数学メモアール

大津 幸男　山口 孝男
塩谷 隆　酒井 隆
加須栄 篤　深谷 賢治

リーマン多様体とその極限

第3巻　2004

日本数学会

リーマン多様体とその極限

目次

序にかえて

深谷賢治（京都大学理学部）

1. はじめに

本書は大域リーマン幾何学の最近の発展について，現在その分野を活発に研究している人たちによる解説を集めたものである．Alexandrov 空間やその上の解析学，リッチ曲率に関わる最近の発展などが中心となっている．また大津氏の論説では，大域リーマン幾何学の基礎となる比較定理から初めて，Alexandrov 空間[1]についての基礎的な事柄が述べられている．それで，もはや筆者が付け加えるべきこともあまりないが，以下では，より昔からの発展の経過など，他の論説で記述されている研究が始まる前の諸研究について述べ，より進んだ内容を学ぶ上の参考に供したい．証明は概略にとどめ，まったくない場合も多いが，以後の論説の内容の背景を説明するのが目的であるのでご容赦いただきたい．本稿は飛ばし，大津氏の書いた部分から読み始めてもかまわない．

本書で扱われるリーマン幾何学は，計量リーマン幾何学（metric Riemannian geometry）と呼ばれる分野であり，距離空間としてのリーマン多様体の大域的性質に関わるものである．計量リーマン幾何学には，正（非負）の曲率をもつ多様体，負（非正）の曲率をもつ多様体，零に近い曲率を持つ多様体，のそれぞれについて重要な結果があり，それを導く方法は3つの場合で異なっている．本書では，正（非負）の曲率をもつ多様体，あるいはそれと方法的に共通点の多い，有限性定理や曲率の下からの評価を仮定した諸結果がおおく扱われているので，本論説の内容もそこに限定する．

2. 球面定理

計量リーマン幾何学には，先駆的な結果（たとえば，後に触れる Myers の定理，Hadamard-Cartan の定理や凸曲面に関する諸定理）もあるが，分野として活発に研究されるようになったのは，次の定理 (Rauch の球面定理 [49]) から始まるといってよいであろう．

次元 n のみによる正の数 ϵ_n が存在し，単連結リーマン多様体 M が $1 \geq K_M \geq 1-\epsilon_n$ を満たすならば，球面と同相である．

この定理はその後多く発見されている「球面定理」と呼ばれる一連の定理の嚆矢となったものである．ここで，その後にあらわれた代表的な球面定理のいくつかを挙げる[2]．

---

[1]定義は大津氏の論説をみよ．

[2]本稿で述べるのは，数多くの球面定理のうちのごく一部である．[53] にはより詳しい概説がある．

以後 K_M でリーマン多様体 M の断面曲率をあらわす.

定理 2.1. (Klingenberg, Berger [39, 3]) 単連結リーマン多様体 M は, $1 \geq K_M > 1/4$ を満たすならば, 球面と同相である.

$1 \geq K_M \geq 1/4$ が満たされるならば, M は球面と同相であるか, コンパクト型対称空間[3]と等長的である.

定理 2.1 は Rauch の定理の一般化であり, 断面曲率の上下からの評価をもとに, 球面の位相型を特徴づけるという意味で, 最良のものである[4]. (複素射影空間, 4 元数射影空間, 8 元数射影空間の断面曲率は 1 と 1/4 の間にある.)

定理 2.2. (Bochner [59]) 単連結リーマン多様体 M の曲率テンソル R が任意の反対称テンソル ξ に対して

$$\frac{C}{2} \leq \frac{-R_{ijk\ell}\xi^{ij}\xi^{k\ell}}{\|\xi\|} \leq C$$

を満たすならば (C は正の定数), M は球面と同じ $\mathbb{R}$ 係数ホモロジー群をもつ.

定理の仮定は曲率作用素にかんするもので, 断面曲率に関する条件よりは強いので, 定理 2.2 は定理 2.1 に含まれる (示されたのは定理 2.2 の方が先). ここで述べたのは, 証明の方法が大きく異なるからで, その点については最後の節で説明する.

定理 2.3. 単連結リーマン多様体 M は, $1 \geq K_M \geq 1 - \epsilon$ を満たすならば, 球面と微分同相である.

定理 2.3 の定理 2.1 との違いは, 結論が同相より強い微分同相となっている点である. 定数は最初に証明された形 [21, 52] では, $1-\epsilon_n$ であった (ϵ_n は具体的には与えられない正の定数で, 次元に依存する.) その後, 次元によらない定数 $1-\epsilon$ に改良され, さらに具体的な数 $(1-\epsilon = 0.87)$ が求められた [54]. 具体的な数も何回かにわたって改良され[5] ている. 定理 2.1 の数 $1-\epsilon = 0.25$ が微分同相も与える可能性もあり, 最良の値はまだわかっていない.

