{z=0} T(z)a(w)z^{m+1}dz + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{z=w} T(z)a(w)z^{m+1}dz \end{aligned} \tag{1.23}$$

ここで $z=0$ のまわりで積分する時には領域 $|w|>|z|>0$ 上での積分であるので $a(w)T(z)$ を, $z=w$ のまわりで積分する時には領域 $|w|>|z-w|>0$ 上での積分であるので $T(z)a(w)$ の OPE (1.19) を用いて

$$\begin{aligned}
(1.23) \quad &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{z=0} a(w)T(z)z^{m+1}dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{z=w}\left\{\frac{a(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial_w a(w)}{z-w}\right\}z^{m+1}dz \\
&= a(w)L_m + (m+1)w^m a(w) + w^{m+1}\partial_w a(w) \\
&= a(w)L_m + w^m\left\{w\partial_w + (m+1)\right\}a(w)
\end{aligned}$$

を得る. (1.22) も同様に示せる. □

命題 1.27. 表現空間 $\mathcal{F}_\lambda$ 上で

$$[L_m, a_n] = -na_{m+n} \tag{1.24}$$

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}\mathrm{id} \tag{1.25}$$

が成立する.

証明. (1.21) から $a(w)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n w^{-n-1}$ であるので $w=0$ での積分を用いて

$$\begin{aligned}
[L_m, a_n] &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{w=0}\sum_{p\in\mathbb{Z}}[L_m, a_p]\,w^{n-p-1}dw \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{w=0}[L_m, a(w)]\,w^n dw \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{w=0} w^{m+n}\left\{w\frac{d}{dw}+(m+1)\right\}a(w)dw \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{w=0}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\left\{-(p+1)a_p w^{m+n-p-1} + (m+1)a_p w^{m+n-p-1}\right\}dw \\
&= -(m+n+1)a_{m+n} + (m+1)a_{m+n} \\
&= -na_{m+n}
\end{aligned}$$

を得る. (1.25) も同様である. □

L_n の間の交換関係 (1.25) は Virasoro 代数と呼ばれる共形場理論において重要な Lie 代数の表現を意味する.

定義 1.28. Virasoro 代数と呼ばれる無限次元 Lie 代数を次で定義する:

$$\begin{aligned}
Vir &= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}c_v \\
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}c_v \\
[Vir, c_v] &= 0.
\end{aligned}$$

ベクトル場のなす Lie 代数 $\mathbb{C}((\xi))\frac{d}{d\xi}$ を考えると $l_m \underset{\mathrm{def}}{=} -\xi^{m+1}\frac{d}{d\xi}$ の間の交換関係は

$$[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n}$$

となる. つまり Virasoro 代数は $\mathbb{C}((\xi))\frac{d}{d\xi}$ の中心拡大である.

命題 1.27 の (1.25) は $\mathcal{F}_\lambda$ 上定義された作用素 $\{L_n\}$ が Vir の $c_v = 1$ の表現を与えることを示している．Virasoro 代数 Vir の表現における Vir の中心 c_v はスカラー作用素として表現される．c_v の作用の値を中心電荷 (central charge) と言う．$\mathcal{F}_\lambda$ は中心電荷 1 の表現である．

実は命題 1.27 と同様の計算により $a(z)a(w)$ の OPE (1.8) から元の交換関係

$$\begin{aligned}[][a_m, a_n] &= m\delta_{m+n,0}\mathrm{id} \\ [a_m, a(w)] &= mw^{m-1} \end{aligned} \tag{1.26}$$

が得られる．つまり作用素値函数の OPE とその Fourier mode の交換関係とは等価な式である．

1.3　$\mathcal{F}_\lambda$ から構成される $\widehat{sl}_2$ の表現

これまでに Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ について $\mathbb{P}^1$ 上の作用素値函数を定義してその OPE を調べた．2 章以降は Heisenberg 代数の代わりにアフィン Lie 代数 $\widehat{sl}_2$ で議論を行なう．このセクションの残りで両者の橋渡しのために $\mathcal{B}$ の表現 $\mathcal{F}_\lambda$ から $\widehat{sl}_2$ の最も基本的な表現であるレベル 1 の既約表現と呼ばれる表現を構成してみよう．構成には頂点作用素 $V_\lambda(z)$ が用いられる．

まず $\mu \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} e^{\mu x_0} : \mathcal{F}_\lambda &\rightarrow \mathcal{F}_{\lambda+\mu} \\ v &\mapsto e^{\mu x_0} v \end{aligned}$$

とする．つまり $e^{\mu x_0}$ は左から $e^{\mu x_0}$ 自身をかける演算子で, 特に $\mathcal{F}_\lambda$ の最高ウェイトベクトル $|\lambda\rangle$ は

$$\begin{aligned} e^{\mu x_0}(|\lambda\rangle) &= e^{\mu x_0} e^{\lambda x_0} \\ &= e^{(\lambda+\mu)x_0} \\ &= |\lambda+\mu\rangle \end{aligned}$$

と $\mathcal{F}_{\lambda+\mu}$ の最高ウェイトベクトルにうつる．

$$\varphi(z) = x_0 + a_0 \log z - \sum_{n\neq 0} \frac{a_n}{n} z^{-n} \tag{1.27}$$

とおく．$\varphi(z)$ は, $a(z)$ を積分定数を x_0 として形式的に積分したものであり, $\partial_z \varphi(z) = a(z)$ である．

定義 1.29. a_n の指数函数 $\exp(-\lambda(a_n/n)z^{-n})$ に関する正規順序は

$$\begin{aligned} :\exp\left(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}\right)\exp\left(-\mu\frac{a_n}{n}z^{-n}\right): &= \begin{cases} \exp\left(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}\right)\exp\left(-\mu\frac{a_n}{n}z^{-n}\right) & (m \le n) \\ \exp\left(-\mu\frac{a_n}{n}z^{-n}\right)\exp\left(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}\right) & (m > n) \end{cases} \\ :a_m \exp\left(-\mu\frac{a_n}{n}z^{-n}\right): &= \begin{cases} a_m \exp\left(-\mu\frac{a_n}{n}z^{-n}\right) & (m \le n) \\ \exp\left(-\mu\frac{a_n}{n}z^{-n}\right) a_m & (m > n) \end{cases} \end{aligned}$$

と定義する．因子が 3 つ以上の場合にも同様に a_n の添字 n が大きいものを右におくことで定義する．

定義 1.30. $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} V_\lambda(z) &\underset{\mathrm{def}}{=} :e^{\lambda\varphi(z)}: \\ &= \exp\left(-\lambda\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}z^{-n}\right)e^{\lambda x_0}\exp(\lambda a_0 \log z)\exp\left(-\lambda\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}z^{-n}\right) \end{aligned}$$

を重さ λ のボゾン場の頂点作用素と言う．

命題 1.31. $V_\mu(z)$ は $\mathcal{F}_\lambda \longrightarrow \mathcal{F}_{\lambda+\mu}$ なる $\mathbb{P}^1$ 上の $z=0,\infty$ に分岐点を持つ多値函数になる．詳しく述べると, 任意の $\langle\varphi| \in \mathcal{F}^*_{\lambda+\mu}$ と $|u\rangle \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して

$$\langle\varphi|V_\mu(z)|u\rangle \in z^{\lambda\mu}\mathbb{C}[z,z^{-1}]$$

である．

証明. 定義 1.30 より $V_\mu(z)|u\rangle \in \mathcal{F}_{\lambda+\mu}$ であり

$$\langle\varphi|V_\mu(z)|u\rangle = \langle\varphi|\exp\left(-\mu\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}z^{-n}\right)e^{\mu x_0}z^{\mu a_0}\exp\left(-\mu\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}z^{-n}\right)|u\rangle \tag{1.28}$$

となる．$m,n>0$ に対して a_m, a_n は可換であるので

$$\begin{aligned}\exp\left(-\mu\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}z^{-n}\right)|u\rangle &= \prod_{n>0}\exp\left(-\mu\frac{a_n}{n}z^{-n}\right)|u\rangle \\ &= \prod_{n>0}\sum_{m\geq 0}\frac{(-\mu)^m}{m!}\left(\frac{a_n}{n}z^{-n}\right)^m|u\rangle \in \mathcal{F}_\lambda[z^{-1}] \qquad (1.29)\end{aligned}$$

となる．ここで a_n は次数を n 下げるので, (1.29) は有限個の項を除いて 0 である．同様に

$$\langle\varphi|\exp\left(-\mu\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}z^{-n}\right) \in \mathcal{F}^*_{\lambda+\mu}[z]$$

も有限和になる． $z^{\mu a_0}$ は $\mathcal{F}_\lambda$ 上 $z^{\lambda\mu}$ で作用しているので $\langle\varphi|V_\mu(z)|u\rangle$ は有限和となり, $\langle\varphi|V_\mu(z)|u\rangle \in z^{\lambda\mu}\mathbb{C}[z,z^{-1}]$ を得る． □

注意 1.32. 命題 1.31 で $\lambda\mu \notin \mathbb{Z}$ のとき $\langle\varphi| \in \mathcal{F}^*_{\lambda+\mu}$, $|u\rangle \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して $\langle\varphi|V_\mu(z)|u\rangle$ は $z^{\lambda\mu}$ の形の因子を持つので多値性が現われることに注意しよう．

$V_\lambda(z)$ に関する OPE を調べてみよう．

命題 1.33. $V_\lambda(z)V_\mu(w)$, $a(z)V_\lambda(w)$, $T(z)V_\lambda(w)$ はいずれも作用素値函数の意味で $|z|>|w|>0$ で収束して $z=w$ の周りで次のように展開される:

$$\begin{aligned}V_\lambda(z)V_\mu(w) &= (z-w)^{\lambda\mu}:V_\lambda(z)V_\mu(w): &(1.30)\\ a(z)V_\lambda(w) &= \frac{\lambda}{z-w}V_\lambda(w)+:a(z)V_\lambda(w): &(1.31)\\ T(z)V_\lambda(w) &\sim \frac{\lambda^2}{2(z-w)^2}V_\lambda(w)+\frac{1}{z-w}\partial_w V_\lambda(w) &(1.32)\end{aligned}$$

証明. $\langle\varphi| \in \mathcal{F}^*_{\lambda+\mu+\nu}$, $|u\rangle \in \mathcal{F}_\nu$ とする．

$$\begin{aligned}\langle\varphi|V_\lambda(z)V_\mu(w)|u\rangle &= \langle\varphi|\exp\left(-\lambda\sum_{m<0}\frac{a_m}{m}z^{-m}\right)e^{\lambda x_0}z^{\lambda a_0}\exp\left(-\lambda\sum_{m>0}\frac{a_m}{m}z^{-m}\right)\\ &\quad \exp\left(-\mu\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)e^{\mu x_0}w^{\mu a_0}\exp\left(-\mu\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)|u\rangle\end{aligned}$$

これを正規順序に直せばいい．まず

$$m+n\neq 0 \Longrightarrow [a_m,a_n]=0$$

に注意すれば,

$$\begin{aligned}\exp\Bigl(-\lambda\sum_{m>0}\frac{a_m}{m}z^{-m}\Bigr) &= \prod_{m>0}\exp\Bigl(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}\Bigr)\\ \exp\Bigl(-\mu\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\Bigr) &= \prod_{n>0}\exp\Bigl(-\mu\frac{a_n}{n}w^{-n}\Bigr)\end{aligned}$$

であり, また $m+n\neq 0$ のとき

$$\exp\left(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}\right)\exp\left(-\mu\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)=\exp\left(-\mu\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)\exp\left(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}\right)$$

であるから, 各 m に対して $\exp\left(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}\right)\exp\left(-\mu\frac{a_{-m}}{-m}w^{m}\right)$ の順番を入れ替えたときにどうなるかを計算すればいい. Campbell-Hausdorff の公式

$$e^Xe^Y=e^{(X+Y)+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[[X,Y],Y]-\frac{1}{12}[[X,Y],X]+\cdots} \tag{1.33}$$

において $X=-\lambda(a_m/m)z^{-m}$, $Y=\mu(a_{-m}/m)w^m$ とすれば, $[X,Y]$ は

$$\left[-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m},\mu\frac{a_{-m}}{m}w^m\right]=-\lambda\mu\frac{1}{m}\left(\frac{w}{z}\right)^m c$$

となって, これは $\mathcal{B}$ の中心に含まれるので (1.33) で $[X,Y]$ の交換子を含む指数の第 3 項以降の項はすべて 0 になる. 従って

$$\begin{aligned}&\exp\left(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}\right)\exp\left(\mu\frac{a_{-m}}{m}w^m\right)\\ &= \exp\left(\left[-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m},\mu\frac{a_{-m}}{m}w^m\right]\right)\exp\left(\mu\frac{a_{-m}}{m}w^m\right)\exp\left(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}\right)\\ &= \exp\left(-\lambda\mu\frac{1}{m}\left(\frac{w}{z}\right)^m\right)\exp\left(\mu\frac{a_{-m}}{m}w^m\right)\exp\left(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}\right)\end{aligned}$$

であるから全ての $m>0, n<0$ についてかけ合わせて

$$\begin{aligned}&\exp\Bigl(-\lambda\sum_{m>0}\frac{a_m}{m}z^{-m}\Bigr)\exp\Bigl(-\mu\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\Bigr)\\ &= \prod_{m>0}\exp\left(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}\right)\prod_{n<0}\exp\left(-\mu\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)\\ &= \prod_{m>0}\exp\left(-\lambda\mu\frac{1}{m}\left(\frac{w}{z}\right)^m\right)\prod_{n<0}\exp\left(-\mu\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)\prod_{m>0}\exp\left(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}\right)\end{aligned} \tag{1.34}$$

となる. ここで Taylor 展開

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

を用いれば

$$\begin{aligned}\prod_{m>0}\exp\left(-\lambda\mu\frac{1}{m}\left(\frac{w}{z}\right)^m\right) &= \exp\left(\sum_{m>0}-\lambda\mu\frac{1}{m}\left(\frac{w}{z}\right)^m\right)\\ &= \exp\left(\lambda\mu\log\left(1-\frac{w}{z}\right)\right)\\ &= \left(1-\frac{w}{z}\right)^{\lambda\mu}\end{aligned}$$

を得るので

$$(1.34)=\left(1-\frac{w}{z}\right)^{\lambda\mu}\exp\Bigl(-\mu\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\Bigr)\exp\Bigl(-\lambda\sum_{m>0}\frac{a_m}{m}z^{-m}\Bigr)$$

となる. 同様に (1.33) を用いて

$$z^{\lambda a_0}e^{\mu x_0} = e^{\mu x_0}z^{\lambda a_0}z^{\lambda\mu[a_0,x_0]} = e^{\mu x_0}z^{\lambda a_0}z^{\lambda\mu}$$

を得る. これらから (1.30) が導かれる.

$a(z)V_\lambda(w)$ も同様に考える. まず各 m に対して $:a_m z^{-m-1}V_\lambda(w):$ は次の形

$$\begin{aligned}
&:a_m z^{-m-1}V_\lambda(w):= \\
&\quad\begin{cases}
\exp\left(-\lambda\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)a_m z^{-m-1}e^{\lambda x_0}w^{\lambda a_0}\exp\left(-\lambda\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right) & (m<0)\\
\exp\left(-\lambda\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)e^{\lambda x_0}a_0 z^{-1}w^{\lambda a_0}\exp\left(-\lambda\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right) & (m=0)\\
\exp\left(-\lambda\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)e^{\lambda x_0}w^{\lambda a_0}\exp\left(-\lambda\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)a_m z^{-m-1} & (m>0)
\end{cases}
\end{aligned}$$

である. これを見ると各 $m>0$ について a_m と $\exp\left(\lambda\frac{a_{-m}}{m}w^m\right)$ の順序が入れ替わり, また a_0 と $e^{\lambda x_0}$ の順序が入れ替わるので, これらを計算すればいい.

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda x_0}a_0 z^{-1}e^{\lambda x_0} &= e^{\mathrm{ad}(-\lambda x_0)}(a_0 z^{-1})\\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(-\lambda)^n}{n!}(\mathrm{ad}x_0)^n(a_0 z^{-1})\\
&= a_0 z^{-1} + \lambda z^{-1}
\end{aligned}$$

これを移項して

$$a_0 z^{-1}e^{\lambda x_0} = e^{\lambda x_0}a_0 z^{-1} + \lambda z^{-1}e^{\lambda x_0}$$

を得る. 同様に $m>0$ のとき

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\lambda\frac{a_{-m}}{m}w^m\right)a_m z^{-m-1}\exp\left(\lambda\frac{a_{-m}}{m}w^m\right) &= \exp\left(\mathrm{ad}\left(-\lambda\frac{a_{-m}}{m}w^m\right)\right)a_m z^{-m-1}\\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(-\lambda w^m/m)^n}{n!}\left(\mathrm{ad}a_{-m}\right)^n a_m z^{-m-1}\\
&= a_m z^{-m-1} + \left(-\frac{\lambda w^m}{m}\right)[a_{-m}, a_m]\, z^{-m-1}\\
&= a_m z^{-m-1} + \left(-\frac{\lambda w^m}{m}\right)(-m)z^{-m-1}\\
&= a_m z^{-m-1} + \lambda z^{-1}\left(\frac{w}{z}\right)^m
\end{aligned}$$

を移項して

$$a_m z^{-m-1}\exp\left(\lambda\frac{a_{-m}}{m}w^m\right) = \exp\left(\lambda\frac{a_{-m}}{m}w^m\right)a_m z^{-m-1} + \lambda z^{-1}\left(\frac{w}{z}\right)^m\exp\left(\lambda\frac{a_{-m}}{m}w^m\right)$$

を得る. これらをまとめて

$$\begin{aligned}
a(z)V_\lambda(w) &= :a(z)V_\lambda(w): + \lambda z^{-1}\sum_{m\geq 0}\left(\frac{w}{z}\right)^m V_\lambda(w)\\
&= :a(z)V_\lambda(w): + \frac{\lambda}{z-w}V_\lambda(w)
\end{aligned}$$

となる.

$T(z)V_\lambda(w)$ に対しては $T(z)$ の定義 (1.17) と (1.8) より $a(z)a(z') - 1/(z-z')^2$ は $z=z'$ で正則であり, $z'\to z$ で $2T(z)$ に収束する. 従って

$$T(z) = \frac{1}{2}\lim_{z'\to z}\left(a(z)a(z') - \frac{1}{(z-z')^2}\right)$$

であるのでこれを用いる．まず $a(z)a(z')V_\lambda(w)$ を計算すると，$V_\lambda(w)$ が入った式でも Wick の定理 (定理 1.23) のように計算できて

$$\begin{aligned}
a(z)a(z')V_\lambda(w) &= a(z)\left(:a(z')V_\lambda(w): + \frac{\lambda}{z'-w}V_\lambda(w)\right) \\
&= :a(z)a(z')V_\lambda(w): + \frac{1}{(z-z')^2}V_\lambda(w) + \frac{\lambda}{z-w}:a(z')V_\lambda(w): \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{(z-w)(z'-w)}V_\lambda(w) + \frac{\lambda}{z'-w}:a(z)V_\lambda(w):
\end{aligned}$$

である．上で最右辺の第 2 項は $a(z)$ と $a(z')$ の間の OPE (1.8) から出る項であり，第 3 項は $a(z)$ と $V_\lambda(w)$ の間の OPE(1.31) から出る項である．従って

$$\begin{aligned}
T(z)V_\lambda(w) &= \frac{1}{2}\lim_{z'\to z}\left(a(z)a(z')V_\lambda(w) - \frac{1}{(z-z')^2}V_\lambda(w)\right) \\
&= :T(z)V_\lambda(w): + \frac{\lambda^2}{2(z-w)^2}V_\lambda(w) + \frac{\lambda}{z-w}:a(z)V_\lambda(w):
\end{aligned}$$

を得る．ここで $a(z)$ を $z=w$ で展開した上で次の $\partial_w V_\lambda(w)$ の式

$$\begin{aligned}
\partial_w V_\lambda(w) &= \partial_w\left(\exp\left(-\lambda\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)e^{\lambda x_0}w^{\lambda a_0}\exp\left(-\lambda\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)\right) \\
&= \left(\lambda\sum_{n<0}a_n w^{-n-1}\right)\exp\left(-\lambda\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)e^{\lambda x_0}w^{\lambda a_0}\exp\left(-\lambda\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right) \\
&\quad + \exp\left(-\lambda\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)e^{\lambda x_0}\lambda a_0 w^{-1}w^{\lambda a_0}\exp\left(-\lambda\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right) \\
&\quad + \exp\left(-\lambda\sum_{n<0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right)e^{\lambda x_0}w^{\lambda a_0}\left(\lambda\sum_{n>0}a_n w^{-n-1}\right)\exp\left(-\lambda\sum_{n>0}\frac{a_n}{n}w^{-n}\right) \\
&= \lambda :a(w)V_\lambda(w):
\end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
T(z)V_\lambda(w) &\sim \frac{\lambda^2}{2(z-w)^2}V_\lambda(w) + \frac{\lambda}{z-w}:a(w)V_\lambda(w): \\
&= \frac{\lambda^2}{2(z-w)^2}V_\lambda(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w V_\lambda(w)
\end{aligned}$$

である． □

これで $\widehat{sl}_2$ の表現を構成する準備ができた．

定義 1.34. ベクトル空間 $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ とその上の作用素値有理函数 $H(z)$, $E(z)$, $F(z)$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_{\sqrt{2}n} \\
\mathcal{H}_1 &= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_{\sqrt{2}(n+\frac{1}{2})} \\
H(z) &= \sqrt{2}a(z) \\
E(z) &= V_{\sqrt{2}}(z) \\
F(z) &= V_{-\sqrt{2}}(z)
\end{aligned}$$

また $H(z)$, $E(z)$, $F(z)$ の Fourier mode 展開を

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} H(n)z^{-n-1} \\ E(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} E(n)z^{-n-1} \\ F(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n)z^{-n-1} \end{aligned}$$

とする.

$H(z), E(z), F(z)$ の間の OPE は命題 1.33 よりただちに求まる.

定理 1.35. X, Y は H, E, F のいずれかとすると

$$X(z)Y(w) \sim \frac{(X|Y)}{(z-w)^2}\mathrm{id} + \frac{1}{z-w}\left[X,Y\right](w) \tag{1.35}$$

$$T(z)X(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}X(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w X(w) \tag{1.36}$$

が成立する. ここで $[X,Y]$ は sl_2 の交換子であり, また $(X|Y) = \mathrm{tr}(XY)$ である.

証明. (1.36) は (1.19) と (1.32) から, (1.35) で $X=H$ の場合は (1.31) から直接求められるので, $X=E$, $Y=F$ の場合だけ確かめる. (1.30) を用いて

$$E(z)F(w) = (z-w)^{-2} :V_{\sqrt{2}}(z)V_{-\sqrt{2}}(w):$$

である. ここで, $V_{\sqrt{2}}(z)$ を $z=w$ で展開すると

$$\begin{aligned} V_{\sqrt{2}}(z) &= V_{\sqrt{2}}(w) + (z-w)\partial_w V_{\sqrt{2}}(w) + \cdots \\ &= V_{\sqrt{2}}(w) + (z-w)\sqrt{2} :a(w)V_{\sqrt{2}}(w): + \cdots \end{aligned}$$

となり, また

$$\begin{aligned} :V_{\sqrt{2}}(w)V_{-\sqrt{2}}(w): &= :e^{\sqrt{2}\varphi(w)}e^{-\sqrt{2}\varphi(w)}: \\ &= :e^{\sqrt{2}\varphi(w)+(-\sqrt{2}\varphi(w))}: \\ &= 1 \end{aligned} \tag{1.37}$$

なので,

$$E(z)F(w) \sim (z-w)^{-2} :V_{\sqrt{2}}(w)V_{-\sqrt{2}}(w): + (z-w)^{-1}\sqrt{2} :a(w)V_{\sqrt{2}}(w)V_{-\sqrt{2}}(w): \tag{1.38}$$

であり, ここで (1.38) の第 1 項は (1.37) より $1/(z-w)^2$ である. また第 2 項は定義 1.29 より

$$\begin{aligned} :a(w)V_{\sqrt{2}}(w)V_{-\sqrt{2}}(w): &= a(w) :V_{\sqrt{2}}(w)V_{-\sqrt{2}}(w): \\ &= a(w) \end{aligned}$$

であるので, これらを用いて,

$$\begin{aligned} (1.38) &= \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}\sqrt{2}a(w) \\ &= \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}H(w) \end{aligned}$$

となり (1.35) を満たす. □

OPE から命題 1.27 と同様に計算して $H(n), E(n), F(n)$ の交換関係が求まる.

系 1.36. $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ 上で以下の交換関係

$$[X(m), Y(n)] = [X,Y]\,(m+n) + m\delta_{m+n,0}\,(X|Y)\,\mathrm{id} \tag{1.39}$$

$$[L_m, X(n)] = -nX(m+n) \tag{1.40}$$

が成立する.

(1.39) は上で構成した $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ が $\widehat{sl}_2$ のレベル 1 の表現であることを意味する. $\widehat{sl}_2$ の表現については 2 章でより詳しく述べるが, $H(0), L_0$ が $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ 上でどのように作用しているか調べてみよう.

命題 1.37. $H(0)$, L_0 は $\mathcal{F}_\lambda$ の d 次の部分空間 $\mathcal{F}_\lambda(d)$ 上

$$\begin{aligned} H(0) &= \sqrt{2}a_0 = \sqrt{2}\lambda\mathrm{id} \\ L_0 &= \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n\geq 1} a_{-n}a_n = \left(\frac{1}{2}\lambda^2 + d\right)\mathrm{id} \end{aligned}$$

で作用する. 特にこれらは $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ 上対角型で作用する:

$$\begin{aligned} H(0) &= \begin{cases} 2n\mathrm{id} & (\text{on } \mathcal{F}_{\sqrt{2}n}) \\ (2n+1)\mathrm{id} & (\text{on } \mathcal{F}_{\sqrt{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,) \end{cases} \\ L_0 &= \begin{cases} (n^2+d)\mathrm{id} & (\text{on } \mathcal{F}_{\sqrt{2}n}(d)) \\ \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + d\right)\mathrm{id} & (\text{on } \mathcal{F}_{\sqrt{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)}(d)) \end{cases} \end{aligned}$$

証明. $|\lambda\rangle \in \mathcal{F}_\lambda$ と任意の $n > 0$ に対して $a_n|\lambda\rangle = 0$, $a_0|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ より

$$L_0|\lambda\rangle = \frac{1}{2}\lambda^2|\lambda\rangle$$

を得る. 命題 1.6, 命題 1.8 より $\mathcal{F}_\lambda(d)$ は $a_{-1}^{m_1}a_{-2}^{m_2}\cdots|\lambda\rangle$ ($\sum_j jm_j = d$) で張られる. この形の元については (1.24) を用いて

$$\begin{aligned} L_0 a_{-1}^{m_1}a_{-2}^{m_2}\cdots|\lambda\rangle &= a_{-1}L_0 a_{-1}^{m_1-1}a_{-2}^{m_2}\cdots|\lambda\rangle + 1a_{-1}^{m_1}a_{-2}^{m_2}\cdots|\lambda\rangle \\ &= a_{-1}^2 L_0 a_{-1}^{m_1-2}a_{-2}^{m_2}\cdots|\lambda\rangle + 2a_{-1}^{m_1}a_{-2}^{m_2}\cdots|\lambda\rangle \\ &\quad\vdots \\ &= a_{-1}^{m_1}L_0 a_{-2}^{m_2}\cdots|\lambda\rangle + m_1 a_{-1}^{m_1}a_{-2}^{m_2}\cdots|\lambda\rangle \\ &= a_{-1}^{m_1}a_{-2}L_0 a_{-2}^{m_2-2}\cdots|\lambda\rangle + (m_1+2)a_{-1}^{m_1}a_{-2}^{m_2}\cdots|\lambda\rangle \\ &\quad\vdots \\ &= a_{-1}^{m_1}a_{-2}^{m_2}L_0\cdots|\lambda\rangle + (m_1+2m_2)a_{-1}^{m_1}a_{-2}^{m_2}\cdots|\lambda\rangle \\ &= a_{-1}^{m_1}a_{-2}^{m_2}\cdots L_0|\lambda\rangle + \left(\sum jm_j\right)a_{-1}^{m_1}a_{-2}^{m_2}\cdots|\lambda\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}\lambda^2 + d\right)a_{-1}^{m_1}a_{-2}^{m_2}\cdots|\lambda\rangle \end{aligned}$$

を得る. 従って

$$L_0 = \left(\frac{1}{2}\lambda^2 + d\right)\mathrm{id}\ \ (\text{on } \mathcal{F}_\lambda(d))$$

である. □

第2章　$\widehat{sl}_2$ の可積分表現

1 章の最後に触れた $\widehat{sl}_2$ の表現はこれ以降で展開される共形場理論の基本的な道具となる．2 章では $\widehat{sl}_2$ の表現について作用素値函数の OPE を中心に述べる．

2.1　アフィン Lie 代数 $\widehat{sl}_2$ とその表現

最初にこれから用いる用語の準備を兼ねてアフィン Lie 代数とその表現について基本的な事柄についてまとめておく．詳しい証明などは [K] などを参照すること．

定義 2.1. sl_2 は次の Lie 代数である:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= sl_2 = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F, \\
H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
E &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
F &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

また, $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$(X|Y) = \mathrm{tr}(XY)$$

で定義される $(\ |\ )$ を $\mathfrak{g}$ の不変双線型形式という．

上で定義した sl_2 の基底の間の交換関係は次のようになる．

$$\begin{aligned}
[H, E] &= 2E \\
[H, F] &= -2F \\
[E, F] &= H
\end{aligned}$$

また双線型形式 $(X|Y)$ が不変であるとは次の命題の内容を満すことである．

命題 2.2. 双線型形式 $(\ |\ )$ は次の性質を持つ．任意の X, Y, $Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$([X, Y]\,|Z) = (X|\,[Y, Z])$$

定義 2.3. $\mathfrak{g}$ に対するアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ とは次の Lie 代数である:

$$\widehat{\mathfrak{g}}^f = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[\xi, \xi^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}\mathbf{d}.$$

ここで交換関係は以下で定義する．X, $Y \in \mathfrak{g}$, f, $g \in \mathbb{C}[\xi, \xi^{-1}]$ に対して

$$\begin{aligned}
[X \otimes f, Y \otimes g] &= [X, Y] \otimes fg + \operatorname*{Res}_{\xi=0}(gdf)\,(X|Y)\,K \\
\left[\widehat{\mathfrak{g}}^f, K\right] &= 0 \\
[\mathbf{d}, X \otimes \xi^n] &= nX \otimes \xi^n
\end{aligned}$$

とする．また $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[\xi,\xi^{-1}]$ を形式 Laurent 級数環 $\mathbb{C}((\xi))$ で置き換えることで拡張した Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ も定義しておく:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{g}} &= \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}((\xi))\oplus\mathbb{C}K\oplus\mathbf{d},\\ \mathbb{C}((\xi)) &= \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\xi^n \mid a_n\in\mathbb{C}, a_n=0\,(n\ll 0)\right\}.\end{aligned}$$

$\widehat{\mathfrak{g}}^f$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Lie 部分代数で, 有限和の形の元からなるものである．[1]

$\mathfrak{g}$, $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ は Kac-Moody 代数と呼ばれる Lie 代数の例である．しかし $\widehat{\mathfrak{g}}$ は Kac-Moody 代数ではない．

$\widehat{\mathfrak{g}}^f$, $\widehat{\mathfrak{g}}$ の元 $X\otimes\xi^n$ を

$$X(n) \underset{\text{def}}{=} X\otimes\xi^n$$

と書くことにする．交換関係を $X(m)$, $Y(n)\in\widehat{\mathfrak{g}}^f$ について計算すると

$$\begin{aligned}[X(m),Y(n)] &= [X,Y](m+n)+\operatorname*{Res}_{\xi=0}\left(m\xi^{m+n-1}d\xi\right)(X|Y)\,K\\ &= [X,Y](m+n)+m\delta_{m+n,0}\,(X|Y)\,K\end{aligned}\tag{2.1}$$

となる．これと (1.39) を比較すれば次の命題を得る．

命題 2.4. 定義 1.34 で定義した $\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$ は $K=1$ の $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の表現である．

注意 2.5. (2.1) の交換関係より $\{E(0),F(0),H(0)\}$ で張られる $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の部分空間は $\mathfrak{g}$ と同型な Lie 部分代数を成していることに注意しよう．今後, この同型による同一視を用いて

$$E=E(0),\ F=F(0),\ H=H(0)$$

と書くことがある．

さて Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}$, $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の構造を調べよう．$\widehat{\mathfrak{g}}^f$(あるいは $\mathfrak{g}$) には $\widehat{\mathfrak{g}}^f$(あるいは $\mathfrak{g}$) 自身が随伴表現 (adjoint representation) で作用している．

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}:\widehat{\mathfrak{g}}^f &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\widehat{\mathfrak{g}}^f\\ (\mathrm{ad}x)(y) &\underset{\text{def}}{=} [x,y]\end{aligned}$$

ここで x, $y\in\widehat{\mathfrak{g}}^f$ とする．$\mathfrak{g}$ についても同様である．

定義 2.6. Kac-Moody 代数には Cartan 部分代数という部分代数が定義される．

$$\widehat{\mathfrak{h}}=\mathbb{C}H(0)\oplus\mathbb{C}K\oplus\mathbb{C}\mathbf{d},\quad \mathfrak{h}=\mathbb{C}H$$

とおくと, $\widehat{\mathfrak{h}}$ が $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の Cartan 部分代数, $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である．

定義 2.7. V をベクトル空間とし, $\mathfrak{s}$ は End$V$ の Lie 部分代数とするとき $v\in V$ が $\mathfrak{s}$ の同時固有ベクトルであるとは, 任意の $X\in\mathfrak{s}$ に対して v が X の固有ベクトルであることを言う．このとき, 対応する固有値を $\alpha(X)$ とおくと

$$\alpha:\mathfrak{s}\longrightarrow\mathbb{C},\quad Xv=\alpha(X)v\quad(X\in\mathfrak{s})$$

となり α は $\mathfrak{s}$ の双対空間 $\mathfrak{s}^*$ の元である．この α を v に対応する同時固有値という．またある同時固有値に属する同時固有ベクトルの成す V の部分空間を同時固有空間という．

[1] $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の f は有限和 (finite sum) の意味でつけている

Lie 代数の表現を考える上で Cartan 部分代数の同時固有値を考えることが重要である.

命題 2.8. 随伴表現に対して $E(n)$, $F(n)$, $H(n)$ は $\mathrm{ad}\,\widehat{\mathfrak{h}}$ の同時固有ベクトルになる. 特に

$$\begin{aligned}[H(0),E(n)] &= 2E(n)\\ [H(0),F(n)] &= -2F(n)\\ [H(0),H(n)] &= 0\\ [\mathbf{d},X(n)] &= nX(n)\end{aligned}$$

である.

上で $n=0$ とすると次の命題を得る.

命題 2.9. 随伴表現に対して E, F, H は $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$ の固有ベクトルになる. 特に

$$\begin{aligned}[H,E] &= 2E\\ [H,F] &= -2F\\ [H,H] &= 0\end{aligned}$$

である.

アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ 上で考えた Cartan 部分代数 $\widehat{\mathfrak{h}}$ の同時固有値はその双対空間 $\widehat{\mathfrak{h}}^*$ の元 $\alpha \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ と思える. この同時固有値 α をルート (root) という. 同様に上で $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ を $\mathfrak{g}$ で, $\widehat{\mathfrak{h}}$ を $\mathfrak{h}$ で置き換えて $\mathfrak{g}$ のルートも定義される.

命題 2.10. アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ のルートを計算してみよう. $\alpha_1, \delta \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ を次のように定義する.

$$\alpha_1(H(0)) = 2, \quad \alpha_1(K) = 0, \quad \alpha_1(\mathbf{d}) = 0$$
$$\delta(H(0)) = 0, \quad \delta(K) = 0, \quad \delta(\mathbf{d}) = 1$$

すると上の記号で

$$\begin{array}{lll} E(n) & \text{に対するルートは} & n\delta + \alpha_1\\ F(n) & \text{に対するルートは} & n\delta - \alpha_1\\ H(n) & \text{に対するルートは} & n\delta \end{array}$$

であり, $\widehat{\mathfrak{h}}$ はルート 0 に対する同時固有空間である. 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ についても同様に

$$\begin{array}{lll} E & \text{に対するルートは} & \alpha_1\\ F & \text{に対するルートは} & -\alpha_1\\ H & \text{に対するルートは} & 0 \end{array}$$

で $\mathfrak{h}$ はルート 0 に対する同時固有空間である.

定義 2.11. アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の 0 以外のルート全体を Δ とおく. Δ をルート系 (root system) という.

定義 2.12. アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の単純ルート系 Π を

$$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_0\}$$

とする. ここで α_0 は $\alpha_0 = \delta - \alpha_1$ で定義されるルートである. また α_1, α_0 を単純ルート (simple root) という.

系 2.13. 命題 2.10 よりアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の任意のルート $\alpha \in \Delta$ は

$$\alpha = k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1 \quad (k_0, k_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

もしくは

$$\alpha = -(k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1) \quad (k_0, k_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

のいずれかの形に書ける．従って

$$\begin{aligned} \Delta_+ &= \{k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1 \in \Delta \mid k_0, k_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \\ \Delta_- &= \{-(k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1) \in \Delta \mid k_0, k_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \end{aligned}$$

とおくと $\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$ である．Δ_+ の元を正ルート (positive root), Δ_- の元を負ルート (negative root) という．

定義 2.14. ルート $\alpha \in \Delta$ に対してそのルート空間 (root space) $\widehat{\mathfrak{g}}^f_\alpha$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{g}}^f_\alpha &= \left\{ x \in \widehat{\mathfrak{g}}^f \,\middle|\, [h, x] = \alpha(h)x \ (\forall h \in \widehat{\mathfrak{h}}) \right\} \\ &= \begin{cases} \mathbb{C}E(n) & (\alpha = n\delta + \alpha_1) \\ \mathbb{C}F(n) & (\alpha = n\delta - \alpha_1) \\ \mathbb{C}H(n) & (\alpha = n\delta) \end{cases} \end{aligned}$$

すると

$$\widehat{\mathfrak{g}}^f = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \widehat{\mathfrak{g}}^f_\alpha$$

である．この直和分解をルート空間分解 (root space decomposition) という．またルート空間 $\widehat{\mathfrak{g}}^f_\alpha$ の 0 以外の元を α に対するルートベクトル (root vector) という．

ルートと Lie 代数の交換関係について次の関係がある．

命題 2.15. 任意の $\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$ に対して

$$\left[\widehat{\mathfrak{g}}^f_\alpha, \widehat{\mathfrak{g}}^f_\beta\right] \subset \widehat{\mathfrak{g}}^f_{\alpha+\beta}$$

が成立する．ただし $\alpha+\beta$ がルートでも 0 でもない場合は $\widehat{\mathfrak{g}}^f_{\alpha+\beta} = 0$ とし, $\alpha+\beta = 0$ の場合には $\widehat{\mathfrak{g}}^f_{\alpha+\beta} = \widehat{\mathfrak{h}}$ とする．

証明. $x \in \widehat{\mathfrak{g}}^f_\alpha$, $y \in \widehat{\mathfrak{g}}^f_\beta$ をとる．任意の $h \in \widehat{\mathfrak{h}}$ に対して Jacobi の恒等式を用いれば

$$\begin{aligned} [h, [x, y]] &= [[h, x], y] + [x, [h, y]] \\ &= (\alpha + \beta)(h)\, [x, y] \end{aligned} \tag{2.2}$$

であるので,

$$[x, y] \in \widehat{\mathfrak{g}}^f_{\alpha+\beta}$$

となる．$\alpha + \beta$ がルートでも 0 でもない場合には (2.2) を満たす 0 でない $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の元は存在しないので $[x, y] = 0$ である． □

定義 2.16. アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の Lie 部分代数 $\mathfrak{n}_+^f$, $\mathfrak{n}_-^f$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}_+^f &= \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha^f \\ &= \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[\xi]\xi\oplus\mathbb{C}E(0) \\ \mathfrak{n}_-^f &= \bigoplus_{\alpha\in\Delta_-} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha^f \\ &= \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[\xi^{-1}]\xi^{-1}\oplus\mathbb{C}F(0)\end{aligned}$$

このとき次の $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の Lie 部分代数による直和分解が得られる.

$$\widehat{\mathfrak{g}}^f = \mathfrak{n}_-^f \oplus \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{n}_+^f \tag{2.3}$$

この分解をアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の三角分解 (triangular decomposition) という.

三角分解と違い一般の Kac-Moody 代数には定義できないが, アフィン Lie 代数には三角分解とは別の次のような分解が存在する.

定義 2.17. アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ に対して次の分解を定義する:

$$\widehat{\mathfrak{g}}^f = \widehat{\mathfrak{g}}^f_{<0}\oplus\mathbb{C}F(0)\oplus\widehat{\mathfrak{h}}\oplus\mathbb{C}E(0)\oplus\widehat{\mathfrak{g}}^f_{>0} \tag{2.4}$$

ここで

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{g}}^f_{>0} &\underset{\text{def}}{=} \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[\xi]\xi \\ \widehat{\mathfrak{g}}^f_{<0} &\underset{\text{def}}{=} \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[\xi^{-1}]\xi^{-1}\end{aligned}$$

は Lie 部分代数である.

定義 2.18. アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の特別な生成元をとる.

$$\begin{gathered}\mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}f_1\oplus\mathbb{C}h_1, \\ e_1 = E(0), \quad f_1 = F(0), \quad h_1 = H(0), \\ \mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}e_0\oplus\mathbb{C}f_0\oplus\mathbb{C}h_0, \\ e_0 = F(1), \quad f_0 = E(-1), \quad h_0 = K - H(0)\end{gathered}$$

とおく. e_i, $f_i\,(i=0,1)$ を $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の Chevalley 生成元という.

命題 2.19. e_1, e_0 はそれぞれ単純ルート α_1, $\alpha_0\in\Pi$ に対するルートベクトルで f_1, f_0 は $-\alpha_1$, $-\alpha_0$ に対するルートベクトルであり, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_0$ は sl_2 に同型な Lie 代数になる. また,

$$\left[\widehat{\mathfrak{g}}^f, \widehat{\mathfrak{g}}^f\right] = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[\xi,\xi^{-1}]\oplus\mathbb{C}K$$

は e_i, $f_i\,(i=0,1)$ で Lie 代数として生成される.

Lie 代数に対して普遍包絡代数と呼ばれる結合代数が定義される.

定義 2.20. Lie 代数 $\mathfrak{g}'=\widehat{\mathfrak{g}}^f$, $\mathfrak{g}$, $\mathcal{B}$ に対してその普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g}')$ を次のように定義する.

$$U(\mathfrak{g}') = T(\mathfrak{g}')\Big/\langle X\otimes Y - Y\otimes X - [X,Y]\,|X,Y\in\mathfrak{g}'\rangle$$

ここで $T(\mathfrak{g}')$ は $\mathfrak{g}'$ から作られるテンソル代数, $\langle\cdots\rangle$ は $\cdots$ で生成される $T(\mathfrak{g}')$ の両側イデアルである.

$U(\mathfrak{g}')$ の積は普通 $\otimes$ は省略して書く. ここでもその記法に従うことにする.

$U(\mathfrak{g}')$ は $XY - YX = [X, Y]$ を満たす, $\mathfrak{g}'$ を含む結合代数のうちで普遍なものである. つまり $XY - YX = [X, Y]$ を満たす任意の結合代数に対して $U(\mathfrak{g}')$ からの全射が一意的に存在する. $U(\mathfrak{g}')$ の普遍性より次が従う.

命題 2.21. Lie 代数 $\mathfrak{g}' = \widehat{\mathfrak{g}}^f, \mathfrak{g}, \mathcal{B}$ の表現とその普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g}')$ の表現は 1 対 1 に対応する. つまり $\mathfrak{g}'$ の表現は一意的に $U(\mathfrak{g}')$ の表現に拡張でき, 逆に $U(\mathfrak{g}')$ の表現を $\mathfrak{g}'$ に制限するとそれは $\mathfrak{g}'$ の Lie 代数としての表現になる.

また普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g}')$ にはテンソル代数 $T(\mathfrak{g}')$ の次数付けからフィルターと呼ばれる構造が定義される.

定義 2.22. 普遍展開環 $U(\mathfrak{g}')$ の部分ベクトル空間の族 $FU(\mathfrak{g}') = \{F_pU(\mathfrak{g}') \mid p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を

$$F_pU(\mathfrak{g}') = \mathrm{Im}\left(\bigoplus_{n=0}^{p} T^n(\mathfrak{g}') \to U(\mathfrak{g}')\right)$$

で定義する. ここで $T^n(\mathfrak{g}') \underset{\mathrm{def}}{=} (\mathfrak{g}')^{\otimes n} \subset T(\mathfrak{g}')$ は n 次テンソル積であり, 写像は標準的な射影とする. すると $FU(\mathfrak{g}')$ は次の性質を満たす:

(1) $1 \in F_0U(\mathfrak{g}')$,

(2) $F_pU(\mathfrak{g}') \subset F_{p+1}U(\mathfrak{g}')$,

(3) $(F_pU(\mathfrak{g}'))(F_qU(\mathfrak{g}')) \subset F_{p+q}U(\mathfrak{g}')$,

(4) $U(\mathfrak{g}') = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} F_pU(\mathfrak{g}')$.

この $FU(\mathfrak{g}')$ を $U(\mathfrak{g}')$ のフィルター (filter) という.

定義 2.23. 普遍展開環 $U(\mathfrak{g}')$ のフィルター $FU(\mathfrak{g}')$ に対して, $FU(\mathfrak{g}')$ に同伴な次数付代数 (associated graded ring) を

$$\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}') = \bigoplus_{p=0}^{\infty} F_pU(\mathfrak{g}')/F_{p-1}U(\mathfrak{g}')$$

と定義する. ただし上で $F_{-1}U(\mathfrak{g}') = 0$ とする. $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}')$ は積を

$$\sigma_p(a)\sigma_q(b) = \sigma_{p+q}(ab) \quad (a \in F_pU(\mathfrak{g}'), b \in F_qU(\mathfrak{g}'))$$

と定義して環となる. ただしここで $\sigma_p : F_pU(\mathfrak{g}') \to F_pU(\mathfrak{g}')/F_{p-1}U(\mathfrak{g}')$ は標準的な射影である.

加群についてもフィルターおよび同伴な次数付加群を定義しておこう.

定義 2.24. Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ の表現 V を, ある $v \in V$ が存在して $U(\mathfrak{g}')v = V$ を満たすものとする. このとき V の部分ベクトル空間の族 $FV = \{F_pV \mid p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を

$$F_pV = F_pU(\mathfrak{g}')v$$

と定義すると FV は次の性質を満たす:

(1) $F_pV \subset F_{p+1}V$,

(2) $(F_pU(\mathfrak{g}'))(F_qV) \subset F_{p+q}V$,

(3) $V = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} F_pV$.

このとき FV を V のフィルター (filter) という．また (V, FV) をフィルター $U(\mathfrak{g}')$ 加群 (filtered $U(\mathfrak{g}')$-module) という．

定義 2.25. (V, FV) をフィルター $U(\mathfrak{g}')$ 加群としたとき，FV に同伴な次数付加群 (associated graded module) を

$$\mathrm{gr}\, V = \bigoplus_{p \geq 0} F_p V / F_{p-1} V$$

と定義する．ただし $F_{-1}V = 0$ とおく．$\mathrm{gr}\, V$ は

$$\sigma_p(a)\tau_q(v) = \tau_{p+q}(av) \quad (a \in F_p U(\mathfrak{g}'), v \in F_q V)$$

と定義して $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}')$ 加群となる．ただしここで $\tau_p : F_p V \to F_p V / F_{p-1} V$ は標準的な射影である．

普遍展開環 $U(\mathfrak{g}')$ のフィルター $FU(\mathfrak{g}')$ に同伴な次数付代数についての次の定理は Lie 代数の表現論において基本的である．

事実 2.26 (Poincaré-Birkhoff-Witt の定理). Lie 代数 $\mathfrak{g}' = \widehat{\mathfrak{g}}^f$, $\mathfrak{g}$, $\mathcal{B}$ の普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g}')$ に対して

$$\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}') \simeq S(\mathfrak{g}')$$

ここで $S(\mathfrak{g}')$ は $\mathfrak{g}'$ から作られる対称テンソル代数である．

系 2.27. 三角分解 (2.3) より事実 2.26 を用いて次が得られる．ベクトル空間としての同型

$$U(\widehat{\mathfrak{g}}^f) \simeq U(\mathfrak{n}_-^f) \otimes U(\widehat{\mathfrak{h}}) \otimes U(\mathfrak{n}_+^f) \tag{2.5}$$

が成り立つ．同様に (2.4) よりベクトル空間としての同型

$$U(\widehat{\mathfrak{g}}^f) \simeq U(\widehat{\mathfrak{g}}^f_{<0}) \otimes \mathbb{C}[F(0)] \otimes U(\widehat{\mathfrak{h}}) \otimes \mathbb{C}[E(0)] \otimes U(\widehat{\mathfrak{g}}^f_{>0}) \tag{2.6}$$

が成り立つ．さらに $\mathfrak{g}$ についてもベクトル空間としての同型

$$U(\mathfrak{g}) \simeq \bigoplus_{i,j,k \geq 0} \mathbb{C} F^i H^j E^k \tag{2.7}$$

が成り立つ．

アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の表現として全く一般の表現を考えたのではその構造を調べるのは困難である．そこで次のような条件を満たす表現を扱うことにする．

定義 2.28. Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$, $\mathfrak{g}$ の表現 V は次を満たすとき可積分表現と呼ばれる．

(1) Cartan 部分代数の作用が対角化可能，つまり V は $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の場合には $H(0)$, K, $\mathbf{d}$, $\mathfrak{g}$ の場合には H の同時固有空間の直和に分解できる．

(2) Chevalley 生成元の作用が局所巾零 (locally nilpotent) である．つまり任意の $v \in V$ に対して $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の場合にはベクトル空間 $U(\mathfrak{g}_0)v$, $U(\mathfrak{g}_1)v$ が共に有限次元になり，$\mathfrak{g}$ の場合にはベクトル空間 $U(\mathfrak{g})v$ が有限次元になる．

定義 2.29. Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f, \mathfrak{g}$ の可積分表現 V に対して，その Cartan 部分代数に対する同時固有値 $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*(\mathfrak{h}^*)$ をウェイト (weight)，ウェイト λ に対する同時固有空間 $V_{(\lambda)}$ をウェイト空間 (weight space)，各ウェイト空間の元をウェイトベクトル (weight vector) という．また，直和分解

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*} V_{(\lambda)}$$

をウェイト空間分解 (weight space decomposition) という．

随伴表現の場合には特別にウェイトと呼ぶ代わりにルートと呼んで区別するのである.

命題 2.30. Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の可積分表現 V をとる. $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ を V のウェイト, $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$ とする. λ に対するウェイト空間 $V_{(\lambda)}$ と α に対するルート空間 $\widehat{\mathfrak{g}}^f_\alpha$ に対して

$$\widehat{\mathfrak{g}}^f_\alpha V_{(\lambda)} \subset V_{(\lambda+\alpha)}$$

をみたす. ただし $V_{(\lambda+\alpha)} = 0$ も許すとする. 同様に $\mathfrak{g}$ の可積分表現 V をとったとき, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を V のウェイト, $\alpha \in \{\pm\alpha_1, 0\}$ とする. λ に対するウェイト空間 $V_{(\lambda)}$ と α に対するルート空間 $\mathfrak{g}_\alpha$ に対して

$$\mathfrak{g}_\alpha V_{(\lambda)} \subset V_{(\lambda+\alpha)}$$

をみたす.

証明. 証明は命題 2.15 の証明と同様である. □

定義 2.31. category $\mathcal{O}$ とはアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の $\widehat{\mathfrak{h}}$-対角化可能 (つまり定義 2.28 の条件 (1) を満す) 表現 $\mathcal{H}$ で, 各ウェイト空間が有限次元であり, またウェイトの集合 $P(\mathcal{H})$ に対してある有限個の $\lambda_1, \ldots,$ $\lambda_n \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ が存在して

$$P(\mathcal{H}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(\lambda_i)$$

を満たすものを対象 (object) とするカテゴリである. ただし上で

$$D(\lambda) = \left\{ \mu \in \widehat{\mathfrak{h}}^* \;\middle|\; \lambda - \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_0 + \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 \right\}$$

とする. 一方 $\mathfrak{g}$ についても表現 V が category $\mathcal{O}$ の対象であるとは, 各ウェイト空間が有限次元であり, ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathfrak{h}^*$ が存在して

$$P(V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(\lambda_i), \quad D(\lambda) \underset{\text{def}}{=} \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda - \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1\}$$

であることとする.

定義 2.32. 整数 $l \in \mathbb{Z}$ に対して, アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の表現 $\mathcal{H}$ がレベル l であるとは, $\mathcal{H}$ 上で $K = l \cdot \mathrm{id}$ と作用することとする.

以下では $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をひとつ固定してレベル l の可積分表現で category $\mathcal{O}$ に属する表現を考える.

可積分表現 $\mathcal{H}$ の場合には $\mathcal{H}$ のウェイトはウェイト格子と呼ばれる $\widehat{\mathfrak{h}}^*$ の部分集合に属することがわかる.

事実 2.33. 可積分表現 $\mathcal{H}$ のウェイトはウェイト格子 (weight lattice) $\widehat{\mathfrak{h}}^*_{\mathbb{Z}}$ に含まれる. ここで

$$\widehat{\mathfrak{h}}^*_{\mathbb{Z}} = \left\{ \lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^* \mid \lambda(H(0)),\, \lambda(K - H(0)) \in \mathbb{Z} \right\}$$

と定義する.

次の事実は category $\mathcal{O}$ の対象である可積分表現において基本的である.

事実 2.34. category $\mathcal{O}$ の対象である可積分表現 $\mathcal{H}$ は完全可約, つまり $\mathcal{H}$ は既約表現の直和に分解される.

このとき, レベル l の可積分表現の場合には定義 2.28 から明かに $\mathcal{H}$ を分解して出てくる既約表現もレベル l の可積分表現である.

アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の表現と有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の間にある関係を見る.

命題 2.35. アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の可積分表現を $\mathcal{H}$ とする.

$$V = \left\{|u\rangle \in \mathcal{H} \;\middle|\; \widehat{\mathfrak{g}}^f_{>0}|u\rangle = 0\right\}$$

とおくと, V は $\mathfrak{g}_1(=\mathfrak{g})$ と $\widehat{\mathfrak{h}}$ の表現になる.

証明. $|u\rangle \in V$, $X(0) \in \mathfrak{g}_1$ を任意にとる. このとき $X(0)|u\rangle$ もまた V の元になることを示せばいい. 任意の $Y(n) \in \widehat{\mathfrak{g}}^f_{>0}$ に対して

$$\begin{aligned} Y(n)(X(0)|u\rangle) &= X(0)(Y(n)|u\rangle) + [Y,X](n)|u\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので $X(0)|u\rangle \in V$ である. ゆえに V は $\mathfrak{g}_1$ の表現である. $\widehat{\mathfrak{h}}$ についても全く同様に証明できる. □

命題 2.36. V は $\mathfrak{g}$ の表現として完全可約である.

証明. 任意の $v \in V \subset \mathcal{H}$ に対して $\mathcal{H}$ の可積分性より $U(\mathfrak{g}_1)v$ は有限次元である. 従って $\mathfrak{g}_1$ $(=\mathfrak{g})$ の有限次元表現の完全可約性より v はある既約表現の直和に含まれる. $v \in V$ は任意であるので, V の任意のベクトルは既約な部分表現の元の和で書けることになり, 従って V は完全可約である. □

命題 2.37. 特にアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の可積分表現 $\mathcal{H}$ が既約であるとき, V も $\mathfrak{g}_1$ の表現として既約である.

証明. V は命題 2.36 より $\mathfrak{g}_1$ の表現として完全可約である. そこで

$$V = V_1 \oplus V_2$$

と 2 つの $\mathfrak{g}_1$ の 0 でない表現 V_1, V_2 の直和に分れたと仮定する. (2.6) より $i = 1, 2$ に対して

$$U(\widehat{\mathfrak{g}}^f_{<0})V_i = U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)V_i \neq 0$$

は $\mathcal{H}$ の部分表現になるので $\mathcal{H}$ の既約性より

$$U(\widehat{\mathfrak{g}}^f_{<0})V_1 = U(\widehat{\mathfrak{g}}^f_{<0})V_2 = \mathcal{H} \tag{2.8}$$

となる. 一方ウェイトを考えれば命題 2.10, 命題 2.30 より V_i は $U(\widehat{\mathfrak{g}}^f_{<0})V_i$ の中で $\mathbf{d}$ の最も大きい固有値に関する固有空間である. 対応する $\mathbf{d}$ の固有値を $d_i\,(i = 1,\,2)$ とおく. (2.8) より $V_1 \subset U(\widehat{\mathfrak{g}}^f_{<0})V_2$ なので $d_1 \leq d_2$ であり, 逆に $V_2 \subset U(\widehat{\mathfrak{g}}^f_{<0})V_1$ なので $d_1 \geq d_2$ である. 従って $d_1 = d_2$ であるので $V_1 = V_2$ を得るが, これは仮定に反する. 従って V は既約である. □

命題 2.37 の証明よりアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ のレベル l の可積分既約表現は有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現より生成される. そこで $\mathfrak{g}$ の既約表現について考えよう.

事実 2.38. 有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現 V の構造はその次元のみで決まる. つまり V, V' が共に有限次元既約表現で $\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} V'$ なら $\mathfrak{g}$ の表現として V と V' は同値である. また, 任意の次元の既約表現が存在する.

定義 2.39. 次元が $2j+1\,(j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z})$ の $\mathfrak{g}$ の既約表現を V_j と書くことにする. 半整数 j を表現 V_j のスピンと呼ぶ.

1 章の定義 1.4 で Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ の最高ウェイト表現を定義したが有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ やアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ についても最高ウェイト表現を定義しよう.

定義 2.40. 有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の (必ずしも有限次元でない) 表現 V が最高ウェイト表現とは, ある $v \in V$, $v \neq 0$, で以下の条件を満たすものが存在することである.

(1) $Ev = 0$.

(2) v はウェイトベクトル.

(3) V は v から生成される, つまり $V = U(\mathfrak{g})v$ である.

このとき v を V の最高ウェイトベクトル, v のウェイトを最高ウェイトという.

定義 2.41. アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の表現 $\mathcal{H}$ は必ずしも可積分ではないが定義 2.28 の (1) の条件を満たすものとする. このとき $\mathcal{H}$ が最高ウェイト表現であるとはある $|u\rangle \in \mathcal{H}$, $|u\rangle \neq 0$, で以下の条件を満たすものが存在することである.

(1) $\mathfrak{n}_+^f |u\rangle = 0$.

(2) $|u\rangle$ はウェイトベクトル.

(3) $\mathcal{H}$ は $|u\rangle$ から生成される, つまり $\mathcal{H} = U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)|u\rangle$ である.

このとき $|u\rangle$ を $\mathcal{H}$ の最高ウェイトベクトル, $|u\rangle$ のウェイトを最高ウェイトという.

この条件を最高ウェイト表現というのは次の理由からである.

定義 2.42. まず $\widehat{\mathfrak{h}}^*$ には次の大小関係を考えることができる. $\lambda, \mu \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ が

$$\lambda - \mu \in \{k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1 \mid k_0, k_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

を満たすとき $\lambda \geq \mu$ とする.

すると最高ウェイト表現の定義より $|u\rangle$ を $\mathcal{H}$ の最高ウェイトベクトルとすると

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)|u\rangle \\ &= U(\mathfrak{n}_-^f)|u\rangle \end{aligned}$$

であるから命題 2.10, 命題 2.30 を用いると $|u\rangle$ のウェイトは上で定義した大小関係で $\mathcal{H}$ のウェイトの中で最も大きいウェイトになる. この意味でこの表現を最高ウェイト表現というのである.

事実 2.43. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の $2j+1$ 次元の既約表現 V_j は $j\alpha_1$ を最高ウェイトとする最高ウェイト表現である. さらに V_j のウェイト全体は

$$\{j\alpha_1,\, (j-1)\alpha_1,\, (j-2)\alpha_1,\, \ldots,\, (-j+1)\alpha_1,\, -j\alpha_1\}$$

で, 各ウェイトに対するウェイト空間の次元は 1 である.

上で V_j のウェイト全体は原点を通り α_1 を法線ベクトルとする超平面に関する鏡映 r_1 について対称であることに注意しよう. つまり鏡映 r_1 は次の変換である:

$$r_1(\lambda) = \lambda - \frac{2\,(\lambda|\alpha_1)}{(\alpha_1|\alpha_1)}\alpha_1 \quad (\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*).$$

また $\widehat{\mathfrak{h}}^*$ の内積 $(\;|\;)$ は

$$(\alpha_0|\alpha_0) = (\alpha_1|\alpha_1) = 2, \quad (\alpha_0|\alpha_1) = (\alpha_1|\alpha_0) = -1$$

で定義されるものとする. さらに $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 V は V_j の直和であるので, V についてもそのウェイト全体は r_1 について対称である.

同様の事実がアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の表現の場合にも成り立つ.

定義 2.44. アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の Weyl 群 W とは

$$W = \langle r_0, r_1 \rangle$$

と定義する．ここで r_0 は次の鏡映

$$r_0(\lambda) = \lambda - \frac{2\,(\lambda|\alpha_0)}{(\alpha_0|\alpha_0)}\alpha_0 \ \ (\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*).$$

であり, W は r_0, r_1 で生成される無限位数の群である．

命題 2.45. アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の可積分表現 $\mathcal{H}$ のウェイト全体は W 不変である．

証明. $\mathcal{H}$ のウェイト λ に関するウェイトベクトル $v \in \mathcal{H}_{(\lambda)}$ に対して, 定義 2.28(2) より $U(\mathfrak{g}_i)v\,(i=0,$ $1)$ は $\mathfrak{g}_i\,(i=0,1)$ の有限次元既約表現の直和となる．$\mathfrak{g}_0$ は $\mathfrak{g}$ に同型であるので, 事実 2.43 より $U(\mathfrak{g}_0)v$ のウェイト全体は鏡映 r_0 に関して不変である, 特に $r_0(\lambda)$ もウェイトである．これが任意のウェイト λ に対して成立するので $\mathcal{H}$ のウェイト全体は r_0 に関して不変である．同様に, $\mathcal{H}$ のウェイト全体は r_1 に関して不変であり, W は r_0, r_1 で生成されるので $\mathcal{H}$ のウェイト全体は W 不変である． □

有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の既約表現 V_j からアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の既約表現を構成しよう．

$$j \in P_l \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ j \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z} \;\middle|\; 0 \le j \le \frac{l}{2} \right\}$$

とする．

定義 2.46. 有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の既約表現 V_j は以下のようにして $\widehat{\mathfrak{g}}^f_{\ge 0} \underset{\mathrm{def}}{=} (\mathfrak{g}_1 + \widehat{\mathfrak{h}}) \oplus \widehat{\mathfrak{g}}^f_{>0}$ の表現に拡張できる．つまり

$$\mathbf{d}(V_j) = 0, \quad K(V_j) = l, \quad \widehat{\mathfrak{g}}^f_{>0}(V_j) = 0$$

とする．これに対してアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の表現 M_j を誘導表現

$$M_j = U(\widehat{\mathfrak{g}}^f) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{g}}^f_{\ge 0})} V_j \tag{2.9}$$

で定義する．M_j は Weyl 加群と呼ばれる．M_j は $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の最高ウェイト表現であるが, 定義より任意の k に対して $f_0^k V_j$ は 0 でないので可積分表現ではない．

定義 2.47. Weyl 加群 M_j を用いてアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の既約表現 $\mathcal{H}_j$ を次のように構成する．

$|j\rangle$ を M_j の最高ウェイトベクトルとしたとき, $\mathcal{H}_j$ を次で定義

$$\mathcal{H}_j = M_j / U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)(f_0^{l-2j+1}|j\rangle)$$

すると $j \in P_l$ のとき簡単な計算により

$$\mathfrak{n}_+^f(f_0^{l-2j+1}|j\rangle) = 0$$

となるので

$$U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)(f_0^{l-2j+1}|j\rangle) = U(\mathfrak{n}_-^f)(f_0^{l-2j+1}|j\rangle)$$

は M_j の部分表現であり, $\mathcal{H}_j$ は M_j と同じ最高ウェイトを持つ $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の最高ウェイト表現になる．今後 $\mathcal{H}_j$ の最高ウェイトベクトルも $|j\rangle$ と書くことにしよう．

事実 2.48. 各 $j \in P_l$ に対して $\mathcal{H}_j$ は既約な可積分表現になる．逆に category $\mathcal{O}$ に属するレベル l の可積分表現で既約なものは上の $\mathcal{H}_j$ に限る．

事実 2.48 については詳しくは [K], Chapter 9, 10 等を参照せよ.

以下ではアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の表現としては $\mathcal{H}_j(j \in P_l)$ を考えることにしよう.

命題 2.49. 既約表現 $\mathcal{H}_j$ を $-\mathbf{d}$ の固有空間で分解する.

$$\mathcal{H}_j = \bigoplus_{d \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_j(d), \quad \mathcal{H}_j(d) \underset{\mathrm{def}}{=} \{v \in \mathcal{H}_j \mid \mathbf{d}(v) = -dv\}$$

すると $d \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\mathcal{H}_j(d) = 0$ であり, また $\mathcal{H}_j(0) = V_j$ である. また

$$X(n) : \mathcal{H}_j(d) \longrightarrow \mathcal{H}_j(d-n) \tag{2.10}$$

が成立する.

証明. 命題 2.10, 命題 2.30 より (2.10) は明らか. さらに定義 2.46 で V_j 上の $\mathbf{d}$ の作用は 0 と定義したこと, および $\mathcal{H}_j = U(\widehat{\mathfrak{g}}^f_{<0})V_j$ より残りが得られる. □

上の既約表現 $\mathcal{H}_j$ の $\mathbf{d}$ による次数付けに対して $\mathcal{H}_j$ のフィルター $F_*\mathcal{H}_j$ が次で定義できる.

$$F_p\mathcal{H}_j = \bigoplus_{d \leq p} \mathcal{H}_j(d), \quad p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{2.11}$$

また Weyl 加群 M_j についても, 同様の次数付けおよびフィルターが定義できる:

$$\begin{aligned} M_j &= \bigoplus_{d \geq 0} M_j(d), \\ M_j(d) &= \{v \in M_j \mid \mathbf{d}(v) = -dv\}, && (2.12) \\ F_pM_j &= \bigoplus_{d \leq p} M_j(d). && (2.13) \end{aligned}$$

これまで拡張アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現については考えていなかった. しかし, $\widehat{\mathfrak{g}}$ は無限和が許されていることを除けば $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ と変わらないので, $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ と同様に扱えることが期待される. 実際, われわれの考えている範囲では $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現は $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の表現と一致する.

命題 2.50. アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の category $\mathcal{O}$ に属するレベル l の可積分表現 $\mathcal{H}$ は自然に $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現である.

証明. 可積分表現の完全可約性より表現 $\mathcal{H}_j$ について考えれば十分である. 任意の $|u\rangle \in \mathcal{H}_j$ と任意の $X \otimes f \in \widehat{\mathfrak{g}}$ に対して $(X \otimes f)|u\rangle$ が定義できればいいが命題 2.49 の (2.10) より $(X \otimes f)|u\rangle$ は有限和になるので $\mathcal{H}_j$ は自然に $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現になる. □

次に $\mathcal{H}_j$ の双対表現を導入しよう.

定義 2.51. $\mathcal{H}_j$ の双対表現 $\mathcal{H}_j^*, \mathcal{H}_j^\dagger$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_j^* &= \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{H}_j(d)^* && (2.14) \\ \mathcal{H}_j^\dagger &= \prod_{d \geq 0} \mathcal{H}_j(d)^* && (2.15) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_j, \mathbb{C}) && (2.16) \\ \mathcal{H}_j(d)^* &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_j(d), \mathbb{C}) && (2.17) \end{aligned}$$

(2.14) は restricted dual, (2.15) は full dual という.

$U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)$ の反同型写像

$$\nu : U(\widehat{\mathfrak{g}}^f) \longrightarrow U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)$$

を $\widehat{\mathfrak{g}}^f \subset U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)$ 上では

$$\nu(X(n)) = -X(-n), \quad \nu(K) = K, \quad \nu(\mathbf{d}) = \mathbf{d}$$

と定義し, $U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)$ には反同型に拡張する. また線型空間の同型

$$\nu : \mathcal{H}_j \longrightarrow \mathcal{H}_j^* \tag{2.18}$$

を次のように定義する:

$$\nu(X_1(n_1)\cdots X_k(n_k)|j\rangle) = \langle j|E^j \nu(X_k(n_k))\cdots\nu(X_1(n_1)).$$

ただし, ここで $\langle j|$ は $\mathcal{H}_j(0)$ の基底をウェイトベクトル $\{|j\rangle, F|j\rangle, \ldots, F^j|j\rangle\}$ としたときの $|j\rangle$ の双対ベクトルとする. ν が $\mathcal{H}_j(0)$ の最高ウェイトベクトル $|j\rangle$ を $\mathcal{H}_j(0)^*$ の最低ウェイトベクトル $\langle j|E^j$ にうつすことに注意せよ. ν により $\mathcal{H}_j$ 上の $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の左表現は $\mathcal{H}_j^*$ 上の $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の右表現にうつる, つまり任意の $x \in U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)$ と $|u\rangle \in \mathcal{H}_j$ に対して

$$\nu(x|u\rangle) = \nu(|u\rangle)\nu(x)$$

が成立する. さらに

$$\widehat{\mathcal{H}}_j = \prod_{d \geq 0} \mathcal{H}_j(d) \tag{2.19}$$

と定義すれば ν は $\widehat{\mathcal{H}}_j$ と $\mathcal{H}_j^\dagger$ の間の線型空間としての同型

$$\nu : \widehat{\mathcal{H}}_j \longrightarrow \mathcal{H}_j^\dagger$$

に自然に拡張される.

また一般の Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ に対して $U(\mathfrak{g}')$ の反同型写像 S を $X \in \mathfrak{g}' \subset U(\mathfrak{g}')$ に対して

$$S(X) = -X \tag{2.20}$$

と定義する. この S は $U(\mathfrak{g}')$ の Hopf 代数としての対合射と呼ばれる写像である.

命題 2.52. 双対表現 $\mathcal{H}_j^\dagger$ 上で $X(n)$ は次数を n 上げる, つまり

$$X(n) : \mathcal{H}_j(d)^* \longrightarrow \mathcal{H}_j(d+n)^*$$

となる.

2.2 $\mathcal{H}_j$ 上の作用素値函数と OPE

$\mathcal{H}_j$ 上の $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の表現から $\mathbb{P}^1$ 上の作用素値函数を構成しよう.

定義 2.53. z は変数とする. $X \in \mathfrak{g}$ に対してカレント $X(z)$ を

$$\begin{aligned} X(z) \quad &: \quad \mathcal{H}_j \longrightarrow \mathcal{H}_j[[z, z^{-1}]] \\ X(z) \quad &= \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(n) z^{-n-1} \end{aligned}$$

と定義する.

命題 1.15 と同様の議論で次を得る.

命題 2.54. $X(z)$ は行列要素の意味で $z=0,\infty$ に極を持つ $\mathbb{P}^1$ の有理函数になる. つまり任意の $\langle\varphi|\in\mathcal{H}_j^*$, $|u\rangle\in\mathcal{H}_j$ に対して

$$\langle\varphi|X(z)|u\rangle\in\mathbb{C}[z,z^{-1}]$$

である.

次に $X(z)$ の OPE について調べよう. 1 章で考えた Heisenberg 代数の場合と比較すると, $m+n\neq 0$ のときも $[X(m),Y(n)]\neq 0$ であるので計算がいくぶん面倒になるが大筋は変わらない.

定義 2.55. まず補助的に次の形の部分和を導入する.

$$\begin{aligned} X(z)_{\geq 0} &= \sum_{n\geq 0} X(n)z^{-n-1} \\ X(z)_{<0} &= \sum_{n<0} X(n)z^{-n-1} \end{aligned}$$

補題 2.56. 任意の $\langle\varphi|\in\mathcal{H}_j^*$ と任意の $|u\rangle\in\mathcal{H}_j$ に対して

$$\langle\varphi|\left[X(z)_{\geq 0},Y(w)\right]|u\rangle=\frac{l\,(X|Y)}{(z-w)^2}\langle\varphi|u\rangle+\frac{1}{z-w}\langle\varphi|\left[X,Y\right](w)|u\rangle$$

が成立する. ただし左辺は $|z|>|w|>0$ で絶対収束している.

証明. $\langle\varphi|$ と $|u\rangle$ は省略して計算する.

$$\begin{aligned} \left[X(z)_{\geq 0},Y(w)\right] &= \sum_{m\geq 0,n\in\mathbb{Z}}\left[X(m),Y(n)\right]z^{-m-1}w^{-n-1} \\ &= \sum_{m\geq 0,n\in\mathbb{Z}}\Big(\left[X,Y\right](m+n)+m\delta_{m+n,0}\,(X|Y)\,K\Big)z^{-m-1}w^{-n-1} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{m\geq 0}\left(\frac{w}{z}\right)^m\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[X,Y\right](m+n)w^{-(m+n)-1}+\frac{1}{z^2}\,(X|Y)\,K\sum_{m\geq 0}m\left(\frac{w}{z}\right)^{m-1} \\ &= \frac{1}{z-w}\left[X,Y\right](w)+\frac{(X|Y)\,K}{(z-w)^2} \end{aligned}$$

ここで最後の等式で左辺は $|z|>|w|>0$ で絶対収束する. □

命題 2.57. 任意の X, $Y\in\mathfrak{g}$ および任意の $\langle\varphi|\in\mathcal{H}_j^*$, $|u\rangle\in\mathcal{H}_j$ に対して

$$\langle\varphi|X(z)Y(w)|u\rangle\sim\frac{l\,(X|Y)}{(z-w)^2}\langle\varphi|u\rangle+\frac{1}{z-w}\langle\varphi|\left[X,Y\right](w)|u\rangle \tag{2.21}$$

が成立する. ただし左辺は $|z|>|w|>0$ で絶対収束して上の式はその領域で成立し, これらは $z=0$, ∞, $w=0$, ∞ の他に $z=w$ にも極を持つ有理函数に解析接続される.

証明. 定義 2.55 で導入した $X(z)_{\geq 0}$, $X(z)_{<0}$ を用いると

$$\begin{aligned} \langle\varphi|X(z)Y(w)|u\rangle &= \langle\varphi|(X(z)_{<0}+X(z)_{\geq 0})Y(w)|u\rangle \\ &= \langle\varphi|X(z)_{<0}Y(w)|u\rangle+\langle\varphi|Y(w)X(z)_{\geq 0}|u\rangle+\langle\varphi|\left[X(z)_{\geq 0},Y(w)\right]|u\rangle \end{aligned}$$

である. ここで (2.10) および命題 2.52 より $X(z)_{\geq 0}|u\rangle$, $\langle\varphi|X(z)_{<0}$ は z の有限和である. 一方で, $\langle\varphi|\left[X(z)_{\geq 0},Y(w)\right]|u\rangle$ は補題 2.56 より

$$\langle\varphi|\left[X(z)_{\geq 0},Y(w)\right]|u\rangle=\frac{l\,(X|Y)}{(z-w)^2}\langle\varphi|u\rangle+\frac{1}{z-w}\langle\varphi|\left[X,Y\right](w)|u\rangle$$

であり, 従って証明すべき等式 (2.21) を得る. □

定義 2.58. アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ での正規順序を次で定義する.

$$^\circ_\circ X(z)Y(w)^\circ_\circ = X(z)_{<0}Y(w) + Y(w)X(z)_{\geq 0}$$

3 つ以上の場合には帰納的に定義する. 例えば

$$^\circ_\circ X(z_1)Y(z_2)Z(z_3)^\circ_\circ = X(z_1)_{<0}{}^\circ_\circ Y(z_2)Z(z_3)^\circ_\circ + {}^\circ_\circ Y(z_2)Z(z_3)^\circ_\circ X(z_1)_{\geq 0}$$

とする.

任意の $\langle\varphi| \in \mathcal{H}_j^*$ と $|u\rangle \in \mathcal{H}_j$ および任意の $X_1(z_1), \ldots, X_k(z_k)$ に対して

$$\langle\varphi|{}^\circ_\circ X_1(z_1)\cdots X_k(z_k)^\circ_\circ|u\rangle \in \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_k, z_k^{-1}]$$

である.

1 章で Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ の場合に定義 1.24 で定義した $T(z)$ は共形場理論における重要な作用素である. 1 章では $T(z)$ は $a(z)$ から定義されたが今度は $a(z)$ がないので同じ方法では定義できない. しかし菅原構成 (Sugawara construction) と呼ばれる $X(z)$ から $T(z)$ を定義する方法が知られている.

定義 2.59. Casimir 作用素 (Casimir operator) と呼ばれる $U(\mathfrak{g})$ の元を定義する. $\{X_1, X_2, X_3\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底, $\left\{X^1, X^2, X^3\right\}$ を不変双線型形式に関する双対基底とする. このとき

$$\Omega \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{3} X_i X^i \in U(\mathfrak{g})$$

を Casimir 作用素という.

補題 2.60. Casimir 作用素は基底の取り方には依らない.

証明. $\{X_i\}$, $\{Y_i\}$ を $\mathfrak{g}$ の異なる基底とし, それぞれの不変双線型形式に関する双対基底を $\left\{X^i\right\}$, $\left\{Y^i\right\}$ とする. また

$$\begin{aligned} Y_i &= \sum_j \alpha_{ij} X_j \quad (\alpha_{ij} \in \mathbb{C}) \\ Y^i &= \sum_k \beta_{ik} X^k \quad (\beta_{ik} \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} \sum_i Y_i Y^i &= \sum_i \left(\sum_j \alpha_{ij} X_j\right)\left(\sum_k \beta_{ik} X^k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} \alpha_{ij}\beta_{ik} X_j X^k \end{aligned} \tag{2.22}$$

であるが, ここで $\sum_i \left(Y_i|X^j\right) Y^i = X^j$ であるので

$$\sum_i \alpha_{ij}\beta_{ik} = \sum_i \left(Y_i|X^j\right)\left(Y^i|X_k\right) = \left(X^j|X_k\right) = \delta_{j,k}$$

を得る. これを用いて

$$\begin{aligned} (2.22) &= \sum_{j,k} \delta_{j,k} X_j X^k \\ &= \sum_j X_j X^j \end{aligned}$$

である. □

系 2.61. Casimir 作用素の定義が基底の取り方に依らないことから特に

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} X_i X^i &= \sum_{i=1}^{3} X^i X_i \\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{3} \left[X_i, X^i\right] = 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

を得る.

命題 2.62. ここで特に $\{H, E, F\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底として取ると, その双対基底は $\left\{\frac{1}{2}H, F, E\right\}$ である. 従って,

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2}H^2 + EF + FE \\ &= \frac{1}{2}H^2 + H + 2FE\end{aligned}$$

である.

さて Ω の $X \in \mathfrak{g}$ を作用素値函数 $X(z)$ で置き換えた形式的な作用素値函数

$$\tilde{\Omega} \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{3} X_i(z) X^i(w)$$

を考えてみよう. 命題 2.57 で計算したように $X(z)Y(w)$ は $z = w$ に極を持つので $\tilde{\Omega}$ はそのままでは発散してしまい定義できない. そこで $z = w$ での singular part を除くことを考える.

命題 2.63. 作用素値函数として $z = w$ での singular part を計算すると

$$\sum_{i=1}^{3} X_i(z) X^i(w) \sim \frac{3l}{(z-w)^2}$$

となる.

証明. 命題 2.57 と (2.23) を用いて計算すれば

$$\begin{aligned}\sum_i X_i(z) X^i(w) &\sim \frac{l}{(z-w)^2} \sum_i \left(X_i | X^i\right) + \frac{1}{z-w} \sum_i \left[X_i, X^i\right](w) \\ &\sim \frac{3l}{(z-w)^2}\end{aligned}$$

となり求める式を得る. □

従って $T(z)$ を次のように定義すると well-defined である.

定義 2.64. 作用素値函数 $T(z)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}T(z) &= \frac{1}{2(l+2)} \lim_{w \to z} \left(\sum_{i=1}^{3} X_i(z) X^i(w) - \frac{3l}{(z-w)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2(l+2)} \sum_{i=1}^{3} {}^\circ_\circ X_i(z) X^i(z) {}^\circ_\circ \end{aligned} \tag{2.24}$$

またスピン j の既約表現 $\mathcal{H}_j$ 上の作用素 L_n を

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$$

と定義する.

注意 2.65. $T(z)$ の定義 (2.24) における分母の $l+2$ はアフィン Lie 代数の構造に依存した定数である. これは $\widehat{sl}_2$ の場合には $l+2$ であるが, 一般のアフィン Lie 代数の場合には dual Coxeter number と呼ばれるアフィン Lie 代数に対して定まる定数 $\check{h}$ を用いて $l+\check{h}$ で与えられる.

系 2.61 を用いると以下の等式を得る.

$$\sum_{i=1}^{3}\left[X_i(m), X^i(n)\right] = 3m\delta_{m+n,0}K \tag{2.25}$$

(2.24) より

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2(l+2)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_i {}^{\circ}_{\circ} X_i(n-k)X^i(k) {}^{\circ}_{\circ} \\ &= \frac{1}{2(l+2)}\left(\sum_{k>n}\sum_i X_i(n-k)X^i(k) + \sum_{k\geq 0}\sum_i X^i(n-k)X_i(k)\right) \end{aligned} \tag{2.26}$$

である. 従って (2.10) を用いると $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$L_n : \mathcal{H}_j(d) \longrightarrow \mathcal{H}_j(d-n), \tag{2.27}$$

$$L_n : \mathcal{H}_j(d)^* \longrightarrow \mathcal{H}_j(d+n)^* \tag{2.28}$$

であることがわかる.

$T(z)$ に関係する OPE を調べよう. 以下の式は OPE を計算する過程で頻繁に用いる.

$$\sum_i \left[X_i, \left[X^i, X\right]\right] = (\mathrm{ad}\Omega)(X) = 4X \tag{2.29}$$

この式は直接計算でも容易に得られるが, Casimir 作用素が $U(\mathfrak{g})$ の中心の元であることを用いると計算が少し簡単になる. つまり $H=(\mathrm{ad}F)E$, $F=(\mathrm{ad}F)^2E/2$ だが $\mathrm{ad}\Omega$ は $\mathrm{ad}F$ と可換であるので $(\mathrm{ad}\Omega)E$ のみ計算すればいい. また (2.23) より

$$\sum_i \left(X_i \middle| \left[X^i, X\right]\right) = \sum_i \left(\left[X_i, X^i\right] \middle| X\right) = 0 \tag{2.30}$$

であり, $\{X_i\}$, $\left\{X^i\right\}$ は互いに双対であるから

$$\sum_i \left(X_i|X\right)X^i = \sum_i \left(X^i|X\right)X_i = X \tag{2.31}$$

を得る.

補題 2.66. 任意の $X\in\mathfrak{g}$, $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$[L_n, X(0)] = 0 \tag{2.32}$$

$$[L_{-1}, X(n)] = -nX(n-1) \tag{2.33}$$

が成立する.

証明. まず (2.32) を示す. 次の式は $\mathfrak{g}$ の具体的な基底 $\{H,E,F\}$ について計算すれば得られる.

$$\left[\sum_i X_i(j)X^i(k), X(0)\right] = 0$$

これを用いれば (2.26) より

$$
\begin{aligned}
&[L_n, X(0)]\\
=\;& \frac{1}{2(l+2)}\sum_{k>0}\left[\sum_i X_i(n-k)X^i(k), X(0)\right] + \frac{1}{2(l+2)}\sum_{k\geq 0}\left[\sum_i X^i(n-k)X_i(k), X(0)\right]\\
=\;& 0
\end{aligned}
$$

を得る. (2.32) および (2.26), (2.29), (2.30), (2.31) を用いて (2.33) を計算する.

$$
\begin{aligned}
&2(l+2)\,[L_{-1}, X(n)]\\
=\;& \sum_{k\geq 0}\sum_i \left[X_i(-k-1)X^i(k) + X^i(-k-1)X_i(k), X(n)\right]\\
=\;& \sum_{k\geq 0,\, i}[X_i(-k-1), X(n)]\,X^i(k) + \sum_{k\geq 0, i} X_i(-k-1)\left[X^i(k), X(n)\right]\\
&+\sum_{k\geq 0,\, i}\left[X^i(-k-1), X(n)\right]X_i(k) + \sum_{k\geq 0,\, i} X^i(-k-1)\,[X_i(k), X(n)]\\
=\;& \sum_{k\geq 0,\, i}\left([X_i, X]\,(n-k-1)X^i(k) + (-n)\delta_{n-k-1,0}\,(X_i|X)\,X^i(n-1)l\right) \qquad (2.34)\\
&+\sum_{k\geq 0,\, i}\left(X_i(-k-1)\left[X^i, X\right](n+k) + (-n)\delta_{n+k,0}\left(X^i|X\right)X_i(n-1)l\right)\\
&+\sum_{k\geq 0,\, i}\left(\left[X^i, X\right](n-k-1)X_i(k) + (-n)\delta_{n-k-1,0}\left(X^i|X\right)X_i(n-1)l\right)\\
&+\sum_{k\geq 0,\, i}\left(X^i(-k-1)\,[X_i, X]\,(n+k) + (-n)\delta_{n+k,0}\,(X_i|X)\,X^i(n-1)l\right)
\end{aligned}
$$

ここで (2.31) を用いて和をとると,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 0}\sum_i(-nl)\delta_{n-k-1,0}\left((X_i|X)\,X^i(n-1) + \left(X^i|X\right)X_i(n-1)\right)\\
&\qquad+\sum_{k\geq 0}\sum_i(-nl)\delta_{n+k,0}\left(\left(X^i|X\right)X_i(n-1) + (X_i|X)\,X^i(n-1)\right)\\
&\qquad\qquad = -2lnX(n-1)
\end{aligned}
$$

となる. また (2.34) で 2 番目, 4 番目の和については添字の付け替え $k\to k-n$ を行なえば, 再び (2.26) より

$$
\begin{aligned}
(2.34)\;=\;& \sum_{k\geq 0}\sum_i [X_i, X]\,(n-k-1)X^i(k) + \sum_{k\geq n}\sum_i X_i(n-k-1)\left[X^i, X\right](k)\\
&+\sum_{k\geq 0}\sum_i\left[X^i, X\right](n-k-1)X_i(k) + \sum_{k\geq n}\sum_i X^i(n-k-1)\,[X_i, X]\,(k) - 2lnX(n-1)\\
=\;& 2(l+2)\,[L_{n-1}, X(0)] - 2lnX(n-1) \qquad (2.35)\\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_i\left(X_i(n-k-1)\left[X^i, X\right](k) + X^i(n-k-1)\,[X_i, X]\,(k)\right)
\end{aligned}
$$

であるので, (2.29), (2.30), (2.32) を用いて

$$
\begin{aligned}
(2.35)\;=\;& -2lnX(n-1) - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_i\left[X_i(n-k-1)X^i(k), X(0)\right]\\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_i\left(\left[X^i, [X_i, X]\right](n-1) + k\delta_{n-1,0}\left(X^i|\,[X_i, X]\right)l\right)\\
=\;& -2(l+2)nX(n-1)
\end{aligned}
$$

を得る. □

命題 2.67. 任意の $\langle\varphi| \in \mathcal{H}_j^*$, $|u\rangle \in \mathcal{H}_j$ に対して $\langle\varphi|T(z)X(w)|u\rangle$ 及び $\langle\varphi|T(z)T(w)|u\rangle$ は $|z| > |w| > 0$ で, $\langle\varphi|X(w)T(z)|u\rangle$ は $|w| > |z| > 0$ で絶対収束して $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の有理函数になる. その極は z, $w = 0$, ∞ および $z = w$ のみであり, 特に $z = w$ の近傍でその singular part は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
T(z)X(w) &\sim X(w)T(z) \qquad (2.36)\\
&\sim \frac{1}{(z-w)^2}X(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w X(w)\\
T(z)T(w) &\sim \frac{c_v/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

ここで $c_v = \frac{3l}{2(l+2)}\mathrm{id}$ である. また, 上の式は $\langle\varphi|$ と $|u\rangle$ は省略した.