定理 2.4. (Berger [3], Grove-塩浜 [32]) リーマン多様体 M が $K_M \geq 1/4$ を満たし, 直径が π より大きければ, 球面と同相である.

Berger は定理の仮定のもとで, M がホモトピー球面であることを証明し, Grove-塩浜は球面と同相であることを証明した. 一般ポアンカレ予想を用いれば, 後者は前者から得られるが, 証明法が両者で大きく異なっている. Grove-塩浜の証明 (10 節で説明する) は, 微分可能とは限らない関数のモース理論を用いるもので, 断面曲率が下からだけ評価されている状況での計量リーマン幾何学に多くの応用を持った.

---

[3] より正確には, 複素射影空間, 4 元数射影空間, 8 元数射影空間のどれか

[4] 条件を $1 \geq K_M \geq 1/4 - \epsilon$ の形にゆるめたものもいくつか知られている. [1] をみよ.

[5] 現在知られている最良の評価は $1 - \epsilon = 0.68$ ぐらいである ([33, 55])

球面定理は，リーマン多様体のなかで最も基本的な球面を特徴付けるものである．(定理 2.1 では，球面の次に基本的であるコンパクト型対称空間も含まれている.) 球面定理の計量リーマン幾何学における位置づけをみるには，曲面（２次元実多様体）の分類のやり方を思い起こすとよい．その方法のひとつは，まず,「単連結２次元多様体は球面である」という定理，すなわち球面の特徴付けを証明し，一般の曲面は，そこに帰着していくことによって分類する．

同様にして球面定理はその後の計量リーマン幾何学の発展で大きな役割を果たした．特に，今まであげた４つの定理の証明にあらわれた手法は，より一般の状況での研究にも重要な役割を果たした．

3. 有限性定理と Gromov-Hausdorff 距離

球面定理と並んで，計量リーマン幾何学で重要な定理に有限性定理がある．これは，１９７０年代初頭の Cheeger と Weinstein の仕事に端を発する．Cheeger の有限性定理 [5] は次のように述べられる．

定理 3.1. おのおのの正の定数 D, v, n に対して，直径が D 以下，体積が v 以上かつ $1 \geq K_M \geq -1$ であるようなリーマン多様体 M の微分同相類の数は有限である．

定理 3.1 の証明法は，Rauch の球面定理および定理 2.1 (および定理 2.3) と密接に関係があり，それについては後の節で説明する．

定理 2.3 や定理 3.1（およびその証明）には，２つのリーマン多様体が近いならば，同相あるいは微分同相である，という考え方があらわれる．これは「剛性」ともいうべきであろう．そこでの近さの意味を一般のリーマン多様体について明確に定めたのが，Gromov-Hausdorff 距離である[6]．また，Gromov-Hausdorff 距離の導入により，さらに様々な定理が生まれていく．Gromov-Hausdorff 距離を定義する前に，まず古典的な Hausdorff 距離を復習する．(X, d) を距離空間とし，Y_1, Y_2 をその部分空間とする．

$$N_\epsilon Y = \{x \in X | d(x, Y) < \epsilon\}$$

とおく．(ここで，$d(x, Y) = \inf\{d(x, y) | y \in Y\}$ である.)

定義 3.1. Y_1 と Y_2 の間の **Hausdorff** 距離 $d_X(Y_1, Y_2)$ とは，$Y_2 \subset N_\epsilon Y_1$, $Y_1 \subset N_\epsilon Y_2$ なる正の数 ϵ の下限である．

Hausdorff 距離は，完備な距離空間 (X, d) に対して，そのコンパクト部分空間全体のなす集合上の完備な距離を定めることが知られている．

Gromov-Hausdorff 距離とは Hausdorff 距離を絶対化したものである．すなわち（あらかじめどこかに入っているわけではない）２つの距離空間の間の距離を定める．

定義 3.2. ２つの距離空間 (X_1, d) と (X_2, d) の間の **Gromov-Hausdorff** 距離とは，距離空間 Z と，等長埋め込み $X_1 \to Z$, $X_2 \to Z$ を動かしたときの，Hausdorff 距離 $d_Z(X_1, X_2)$ の下限である．

Gromov-Hausdorff 距離を以後 $d_H(\cdot, \cdot)$ であらわす．

---

[6] Gromov-Hausdorff 距離についてより詳しくは [24, 27, 18] 参照.