証明. $\langle\varphi|$ と $|u\rangle$ は省略する. 命題 2.57 を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
&2(l+2)T(z)X(w)\\
&= \sum_i {}^\circ_\circ X_i(z)X^i(z){}^\circ_\circ X(w)\\
&= \sum_i \left(X_i(z)_{<0}X^i(z) + X^i(z)X_i(z)_{\geq 0}\right) X(w)\\
&= \sum_i X_i(z)_{<0}\left(\frac{l\left(X^i|X\right)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}\left[X^i, X\right](w) + {}^\circ_\circ X^i(z)X(w){}^\circ_\circ\right)\\
&\quad + \sum_i \left(X^i(z)X(w)X_i(z)_{\geq 0} + X^i(z)\left[X_i(z)_{\geq 0}, X(w)\right]\right)\\
&= \frac{l}{(z-w)^2}\sum_i \left(X^i|X\right)X_i(z)_{<0} + \frac{1}{z-w}\sum_i X_i(z)_{<0}\left[X^i, X\right](w) + \sum_i X_i(z)_{<0}{}^\circ_\circ X^i(z)X(w){}^\circ_\circ\\
&\quad + \sum_i \left(\frac{l\left(X^i|X\right)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}\left[X^i, X\right](w) + {}^\circ_\circ X^i(z)X(w){}^\circ_\circ\right)X_i(z)_{\geq 0}\\
&\quad + \sum_i X^i(z)\left(\frac{l\left(X_i|X\right)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}\left[X_i, X\right](w)\right)\\
&= \frac{l}{(z-w)^2}\left(\sum_i \left(X^i|X\right)X_i(z) + \sum_i \left(X_i|X\right)X^i(z)\right)\\
&\quad + \frac{1}{z-w}\left(\sum_i X^i(z)\left[X_i, X\right](w) + \sum_i {}^\circ_\circ X_i(z)\left[X^i, X\right](w){}^\circ_\circ\right) + \sum_i {}^\circ_\circ X_i(z)X^i(z)X(w){}^\circ_\circ\\
&= \frac{2l}{(z-w)^2}X(z) + \frac{l}{(z-w)^3}\sum_i \left(X^i|\left[X_i, X\right]\right) + \frac{1}{(z-w)^2}\left[X^i, \left[X_i, X\right]\right](w)\\
&\quad + \frac{1}{z-w}{}^\circ_\circ X^i(z)\left[X_i, X\right](w){}^\circ_\circ + \frac{1}{z-w}\sum_i {}^\circ_\circ X_i(z)\left[X^i, X\right](w){}^\circ_\circ + \sum_i {}^\circ_\circ X_i(z)X^i(z)X(w){}^\circ_\circ\\
&= \frac{2l}{(z-w)^2}X(z) + \frac{4}{(z-w)^2}X(w) \qquad (2.38)\\
&\quad + \frac{1}{z-w}\sum_i \left({}^\circ_\circ X^i(z)\left[X_i, X\right](w){}^\circ_\circ + {}^\circ_\circ X_i(z)\left[X^i, X\right](w){}^\circ_\circ\right) + \sum_i {}^\circ_\circ X_i(z)X^i(z)X(w){}^\circ_\circ
\end{aligned}$$

となる. ただし (2.29), (2.30), (2.31) を用いた. 一方補題 2.66 を用いて

$$2(l+2)\partial_w X(w) = 2(l+2)\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-n-1)X(n)w^{-n-2}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(l+2)\sum_{n\in\mathbb{Z}}[L_{-1}, X(n+1)]\,w^{-n-2} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq 0}\sum_i \left[X_i(-k-1)X^i(k) + X^i(-k-1)X_i(k), X(n+1)\right] w^{-n-2} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq 0}\sum_i [X_i(-k-1), X(n+1)]\,X^i(k)w^{-n-2} \\
&\qquad + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq 0}\sum_i X_i(-k-1)\left[X^i(k), X(n+1)\right] w^{-n-2} \\
&\qquad + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq 0}\sum_i \left[X^i(-k-1), X(n+1)\right] X_i(k)w^{-n-2} \\
&\qquad + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq 0}\sum_i X^i(-k-1)\,[X_i(k), X(n+1)]\,w^{-n-2} \\
&= \sum_i [X_i, X](w)X^i(w)_{\geq 0} + \sum_i X_i(w)_{<0}\left[X^i, X\right](w) \\
&\qquad\quad + \sum_i \left[X^i, X\right](w)X_i(w)_{\geq 0} + \sum_i X^i(w)_{<0}[X_i, X](w) + 2l\partial_w X(w)
\end{aligned}
$$

を得る．従って

$$
\sum_i {}^{\circ}_{\circ} X^i(w)\,[X_i, X](w) {}^{\circ}_{\circ} + \sum_i {}^{\circ}_{\circ} X_i(w)\left[X^i, X\right](w) {}^{\circ}_{\circ} = 4\partial_w X(w)
$$

となるので, (2.38) で $X(z)$, ${}^{\circ}_{\circ} X^i(z)\,[X_i, X](w) {}^{\circ}_{\circ}$ 及び ${}^{\circ}_{\circ} X_i(z)\left[X^i, X\right](w) {}^{\circ}_{\circ}$ を $z = w$ で Taylor 展開して上の式を用いれば (2.36) を得る．

$X(w)T(z)$ 及び $T(z)T(w)$ についても同様の計算で $z = w$ での singular part が得られる． □

補題 2.68. 表現空間 $\mathcal{H}_j$ 上で

$$
\begin{aligned}
[L_m, X(w)] &= w^m\left\{w\frac{d}{dw} + (m+1)\right\}X(w) &\quad (2.39)\\
[L_m, T(w)] &= w^m\left\{w\frac{d}{dw} + 2(m+1)\right\}T(w) &\quad (2.40)\\
&\qquad + \frac{m^3-m}{12}w^{m-2}c_v
\end{aligned}
$$

が成立する．ただし $c_v = \frac{3l}{2(l+2)}\mathrm{id}$ はスカラー作用素である．

証明．証明は補題 1.26 と同様であるが, 命題 1.25 の代わりに命題 2.67 を用いる．留数定理を用いて

$$
\begin{aligned}
L_m X(w) &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{z=\infty} T(z)X(w)z^{m+1}dz \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{z=0} T(z)X(w)z^{m+1}dz &\quad (2.41)\\
&\qquad + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{z=w} T(z)X(w)z^{m+1}dz
\end{aligned}
$$

を得る．ここで $z = 0$ のまわりで積分する時には領域 $|w| > |z| > 0$ 上で絶対収束する級数 $X(w)T(z)$ を, $z = w$ のまわりで積分する時には領域 $|w| > |z-w| > 0$ 上で絶対収束する級数である $T(z)X(w)$ の

OPE (2.36) を用いて

$$
\begin{aligned}
(2.41) \quad &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{z=0} X(w)T(z)z^{m+1}dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{z=w}\left\{\frac{X(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial_w X(w)}{z-w}\right\}z^{m+1}dz \\
&= X(w)L_m + (m+1)w^m X(w) + w^{m+1}\partial_w X(w) \\
&= X(w)L_m + w^m\left\{w\partial_w + (m+1)\right\}X(w)
\end{aligned}
$$

を得る. (2.40) も同様に示せる. □

系 2.69. $L_n, X(n)$ の間の交換関係は次のようになる.

$$
[L_m, X(n)] = -nX(m+n) \tag{2.42}
$$

$$
[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c_v \tag{2.43}
$$

ただし $c_v = \frac{3l}{2(l+2)}\mathrm{id}$ はスカラー作用素であり, (2.43) は $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}\mathrm{id}$ が中心電荷 $3l/2(l+2)$ の Virasoro 代数の表現を与えることを表している.

証明. 証明は命題 1.27 と同様である. 補題 2.68 を用いて計算すれば

$$
\begin{aligned}
[L_m, X(n)] &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{w=0}[L_m, X(w)]\,w^n dw \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{w=0} w^{m+n}\left\{w\frac{d}{dw}+(m+1)\right\}X(w) \\
&= -(m+n+1)X(m+n) + (m+1)X(m+n) \\
&= -nX(m+n)
\end{aligned}
$$

を得る. □

L_0 の $\mathcal{H}_j$ 上の作用を調べてみよう. (2.42) より

$$
[L_0, X(n)] = -nX(n)
$$

であることを考えると, L_0 は $\mathbf{d}$ と $\mathcal{H}_j$ 上ほぼ同じ作用素であると考えられる. 実際直和分解

$$
\mathcal{H}_j = \bigoplus_{d\geq 0}\mathcal{H}_j(d)
$$

に対して L_0 は対角に作用していて $\mathcal{H}_j(d)$ 上で

$$
\begin{aligned}
L_0 &= (\Delta_j + d)\mathrm{id}, \\
\Delta_j &\underset{\mathrm{def}}{=} \frac{j^2+j}{2+l}
\end{aligned}
$$

である. つまり L_0 の作用は $\mathbf{d}$ の作用を Δ_j だけずらしたものに過ぎない.

ところで 1 章では Heisenberg 代数から作った作用素値函数 $a(z)$ を使って, レベル 1 の $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の表現

$$
\begin{aligned}
E(z) &= V_{\sqrt{2}}(z) \\
F(z) &= V_{-\sqrt{2}}(z) \\
H(z) &= \sqrt{2}a(z)
\end{aligned}
$$

およびエネルギー運動量テンソル

$$T(z) = \frac{1}{2} :a(z)^2:$$

を構成した. 一方, ここで考えた菅原構成を用いれば 1 章で考えたレベル 1 の表現から

$$T(z) = \frac{1}{6} {}^{\circ}_{\circ} \frac{1}{2} H(z)^2 + E(z)F(z) + F(z)E(z) {}^{\circ}_{\circ}$$

としてエネルギー運動量テンソルが構成できるはずである. 実際に計算してみれば, どちらの方法で $T(z)$ を構成しても同じ作用素値函数が得られることを確かめることができる.

第3章　$\mathbb{P}^1$ 上での共形場理論の展開

2章では変数 $z \in \mathbb{P}^1$ に対して作用素値函数 $X(z), T(z)$ を扱ったが, それらの作用する空間としては1つの $\mathcal{H}_j$ だけ考えていた.

$\mathbb{P}^1$ 上の共形場理論では $\mathbb{P}^1$ 上に有限個の点 $w_a (a \in A)$ を取って, そこにそれぞれ表現空間 $\mathcal{H}_{j_a} (a \in A)$ を対応させることを考える. 各 $\mathcal{H}_{j_a}$ にはそれぞれその点での $\widehat{\mathfrak{g}}$ の局所的な作用が与えられているが, さらに $\mathbb{P}^1$ 全体で大域的な作用を記述するため $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}$ という Lie 代数を導入する.

3.1　真空の空間の定義

$\mathbb{P}^1$ 上の共形場理論における基本的な対象を定義していこう. 最も重要な対象は真空の空間と呼ばれる (有限次元の) ベクトル空間であり, その空間についての性質を調べていくことがこの講義録の後半の話題の中心である.

まず $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, $|A| < \infty$ を添字の集合とする. 各 $a \in A$ に対して $w_a \in \mathbb{P}^1$ を固定する. ただし

$$w_a \neq w_b \ (a \neq b), \quad w_\infty = \infty$$

とし, $w_A = (w_a)_{a \in A}$ とおく. 各 $a \in A$ に対して $j_a \in P_l$ を取り $J_A = (j_a)_{a \in A}$ とする. そして

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(J_A) &= \bigotimes_{a \in A} \mathcal{H}_{j_a} \\
\mathcal{H}(J_A)^\dagger &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(J_A), \mathbb{C}) \\
V(J_A) &= \bigotimes_{a \in A} V_{j_a} \\
V(J_A)^\dagger &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V(J_A), \mathbb{C}) \\
M(J_A) &= \bigotimes_{a \in A} M_{j_a} \\
M(J_A)^\dagger &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M(J_A), \mathbb{C})
\end{aligned}$$

とする. このベクトル空間に作用する Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_A$ を

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{g}}_A &= \left(\bigoplus_{a \in A} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi_a)) \right) \oplus \mathbb{C}c \\
&\left[\sum_a X_a \otimes f_a \, , \sum_b Y_b \otimes g_b \right] \\
&= \sum_a [X_a, Y_a] \otimes f_a g_a + \sum_a \mathop{\mathrm{Res}}_{\xi_a = 0} (g_a df_a) \, (X_a | Y_a) \, c
\end{aligned} \tag{3.1}$$

と定義する. 各 $a \in A$ に対して $X \otimes f_a \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi_a))$ の $\mathcal{H}(J_A)$ 上の作用 ρ_a は

$$\rho_a(X \otimes f_a) | \cdots \otimes u_a \otimes \cdots \rangle = | \cdots \otimes ((X \otimes f_a) u_a) \otimes \cdots \rangle$$

で定義する．ただし，ここで $(X \otimes f_a)u_a$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の作用である．$\widehat{\mathfrak{g}}_A$ の $\mathcal{H}(J_A)$ 上の作用は $\sum_a X_a \otimes f_a \in \widehat{\mathfrak{g}}_A$ に対して

$$\left(\sum_{a\in A} X_a \otimes f_a\right)|u\rangle = \sum_{a\in A} \rho_a(X_a \otimes f_a)|u\rangle$$

と定義し，c は $c = l\mathrm{id}$ で作用するものとする．同様に $\widehat{\mathfrak{g}}_A$ は $M(J_A)$ に作用する．

さらに $\widehat{\mathfrak{g}}_A$ の部分代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}$ [1] を定義する．まず

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A)) = \left\{ f \mid f \text{ は } w_a(a \in A) \text{ にのみ極を持つ } \mathbb{P}^1 \text{ 上の有理函数} \right\}$$

とする．$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A))$ についての次の命題は以降の議論で頻繁に用いられる．

命題 3.1. $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A))$ の $\mathbb{C}$ 上の線型空間の基底として次の有理函数の組が取れる:

$$\begin{cases} z^n & (n \in \mathbb{Z}) \\ \varphi_a^{(n)} \underset{\text{def}}{=} (z - w_a)^{-n} & (n > 0, a \in A \setminus \{0, \infty\}) \end{cases} . \tag{3.2}$$

さて

$$t_a : H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A)) \longrightarrow \mathbb{C}((\xi_a))$$

を $f \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A))$ に対して w_a のまわりの局所変数 ξ_a

$$\xi_a \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} z - w_a & (a \neq \infty) \\ z^{-1} & (a = \infty) \end{cases}$$

についての Laurent 級数展開 $f_a(\xi_a) \in \mathbb{C}((\xi_a))$ を対応させる写像 $t_a(f) = f_a(\xi_a)$ とする．さらに

$$t = \bigoplus_{a\in A} t_a : H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A)) \longrightarrow \bigoplus_{a\in A} \mathbb{C}((\xi_a))$$

とするとこれは単射である．さて任意の $f, g \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A))$ に対して留数定理により

$$\sum_{a\in A} \operatorname*{Res}_{\xi_a=0} (t_a(g)d(t_a(f))) = \sum_{a\in A} \operatorname*{Res}_{z=w_a} (gdf) = 0 \tag{3.3}$$

である．従って，t によって写像

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g} \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A)) & \longrightarrow & \widehat{\mathfrak{g}}_A \\ X \otimes f & \mapsto & \displaystyle\sum_{a\in A} X \otimes t_a(f) \end{array} \tag{3.4}$$

を定義すれば，(3.3) より $X \otimes f, Y \otimes g \in \mathfrak{g} \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A))$ に対して

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{a\in A} X \otimes t_a(f), \sum_{b\in A} Y \otimes t_b(g)\right] \\ &= \sum_{a\in A} [X, Y] \otimes t_a(f)t_a(g) + \sum_{a\in A} \operatorname*{Res}_{\xi_a=0} (t_a(g)d(t_a(f)))\,(X|Y)\,c \\ &= \sum_{a\in A} [X, Y] \otimes t_a(fg) \end{aligned}$$

であるので，これは Lie 代数としての準同型になる．t は単射であったので，これは Lie 代数としての埋め込みである．

定義 3.2. Lie 代数の埋め込み (3.4) の像を $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}$ とする．

[1] $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}$ の out は S_A の外で正則である事を意味している．

$\widehat{\mathfrak{g}}_{w_A}^{out}$ の $\mathcal{H}(J_A)$ 上の表現が $\widehat{\mathfrak{g}}_A$ の表現から自然に定まる. つまり $X \otimes f \in \widehat{\mathfrak{g}}_{w_A}^{out}$ と $|u\rangle \in \mathcal{H}(J_A)$ に対して

$$(X \otimes f)|u\rangle = \sum_{a \in A} \rho_a(X \otimes t_a(f))|u\rangle$$

である. 今後 $\rho_a(X \otimes t_a(f))$ を $\rho_a(X \otimes f)$ と省略して書くことにする.

定義 3.3. ベクトル空間 $\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$, $\mathcal{V}_{w_A}^\dagger(J_A)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{w_A}(J_A) &= \mathcal{H}(J_A)/\widehat{\mathfrak{g}}_{w_A}^{out}\mathcal{H}(J_A) \\ \mathcal{V}_{w_A}^\dagger(J_A) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_{w_A}(J_A), \mathbb{C}) \end{aligned}$$

$\mathcal{V}_{w_A}^\dagger(J_A)$ を真空の空間 (space of vacua) もしくは共形ブロック (conformal block) の空間と言い, $\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$ を余真空の空間 (space of covacua) と言う.

真空の空間の元 $\langle\Phi| \in \mathcal{V}_{w_A}^\dagger(J_A)$ は $\mathcal{H}(J_A)^\dagger$ の元で $\widehat{\mathfrak{g}}_{w_A}^{out}(\mathcal{H}(J_A))$ 上では 0 であるものと同一視される. つまり

$$\mathcal{V}_{w_A}^\dagger(J_A) \simeq \left\{ \langle\Phi| \in \mathcal{H}(J_A)^\dagger \mid \langle\Phi|(X \otimes f) = 0\, (\forall X \otimes f \in \widehat{\mathfrak{g}}_{w_A}^{out}) \right\}$$

である.

$\mathcal{V}_{w_A}^\dagger(J_A)$ を真空の空間, $\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$ 余真空の空間と言っているが, 実際には真空の空間を余真空の空間の双対空間として定義していることに注意しよう. これらの用語は物理的意味からそのように名付けられているが, 数学的にはむしろ余真空の空間を扱う方が自然である.

真空の空間 $\mathcal{V}_{w_A}^\dagger(J_A)$ の性質を調べることがこのセクションとこれに続くセクションの主な目的である.

まず今後度々使うことになるフィルターを導入する. Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_A$ と表現空間 $\mathcal{H}(J_A)$ に対して

$$F_p\widehat{\mathfrak{g}}_A = \begin{cases} \bigoplus_{a \in A} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[\xi_a]]\xi_a^{-p} \oplus \mathbb{C}c & (p \geq 0) \\ \bigoplus_{a \in A} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[\xi_a]]\xi_a^{-p} & (p < 0) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$F_p\mathcal{H}(J_A) = \sum_{\sum_a d_a \leq p} \bigotimes_{a \in A} \mathcal{H}_{j_a}(d_a) \tag{3.6}$$

とする. これらは $\widehat{\mathfrak{g}}_A$, $\mathcal{H}(J_A)$ のフィルターで

$$F_p\widehat{\mathfrak{g}}_A F_q\mathcal{H}(J_A) \subset F_{p+q}\mathcal{H}(J_A)$$

を満たす. $\widehat{\mathfrak{g}}_A$ の Lie 部分代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_{w_A}^{out}$ および $\mathcal{H}(J_A)$ の部分空間 $\widehat{\mathfrak{g}}_{w_A}^{out}\mathcal{H}(J_A)$ には (3.5), (3.6) のフィルターから自然にフィルターが誘導されて

$$F_p\widehat{\mathfrak{g}}_{w_A}^{out} F_q\widehat{\mathfrak{g}}_{w_A}^{out}\mathcal{H}(J_A) \subset F_{p+q}\widehat{\mathfrak{g}}_{w_A}^{out}\mathcal{H}(J_A)$$

を満たす. また, 余真空の空間 $\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$ のフィルターは標準的な射影

$$\mathcal{H}(J_A) \to \mathcal{V}_{w_A}(J_A) \to 0$$

から誘導されるものとする.

この章の残りの部分で, (余) 真空の空間の有限次元性と簡単な場合の (余) 真空の空間について調べる.

まず, 可積分表現のテンソル積 $\mathcal{H}(J_A)$ の代わりに Weyl 加群のテンソル積 $M(J_A)$ に対する余真空の空間 $\mathcal{W}_{w_A}(J_A)$ と真空の空間 $\mathcal{W}_{w_A}^\dagger(J_A)$ を次のように定義する:

$$\mathcal{W}_{w_A}(J_A) = M(J_A)/\widehat{\mathfrak{g}}_{w_A}^{out}M(J_A), \tag{3.7}$$

$$\mathcal{W}_{w_A}^\dagger(J_A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{W}_{w_A}(J_A), \mathbb{C}). \tag{3.8}$$

また, Lie 代数の表現についての次の基本的な補題を用意しておく. この補題は [KL] による.

補題 3.4. Lie 代数 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ はベクトル空間として

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$$

を満たすとする．ただし上は必ずしも直和ではない．V を $\mathfrak{A}_2$ の表現とし，それに対して

$$\tilde{V} = U(\mathfrak{A}) \otimes_{U(\mathfrak{A}_2)} V$$

とおくと，$\tilde{V}$ は $\mathfrak{A}$ の表現である．このとき以下のベクトル空間としての同型が存在する:

$$V/(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)V \simeq \tilde{V}/\mathfrak{A}_1\tilde{V}.$$

証明．ベクトル空間の間の写像 ι を

$$\begin{array}{rcl} \iota : V & \longrightarrow & \tilde{V} \\ v & \mapsto & 1 \otimes v \end{array}$$

と定義する．このとき明らかに $\iota((\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)V) \subset \mathfrak{A}_1\tilde{V}$ であるので ι は線型写像

$$\iota : V/(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)V \longrightarrow \tilde{V}/\mathfrak{A}_1\tilde{V}$$

を誘導する．これが同型写像になることを示そう．Poincaré-Birkhoff-Witt の定理 (事実 2.26) より

$$U(\mathfrak{A}) = U(\mathfrak{A}_1) \otimes_{U(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)} U(\mathfrak{A}_2)$$

となる．従って $\tilde{V}$ は

$$\begin{array}{rcl} \tilde{V} & = & U(\mathfrak{A}) \otimes_{U(\mathfrak{A}_2)} V \\ & = & \big(U(\mathfrak{A}_1) \otimes_{U(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)} U(\mathfrak{A}_2)\big) \otimes_{U(\mathfrak{A}_2)} V \\ & = & U(\mathfrak{A}_1) \otimes_{U(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)} V \end{array}$$

であるが，ここで自然に

$$\begin{array}{rcl} \tilde{V}/\mathfrak{A}_1\tilde{V} & \simeq & \mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{A}_1)} \tilde{V} \\ V/(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)V & \simeq & \mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)} V \end{array}$$

となることを用いると

$$\begin{array}{rcl} \tilde{V}/\mathfrak{A}_1\tilde{V} & \simeq & \mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{A}_1)} \tilde{V} \\ & = & \mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{A}_1)} \big(U(\mathfrak{A}_1) \otimes_{U(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)} V\big) \\ & = & \mathbb{C} \otimes_{U(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)} V \\ & = & V/(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)V \end{array}$$

を得る． □

(余) 真空の空間の有限次元性を調べよう．次の補題は有限次元性の証明の他に 3 点の (余) 真空の空間の構造を調べるときにも用いる．

補題 3.5. 包含写像

$$V(J_A) \longrightarrow M(J_A)$$

はベクトル空間の同型

$$V(J_A)/\,\mathfrak{g}V(J_A) \longrightarrow \mathcal{W}_{w_A}(J_A) \tag{3.9}$$

を誘導する. また, $V(J_A)$ への制限による写像

$$\begin{array}{ccc} M(J_A)^\dagger & \longrightarrow & V(J_A)^\dagger \\ \langle\Phi| & \mapsto & \langle\Phi||_{V(J_A)} \end{array}$$

はベクトル空間の同型

$$\mathcal{W}^\dagger_{w_A}(J_A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(J_A), \mathbb{C}) \tag{3.10}$$

を誘導する.

証明. 補題 3.4 を

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \widehat{\mathfrak{g}}_A \\ \mathfrak{A}_1 &= \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} = \mathfrak{g} \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A)) \\ \mathfrak{A}_2 &= \bigoplus_{a \in A} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[\xi_a]] \oplus \mathbb{C}c \\ V &= V(J_A) \end{aligned}$$

に対して適用する. ただし, $\mathfrak{A}_2$ の V 上の作用は $X_a \otimes f(\xi_a) \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[\xi_a]]$ の作用を, $f(0)X_a \in \mathfrak{g}$ の $V(J_A)$ の第 a 成分への作用とし, $c = l\mathrm{id}$ とする. すると, 命題 3.1 より

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \\ \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 &= \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g} \end{aligned}$$

であり, Weyl 加群の定義 (2.9) より

$$\tilde{V} = U(\mathfrak{A}) \otimes_{U(\mathfrak{A}_2)} V = M(J_A)$$

である. 補題 3.4 より包含写像 $V = V(J_A) \hookrightarrow \tilde{V} = M(J_A)$ は次のベクトル空間の同型を誘導する:

$$V(J_A)/\mathfrak{g}V(J_A) \simeq M(J_A)/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} M(J_A) = \mathcal{W}_{w_A}(J_A)$$

これで (3.9) が示された. この同型写像の双対写像を考えると,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^\dagger_{w_A}(J_A) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{W}_{w_A}(J_A), \mathbb{C}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V(J_A)/\mathfrak{g}V(J_A), \mathbb{C}) \\ &= \left\{\phi \in V(J_A)^\dagger \mid \phi(\mathfrak{g}V(J_A)) = 0\right\} \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(J_A), \mathbb{C}) \end{aligned}$$

となり, (3.10) を得る. □

定理 3.6. 余真空の空間 $\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$ および真空の空間 $\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ は有限次元である.

証明. $\mathcal{H}(J_A)$ は $M(J_A)$ の $\widehat{\mathfrak{g}}_A$ 剰余加群であり, $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}$ は $\widehat{\mathfrak{g}}_A$ の Lie 部分代数であるので, 全射

$$M(J_A) \twoheadrightarrow \mathcal{H}(J_A)$$

はベクトル空間の全射

$$\mathcal{W}_{w_A}(J_A) \twoheadrightarrow \mathcal{V}_{w_A}(J_A)$$

を誘導する. この全射を補題 3.5 の同型 (3.9) と合成すれば全射

$$V(J_A)/\mathfrak{g}V(J_A) \twoheadrightarrow \mathcal{V}_{w_A}(J_A)$$

を得る．また, この双対写像を考えて単射

$$\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(J_A), \mathbb{C})$$

を得る．$V(J_A)/\,\mathfrak{g}V(J_A)$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(J_A), \mathbb{C})$ は有限次元なので, $\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$, $\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ の有限次元性が示される． □

3.2 基本的な例

では (余) 真空の空間がどのようになるかを調べてみよう．ここで扱うのは点の数 $|A|$ が 1, 2, 3 のときだけだが, 後々7 章で実は $|A| = 3$ の場合が最も重要であり, それより点の数が多い場合でも 3 点の場合に帰着させることで $\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$ の次元を計算できることがわかる．

まず最も簡単な $|A| = 1$ の場合を考える．$\mathbb{P}^1$ の 1 点 w はどのように取っても w を 0 に写す $\mathbb{P}^1$ の自己同型写像が存在するので $w = 0$ としていい．つまり

$$w_A = (w_a) = (0)$$

とする．また $J_A = (j_a) = (j)$ とする．この時

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} &= \mathfrak{g} \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A)) \\
&= \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{-1}] \\
&\subset \widehat{\mathfrak{g}}_A = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z)) \oplus \mathbb{C}c
\end{aligned}$$

である．任意の $X \in \mathfrak{g}$ と任意の $n \geq 1$ に対して $X(-n) \in \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}$ ゆえ

$$\bigoplus_{d \geq 1} \mathcal{H}_j(d) \subset \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} \mathcal{H}_j$$

であるので定理 3.6 の証明で示したように全射

$$V_j/\,\mathfrak{g}V_j \twoheadrightarrow \mathcal{V}_{w_A}(J_A)$$

が存在するが, さらに $\mathcal{H}_j$ の次数を考えると, $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{-1}]$ の元は次数を 1 以上上げるので

$$\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} \mathcal{H}_j \cap V_j = (\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}) V_j$$

となり, 上の全射は同型であることがわかる．V_j は $j \neq 0$ のとき $\mathfrak{g}(V_j) = V_j$ であり, $j = 0$ のとき $\mathfrak{g}\,V_0 = 0$ なので,

$$\mathcal{V}_{w_A}(J_A) = \begin{cases} \mathbb{C} & (j = 0) \\ 0 & (j \neq 0) \end{cases}$$

である．

次に $|A| = 2$ の場合を考える．不変内積を使いたいので真空の空間の方で議論しよう．$A = \{0, \infty\}$ とし $w_0 = 0$, $w_\infty = \infty$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A)) &= \mathbb{C}[z, z^{-1}], \\
\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} &= \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}], \\
\widehat{\mathfrak{g}}_A &= \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi_0)) \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi_\infty)) \oplus \mathbb{C}c
\end{aligned}$$

である．また $X \otimes z^n \in \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} (n \in \mathbb{Z})$ に対して

$$t(X \otimes z^n) = X \otimes \xi_0^n + X \otimes \xi_\infty^{-n}$$

となるので, $\langle\Phi| \in \mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A) \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{j_0}\otimes\mathcal{H}_{j_\infty},\mathbb{C})$ を取ると, 任意の $u_0\otimes u_\infty \in \mathcal{H}(J_A)$ と任意の $X\in\mathfrak{g}, n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\langle\Phi|(X(n)u_0)\otimes u_\infty + \langle\Phi|u_0\otimes(X(-n)u_\infty) = 0 \tag{3.11}$$

を得る.

ところで $\mathcal{H}_j\otimes\mathcal{H}_{j'}$ 上の双線型形式

$$(\ ,\ ) : \mathcal{H}_j\otimes\mathcal{H}_{j'} \longrightarrow \mathbb{C}$$

で任意の $u\in\mathcal{H}_j, v\in\mathcal{H}_{j'}$ 及び任意の $X(n)\in\widehat{\mathfrak{g}}$ に対して

$$(X(n)u,v)+(u,X(-n)v)=0$$

を満たすものは不変内積と呼ばれ, これに対して以下の事実がある:

(1) $j\neq j'$ のとき 0 以外の不変内積は存在しない.

(2) $j=j'$ のとき不変内積は定数倍を除いて一意的に存在する. 実際,

$$(u,v) \underset{\mathrm{def}}{=} \langle\nu(u)|v\rangle$$

は不変内積である. ただし ν は (2.18) で定義した写像である.

(3.11) より $\langle\Phi|\in\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ は不変内積であるから上の事実により

$$\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A) = \begin{cases} \mathbb{C} & (j_0=j_\infty) \\ 0 & (j_0\neq j_\infty) \end{cases}$$

であり, 余真空の空間も

$$\mathcal{V}_{w_A}(J_A) = \begin{cases} \mathbb{C} & (j_0=j_\infty) \\ 0 & (j_0\neq j_\infty) \end{cases}$$

である.

次に $|A|=3$ の場合を考える. $A=\{0,1,\infty\}$ とし $w_0=0,\ w_1=w,\ w_\infty=\infty$ とする. 定理 3.6 の同型と定理 3.6 の証明にある自然な全射 $\mathcal{W}_{w_A}(J_A)\twoheadrightarrow\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$ より全射

$$V(J_A)/\,\mathfrak{g}V(J_A) \twoheadrightarrow \mathcal{V}_{w_A}(J_A)$$

が存在する. そこでまず $V(J_A)/\,\mathfrak{g}V(J_A)$ を考えよう.

$\mathfrak{g}$ のテンソル積表現の既約分解に対して次の事実がある.

事実 3.7. テンソル積表現 $V_{j_0}\otimes V_{j_1}$ の既約分解は次のようになる.

$$V_{j_0}\otimes V_{j_1} = \bigoplus_{|j_0-j_1|\le j\le j_0+j_1,\, j+j_0+j_1\in\mathbb{Z}} V_j$$

$\dim V(J_A)/\,\mathfrak{g}V(J_A)$ を計算するには $V_{j_0}\otimes V_{j_1}\otimes V_{j_\infty}$ に含まれる 1 次元表現の数を数えればいいが, 事実 3.7 より

$$\begin{aligned} V_{j_0}\otimes V_{j_1}\otimes V_{j_\infty} &= \left(\bigoplus_{\substack{|j_0-j_1|\le j\le j_0+j_1 \\ j+j_0+j_1\in\mathbb{Z}}} V_j\right)\otimes V_{j_\infty} \\ &= \bigoplus_{\substack{|j_0-j_1|\le j\le j_0+j_1,\, j+j_0+j_1\in\mathbb{Z} \\ |j_\infty-j|\le j'\le j_\infty+j,\, j'+j_\infty+j\in\mathbb{Z}}} V_{j'} \end{aligned}$$

を得る．これから1次元表現の数は

$$\dim V(J_A)/\mathfrak{g}V(J_A)=\begin{cases}1 & (j_0+j_1+j_\infty\in\mathbb{Z}, |j_0-j_1|\le j_\infty\le j_0+j_1)\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}\tag{3.12}$$

となる．従って $\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$ も高々1次元である．さて，一般には $j_0+j_1+j_\infty\in\mathbb{Z}$, $|j_0-j_1|\le j_\infty\le j_0+j_1$ であっても

$$\mathcal{V}_{w_A}(J_A)\simeq V(J_A)/\mathfrak{g}V(J_A)(=\mathbb{C})$$

ではない．実際に上の等式が成り立つための j_0, j_1, j_∞ の条件を調べよう．

補題 3.8. 今 $j_0+j_1+j_\infty\in\mathbb{Z}$, $|j_0-j_1|\le j_\infty\le j_0+j_1$ は成立しているとする．このとき以下は同値である:

(1) $j_0+j_1+j_\infty\le l$

(2) 任意の $u_1\in V_{j_1}$, $u_\infty\in V_{j_\infty}$ に対して

$$|j_0\rangle\otimes(E^{l-2j_0+1}u_1)\otimes u_\infty\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{g}V(J_A)$$

が成立する．

証明. $V_{j_1}\otimes V_{j_\infty}$ の既約分解を

$$V_{j_1}\otimes V_{j_\infty}=\sum_{|j_1-j_\infty|\le j\le j_1+j_\infty}W_j,\quad W_j\simeq V_j$$

とする．事実 3.7 より

$$\begin{aligned}V_{j_0}\otimes W_{j_0}/\mathfrak{g}V(J_A) &= \mathbb{C}\\ V_{j_0}\otimes W_j/\mathfrak{g}V(J_A) &= 0\quad(j\neq j_0)\end{aligned}$$

である．このとき，ある $w\in W_{j_0}$ が存在して $|j_0\rangle\otimes w\equiv 0$ であるが，任意の $h>-j_0$ に対して

$$\mathbb{C}|j_0\rangle\otimes W_{j_0(h\alpha_1)}/\mathfrak{g}V(J_A)=0\tag{3.13}$$

が成立する．ただし $W_{j_0(h\alpha_1)}$ はウェイト $h\alpha_1$ に対する W_{j_0} のウェイト空間である．これにより $w\in W_{j_0(-j_0\alpha_1)}$ と取れる．そこで，

$$w=\sum_{-j_1\le h\le j_\infty-j_0}a_hv_{1,h}\otimes v_{\infty,h}$$

とする．ここで $a_h\in\mathbb{C}, v_{1,h}\in V_{j_1(h\alpha_1)}, v_{\infty,h}\in V_{j_\infty((-h-j_0)\alpha_1)}$ である．また

$$Fv_{1,h}=c_hv_{1,h-1},\quad Fv_{\infty,h}=d_hv_{\infty,h+1}$$

とおくと，V_{j_1}, V_{j_∞} は既約表現であるので $-j_1<h\le j_1$ のとき $c_h\neq 0$ であり，$-j_0-j_\infty\le h<j_\infty-j_0$ のとき $d_h\neq 0$ である．このとき $a_{j_\infty-j_0}\neq 0$ が必要である．なぜなら $Fw=0$ より

$$\begin{aligned}0 &= Fw\\ &= \sum_{-j_1\le h\le j_\infty-j_0}\{a_h(Fv_{1,h})\otimes v_{\infty,h}+a_hv_{1,h}\otimes(Fv_{\infty,h})\}\\ &= \{a_{j_\infty-j_0}(Fv_{1,j_\infty-j_0})\otimes v_{\infty,j_\infty-j_0}+a_{j_\infty-j_0-1}v_{1,j_\infty-j_0-1}\otimes(Fv_{\infty,j_\infty-j_0-1})\}\\ &\quad+\{a_{j_\infty-j_0-1}(Fv_{1,j_\infty-j_0-1})\otimes v_{\infty,j_\infty-j_0-1}+a_{j_\infty-j_0-2}v_{1,j_\infty-j_0-2}\otimes(Fv_{\infty,j_\infty-j_0-2})\}\\ &\qquad+\cdots\\ &= (a_{j_\infty-j_0}c_{j_\infty-j_0}+a_{j_\infty-j_0-1}d_{j_\infty-j_0-1})v_{1,j_\infty-j_0-1}\otimes v_{\infty,j_\infty-j_0}\\ &\quad+(a_{j_\infty-j_0-1}c_{j_\infty-j_0-1}+a_{j_\infty-j_0-2}d_{j_\infty-j_0-2})v_{1,j_\infty-j_0-2}\otimes v_{\infty,j_\infty-j_0-1}\\ &\qquad+\cdots\end{aligned}\tag{3.14}$$

ここで $v_{1,j_\infty-j_0-1}\otimes v_{\infty,j_\infty-j_0}$, $v_{1,j_\infty-j_0-2}\otimes v_{\infty,j_\infty-j_0-1}$, $\ldots$, $v_{1,-j_1}\otimes v_{\infty,-j_1+1}$ は一次独立であるので (3.14) で $a_{j_\infty-j_0}=0$ を仮定すると第 1 項より $a_{j_\infty-j_0-1}=0$ を得る. さらに第 2 項より $a_{j_\infty-j_0-2}=0$ であり, これを繰り返せば全ての $a_h=0$ となるので $w=0$ を得るが, これは矛盾である. 従って $a_{j_\infty-j_0}\neq 0$ でなければならない.

$a_{j_\infty-j_0}\neq 0$ であることから

$$|j_0\rangle\otimes v_{1,j_\infty-j_0}\otimes v_{\infty,j_\infty-j_0}\not\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{g}V(J_A) \tag{3.15}$$

が従う. なぜなら $|j_0\rangle\otimes v_{1,j_\infty-j_0}\otimes v_{\infty,j_\infty-j_0}\not\equiv 0$ と仮定すると $w' \underset{\mathrm{def}}{=} w-a_{j_\infty-j_0}v_{1,j_\infty-j_0}\otimes v_{\infty,j_\infty-j_0}$ もまた $|j_0\rangle\otimes w'\not\equiv 0$ を満たす. しかし上で示したようにこのような w' に対しては $a_{j_\infty-j_0}\neq 0$ が従うが, これは w' の定義に反する. 従って (3.15) が必要である.

さて $j_0+j_1+j_\infty\leq l$ とする. 任意のウェイトベクトル $u_1\in V_{j_1(h_1\alpha_1)}$, $u_\infty\in V_{j_\infty(h_\infty\alpha_1)}$ に対して $h_1+h_\infty+(l-2j_0+1)>-j_0$ ゆえ (3.13) より

$$|j_0\rangle\otimes(E^{l-2j_0+1}u_1)\otimes u_\infty\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{g}V(J_A)$$

となり, (2) が従う.

逆に $j_0+j_1+j_\infty>l$ とする. $j_0+j_1+j_\infty\in\mathbb{Z}$ であるから $j_0+j_1+j_\infty\geq l+1$ である. よって

$$\begin{aligned} j_\infty-j_0-(l-2j_0+1) &= j_0+j_\infty-l-1\\ &\geq -j_1 \end{aligned}$$

であるので $u_1=F^{l-2j_0+1}v_{1,j_\infty-j_0}(\neq 0)$ とおくとある 0 でない定数 k があって

$$v_{1,j_\infty-j_0}=kE^{l-2j_0+1}u_1$$

が成立する. 従って (3.15) より

$$|j_0\rangle\otimes E^{l-2j_0+1}u_1\otimes v_{\infty,j_\infty-j_0}\not\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{g}V(J_A)$$

を得る. これで (2) から (1) が示せた. □

定理 3.9. 3 点 ($|A|=3$) の場合の余真空の空間 $\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$ は次のようになる.

$$\mathcal{V}_{w_A}(J_A)=\begin{cases}\mathbb{C} & \begin{pmatrix} j_0+j_1+j_\infty\in\mathbb{Z}, |j_0-j_1|\leq j_\infty\leq j_0+j_1\\ j_0+j_1+j_\infty\leq l\end{pmatrix}\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

証明. まず補題 3.5 よりベクトル空間の同型 $V(J_A)/\mathfrak{g}V(J_A)\simeq\mathcal{W}_{w_A}(J_A)$ が存在する. (3.12) より $V(J_A)/\mathfrak{g}V(J_A)$ は $j_0+j_1+j_\infty\in\mathbb{Z}$, $|j_0-j_1|\leq j_\infty\leq j_0+j_1$ のとき 1 次元, そうでなければ 0 次元である.

定理の条件を満たすときに, 全射

$$V(J_A)/\mathfrak{g}V(J_A)\simeq\mathcal{W}_{w_A}(J_A)\twoheadrightarrow\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$$

が同型になることを示す.

まず任意の $u_0\in M_{j_0}$, $u_1\in M_{j_1}$, $u_\infty\in M_{j_\infty}$ と $x\in U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)$ に対して, $\mathrm{mod}\ \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}M(J_A)$ で

$$\begin{aligned} |(xE(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle)\otimes u_1\otimes u_\infty\rangle &\equiv 0, & (3.16)\\ |u_0\otimes(xE(-1)^{l-2j_1+1}|j_1\rangle)\otimes u_\infty\rangle &\equiv 0, & (3.17)\\ |u_0\otimes u_1\otimes(xE(-1)^{l-2j_\infty+1}|j_\infty\rangle)\rangle &\equiv 0. & (3.18)\end{aligned}$$

が成立することを示す．どの式も同じ方法で証明できるので (3.16) を示そう．まず $x = X_1(n_1)\dots X_n(n_k)$ $(X_i(n_i) \in \widehat{\mathfrak{g}}^f,\ i = 1, \dots, k)$ の形の元のみを考えれば十分なので， $\mod \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} M(J_A)$ で

$$
\begin{aligned}
&|(xE(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) \otimes u_1 \otimes u_\infty\rangle \\
&\quad = \quad |(X_1(n_1)\dots X_k(n_k)E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) \otimes u_1 \otimes u_\infty\rangle \\
&\quad = \quad |(\rho_0(X_1 \otimes z^{n_1})\dots \rho_0(X_k \otimes z^{n_k})E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) \otimes u_1 \otimes u_\infty\rangle \\
&\quad = \quad |(\rho_0(X_1 \otimes z^{n_1})\dots \rho_0(X_k \otimes z^{n_k})E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) \otimes u_1 \otimes u_\infty\rangle \\
&\quad \equiv \quad -\sum_{a_1=1,\infty} \rho_{a_1}(X_1 \otimes z^{n_1}) \\
&\qquad\qquad |(\rho_0(X_2 \otimes z^{n_2})\dots \rho_0(X_k \otimes z^{n_k})E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) \otimes u_1 \otimes u_\infty\rangle \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\quad \equiv \quad (-1)^k \sum_{a_i=1,\infty} \rho_{a_k}(X_k \otimes z^{n_k})\dots \rho_{a_1}(X_1 \otimes z^{n_1})|(E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) \otimes u_1 \otimes u_\infty\rangle
\end{aligned}
$$

となる．u_1, u_∞ は任意なので $x = 1$ の場合を考えれば十分である．さらに任意の $u_1 \in V_{j_1}$, $u_\infty \in V_{j_\infty}$ に対して (3.16) が成立すれば, 任意の $u_1 \in M_{j_1}$, $u_\infty \in M_{j_\infty}$ に対してやはり (3.16) が成立する．この証明には $p_1 + p_\infty$ に関する帰納法を用いる．任意の $u_1 \in F_{p_1}M_{j_1}$, $u_\infty \in F_{p_\infty}M_{j_\infty}$ に対して (3.16) が成立すると仮定する．任意の $X(-n) \in \widehat{\mathfrak{g}}^f$ $(n > 0)$ と任意の $u_1 \in F_{p_1}M_{j_1}$, $u_\infty \in F_{p_\infty}M_{j_\infty}$ をとり, $f = (z - w_1)^{-n} - (-w_1)^{-n}$ とおくと， $\mod \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} M(J_A)$ で

$$
\begin{aligned}
&|(E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) \otimes (X(-n)u_1) \otimes u_\infty\rangle \\
&\quad = \quad \rho_1(X \otimes \xi_a^{-n})|(E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) \otimes u_1 \otimes u_\infty\rangle \\
&\quad = \quad \rho_1(X \otimes f)|(E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) \otimes u_1 \otimes u_\infty\rangle \\
&\qquad\qquad + (-w_1)^{-n}\rho_1(X)|(E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) \otimes u_1 \otimes u_\infty\rangle \\
&\quad \equiv \quad -\sum_{a=0,\infty} \rho_a(X \otimes f)|(E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) \otimes u_1 \otimes u_\infty\rangle \\
&\qquad\qquad + (-w_1)^{-n}\rho_1(X)|(E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) \otimes u_1 \otimes u_\infty\rangle \\
&\quad \equiv \quad 0
\end{aligned}
$$

が成立する．ここで f は $z = 0$ で零点を持つので $\rho_0(X \otimes f) \in U(\mathfrak{n}^f_+)$ であり, 従って

$$
\rho_0(X \otimes f)(E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) = 0
$$

となること, および f が $z = w_\infty$ で正則であるため $\rho_\infty(X \otimes f)u_\infty \in F_{p_\infty}M_{j_\infty}$ であることと帰納法の仮定を用いた．同様に $|(E(-1)^{l-2j_0+1|j_0\rangle}) \otimes u_1 \otimes (X(-n)u_\infty)\rangle$ も 0 と同値であることが示せる．よって帰納法により任意の $u_1 \in V_{j_1}$, $u_\infty \in V_{j_\infty}$ について (3.16) が成立すれば一般の $u_1 \in M_{j_1}$, $u_\infty \in M_{j_\infty}$ に対しても (3.16) が成立することがわかった．

よって $u_1 \in V_{j_1}$, $u_\infty \in V_{j_\infty}$, $x = 1$ とすると (3.16) は $\mod \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} M(J_A)$ で

$$
\begin{aligned}
&|(E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle) \otimes u_1 \otimes u_\infty\rangle \\
&\quad = \quad |\rho_0(E \otimes z^{-1})^{l-2j_0+1}|j_0\rangle \otimes u_1 \otimes u_\infty\rangle \\
&\quad \equiv \quad (-1)^{l-2j_0+1}\big\{||j_0\rangle \otimes (E^{l-2j_0+1}u_1) \otimes u_\infty\rangle \\
&\qquad\qquad + (l - 2j_0 + 1)||j_0\rangle \otimes (E^{l-2j_0}u_1) \otimes (E(1)u_\infty)\rangle + \cdots\big\} \\
&\quad = \quad (-1)^{l-2j_0+1}||j_0\rangle \otimes (E^{l-2j_0+1}u_1) \otimes u_\infty\rangle
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

である．ここで補題 3.8 より $j_0 + j_1 + j_\infty \le l$ ならば (3.19) は $\mathfrak{g}V(J_A)$ に含まれることがわかる．$\mathfrak{g} \subset \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}$ であるので (3.19) は $\mod \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} M(J_A)$ で 0 に同値である．これで (3.16) が示せた．

結局 $j_0+j_1+j_\infty \le l$ ならば

$$(U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle)\otimes M_{j_1}\otimes M_{j_\infty}\subset \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}M(J_A)$$

である. (3.17), (3.18) も同様の議論で証明できる. 一方

$$\mathcal{H}_j = M_j/U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)E(-1)^{l-2j+1}|j\rangle$$

であるから, 自然な全射 $M(J_A)\twoheadrightarrow \mathcal{H}(J_A)$ の核を $K(J_A)$ とおくと, $j_0+j_1+j_\infty\le l$ のとき $K(J_A)\subset \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}M(J_A)$ である. 従って

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{w_A}(J_A) &= \mathcal{H}(J_A)/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}\mathcal{H}(J_A)\\
&= \frac{M(J_A)/K(J_A)}{(\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}M(J_A)+K(J_A))/K(J_A)}\\
&\simeq M(J_A)/(\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}M(J_A)+K(J_A))\\
&\simeq M(J_A)/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}M(J_A) = \mathcal{W}_{w_A}(J_A)\simeq V(J_A)/\,\mathfrak{g}V(J_A)
\end{aligned}$$

となり, 結局 $j_0+j_1+j_\infty\le l$ のとき同型

$$\mathcal{V}_{w_A}(J_A)\simeq V(J_A)/\,\mathfrak{g}V(J_A) \tag{3.20}$$

が得られた. よってこのとき $\dim\mathcal{V}_{w_A}(J_A)=1$ である.