Gromov-Hausdorff 距離は（たとえば）コンパクト距離空間の等長類全体の集合上の，完備な距離をあたえることが知られている．

有限性定理に関わる Gromov-Hausdorff 距離についての重要な定理は，コンパクト性定理と剛性定理である．これらはより発展した形で，山口氏の論説で詳しく説明されている．ここでは，山口氏の論説で説明されている発展が起こる前に示されていた諸結果を述べる．

まず，リッチ曲率の関する Gromov の相対コンパクト性定理を述べる．n,D に対して，$\mathrm{Ricci} \ge -(n-1)$ を満たし，直径が D 以下であるような，n 次元リーマン多様体の等長類全体の集合を $\mathfrak{S}_n(D)$ とかく．

定理 3.2. $\mathfrak{S}_n(D)$ の（コンパクト距離空間の等長類全体の集合での）*Gromov-Hausdorff* 距離による閉包はコンパクトである．

定理の証明の方法は，Rauch の球面定理および定理 2.1,1.5 の証明法を発展させたもので，5 節で説明する．

次に剛性定理について述べる．Gromov の相対コンパクト性定理は，リッチ曲率の下からの評価という，比較的弱い曲率の仮定のもので得られたが，剛性定理には，より強い仮定が必要である．ここでは，もともと Gromov が仮定した比較的強い仮定をおいて考える．n,D,v に対して，$1 \ge K_M \ge -1$ をみたし，直径が D 以下で，体積が v 以上であるような，n 次元リーマン多様体 M の等長類全体の集合を $\mathfrak{M}_n(D,v)$ とかく．

定理 3.3. 正の数 $\epsilon_n(D,v)$ が存在し，$M_1, M_2 \in \mathfrak{M}_n(D,v)$ でありかつ，$d_H(M_1,M_2) \le \epsilon_n(D,v)$ であるならば，M_1 と M_2 は微分同相である．

定理 3.3 の仮定 $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}_n(D,v)$ を弱める研究は，その後の発展で重要な役割を果たした．$\mathfrak{M}_n(D,v)$ の定義中の $1 \ge K_M \ge -1$ を $K_M \ge -1$ に緩め，結論の微分同相を同相に置き換えた定理が Perelman によって示されている．これについては，山口氏の論説に詳しい紹介がある．リッチ曲率を考えた場合についても研究がある（酒井氏の論説に紹介されている）．

定理 3.2 と 3.3 を用いると定理 3.1 が得られる．その証明は容易なので演習問題とする．

定理 3.2 は相対コンパクト性を主張している．すなわち $\mathfrak{S}_n(D)$ の元からなる列 M_i に対して，収束部分列があることを主張している．関数解析との類似を考えれば，その極限 M_∞ は種々の計量リーマン幾何学の問題の「弱解」と見なせる．するとその「Regurality」が重大な問題である．これは，定理 3.3 の証明とも密接に関わる．次の定理はこの「Regurality」に関わるものである．

定理 3.4. $\mathfrak{M}_n(D,v)$ の閉包の元は，$C^{1,\alpha}$ 級のリーマン多様体である[7]

ここで α は 1 より小さい任意の正の数である．また $C^{1,\alpha}$ 級のリーマン多様体とは，計量テンソルの 1 階微分までが C^α 級ヘルダー連続であるような，リーマン多様体をさす．

[7] この定理は，Gromov[24] のアイデアに基づいて，[20, 48] で証明が完成した．もっとも，ロシアでも独自あるいは先行するの結果が多くあり（たとえば，[43, 44, 2]）こちらの方が早くできていたのかもしれない．

定理3.4の仮定は$\mathfrak{M}_n(D,v)$であるから，かなり強い．これを弱める研究には2通りある．(より一般には両方の一般化を同時にする.) 一つは$\mathfrak{M}_n(D,v)$の定義にある「体積がv以上」なる仮定を除く方向である．これは，退化していくリーマン多様体の列の極限を調べることになり，その研究はリーマン多様体の崩壊（collapsing）の研究と呼ばれている．本書ではそれほどにはあらわれないので，これについては省略する（[18]を見よ）．もう一方の一般化は断面曲率についての仮定$1 \ge K_M \ge -1$を$K_M \ge -1$に緩めるものである．この方向で定理3.1は次のように一般化されている．

n,D,vに対して，$K_M \ge -1$をみたし，直径がD以下で，体積がv以上であるような，n次元リーマン多様体Mの等長類全体の集合を$\mathfrak{M}'_n(D,v)$とかく．

定理 3.5. (Grove-Petersen-Wu [29, 31]) 任意のn, D, vに対して，$\mathfrak{M}'_n(D,v)$の元の同相類の数は有限である[8].