逆に $\dim\mathcal{V}_{w_A}(J_A)=1$ ならば $\dim V(J_A)/\,\mathfrak{g}V(J_A)=1$ より, $j_0+j_1+j_\infty\in\mathbb{Z}$, $|j_0-j_1|\le j_\infty\le j_0+j_1$ かつ, (3.20) の同型が成立しなければならない. そのとき $K(J_A)\subset\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}M(J_A)$ であるから, 特に任意の $v_1\in V_{j_1}$, $v_\infty\in V_{j_\infty}$ に対して $\mod \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}M(J_A)$ で次が成立する:

$$0\equiv (E(-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle)\otimes v_1\otimes v_\infty \equiv (-1)^{l-2j_0+1}|j_0\rangle\otimes(E^{l-2j_0+1}v_1)\otimes v_\infty.$$

よって, この式の最右辺で代表される $\mathcal{V}_{w_A}(J_A)\simeq V(J_A)/\,\mathfrak{g}V(J_A)$ の元は 0 になる. 従って補題 3.8 より $j_0+j_1+j_\infty\le l$ である. □

第 4 章　頂点作用素代数

3 章で共形場に対する真空の空間 $\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ を定義したが, このセクションではその元を頂点作用素と呼ばれる作用素値函数と見ることを考える.

4.1　頂点作用素

最初に $|A| = 3$ の場合の真空の空間 $\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ から頂点作用素と呼ばれる作用素値函数を定義しよう. 頂点作用素の例として 2.2 節で考えたカレント $X(z)$ やエネルギー運動量テンソル $T(z)$ が含まれていることが重要である.

添字の集合 A は ∞ を含むとする.

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{H}(J_A)^\dagger & = & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\big(\bigotimes_{a\in A}\mathcal{H}_{j_a},\mathbb{C}\big), \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\big(\bigotimes_{a\in A}\mathcal{H}_{j_a},\mathbb{C}\big) & \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\big(\bigotimes_{a\neq\infty}\mathcal{H}_{j_a},\mathcal{H}^\dagger_{j_\infty}\big) \\
\langle\Phi| & \mapsto & \Phi^* \\
(\Phi^*(u))(u_\infty) & \underset{\mathrm{def}}{=} & \langle\Phi|u\otimes u_\infty\rangle
\end{array}$$

と定義する. ここで $u \in \bigotimes_{a\neq\infty}\mathcal{H}_{j_a}$, $u_\infty \in \mathcal{H}_{j_\infty}$ である. (2.18) の ν を用いて $\mathcal{H}^\dagger_{j_\infty}$ は $\widehat{\mathcal{H}}_{j_\infty}$ と同一視できるので

$$\Phi = \nu^{-1}\circ\Phi^* : \bigotimes_{a\neq\infty}\mathcal{H}_{j_a} \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}_{j_\infty} \tag{4.1}$$

と考えられる.

$\langle\Phi| \in \mathcal{H}(J_A)^\dagger$ が $\langle\Phi| \in \mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ を定義するとき対応する Φ が満たすべき条件について調べてみよう. $X \in \mathfrak{g}$ と $f(\xi_a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\xi_a^n \in \mathbb{C}((\xi_a))$ に対して

$$\begin{array}{rcl}
\underset{\xi_a=0}{\mathrm{Res}}\,(X(\xi_a)f(\xi_a)d\xi_a) & = & \underset{\xi_a=0}{\mathrm{Res}}\left(\displaystyle\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} X(m)a_n\xi_a^{-m+n-1}d\xi_a\right) \\
& = & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_nX(n) \\
& = & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} X\otimes a_n\xi_a^n
\end{array}$$

である. ゆえに $X\otimes f \in \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}$ と $a \neq \infty$ に対して

$$\begin{array}{rcl}
\rho_a(X\otimes f) & = & \rho_a(X\otimes t_a(f)) \\
& = & \rho_a\left(\underset{\xi_a=0}{\mathrm{Res}}\,(X(\xi_a)t_a(f)d\xi_a)\right) \\
& = & \rho_a\left(\underset{z=w_a}{\mathrm{Res}}\,(X(z-w_a)f(z)dz)\right)
\end{array} \tag{4.2}$$

となる．一方, $\nu(\rho_\infty(X\otimes f))$ は $\rho_\infty(X\otimes f)$ を展開した時に表れる各 $X(n)$ に ν を適用したものを表すこととする．つまり，

$$\begin{aligned}\nu(\rho_\infty(X\otimes f)) &= \rho_\infty\left(\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(f(z)\sum_n \nu(X(n))(z^{-1})^{-n-1}dz^{-1}\right)\right)\\ &= \rho_\infty\left(\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(f(z)\sum_n \nu(X(n))z^{n+1}(-z^{-2}dz)\right)\right)\\ &= \rho_\infty\left(\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(f(z)\sum_n X(-n)z^{n-1}dz\right)\right)\\ &= \rho_\infty\left(\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(f(z)\sum_n X(n)z^{-n-1}dz\right)\right)\\ &= \rho_\infty\left(\operatorname*{Res}_{z=\infty}(X(z)f(z)dz)\right) \qquad (4.3)\end{aligned}$$

とする．すると

$$\nu(\rho_\infty(X\otimes f)u_\infty) = \nu(u_\infty)\nu(\rho_\infty(X\otimes f))$$

である．

命題 4.1. 双対空間の元 $\langle\Phi| \in \mathcal{H}(J_A)^\dagger$ に対応する $\mathrm{Hom}(\bigotimes_{a\neq\infty}\mathcal{H}_{j_a}, \widehat{\mathcal{H}}_{j_\infty})$ の元を Φ とする．このとき $\langle\Phi|$ が $\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ に属するための必要十分条件は

$$\Phi\circ\sum_{a\neq\infty}\rho_a\left(\operatorname*{Res}_{z=w_a}(X(z-w_a)f(z)dz)\right) = -\rho_\infty\left(\operatorname*{Res}_{z=\infty}(X(z)f(z)dz)\right)\circ\Phi$$

である．

証明. $\langle\Phi| \in \mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ であるための必要十分条件は任意の $u\in\bigotimes_{a\neq\infty}\mathcal{H}_{j_a}$, $u_\infty\in\mathcal{H}_{j_\infty}$ と $X\otimes f\in\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}$ に対して

$$\langle\Phi|\sum_{a\in A}\rho_a(X\otimes f)|u\otimes u_\infty\rangle = 0$$

である．これは (4.2), (4.3) を用いると

$$\begin{aligned}&\Phi\left(\sum_{a\neq\infty}\rho_a\left(\operatorname*{Res}_{z=w_a}(X(z-w_a)f(z)dz)\right)u\right)(\nu(u_\infty))\\ &= \Phi^*\left(\sum_{a\neq\infty}\rho_a\left(\operatorname*{Res}_{z=w_a}(X(z-w_a)f(z)dz)\right)u\right)(u_\infty)\\ &= \langle\Phi|\sum_{a\neq\infty}\rho_a(X\otimes f)|u\otimes u_\infty\rangle\\ &= -\langle\Phi|\rho_\infty(X\otimes f)|u\otimes u_\infty\rangle\\ &= -\Phi^*(u)(\rho_\infty(X\otimes f)u_\infty)\\ &= -\Phi(u)(\nu(u_\infty)\nu(\rho_\infty(X\otimes f)))\\ &= -(\nu(\rho_\infty(X\otimes f))\Phi(u))(\nu(u_\infty))\\ &= -\left(\rho_\infty\left(\operatorname*{Res}_{z=\infty}(X(z)f(z)dz)\right)\Phi(u)\right)(\nu(u_\infty))\end{aligned}$$

と同値になる． □

ここで

$$A = \{0, 1, \infty\}$$

$$\begin{array}{rclrclrcl} w_0 &=& 0, & w_1 &=& w, & w_\infty &=& \infty \\ j_0 &=& j, & j_1 &=& 0, & j_\infty &=& j \end{array}$$

の場合を考えよう．このとき定理 3.9 より $\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A) \simeq \mathbb{C}$ である．$\langle\Phi| \in \mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ を 0 でない元とし

$$\Phi : \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_j \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}_j$$

を対応する写像とする．さらに各 $v \in \mathcal{H}_0$ に対して

$$\Phi\,(v; w) \underset{\mathrm{def}}{=} \Phi(v \otimes *) : \mathcal{H}_j \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}_j$$

とおくと, これは w を変数とする作用素値函数である．この $\Phi\,(v;w)$ $(v \in \mathcal{H}_0)$ を頂点作用素という．

頂点作用素 $\Phi\,(v;w)$ の性質を調べよう． まず命題 4.1 の等式から $f = z^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ あるいは $f = (z-w)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ として次が得られる．

$$\begin{aligned} [X(n), \Phi\,(v;w)] &= \Phi\left(\operatorname*{Res}_{z=w}(X(z-w)z^n dz)\, v; w\right) && (4.4) \\ \Phi\,(X(n)v; w) &= -\Phi\,(v;w) \operatorname*{Res}_{z=0}(X(z)(z-w)^n dz) && (4.5) \\ &\qquad -\operatorname*{Res}_{z=\infty}(X(z)(z-w)^n dz)\,\Phi\,(v;w) \end{aligned}$$

$\widehat{\mathrm{id}}$ は自然な埋め込み

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{id}} : \mathcal{H}_j &\hookrightarrow \widehat{\mathcal{H}}_j \\ u &\mapsto u \end{aligned}$$

とする．

命題 4.2. 最高ウェイトベクトル $|0\rangle$ に対する頂点作用素 $\Phi\,(|0\rangle; w)$ は $\widehat{\mathrm{id}}$ の定数倍である．

証明. z^n が $z = w$ で正則であることから

$$\operatorname*{Res}_{z=w}(X(z-w)z^n dz)\,|0\rangle = 0$$

であるので, (4.4) で $v = |0\rangle$ とすると,

$$X(n)\Phi\,(|0\rangle; w) = \Phi\,(|0\rangle; w)\, X(n) \tag{4.6}$$

を得る．従って, $\mathrm{Ker}\Phi\,(|0\rangle; w)$ は $\mathcal{H}_j$ の部分表現である．一方, $\mathcal{H}_j$ は既約表現であるのでその部分表現は 0 か $\mathcal{H}_j$ 自体に一致する．$\mathrm{Ker}\Phi\,(|0\rangle; w)$ が $\mathcal{H}_j$ に一致する場合には $\Phi\,(|0\rangle; w)$ は 0 なので, $\widehat{\mathrm{id}}$ の定数倍である．[1] よって $\mathrm{Ker}\Phi\,(|0\rangle; w)$ が 0 の場合を考える．この時, 最高ウェイトベクトル $|j\rangle \in \mathcal{H}_j$ の像は 0 ではないのでウェイトを考えれば $\Phi\,(|0\rangle; w)\,|j\rangle$ は $\widehat{\mathcal{H}}_j$ の最高ウェイトベクトル $|j\rangle \in \widehat{\mathcal{H}}_j$ の定数倍である．$\Phi\,(|0\rangle; w)\,|j\rangle = c|j\rangle$ とすると, $\mathcal{H}_j$ は既約表現なので (4.6) より任意の元 $u = x|j\rangle \in \mathcal{H}_j$ $(x \in U(\widehat{\mathfrak{g}}^f))$ に対して,

$$\Phi\,(|0\rangle; w)\, u = \Phi\,(|0\rangle; w)\, x|j\rangle = x\Phi\,(|0\rangle; w)\,|j\rangle = cx|j\rangle = cu$$

となり, 従って $\Phi\,(|0\rangle; w)$ は $\widehat{\mathrm{id}}$ の定数倍である． □

補題 4.3. $\langle\Phi| \in \mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A) \simeq \mathbb{C}$ を 0 でない元とすると,

$$\langle\Phi||j\rangle \otimes |0\rangle \otimes |j\rangle\rangle \neq 0 \tag{4.7}$$

である．

[1] ただし, 後で見る様に Φ を 0 でない元としたので, 実際にはこの場合は起こり得ない．

証明. (4.7) が 0 と仮定すると, $\mathcal{H}_j$, $\mathcal{H}_0$ は既約表現であるから, 任意の u_∞, $u_0 \in \mathcal{H}_j = U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)|j\rangle$, $u_1 \in \mathcal{H}_0 = U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)|0\rangle$ に対して

$$\langle \Phi | u_\infty \otimes u_1 \otimes u_0 \rangle = 0$$

となり, $\langle \Phi | \neq 0$ に矛盾する. □

命題 4.2 より $\Phi\left(|0\rangle; w\right)$ は $\widehat{\mathrm{id}}$ の定数倍であるが, 補題 4.3 より

$$\begin{aligned} \langle j | \Phi\left(|0\rangle; w\right) |j\rangle &= \Phi(|0\rangle \otimes |j\rangle)(\nu(|j\rangle)) \\ &= \Phi^*(|0\rangle \otimes |j\rangle)(|j\rangle) \\ &= \langle \Phi | |j\rangle \otimes |0\rangle \otimes |j\rangle \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

となって $\Phi\left(|0\rangle; w\right)$ は 0 でない. よって, 以下では $\Phi\left(|0\rangle; w\right) = \widehat{\mathrm{id}}$ と正規化しておく.

命題 4.4. 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\Phi\left(X(-1)|0\rangle; w\right) = X(w)$$

である.

証明. (4.5) で $v = |0\rangle, n = -1$ として

$$\Phi\left(X(-1)|0\rangle; w\right) = -\operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)(z-w)^{-1}dz\right) - \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)(z-w)^{-1}dz\right)$$

を得る. ここで右辺の第 1 項を計算すれば,

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)(z-w)^{-1}dz\right) &= \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} X(m) z^{-m-1}(z-w)^{-1}dz\right) \\ &= -w^{-1}\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}, n\geq 0} X(m) w^{-n} z^{n-m-1} dz\right) \\ &= -\sum_{n\geq 0} X(n) w^{-n-1} \\ &= -X(w)_{\geq 0} \end{aligned}$$

であり, 第 2 項は

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)(z-w)^{-1}dz\right) &= \operatorname*{Res}_{\xi_\infty=0}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} X(m)\xi_\infty^{m+1}(\xi_\infty^{-1}-w)^{-1}(-\xi_\infty^{-2}d\xi_\infty)\right) \\ &= -\operatorname*{Res}_{\xi_\infty=0}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}, n\geq 0} X(m) w^n \xi_\infty^{m+n} d\xi_\infty\right) \\ &= -\sum_{n\geq 0} X(-n-1) w^n \\ &= -\sum_{n\leq -1} X(n) w^{-n-1} \\ &= -X(w)_{<0} \end{aligned}$$

となる. 従って

$$\Phi\left(X(-1)|0\rangle; w\right) = X(w)$$

である. □

同様にして任意の $X_1, \cdots, X_p \in \mathfrak{g}$ と $n_1, \cdots, n_p > 0$ に対して

$$\Phi\left(X_p(-n_p)\cdots X_1(-n_1)|0\rangle; w\right)$$

を計算することができる. 例えば $\Phi\left(X(-1)Y(-1)|0\rangle; w\right)$ は

$$\begin{aligned}
\Phi\left(X(-1)Y(-1)|0\rangle; w\right) &= -\Phi\left(Y(-1)|0\rangle; w\right) \operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)(z-w)^{-1}dz\right) \\
&\quad -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)(z-w)^{-1}dz\right)\Phi\left(Y(-1)|0\rangle; w\right) \\
&= Y(w)X(w)_{\geq 0} + X(w)_{<0}Y(w) \\
&= {}^{\circ}_{\circ} X(w)Y(w) {}^{\circ}_{\circ}
\end{aligned}$$

であり, また $\Phi\left(X(-n)|0\rangle; w\right)$ は

$$\operatorname{Res}\left(X(z)\partial_z f(z)dz\right) = -\operatorname{Res}\left(\partial_z X(z) f(z) dz\right)$$

を用いると

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(X(-n)|0\rangle; w\right) \\
&= -\operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)(z-w)^{-n}dz\right) - \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)(z-w)^{-n}dz\right) \\
&= -\operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\partial_z^{n-1}(z-w)^{-1}dz\right) - \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\partial_z^{n-1}(z-w)^{-1}dz\right) \\
&= -\frac{1}{(n-1)!}\left\{\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\partial_z^{n-1}X(z)(z-w)^{-1}dz\right) + \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\partial_z^{n-1}X(z)(z-w)^{-1}dz\right)\right\} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\partial_w^{n-1}X(w)
\end{aligned}$$

である.

定義 4.5. Virasoro 元 $\omega \in \mathcal{H}_0(2)$ を次で定義する.

$$\omega = \frac{1}{2(l+2)}\sum_{i=1}^{3} X_i(-1)X^i(-1)|0\rangle$$

命題 4.6. Virasoro 元 ω に対する頂点作用素 $\Phi\left(\omega; w\right)$ は

$$\Phi\left(\omega; w\right) = T(w)$$

である.

証明. (4.8) よりただちに

$$\begin{aligned}
\sum_i \Phi\left(X_i(-1)X^i(-1)|0\rangle; w\right) &= \sum_i {}^{\circ}_{\circ} X_i(w)X^i(w) {}^{\circ}_{\circ} \\
&= 2(l+2)T(w)
\end{aligned}$$

を得る. □

さて $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をとり $v \in \mathcal{H}_0(d)$ とする. 頂点作用素 $\Phi\left(v; w\right)$ を

$$\Phi\left(v; w\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi_n(v) w^{-n-d}$$

と展開する. このとき

$$\Phi_n(v) : \mathcal{H}_j(d') \longrightarrow \mathcal{H}_j(d'-n) \tag{4.8}$$

が成立する．この証明は d についての帰納法で行う．$d=0$ のとき $\Phi(v;w)=\widehat{\mathrm{id}}$ ゆえ (4.8) が成立する．一方, d まで成立すると仮定すれば, $v\in\mathcal{H}_0(d)$, $X(-k)\in\widehat{\mathfrak{g}}$ として $\Phi(X(-k)v;w)$ に対して成立することを示せばいい．

$$
\begin{aligned}
\Phi(X(-k)v;w) &= \frac{1}{(k-1)!}\,{}^{\circ}_{\circ}\partial_w^{k-1}X(w)\Phi(v;w){}^{\circ}_{\circ} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z},n\geq 0}(-1)^{k-1}\binom{n+k-1}{n}\Phi_m(v)X(n)w^{-m-n-d-k} \\
&\qquad + \sum_{m\in\mathbb{Z},n\leq -1}(-1)^{k-1}\binom{n+k-1}{n}X(n)\Phi_m(v)w^{-m-n-d-k}
\end{aligned}
$$

であるから帰納法の仮定より $\Phi(X(-k)v;w)$ に対してもまた (4.8) が成立する．

4.2　頂点作用素の OPE

命題 4.4, 命題 4.6 で見たとおり頂点作用素 $\Phi(v;w)$ には $X(w)$ や $T(w)$ が含まれる．そこで 2.2 章で $X(w)$ や $T(w)$ の間の OPE を考えたのと同様にここでは頂点作用素の間の OPE を考えることにしよう．

最初に積分経路についての記号を用意しておく．被積分函数が $w_1,\cdots,w_k$ に極を持つとき積分経路 $C_{w_{i_1},\cdots,w_{i_j}}$ は $w_{i_1},\cdots,w_{i_j}$ を内部に含み, 他の極は外部にある閉曲線とする．

一般の頂点作用素の間の OPE を計算する前にその準備として特別な場合である $X(w)=\Phi(X(-1)|0\rangle;w)$ と頂点作用素の OPE について考えよう．

補題 4.7. 頂点作用素 $\Phi(v;w_1)$ と $X(w_2)$ に対して以下の “合成” を考える．

$$
\begin{array}{ll}
\Phi(v;w_1)\,X(w_2) & (|w_1|>|w_2|>0) \\
X(w_2)\Phi(v;w_1) & (|w_2|>|w_1|>0) \\
\Phi(X(w_2-w_1)v;w_1) & (|w_1|>|w_2-w_1|>0)
\end{array}
$$

左側の作用素値 Laurent 級数は行列要素の意味で右側の領域で絶対収束し, $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 上の w_1, $w_2=0,\infty$ および $w_1=w_2$ にのみ極を持つ有理函数に解析接続される．さらにこれら 3 つの作用素値有理函数は全て一致する．ただし $\Phi(X(w_2-w_1)v;w_1)$ は

$$
\Phi(X(w_2-w_1)v;w_1)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Phi(X(n)v;w_1)(w_2-w_1)^{-n-1}
$$

であり, n が十分大きいとき $X(n)v=0$ であるから, これは w_1 と w_2-w_1 の作用素値 Laurent 級数である．

証明．以下では行列要素を考えているが, $\langle\varphi|\in\mathcal{H}_j^*$, $|u\rangle\in\mathcal{H}_j$ は省略する．

$v\in F_p\mathcal{H}_0$ とし, p についての帰納法で証明する．まず $p=0$ のとき $\Phi(|0\rangle;w_1)=\widehat{\mathrm{id}}$ ゆえ,

$$
\Phi(|0\rangle;w_1)\,X(w_2)=X(w_2)\Phi(|0\rangle;w_1)=X(w_2)
$$

である. 一方 $\Phi\left(X(w_2-w_1)|0\rangle; w_1\right)$ は (4.5) を用いて

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(X(w_2-w_1)|0\rangle; w_1\right) &= \sum_{k\geq 1}\Phi\left(X(-k)|0\rangle; w_1\right)(w_2-w_1)^{k-1}\\
&= -\sum_{k\geq 1}\Phi\left(|0\rangle; w_1\right)\operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)(z-w_1)^{-k}(w_2-w_1)^{k-1}dz\right)\\
&\qquad -\sum_{k\geq 1}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)(z-w_1)^{-k}(w_2-w_1)^{k-1}dz\right)\Phi\left(|0\rangle; w_1\right)\\
&= -\sum_{k\geq 1}\operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)(z-w_1)^{-k}(w_2-w_1)^{k-1}dz\right)\\
&\qquad -\sum_{k\geq 1}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)(z-w_1)^{-k}(w_2-w_1)^{k-1}dz\right)\\
&= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_1,w_2}}X(z)(z-w_1)^{-k}(w_2-w_1)^{k-1}dz\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_1,w_2}}X(z)(z-w_2)^{-1}dz\\
&= X(w_2)
\end{aligned}
$$

となる. ただしここで $|z-w_1|>|w_1-w_2|>0$ 上で

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1}(z-w_1)^{-k}(w_2-w_1)^{k-1} &= (z-w_1)^{-1}\sum_{k\geq 1}\left(\frac{w_2-w_1}{z-w_1}\right)^{k-1}\\
&= (z-w_1)^{-1}\left(1+\frac{w_1-w_2}{z-w_1}\right)^{-1}\\
&= (z-w_2)^{-1}
\end{aligned}
$$

となることを用いた. 以上より $p=0$ で命題が成立する.

領域 D_1, D_2 を

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \{(w_1,w_2)\mid |w_1|>|w_2|>0,\ |w_1|>|w_2-w_1|>0\}\\
D_2 &= \{(w_1,w_2)\mid |w_2|>|w_1|>0,\ |w_1|>|w_2-w_1|>0\}
\end{aligned}
$$

と定義する. 任意の $v\in F_p\mathcal{H}_0$ に対して D_1 上で

$$
\Phi\left(v; w_1\right)X(w_2) = \Phi\left(X(w_2-w_1)v; w_1\right) \tag{4.9}
$$

が成立し, D_2 上で

$$
X(w_2)\Phi\left(v; w_1\right) = \Phi\left(X(w_2-w_1)v; w_1\right) \tag{4.10}
$$

が成立すると仮定する. このとき, 任意の $Y(-n)\in\widehat{\mathfrak{g}}\ (n>0)$ に対して D_1 上で

$$
\Phi\left(Y(-n)v; w_1\right)X(w_2) = \Phi\left(X(w_2-w_1)Y(-n)v; w_1\right) \tag{4.11}
$$

が, D_2 上で

$$
X(w_2)\Phi\left(Y(-n)v; w_1\right) = \Phi\left(X(w_2-w_1)Y(-n)v; w_1\right) \tag{4.12}
$$

が成立することを示せばよい. (4.11) を示す. 左辺を計算すれば,

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(Y(-n)v;w_1\right)X(w_2) &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\infty} Y(z)(z-w_1)^{-n}dz\Phi\left(v;w_1\right)X(w_2) \\
&\qquad -\Phi\left(v;w_1\right)\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_2,0}} Y(z)(z-w_1)^{-n}dzX(w_2) \\
&= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\infty} Y(z)\Phi\left(v;w_1\right)X(w_2)(z-w_1)^{-n}dz \\
&\qquad -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_2,0}} \Phi\left(v;w_1\right)Y(z)X(w_2)(z-w_1)^{-n}dz \\
&= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\infty} Y(z)\Phi\left(v;w_1\right)X(w_2)(z-w_1)^{-n}dz \qquad (4.13)\\
&\qquad -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_0} \Phi\left(v;w_1\right)Y(z)X(w_2)(z-w_1)^{-n}dz \\
&\qquad -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_2}} \Phi\left(v;w_1\right)Y(z)X(w_2)(z-w_1)^{-n}dz
\end{aligned}
$$

であるが, ここで命題 2.57 より第 2 項で $Y(z)X(w_2)$ は $z=0$ のまわりにおいて絶対収束する級数 $X(w_2)Y(z)$ に一致し, 第 3 項で $Y(z)X(w_2)$ は $z=w_2$ のまわりにおいて絶対収束する級数 $l\left(X|Y\right)/(z-w_2)^2+1/(z-w_2)\left[Y,X\right](w_2)$ に一致する. これと帰納法の仮定 (4.9) を用いて

$$
\begin{aligned}
&(4.13)\\
&= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\infty} Y(z)\Phi\left(v;w_1\right)X(w_2)(z-w_1)^{-n}dz \\
&\quad -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_0} \Phi\left(v;w_1\right)X(w_2)Y(z)(z-w_1)^{-n}dz \\
&\quad -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_2}} \Phi\left(v;w_1\right)\left\{\frac{l\left(X|Y\right)}{(z-w_2)^2}+\frac{1}{z-w_2}\left[Y,X\right](w_2)\right\}(z-w_1)^{-n}dz \\
&= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\infty} Y(z)\Phi\left(X(w_2-w_1)v;w_1\right)(z-w_1)^{-n}dz \\
&\qquad -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_0} \Phi\left(X(w_2-w_1)v;w_1\right)Y(z)(z-w_1)^{-n}dz \\
&\qquad\qquad -\Phi\left(v;w_1\right)\left\{(-n)(w_2-w_1)^{-n-1}l\left(X|Y\right)+(w_2-w_1)^{-n}\left[Y,X\right](w_2)\right\} \\
&= \Phi\left(Y(-n)X(w_2-w_1)v;w_1\right) \qquad (4.14)\\
&\quad +\Phi\left(v;w_1\right)\left\{nl\left(X|Y\right)(w_2-w_1)^{-n-1}-(w_2-w_1)^{-n}\left[Y,X\right](w_2)\right\}
\end{aligned}
$$

を得る. ただし上で (4.14) の最後の等号は (4.5) を用いた. ここで

$$
\begin{aligned}
\left[Y(-n),X(w_2-w_1)\right] &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[Y(-n),X(m)\right](w_2-w_1)^{-m-1} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[Y,X\right](m-n)(w_2-w_1)^{n-m-1}(w_2-w_1)^{-n} \\
&\qquad\qquad +\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta_{m,n}l\left(X|Y\right)(-n)(w_2-w_1)^{-m-1} \\
&= (w_2-w_1)^{-n}\left[Y,X\right](w_2-w_1)-nl\left(X|Y\right)(w_2-w_1)^{-n-1}
\end{aligned}
$$

を用いると (4.14) は (もう一度, 帰納法の仮定 (4.9) を用いて)

$$
\begin{aligned}
(4.14) &= \Phi\left(X(w_2-w_1)Y(-n)v;w_1\right)+\Phi\left(\left[Y(-n),X(w_2-w_1)\right]v;w_1\right) \\
&\qquad -\Phi\left(v;w_1\right)\left\{(-n)(w_2-w_1)^{-n-1}l\left(X|Y\right)+(w_2-w_1)^{-n}\left[Y,X\right](w_2)\right\} \\
&= \Phi\left(X(w_2-w_1)Y(-n)v;w_1\right)
\end{aligned}
$$

となり (4.11) を得る.

(4.12) は同様に帰納法の仮定 (4.10) を用いて D_2 上成立する. □

定理 4.8. 頂点作用素 $\Phi(v_1;w_1), \Phi(v_2;w_2)$ の以下の "合成" を考える.

$$\begin{array}{ll} \Phi(v_1;w_1)\Phi(v_2;w_2) & (|w_1|>|w_2|>0) \\ \Phi(v_2;w_2)\Phi(v_1;w_1) & (|w_2|>|w_1|>0) \\ \Phi(\Phi(v_2;w_2-w_1)v_1;w_1) & (|w_1|>|w_2-w_1|>0) \\ \Phi(\Phi(v_1;w_1-w_2)v_2;w_2) & (|w_2|>|w_1-w_2|>0) \end{array}$$

このとき左側の作用素値 Laurent 級数は行列要素の意味で右側の領域で絶対収束し, $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 上の w_1, $w_2=0,\infty$ および $w_1=w_2$ にのみ極を持つ有理関数に解析接続される. さらに 4 つの作用素値有理函数は全て一致する.

証明. 証明の大筋は補題 4.7 と同じになる.

$\langle\varphi|\in\mathcal{H}_j^*$, $|u\rangle\in\mathcal{H}_j$ は省略する.

$v_i\in\mathcal{H}_0(d_i)$ $(i=1,2)$ とし, d_1+d_2 についての帰納法で証明する.

まず $d_1+d_2=0$ のとき $\Phi(v_i;w_i)=\widehat{\mathrm{id}}$ $(i=1,2)$ ゆえ命題が成立する.

領域 D_1, D_2 を

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(w_1,w_2)\mid |w_1|>|w_2|>0,\ |w_1|>|w_2-w_1|>0\} \\ D_2 &= \{(w_1,w_2)\mid |w_2|>|w_1|>0,\ |w_1|>|w_2-w_1|>0\} \end{aligned}$$

と定義する. 任意の $v_1\in\mathcal{H}_0(d_1)$, $v_2\in\mathcal{H}_0(d_2)$, $d_1+d_2\le d$, に対して D_1 上で

$$\Phi(v_1;w_1)\Phi(v_2;w_2)=\Phi(\Phi(v_2;w_2-w_1)v_1;w_1) \tag{4.15}$$

が成立し, D_2 上で

$$\Phi(v_2;w_2)\Phi(v_1;w_1)=\Phi(\Phi(v_2;w_2-w_1)v_1;w_1) \tag{4.16}$$

が成立すると仮定する. このとき, 任意の $X(-n)\in\widehat{\mathfrak{g}}$ $(n>0)$ に対して D_1 上で

$$\Phi(X(-n)v_1;w_1)\Phi(v_2;w_2)=\Phi(\Phi(v_2;w_2-w_1)X(-n)v_1;w_1) \tag{4.17}$$

が, D_2 上で

$$\Phi(v_2;w_2)\Phi(X(-n)v_1;w_1)=\Phi(\Phi(v_2;w_2-w_1)X(-n)v_1;w_1) \tag{4.18}$$

が成立することを示せばよい. (4.17) を示す. D_1 上で左辺は,

$$\begin{aligned} &\Phi(X(-n)v_1;w_1)\Phi(v_2;w_2) \\ &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\infty}X(z)(z-w_1)^{-n}dz\Phi(v_1;w_1)\Phi(v_2;w_2) \\ &\qquad -\Phi(v_1;w_1)\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_2,0}}X(z)(z-w_1)^{-n}dz\Phi(v_2;w_2) \\ &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\infty}X(z)\Phi(v_1;w_1)\Phi(v_2;w_2)(z-w_1)^{-n}dz \\ &\qquad -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_2,0}}\Phi(v_1;w_1)X(z)\Phi(v_2;w_2)(z-w_1)^{-n}dz \\ &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\infty}X(z)\Phi(v_1;w_1)\Phi(v_2;w_2)(z-w_1)^{-n}dz \qquad (4.19) \\ &\qquad -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_0}\Phi(v_1;w_1)X(z)\Phi(v_2;w_2)(z-w_1)^{-n}dz \\ &\qquad -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_2}}\Phi(v_1;w_1)X(z)\Phi(v_2;w_2)(z-w_1)^{-n}dz \end{aligned}$$

であるが, ここで補題 4.7 より第 2 項で $X(z)\Phi(v_2; w_2)$ は $z = 0$ のまわりにおいて絶対収束する級数 $\Phi(v_2; w_2) X(z)$ に一致し, 第 3 項で $X(z)\Phi(v_2; w_2)$ は $z = w_2$ のまわりにおいて絶対収束する級数 $\Phi(X(z-w_2)v_2; w_2)$ に一致する. これと帰納法の仮定 (4.15) を用いて

$$
\begin{aligned}
(4.19) \quad = \quad & -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\infty} X(z)\Phi(v_1; w_1)\Phi(v_2; w_2)(z-w_1)^{-n}dz \\
& -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_0} \Phi(v_1; w_1)\Phi(v_2; w_2)X(z)(z-w_1)^{-n}dz \\
& -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_2}} \Phi(v_1; w_1)\Phi(X(z-w_2)v_2; w_2)(z-w_1)^{-n}dz \\
= \quad & -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\infty} X(z)\Phi(\Phi(v_2; w_2-w_1)v_1; w_1)(z-w_1)^{-n}dz \\
& -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_0} \Phi(\Phi(v_2; w_2-w_1)v_1; w_1)X(z)(z-w_1)^{-n}dz \\
& -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_2}} \Phi(v_1; w_1)\Phi(X(z-w_2)v_2; w_2)(z-w_1)^{-n}dz \\
= \quad & \Phi(X(-n)\Phi(v_2; w_2-w_1)v_1; w_1) \qquad (4.20) \\
& -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_2}} \Phi(v_1; w_1)\Phi(X(z-w_2)v_2; w_2)(z-w_1)^{-n}dz
\end{aligned}
$$

を得る. ここで

$$
\begin{aligned}
[X(-n), \Phi(v_2; w_2-w_1)] \quad = \quad & -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)z^{-n}dz\right)\Phi(v_2; w_2-w_1) \\
& - \Phi(v_2; w_2-w_1)\operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)z^{-n}dz\right) \\
= \quad & \Phi\left(\operatorname*{Res}_{z=w_2-w_1}\left(X(z-w_2+w_1)z^{-n}dz\right)v_2; w_2-w_1\right)
\end{aligned}
$$

であるが, z^{-n} は $z = w_2 - w_1$ で正則なので

$$
z^{-n} = \sum_{k\geq 0} a_k(z-w_2+w_1)^k \tag{4.21}
$$

とおくと

$$
\operatorname*{Res}_{z=w_2-w_1}\left(X(z-w_2+w_1)z^{-n}dz\right) = \sum_{k\geq 0} a_k X(k)
$$

である. また, (4.21) の a_k を用いて $(z-w_1)^{-n}$ は $z = w_2$ のまわりで

$$
(z-w_1)^{-n} = \sum_{k\geq 0} a_k(z-w_2)^k
$$

と展開されるので, これらを用いると

$$
\begin{aligned}
[X(-n), \Phi(v_2; w_2-w_1)] \quad = \quad & \Phi\left(\sum_{k\geq 0} a_k X(k)v_2; w_2-w_1\right) \\
= \quad & \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_2}} \Phi(X(z-w_2)v_2; w_2-w_1)(z-w_1)^{-n}dz
\end{aligned}
$$

を得る. 従って (4.20) は (もう一度, 帰納法の仮定 (4.15) を用いて)

$$
\begin{aligned}
(4.14) \quad = \quad & \Phi(\Phi(v_2; w_2-w_1)X(-n)v_1; w_1) \\
& + \Phi([X(-n), \Phi(v_2; w_2-w_1)]v_1; w_1) \\
& - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_2}} \Phi(v_1; w_1)\Phi(X(z-w_2)v_2; w_2)(z-w_1)^{-n}dz \\
= \quad & \Phi(\Phi(v_2; w_2-w_1)X(-n)v_1; w_1)
\end{aligned}
$$

となり (4.17) を得る. (4.18) についても同様である. □

この定理の式

$$\begin{aligned}\Phi(v_1;w_1)\Phi(v_2;w_2) &= \Phi(\Phi(v_1;w_1-w_2)v_2;w_2) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Phi(\Phi_n(v_1)v_2;w_2)(w_1-w_2)^{-n-d}\end{aligned} \tag{4.22}$$

で最右辺は $w_1=w_2$ のまわりでの Laurent 級数展開の形であるから, この式は頂点作用素の OPE が頂点作用素の中身 $\Phi_n(v_1)v_2\in\mathcal{H}_0$ の計算に帰着できることを表している. 例えば $X(w_1)Y(w_2)$ は命題 4.4 と定理 4.8 より

$$\begin{aligned}X(w_1)Y(w_2) &= \Phi(X(-1)|0\rangle;w_1)\Phi(Y(-1)|0\rangle;w_2) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Phi(X(n)Y(-1)|0\rangle;w_2)(w_1-w_2)^{-n-1} \\ &\sim \Phi(X(1)Y(-1)|0\rangle;w_2)(w_1-w_2)^{-2}+\Phi(X(0)Y(-1)|0\rangle;w_2)(w_1-w_2)^{-1} \\ &= \Phi(\{[X,Y](0)+l(X|Y)\}|0\rangle;w_2)(w_1-w_2)^{-2}+\Phi([X,Y](-1)|0\rangle;w_2)(w_1-w_2)^{-1} \\ &= \frac{l(X|Y)}{(w_1-w_2)^2}+\frac{1}{w_1-w_2}[X,Y](w_2)\end{aligned}$$

と計算でき, 同様に $T(w_1)X(w_2)$ は命題 4.6 と定理 4.8 を用いて

$$\begin{aligned}T(w_1)X(w_2) &= \Phi(\omega;w_1)\Phi(X(-1)|0\rangle;w_2) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Phi(L_nX(-1)|0\rangle;w_2)(w_1-w_2)^{-n-2} \\ &\sim \Phi(L_1X(-1)|0\rangle;w_2)(w_1-w_2)^{-3} \qquad (4.23) \\ &\quad +\Phi(L_0X(-1)|0\rangle;w_2)(w_1-w_2)^{-2}+\Phi(L_{-1}X(-1)|0\rangle;w_2)(w_1-w_2)^{-1} \\ &= \Phi(X(0)|0\rangle;w_2)(w_1-w_2)^{-3}+\Phi(X(-1)|0\rangle;w_2)(w_1-w_2)^{-2} \qquad (4.24) \\ &\quad +\Phi(X(-2)|0\rangle;w_2)(w_1-w_2)^{-1} \\ &= \frac{1}{(w_1-w_2)^2}X(w_2)+\frac{1}{w_1-w_2}\partial_{w_2}X(w_2)\end{aligned}$$

となり, 頂点作用素の間の OPE の公式定理 4.8 から, 2.2 節で求めた $X(w)$ と $T(w)$ の間の OPE が計算できる. ただし (4.23) は L_n の定義 (2.26) より次数を考えれば $n\geq 2$ に対して $L_nX(-1)|0\rangle=0$ となることより得られる. また (4.24) では $L_1X(-1)|0\rangle$, $L_0X(-1)|0\rangle$, $L_{-1}X(-1)|0\rangle$ をそれぞれ計算しなくてはならないが, やはり次数を考えれば

$$\begin{aligned}L_1X(-1)|0\rangle &= \sum_i X_i(0)X^i(1)X(-1)|0\rangle+\sum_i X^i(0)X_i(1)X(-1)|0\rangle \\ L_0X(-1)|0\rangle &= \sum_i X_i(0)X^i(0)X(-1)|0\rangle+\sum_i X_i(-1)X^i(1)X(-1)|0\rangle \\ &\quad +\sum_i X^i(-1)X_i(1)X(-1)|0\rangle\end{aligned}$$

なので簡単に計算できる. $L_{-1}X(-1)|0\rangle=[L_{-1},X(-1)]|0\rangle$ は補題 2.66 で計算済みである.

4.3 頂点作用素代数

頂点作用素代数の OPE(定理 4.8) は Fourier mode の間の関係の形で定式化することで頂点作用素代数と呼ばれる代数系の公理を導く. このような頂点作用素の代数的な特徴付けをはっきりとした形で定

式化したのは Borcherds であり, 頂点作用素代数を特徴付ける最も重要な恒等式[2] は Borcherds 恒等式 (命題 4.10) と呼ばれる.

まず OPE 以外の頂点作用素代数の公理のひとつである次の等式を証明しよう.

命題 4.9. 頂点作用素 $\Phi(v;w)$ に対して次の等式が成立する:

$$\partial_w \Phi(v;w) = \Phi(L_{-1}v;w).$$

証明. $v \in \mathcal{H}_0(d)$ として d についての帰納法を用いる. まず $d=0$ のとき $v=|0\rangle$ であるので $L_{-1}|0\rangle = 0$ を用いて

$$\partial_w \Phi(|0\rangle;w) = 0 = \Phi(L_{-1}|0\rangle;w)$$

を得る.

d まで成立すると仮定する. $v \in \mathcal{H}_0(d), X(-n) \in \widehat{\mathfrak{g}}\ (n>0)$ として $\Phi(X(-n)v;w)$ を調べよう.

$$\begin{aligned}
&\Phi(L_{-1}X(-n)v;w) \\
&= \Phi(X(-n)L_{-1}v;w) + \Phi(nX(-n-1)v;w) \\
&= -\Phi(L_{-1}v;w)\operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)(z-w)^{-n}dz\right) \\
&\qquad -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)(z-w)^{-n}dz\right)\Phi(L_{-1}v;w) + \Phi(nX(-n-1)v;w) \\
&= -(\partial_w\Phi(v;w))\operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)(z-w)^{-n}dz\right) \\
&\qquad -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)(z-w)^{-n}dz\right)\partial_w\Phi(v;w) + \Phi(nX(-n-1)v;w)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&-\Phi(v;w)(\partial_w\operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)(z-w)^{-n}dz\right)) - (\partial_w\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)(z-w)^{-n}dz\right))\Phi(v;w) \\
&= n\Phi(v;w)\operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)(z-w)^{-n-1}dz\right) + n\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)(z-w)^{-n-1}dz\right)\Phi(v;w) \\
&= -n\Phi(X(-n-1)v;w)
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
(4.25) &= -\partial_w\left\{\Phi(v;w)\operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)(z-w)^{-n}dz\right) + \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)(z-w)^{-n}dz\right)\Phi(v;w)\right\} \\
&= \partial_w\Phi(X(-n)v;w)
\end{aligned}$$

となり帰納法により任意の $v \in \mathcal{H}_0$ に対して命題が成立する. □

さて $F(w_1,w_2)$ を $w_1=0,\infty, w_2=0,\infty, w_1=w_2$ に極を持つ有理函数としよう. 頂点作用素 $\Phi(v_1;w_1)$, $\Phi(v_2;w_2)\ (v_i \in \mathcal{H}_0(d_i))$ の OPE に $F(w_1,w_2)$ を掛けて積分すると次の等式を得る.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{w_2}} \Phi(\Phi(v_1;w_1-w_2)v_2;w_2)F(w_1,w_2)dw_1 \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{0,w_2}} \Phi(v_1;w_1)\Phi(v_2;w_2)F(w_1,w_2)dw_1 \\
&\qquad -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_0} \Phi(v_2;w_2)\Phi(v_1;w_1)F(w_1,w_2)dw_1
\end{aligned} \tag{4.26}$$

この等式を Borcherds 恒等式という. あるいはこの積分を実行して頂点作用素の Fourier mode で表した等式を Borcherds 恒等式と言うこともある.