定理3.5の証明は，11節で説明する。

$K_M \ge -1$を満たすリーマン多様体の列の極限は，Alexandrov空間の一種である．Alexandrov空間の研究はこのような意味でも，計量リーマン幾何学に重大な役割を果たす．Alexandrov空間については，本書の他の論説で詳しく述べられているので，本稿では触れない．

4. 測地座標と単射半径

定理2.1の基礎になっているのは，次の定理である．

定理 4.1. コンパクト多様体Mが開球D^nと同相な2つの開集合で覆わるならば，Mは球面と同相である．

定理4.1を球面定理に応用する為に，たとえば定理2.1の仮定を満たすMを，2つの座標近傍で覆いたい．リーマン多様体に対して，その座標近傍のサイズを評価することは，他の応用でも重要な役割を果たす．まず次の定理を思い出そう．

命題 4.2. コンパクトリーマン多様体Mに対して，正の数ϵがあって，次のことが成り立つ．2点$p, q \in M$の間の距離がϵより小さいならば，p, qを結ぶ長さがϵ以下の測地線が<u>ただ一つ</u>存在する．

命題4.2の証明はリーマン幾何学の多くの標準的な教科書に載っている．強調しておいたが，我々の目的にはただ一つであるという点が重要である．この点を少し説明しよう．(完備) リーマン多様体Mの1点$p \in M$に対して，指数写像$\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$が定まる．すなわち$V \in T_p(M)$に対して，$\frac{d\ell}{dt}(0) = V$なるような測地線$\ell : \mathbb{R} \to M$をとり，$\ell(1) = V$とおく．命題4.2は$\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$が半径$\epsilon_M$の球上で単射であることを導く．

[8] 3次元の場合はホモトピー類の数の有限性しか，[29, 31]では証明されていない．現在では，Perelmanの安定性定理より，3次元でも同相類の数の有限性が示されている．

定義 4.1. リーマン多様体 M の単射半径 (*injectivity radius*) $i_M : M \to \mathbb{R}$ とは，$p \in M$ に正の数

$$i_M(p) = \sup\left\{\epsilon | \mathrm{Exp}_p : T_pM \to M \text{ は } \{V \in T_pM | \|V\| < \epsilon \text{ で単射 }\}\right\}$$

を対応させる関数である．

命題 4.2 は，コンパクトリーマン多様体 M にたいして $i_M \ge \epsilon_M$ が成り立つことを意味する．(i_M が連続であることは容易にわかるから，$i_M \ge \epsilon_M$ だけなら各点で Exp_p が原点の近傍で微分同相であること[9]から容易に従う．命題 4.2 はもう少し強いことを言っている．)

$R < i_M(p)$ のとき，p での指数写像 $\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$ を半径 R の球体に制限すると，p の近傍の座標が得られる．これを測地座標（geodesic coordinate）という．

さて，命題 4.2 の ϵ_M あるいは単射半径 i_M を下から評価することが，定理 2.1 に重要である．これが次の定理である[10]．

定理 4.3. 定理 2.1 の仮定を満たす多様体 M の単射半径について，$i_M \ge \pi$ が成り立つ．

より正確に述べると，偶数次元の場合には，$K_M > 0$ であるリーマン多様体では $i_M \ge \pi$ でかつ単連結である[11]．奇数次元の場合には，$1 \ge K_M \ge 1/4$ で単連結なリーマン多様体では $i_M \ge \pi$ が成り立つ．(単連結でない場合についても種々の結果があるが省略する．)

定理 4.3 を用いると，定理 2.1 のは，おおむね，次のように証明される．定理 4.3 より M の単射半径は π 以上で，特に，M の直径は π 以上であることに注意しておく．

まず，$1 \ge K_M > 1/4$ とする．このときは M のリーマン計量を $1+\delta$ 倍 (δ は十分小さい正の数) しても $K_M > 1/4$ は満たされる．すると，M は定理 2.4 の仮定を満たから，球面と同相である．(定理 2.4 の証明は 10 節で説明する．)

次に，$1 \ge K_M \ge 1/4$ とする．もし，M の直径が π より真に大きいならば，やはり，定理 2.4 より，M は球面と同相である．

最後に M の直径が π の場合を考える．この場合は，指数写像 $\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$ を半径 π の球体 $D^n(\pi)$ に制限して考えると，その内部では，定理 2.1 より，Exp_p は微分同相で，また，$\mathrm{Exp}_p(D^n(\pi))$ は M 全体になる．つまり，n 次元球体をその境界のところでつぶして，M ができあがっている．この状況を詳しく調べることで，M がランク 1 のコンパクト型対称空間であることを，証明することができる．この部分の証明は省略する．(たとえば [8]7 章参照．)

定理 4.3 の証明は，その概略を後で述べる．その前に，基礎的なことをいくつか述べておく．まず次の定理が成り立つ．

---

[9] これも実は逆関数定理からすぐわかる

[10] 定理は偶数次元では [3], 奇数次元では [40, 11] による．

[11] この単連結性の主張を Sygne の定理という．

定理 4.4. リーマン多様体 M が，$K_M \le 1$ を満たせば，指数写像 Exp_p の微分について

$$\|d_x \mathrm{Exp}_p(V)\| \ge \|V\| \sin \frac{x}{r}$$

が成り立つ．ここで $x \in T_p(M)$, $\|x\| = r$, $V \in T_xT_p(M) \cong T_p(M)$.