[2] 無限和の形の恒等式である点で他の代数系とは決定的に異なる.

命題 4.10 (Borcherds 恒等式). 頂点作用素の Fourier mode $\Phi_m(v_1)$, $\Phi_n(v_2)$ $(v_i \in \mathcal{H}_0(d_i))$ の間に次の等式が成立する.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\Phi_{l+m+n-d_1-d_2+1}(\Phi_{n+j-d_1+1}(v_1)v_2)\\
&\quad= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{n}{j}\Phi_{m+n-j-d_1+1}(v_1)\Phi_{l+j-d_2}(v_2)\\
&\qquad-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}\Phi_{l+n-j-d_2}(v_2)\Phi_{m+j-d_1+1}(v_1)
\end{aligned}$$

ここで $l,m,n \in \mathbb{Z}$ であり, 二項係数 $\binom{n}{j}$ は $(z+w)^n$ を $|z|>|w|>0$ で展開したときの $z^{n-j}w^j$ の係数とする. また上の式で

$$\Phi_{n+j-d_1+1}(v_1)v_2 = 0 \ \ (\forall j \gg 0)$$

なので, 左辺は有限和である. 一方, 右辺はそのままでは無限和だが, 行列要素を考えれば有限和になる.

証明. (4.26) で $F(w_1,w_2)=w_1^m w_2^{l-1}(w_1-w_2)^n$ として両辺を $w_2=0$ で積分する. まず (4.26) の左辺は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{w_2=0}\int_{C_{w_2}}\Phi\left(\Phi\left(v_1;w_1-w_2\right)v_2;w_2\right)w_1^m w_2^{l-1}(w_1-w_2)^n dw_1dw_2\\
&=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{w_2=0}\int_{C_{w_2}}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\Phi\left(\Phi_i(v_1)v_2;w_2\right)w_1^m w_2^{l-1}(w_1-w_2)^{n-i-d_1}dw_1dw_2\\
&=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{w_2=0}\int_{C_{w_2}}\sum_{i\in\mathbb{Z},j\geq 0}\binom{m}{j}\Phi\left(\Phi_i(v_1)v_2;w_2\right)(w_1-w_2)^{n+j-i-d_1}w_2^{l+m-j-1}dw_1dw_2\\
&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{w_2=0}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\Phi\left(\Phi_{n+j-d_1+1}(v_1)v_2;w_2\right)w_2^{l+m-j-1}dw_2\\
&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{w_2=0}\sum_{\substack{j\geq 0\\ k\in\mathbb{Z}}}\binom{m}{j}\Phi_k(\Phi_{n+j-d_1+1}(v_1)v_2)w_2^{-k+l+m+n-d_1-d_2}dw_2\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\Phi_{l+m+n-d_1-d_2+1}(\Phi_{n+j-d_1+1}(v_1)v_2)
\end{aligned}$$

となる. 同様に右辺第 1 項は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{w_2=0}\int_{C_{0,w_2}}\Phi\left(v_1;w_1\right)\Phi\left(v_2;w_2\right)w_1^m w_2^{l-1}(w_1-w_2)^n dw_1dw_2\\
&= -\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{w_2=0}\int_{C_\infty}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\Phi_i(v_1)\Phi\left(v_2;w_2\right)w_1^{m-i-d_1}w_2^{l-1}(w_1-w_2)^n dw_1dw_2\\
&= -\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{w_2=0}\int_{C_\infty}\sum_{i\in\mathbb{Z},j\geq 0}(-1)^j\binom{n}{j}\Phi_i(v_1)\Phi\left(v_2;w_2\right)w_1^{m+n-j-i-d_1}w_2^{l+j-1}dw_1dw_2\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{w_2=0}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{n}{j}\Phi_{m+n-j-d_1+1}(v_1)\Phi\left(v_2;w_2\right)w_2^{l+j-1}dw_2\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{w_2=0}\sum_{\substack{j\geq 0\\ k\in\mathbb{Z}}}(-1)^j\binom{n}{j}\Phi_{m+n-j-d_1+1}(v_1)\Phi_k(v_2)w_2^{-k+j+l-d_2-1}dw_2\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{n}{j}\Phi_{m+n-j-d_1+1}(v_1)\Phi_{j+l-d_2}(v_2)
\end{aligned}$$

となり, 第 2 項は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{w_2=0}\int_{C_0}\Phi(v_2;w_2)\,\Phi(v_1;w_1)\,w_1^m w_2^{l-1}(w_1-w_2)^n dw_1dw_2 \\
= &\quad \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{w_2=0}\int_{C_0}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\Phi(v_2;w_2)\,\Phi_i(v_1)w_1^{m-i-d_1}w_2^{l-1}(w_1-w_2)^n dw_1dw_2 \\
= &\quad \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{w_2=0}\int_{C_0}\sum_{i\in\mathbb{Z},j\geq 0}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}\Phi(v_2;w_2)\,\Phi_i(v_1)w_1^{m+j-i-d_1}w_2^{l+n-j-1}dw_1dw_2 \\
= &\quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{w_2=0}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}\Phi(v_2;w_2)\,\Phi_{m+j-d_1+1}(v_1)w_2^{l+n-j-1}dw_2 \\
= &\quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{w_2=0}\sum_{\substack{j\geq 0\\ k\in\mathbb{Z}}}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}\Phi_k(v_2)\Phi_{m+j-d_1+1}(v_1)w_2^{-k+n+l-j-d_2-1}dw_2 \\
= &\quad \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}\Phi_{n+l-j-d_2}(v_2)\Phi_{m+j-d_1+1}(v_1)
\end{aligned}$$

である. これらの計算と (4.26) より命題の式を得る. □

また $j=0$ のとき, 頂点作用素の Fourier mode については次の重要な性質がある.

命題 4.11. 頂点作用素 $\Phi(v;w)\,(v\in\mathcal{H}_0(d))$ の Fourier mode $\Phi_k(v)$ に対して以下が成立する.

$$\begin{aligned}
\Phi_k(v)|0\rangle &= 0 \ (k>-d) \\
\Phi_{-d}(v)|0\rangle &= v
\end{aligned}$$

証明. d についての帰納法で示す. $d=0$ のとき $\Phi(v;w)=\mathrm{id}$ であるから成立する. 次に d まで成立したと仮定する. 任意の $v\in\mathcal{H}_0(d)$ と $X(-n)\in\widehat{\mathfrak{g}}\ (n>0)$ に対して

$$\begin{aligned}
\Phi(X(-n)v;w)|0\rangle &= -\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(X(z)(z-w)^{-n}dz\right)\Phi(v;w)|0\rangle \\
&\qquad -\Phi(v;w)\operatorname*{Res}_{z=0}\left(X(z)(z-w)^{-n}dz\right)|0\rangle \\
&= \sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{-n}{j}X(-n-j)w^j\Phi(v;w)|0\rangle \\
&\qquad -\Phi(v;w)\sum_{j\geq 0}(-1)^{-n-j}\binom{-n}{j}X(j)w^{-n-j}|0\rangle \\
&= \sum_{j\geq 0,k\in\mathbb{Z}}(-1)^j\binom{-n}{j}X(-n-j)\Phi_k(v)|0\rangle w^{j-k-d} \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

となるが, ここで帰納法の仮定より $k>-d$ に対して $\Phi_k(v)|0\rangle=0$, および $\Phi_{-d}(v)|0\rangle=v$ を用いて

$$\begin{aligned}
(4.27) &= \sum_{j\geq 0,k\leq -d}(-1)^j\binom{-n}{j}X(-n-j)\Phi_k(v)|0\rangle w^{j-k-d} \\
&= X(-n)\Phi_{-d}(v)|0\rangle+(w^1\text{ より高次の項}) \\
&= X(-n)v+(w^1\text{ より高次の項})
\end{aligned}$$

を得る. これは $\Phi(X(-n)v;w)$ に対して命題の式が成立することを表している. □

頂点作用素の持つ性質を抽象化して頂点作用素代数という代数系を考えることができる.

定義 4.12. 頂点作用素代数の公理を以下で与える.

$V=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}V_{(n)}$ を $\mathbb{Z}$ 次数付ベクトル空間, $V_{(n)}$ を n 次斉次部分空間とし, 次の条件を満たすとする:

- 任意の n に対して $\dim V_{(n)} < \infty$,
- 十分小さい n に対し $V_{(n)} = 0$.

任意の $v \in V$ に対して頂点作用素 $Y(v,z)$

$$Y(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \quad (v_n \in \mathrm{End}V)$$

が定義されており, 相異なる斉次元 $\mathbf{1}$(vacuum) と ω が存在して次の条件を満たすとき, V を頂点作用素代数という.

(1) 任意の $u, v \in V$, 十分大きい n に対し, $u_n v = 0$.

(2) (vacuum) $Y(\mathbf{1}, z) = \mathrm{id}$. 任意の $v \in V$ に対して $Y(v,z)\mathbf{1} \in V[[z]]$ で,

$$\lim_{z\to 0} Y(v,z)\mathbf{1} = v.$$

(3) (Virasoro) $L_n \in \mathrm{End}V$ を

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} = Y(\omega, z)$$

と定義すると, ある $c_v \in \mathbb{C}$ が存在して

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c_v \mathrm{id}$$

を満たす. また, $v \in V_{(n)}$ に対して

$$L_0 v = nv,$$

$v \in V$ に対して

$$\partial_z Y(v,z) = Y(L_{-1}v, z)$$

を満たす.

(4) (Cauchy-Jacobi identity) 任意の $v_1, v_2 \in V$, z_1, $z_2 = 0, \infty$, $z_1 = z_2$ にのみ極を持つ任意の有理函数 $F(z_1, z_2)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_0} Y(v_2,z_2)Y(v_1,z_1)F(z_1,z_2)dz_1 \\
&+ \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_{z_2}} Y(Y(v_1,z_1-z_2)v_2,z_2)F(z_1,z_2)dz_1 \\
&+ \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\infty} Y(v_1,z_1)Y(v_2,z_2)F(z_1,z_2)dz_1 = 0
\end{aligned}$$

を満たす.

明らかにこれまで考えてきた頂点作用素は

$$\begin{aligned}
V &= \mathcal{H}_0 \\
Y(v,z) &= \Phi(v;z) \\
v_n &= \Phi_{n-d+1}(v) \ \ (v \in \mathcal{H}_0(d)) \\
\mathbf{1} &= |0\rangle
\end{aligned}$$

として頂点作用素代数の公理を満たす.

命題 4.10 の Borcherds 恒等式は頂点作用素代数の持つ重要な性質である.

頂点作用素代数については詳しくは [FHL] 等を参照せよ.

第5章　非可換カレントの相関函数系

このセクションでは相関函数と呼ばれる $\mathbb{P}^1$ 上の有理形式を定義してその基本的性質を調べる.

5.1　相関函数の公理

まずは相関函数の公理を導入しよう. 実際に相関函数を構成するのは以降の節で行う.

4 章で定義した頂点作用素

$$\Phi(v;w)(dw)^{\Delta}\quad (v\in\mathcal{H}_0(\Delta))$$

を考える. ここで $(dw)^{\Delta}$ をつけたのはスケール変換

$$w\mapsto w'=\lambda w\quad(\lambda\in\mathbb{C})$$

に対する変換性を考えたためである. つまり (4.8) より

$$[L_0,\Phi_k(v)]=-k\Phi_k(v)$$

なので,

$$\begin{aligned}
\lambda^{L_0}\Phi(v;w)\lambda^{-L_0} &= e^{(\log\lambda)\mathrm{ad}L_0}\Phi(v;w)\\
&= \sum_{n\geq 0,k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n!}(\log\lambda)^n(\mathrm{ad}L_0)^n\Phi_k(v)w^{-k-\Delta}\\
&= \sum_{n\geq 0,k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n!}(\log\lambda)^n(-k)^n\Phi_k(v)w^{-k-\Delta}\\
&= \lambda^{\Delta}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Phi_k(v)\lambda^{-k-\Delta}w^{-k-\Delta}\\
&= \lambda^{\Delta}\Phi(v;\lambda w)
\end{aligned}$$

が成立する. 従って w を座標としたときの状態を $\langle\varphi_w|\in\mathcal{H}_{j_\infty}$, $|u_w\rangle\in\mathcal{H}_{j_0}$ とし, w' を座標としたときの状態を $\langle\varphi_{w'}|\in\mathcal{H}_{j_\infty}$, $|u_{w'}\rangle\in\mathcal{H}_{j_0}$ として, 上のスケール変換に対する状態空間での変換が

$$\begin{aligned}
\langle\varphi_w|\lambda^{-L_0} &= \langle\varphi_{w'}|\\
\lambda^{L_0}|u_w\rangle &= |u_{w'}\rangle
\end{aligned}$$

で与えられるとすると

$$\begin{aligned}
&\langle\varphi_w|\Phi(v;w)|u_w\rangle(dw)^{\Delta}\\
&= \langle\varphi_w|\Phi\left(v;\lambda^{-1}w'\right)|u_w\rangle(d(\lambda^{-1}w'))^{\Delta}\\
&= \lambda^{\Delta}\langle\varphi_w|\lambda^{-L_0}\Phi(v;w')\lambda^{L_0}|u_w\rangle\lambda^{-\Delta}(dw')^{\Delta}\\
&= \langle\varphi_{w'}|\Phi(v;w')|u_{w'}\rangle(dw')^{\Delta}
\end{aligned}$$

となって変換に対して整合性を持つ. 簡単のために, より一般の局所座標変換に対する変換性についてはここでは言及しない.

便宜上, 添字の集合 A は ∞ を含むとする.

定義 5.1. 相関函数系の公理を以下で与える. 真空の空間の元 $\langle\Phi| \in \mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ を固定する.
$v_i \in \mathcal{H}_0(\Delta_i), z_i \in \mathbb{P}^1 (i = 1, \cdots, N)$ に対して相関函数

$$\langle\Phi|J(v_1; z_1) \cdots J(v_N; z_N)|u\rangle (dz_1)^{\Delta_1} \cdots (dz_N)^{\Delta_N} \quad (u \in \mathcal{H}(J_A))$$

とは $z_i = w_a (i = 1, \cdots, N, a \in A)$ および $z_i = z_j (i \neq j, i, j = 1, \cdots, N)$ にのみ極を持つ有理形式で次の性質を満たすものを言う.

(1) $N = 0$ のとき $\langle\Phi|u\rangle$ に一致する.

(2) $J(v_1; z_1)(dz_1)^{\Delta_1}, \cdots, J(v_N; z_N)(dz_N)^{\Delta_N}$ の順番の入れ替えに対して不変である.

(3) 以下の項目では $v \in \mathcal{H}_0(\Delta), z \in \mathbb{P}^1$ とする.

$$\begin{aligned}
&\partial_z \langle\Phi|J(v; z) J(v_1; z_1) \cdots J(v_N; z_N)|u\rangle (dz)^{\Delta+1} (dz_1)^{\Delta_1} \cdots (dz_N)^{\Delta_N} \\
&= \langle\Phi|J(L_{-1}v; z) J(v_1; z_1) \cdots J(v_N; z_N)|u\rangle (dz)^{\Delta+1} (dz_1)^{\Delta_1} \cdots (dz_N)^{\Delta_N}
\end{aligned}$$

(4) $z = z_i$ の近傍で

$$\begin{aligned}
&\langle\Phi|J(v; z) J(v_1; z_1) \cdots J(v_i; z_i) \cdots J(v_N; z_N)|u\rangle (dz)^{\Delta} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle\Phi|J(v_1; z_1) \cdots J(\Phi_n(v) v_i; z_i) \cdots J(v_N; z_N)|u\rangle (z - z_i)^{-n-\Delta} (dz)^{\Delta}
\end{aligned}$$

が成立する. 上で $(dz_1)^{\Delta_1} \cdots (dz_N)^{\Delta_N}$ は省略した.

(5) $z = w_a (a \in A)$ の近傍で $\xi_a = z - w_a$ として

$$\begin{aligned}
&\langle\Phi|J(v; z) J(v_1; z_1) \cdots J(v_N; z_N)|u\rangle (dz)^{\Delta} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle\Phi|J(v_1; z_1) \cdots J(v_N; z_N)|\rho_a(\Phi_n(v)) u\rangle \xi_a^{-n-\Delta} (d\xi_a)^{\Delta}
\end{aligned}$$

が成立する. 上で $(dz_1)^{\Delta_1} \cdots (dz_N)^{\Delta_N}$ は省略した.

5.2　真空の伝播

この公理を満たす有理形式を構成するにあたって, 真空の伝播 (vacuum propagation) と呼ばれる真空の空間の性質 (定理 5.2) が重要である. その定理の証明がこの節の目的である.

定理 5.2 (真空の伝播). 元の添字の集合 A に一点 $\{a'\}$ を加えて

$$A' \underset{\text{def}}{=} A \cup \{a'\}$$

とし, $j_{a'} = 0$ とする. このとき, 元の真空の空間 $\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ と新しい真空の空間 $\mathcal{V}^\dagger_{w_{A'}}(J_{A'})$ の間の自然な写像

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{V}^\dagger_{w_{A'}}(J_{A'}) & \longrightarrow & \mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A) \\
\langle\Phi| & \mapsto & \langle\Phi| * \otimes|0\rangle
\end{array}$$

はベクトル空間の同型である.

証明. 補題 3.4 で

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 &= \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}} \\
&= \mathfrak{g} \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_{A'})) \\
\mathfrak{A}_2 &= \bigoplus_{a\in A} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi_a)) \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[\xi_{a'}]] \oplus \mathbb{C}c \\
V &= \mathcal{H}(J_A) \otimes \mathbb{C}\cdot 1
\end{aligned}$$

とする. ただし上で $\xi_{a'} = z - w_{a'}$ であり, $\mathbb{C}\cdot 1$ は $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[[\xi_{a'}]]$ が自明に作用しているとして V は $\mathfrak{A}_2$ の表現とする. すると

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \\
&= \bigoplus_{a\in A} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi_a)) \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi_{a'})) \oplus \mathbb{C}c \\
&= \widehat{\mathfrak{g}}_{A'} \\
\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 &= \mathfrak{g} \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A)) \\
&= \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} \\
\tilde{V} &= U(\mathfrak{A}) \otimes_{U(\mathfrak{A}_2)} V \\
&= \mathcal{H}(J_A) \otimes M_0
\end{aligned}$$

となる. ここで M_0 は定義 2.46 で定義した $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の表現である. 従って補題 3.4 を適用すると

$$\mathcal{V}_{w_A}(J_A) = V/(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)V \simeq \tilde{V}/\mathfrak{A}_1\tilde{V} \tag{5.1}$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned}
\tilde{V}/\mathfrak{A}_1\tilde{V} &= \mathcal{H}(J_A) \otimes M_0/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}(\mathcal{H}(J_A) \otimes M_0) \\
&\qquad \simeq \mathcal{H}(J_A) \otimes \mathcal{H}_0/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}(\mathcal{H}(J_A) \otimes \mathcal{H}_0) = \mathcal{V}_{w_{A'}}(J_{A'})
\end{aligned}$$

を示せばよい. まず $\widehat{\mathfrak{g}}_{A'}$ 加群の自然な射影

$$\pi_1 : \mathcal{H}(J_A) \otimes M_0 \twoheadrightarrow \mathcal{H}(J_A) \otimes \mathcal{H}_0$$

とベクトル空間の射影

$$\pi_2 : \mathcal{H}(J_A) \otimes \mathcal{H}_0 \twoheadrightarrow \mathcal{H}(J_A) \otimes \mathcal{H}_0/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}(\mathcal{H}(J_A) \otimes \mathcal{H}_0)$$

とを合成して

$$\pi \underset{\text{def}}{=} \pi_2 \circ \pi_1 : \mathcal{H}(J_A) \otimes M_0 \twoheadrightarrow \mathcal{H}(J_A) \otimes \mathcal{H}_0/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}(\mathcal{H}(J_A) \otimes \mathcal{H}_0)$$

とする. π はベクトル空間の間の写像

$$\mathcal{H}(J_A) \otimes M_0/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}(\mathcal{H}(J_A) \otimes M_0) \to \mathcal{H}(J_A) \otimes \mathcal{H}_0/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}(\mathcal{H}(J_A) \otimes \mathcal{H}_0) \tag{5.2}$$

を誘導する. 実際, 任意の $X \otimes f \in \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}$ と $|u \otimes u_0\rangle \in \mathcal{H}(J_A) \otimes M_0$ に対して $\overline{u_0} \in \mathcal{H}_0$ で $u_0 \in M_0$ の $\mathcal{H}_0$

での像を表すとして

$$\begin{aligned}
&\pi_1((X\otimes f)|u\otimes u_0\rangle) \\
&= \pi_1(\sum_{a\in A}|(\rho_a(X\otimes f)u)\otimes u_0\rangle + |u\otimes\rho_{a'}(X\otimes f)u_0\rangle) \\
&= \sum_{a\in A}|(\rho_a(X\otimes f)u\otimes\overline{u_0}\rangle + |u\otimes\overline{\rho_{a'}(X\otimes f)u_0}\rangle \\
&= \sum_{a\in A}|(\rho_a(X\otimes f)u\otimes\overline{u_0}\rangle + |u\otimes\rho_{a'}(X\otimes f)\overline{u_0}\rangle \\
&= (X\otimes f)|u\otimes\overline{u_0}\rangle \\
&= (X\otimes f)\pi_1(|u\otimes u_0\rangle)
\end{aligned}$$

である．従って

$$\begin{aligned}
\pi_1(\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}(\mathcal{H}(J_A)\otimes M_0)) &\subset \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}\pi_1(\mathcal{H}(J_A)\otimes M_0) \\
&= \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}(\mathcal{H}(J_A)\otimes\mathcal{H}_0) = \mathrm{Ker}\pi_2
\end{aligned}$$

であるので $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}(\mathcal{H}(J_A)\otimes M_0)\subset\mathrm{Ker}\pi$ となり, (5.2) の写像が定義できる．

写像 (5.2) が同型写像であることを示す．全射性は π の全射性より従うので単射性を示せばよい．今定義 2.47 より

$$\mathcal{H}_0 = M_0/(U(\widehat{\mathfrak{g}})E(-1)^{l+1})|0\rangle$$

であるから mod $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}(\mathcal{H}(J_A)\otimes M_0)$ (以下これを mod $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}$ と略記する) で考えて任意の $u\in\mathcal{H}(J_A)$ と $x\in U(\widehat{\mathfrak{g}})$ に対して $u\otimes(x\cdot E(-1)^{l+1})|0\rangle$ が 0 になればいい．しかし x は $X_i(n_i)\in\widehat{\mathfrak{g}}$ $(i=1,\cdots,k)$ によって $x=X_1(n_1)\cdots X_k(n_k)$ という形とすると mod $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}$ で

$$\begin{aligned}
&|u\otimes X_1(n_1)\cdots X_k(n_k)E(-1)^{l+1}|0\rangle\rangle \\
&\equiv -\sum_{a_1\in A}\rho_{a_1}(X_1\otimes(z-w_{a'})^{n_1})|u\otimes X_2(n_2)\cdots X_k(n_k)E(-1)^{l+1}|0\rangle\rangle \\
&\qquad\vdots \\
&\equiv (-1)^k\sum_{a_1,\cdots,a_k\in A}\rho_{a_k}(X_k\otimes(z-w_{a'})^{n_k})\cdots\rho_{a_1}(X_1\otimes(z-w_{a'})^{n_1})|u\otimes E(-1)^{l+1}|0\rangle\rangle
\end{aligned}$$

であるので, 結局任意の $u\in\mathcal{H}(J_A)$ に対して $u\otimes E(-1)^{l+1}|0\rangle\in\mathcal{H}(J_A)\otimes M_0$ が mod $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_{A'}}$ で 0 になることを示せば十分である．$\mathcal{H}_{j_a}$ が可積分であることから $u\in\mathcal{H}(J_A)$ に対して $n\in\mathbb{Z}$ を, 任意の $a\in A$ で

$$\rho_a(F\otimes(z-w_{a'}))^k|u\rangle = 0 \qquad \left(\forall k\geq\frac{n}{|A|}\right)$$

を満たすようにとることができる．単純な計算から

$$F(1)E(-1)^k|0\rangle = k(l-(k-1))E(-1)^{k-1}|0\rangle$$

を得る．ここで

$$k(l-(k-1))\begin{cases} = & 0 \quad (k=0,l+1) \\ \neq & 0 \quad (k\neq 0,l+1)\end{cases}$$

であるので, 上で決めた n に対してある 0 でない定数 c により

$$E(-1)^{l+1}|0\rangle = cF(1)^nE(-1)^{n+l+1}|0\rangle$$

と書ける．よって

$$\begin{aligned}|u\otimes(E(-1)^{l+1}|0\rangle)\rangle &= |u\otimes(cF(1)^nE(-1)^{n+l+1}|0\rangle)\rangle\\ &\equiv (-1)^nc\sum_{\sum_a n_a=n}\frac{n!}{\prod_a n_a!}\prod_{a\in A}\rho_a(F\otimes\xi_{a'})^{n_a}|u\otimes(E(-1)^{n+l+1}|0\rangle)\rangle\\ &= 0\end{aligned}$$

であるので

$$\tilde{V}/\mathfrak{A}_1\tilde{V}\simeq\mathcal{V}_{w_{A'}}(J_{A'})$$

となり, (5.1) と合せれば求める同型を得る． □

5.3 相関函数の構成

真空の伝播を用いて, 相関函数を構成しよう．

添字の集合 A に N 個加えて $A'=A\cup\{a'_1,\cdots,a'_N\}$ とし, $w_{a'_i}=z_i$, $j_{a'_i}=0$ $(i=1,\cdots,N)$ とする．定理より

$$\begin{aligned}\iota:\mathcal{V}^\dagger_{w_{A'}}(J_{A'}) &\longrightarrow \mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)\\ \langle\tilde{\Phi}|\mapsto\langle\Phi|,\quad \langle\Phi|u\rangle &= \langle\tilde{\Phi}|u\otimes|0\rangle\otimes\cdots\otimes|0\rangle\rangle\end{aligned}$$

は同型写像であるので, 任意の $\langle\Phi|\in\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ に対して $\langle\tilde{\Phi}|\underset{\mathrm{def}}{=}\iota^{-1}(\langle\Phi|)$ が一意に定まる．$u\in\mathcal{H}(J_A), v_i\in\mathcal{H}_0(\Delta_i)$ に対して

$$\begin{aligned}&\langle\Phi|J(v_1;z_1)\cdots J(v_N;z_N)|u\rangle(dz_1)^{\Delta_1}\cdots(dz_N)^{\Delta_N}\\ &= \langle\tilde{\Phi}|u\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_N\rangle(dz_1)^{\Delta_1}\cdots(dz_N)^{\Delta_N}\end{aligned}\tag{5.3}$$

とする．これが $\langle\Phi|$ に付随する相関函数系となることを調べよう．

定理 5.3. (5.3) は相関函数となる．

証明．定義 5.1 の条件をひとつずつ確かめていく．まず, (1) は $N=0$ の時, $\langle\tilde{\Phi}|=\langle\Phi|$ であるので (5.3) より明らか．また (2) は (5.3) において右辺は添字 $1,\ldots,N$ の付け替えに対して不変である事より明らかである．

考えている有理形式の定義 (5.3) より (3), (5) は $N=0$ の場合について, (4) は $N=1, i=1$ の場合について証明すれば十分である．

(4) は $v\in\mathcal{H}_0(\Delta), v_1\in\mathcal{H}_0(\Delta_1)$ に対して $w=z_1$ の近傍で

$$\langle\Phi|J(v;w)J(v_1;z_1)|u\rangle=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle\Phi|J(\Phi_n(v)v_1;z_1)|u\rangle(w-z_1)^{-n-\Delta}$$

を示せばいい．$A'=A\cup\{a'\}$, $A''=A'\cup\{a'_1\}$ とする．$w_{a'}=w$, $w_{a'_1}=z_1$ で $j_{a'}=j_{a'_1}=0$ とする．そして $\langle\Phi|\in\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ に対応する $\mathcal{V}^\dagger_{w_{A'}}(J_{A'})$ 元を $\langle\tilde{\Phi}|$ とし, $\mathcal{V}^\dagger_{w_{A''}}(J_{A''})$ の元を $\langle\tilde{\Phi}'|$ とする．Δ についての帰納法で証明する．$\Delta=0$ のとき (4) の式の左辺は

$$\begin{aligned}\langle\Phi|J(|0\rangle;w)J(v_1;z_1)|u\rangle &= \langle\tilde{\Phi}'|u\otimes|0\rangle\otimes v_1\rangle\\ &= \langle\tilde{\Phi}|u\otimes v_1\rangle\\ &= \langle\Phi|J(v_1;z_1)|u\rangle\end{aligned}$$

である．一方 $\Phi\left(|0\rangle; w\right) = \mathrm{id}$ ゆえ右辺は

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle\Phi| J\left(\Phi_n(|0\rangle)v_1; z_1\right)|u\rangle (w-z_1)^{-n} \quad = \quad \langle\Phi| J\left(v_1; z_1\right)|u\rangle$$

となり $\Delta = 0$ のとき (4) が成立する．次に Δ まで成立すると仮定する．$v \in \mathcal{H}_0(\Delta)$, $X(-n) \in \widehat{\mathfrak{g}}$ $(n > 0)$ として

$$\langle\Phi| J\left(X(-n)v; w\right) J\left(v_1; z_1\right)|u\rangle \quad = \quad \sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle\Phi| J\left(\Phi_m(X(-n)v)v_1; z_1\right)|u\rangle (w-z_1)^{-m-n-\Delta}$$

を示そう．帰納法の仮定を用いて

$$\begin{aligned}
&\langle\Phi| J\left(X(-n)v; w\right) J\left(v_1; z_1\right)|u\rangle \\
&= \langle\tilde{\Phi}'|u \otimes X(-n)v \otimes v_1\rangle \\
&= -\langle\tilde{\Phi}'| \sum_{a\in A} \rho_a(X\otimes\xi^{-n})|u\otimes v\otimes v_1\rangle \\
&\qquad - \langle\tilde{\Phi}'|u\otimes v\otimes\left(\operatorname*{Res}_{z=z_1}\left(X(z-z_1)(z-w)^{-n}dz\right)v_1\right)\rangle \\
&= -\sum_{a\in A}\langle\Phi| J\left(v; w\right) J\left(v_1; z_1\right)|\rho_a(X\otimes\xi^{-n})u\rangle \\
&\qquad - \langle\Phi| J\left(v; w\right) J\left(\operatorname*{Res}_{z=z_1}\left(X(z-z_1)(z-w)^{-n}dz\right)v_1; z_1\right)|u\rangle \\
&= -\sum_{a\in A}\langle\Phi| J\left(\Phi\left(v; w-z_1\right)v_1; z_1\right)|\rho_a(X\otimes\xi^{-n})u\rangle \\
&\qquad - \langle\Phi| J\left(\Phi\left(v; w-z_1\right)\operatorname*{Res}_{z=z_1}\left(X(z-z_1)(z-w)^{-n}dz\right)v_1; z_1\right)|u\rangle \\
&= -\langle\tilde{\Phi}| \sum_{a\in A}\rho_a(X\otimes\xi^{-n})|u\otimes\Phi\left(v; w-z_1\right)v_1\rangle \\
&\qquad - \langle\tilde{\Phi}|u\otimes\Phi\left(v; w-z_1\right)\operatorname*{Res}_{z=z_1}\left(X(z-z_1)(z-w)^{-n}dz\right)v_1\rangle \\
&= \langle\tilde{\Phi}|u\otimes\operatorname*{Res}_{z=z_1}\left(X(z-z_1)(z-w)^{-n}dz\right)\Phi\left(v; w-z_1\right)v_1\rangle \\
&\qquad - \langle\tilde{\Phi}|u\otimes\Phi\left(v; w-z_1\right)\operatorname*{Res}_{z=z_1}\left(X(z-z_1)(z-w)^{-n}dz\right)v_1\rangle \\
&= \langle\tilde{\Phi}|u\otimes\left[\operatorname*{Res}_{z=z_1}\left(X(z-z_1)(z-w)^{-n}dz\right), \Phi\left(v; w-z_1\right)\right]v_1\rangle
\end{aligned} \tag{5.4}$$

となるが，ここで

$$\left[\operatorname*{Res}_{z=z_1}\left(X(z-z_1)(z-w)^{-n}dz\right), \Phi\left(v; w-z_1\right)\right] = \Phi(X(-n)v; w-z_1) \tag{5.5}$$

となる．実際，$(z-w)^{-n}$ を $z = z_1$ の近くで

$$(z-w)^{-n} = \sum_{k\geq 0} a_k (z-z_1)^k$$

と展開すれば，$(z-(w-z_1))^{-n}$ は $z = 0$ の近くで，同じ係数 a_k $(k \geq 0)$ により

$$(z-(w-z_1))^{-n} = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$$

と展開される．このとき，(5.5) の左辺は $\sum_{k\geq 0} a_k \left[X(k), \Phi(v; w-z_1)\right]$ となる．ここで，(4.4) により，各 $k \geq 0$ に対して

$$[X(k), \Phi(v; w-z_1)] = \Phi\left(\operatorname*{Res}_{z=w-z_1}\left(X(z-(w-z_1))z^k dz\right)v; w-z_1\right)$$

だから, (5.5) の左辺は

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(\operatorname*{Res}_{z=w-z_1}\left(X(z-(w-z_1))(\sum_{k\geq 0}a_k z^k)dz\right)v;w-z_1\right)\\
&= \quad \Phi\left(\operatorname*{Res}_{z=w-z_1}\left(X(z-(w-z_1))(z-(w-z_1))^{-n}dz\right)v;w-z_1\right)
\end{aligned}$$

となり, これは (5.5) の右辺である.

これにより

$$\begin{aligned}
(5.4) &= \langle\tilde{\Phi}|u\otimes\Phi\left(X(-n)v;w-z_1\right)v_1\rangle\\
&= \langle\Phi|J\left(\Phi\left(X(-n)v;w-z_1\right)v_1;z_1\right)|u\rangle
\end{aligned}$$

となる. これで帰納法が成立し, (4) が示せた.

(5) は考えている有理形式の定義 (5.3) が u と v_i について同じ形であることと (4) の証明で v_i が $\mathcal{H}_0$ の元であることは用いていないことから, (4) と全く同様に証明できる.

(3) を示すには, (5)(を 2 回) と命題 4.9 を用いれば, ただちに $z=w_a$ のまわりで

$$\begin{aligned}
\langle\Phi|J\left(L_{-1}v;z\right)|u\rangle &= \langle\Phi|\rho_a(\Phi\left(L_{-1}v;\xi_a\right))u\rangle\\
&= \langle\Phi|\rho_a(\partial_{\xi_a}\Phi\left(v;\xi_a\right))u\rangle\\
&= \partial_z\langle\Phi|J\left(v;z\right)|u\rangle
\end{aligned}$$

を得る. □

相関函数の例を計算してみよう. $\langle\Phi|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{w_A}(J_A)$ とする. また簡単のために $|u\rangle\in V(J_A)$ としよう. $(z-z_1)^{-1}$ を $z=w_a$ で展開すると

$$\begin{aligned}
(z-z_1)^{-1} &= (z-w_a+w_a-z_1)^{-1}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{-1}{j}(z-w_a)^j(w_a-z_1)^{-1-j}
\end{aligned}$$

であるので, これを用いて

$$\begin{aligned}
\langle\Phi|J(X(-1)|0\rangle;z_1)|u\rangle &= \langle\tilde{\Phi}|u\otimes X(-1)|0\rangle\rangle\\
&= -\langle\tilde{\Phi}|\sum_{a\in A}\rho_a(X\otimes(z-z_1)^{-1})|u\otimes|0\rangle\rangle\\
&= -\langle\Phi|\sum_{a\in A}\rho_a(X\otimes(z-z_1)^{-1})|u\rangle\\
&= -\sum_{a\in A}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-1}{j}\langle\Phi|\rho_a(X(j))|u\rangle(w_a-z_1)^{-j-1}\\
&= \sum_{a\in A}\langle\Phi|\rho_a(X(0))|u\rangle(z_1-w_a)^{-1}
\end{aligned}$$

となり各 $a\in A$ に対して $z_1=w_a$ に極を持つ有理函数となる. 同様に

$$\begin{aligned}
&\langle\Phi|J(X(-1)|0\rangle;z_1)J(Y(-1)|0\rangle;z_2)|u\rangle\\
&=\langle\tilde{\Phi}|u\otimes X(-1)|0\rangle\otimes Y(-1)|0\rangle\rangle\\
&=-\langle\tilde{\Phi}|\sum_{a\in A}\rho_a(X\otimes(z-z_1)^{-1})|u\otimes|0\rangle\otimes Y(-1)|0\rangle\rangle\\
&\qquad -\langle\tilde{\Phi}|u\otimes|0\rangle\otimes\rho_{a_2'}(X\otimes(z-z_1)^{-1})Y(-1)|0\rangle\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle\Phi| \sum_{a,b\in A} \rho_b(Y\otimes(z-z_2)^{-1})\rho_a(X\otimes(z-z_1)^{-1})|u\rangle \\
&\qquad - \langle\tilde{\Phi}|u\otimes X(0)Y(-1)|0\rangle\rangle(z_2-z_1)^{-1} + \langle\tilde{\Phi}|u\otimes X(1)Y(-1)|0\rangle\rangle(z_2-z_1)^{-2} \\
&= \langle\Phi| \sum_{a,b\in A} \rho_b(Y\otimes(z-z_2)^{-1})\rho_a(X\otimes(z-z_1)^{-1})|u\rangle \\
&\qquad - \langle\tilde{\Phi}|u\otimes[X,Y](-1)|0\rangle\rangle(z_2-z_1)^{-1} + l\,(X|Y)\,\langle\tilde{\Phi}|u\otimes|0\rangle\rangle(z_2-z_1)^{-2} \\
&= \langle\Phi| \sum_{a,b\in A} \rho_b(Y\otimes(z-z_2)^{-1})\rho_a(X\otimes(z-z_1)^{-1})|u\rangle \\
&\qquad + \langle\Phi| \sum_{a\in A} \rho_a([X,Y]\otimes(z-z_2)^{-1})|u\rangle(z_2-z_1)^{-1} + l\,(X|Y)\,\langle\Phi|u\rangle(z_2-z_1)^{-2} \\
&= \langle\Phi| \sum_{a,b\in A} \rho_b(Y(0))\rho_a(X(0))|u\rangle(z_1-w_a)^{-1}(z_2-w_b)^{-1} \\
&\qquad - \sum_{a\in A}\langle\Phi|\rho_a([X,Y](0))|u\rangle(z_2-w_a)^{-1}(z_2-z_1)^{-1} + l\,(X|Y)\,\langle\Phi|u\rangle(z_2-z_1)^{-2}
\end{aligned}
$$

となり $\langle\Phi|J(X(-1)|0\rangle;z_1)J(Y(-1)|0\rangle;z_2)|u\rangle$ の場合には $z_1=z_2$ にも極が現れることが確かめられる.

第6章　Conformal Blockの空間の層化とその上の接続

これまで $w_a(a \in A)$ は固定していたが, この章では w_a を動かした場合の真空の空間 $\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ の振舞いを調べる. そのために, w_a を座標とするパラメタ空間を考えて, その上の $\mathcal{V}^\dagger_{w_A}(J_A)$ に対応する層を構成する. ただしここでは $w_a = w_b(a \neq b)$ のように特異性が現れるような場合は考えない.

6.1　真空の層の定義

まず 3.1 章で定義した真空の空間を層化した真空の層を定義しよう. 代数幾何に不慣れな読者は以下の定義を見て戸惑いをおぼえるかもしれないが, 本書においては具体的な対象のみを扱っているので, そう恐れるにはおよばない. 実際, 本書では具体的な議論のみを扱い, 抽象的な代数幾何の知識を必要とする事はない. 多少わからない部分があっても計算を続けるうちに自ずと理解されるはずである.

添字の集合 A は ∞ を含むとする. $\bar{A} = A - \{\infty\}$ とおく.

底空間 X_A を

$$X_A = \left\{ w_A = (w_a)_{a \in A} \mid w_a \in \mathbb{P}^1, w_\infty = \infty, w_a \neq w_b(a \neq b) \right\}$$

と定義する. X_A は $|A| - 1$ 次元の複素多様体である. まず, 各パラメタ $w_A \in X_A$ に対して $\mathbb{P}^1$ を対応させ, それらを集めて全空間 $C_A = X_A \times \mathbb{P}^1$ を構成しよう. つまり,

$$C_A = X_A \times \mathbb{P}^1$$

とし, π を第 1 成分への射影

$$\begin{array}{ccc} \pi : C_A & \longrightarrow & X_A \\ (w_A, z) & \mapsto & w_A \end{array}$$

とする. C_A は $\mathbb{P}^1$ をファイバーとする X_A 上の自明なファイバーバンドルになる. 次に各 $w_A \in X_A$ に対して $\pi^{-1}(w_A) \simeq \mathbb{P}^1$ 上の点 w_a $(a \in A)$ を取る事を考える. w_A が X_A 上を動くとそれらの点の全体は C_A の因子 S_A を成す事になる. つまり, 各 $a \in A$ に対して

$$s_a : X_A \longrightarrow C_A, \quad w_A \mapsto (w_A, w_a)$$

とすると, s_a は切断である. また,

$$S_a = s_a(X_A), \quad S_A = \bigcup_{a \in A} S_a$$

とおく.

これによって我々はパラメタ $w_A \in X_A$ に対して $\pi^{-1}(w_A) \simeq \mathbb{P}^1$ を対応させるファイバーバンドル C_A を定義し, それぞれのファイバーの上で w_A に対応する点をとる C_A の因子 S_A を定義した. 次に各パラメタ w_A に対して $\pi^{-1}(w_A) \simeq \mathbb{P}^1$ 上の w_a $(a \in A)$ にのみ極を持つ有理函数全体 $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A))$ を対応させる事を考える. w_A が動くとき $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*w_A))$ を集めたものは X_A 上の層を成すが, それは C_A 上

の S_A にのみ極を持つ有理函数の層 $\mathcal{O}_{C_A}(*S_A)$ を考えて, その順像を取る事で X_A 上の層 $\pi_*(\mathcal{O}_{C_A}(*S_A))$ とすれば良い.

$\mathcal{O}_{C_A}(*S_A)$ を S_A にのみ極を持つ C_A 上の有理函数のなす層とし, $\pi_*(\mathcal{O}_{C_A}(*S_A))$ をその順像とする. つまり, X_A の任意の開集合 U に対して

$$\pi_*(\mathcal{O}_{C_A}(*S_A))(U) = \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_{C_A}(*S_A))$$

で定まる X_A 上の層が $\pi_*(\mathcal{O}_{C_A}(*S_A))$ である. $\mathcal{O}_{C_A}(*S_A)$ の S_a に零点を持つ切断 ξ_a を

$$\xi_a = \begin{cases} z - w_a & (a \neq \infty), \\ \dfrac{1}{z} & (a = \infty) \end{cases}$$

とおくと, $\mathcal{O}_{C_A}$ の S_a に沿っての完備化 $\widehat{\mathcal{O}}_{C_A} \underset{\text{def}}{=} \varprojlim_n \mathcal{O}_{C_A}/I_{S_a}^n$ (I_{S_a} は S_a の定義イデアル) は $\widehat{\mathcal{O}}_{C_A} \simeq \mathcal{O}_{X_A}[[\xi_a]]$ となる. Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}$ は

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{g}}_{X_A} &= \bigoplus_{a \in A} \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_{X_A}((\xi_a)) \oplus \mathcal{O}_{X_A} c \\ \left[\bigoplus_a X_a \otimes f_a \,, \bigoplus_a Y_a \otimes g_a\right] &= \bigoplus_a [X_a, Y_a] \otimes f_a g_a \oplus \sum_{a \in A} \operatorname*{Res}_{\xi_a = 0} (g_a df_a)\, c \end{aligned}$$

と定義する. ここで $X_a, Y_a \in \mathfrak{g}$, $f_a, g_a \in \mathcal{O}_{X_A}((\xi_a))$ である.

$f \in \pi_*(\mathcal{O}_{C_A}(*S_A))$ に対して ξ_a による S_a での Laurent 級数展開を t_a とする:

$$t_a : \pi_*(\mathcal{O}_{C_A}(*S_A)) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_A}((\xi_a)).$$

すると

$$t \underset{\text{def}}{=} \oplus_{a \in A} t_a : \pi_*(\mathcal{O}_{C_A}(*S_A)) \hookrightarrow \bigoplus_{a \in A} \mathcal{O}_{X_A}((\xi_a))$$

とベクトル空間としての埋め込みが存在する. この埋め込みにより Lie 代数としての埋め込み

$$\mathfrak{g} \otimes \pi_*(\mathcal{O}_{C_A}(*S_A)) \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_{X_A} \tag{6.1}$$

が定義される.

定義 6.1. Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}^{out}$ は (6.1) の像である $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}$ の Lie 部分代数として定義する.

表現も層にして

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{X_A}(J_A) &= \mathcal{O}_{X_A} \otimes \mathcal{H}(J_A) \\ \mathcal{H}^\dagger_{X_A}(J_A) &= \underline{Hom}_{\mathcal{O}_{X_A}}(\mathcal{H}_{X_A}(J_A), \mathcal{O}_{X_A}) \\ V_{X_A}(J_A) &= \mathcal{O}_{X_A} \otimes V(J_A) \\ V^\dagger_{X_A}(J_A) &= \underline{Hom}_{\mathcal{O}_{X_A}}(V_{X_A}(J_A), \mathcal{O}_{X_A}) \end{aligned}$$

と定義する. ここで $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_{X_A}}$ は $\mathcal{O}_{X_A}$ 準同形の成す層とする. $\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ は自然に $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}$, $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}^{out}$ の左表現となる. また $\mathcal{H}^\dagger_{X_A}(J_A)$, $\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ の pairing を $\mathcal{O}_{X_A}$ 線型に拡張して $\mathcal{O}_{X_A}$ 双線型 pairing

$$\langle \,|\, \rangle : \mathcal{H}^\dagger_{X_A}(J_A) \times \mathcal{H}_{X_A}(J_A) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_A} \tag{6.2}$$

を定義する.

定義 6.2. 真空の層 (sheaf of vacua)$\mathcal{V}^\dagger_{X_A}(J_A)$ と余真空の層 $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{X_A}(J_A) &= \mathcal{H}_{X_A}(J_A)/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}(\mathcal{H}_{X_A}(J_A))\\ \mathcal{V}^\dagger_{X_A}(J_A) &= \underline{Hom}_{\mathcal{O}_{X_A}}(\mathcal{V}_{X_A}(J_A),\mathcal{O}_{X_A})\\ &\simeq \left\{\langle\Phi|\in\mathcal{H}^\dagger_{X_A}(J_A)\;\middle|\;\langle\Phi|(X\otimes f)=0\quad(\forall X\otimes f\in\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A})\right\}\end{aligned} \tag{6.3}$$

と定義する．ただし上の剰余は層の意味での剰余．つまり前層としての剰余の層化とする．

(6.2) から誘導される $\mathcal{V}^\dagger_{X_A}(J_A)$, $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ の間の非退化 $\mathcal{O}_{X_A}$ 双線型 pairing を

$$\langle\ |\ \rangle:\mathcal{V}^\dagger_{X_A}(J_A)\times\mathcal{V}_{X_A}(J_A)\longrightarrow\mathcal{O}_{X_A}$$

と書く．

任意の $w_A\in X_A$ に対して

$$\mathbb{C}_{w_A}=\mathcal{O}_{X_A,w_A}/\mathfrak{m}_{w_A}\simeq\mathbb{C}$$

とおく．ここで $\mathcal{O}_{X_A,w_A}$ は $\mathcal{O}_{X_A}$ の w_A での stalk であり, $\mathfrak{m}_{w_A}$ は $\mathcal{O}_{X,w_A}$ の唯一つの極大イデアルである．このとき $\mathcal{O}_{X_A}$ 加群 $\mathcal{F}$ に対して

$$\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_{X_A}}\mathbb{C}_{w_A}=\mathcal{F}_{w_A}\otimes_{\mathcal{O}_{X_A},w_A}\mathbb{C}_{w_A}$$

と書く事にする．

命題 6.3. ベクトル空間としての同型

$$\mathcal{V}_{X_A}(J_A)\otimes_{\mathcal{O}_{X_A}}\mathbb{C}_{w_A}\simeq\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$$

が存在する．

証明．まず

$$\mathcal{H}_{X_A}(J_A)\otimes_{\mathcal{O}_{X_A}}\mathbb{C}_{w_A}\simeq\mathcal{H}(J_A) \tag{6.4}$$

は明らか．次に任意の $k\geq 1$ に対して

$$\pi_*(\mathcal{O}_{C_A}(kS_A))\otimes_{\mathcal{O}_{X_A}}\mathbb{C}_{w_A}\simeq H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(kw_A))$$

が成立する．実際, $H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(kw_A))$ は z^n, $(z-w_a)^{-n}$ $(1\leq n\leq k,\ a\in A,\ a\neq\infty)$ で張られるが, 任意の $a\in A$ $(a\neq\infty)$ に対して w_A のまわりで定義された $\pi_*(\mathcal{O}_{C_A}(kS_A))$ の切断 $f=(z-w_a)^{-n}$ $(1\leq n\leq k)$ を考えれば f の $\pi_*(\mathcal{O}_{C_A}(kS_A))\otimes\mathbb{C}_{w_A}$ での同値類が $(z-w_a)^{-n}$ に一致する．同様に z^n に対しては切断を $f=z^n$ と取ればよい．従って,

$$\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}\otimes_{\mathcal{O}_{X_A}}\mathbb{C}_{w_A}\simeq\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} \tag{6.5}$$

である．

$\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}$ の $\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ への作用 $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}\otimes\mathcal{H}_{X_A}(J_A)\to\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ から次の $\mathcal{O}_{X_A}$ 加群の右短完全列が得られる:

$$\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}\otimes\mathcal{H}_{X_A}(J_A)\to\mathcal{H}_{X_A}(J_A)\to\mathcal{V}_{X_A}(J_A)\to 0.$$

これに $(\ )\otimes_{\mathcal{O}_{X_A}}\mathbb{C}_{w_A}$ を作用させるとテンソル積の右完全性と (6.4) により次の $\mathbb{C}_{w_A}$ 加群の右短完全列が得られる:

$$\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}\otimes\mathcal{H}(J_A)\to\mathcal{H}(J_A)\to\mathcal{V}_{X_A}(J_A)\otimes_{\mathcal{O}_{X_A}}\mathbb{C}_{w_A}\to 0. \tag{6.6}$$

この右完全列における $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}\otimes\mathcal{H}(J_A)\to\mathcal{H}(J_A)$ の像が $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}\mathcal{H}(J_A)$ に等しいことを示す．$X\otimes f\in\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}$, $|u\rangle\in\mathcal{H}(J_A)$ とする．f の ξ_a $(a\in A)$ による展開を

$$t_a(f)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f^{(a)}_n\xi_a^n\quad(f^{(a)}_n\in\mathcal{O}_{X_A})$$

とし, また定数函数 $1 \in \mathcal{O}_{X_A}$ をとると,

$$
\begin{aligned}
(X \otimes f)(|u\rangle \otimes 1) \quad &= \quad \sum_{a\in A} \rho_a\big(X \otimes \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n^{(a)} \xi_a^n\big)(|u\rangle \otimes 1) \\
&= \quad \sum_{a\in A}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\rho_a(X(n))|u\rangle) \otimes f_n^{(a)} \\
&\xrightarrow{\otimes \mathbb{C}_{w_A}} \quad \sum_{a\in A}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n^{(a)}(w_A)\rho_a(X(n))|u\rangle \\
&= \quad \sum_{a\in A} \rho_a\big(X \otimes \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n^{(a)}(w_A)\xi_a^n\big)|u\rangle
\end{aligned}
$$

であるので, $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}^{out} \otimes \mathcal{H}(J_A) \to \mathcal{H}(J_A)$ の像は $\widehat{\mathfrak{g}}_{w_A}^{out}\mathcal{H}(J_A)$ に一致する. 従って (6.6) から同型

$$
\mathcal{V}_{X_A}(J_A) \otimes_{\mathcal{O}_{X_A}} \mathbb{C}_{w_A} \simeq \mathcal{H}(J_A)/\widehat{\mathfrak{g}}_{w_A}^{out}\mathcal{H}(J_A) = \mathcal{V}_{w_A}(J_A)
$$

を得る. □

6.2　真空の層の連接性

この節では真空の層 $\mathcal{V}_{X_A}^{\dagger}(J_A)$, 余真空の層 $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ が連接な $\mathcal{O}_{X_A}$ 加群であることを示す. まず連接層について基本的な事実を整理しておこう. ただし, 本書では解析的連接層の理論について詳しい説明をする余裕はないので, 読者は必要に応じて [GR] や [KK] などの教科書を参考にしてほしい.

X を複素多様体, $\mathcal{O}_X$ をその構造層とする. まず $\mathcal{O}_X$ について次の基本的性質がある.

事実 6.4. 複素多様体 X と各点 $x \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X,x}$ は Noether 局所環である.

証明は [KK] Proposition 21.4 (p.67), Proposition 23.1 (p80), あるいは [GR] p.67, Theorem II, C9 (p.72) にある.

定義 6.5. $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ が局所有限生成 (locally finitely generated) であるとは, X の任意の点 x に対してある開近傍 U が存在して, U において完全列

$$
\mathcal{O}_X^p|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0
$$

が存在することである.

また $\mathcal{F}$ が局所有限表示 (locally finitely presented) であるとは, X の任意の点 x に対してある開近傍 U が存在して, 完全列

$$
\mathcal{O}_X^q|_U \longrightarrow \mathcal{O}_X^p|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0
$$

が存在することである.

定義より局所有限表示ならば, 局所有限生成である.

定義 6.6. $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ が連接 (coherent) であるとは, $\mathcal{F}$ が局所有限表示でかつ X の任意の開集合 U, 任意の自然数 n および任意の $\mathcal{O}_U$ 準同型 $\phi : \mathcal{O}_U^n \to \mathcal{F}|_U$ に対して $\mathrm{Ker}\phi$ が局所有限生成になることである.

$\mathcal{F}$ が連接層ならば定義より $\mathcal{F}$ は局所有限表示であるが, 実際には複素多様体の構造層 $\mathcal{O}_X$ はそれ自身が連接である (岡の定理) ために $\mathcal{F}$ が局所有限表示であるならば連接であることが従う.

事実 6.7. $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ が局所有限表示ならば $\mathcal{F}$ は連接である.

この事実の証明は [GR] Theorem IV, C1 (Oka's syzygy theorem, p.134) と Theorem IV, B6 (p.129) あるいは, [KK] Proposition 41.19 (p.143) と Theorem 42.1 (Oka's coherence theorem, p.145) などにある.

さらに我々が考えている場合においては $X = X_A$ は非特異な複素多様体であるので, $\mathcal{O}_X$ の Noether 性から次の命題が従う.

命題 6.8. X が非特異な複素多様体であるならば, $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ が局所有限生成ならば局所有限表示である.

証明. $\mathcal{F}$ が局所有限生成であることから任意の $x \in X$ に対して

$$0 \to \mathrm{Ker}\phi \to \mathcal{O}_{X,x}^p \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}_x \to 0$$

という完全列が存在する. ここで事実 6.4 より $\mathcal{O}_{X,x}$ は Noether 環であり, 従って $\mathcal{O}_{X,x}^p$ は Noether 加群であるのでその部分加群 $\mathrm{Ker}\phi$ は有限生成である. 従って

$$\mathcal{O}_{X,x}^q \to \mathrm{Ker}\phi \to 0$$

という完全列が存在する. これを元の完全列と合わせて完全列

$$\mathcal{O}_{X,x}^q \to \mathcal{O}_{X,x}^p \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}_x \to 0$$

を得る. これから x の開近傍 U が存在して

$$\mathcal{O}_X^q|_U \to \mathcal{O}_X^p|_U \to \mathcal{F}|_U \to 0$$

という完全列を得るので, $\mathcal{F}$ は局所有限表示である. □

余真空の層 $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ が局所有限生成であることを示そう. この命題は余真空の空間 $\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$ の有限次元性と本質的には同じであるので, 定理 3.6 と同様の証明が適用できる. ただしその場合には $\mathcal{O}_{X_A}$ 上のリー代数の $\mathcal{O}_{X_A}$ 上の普遍包絡代数を扱わなければならない. そこでここでは 3.1 章で導入したフィルターを層化したフィルターを考え, これを用いた証明を適用する. 同様の証明を定理 3.6 に用いることもできる.

Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}$ と $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}$ 加群 $\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ に対して

$$\begin{aligned} F_p\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A} &= F_p\widehat{\mathfrak{g}}_A \otimes \mathcal{O}_{X_A} \\ F_p\mathcal{H}_{X_A}(J_A) &= \mathcal{O}_{X_A} \otimes F_p\mathcal{H}(J_A) \end{aligned}$$

と定義する. このフィルターは,

$$F_p\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}F_q\mathcal{H}_{X_A}(J_A) \subset F_{p+q}\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$$

を満たす. $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}^{out}$ および $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}^{out}\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ にはそれぞれ $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}$, $\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ から自然にフィルターが誘導される. また $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ のフィルターは標準的な射影

$$\mathcal{H}_{X_A}(J_A) \to \mathcal{V}_{X_A}(J_A) \to 0$$

から誘導されるものとする. このとき上で定義されたフィルターによる次数化を考えると次数付き Lie 代数の完全列

$$0 \to \mathrm{gr}\,\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}^{out} \to \mathrm{gr}\,\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}$$

および, $\mathcal{O}_{X_A}$ 加群の完全列

$$0 \to \mathrm{gr}\,(\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}^{out}\mathcal{H}_{X_A}(J_A)) \to \mathrm{gr}\,\mathcal{H}_{X_A}(J_A) \to \mathrm{gr}\,\mathcal{V}_{X_A}(J_A) \to 0 \tag{6.7}$$

を得る.

補題 6.9. 次数付き Lie 代数 $\mathrm{gr}\,\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}$ に対して

$$\mathfrak{g}\otimes\left(\bigoplus_{a\in A}\mathcal{O}_{X_A}[\xi_a^{-1}]\right)\subset \mathrm{gr}\,\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}$$

が成立する.

証明. 任意の $a\in A$, $p\geq 0$ に対して函数 $f\in\pi_*(\mathcal{O}_{C_A}(*S_A))$ で, 各 $b\in A$ に対して $z=w_b$ のまわりでの Laurent 級数展開 $t_b(f)$ が

$$t_b(f)\equiv\begin{cases}\xi_a^{-p} \mod F_{p-1}\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A} & (b=a)\\ 0 \mod F_{p-1}\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A} & (b\neq a)\end{cases}\tag{6.8}$$

を満たすものが存在することを言えばよいが, $f=(z-w_a)^{-p}$ とすれば (6.8) が成立している. □

さて

$$\widehat{\mathfrak{g}}_A^{\leq -1}=\bigoplus_{a\in A}\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[\xi_a^{-1}]\xi_a^{-1}$$

とおくと, $\widehat{\mathfrak{g}}_A^{\leq -1}$ は $\widehat{\mathfrak{g}}_A$ の部分代数で

$$V(J_A)=\mathcal{H}(J_A)/\widehat{\mathfrak{g}}_A^{\leq -1}\mathcal{H}(J_A)$$

となる. これは層化してやれば

$$\mathcal{O}_{X_A}\otimes V(J_A)\simeq\mathcal{H}_{X_A}(J_A)/(\widehat{\mathfrak{g}}_A^{\leq -1}\otimes\mathcal{O}_{X_A})\mathcal{H}_{X_A}(J_A)\tag{6.9}$$

である. 一方 $\mathrm{gr}\,\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ は完全列 (6.7) より

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{V}_{X_A}(J_A)\simeq\mathrm{gr}\,\mathcal{H}_{X_A}(J_A)/\mathrm{gr}\,(\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}\mathcal{H}_{X_A}(J_A))$$

であるが, $\mathrm{gr}\,\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ は $\mathrm{gr}\,\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}$ 加群としては $\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ と同型であるので, 結局

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{V}_{X_A}(J_A)\simeq\mathcal{H}_{X_A}(J_A)/(\mathrm{gr}\,\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A})\mathcal{H}_{X_A}(J_A)\tag{6.10}$$

となる. ここで補題 6.9 より $\widehat{\mathfrak{g}}_A^{\leq -1}\otimes\mathcal{O}_{X_A}\subset\mathrm{gr}\,\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}$ であるので, (6.9), (6.10) より $\mathcal{O}_{X_A}$ 加群としての完全列

$$\mathcal{O}_{X_A}\otimes V(J_A)\to\mathrm{gr}\,\mathcal{V}_{X_A}(J_A)\to 0\tag{6.11}$$

を得る. $V(J_A)$ は有限次元であったので, この完全列より $\mathrm{gr}\,\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ は $\mathcal{O}_{X_A}$ 加群として局所有限生成である. 従って $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ も $\mathcal{O}_{X_A}$ 加群として局所有限生成であり, 事実 6.7 と命題 6.8 から $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ は連接である. また, 連接層に双対な層は連接であるので $\mathcal{V}^\dagger_{X_A}(J_A)$ も連接層である.

命題 6.10. 真空の層 $\mathcal{V}^\dagger_{X_A}(J_A)$, 余真空の層 $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ は連接な $\mathcal{O}_{X_A}$ 加群である.

6.3 余真空の層の上の接続

$w_a(a\in A)$ を動かしたときに余真空の空間 $\mathcal{V}_{w_A}(J_A)$ がどう振舞うかを調べるため, 余真空の層 $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ に接続を定義しよう.

定義 6.11. X を複素多様体とし, $\mathcal{O}_X$ を X の構造層, Θ_X を X の接層とする. また $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$ 加群とする. このとき $\mathcal{F}$ 上の接続とは X 上のベクトル場 $\theta\in\Theta_X$ に対して

$$\nabla_\theta:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}$$

が定義されて次の条件を満すものである.

$$\begin{aligned} \nabla_{f\theta}(m) &= f\nabla_\theta(m) \\ \nabla_\theta(fm) &= \theta(f)m + f\nabla_\theta(m) \end{aligned}$$

上で $f \in \mathcal{O}_X$, $m \in \mathcal{F}$, $\theta \in \Theta_X$ である. またさらに

$$\nabla_{[\theta_1,\theta_2]} = [\nabla_{\theta_1}, \nabla_{\theta_2}]$$

を満すとき, 可積分接続という.

X_A には $w_A = (w_a)_{a\in\bar{A}}$ という座標を考えているので, 各 $a \in \bar{A}$ に対して

$$\nabla_a \underset{\mathrm{def}}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial w_a}}$$

を定義すれば接続が定まる.

大域的な座標系 (w_A, z) を用いて表わされた C_A 上の大域的なベクトル場 $\partial_{w_a} = \partial/\partial w_a$ を考える. C_A の座標系 $(w_A, \xi_b) = (w_A, z - w_b)$ においては, ∂_{w_a} は

$$\partial_{w_a} = \frac{\partial}{\partial w_a} - \delta_{a,b}\frac{\partial}{\partial \xi_a}$$

と表わされる. 定義 1.28 の後で説明したとおり, Virasoro 代数は $\mathbb{C}((\xi))\frac{d}{d\xi}$ の中心拡大であり, $-\partial/\partial\xi_a$ は $\rho_a(L_{-1})$ に対応しているので C_A 上の大域的なベクトル場 ∂_{w_a} の $\mathcal{H}_{X_A}(J_A) = \mathcal{O}_{X_A} \otimes \mathcal{H}(J_A)$ への作用 ∇_a を

$$\nabla_a = \frac{\partial}{\partial w_a} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \rho_a(L_{-1}) \tag{6.12}$$

で定義する. これは接続の定義を満す.

上で定義した $\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ 上の接続 ∇_a が $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ 上の接続を誘導することを示そう.

まず $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}$ の元は X_A 上の函数であるので w_a による微分 ∂_{w_a} は $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}$ の導分を定める. つまり $b \in A$, $X \otimes g_b \in \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_{X_A}((\xi_b))$ に対して g_b を

$$g_b = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_b^{(n)}\xi_b^n \qquad (g_b^{(n)} \in \mathcal{O}_{X_A})$$

とおいたとき $\partial_{w_a}(X \otimes g_b)$ は

$$\partial_{w_a}(X \otimes g_b) = \begin{cases} X \otimes \sum_{n\in\mathbb{Z}}\{(\partial_{w_a} g_a^{(n)})\xi_a^n - n g_a^{(n)}\xi_a^{n-1}\} & (a = b) \\ X \otimes \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\partial_{w_a} g_b^{(n)})\xi_b^n & (a \neq b) \end{cases}$$

である. 上で $\xi_a = z - w_a$ も w_a の函数であることに注意せよ.

補題 6.12. 任意の $X \otimes g_b \in \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_{X_A}((\xi_b))$ と $f \otimes |u\rangle \in \mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ に対して

$$\nabla_a \rho_b(X \otimes g_b)(f \otimes |u\rangle) = \rho_b(X \otimes g_b)\nabla_a(f \otimes |u\rangle) + \rho_b(\partial_{w_a}(X \otimes g_b))f \otimes |u\rangle$$

が成立する.

証明. $g_b \in \mathcal{O}_{X_A}((\xi_b))$ の展開を

$$g_b = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_b^{(n)}\xi_b^n \ \ (g_b^{(n)} \in \mathcal{O}_{X_A})$$

とおく. 補題の式の左辺を計算しよう.

$$\begin{aligned}
&\nabla_a \rho_b(X \otimes g_b)(f \otimes |u\rangle) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \nabla_a (f g_b^{(n)} \rho_b(X(n))|u\rangle) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\{ \partial_{w_a}(f g_b^{(n)})\rho_b(X(n))|u\rangle + f g_b^{(n)} \rho_a(L_{-1})\rho_b(X(n))|u\rangle \right\} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\partial_{w_a} f) g_b^{(n)} \rho_b(X(n))|u\rangle + \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\partial_{w_a} g_b^{(n)})\rho_b(X(n))|u\rangle \\
&\quad + \sum_{n\in\mathbb{Z}} f g_b^{(n)} \rho_b(X(n))\rho_a(L_{-1})|u\rangle + \delta_{a,b} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f g_b^{(n)} \rho_a([L_{-1}, X(n)])|u\rangle
\end{aligned} \tag{6.13}$$

ここで (6.13) の右辺第 1 項, 第 3 項は,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\partial_{w_a} f) g_b^{(n)} \rho_b(X(n))|u\rangle + \sum_{n\in\mathbb{Z}} f g_b^{(n)} \rho_b(X(n))\rho_a(L_{-1})|u\rangle \\
&\qquad = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_b(X \otimes g_b^{(n)} \xi_b^n)\left(\partial_{w_a} f + \rho_a(L_{-1}) f\right)|u\rangle \\
&\qquad = \rho_b(X \otimes g_b) \nabla_a (f \otimes |u\rangle)
\end{aligned} \tag{6.14}$$

であり, 一方 (6.13) の右辺第 2 項, 第 4 項は,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\partial_{w_a} g_b^{(n)})\rho_b(X(n))|u\rangle + \delta_{a,b} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f g_b^{(n)} \rho_a([L_{-1}, X(n)])|u\rangle \\
&\quad = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\partial_{w_a} g_b^{(n)})\rho_b(X(n))(f \otimes |u\rangle) - \delta_{a,b} \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_b^{(n)} \rho_a(nX(n-1))(f \otimes |u\rangle) \\
&\quad = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_b(X \otimes (\partial_{w_a} g_b^{(n)})\xi_b^n)(f \otimes |u\rangle) - \delta_{a,b} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_a(X \otimes n g_b^{(n)} \xi_b^{n-1})(f \otimes |u\rangle) \\
&\quad = \rho_b(\partial_{w_a}(X \otimes g_b))(f \otimes |u\rangle)
\end{aligned} \tag{6.15}$$

となるので, (6.13), (6.14), (6.15) を合わせれば求める式を得る. □

$\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}$ の Lie 部分代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}^{out}$ は $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}$ 上の導分 ∂_{w_a} に関して閉じている. つまり次の補題が成立する.

補題 6.13. $\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}$ 上の導分 ∂_{w_a} に対して

$$\partial_{w_a}(\widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}^{out}) \subset \widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}^{out}$$

が成立する.

証明. $X \otimes g \in \widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}^{out}$ とする. g の w_b のまわりでの ξ_b による Laurent 級数展開を

$$t_b(g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_b^{(n)} \xi_b^n \quad (g_b^{(n)} \in \mathcal{O}_{X_A})$$

とおく. $\xi_b = z - w_b$ なので $b = a$ のとき ξ_b も w_a に依存していることに注意すれば

$$\begin{aligned}
\partial_{w_a}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_b^{(n)} \xi_b^n\right) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\{ (\partial_{w_a} g_b^{(n)})\xi_b^n + g_b^{(n)} (\partial_{w_a} \xi_b^n) \right\} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\{ (\partial_{w_a} g_b^{(n)})\xi_b^n - \delta_{a,b} n g_b^{(n)} \xi_b^{n-1} \right\}
\end{aligned}$$

を得る. 従って

$$\partial_{w_a}(X \otimes g) = X \otimes (\partial_{w_a} g) \in \widehat{\mathfrak{g}}_{X_A}^{out}$$

である. □

これで $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ 上に接続 ∇_a を定義する準備が整った.

定理 6.14. (6.12) で定めた $\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ 上の接続 $\nabla_a(a \in \bar{A})$ は $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ 上の可積分接続を誘導する.

証明. $\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ 上の接続 ∇_a が $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ 上の接続を誘導することを示すには

$$\nabla_a\left(\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}\mathcal{H}_{X_A}(J_A)\right) \subset \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$$

を言えばいいが, 補題 6.12, 補題 6.13 より

$$\begin{aligned}\nabla_a\left(\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}\mathcal{H}_{X_A}(J_A)\right) &\subset \left(\partial_{w_a}\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}\right)\mathcal{H}_{X_A}(J_A) + \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}\nabla_a\mathcal{H}_{X_A}(J_A)\\ &\subset \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{X_A}\mathcal{H}_{X_A}(J_A)\end{aligned}$$

なので接続 ∇_a は $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ 上定義される. さらに, ∇_a の定義 (6.12) より

$$[\nabla_a, \nabla_b] = 0$$

であるので, これは可積分接続である. □

連接層の上の可積分接続については D 加群の理論における基本的な定理から局所自由性が従うことを示そう.

定義 6.15. 多様体 X 上の $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ が局所自由 (locally free) であるとは, 開被覆 $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ で, 各 α に対して $\mathcal{F}|_{U_\alpha}$ がいくつかの $\mathcal{O}_{U_\alpha}$ の直和で表せるものが存在することである.

連接層の局所自由性は各 stalk での自由性に言いかえることができる. この性質は後で定理の証明に用いるので証明しておくことにしよう.

補題 6.16. X を複素多様体とする. $\mathcal{F}$ が局所有限生成 $\mathcal{O}_X$ 加群のとき $\mathcal{F}$ の台

$$\mathrm{supp}\mathcal{F} = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$$

は X の閉集合である.

証明. U を $\mathrm{supp}\mathcal{F}$ の補集合とおいて, U が開集合になることを示す. $\mathcal{F}$ は局所有限生成ゆえ任意の $x \in X$ に対して, x のある開近傍 V と有限個の $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{F}(V)$ で $\mathcal{O}_V$ 上 $\mathcal{F}|_V$ を生成するものが存在する. もしも $x \in U$ ならば $s_{1,x} = \cdots = s_{n,x} = 0$ であるから, V に含まれる x のある開近傍 W で $s_1|_W = \cdots = s_n|_W = 0$ を満たすものが存在する. このとき $\mathcal{F}|_W = 0$ であるので, $W \subset U$ である. 従って U は開集合である. □

命題 6.17. 複素多様体 X 上の連接層 $\mathcal{F}$ が局所自由になるための必要十分条件は各 $x \in X$ において $\mathcal{F}_x$ が自由 $\mathcal{O}_{X,x}$ 加群になることである.

証明. 条件より各点 $x \in X$ において, ある自然数 r が存在して $\mathcal{O}_{X,x}$ 加群の同型 $f : \mathcal{O}^r_{X,x} \to \mathcal{F}_x$ が存在する. $\mathcal{O}^r_X$ の $\mathcal{O}_X$ 自由基底 $e_1, \ldots, e_r$ を任意にとる. $v_i = f(e_{i,x}) \in \mathcal{F}_x$ $(i = 1, \ldots, r)$ とおくと, x のある開近傍 U とある $u_1, \ldots, u_r \in \mathcal{F}(U)$ で $u_{i,x} = v_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ を満たすものが存在する. すると $\mathcal{O}_U$ 準同型 $\phi : \mathcal{O}^r_U \to \mathcal{F}|_U$ で $\phi(e_i|_U) = u_i$ を満たすものが一意に定まる. このとき $\phi_x : \mathcal{O}^r_{X,x} \to \mathcal{F}_x$ は f に一致するのでこれは $\mathcal{O}_{X,x}$ 加群の同型写像である.

命題を示すには U に含まれる x のある開近傍 V で $\phi|_V : \mathcal{O}^r_V \to \mathcal{F}|_V$ が同型になるものが存在することを示せばいい. そのためには次の 2 つを示せば十分である.

(1) $\mathcal{F}$ が局所有限生成ならば U に含まれる x のある開近傍 V で $\phi|_V : \mathcal{O}^r_V \to \mathcal{F}|_V$ が全射になるものが存在する.

(2) $\mathcal{F}$ が連接ならば U に含まれる x のある開近傍 V で $\phi|_V : \mathcal{O}_V^r \to \mathcal{F}|_V$ が単射になるものが存在する.

まず (1) を示す. $\mathcal{C} = \mathrm{Coker}\phi = \mathcal{F}|_U/\phi(\mathcal{O}_U^r)$ とおくと, $\mathcal{F}$ は局所有限生成なので $\mathcal{C}$ も局所有限生成である. $V = \{y \in U \mid \mathcal{C}_y = 0\}$ とおくと, $\phi_x = f$ は同型なので $x \in V$ である. 一方補題 6.16 より V は U の開部分集合である. $V = \{y \in U \mid \phi_y$ は全射 $\}$ であるから $\phi|_V$ は層の全射である.

次に (2) を示す. $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}\phi$ とおくと, $\mathcal{F}$ は連接なので $\mathcal{K}$ は局所有限生成である. $V = \{y \in U \mid \mathcal{K}_y = 0\}$ とおくと, $\phi_x = f$ は同型なので $x \in V$ である. 一方補題 6.16 より V は U の開部分集合である. $V = \{y \in U \mid \phi_y$ は単射 $\}$ であるから $\phi|_V$ は層の単射である. □

定理の証明には可換環論における基本的な補題である中山の補題を用いる. 中山の補題の証明は [松村] や [堀田] などの可換環論の教科書を参照せよ.

可換環 A の Jacobson 根基 $J(A)$ を

$$J(A) = \bigcap_{\mathfrak{m}:A \text{ の極大イデアル}} \mathfrak{m}$$

で定義する. このとき

$$J(A) = \left\{x \in A \mid 1 + xA \subset A^\times\right\} \tag{6.16}$$

が成り立つ. この証明は [堀田] 命題 2.28 (p.38) などにある.

補題 6.18 (中山の補題). A は可換環, I はそのイデアルとし, M を有限生成 A 加群とする. このとき $IM = M$ ならば, ある $x \in A$ で $x \equiv 1 \pmod I$ かつ $xM = 0$ となるものが存在する. よってさらに I が $J(A)$ に含まれるならば $M = 0$ である.

証明は [松村] 定理 2.2 (p.10) や [堀田] 系 2.27 (i), 定理 2.29 (pp.38–39) を参照せよ.

補題 6.19 (中山の補題の系 1). A は可換環, I は $J(A)$ に含まれる A のイデアルとし, M は有限生成 A 加群であるとする. このとき, M の有限個の元 $x_1, \ldots, x_n$ の M/IM における像が M/IM を A/I 上生成するならば, $x_1, \ldots, x_n$ は M を A 上生成する.

証明. $x_1, \ldots, x_n$ から生成される M の A 部分加群を N とおく. M/IM は N の像に等しいので $M = N + IM$ である. よって $\bar{M} = M/N$ とおけば $I\bar{M} = \bar{M}$ である. 補題 6.18 を $\bar{M}$ に適用すると $\bar{M} = 0$ すなわち $M = N$ である. □

補題 6.20 (中山の補題の系 2). A は唯一の極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ局所環とし, M は有限生成 A 加群とする. このとき, M の有限個の元 $x_1, \ldots, x_n$ の $M/\mathfrak{m}M$ における像が $M/\mathfrak{m}M$ を $A/\mathfrak{m}$ 上生成するならば, $x_1, \ldots, x_n$ は M を A 上生成する.

証明. A は局所環なので $\mathfrak{m} = J(A)$ であり, 従って補題 6.19 を $I = \mathfrak{m}$ として適用すればよい. □

定理 6.21. 可積分接続の定義された連接層は局所自由である.

証明. $x \in X$ を固定する. 命題 6.17 より $\mathcal{F}_x$ が $\mathcal{O}_{X,x}$ 自由加群であることを示せばいい. $s \in \mathcal{F}_x$ に対して $\bar{s}$ で s の $\bar{\mathcal{F}}_x \underset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{F}_x$ での像を表すことにする.

$\mathcal{F}$ は連接であるので $\{s_i\ (1 \le i \le q)\}$ で $\{\bar{s}_i\ (1 \le i \le q)\}$ が体 $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ 上の $\bar{\mathcal{F}}_x$ の基底になるものが存在する. 補題 6.20 を局所環 $(A, \mathfrak{m}) = (\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x)$ と $\mathcal{O}_{X,x}$ 上の有限生成加群 $M = \mathcal{F}_x$ に適用すれば,

$$\mathcal{F}_x = \sum_{i=1}^{q} \mathcal{O}_{X,x} s_i \tag{6.17}$$

が成立する．$\{s_i\}$ が $\mathcal{O}_{X,x}$ 上で線型独立であることを背理法で示そう．自明でない線型関係

$$\sum_{i=1}^{q} f_i s_i = 0 \quad (f_i \in \mathcal{O}_{X,x}) \tag{6.18}$$

が存在したとする．今 $\{\bar{s_i}\}$ が体 $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ 上線型独立であるのですべての i に対して $f_i(x) = 0$ である．そこで

$$\nu = \min_{1 \leq i \leq q} \{f_i \text{ の } x \text{ での零点の位数 }\}$$

とおくと $\nu > 0$ である．必要ならば添字を付け替えて, f_1 が x で ν 位の零点を持つとしてよい．すると微分 $\partial \in \Theta_X$ で ∂f_1 の x での零点の位数が ν より小さくなるものが存在する．∂ に対応する $\mathcal{F}$ 上の接続を ∇_∂ と書くとする．(6.18) に ∂ を適用して

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \partial(f_i s_i) \\ &= \sum_i (\partial f_i) s_i + \sum_i f_i (\nabla_\partial s_i) \end{aligned}$$

となるが, ここで (6.17) より $\nabla_\partial s_i$ は $\{s_j\}$ の線形結合で書けるので, それを

$$\nabla_\partial s_i = \sum_j a_{ij} s_j \qquad (a_{ij} \in \mathcal{O}_{X,x})$$

とおく．これを用いて書き直せば

$$\sum_i s_i \left(\partial f_i + \sum_j a_{ji} f_j \right) = 0$$

となるが, 左辺の x での零点の位数を考えれば s_1 の係数のところで真に ν より小さくなっている．これを繰り返せば x での零点の位数がいくらでも小さい線型関係式が得られるが, 零点の位数は 0 よりも小さくならないのでこれは矛盾である．従って $\{s_i\}$ は $\mathcal{O}_{X,x}$ 上線形独立であり,

$$\mathcal{F}_x = \bigoplus_{i=1}^{q} \mathcal{O}_{X,x} s_i$$

が成立する． □

定理 6.14, 定理 6.21 より次が従う．

系 6.22. 余真空の空間 $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ は局所自由である．特に, X_A は連結であるので命題 6.3 を用いれば $\dim \mathcal{V}_{w_A}(J_A)$ は $w_A \in X_A$ に依らない．

さて, 各 $a \in \bar{A}$ に対して

$$\nabla_a^{KZ} : V_{X_A}(J_A) \longrightarrow V_{X_A}(J_A)$$

を

$$\begin{aligned} \nabla_a^{KZ} &= \partial_{w_a} + \frac{1}{l+2} \sum_{b \neq a, \infty} \frac{\Omega_{a,b}}{w_a - w_b} \qquad (6.19) \\ \Omega_{a,b} &= \sum_{i=1}^{3} \rho_a(X_i) \rho_b(X^i) \end{aligned}$$

と定義する．

命題 6.23. $\nabla_a^{KZ} (a \in \bar{A})$ は $V_{X_A}(J_A)$ 上の接続を定義する．この接続を KZ 接続という．

補題 6.24. 上で定義した $\Omega_{a,b}$ に対して

$$\Omega_{a,b} = \Omega_{b,a} \tag{6.20}$$

$$[\Omega_{a,b}, \Omega_{a,c} + \Omega_{b,c}] = 0 \quad (a \neq b) \tag{6.21}$$

が成立する.

証明. (6.20) は補題 2.60 と同様にして示される. また, 定義 2.59 の Casimir 作用素 Ω が $U(\mathfrak{g})$ の中心元である事と同様にして次の式が示される:

$$\Omega_{ab}\rho_b(X) = \rho_a(X)\Omega_{ab} \qquad (X \in \mathfrak{g}).$$

この式を用いれば直ちに

$$\begin{aligned}
\Omega_{a,b}(\Omega_{a,c} + \Omega_{b,c}) &= \Omega_{a,b}\sum_{i=1}^{3}\{\rho_a(X_i) + \rho_b(X_i)\}\rho_c(X^i) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\{\rho_b(X_i) + \rho_a(X_i)\}\rho_c(X^i)\Omega_{a,b} \\
&= (\Omega_{b,c} + \Omega_{a,c})\Omega_{a,b}
\end{aligned}$$

であって (6.21) が示される. □

命題 6.25. KZ 接続 ∇_a^{KZ} は可積分である.

証明. KZ 接続の定義から,

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_a^{KZ}, \nabla_b^{KZ}\right] &= \left[\left(\partial_{w_a} + \frac{1}{l+2}\sum_{c\neq a,\infty}\frac{\Omega_{a,c}}{w_a - w_c}\right), \left(\partial_{w_b} + \frac{1}{l+2}\sum_{d\neq b,\infty}\frac{\Omega_{b,d}}{w_b - w_d}\right)\right] \\
&= [\partial_{w_a}, \partial_{w_b}] + \frac{1}{l+2}\sum_{d\neq b,\infty}\left[\partial_{w_a}, \frac{\Omega_{b,d}}{w_b - w_d}\right] - \frac{1}{l+2}\sum_{c\neq a,\infty}\left[\partial_{w_b}, \frac{\Omega_{a,c}}{w_a - w_c}\right] \\
&\quad + \frac{1}{(l+2)^2}\sum_{\substack{c\neq a,\infty \\ d\neq b,\infty}}\left[\frac{\Omega_{a,c}}{w_a - w_c}, \frac{\Omega_{b,d}}{w_b - w_d}\right] \\
&= \frac{1}{l+2}\left[\partial_{w_a}, \frac{\Omega_{b,a}}{w_b - w_a}\right] - \frac{1}{l+2}\left[\partial_{w_b}, \frac{\Omega_{a,b}}{w_a - w_b}\right] \\
&\quad + \sum_{c\neq a,b,\infty}\left[\frac{\Omega_{a,c}}{w_a - w_c}, \frac{\Omega_{b,a}}{w_b - w_a}\right] + \sum_{d\neq a,b,\infty}\left[\frac{\Omega_{a,b}}{w_a - w_b} + \frac{\Omega_{a,d}}{w_a - w_d}, \frac{\Omega_{b,d}}{w_b - w_d}\right] \\
&= \sum_{c\neq a,b,\infty}\left[\frac{\Omega_{a,c}}{w_a - w_c}, \frac{\Omega_{b,a}}{w_b - w_a}\right] + \sum_{d\neq a,b,\infty}\left[\frac{\Omega_{a,b}}{w_a - w_b} + \frac{\Omega_{a,d}}{w_a - w_d}, \frac{\Omega_{b,d}}{w_b - w_d}\right] \qquad (6.22)
\end{aligned}$$

であるが, ここで (6.22) の第 2 項を計算すると各 $d \neq a, b, \infty$ に対して

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\Omega_{a,b}}{w_a - w_b} + \frac{\Omega_{a,d}}{w_a - w_d}, \frac{\Omega_{b,d}}{w_b - w_d}\right] &= \frac{[\Omega_{a,b} + \Omega_{a,d}, \Omega_{b,d}]}{(w_a - w_b)(w_b - w_d)} + \left[\frac{(w_d - w_b)\Omega_{a,d}}{(w_a - w_b)(w_a - w_d)}, \frac{\Omega_{b,d}}{w_b - w_d}\right] \\
&= \left[\frac{\Omega_{a,d}}{w_a - w_d}, \frac{\Omega_{b,d}}{w_b - w_a}\right]
\end{aligned}$$

となる．従って (6.22) は

$$
\begin{aligned}
(6.22) &= \sum_{c\neq a,b,\infty}\left[\frac{\Omega_{a,c}}{w_a-w_c},\frac{\Omega_{b,a}}{w_b-w_a}\right]+\sum_{d\neq a,b,\infty}\left[\frac{\Omega_{a,d}}{w_a-w_d},\frac{\Omega_{b,d}}{w_b-w_a}\right]\\
&= \sum_{c\neq a,b,\infty}\left[\frac{\Omega_{a,c}}{w_a-w_c},\frac{\Omega_{b,a}}{w_b-w_a}+\frac{\Omega_{b,d}}{w_b-w_a}\right]\\
&= 0
\end{aligned}
$$

であり, ゆえに KZ 接続は可積分である． □

命題 6.26. 以下の可換図式が存在する:

$$
\begin{array}{ccc}
V_{X_A}(J_A) & \longrightarrow & \mathcal{V}_{X_A}(J_A)\\
{\scriptstyle\nabla_a^{KZ}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\nabla_a}\\
V_{X_A}(J_A) & \longrightarrow & \mathcal{V}_{X_A}(J_A)
\end{array}.
$$

ただし $V_{X_A}(J_A)\to\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ は包含写像 $V_{X_A}(J_A)\to\mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ と標準的な射影 $\mathcal{H}_{X_A}(J_A)\to\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ の合成であり, (6.11) よりこの写像は全射である．

証明. $f\otimes|u\rangle\in V_{X_A}(J_A)$ とする．これを $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ に射影して ∇_a を計算すれば

$$
\begin{aligned}
&\nabla_a(f\otimes|u\rangle)\\
&= (\partial_{w_a}f)\otimes|u\rangle+f\otimes\rho_a(L_{-1})|u\rangle\\
&= (\partial_{w_a}f)\otimes|u\rangle+f\otimes\frac{1}{2(l+2)}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\rho_a({}^{\circ}_{\circ}X_i(j)X^i(-j-1){}^{\circ}_{\circ})|u\rangle\\
&= (\partial_{w_a}f)\otimes|u\rangle+f\otimes\frac{2}{2(l+2)}\sum_{i=1}^{3}\rho_a(X_i(-1)X^i(0))|u\rangle\\
&\equiv (\partial_{w_a}f)\otimes|u\rangle-f\otimes\frac{1}{l+2}\sum_{b\neq a}\sum_{i=1}^{3}\rho_b(X_i\otimes(z-w_a)^{-1})\rho_a(X^i(0))|u\rangle\\
&= (\partial_{w_a}f)\otimes|u\rangle-f\otimes\frac{1}{l+2}\sum_{b\neq a,\infty}\frac{1}{w_b-w_a}\sum_{i=1}^{3}\rho_b(X_i(0))\rho_a(X^i(0))|u\rangle\\
&= (\partial_{w_a}f)\otimes|u\rangle-f\otimes\frac{1}{l+2}\sum_{b\neq a,\infty}\frac{\Omega_{b,a}}{w_b-w_a}|u\rangle\\
&= \left(\partial_{w_a}+\frac{1}{l+2}\sum_{b\neq a,\infty}\frac{\Omega_{a,b}}{w_a-w_b}\right)f\otimes|u\rangle\\
&= \nabla_a^{KZ}(f\otimes|u\rangle)
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

を得る．ただし上で $\equiv$ は $\mathcal{V}_{X_A}(J_A)$ での同値類の意味である．また (6.20) 式に注意すること． □

(6.19) で定義した KZ 接続は普通使われる KZ 方程式とは符号が異なっている．これは我々が余真空の層の上の接続を考えていたためであり, 真空の層の上に (6.12) の双対接続を考えれば KZ 方程式が得られる．

$\mathcal{H}^{\dagger}_{X_A}(J_A)$ 上の接続 ∇_a $(a\in\bar{A})$ を $f\in\mathcal{O}_{X_A}$, $\langle\phi|\in\mathcal{H}(J_A)^{\dagger}$ に対して,

$$
\nabla_a(f\otimes\langle\phi|)=(\partial_{w_a}f)\otimes\langle\phi|-f\otimes\langle\phi|\rho_a(L_{-1})
$$

と定義する．この接続は (6.12) で定義した接続の双対接続である．つまり，任意の $\langle\Phi| \in \mathcal{H}^{\dagger}_{X_A}(J_A)$, $|u\rangle \in \mathcal{H}_{X_A}(J_A)$ に対して ∇_a は次の等式を満す:

$$\partial_{w_a}\langle\Phi|u\rangle = (\nabla_a\langle\Phi|)|u\rangle + \langle\Phi|(\nabla_a|u\rangle).$$

定理 6.14 と同様に，この双対接続 ∇_a は $\mathcal{V}^{\dagger}_{X_A}(J_A)$ 上の可積分接続であることが証明できる．

さて，$\langle\Phi| \in \mathcal{V}^{\dagger}_{X_A}(J_A)$ であって $\nabla_a\langle\Phi| = 0$ を満すものを考えよう．$\nabla_a\langle\Phi| = 0$ を示すには任意の $|u\rangle \otimes f \in \mathcal{H}(J_A)$ に対して $(\nabla_a\langle\Phi|)(|u\rangle \otimes f) = 0$ を示せばいいが，命題 6.26 の全射

$$V_{X_A}(J_A) \to \mathcal{V}_{X_A}(J_A) \to 0$$

より，任意の定数函数 $|u\rangle \in V(J_A)$ に対して $(\nabla_a\langle\Phi|)|u\rangle = 0$ であれば十分である．この等式を命題 6.26 の証明と同様の方法で計算すれば，次の線型微分方程式

$$0 = (\nabla_a\langle\Phi|)|u\rangle = \partial_{w_a}(\langle\Phi|u\rangle) - \frac{1}{l+2}\sum_{b\neq a,\infty}\frac{\langle\Phi|\Omega_{a,b}|u\rangle}{w_a - w_b}$$

を得る．この微分方程式を Knizhnik-Zamolodchikov(KZ) 方程式という．これは確定特異点型の線型微分方程式でその解は超幾何函数によって記述されることがわかっており，共形ブロックの構造を調べる上でもまた特殊函数論や可積分系の研究においても重要な方程式である．

第7章　Factorization Propertyと真空の空間の次元

3 章では点が 3 点以下の場合に (余) 真空の空間の次元がどうなるか調べてみたが, 4 点以上の場合にどうなるかは考えなかった. このセクションでは (余) 真空の空間に対して factorization property と呼ばれる定理を示し, 4 点以上の場合の (余) 真空の空間が 3 点の場合から計算できることを示す.