また，$K_M \ge 1$ ならば，

$$\|d_x \mathrm{Exp}_p(V)\| \le \|V\| \sin \frac{x}{r}$$

が成り立つ．

定理4.4から特に，$1 \ge K_M$ を満たすリーマン多様体の指数写像 $\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$ のヤコビ行列は，半径 π の球体（の内部）では可逆であることをがわかる．

定理4.4の不等式の等号が球面の場合に成り立つことに注意しておく．

定理4.4はRauchがその球面定理を証明するために用いたRauchの比較定理の系である．Rauchの比較定理はヤコビ場についてのものであるが，ヤコビ場は定理4.4の証明では次のようにしてあらわれる．x, V を定理4.4のようにとり，測地線 ℓ_s を

$$\ell_s(t) = \mathrm{Exp}_p(t(x + sV))$$

で定義する．各々の s に対して ℓ_s は測地線を定める．その s に関する微分

$$J(t) = \left.\frac{\partial \ell_s(t)}{\partial s}\right|_{s=0} \in T_{\ell_0(t)}M$$

がヤコビ場である．ヤコビ場の $t = 1$ での値を考えると，

$$d_x \mathrm{Exp}_p(V) = J(1),$$

が成り立つ．よって定理4.4を示すには，ヤコビ場の大きさを評価すればよい．それにはヤコビ場が満たす微分方程式

$$\frac{D^2}{dt^2}J(t) + R\left(\frac{d\ell_0}{dt}(t), J(t)\right)\frac{d\ell_0}{dt}(t) = 0 \tag{4.1}$$

を用いる．ここで $\frac{D}{dt}$ は接ベクトル $\frac{d\ell_0}{dt}(t)$ についての共変微分，R は曲率テンソルである．

正規直交ベクトル対 e_1, e_2 に対して，$g(R(e_1, e_2)e_2, e_1)$ は e_1, e_2 の張る面の断面曲率である (ここで g はリーマン計量を表す) から，方程式 (4.1) の第2項は断面曲率であらわすことができる．このことを用いて，方程式 (4.1) を球面の場合の同様の方程式と比べることで定理4.4が示される．

定理4.4の結論の不等式を積分すると，p の近くの2点 $\mathrm{Exp}_p(x)$, $\mathrm{Exp}_p(y)$ の間の距離を，球面内の対応する2点 $\mathrm{Exp}_{\tilde p}\,\tilde x$, $\mathrm{Exp}_{\tilde p}\,\tilde y$ と比べることができる．すなわち，$\tilde p \in S^2$，$\tilde x, \tilde y \in T_pS^2$，$\|x\| = \|\tilde x\|$, $\|y\| = \|\tilde y\|$, $\langle x, y\rangle = \langle \tilde x, \tilde y\rangle$ なるようにとると，

$$d(x, y) \ge d(\tilde x, \tilde y) \qquad (\text{ないしは } d(x, y) \le d(\tilde x, \tilde y)) \tag{4.2}$$

が成り立つ．この式は x, y が十分近くの場合，たとえば一つの測地座標の中で成立する．これを必ずしも近くにあるとは限らない x, y に対しても成り立つように改良したのが，種々の比較定理であると考えればよいであろう．たとえば，Toponogov の比較定理は 3 角形の角度と辺の長さの言葉で定式化されている．(Toponogov の比較定理は大津氏の論説で詳しく説明されている．)

既に述べたように，定理 4.4 は，$K_M \le 1$ ならば，指数写像は半径 π まではめ込みであることを意味する．特に指数写像は局所的には半径 π まで単射である．大域的にも単射であるかどうかの考察が，定理 4.1 の証明には必要である．ここで用語をいくつか導入しておく．

定義 4.2. $q \in M$ が $p \in M$ に関して共役点 (conjugate point) であるとは，$q = \mathrm{Exp}_p(x)$ なる x で，$d\,\mathrm{Exp}_p$ が x で全射でないものが存在することをさす．

q が $p \in M$ の **cut point**[12]であるとは，$x \ne y \in T_p(M)$ で $\mathrm{Exp}_p x = \mathrm{Exp}_p y = q$ なるものが存在することをさす．

単射半径 $i_M(p)$ が r 以上であるとは，p から距離 r 以内に共役点も cup point もないことと同値である．共役点までの距離の評価は，ヤコビ場の評価 (定理 4.4) を用いてできるが，cut point までの距離の評価はより大域的な問題である．ここで，共役点について次の基本的な定理を述べておく．(証明はたとえば [8]p96 をみよ．)