7.1　設定

A, B を添字の集合とする. ただし, A は $0_A, \infty_A$, B は $0_B, \infty_B$ を含むとする. そして

$$\bar{A} = A - \{0_A\}, \quad \bar{B} = B - \{\infty_B\}$$

とおく. さらに

$$C = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \infty_C = \infty_A, \quad 0_C = 0_B$$

とする.

このセクションでは $|C|$ 個の点が乗った $\mathbb{P}^1$ を考えるが, そのとき $\bar{A}$ に対応する点は ∞ の近く, $\bar{B}$ に対応する点は 0 の近くにあるとする. そして $\mathbb{P}^1$ を $\bar{A}$ の点と $\bar{B}$ の点の間で引き延ばしていくことを考える. 引き延ばしていくとついには $\mathbb{P}^1$ は $\bar{A}$ の点と $\bar{B}$ の点の間で 2 つに分かれて 2 つの $\mathbb{P}^1$ を 1 点で張り付けた空間になる. その片方には $\bar{A}$ の点が乗っていて, もう片方には $\bar{B}$ の点が乗っている. この 2 つの $\mathbb{P}^1$ を貼り合わせた空間の上で (余) 真空の空間を考えると, それは $\bar{A}$ の点に加えて 0 にも点が乗っている $\mathbb{P}^1$ 上の (余) 真空の空間と $\bar{B}$ の点に加えて ∞ にも点が乗っている $\mathbb{P}^1$ 上の (余) 真空の空間から計算できる. (定理 7.9)

その後で (余) 真空の層が局所自由であること, つまり $\bar{A}$ の点と $\bar{B}$ の点の間を引き延ばして 2 つの $\mathbb{P}^1$ を 1 点で張り合わせた空間上の (余) 真空の空間と元の $\mathbb{P}^1$ の上の (余) 真空の空間が同じ次元であることを確かめる. (定理 7.20)

底空間 U, $U^\times$ と D を

$$U_A = \left\{ w_A \underset{\text{def}}{=} (w_{A,a})_{a\in A} \in (\mathbb{P}^1)^{|A|} \;\middle|\; \begin{array}{c} |w_{A,a}| > 2\,(a \neq 0_A, \infty_A) \\ w_{A,a} \neq w_{A,a'}\,(a \neq a') \\ w_{A,0_A} = 0, w_{A,\infty_A} = \infty_A \end{array} \right\}$$

$$U_B = \left\{ w_B \underset{\text{def}}{=} (w_{B,b})_{b\in B} \in (\mathbb{P}^1)^{|B|} \;\middle|\; \begin{array}{c} |w_{B,b}| < 1/2\,(b \neq 0_B, \infty_B) \\ w_{B,b} \neq w_{B,b'}\,(b \neq b') \\ w_{B,0_B} = 0, w_{B,\infty_B} = \infty_B \end{array} \right\}$$

$$U_q = \{q \in \mathbb{C} \mid |q| < 2\}, \quad U_q^\times = \{q \in U_q \mid q \neq 0\}$$

$$U = U_q \times U_A \times U_B, \quad U^\times = U_q^\times \times U_A \times U_B, \quad D = \{(0, w_A, w_B) \in U\}$$

図 7.1: $\mathbb{P}^1$ を引き延ばしていき 2 つの $\mathbb{P}^1$ に分割する

とし, 全空間 $C_U, C_{U^\times}, C_D$ を

$$
\begin{aligned}
C_U &= \left\{\left(q, w_A, w_B; \left[z_1^{(A)} : z_2^{(A)}\right], \left[z_1^{(B)} : z_2^{(B)}\right]\right) \in U \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \,\middle|\, z_1^{(A)} z_2^{(B)} = q z_2^{(A)} z_1^{(B)}\right\} \quad (7.1)\\
C_{U^\times} &= \left\{\left(q, w_A, w_B; \left[z_1^{(A)} : z_2^{(A)}\right], \left[z_1^{(B)} : z_2^{(B)}\right]\right) \in C_U \,\middle|\, q \neq 0\right\}\\
C_D &= \left\{\left(0, w_A, w_B; \left[z_1^{(A)} : z_2^{(A)}\right], \left[z_1^{(B)} : z_2^{(B)}\right]\right) \in C_U\right\}
\end{aligned}
$$

とする. ここで $\left[z_1^{(A)} : z_2^{(A)}\right], \left[z_1^{(B)} : z_2^{(B)}\right]$ は $\mathbb{P}^1$ の斉次座標であり, 非斉次座標を

$$z_A = \frac{z_1^{(A)}}{z_2^{(A)}}, \quad z_B = \frac{z_1^{(B)}}{z_2^{(B)}}$$

とおく. $\pi : C_U \longrightarrow U$ を射影とすると,

$$\pi(C_{U^\times}) = U^\times, \quad \pi(C_D) = D$$

である.

(7.1) における条件

$$z_1^{(A)} z_2^{(B)} = q z_2^{(A)} z_1^{(B)} \tag{7.2}$$

は $U^\times$ 上では非斉次座標を使えば $z_A = q z_B$ に他ならない. 従って z を $\mathbb{P}^1$ の非斉次座標として

$$
\begin{array}{ccc}
U^\times \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & C_{U^\times}\\
(q, w_A, w_B; z) & \mapsto & (q, w_A, w_B; qz, z)
\end{array}
$$

とすると, これは同型写像である. 一方 D 上では (7.2) は

$$z_1^{(A)} z_2^{(B)} = 0$$

となる. つまり $z_1^{(A)}, z_2^{(B)}$ のどちらかが 0 であるので, 任意の $(0, w_A, w_B) \in D$ に対して D 上のファイバー $\pi^{-1}((0, w_A, w_B))$ は次のような空間となる:

$$
\begin{aligned}
\pi^{-1}((0, w_A, w_B)) &= \left\{z_A \in \mathbb{P}^1, z_B = \infty\right\} \cup \left\{z_A = 0, z_B \in \mathbb{P}^1\right\} \quad (7.3)\\
&= \mathbb{P}^1_A \sqcup \mathbb{P}^1_B / (0_A = \infty_B).
\end{aligned}
$$

ここで $\mathbb{P}^1_A, \mathbb{P}^1_B$ はそれぞれ $\mathbb{P}^1$ であり, 0_A は $\mathbb{P}^1_A$ の 0 で ∞_B は $\mathbb{P}^1_B$ の ∞ とする. また $\mathbb{P}^1_A \sqcup \mathbb{P}^1_B/(0_A = \infty_B)$ は 2 つの $\mathbb{P}^1$ を $z_A = 0$ と $z_B = \infty$ で貼り合わせた空間とする.

$a \in \bar{A}$ に対して

$$\begin{array}{rcl} s_{A,a} : U & \longrightarrow & C_U \\ (q, w_A, w_B) & \mapsto & \left(q, w_A, w_B; \left[1 : w_{A,a}^{-1}\right], \left[1 : q w_{A,a}^{-1}\right]\right) \end{array}$$

とし, $b \in \bar{B}$ に対して

$$\begin{array}{rcl} s_{B,b} : U & \longrightarrow & C_U \\ (q, w_A, w_B) & \mapsto & (q, w_A, w_B; [q w_{B,b} : 1], [w_{B,b} : 1]) \end{array}$$

とする. これは $q = 0$ とすれば D 上でも

$$\begin{array}{rcl} s_{A,a}((0, w_A, w_B)) & = & (0, w_A, w_B; [w_{A,a} : 1], [1 : 0]) \\ s_{B,b}((0, w_A, w_B)) & = & (0, w_A, w_B; [0 : 1], [w_{B,b} : 1]) \end{array}$$

と well-defined である. また

$$\begin{array}{rcl} S_{A,a} & = & s_{A,a}(U), \quad S_{B,b} = s_{B,b}(U) \\ S_C & = & \bigcup_{a \in \bar{A}} S_{A,a} \cup \bigcup_{b \in \bar{B}} S_{B,b} \end{array}$$

とおく. また, 各 $a \in \bar{A}$ に対して, $S_{A,a}$ に零点を持つ $\mathcal{O}_{C_U}(*S_C)$ の切断 ξ_a を

$$\xi_a = \begin{cases} z_A - w_{A,a} & (a \neq \infty_A) \\ z_A^{-1} & (a = \infty_A) \end{cases}$$

とおく. 同様に各 $b \in \bar{B}$ に対して, $S_{B,b}$ に零点を持つ $\mathcal{O}_{C_U}(*S_C)$ の切断 ξ_b を

$$\xi_b = z_B - w_{B,b}$$

とおく.

$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ および, 各 $a \in \bar{A}$, $b \in \bar{B}$ に対して $j_{A,a}$, $j_{B,b} \in P_l$ を固定する. 6 章と同様に $X = U$, $U^\times$, D に対して以下のように Lie 代数とその表現を定義する:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\mathfrak{g}}_X & = & \bigoplus_{a \in C} \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_X((\xi_a)) \oplus \mathcal{O}_X c \\ \mathcal{H}_X(J_C) & = & \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{H}(J_C). \end{array}$$

ここで

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}(J_C) & = & \mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes \mathcal{H}(J_{\bar{B}}), \\ \mathcal{H}(J_{\bar{A}}) & = & \bigotimes_{a \in \bar{A}} \mathcal{H}_{j_{A,a}}, \\ \mathcal{H}(J_{\bar{B}}) & = & \bigotimes_{b \in \bar{B}} \mathcal{H}_{j_{B,b}} \end{array}$$

である. 各 $a \in C$ に対して S_a のまわりでの ξ_a による展開によって定義される $\mathcal{O}_X$ 加群としての埋め込み

$$\bigoplus_{a \in C} t_c : \pi_*(\mathcal{O}_{C_X}(*S_C)) \hookrightarrow \bigoplus_{a \in C} \mathcal{O}_X((\xi_a)) \oplus \mathcal{O}_X c$$

から Lie 代数の埋め込み

$$\mathfrak{g}\otimes\pi_*(\mathcal{O}_{C_X}(*S_C))\hookrightarrow\widehat{\mathfrak{g}}_X$$

を定義して, その像を $\widehat{\mathfrak{g}}_X^{out}$ とおく. そして $\mathcal{H}_X(J_C)$ 上の $\widehat{\mathfrak{g}}_X^{out}$ の作用による余真空の層と真空の層を

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_X(J_C) &= \mathcal{H}_X(J_C)/\widehat{\mathfrak{g}}_X^{out}\mathcal{H}_X(J_C)\\ \mathcal{V}_X^\dagger(J_C) &= \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{V}_X(J_C),\mathcal{O}_X)\end{aligned}$$

とおく. 真空の層について 6 章で示した命題 6.3 および命題 6.10 はここで考えた場合にも証明を含めてそのまま成立する.

命題 7.1. 任意の $x=(q,w_A,w_B)\in X$ に対して

$$\mathcal{V}_X(J_C)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbb{C}_x\simeq\mathcal{V}_{\pi^{-1}(x),w_C}(J_C)$$

が成立する. ただし, ここで $w_C=(w_A,w_B)$ とし $\mathcal{V}_{\pi^{-1}(x),w_C}(J_C)$ は代数曲線 $\pi^{-1}(x)$ 上で考えた余真空の空間であり, これは $x\in U^\times$ の場合には $\pi^{-1}(x)=\mathbb{P}^1$ であるので $\mathcal{V}_{w_C}(J_C)$ であるが, $x\in D$ の場合には $\pi^{-1}(x)=\mathbb{P}^1_A\sqcup\mathbb{P}^1_B/(0_A=\infty_B)$ で考えるものとする.

証明. 局所的な命題なので $X=U$, $U^\times$, $x\in U^\times$ の場合には命題 6.3 がそのまま成立する.

$X=U$, D で $x\in D$ の場合にも任意の $k\geq 1$ に対して

$$\pi_*(\mathcal{O}_{C_X}(kS_C))\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbb{C}_x\simeq H^0(\pi^{-1}(x),\mathcal{O}_{\pi^{-1}(x)}(kw_C))$$

が成立することを示す. 各 $a\in\bar{A}$, $b\in\bar{B}$ と n $(1\leq n\leq k)$ に対して次の $\pi^{-1}(x)$ 上の函数が存在する:

$$\begin{cases} z_A^n & (\text{on } \mathbb{P}^1_A)\\ 0 & (\text{on } \mathbb{P}^1_B)\end{cases}, \tag{7.4}$$

$$\begin{cases} (z_A-w_{A,a})^{-n}-(-w_{A,a})^{-n} & (\text{on } \mathbb{P}^1_A)\\ 0 & (\text{on } \mathbb{P}^1_B)\end{cases}, \tag{7.5}$$

$$\begin{cases} 0 & (\text{on } \mathbb{P}^1_A)\\ (z_B-w_{B,b})^{-n} & (\text{on } \mathbb{P}^1_B)\end{cases}. \tag{7.6}$$

これらと定数函数 1 を合わせたものは $H^0(\pi^{-1}(x),\mathcal{O}_{\pi^{-1}(x)}(kw_C))$ の基底を成す.

$U\times\mathbb{P}^1_A\times\mathbb{P}^1_B$ 上の有理函数 z_A^n, $(z_A-w_{A,a})^{-n}-(-w_{A,a})^{-n}$, $(z_B-w_{B,b})^{-n}$ の C_X 上への制限は x の近傍で定義された $\pi_*(\mathcal{O}_{C_X}(kS_C))$ の切断とみなすことができ, それらが代表する $\pi_*(\mathcal{O}_{C_X}(kS_C))\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbb{C}_x$ での同値類はそれぞれ (7.4), (7.5), (7.6) に一致している. この結果を使えば $X=U$, D, $x\in D$ の場合にも命題 6.3 の証明がそのまま適用できる. □

命題 7.1 の証明と同様に

$$\mathcal{V}_U(J_C)\otimes_{\mathcal{O}_U}\mathcal{O}_D\simeq\mathcal{V}_D(J_C)$$

が言える.

命題 7.2. $\mathcal{V}_X(J_C)$ は連接な $\mathcal{O}_X$ 加群である.

証明. 証明は 6.2 節の議論がほぼそのまま成立する. □

余真空の層の局所自由性についても考えてみよう. $\mathcal{V}_U(J_C)$ の局所自由性については 7.3 章において詳しく調べる. $\mathcal{V}_{U^\times}(J_C)$ については 系 6.22 の証明と同様の議論で次の命題が示される.

命題 7.3. $\mathcal{V}_{U^\times}(J_C)$ は局所自由である.

7.2 Factorization Property

定理 6.14 で定義された可積分接続は $\mathcal{V}_{U^\times}(J_C)$ 上には定義されるが, これを U 全体に拡張することはできない. $\mathcal{V}_U(J_C)$ が局所自由であることを示すのに, まず D 上で $\mathcal{V}_D(J_C)$ がどのようになるかを調べ, “factorization property” と呼ばれる定理を証明する.

$$\begin{array}{rcll} \tilde{C}_{D,A} & = & D \times \mathbb{P}^1_A & \\ \tilde{\pi}_{D,A} : \tilde{C}_{D,A} & \to & D & (\text{第 1 成分への射影}) \\ \tilde{C}_{D,B} & = & D \times \mathbb{P}^1_B & \\ \tilde{\pi}_{D,B} : \tilde{C}_{D,B} & \to & D & (\text{第 1 成分への射影}) \end{array}$$

とする. 表現空間の層を次の様におく:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D(J_{\bar{A}}, j) &= \mathcal{O}_D \otimes (\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes \mathcal{H}_j) \\ \mathcal{H}_D(j, J_{\bar{B}}) &= \mathcal{O}_D \otimes (\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}(J_{\bar{B}})) . \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_D(J_{\bar{A}}, j)$ には Lie 代数

$$\bigoplus_{a \in \bar{A}} \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_D((\xi_a)) \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_D((z_A)) \oplus \mathcal{O}_D c$$

が次のように作用している: $\sum_{a \in \bar{A}} X_a \otimes f_a(\xi_a) + X_{0_A} \otimes f_{0_A}(z_A)$ ($X_a \otimes f_a(\xi_a) \in \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_D((\xi_a))$, $X_{0_A} \otimes f_{0_A}(z_A) \in \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_D((z_A))$), $|\bigotimes_{a \in \bar{A}} u_a \otimes u_{0_A}\rangle \in \mathcal{H}_D(J_{\bar{A}}, j)$ ($u_a \in \mathcal{H}_{j_a}$, $u_{0_A} \in \mathcal{H}_j$) に対し,

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{a \in \bar{A}} X_a \otimes f_a(\xi_a) + X_0 \otimes f_0(z_A) \right) |\bigotimes_{a \in \bar{A}} u_a \otimes u_{0_A}\rangle = \\ &\qquad \sum_{a \in \bar{A}} |\bigotimes_{\substack{a' \in \bar{A} \\ a' \neq a}} u_{a'} \otimes (\rho_a(X_a \otimes f_a(\xi_a)) u_a) \otimes u_{0_A}\rangle + |\bigotimes_{a \in \bar{A}} u_a \otimes (\rho_{0_A}(X_{0_A} \otimes f_{0_A}(z_A)) u_{0_A})\rangle. \end{aligned}$$

と作用する. 同様に $\mathcal{H}_D(j, J_{\bar{B}})$ には Lie 代数

$$\bigoplus_{b \in \bar{B}} \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_D((\xi_b)) \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_D((z_B^{-1})) \oplus \mathcal{O}_D c$$

が次のように作用している: $X_b \otimes f_b(\xi_b) \in \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_D((\xi_b))$ と

$$X_{\infty_B} \otimes f_{\infty_B}(z_B^{-1}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_{\infty_B} \otimes f^{(n)}_{\infty_B} z_B^{-n} \in \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_D((z_B^{-1})) \quad (f^{(n)}_{\infty_B} \in \mathcal{O}_D)$$

に対して $\sum_{b \in \bar{B}} X_b \otimes f_b(\xi_b) + X_{\infty_B} \otimes f_{\infty_B}(z_B^{-1})$ は $|u_{\infty_B} \otimes \bigotimes_{b \in \bar{B}} u_b\rangle \in \mathcal{H}_D(j, J_{\bar{B}})$ ($u_b \in \mathcal{H}_{j_b}$, $u_{\infty_B} \in \mathcal{H}_j$) に,

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{b \in \bar{B}} X_b \otimes f_b(\xi_b) + X_{\infty_B} \otimes f_{\infty_B}(z_B^{-1}) \right) |\bigotimes_{b \in \bar{B}} u_b \otimes u_{\infty_B}\rangle = \\ &\qquad \sum_{b \in \bar{B}} |u_{\infty_B} \otimes \bigotimes_{\substack{b' \in \bar{B} \\ b' \neq b}} u_{b'} \otimes (\rho_b(X_b \otimes f_b(\xi_b)) u_b)\rangle + |(\rho_{\infty_B}(X_{\infty_B} \otimes f_{\infty_B}(z_B^{-1})) u_{\infty_B}) \otimes \bigotimes_{b \in \bar{B}} u_b\rangle \end{aligned}$$

と作用する. ただし, 上で

$$\begin{aligned} \rho_{\infty_B}(X_{\infty_B} \otimes f_{\infty_B}(z_B^{-1}) u_{\infty_B} &= \operatorname*{Res}_{z_B = \infty_B} \left(X(z_B) f_{\infty_B}(z_B^{-1}) d z_B^{-1} \right) u_{\infty_B} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^{(n)}_{\infty_B} X_{\infty_B}(n) u_{\infty_B} \end{aligned}$$

である.

さて各点での Laurent 級数展開によって Lie 代数としての埋め込み

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}\otimes(\tilde{\pi}_{D,A})_*(\mathcal{O}_{\tilde{C}_{D,A}}(*S_{\bar{A}}+*[0_A])) &\to \bigoplus_{a\in\bar{A}}\mathfrak{g}\otimes\mathcal{O}_D((\xi_a))\oplus\mathfrak{g}\otimes\mathcal{O}_D((z_A))\oplus\mathcal{O}_D c\\ \mathfrak{g}\otimes(\tilde{\pi}_{D,B})_*(\mathcal{O}_{\tilde{C}_{D,B}}(*S_{\bar{B}}+*[\infty_B])) &\to \bigoplus_{b\in\bar{B}}\mathfrak{g}\otimes\mathcal{O}_D((\xi_a))\oplus\mathfrak{g}\otimes\mathcal{O}_D((z_B^{-1}))\oplus\mathcal{O}_D c\end{aligned}$$

を考えて, その像をそれぞれ $\widehat{\mathfrak{g}}_{D,A}^{out}$, $\widehat{\mathfrak{g}}_{D,B}^{out}$ とおく. そこで $\widehat{\mathfrak{g}}_{D,A}^{out}$, $\widehat{\mathfrak{g}}_{D,B}^{out}$ の $\mathcal{H}_D(J_{\bar{A}},j)$, $\mathcal{H}_D(j,J_{\bar{B}})$ への作用の coinvariant の空間を

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{D,A}(J_{\bar{A}},j) &= \mathcal{H}_D(J_{\bar{A}},j)/\widehat{\mathfrak{g}}_{D,A}^{out}(\mathcal{H}_D(J_{\bar{A}},j))\\ \mathcal{V}_{D,B}(j,J_{\bar{B}}) &= \mathcal{H}_D(j,J_{\bar{B}})/\widehat{\mathfrak{g}}_{D,B}^{out}(\mathcal{H}_D(j,J_{\bar{B}}))\end{aligned}$$

と定義して $\mathcal{V}_D(J_C)$ とは異なる余真空の層 $\mathcal{V}_{D,A}(J_{\bar{A}},j)$, $\mathcal{V}_{D,B}(j,J_{\bar{B}})$ を構成する. このとき

$$\begin{aligned}\iota:\mathcal{H}_D(J_C) &\longrightarrow \bigoplus_{j\in P_l}\mathcal{V}_{D,A}(J_{\bar{A}},j)\otimes\mathcal{V}_{D,B}(j,J_{\bar{B}})\\ |u\otimes v\rangle &\mapsto \sum_j|u\otimes\omega_j\otimes v\rangle\end{aligned}\tag{7.7}$$

と言う写像を定義する. ただし, 上で ω_j は

$$\omega_j=\sum_i u_{0,i}\otimes u_0^i\in V_j\otimes V_j\subset\mathcal{H}_j\otimes\mathcal{H}_j$$

とし, ここで $\{u_{0,i}\}$ は V_j の基底であり $\{u_0^i\}$ はその不変内積 (p. 45) に関する双対基底とする. 次の補題の証明は, 後の補題 7.14 と同様である.

補題 7.4. 任意の $X\in\mathfrak{g}$ に対して

$$(\rho_{0_A}(X)+\rho_{\infty_B}(X))\,\omega_j=0$$

命題 7.5. (7.7) の写像 ι は余真空の層からの写像

$$\iota:\mathcal{V}_D(J_C)\longrightarrow\bigoplus_{j\in P_l}\mathcal{V}_{D,A}(J_{\bar{A}},j)\otimes\mathcal{V}_{D,B}(j,J_{\bar{B}})$$

を誘導する.

証明. $\iota(\widehat{\mathfrak{g}}_D^{out}\mathcal{H}_D(J_C))=0$ を示せばよい. $u\in\mathcal{H}_D(J_{\bar{A}})$, $v\in\mathcal{H}_D(J_{\bar{B}})$, $X\otimes f\in\widehat{\mathfrak{g}}_D^{out}$ とする. f は $0_A=\infty_B$ で正則であり, $f(0_A)=f(\infty_B)$ である. よって補題 7.4 より

$$\begin{aligned}(\rho_{0_A}(X\otimes f)+\rho_{\infty_B}(X\otimes f))\,\omega_j &= f(0_A)\,(\rho_{0_A}(X)+\rho_{\infty_B}(X))\,\omega_j\\ &= 0\end{aligned}$$

であるので, これを用いて

$$\begin{aligned}\iota(X\otimes f|u\otimes v\rangle) &= \iota\Bigg(\sum_{a\in\bar{A}}|\rho_a(X\otimes f)u\otimes v\rangle+\sum_{b\in\bar{B}}|u\otimes\rho_b(X\otimes f)v\rangle\Bigg)\\ &= \sum_{a\in\bar{A}}\sum_{j\in P_l}|\rho_a(X\otimes f)u\otimes\omega_j\otimes v\rangle+\sum_{b\in\bar{B}}\sum_{j\in P_l}|u\otimes\omega_j\otimes\rho_b(X\otimes f)v\rangle\\ &= \sum_{a\in A\cup B}\sum_{j\in P_l}\rho_a(X\otimes f)|u\otimes\omega_j\otimes v\rangle\\ &= (X\otimes f)\sum_{j\in P_l}|u\otimes\omega_j\otimes v\rangle\\ &= 0\end{aligned}$$

を得る. □

命題 7.5 で定義された写像が同型になることを示すのがここでの目的である．定理の証明のためにチャージ付きの余真空の空間と呼ばれるベクトル空間を導入する．$H^0(\mathbb{P}^1_A, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_A}(*w_{\bar{A}} - [0_A]))$ は $\mathbb{P}^1_A$ 上の有理函数で 0_A に零点を持ち, $w_{\bar{A}}$ にのみ極を持つもの全体とする．Lie 代数としての埋め込み

$$\mathfrak{g} \otimes H^0(\mathbb{P}^1_A, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_A}(*w_{\bar{A}} - [0_A])) \hookrightarrow \bigoplus_{a \in \bar{A}} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi_a)) \oplus \mathbb{C}c$$

の像を $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0}$ とし, 表現空間 $\mathcal{H}(J_{\bar{A}})$ 上の $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0}$ の作用に対する coinvariant の空間

$$\mathcal{V}_{w_A,0}(J_A) = \mathcal{H}(J_{\bar{A}})/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0}\mathcal{H}(J_{\bar{A}})$$

をチャージ付きの余真空の空間と呼ぶ．また同様に

$$\mathfrak{g} \otimes H^0(\mathbb{P}^1_B, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_B}(*w_{\bar{B}} - [\infty_B])) \hookrightarrow \bigoplus_{b \in \bar{B}} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi_b)) \oplus \mathbb{C}c$$

の像を $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_B,0}$ とし, 表現空間 $\mathcal{H}(J_{\bar{B}})$ 上の $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_B,0}$ の作用の coinvariant の空間
$\mathcal{H}(J_{\bar{B}})/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_B,0}\mathcal{H}(J_{\bar{B}})$ も考える．すると真空の伝播 (定理 5.2) に類似した命題が成立する．そのためにもうひとつ補題を用意しておこう．補題の証明には Wedderburn の定理を用いる．

補題 7.6 (Wedderburn の定理の系). 代数閉体 K 上の 1 を持つ有限次元半単純結合代数 A の既約表現の同型類の完全代表系を $V_i \simeq K^{n_i}$ $(i = 1, \ldots, h)$ とするとき, K 上の代数の同型

$$\begin{aligned} A &\simeq \mathrm{Hom}_K(V_1, V_1) \times \cdots \times \mathrm{Hom}_K(V_h, V_h) \\ &\simeq M_{n_1}(K) \times \cdots \times M_{n_h}(K) \end{aligned}$$

が存在する．ここで $M_{n_i}(K)$ は K 上の n_i 次の全行列環である．

補題の証明は [山崎] 定理 7.30 (p.505) や [寺田原田] 定理 2.36 (p.159) などを参照せよ．

一般に結合代数 A_1, A_2 の直積 $A_1 \times A_2$ の既約表現は A_2 が自明に作用する A_1 の既約表現または A_1 の自明に作用する A_2 の既約表現に同型になる．よって補題 7.6 の結論の形の結合代数 A の既約表現は $V_i = K^{n_i} (i = 1, \ldots, h)$ のどれかに同型である．ただし K^{n_i} には $M_{n_1}(K) \times \cdots \times M_{n_h}(K)$ の第 i 成分が縦ベクトルの空間とみなされた K^{n_i} に自然に作用し, 他の成分は自明に作用するものとする．

補題 7.7. $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアル I を

$$I = \{x \in U(\mathfrak{g}) \mid xV_j = 0 \quad (0 \le j \le l/2)\}$$

とする．このとき, 結合代数としての同型

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{g})/I &\simeq \bigoplus_{j \in P_l} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_j, V_j) \\ &\simeq \bigoplus_{j \in P_l} V_j \otimes V_j^* \end{aligned}$$

が存在する．

証明．この証明は [Li] によるものである．

まず $A \underset{\mathrm{def}}{=} U(\mathfrak{g})/I$ が有限次元の代数である事に注意しよう．なぜならば, $U(\mathfrak{g})$ の表現 $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to \bigoplus_{j \in P_l} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_j, V_j)$ から ($\varphi(I) = 0$ なので)A の表現 $A \to \bigoplus_{j \in P_l} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_j, V_j)$ が誘導されるが, I の定義よりこの表現は忠実である．一方, $\bigoplus_{j \in P_l} V_j$ は有限次元表現なので, A は有限次元代数である．従って補題 7.6 より A が半単純結合代数であることと, A の既約表現が V_j $(j \in P_l)$ であることを示せば求める同型を得る．

まず, M を 0 でない任意の A 加群とするとき, M はある V_j $(j \in P_l)$ を含むことを示す. $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $E^r M \neq 0$, $E^{r+1}M = 0$ となるようにとる. $E^{l+1} \in I$ ゆえ $E^{l+1}M = 0$, 従って $r \leq l$ である. $r = 0$ のとき, $HM = [E, F]\,M = 0$, $FM = 1/2\,[F, H]\,M = 0$ より M は V_0 を含む. 一方, $r \neq 0$ とすると

$$\left[E^{r+1}, F\right] = (r+1)(H-r)E^r$$

ゆえ, 任意の $u \in E^r M$ は $Eu = 0$ かつ $Hu = ru$ である. 従って u から生成される M の部分加群は $V_{r/2}$ に同型である. 特に M が既約ならば, M は V_j $(j \in P_l)$ のいずれかに同型である.

A が半単純であることを示すには, 任意の A 加群 M が完全可約であることを示せばいい. M' を M の V_j $(j \in P_l)$ と同型な全ての部分加群の和とする. $M = M'$ を示せばいい. そうでないと仮定すると, 上で証明した事を商加群 $M/M' \neq 0$ に適用すれば, M の部分加群 W で W/M' がある V_j $(j \in P_l)$ に同型なものが存在する. W/M', M' 上では E, F の作用は巾零であるので, W 上で E, F の作用は巾零である. 従って W は $\mathfrak{g}$ 加群として可積分なので, ある既約部分加群 M'' が存在して $W = M' \oplus M''$ となる. ところで W/M' はある V_j $(j \in P_l)$ と同型であったから,

$$M'' \simeq W/M' \simeq V_j$$

となり, これは M' の定義に反する. 従って M は完全可約である.

従って補題 7.6 より求める同型を得る. □

この補題はイデアル I をイデアル $\langle E^{l+1}\rangle$ で置き換えてもそのまま成立し, 結果として $I = \langle E^{l+1}\rangle$ が示せる. 実際 [Li], Prop. 5.1.1 では $\langle E^{l+1}\rangle$ の場合に同じ証明で補題を証明している.

命題 7.8. 次のベクトル空間の同型が存在する:

$$\mathcal{H}(J_{\bar{A}})/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0}\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \simeq \bigoplus_{j \in P_l} \mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j) \otimes V_j^* \tag{7.8}$$

$$\mathcal{H}(J_{\bar{B}})/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_B,0}\mathcal{H}(J_{\bar{B}}) \simeq \bigoplus_{j \in P_l} V_j^* \otimes \mathcal{V}_{w_B}(j, J_{\bar{B}}) \tag{7.9}$$

ただし, ここで $\mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j)$, $\mathcal{V}_{w_B}(j, J_{\bar{B}})$ は $\mathcal{V}_{D,A}(J_{\bar{A}}, j)$, $\mathcal{V}_{D,B}(j, J_{\bar{B}})$ の $x = (0, w_A, w_B) \in D$ での特殊化

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j) &= \mathcal{V}_{D,A}(J_{\bar{A}}, j) \otimes_{\mathcal{O}_D} \mathbb{C}_x \\
&= \mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes \mathcal{H}_j / \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes \mathcal{H}_j) \\
\mathcal{V}_{w_B}(j, J_{\bar{B}}) &= \mathcal{V}_{D,B}(j, J_{\bar{B}}) \otimes_{\mathcal{O}_D} \mathbb{C}_x \\
&= \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}(J_{\bar{B}}) / \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_B}(\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}(J_{\bar{B}}))
\end{aligned}$$

である.

証明. 証明の基本的な部分は定理 5.2 と同様である.

Step 1. まず

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 &= \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A} \\
\mathfrak{A}_2 &= \bigoplus_{a \in \bar{A}} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi_a)) \oplus \mathfrak{g} \otimes z_A \mathbb{C}[[z_A]] \oplus \mathbb{C}c \\
V &= \mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes \mathbb{C} \cdot 1
\end{aligned}$$

として補題 3.4 を用いる. ただし, $\mathfrak{A}_2$ の V 上の作用では $\mathfrak{g} \otimes z_A\mathbb{C}[[z_A]]$ は $\mathbb{C} \cdot 1$ に自明に作用するものと

する．すると

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 & = & \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0} \\ \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 & = & \bigoplus_{a \in \bar{A}} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi_a)) \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z_A)) \oplus \mathbb{C}c \\ \tilde{V} & = & \mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes U \\ U & \underset{\text{def}}{=} & U(\widehat{\mathfrak{g}}^{f\prime})/(U(\widehat{\mathfrak{g}}^{f\prime})\widehat{\mathfrak{g}}^{f}_{>0} + U(\widehat{\mathfrak{g}}^{f\prime})(c-l)) \end{array}$$

である．ただし上で

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{g}}^{f\prime} &= \left[\widehat{\mathfrak{g}}^{f}, \widehat{\mathfrak{g}}^{f}\right] \\ &= \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z_A, z_A^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \subset \widehat{\mathfrak{g}}^{f} \end{aligned}$$

とする．補題 3.4 よりベクトル空間の同型

$$\mathcal{V}_{w_A,0}(J_A) \simeq \mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes U / \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes U) \tag{7.10}$$

を得る．また U は

$$U(\widehat{\mathfrak{g}}^{f\prime}) \simeq U(\widehat{\mathfrak{g}}^{f}_{<0}) \otimes U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[c] \otimes U(\widehat{\mathfrak{g}}^{f}_{>0})$$

を用いてベクトル空間として

$$U \simeq U(\widehat{\mathfrak{g}}^{f}_{<0}) \otimes U(\mathfrak{g})$$

となる．

Step 2. $\mathcal{H}(J_{\bar{A}})$ 上には $\mathfrak{g}$ が $X \in \mathfrak{g}$ と $|u\rangle \in \mathcal{H}(J_{\bar{A}})$ に対して

$$X|u\rangle = \sum_{a \in \bar{A}} \rho_a(X)|u\rangle \tag{7.11}$$

で作用しているが, $\left[\mathfrak{g}, \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0}\right] \subset \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0}$ ゆえ $\mathcal{V}_{w_A,0}(J_A)$ 上に $\mathfrak{g}$ の作用が誘導される．このとき $\mathfrak{g}$ 加群としての既約分解が

$$\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) / \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0}\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) = \bigoplus_{j \in P_l} V_j^{\oplus n_j} \quad (n_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{7.12}$$

となることを示す．

まず, $\mathcal{V}_{w_A,0}(J_A)$ が有限次元であることを定理 3.6 と同様の証明で示す．

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{A} & = & \widehat{\mathfrak{g}}_{\bar{A}} \\ \mathfrak{A}_1 & = & \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0} = \mathfrak{g} \otimes H^0(\mathbb{P}^1_A, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_A}(*w_{\bar{A}} - [0_A])) \\ \mathfrak{A}_2 & = & \bigoplus_{a \in \bar{A}} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[\xi_a]] \oplus \mathbb{C}c \\ V & = & V(J_{\bar{A}}) \end{array}$$

として補題 3.4 を適用する．すると $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = 0$ であるので, 補題 3.4 よりベクトル空間の同型 $V(J_{\bar{A}}) \simeq M(J_{\bar{A}})/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0}M(J_{\bar{A}})$ を得る．従って $M(J_{\bar{A}})/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0}M(J_{\bar{A}})$ は有限次元である．一方, $\mathcal{V}_{w_A,0}(J_A)$ は $M(J_{\bar{A}})/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0}M(J_{\bar{A}})$ の商ベクトル空間なので $\mathcal{V}_{w_A,0}(J_A)$ も有限次元である．

よって $\mathcal{V}_{w_A,0}(J_A)$ は $\mathfrak{g}$ の有限次元表現なので

$$\mathcal{V}_{w_A,0}(J_A) = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}} V_j^{\oplus n_j} \tag{7.13}$$

と直和分解できる. $j \notin P_l$ のとき $n_j = 0$ を示せばいい. そこで $\mathcal{V}^\dagger_{w_A,0}(J_A) = \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_{w_A,0}(J_A), \mathbb{C})$ とおこう. つまり,

$$\mathcal{V}^\dagger_{w_A,0}(J_A) = \left\{ \langle\Phi| \in \mathcal{H}(J_{\bar{A}})^\dagger \;\middle|\; \langle\Phi| \sum_{a\in\bar{A}} \rho_a(X\otimes f) = 0 \quad (\forall X\otimes f \in \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0}) \right\}$$

である. $\mathcal{H}(J_{\bar{A}})^\dagger$ には $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の右表現が定義される. つまり $X(n) \in \widehat{\mathfrak{g}}^f$ と $\langle\Phi| \in \mathcal{H}(J_{\bar{A}})^\dagger$, $|u\rangle \in \mathcal{H}(J_{\bar{A}})$ に対して

$$(\langle\Phi|X(n))|u\rangle = \sum_{a\in\bar{A}} \langle\Phi|\rho_a(X\otimes z^{-n})|u\rangle$$

とする. この表現において $n < 0$ のとき $X \otimes z^{-n} \in \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0}$ なので $\langle\Phi| \in \mathcal{V}^\dagger_{w_A,0}(J_A)$ ならば $\langle\Phi|X(n) = 0$ であり, また $n = 0$ のとき (7.11) で定義した $\mathfrak{g}$ の表現の双対表現に一致する. 従って $\widehat{\mathcal{V}}^\dagger_{w_A,0}(J_A)$ を $\mathcal{V}^\dagger_{w_A,0}(J_A)$ から生成される $\mathcal{H}(J_{\bar{A}})^\dagger$ の右 $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ 部分加群

$$\widehat{\mathcal{V}}^\dagger_{w_A,0}(J_A) = \mathcal{V}^\dagger_{w_A,0}(J_A)U(\widehat{\mathfrak{g}}^f) = \sum_{\langle\Phi|\in\mathcal{V}^\dagger_{w_A,0}(J_A)} \langle\Phi|U(\widehat{\mathfrak{g}}^f)$$

と定義すると

$$\widehat{\mathcal{V}}^\dagger_{w_A,0}(J_A) = \mathcal{V}^\dagger_{w_A,0}(J_A)U(\widehat{\mathfrak{g}}^f_{>0}) \tag{7.14}$$

となる. (7.14) より $\widehat{\mathcal{V}}^\dagger_{w_A,0}(J_A)$ の双対表現を考えればそれは category $\mathcal{O}$ に含まれる.

さらに $\widehat{\mathcal{V}}^\dagger_{w_A,0}(J_A)$ は $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の可積分表現の双対表現になることを示そう. 任意の $a \in \bar{A}$ に対して $\mathcal{H}_{j_a}$ が可積分表現なので, 任意の $u \in \mathcal{H}(J_{\bar{A}})$ に対して n を十分大きくとると

$$\rho_a(E\otimes z)^k|u\rangle = 0 \qquad \left(k > \frac{n}{|\bar{A}|}\right)$$

が成立する. 従って任意の $\langle\Phi| \in \widehat{\mathcal{V}}^\dagger_{w_A,0}(J_A)$ に対して

$$\begin{aligned}(\langle\Phi|E(-1)^n)|u\rangle &= (-1)^n \sum_{\sum_a n_a = n} \frac{n!}{\prod_a n_a!} \langle\Phi| \prod_{a\in\bar{A}} \rho_a(E\otimes z)^{n_a}|u\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

となる. よって $\widehat{\mathcal{V}}^\dagger_{w_A,0}(J_A)$ は $\widehat{\mathfrak{g}}^f$ の可積分表現である.

従って事実 2.34, 事実 2.48 より $\widehat{\mathcal{V}}^\dagger_{w_A,0}(J_A)$ は

$$\widehat{\mathcal{V}}^\dagger_{w_A,0}(J_A) = \bigoplus_{j\in P_l} (\mathcal{H}^\dagger_j)^{\oplus n'_j}$$

と直和分解できる. 一方 (7.13) より

$$\mathcal{V}^\dagger_{w_A,0}(J_A) = \bigoplus_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}} (V^*_j)^{\oplus n_j}$$

であり, (7.14) より上で全ての j に対して $n'_j = n_j$ が成り立つ. つまり $j \notin P_l$ なる j に対して $n_j = 0$ である.