定理 4.5. リーマン多様体 M の任意の 2 点 p, q に対して，$d(p,q) < r$ なら q は p についての共役点でないとする．もし，$i_M(p) < r$ なる点 p が存在すれば，M には長さが $2r$ 未満の閉測地線が存在する．

定理 4.4 と定理 4.5 を用いると，定理 4.3 はその仮定の下で閉測地線の長さが 2π 以上であることを示せばよいことになる．この証明についてごく簡単に以下説明する．(詳しくは [8]p100 などをみよ．)

まず次元が偶数の場合を考える．$\ell : S^1 \to M$ を $1 \ge K_M > 0$ なる単連結多様体の長さが最短の測地線とする．$S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とみなす．$p = \ell(0)$ とする．ℓ に関する平行移動により，ホロノミー $\mathrm{hol}_\ell : T_pM \to T_pM$ が定まる．接ベクトル $\frac{d\ell}{dt}(0)$ はホロノミーで不変である．hol_ℓ は直交変換であるから，$\dim M$ が偶数次元であることより，$\frac{d\ell}{dt}(0)$ と直交するベクトル V で $\mathrm{hol}_\ell(V) = V$ であるものがある．すると，V を平行移動することにより，$V(t) \in \ell(t)$ なる ℓ にそったベクトル場が決まり，それは平行ベクトル場である．

$$\ell_s(t) = \mathrm{Exp}_{\ell(t)}(sV(t))$$

とおく．$V(t)$ の共変微分が 0 であることを用いると，ℓ_s の長さの s に関する 1 階微分が 0 であることがわかる．さらに，断面曲率が正であることを用いると，ℓ_s の長さの s に関する 2 階微分が負であることが示される[13]．これは，ℓ が最短測地線であることに反する．

---

[12]cup point の訳語はあるのかどうか知らない．p の cut point 全体を cut locus というが，その訳語は最小軌跡である．

[13]第 1 変分公式，第 2 変分公式を用いる．

奇数次元のときの定理 4.3 の証明には，より精密な議論が必要である．実際，S^3 を有限群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の作用で割った商空間は単連結ではないが，曲率は 1 で，$p \to \infty$ でその単射半径は 0 に近づく．したがって，定理 4.3 を奇数次元の場合に証明するためには，単連結性の仮定を用いることが不可欠である．

奇数次元のときの証明は，おおよそ次の通りである．長さが 2π 未満である閉測地線 ℓ があったとする．M が単連結であから，ℓ は定置写像とホモトピックである．ℓ_s を $\ell_0 = \ell$, $\ell_1 =$ 定置写像 なるホモトピーとする．

ℓ は長さ最短であるとしてよい．さらに仮定 $K_M \geq 1/4$ を用いて，ℓ_s の長さはいつも 2π 未満 であるとしてよいことが示される．(長さが 2π 以上の閉測地線の（長さに関する）モース指数が 2 以上であることを用いる[14].)

さて，1 点 $p = \ell(0)$ での指数写像 Exp_p を考える．Exp_p は半径 π の球体の内部では，はめ込みである．次元の等しい空間どうしのはめ込みであるから，だいたい被覆写像とおもってよい．ℓ_s の長さは 2π 未満であるから，ℓ_s の像は p からの距離が π 未満である．この範囲では，Exp_p は被覆空間のようなものだから，ホモトピー ℓ_s を接空間 T_pM に持ち上げることができる．(ℓ_1 は定置写像だから，持ち上げることができることをつかう.) ところが，$\ell_0 = \ell$ が測地線であることを考えると，ℓ_0 は $S^1 \to T_pM$ なる連続写像に持ち上げることができない．これは矛盾である．これで，単射半径が π 以上であることが示された[15].

5. パッキングとコンパクト性定理

有限性定理（定理 3.1）や定理 3.2 の証明にも，今まで説明してきた議論と同様の議論があらわれる．この点について説明しよう．まず定理 3.2 について述べたい．この定理を導く基礎になる命題は次の命題である．

命題 5.1. $D \in \mathbb{R}$ と，$N : (0,1) \to \mathbb{N}$ に対して，次の条件 (1), (2) を満たす完備距離空間の等長類全体の集合 $\mathfrak{Met}(D, N)$ は，*Gromov-Hausdorff* 距離に関してコンパクトである．

(1) M の直径は D 以下．
(2) 任意の $\epsilon \in (0,1)$ に対して，次の性質をもつ有限部分集合 $M(\epsilon)$ が存在する．
- (2.a) $M(\epsilon)$ の位数は $N(\epsilon)$ 以下．
- (2.b) 任意の $x \in M$ に対して，$d(x, x_0) < \epsilon$ なる，$x_0 \in N(\epsilon)$ が存在する．

---

[14]半径が 2 すなわち断面曲率が 1/4 である n 次元球面では，長さ 2π の測地線分（北極と南極を結んでいる）は，長さを北極と南極を結ぶ線分全体のなす空間上の関数とみたとき，モース指数が $n-1$ である．これと比較する．

[15]以上の議論では，仮定が $1 \geq K_M \geq 1/4$ で等号が入っている場合の定理 2.1 の証明には不十分である．(ℓ_s の長さを 2π 以下 にできるというところまでしかでないから)．その場合はさらに精密な議論を要する．

命題5.1の証明はたとえば[18]§2参照.

後でも使うので言葉を導入しておく.

定義 5.1. (2.b) を満たす M の部分集合のことを M の ϵ ネットという.

命題5.1から定理3.2を導くには，次の命題を用いる．$\mathbb{S}^n(\kappa)$ で断面曲率が定数 κ であるような，完備単連結リーマン多様体をあらわす.

命題 5.2. リーマン多様体 M のリッチ曲率が Ricci $> (n-1)\kappa$ を満たせば，その半径 R の球 $B_p(R,M)$ の体積 $\mathrm{Vol}(B_(R,M))$ に関して，$r < R$ ならば

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_p(R,M))}{\mathrm{Vol}(B_p(r,M))} \le \frac{\mathrm{Vol}(B_{p_0}(R,\mathbb{S}^n(\kappa)))}{\mathrm{Vol}(B_{p_0}(r,\mathbb{S}^n(\kappa)))} \tag{5.1}$$

が成り立つ.

これも比較定理の一種で Bishop-Gromov の不等式と呼ばれる．式 (5.1) の右辺は M が断面曲率 κ の定曲率空間の場合の左辺の値である．命題5.2の証明には，指数写像のヤコビ行列式を評価する．これは定理4.4と同様になされる．違うのは命題5.2では仮定がリッチ曲率に対するものである点である．しかし，ヤコビ行列の固有値ではなくその積である行列式を評価すれば十分であるので，断面曲率の平均値であるリッチ曲率に対する仮定で十分であるというのが，アイデアの半分である.

この議論だけだと，単射半径の中でしか，命題を示せない．(体積の評価を単射半径の外でも行えるというのは，議論の要点の一つである.) 単射半径を超えても命題が正しいことを示すには，(p は止めて)$q \in M$ を動かしたときの p,q を結ぶ最短測地線を $\ell_{p,q}$ とおき（複数ある時はその全部を考える），

$$V = \left\{ \frac{d\ell_{p,q}}{dt}(0) \in T_pM \,\middle|\, q \in M \right\}$$

を考える．ただし，$\frac{d\ell_{p,q}}{dt}(0)$ の大きさが $d(p,q)$ になるようにパラメータをとっておく.

$$\mathrm{Vol}(B_p(R,M)) = \int_{V\cap B(R)} \|\det d_x \mathrm{Exp}_p\| dx$$

である．($B(R) \in T_pM$ は原点を中心にした半径 R の球体，$\det d_x \mathrm{Exp}$ は指数写像のヤコビ行列.) 単射半径のそとで考えることの影響は，$V \cap B(R) \neq B(R)$ であることである．しかし，V は星状である．つまり，$x \in V$ ならば x と 0 を結ぶ線分は V に含まれる．このことを用いると，(5.1) の左辺は，単射半径が R より大として計算した値より，小さいことがわかり，命題5.2が示される.(詳しくは，たとえば，[37] 4.6参照.)

命題5.2が次の古典的な定理（Myersの定理）を導くことに注意しておく.

定理 5.3. n 次元完備リーマン多様体 M が，Ricci $\ge (n-1)$ を満たせば，M はコンパクトでその直径は π 以下である.

命題5.2と命題5.1から定理3.2を導くには次のようにする．Mが定理3.2の仮定を満たすとして，命題5.1の仮定をチェックすればよい．$\epsilon > 0$とする．Zを「$z_1, z_2 \in Z, z_1 \neq z_2$ ならば $d(z_1, z_2) > \epsilon$」を満たすMの部分集合の中で極大なものとする．すると，極大性から，(2.2)が成り立つ．一方$B_z(\epsilon/2, M)$，$z \in Z$はお互いに交わらないから，

$$\sum_{z\in Z} \mathrm{Vol}(B_z(\epsilon/2, M)) < \mathrm{Vol}\, M$$

が成り立つ．$B_z(D, M) = M$であるから，命題5.1より

$$\sharp Z \leq \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\sup \mathrm{Vol}(B_p(\epsilon, M))} \leq \frac{\mathrm{Vol}(B_{p_0}(D, \mathbb{S}^n(\kappa)))}{\mathrm{Vol}(B_{p_0}(\epsilon/2, \mathbb{S}^n(\kappa)))}$$