Step 3. Step 2 の $\mathfrak{g}$ の表現 (7.11) は Step 1 の同型 (7.10) を用いれば
$\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes U/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes U)$ 上で $X \in \mathfrak{g}$ と $u \in \mathcal{H}(J_{\bar{A}})$, $x \in U$ に対して

$$X(u\otimes x) = u \otimes xS(X) \tag{7.15}$$

と作用する．ここで S は (2.20) で定義した $U(\mathfrak{g})$ の反同型写像である．実際, $x = X_1(n_1)\cdots X_k(n_k)$ $(X_i(n_i) \in \widehat{\mathfrak{g}}^f)$ とし, $\rho_{\bar{A}} = \sum_{a\in\bar{A}} \rho_a$ とおくと mod $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes U)$ で

$$
\begin{aligned}
X(u \otimes x) &= X(u \otimes \rho_{0_A}(X_1 \otimes z^{n_1})X_2(n_2)\cdots X_k(n_k))\\
&\equiv X(\rho_{\bar{A}}(-X_1 \otimes z^{n_1})u \otimes X_2(n_2)\cdots X_k(n_k))\\
&\quad\vdots\\
&\equiv X(\rho_{\bar{A}}((-X_k \otimes z^{n_k})\cdots(-X_1 \otimes z^{n_1}))u \otimes 1)\\
&\equiv \rho_{\bar{A}}(X(-X_k \otimes z^{n_k})\cdots(-X_1 \otimes z^{n_1}))u \otimes 1\\
&\equiv \rho_{\bar{A}}((-X_k \otimes z^{n_k})\cdots(-X_1 \otimes z^{n_1}))u \otimes S(X)\\
&\quad\vdots\\
&\equiv u \otimes x \cdot S(X)
\end{aligned}
$$

である．

Step 4. ベクトル空間の同型

$$\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes U/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes U) \simeq \mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes (U/U(\widehat{\mathfrak{g}}^{f\prime})I)/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes (U/U(\widehat{\mathfrak{g}}^{f\prime})I)) \tag{7.16}$$

を示す．ここで I は補題 7.7 で定義した $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルである．

任意の $u \in \mathcal{H}(J_{\bar{A}})$ と $x \in U(\widehat{\mathfrak{g}}^{f\prime})$, $y \in I$ に対して $u \otimes xy$ が mod $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes U)$ で 0 になればいい．しかし, mod $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes U)$ によって x は u への左作用とすることができるので $x = 1$ としても構わない．さらに $u \in V(J_{\bar{A}})$ について考えれば十分であることを帰納法で示そう．$u' \in F_p\mathcal{H}(J_{\bar{A}})$ と $X(-n) \in \widehat{\mathfrak{g}}^f$ $(n > 0)$ によって $u = \rho_a(X(-n))u'$ とする．各 $a \in \bar{A}$ に対して

$$f_a^{(n)} = \begin{cases} (z - w_a)^{-n} - (-w_a)^{-n} & a \neq \infty_A \\ z^n & a = \infty_A \end{cases}$$

とおくと $f_a^{(n)}$ は $z = w_a$(または $z = \infty_A$) に n 位の極を持ち, 他の $\bar{A}$ の点では正則で $z = 0$ で零点を持つ有理函数である．従って

$$
\begin{aligned}
u \otimes y &= \rho_a(X(-n))u' \otimes y\\
&\equiv -\sum_{a' \neq a, 0} \rho_{a'}(X \otimes f_a^{(n)})u' \otimes y
\end{aligned}
$$

となるが, $f_a^{(n)}$ は $z = w_{a'}$(または $z = \infty_A$) で正則なので

$$\rho_{a'}(X \otimes f_a^{(n)})u' \in F_p\mathcal{H}(J_{\bar{A}})$$

である．従って p について帰納的に $F_0\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) = V(J_{\bar{A}})$ にまで帰着できる．よって $u \in V(J_{\bar{A}})$, $y \in I$ に対して

$$u \otimes y \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes U)$$

を示せばいいが, Step 3 の $\mathfrak{g}$ の表現を用いれば,

$$u \otimes y = S(y)(u \otimes 1)$$

である．ここで I は両側イデアル $I = \langle E^{l+1} \rangle$ なので $y \in I$ のとき $S(y) \in I$ であり, この表現は Step 2 より (7.12) の分解を持つので

$$S(y)(u \otimes 1) \equiv 0$$

である．これで (7.16) の成立が示せた．

Step 5. 補題 7.7 を用いてベクトル空間の同型

$$
\begin{aligned}
U/U(\widehat{\mathfrak{g}}^{f\prime})I &\simeq U(\widehat{\mathfrak{g}}^{f}_{<0}) \otimes (U(\mathfrak{g})/I) \\
&\simeq U(\widehat{\mathfrak{g}}^{f}_{<0}) \otimes \left(\bigoplus_{j \in P_l} V_j \otimes V_j^* \right) \\
&\simeq \bigoplus_{j \in P_l} M_j \otimes V_j^*
\end{aligned}
$$

を得る．実際にはこの同型写像はベクトル空間としての写像であるだけでなく, 左 $\widehat{\mathfrak{g}}^{f\prime}$, 右 $\mathfrak{g}$ 加群としての写像である事が容易に確められる．これと Step1 の同型 (7.10) と Step4 の同型 (7.16) よりベクトル空間の同型

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_{w_A,0}(J_A) &\simeq \bigoplus_{j \in P_l} \mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes M_j \otimes V_j^* / \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes M_j \otimes V_j^*) \\
&\simeq \bigoplus_{j \in P_l} \big(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes M_j / \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes M_j) \big) \otimes V_j^*
\end{aligned}
$$

を得る．

Step 6. 各 $j \in P_l$ に対してベクトル空間の同型

$$
\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes M_j / \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes M_j) \simeq \mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes \mathcal{H}_j / \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes \mathcal{H}_j)
$$

が存在する．この証明は定理 5.2 の証明で示した $j = 0$ の場合と同様であるので省略する．

Step 7. Step 5, Step 6 の同型をまとめて

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_{w_A,0}(J_A) &\simeq \bigoplus_{j \in P_l} \big(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes M_j / \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes M_j) \big) \otimes V_j^* \\
&\simeq \bigoplus_{j \in P_l} \big(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes \mathcal{H}_j / \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A}(\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes \mathcal{H}_j) \big) \otimes V_j^* \\
&= \bigoplus_{j \in P_l} \mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j) \otimes V_j^*
\end{aligned}
$$

を得る．これで (7.8) が証明された．(7.9) についても同様である．□

定理 7.9 (factorization property). 各点 $x = (0, w_A, w_B) \in D$ に対して同型

$$
\iota_x : \mathcal{V}_{\pi^{-1}(x), w_C}(J_C) \simeq \bigoplus_{j \in P_l} \mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j) \otimes \mathcal{V}_{w_B}(j, J_{\bar{B}})
$$

が成立する．

証明．まず,

$$
\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C} \underset{\text{def}}{=} \mathfrak{g} \otimes H^0(\pi^{-1}(x), \mathcal{O}_{\pi^{-1}(x)}(*w_{\bar{A}} + *w_{\bar{B}}))
$$

の Lie 部分代数 $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C,0}$ を次のように定義する:

$$
\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C,0} = \mathfrak{g} \otimes H^0(\pi^{-1}(x),\, \mathcal{O}_{\pi^{-1}(x)}(*w_{\bar{A}} + *w_{\bar{B}} - [0_A = \infty_B])).
$$

ただしここで $[0_A = \infty_B]$ は $\pi^{-1}(x)$ 上の二重点 $0_A = \infty_B$ の因子であり,
$H^0(\pi^{-1}(x),\, \mathcal{O}_{\pi^{-1}(x)}(*w_{\bar{A}} + *w_{\bar{B}} - [0_A = \infty_B]))$ は $\pi^{-1}(x)$ 上の $w_{\bar{A}}$, $w_{\bar{B}}$ に極を持つ有理函数 f で $f(0_A) = f(\infty_B) = 0$ となるもの全体である．

$$\mathcal{V}_{\pi^{-1}(x),w_C}(J_C) = \mathcal{H}(J_C)/\,\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C}\mathcal{H}(J_C)$$

を計算するのに次の完全列を用いる:

$$0 \to \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C}\mathcal{H}(J_C)/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C,0}\mathcal{H}(J_C) \to \mathcal{H}(J_C)/\,\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C,0}\mathcal{H}(J_C) \to \mathcal{V}_{\pi^{-1}(x),w_C}(J_C) \to 0 \tag{7.17}$$

まず $\mathcal{H}(J_C)/\,\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C,0}\mathcal{H}(J_C)$ を計算しよう.

$$\begin{aligned} &H^0(\pi^{-1}(x),\, \mathcal{O}_{\pi^{-1}(x)}(*w_{\bar{A}} + *w_{\bar{B}} - [0_A = \infty_B])) \longrightarrow \\ &\qquad\qquad H^0(\mathbb{P}^1_A, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_A}(*w_{\bar{A}} - [0_A])) \oplus H^0(\mathbb{P}^1_B, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_B}(*w_{\bar{B}} - [\infty_B])) \end{aligned}$$

$$f \mapsto (f\,|_{\mathbb{P}^1_A}, f\,|_{\mathbb{P}^1_B})$$

という自然な同型が存在するので coinvariant の空間のベクトル空間の同型

$$\mathcal{H}(J_C)/\,\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C,0}\mathcal{H}(J_C) \simeq \mathcal{H}(J_{\bar{A}})/\,\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_A,0}\mathcal{H}(J_{\bar{A}}) \otimes \mathcal{H}(J_{\bar{B}})/\,\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_B,0}\mathcal{H}(J_{\bar{B}}) \tag{7.18}$$

を得る. ここで命題 7.8 を用いると

$$\mathcal{H}(J_C)/\,\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C,0}\mathcal{H}(J_C) \simeq \left(\bigoplus_{j\in P_l}\mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j)\otimes V_j^*\right) \otimes \left(\bigoplus_{j\in P_l} V_j^* \otimes \mathcal{V}_{w_B}(j, J_{\bar{B}})\right)$$

である. 完全列 (7.17) より $\mathcal{V}_{\pi^{-1}(x),w_C}(J_C)$ は上の式の $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C}\mathcal{H}(J_C)/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C,0}\mathcal{H}(J_C)$ の作用による商をとればよい.

$\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C}\mathcal{H}(J_C)/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C,0}\mathcal{H}(J_C)$ を考える. 任意の $f \in H^0(\pi^{-1}(x), \mathcal{O}_{\pi^{-1}(x)}(*w_{\bar{A}} + *w_{\bar{B}}))$ に対して

$$f - f(0_A) \in H^0(\pi^{-1}(x),\, \mathcal{O}_{\pi^{-1}(x)}(*w_{\bar{A}} + *w_{\bar{B}} - [0_A = \infty_B]))$$

である. 従って $X \otimes f \in \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C}$, $|u_A \otimes u_B\rangle \in \mathcal{H}(J_C)$ に対して mod $\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C,0}\mathcal{H}(J_C)$ で考えると

$$(X\otimes f)|u_A\otimes u_B\rangle \equiv \sum_{a\in\bar{A}}\rho_a(X\otimes f(0_A))|u_A\otimes u_B\rangle + \sum_{b\in\bar{B}}\rho_b(X\otimes f(0_A))|u_A\otimes u_B\rangle$$

となり命題 7.8 の Step 2 (7.11) で考えた $\mathfrak{g}$ のテンソル積表現と一致している. 一方命題 7.8 の Step 3 より (7.11) の表現は同型 (7.8) を用いると $\bigoplus_j \mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j)\otimes V_j^*$ 上で (7.15) と作用するので, $\bigoplus_j \mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j)\otimes V_j^*$ での u_A の像を $\sum_j u_j \otimes \phi_j$, $\bigoplus_{j'} V_{j'}^* \otimes \mathcal{V}_{w_B}(j', J_{\bar{B}})$ での u_B の像を $\sum_{j'} \phi'_{j'} \otimes u'_{j'}$ とすると

$$(X\otimes f)|u_A\otimes u_B\rangle \quad\equiv\quad f(0_A)\sum_{j,j'}\left\{u_j\otimes(\phi_j S(X))\otimes\phi'_{j'}\otimes u'_{j'} + u_j\otimes\phi_j\otimes(\phi'_{j'}S(X))\otimes u'_{j'}\right\}$$

を得る. これは各 j, j' に対して $V_j^* \otimes V_{j'}^*$ 上の $\mathfrak{g}$ のテンソル積表現であるので, 事実 3.7 よりこの作用による商を考えると $j \neq j'$ のとき 0 となり, $j = j'$ のときには $\mathbb{C}$ である. 従って,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\pi^{-1}(x),w_C}(J_C) &\simeq \left(\mathcal{H}(J_C)/\,\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C,0}\mathcal{H}(J_C)\right)\Big/\left(\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C}\mathcal{H}(J_C)/\widehat{\mathfrak{g}}^{out}_{w_C,0}\mathcal{H}(J_C)\right) \\ &\simeq \bigoplus_{j,j'\in P_l}\mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j)\otimes\left(V_j^*\otimes V_{j'}^*/\mathfrak{g}(V_j^*\otimes V_{j'}^*)\right)\otimes\mathcal{V}_{w_B}(j', J_{\bar{B}}) \\ &= \bigoplus_{j\in P_l}\mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j)\otimes\mathcal{V}_{w_B}(j, J_{\bar{B}}) \end{aligned}$$

となり求める同型を得る. □

補題 7.10. X を複素多様体, $\mathcal{F}$ を連接 $\mathcal{O}_X$ 加群とする.

$$\varphi(x) \underset{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C}_x$$

が定数函数なら $\mathcal{F}$ は局所自由である.

証明. 任意の $x \in X$ に対して $\varphi(x) = r$ とする. $x \in X$ を固定すると, 補題 6.20 より $\mathcal{O}_{X,x}$ 加群の全射準同型

$$f : \mathcal{O}_{X,x}^r \twoheadrightarrow \mathcal{F}_x$$

が存在する. $\mathcal{O}_X^r$ の $\mathcal{O}_X$ 自由基底を $e_1, \ldots, e_r$ とする. $\mathcal{F}_x$ の定義より, x の開近傍 U と $u_1, \ldots, u_r \in \mathcal{F}(U)$ および, $\mathcal{O}_U$ 準同型 $\phi : \mathcal{O}_U^r \to \mathcal{F}|_U$ で $\phi(e_i|_U) = u_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ かつ, $\phi_x = f$ であるものが存在する.

$\mathcal{F}$ は局所有限生成で ϕ_x が全射であるので, U に含まれる x の開近傍 V で $\phi|_V : \mathcal{O}_V^r \to \mathcal{F}|_V$ が全射になるものが存在する. この証明は命題 6.17 の証明の (1) と同じである.

$\mathcal{K} = \mathrm{Ker}\phi|_V$ とする. $\mathcal{K} = 0$ を示そう. 任意の点 $y \in V$ に対して完全列

$$0 \to \mathcal{K}_y \to \mathcal{O}_{V,y}^r \to \mathcal{F}_y \to 0$$

に $\otimes_{\mathcal{O}_{V,y}} \mathbb{C}_y$ を適用すると, テンソル積の右完全性より

$$\mathcal{K} \otimes \mathbb{C}_y \to \mathbb{C}^r \to \mathcal{F}_y \otimes \mathbb{C}_y \to 0$$

という完全列を得る. ここで $\varphi(y) = r$ であるので, $\phi_y : \mathbb{C}^r \to \mathcal{F}_y \otimes \mathbb{C}_y$ は同型写像である. 従って任意の開集合 $W \subset V$ と $s \in \mathcal{K}(W)$ に対して

$$s = \sum_{i=1}^r a_i e_i|_W \quad (a_i \in \mathcal{O}_V(W))$$

とおくと, 任意の $y \in W$ に対して $a_i(y) = 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ である. 複素多様体 X は被約[1] なので, これから $a_i = 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ であり, $s = 0$ を得る. よって $\mathcal{K} = 0$ であり, つまり $\mathcal{F}$ は局所自由である. □

系 7.11. D 上の余真空の層に対して次の同型が存在する.

$$\iota : \mathcal{V}_D(J_C) \simeq \bigoplus_{j \in P_l} \mathcal{V}_{D,A}(J_{\bar{A}}, j) \otimes \mathcal{V}_{D,B}(j, J_{\bar{B}})$$

証明. 定理 7.9 より任意の点 $x = (0, w_A, w_B) \in D$ に対して同型

$$\iota_x : \mathcal{V}_{\pi^{-1}(x), w_C}(J_C) \simeq \bigoplus_{j \in P_l} \mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j) \otimes \mathcal{V}_{w_B}(j, J_{\bar{B}})$$

が存在する. ここで右辺の次元は x に依らず一定であるので, 命題 7.1 と補題 7.10 より $\mathcal{V}_D(J_C)$ は局所自由である. 従って, 定理 7.9 より ι は $\mathcal{O}_D$ 加群の同型である. □

7.3 真空の層の局所自由性

$\mathcal{V}_U(J_C)$ が局所自由であることを示そう. 命題 7.3 より $\mathcal{V}_{U^\times}(J_C)$ が局所自由であることは既知であるので, D のまわりで局所自由であればよい.

記号の簡単のために

$$\mathcal{V}_{D,A,B}(J_C) = \bigoplus_{j \in P_l} \mathcal{V}_{D,A}(J_{\bar{A}}, j) \otimes \mathcal{V}_{D,B}(j, J_{\bar{B}})$$

とおくと, 証明はまず $\mathcal{V}_U(J_C)$ の D に沿っての完備化となる層 $\widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)$ を表現論的に, つまり $\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}$ の表現の coinvariant の空間として構成する. その上で系 7.11 の同型

$$\iota : \mathcal{V}_D(J_C) \longrightarrow \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)$$

[1]環付き空間 X が被約であるとは, 函数 $f \in \mathcal{O}_X(U)$ が U のすべての点 x で $f(x) = 0$ であれば, $f = 0$ となるとき言う.

の q 方向への形式的拡張

$$\hat{\imath} : \widehat{\mathcal{V}}_D(J_C) \longrightarrow \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)[[q]]$$

を導入し, $\hat{\imath}$ が同型となることを証明する．この 2 つの同型より $\widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)$ は $\mathcal{V}_D(J_C)$ の q 方向への形式的な拡張になることがわかるが, $\widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)$ は $\mathcal{V}_U(J_C)$ の D に沿っての完備化であったので, これは $\mathcal{V}_D(J_C)$ の切断を任意に取ったとき, その q 方向への形式的な延長を考えれば, それが $\mathcal{V}_U(J_C)$ の D のまわりでの局所的な切断を与えることを意味する．

D 上の余真空の層 $\mathcal{V}_D(J_C)$ を q 方向に形式的に拡張した $\widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)$ を定義する．まず

$$\widehat{\mathcal{O}}_{U/D} \underset{\mathrm{def}}{=} \lim_{\overleftarrow{n}} \mathcal{O}_U / I_D^n$$

は $\mathcal{O}_U$ の D に沿っての完備化である．ここで I_D は D 上に零点を持つ U 上の正則函数の成すイデアルの層である．このとき D は U の座標で $q=0$ と定義される部分多様体であるので, $\widehat{\mathcal{O}}_{U/D}$ は写像

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_D = \mathcal{O}_U/I_D \to \widehat{\mathcal{O}}_{U/D} \subset \prod_{n\geq 1} \mathcal{O}_U/I_D^n \\ f + I_D \mapsto (f + I_D^n)_{n\geq 1} \end{aligned}$$

によって $\mathcal{O}_D$ 代数の構造を持ち, $\mathcal{O}_D$ 代数として

$$\widehat{\mathcal{O}}_{U/D} \simeq \mathcal{O}_D[[q]]$$

である．[2]

$\mathcal{O}_U$ 自由加群 $\mathcal{H}_U(J_C)$ の D に沿っての完備化は

$$\mathcal{H}_U(J_C) \otimes_{\mathcal{O}_U} \widehat{\mathcal{O}}_{U/D} \simeq \mathcal{H}_D(J_C)[[q]]$$

であるが, この空間上に自然に $\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}$ の作用が定義される．$x \in D$ とし $f \in \pi_*(\mathcal{O}_{C_U}(*S_C))$ を x の近傍における切断とする．

$$\begin{aligned} f &= f(z_A, z_B) \\ &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} a_{m,n} z_A^m z_B^{-n}, \qquad a_{m,n} \in \mathcal{O}_U \end{aligned}$$

$z_A z_B^{-1} = q$ なので (z_A, z_B) の代わりに (z_A, q) や (z_B, q) で展開すれば

$$f = \begin{cases} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} a_{m,n} z_A^{m-n} q^n \\ \sum_{m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} a_{m,n} z_B^{m-n} q^m \end{cases}$$

である．そこで

$$\begin{aligned} f_A^{(n)} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} a_{m,n} z_A^{m-n} \\ f_B^{(n)} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} a_{n,m} z_B^{n-m} \end{aligned}$$

とおくと $f \in \pi_*(\mathcal{O}_{C_U}(*S_C))$ は

$$f = \begin{cases} \sum_{n\geq 0} f_A^{(n)} q^n & (f_A^{(n)} \in (\tilde{\pi}_{D,A})_*(\mathcal{O}_{\tilde{C}_{D,A}}(*S_{\bar{A}} + n[0_A]))) \\ \sum_{n\geq 0} f_B^{(n)} q^n & (f_B^{(n)} \in (\tilde{\pi}_{D,B})_*(\mathcal{O}_{\tilde{C}_{D,B}}(*S_{\bar{B}} + n[\infty_B]))) \end{cases} \tag{7.19}$$

[2] 一般の D と U の場合にはこの様な $\mathcal{O}_D$ 代数の構造は必ずしも入らない．

と書ける．上で $\mathcal{O}_{\tilde{C}_{D,A}}(*S_{\bar{A}}+n[0_A])$ は $S_{\bar{A}}$ の点で任意位数の極と 0_A で n 位以下の極を許した $\tilde{C}_{D,A}$ 上の有理函数であり，$\mathcal{O}_{\tilde{C}_{D,B}}(*S_{\bar{B}}+n[\infty_B])$ は $S_{\bar{B}}$ の点で任意位数の極と ∞_B で n 位以下の極を許した $\tilde{C}_{D,B}$ 上の有理函数の全体を表す．$X\otimes f\in\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}$ の $|u\otimes v\rangle\in\mathcal{H}_D(J_C)[[q]]$ への作用を

$$X\otimes f|u\otimes v\rangle=\sum_{n\geq 0}\sum_{a\in\bar{A}}\rho_a(X\otimes f_A^{(n)})|u\otimes v\rangle q^n+\sum_{n\geq 0}\sum_{b\in\bar{B}}\rho_b(X\otimes f_B^{(n)})|u\otimes v\rangle q^n \tag{7.20}$$

とする．$f_A^{(n)}$ が 0_A に $f_B^{(n)}$ が ∞_B に極を持ち得ることに注意しよう．

定義 7.12. q 方向に形式的に拡張された余真空の層とは上の作用の coinvariant の空間

$$\widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)\underset{\text{def}}{=}\mathcal{H}_D(J_C)[[q]]/\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}(\mathcal{H}_D(J_C)[[q]])$$

を言う．

命題 7.13. 次の $\widehat{\mathcal{O}}_{U/D}$ 加群としての同型が存在する:

$$\widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)\simeq\mathcal{V}_U(J_C)\otimes_{\mathcal{O}_U}\widehat{\mathcal{O}}_{U/D}.$$

これは $\widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)$ が $\mathcal{V}_U(J_C)$ の D に沿っての完備化に一致することを表している．

証明. 証明は命題 6.3 の証明とほとんど同じである．

$\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}$ の $\mathcal{H}_U(J_C)$ への作用 $\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}\otimes\mathcal{H}_U(J_C)\to\mathcal{H}_U(J_C)$ から次の $\mathcal{O}_U$ 加群の右短完全列が得られる:

$$\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}\otimes\mathcal{H}_U(J_C)\to\mathcal{H}_U(J_C)\to\mathcal{V}_U(J_C)\to 0.$$

これに $(\ )\otimes_{\mathcal{O}_U}\widehat{\mathcal{O}}_{U/D}$ を作用させるとテンソル積の右完全性より次の $\widehat{\mathcal{O}}_{U/D}$ 加群の右完全列が得られる:

$$\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}\otimes\mathcal{H}_D(J_C)[[q]]\to\mathcal{H}_D(J_C)[[q]]\to\mathcal{V}_U(J_C)\otimes_{\mathcal{O}_U}\widehat{\mathcal{O}}_{U/D}\to 0.$$

ここで，$\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}\otimes\mathcal{H}_D(J_C)[[q]]\to\mathcal{H}_D(J_C)[[q]]$ の像を調べよう．$X\otimes f\in\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}$ とし，$|u\otimes v\rangle\in\mathcal{H}(J_C)$ とし，定数函数 $1\in\mathcal{O}_U$ をとって，$|u\otimes v\rangle\otimes 1\in\mathcal{H}_U(J_C)$ とする．f に対して z_A, z_B^{-1} による展開を

$$f=\sum_{m,n\geq 0}a_{m,n}z_A^m z_B^{-n}$$

とし，$f_A^{(n)}$, $f_B^{(n)}$ を (7.19) の展開と同様に定義する．

$$\begin{aligned}
&(X\otimes f)(|u\otimes v\rangle\otimes 1)\\
&=\sum_{a\in\bar{A}}\rho_a(X\otimes f)(|u\otimes v\rangle\otimes 1)+\sum_{b\in\bar{B}}\rho_b(X\otimes f)(|u\otimes v\rangle\otimes 1)\\
&=\sum_{a\in\bar{A}}\sum_{m,n\geq 0}\rho_a(X\otimes a_{m,n}z_A^{m-n}q^n)(|u\otimes v\rangle\otimes 1)+\sum_{b\in\bar{B}}\sum_{m,n\geq 0}\rho_b(X\otimes a_{m,n}z_B^{m-n}q^m)(|u\otimes v\rangle\otimes 1)\\
&=\sum_{a\in\bar{A}}\sum_{m,n\geq 0}q^n(\rho_a(X\otimes z_A^{m-n})|u\otimes v\rangle)\otimes a_{m,n}+\sum_{b\in\bar{B}}\sum_{m,n\geq 0}q^m(\rho_b(X\otimes z_B^{m-n})|u\otimes v\rangle)\otimes a_{m,n}\\
&\xrightarrow{\otimes_{\mathcal{O}_U}\widehat{\mathcal{O}}_{U/D}}\sum_{a\in\bar{A}}\sum_{m,n\geq 0}(\rho_a(X\otimes z_A^{m-n})|u\otimes v\rangle)\otimes a_{m,n}q^n+\sum_{b\in\bar{B}}\sum_{m,n\geq 0}(\rho_b(X\otimes z_B^{m-n})|u\otimes v\rangle)\otimes a_{m,n}q^m\\
&=\sum_{a\in\bar{A}}\sum_{n\geq 0}(\rho_a(X\otimes f_A^{(n)})|u\otimes v\rangle)\otimes q^n+\sum_{b\in\bar{B}}\sum_{m\geq 0}(\rho_b(X\otimes f_B^{(m)})|u\otimes v\rangle)\otimes q^m
\end{aligned}$$

となり，$\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}\otimes\mathcal{H}_D(J_C)[[q]]\to\mathcal{H}_D(J_C)[[q]]$ の像は (7.20) で定義した $\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}$ の $\mathcal{H}_D(J_C)[[q]]$ への作用による $\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}(\mathcal{H}_D(J_C)[[q]])$ に一致する．従って，上の $\widehat{\mathcal{O}}_{U/D}$ 加群の完全列は同型

$$\mathcal{V}_U(J_C)\otimes_{\mathcal{O}_U}\widehat{\mathcal{O}}_{U/D}\simeq\mathcal{H}_D(J_C)[[q]]/\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}(\mathcal{H}_D(J_C)[[q]])=\widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)$$

が成立することを意味している． □

命題 7.5 で定義された $\mathcal{O}_D$ 加群の同型

$$\iota : \mathcal{V}_D(J_C) \longrightarrow \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)$$

の q 方向への形式的拡張

$$\hat{\iota} : \widehat{\mathcal{V}}_D(J_C) \longrightarrow \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)[[q]]$$

を構成しよう．まず

$$\begin{array}{rcl} \hat{\iota} : \mathcal{H}_D(J_C)[[q]] & \longrightarrow & \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)[[q]] \\ |u \otimes v\rangle & \mapsto & \displaystyle\sum_{j \in P_l} |u \otimes \Omega_j \otimes v\rangle \end{array} \tag{7.21}$$

と定義する．ただし Ω_j は

$$\Omega_j \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \left(\sum_i u_{d,i} \otimes u_d^i \right) q^d \in (\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j)[[q]]$$

であり，ここで $\{u_{d,i}\}$ は $\mathcal{H}_j(d)$ の基底であり，$\left\{u_d^i\right\}$ はその不変内積 (p. 45) に関する双対基底である．

補題 7.14. 任意の $X(n) \in \widehat{\mathfrak{g}}$ に対して

$$\left\{\rho_{0_A}(X(n)) + \rho_{\infty_B}(X(-n))q^n\right\} \Omega_j = 0$$

が成立する．

証明．$\rho_{0_A}(X(n))\Omega_j$ は

$$\begin{aligned} \rho_{0_A}(X(n))\Omega_j &= \rho_{0_A}(X(n)) \sum_{d \geq 0} \sum_i u_{d,i} \otimes u_d^i q^d \\ &= \sum_{d \geq 0} \sum_i (X(n) u_{d,i}) \otimes u_d^i q^d \end{aligned}$$

である．ここで $n > 0$ のときには命題 2.49 より d についての和は $d \geq n$ の範囲で考えていいことに注意．一方 $\rho_{\infty_B}(X(-n))q^n\Omega_j$ は，

$$\begin{aligned} \rho_{\infty_B}(X(-n))q^n\Omega_j &= \rho_{\infty_B}(X(-n)) \sum_{d \geq 0} \sum_j u_{d,j} \otimes u_d^j q^{d+n} \\ &= \sum_{d \geq 0} \sum_j u_{d,j} \otimes (X(-n) u_d^j) q^{d+n} \\ &= \sum_{d \geq n} \sum_j u_{d-n,j} \otimes (X(-n) u_{d-n}^j) q^d \end{aligned}$$

である．さて $d \geq n$ に対して

$$\sum_i (X(n) u_{d,i}) \otimes u_d^i + \sum_j u_{d-n,j} \otimes (X(-n) u_{d-n}^j) = 0$$

が言える．なぜなら命題 2.49 と $\{u_{d',i}\}$, $\left\{u_{d'}^i\right\}$ が $\mathcal{H}_j(d')$ の基底であることから

$$\begin{aligned} X(n) u_{d,i} &= \sum_j \alpha_{ij} u_{d-n,j} \;\; (\alpha_{ij} \in \mathbb{C}) \\ X(-n) u_{d-n}^j &= \sum_i \beta_{ji} u_d^i \;\; (\beta_{ji} \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

とおくことにすると, 不変内積の性質

$$(X(n)u|v) + (u|X(-n)v) = 0$$

を用いれば

$$\begin{aligned} 0 &= \left(X(n)u_{d,i}|u^j_{d-n}\right) + \left(u_{d,i}|X(-n)u^j_{d-n}\right) \\ &= \alpha_{ij} + \beta_{ji} \end{aligned}$$

を得る. 従って

$$\begin{aligned} &\sum_i (X(n)u_{d,i}) \otimes u^i_d + \sum_j u_{d-n,j} \otimes (X(-n)u^j_{d-n}) \\ &= \sum_{i,j} \left(\alpha_{ij} u_{d-n,j} \otimes u^i_d + \beta_{ji} u_{d-n,j} \otimes u^i_d\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

より求めたい式を得る. □

補題 7.15. 任意の $X \otimes f \in \widehat{\mathfrak{g}}^{out}_U$ を取る. f の分解を (7.19) のようにおく. このとき

$$\sum_{n \geq 0} \left(\rho_{0_A}(X \otimes f^{(n)}_A) + \rho_{\infty_B}(X \otimes f^{(n)}_B)\right) \Omega_j q^n = 0$$

が成立する.

証明. まず

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} f^{(n)}_A q^n &= \sum_{m,n \geq 0} a_{m,n} z^{m-n}_A q^n \\ \sum_{n \geq 0} f^{(n)}_B q^n &= \sum_{m,n \geq 0} a_{m,n} z^{m-n}_B q^m \\ &= \sum_{m,n \geq 0} \left(a_{m,n} z^{m-n}_B q^{m-n}\right) q^n \end{aligned}$$

より補題の式を書換えれば

$$\begin{aligned} &\sum_{n \geq 0} \left(\rho_{0_A}(X \otimes f^{(n)}_A) + \rho_{\infty_B}(X \otimes f^{(n)}_B)\right) \Omega_j q^n \\ &= \sum_{m,n \geq 0} a_{m,n} q^n \left(\rho_{0_A}(X \otimes z^{m-n}_A) + \rho_{\infty_B}(X \otimes z^{m-n}_B) q^{m-n}\right) \Omega_j \\ &= \sum_{m,n \geq 0} a_{m,n} q^n \left(\rho_{0_A}(X(m-n)) + \rho_{\infty_B}(X(n-m)) q^{m-n}\right) \Omega_j \end{aligned}$$

である. ここで補題 7.14 を用いれば

$$\left(\rho_{0_A}(X(m-n)) + \rho_{\infty_B}(X(n-m)) q^{m-n}\right) \Omega_j = 0$$

となるので, 求める式を得る. □

命題 7.16. (7.21) 式の $\widehat{\mathcal{O}}_{U/D}$ 加群の準同形 $\hat{\imath}$ は

$$\hat{\imath} : \widehat{\mathcal{V}}_D(J_C) \longrightarrow \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)[[q]]$$

を誘導する.

証明. 証明は命題 7.5 と同様であるが, 補題 7.4 の代わりに補題 7.15 を用いる. $\hat{\iota}(\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}(\mathcal{H}_D(J_C)[[q]])) = 0$ を示せばよい. $u \in \mathcal{H}_D(J_{\bar{A}})$, $v \in \mathcal{H}_D(J_{\bar{B}})$, $X \otimes f \in \widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}$ とする. f の分解を (7.19) のようにおく. すると補題 7.15 を用いて,

$$
\begin{aligned}
\hat{\iota}(X \otimes f|u \otimes v\rangle) &= \hat{\iota}\left\{\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{a\in\bar{A}}|\rho_a(X\otimes f_A^{(n)})u\otimes v\rangle + \sum_{b\in\bar{B}}|u\otimes\rho_b(X\otimes f_B^{(n)})v\rangle\right)q^n\right\}\\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{a\in\bar{A}}\sum_j |\rho_a(X\otimes f_A^{(n)})u\otimes\Omega_j\otimes v\rangle q^n\\
&\qquad + \sum_{n\geq 0}\sum_{b\in\bar{B}}\sum_j |u\otimes\Omega_j\otimes\rho_b(X\otimes f_B^{(n)})v\rangle q^n\\
&= \sum_{a\in A}\sum_{n\geq 0}\sum_j \rho_a(X\otimes f_A^{(n)})|u\otimes\Omega_j\otimes v\rangle q^n\\
&\qquad + \sum_{b\in B}\sum_{n\geq 0}\sum_j \rho_b(X\otimes f_B^{(n)})|u\otimes\Omega_j\otimes v\rangle q^n\\
&= (X\otimes f)\left(\sum_j |u\otimes\Omega_j\otimes v\rangle\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

である. □

命題 7.17. 命題 7.16 で定義された $\hat{\iota}$ は $\widehat{\mathcal{O}}_{U/D}$ 加群の同型である.

証明. 次の可換図式を考える.

$$
\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathcal{V}}_D(J_C) & \xrightarrow{\hat{\iota}} & \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)[[q]]\\
{\scriptstyle q=0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q=0}\\
\mathcal{V}_D(J_C) & \xrightarrow[\iota]{} & \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)
\end{array}
\tag{7.22}
$$

上で系 7.11 より ι は同型であることに注意. また $\mathcal{H}_D(J_C) \hookrightarrow \mathcal{H}_D(J_C)[[q]]$ より誘導される埋め込みで $\mathcal{V}_D(J_C) \subset \widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)$ と考えることができる.

まず $\hat{\iota}$ が単射であることを示す. $\sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i \in \mathcal{H}_D(J_C)[[q]]$ は $u_i \in \mathcal{H}_D(J_C)$ で

$$\hat{\iota}\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i\right) = 0$$

とする. このとき (7.22) より $\iota(u_0) = 0$ であり, ι は同型であるので

$$u_0 \in \widehat{\mathfrak{g}}_D^{out}\mathcal{H}_D(J_C) \subset \widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}(\mathcal{H}_D(J_C)[[q]])$$

である. 従って

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i \equiv \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i q^{i-1}\right)q \mod \widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}(\mathcal{H}_D(J_C)[[q]])$$

この右辺を q で割れば, $\hat{\iota}$ は $\mathcal{O}_D[[q]]$ 加群の準同型であるので

$$\hat{\iota}\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i q^{i-1}\right) = 0$$

となり, 再び (7.22) の可換図式と ι が同型であることから $u_1 \in \widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}(\mathcal{H}_D(J_C)[[q]])$ を得る. 帰納的に繰り返せば, 任意の N に対して

$$\sum_{i=0}^{N} u_i q^i \in \widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}(\mathcal{H}_D(J_C)[[q]])$$

なので, 命題 7.13 の証明からもわかるように $\widehat{\mathfrak{g}}_U^{out}(\mathcal{H}_D(J_C)[[q]])$ は $\mathcal{H}_D(J_C)[[q]]$ の閉集合であるから,

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i = 0 \qquad \text{in } \widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)$$

となり, $\hat{\iota}$ が単射であることが示された.

$\hat{\iota}$ が全射であることを示すには補題 6.19 を用いる. 各点 $x \in D$ に対して

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{O}_{D,x}[[q]] \\ I &= qA \\ M &= \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)[[q]]_x = \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)_x[[q]] \end{aligned}$$

とおいて

$$\hat{\iota}_x : \widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)_x \longrightarrow M$$

が全射であることを示せばいい. そのためにはある有限個の $u_1, \ldots, u_n \in \widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)_x$ が存在して, それらの $\hat{\iota}_x$ による像が A 上 M を生成することを示せば十分である. さらに (6.16) より $I = qA \subset J(A)$ であるので補題 6.19 を A, I, M に適用することによって, $\hat{\iota}_x(u_1)|_{q=0}, \ldots, \hat{\iota}_x(u_n)|_{q=0}$ が $M/IM = \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)_x$ を $A/I = \mathcal{O}_{D,x}$ 上生成することが示されれば, $\hat{\iota}_x(u_1), \ldots, \hat{\iota}_x(u_n)$ が A 上 M を生成することがわかる.

$\mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)$ は $\mathcal{O}_D$ 上連接なので $M/IM = \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)_x$ の $A/I = \mathcal{O}_{D,x}$ 上での生成元 $v_1, \ldots, v_n$ が存在する. 同型写像 $\iota_x : \mathcal{V}_D(J_C)_x \to M/IM$ による v_i の逆像を v_i' と表わす. $\widehat{\mathcal{V}}_D(J_C) \to \mathcal{V}_D(J_C)$ は全射なので, ある $u_i \in \widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)_x$ で $u_i|_{q=0} = v_i'$ となるものが存在する. すると可換図式 (7.22) より $\hat{\iota}_x(u_i)|_{q=0} = v_i$ であるので $\hat{\iota}_x(u_1)|_{q=0}, \ldots, \hat{\iota}_x(u_n)|_{q=0}$ は $M/IM = \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)_x$ を $A/I = \mathcal{O}_{D,x}$ 上生成する.

従って $\hat{\iota}_x$ は全射である. □

完備化に関する基本的な性質を証明する.

補題 7.18. A を Noether 環とし, $J(A)$ をその Jacobson 根基とするとき, A のイデアル I に対して A の I 進完備化 $\widehat{A}$ が A 上忠実平坦であるための必要十分条件は $I \subset J(A)$ が成立することである.

上の補題の証明は [松村] 定理 8.14 を参照せよ.

補題 7.19. 任意の $x \in D$ に対して, $\widehat{\mathcal{O}}_{U/D,x}$ は $\mathcal{O}_{U,x}$ 上忠実平坦である.

証明. 事実 6.4 より $\mathcal{O}_{U,x}$ は (Noether) 局所環であるので, $I_{D,x} \subset J(\mathcal{O}_{U,x})$ である. 従って補題 7.18 を $A = \mathcal{O}_{U,x}$ と $I = I_{D,x}$ に適用すれば補題の主張を得る. □

定理 7.20. 余真空の層 $\mathcal{V}_U(J_C)$ は局所自由 $\mathcal{O}_U$ 加群である.

証明. 命題 6.17 より任意の $x \in D$ に対して, $\mathcal{V}_U(J_C)_x$ が $\mathcal{O}_{U,x}$ 自由加群であることを示せばいい. $\{u_1, \cdots, u_n\}$ を $\mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)_x \simeq \mathcal{V}_D(J_C)_x$ の $\mathcal{O}_{D,x}$ 基底とする. 命題 7.17 より

$$\hat{\iota}_x : \widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)_x \longrightarrow \mathcal{V}_{D,A,B}(J_C)_x[[q]] \simeq \mathcal{V}_D(J_C)_x[[q]]$$

は同型であるから $\widehat{u_i} \in \widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)_x$ が存在して $\hat{\iota}_x(\widehat{u_i}) = u_i$ かつ

$$\widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)_x = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{D,x}[[q]]\widehat{u_i}$$

である. 一方, 命題 7.13 より

$$\widehat{\mathcal{V}}_D(J_C)_x \simeq \mathcal{V}_U(J_C)_x \otimes_{\mathcal{O}_{U,x}} \widehat{\mathcal{O}}_{U/D,x}$$

なので次の完全列が存在する:

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{D,x}[[q]]\widehat{u_i} \to \mathcal{V}_U(J_C)_x \otimes_{\mathcal{O}_{U,x}} \widehat{\mathcal{O}}_{U/D,x} \to 0$$

ここで補題 7.19 より $\widehat{\mathcal{O}}_{U/D,x}$ は $\mathcal{O}_{U,x}$ 上忠実平坦であるから上の完全列と下の完全列が同値になる:

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{U,x}\widehat{u_i} \to \mathcal{V}_U(J_C)_x \to 0$$

この完全列より $\mathcal{V}_U(J_C)_x$ は $\mathcal{O}_{U,x}$ 上自由である. □

最後に定理 7.9, 定理 7.20 を用いて 4 点以上の真空の空間の次元をどのように計算するかを, 4 点の場合を例に示す. $C = \{0,1,2,\infty\}$ を $\bar{A} = \{2,\infty\}$ と $\bar{B} = \{0,1\}$ と 2 つに分ける. このとき $\dim \mathcal{V}_{w_C}(J_C)$ を計算しよう. 定理 7.20 と命題 7.1 より, $\dim \mathcal{V}_{w_C}(J_C)$ は D 上のファイバーで計算してもいい. つまり, $x \in D$ とすると

$$\dim \mathcal{V}_{w_C}(J_C) = \dim \mathcal{V}_{\pi^{-1}(x),w_C}(J_C) \tag{7.23}$$

である. また, 定理 7.9 より $\mathcal{V}_{\pi^{-1}(x),w_C}(J_C)$ に対して同型

$$\mathcal{V}_{\pi^{-1}(x),w_C}(J_C) \simeq \bigoplus_{j \in P_l} \mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j) \otimes \mathcal{V}_{w_B}(j, J_{\bar{B}}) \tag{7.24}$$

があるので, (7.23), (7.24) より

$$\dim \mathcal{V}_{w_C}(J_C) = \sum_{j \in P_l} \dim \mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j) \cdot \dim \mathcal{V}_{w_B}(j, J_{\bar{B}})$$

となる. ここで $\mathcal{V}_{w_A}(J_{\bar{A}}, j)$, $\mathcal{V}_{w_B}(j, J_{\bar{B}})$ は 3 点の余真空の空間であるのでその次元は定理 3.9 ですでに調べた. これを用いると

$$\dim \mathcal{V}_{w_C}(J_C) = \#\left\{ j \in P_l \;\middle|\; \begin{array}{ll} j + j_1 + j_0 \in \mathbb{Z} & j_2 + j_\infty + j \in \mathbb{Z} \\ |j_0 - j_1| \le j \le j_0 + j_1 & |j - j_2| \le j_\infty \le j + j_2 \\ j + j_1 + j_0 \le l & j + j_2 + j_\infty \le l \end{array} \right\}$$

である.

関連図書

[上野] 上野 健爾: 代数幾何 2 — 層とコホモロジー, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店, 1997.

[上野清水] 上野 健爾, 清水 勇二: モジュライ理論 3, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 1999.

[谷崎 1] 谷崎 俊之: 環と体 3 — 非可換環論, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店, 1998.

[谷崎 2] 谷崎 俊之: リー代数と量子群, 現代数学の潮流, 共立出版, 2002.

[寺田原田] 寺田 至, 原田 耕一郎: 群論, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店, 1997.

[堀田] 堀田 良之: 環と体 1 — 可換環論, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店, 1997.

[松村] 松村 英之: 可換環論, 共立出版, 1980, 2000.

[山崎] 山崎 圭次郎: 環と加群 III, 岩波講座 基礎数学, 代数学 ii, 岩波書店, 1978.

[脇本] 脇本 実: 無限次元 Lie 環, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 1999.

[Bore] A. Borel et al.: *Algebraic D-Modules*, Academic Press, Inc., Orland, Florida, 1987.

[FHL] I. B. Frenkel, Y. Huang,, J. Lepowsky: On axiomatic approach to vertex operator algebras and modules, Mem. Amer. Math. Soc. **104** No.494 (1993)

[GR] R. C. Gunning, H. Rossi: Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[K] V. Kac: *Infinite dimensional Lie algebras*, third edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[KK] L. Kaup, B. Kaup: Holomorphic functions of several variables, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1983.

[KL] D. Kazhdan, G. Lusztig: Tensor structure arising from affine Lie algebras. II, J. Amer. Math. Soc., **6**, AMS, 949–1011 (1993).

[Li] H. Li: Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules, J. Pure Appl. Algebra **109**, Elsevier Science, 143–195 (1996).

[TUY] A. Tsuchiya, K. Ueno, Y. Yamada: Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries, in *Integrable Systems in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, Adv. Stud. Pure Math. **19**, Academic Press, Boston, 459–566 (1989).

[U] K. Ueno: Introduction to Conformal Field Theory with Gauge Symmetries, in *Geometry and Physics*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **184**, Marcel Dekker, 603–745 (1996).