が成り立つ．この右辺を$N(\epsilon)$とすればよい．

注意 5.1. 上の証明であらわれた，球をより小さい球で覆うのに必要な数を調べるというアイデアは，実解析でもしばしば用いられる．本書の加須栄氏や塩谷氏の論説でも，距離空間上の解析に用いられている．

上の証明のZについて，$B_z(\epsilon, M), z \in Z$は$M$を覆っている．すなわち，$M$をおおう測地球の数を評価することによって，定理3.2を示したことになる．ここで，もしϵがMの単射半径より小さければ，$B_z(\epsilon, M)$はD^nと微分同相である．こう見てくると，定理3.2の証明が，球面定理の証明法の拡張であることがわかると思う．球面定理の証明に用いられた定理4.1は，多様体が2つの球体で覆われている場合を考え，球面と同相であることを結論としているが，これを「多様体がある一定の数の球体で覆えるならば多様体の微分同相類の数がその数で評価できる」というタイプの命題に置き換えればよい．ただし，この「」のなかの主張自身はあまり成り立ちそうにないので，球体が貼り合わさっているところでの，貼り合わせ写像の様子も含めて考える必要がある．それを行う方法はいくつか知られているが，後の節で述べる．これを実行して得られるのが定理3.1である．ここでは，ちょっと弱い形の，次の主張を示しておく (Weinstein[58])．

命題 5.4. D, ϵに対して，次の条件を満たすn次元閉リーマンM多様体のホモトピー類の数は有限個である．

(1)　$M \in \mathfrak{S}_n(D)$,
(2)　Mの単射半径はϵより大．

証明には，定理3.2の証明に用いたZを用いる．これを用いて，被覆$B_z(\epsilon, M)$を考えると，これは単純被覆である．すなわち，任意の$z_1, \cdots, z_k \in Z$について，$\cap_{i=1}^k B_{z_i}(\epsilon, M)$は可縮であるか空である．このことから次の単体複体$K(Z)$が$M$とホモトピー同値であることがわかる．

(1)　$K(Z)$の頂点はZの元．
(2)　$z_0, \cdots, z_k \in Z$が$K(Z)$のk単体をはるのは，$\cap_{i=0}^k B_{z_i}(\epsilon, M) \neq 0$のときで，そのときに限る．

Z の位数は D,ϵ だけで決まる数より小さいから，$K(Z)$ の同型類の数は有限である．これから命題 5.4 が従う．

定理 3.1 では単射半径の代わりに体積の下からの評価が仮定されている（この方が幾何学的に自然な仮定である）．断面曲率についての仮定の下では，両者は同値である．すなわち，

命題 5.5. n, D, v のみによる正の数 $c(n,D,v)$ が存在し，$M \in \mathfrak{M}_n(D,v)$ ならば，$i_M \geq c(n,D,v)$ である．

命題 5.5（Cheeger による）の証明は定理 3.5 の証明とも関わりが深いので，11 節で説明する．

6. イソトピーによる同相・微分同相の構成

5 節では多様体を D^n と微分同相な開集合で覆うとき必要になる開集合（そこでは距離球体をもちいた）の数の評価について述べ，それがたとえばホモトピー類の数の評価を導くこと（命題 5.4）を説明した．しかし，そこでも述べたように，微分同相類あるいは同相類の数を評価するには，より精密な議論が必要である．この節以後の 4 つの節ではそこで必要になる考え方のいくつかを紹介する．

再び球面定理，この場合は微分可能球面定理（定理 2.3）を考える．定理 2.1 の証明についての 4 節の説明では明示しなかったが，次の事実が成り立つ．

命題 6.1. リーマン多様体 M が $K_M 1/4$ を満たし，その直径が π より大きいとする．このとき，$p,q \in M$ を p,q の距離が M の直径になるようにとると，

$$\operatorname{Int} B_p(\pi, M) \cup \operatorname{Int} B_q(\pi, M) = M$$

である．(Int は内部（開核）をあらわす.)

証明は 10 節で与える．

定理 2.3 の仮定を満たす M を考える．すなわち，M は単連結かつ $1 \geq K_M \geq 1-\epsilon$ である．すると，命題 6.1 と定理 4.3 により[16]，M を 2 つの球体 V_1, V_2 で覆うことができる．($V_i \cong D^n$ である.)（ここでは V_i は閉集合にとる.）このとき $\partial V_i \cong S^{n-1}$ である．また，$V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$ となるようにとることができる．すると，

$$I : S^{n-1} \cong \partial V_1 = \partial V_2 \cong S^{n-1} \tag{6.1}$$

なる微分同相写像が決まる．容易にわかるように，I が恒等写像とイソトピックならば（すなわち，I_t なる微分同相の滑らかな族で，$I_0 = I$, $I_1 = id$ なるものがあれば），$M = V_1 \cup V_2$ は球面 S^n と微分同相になる．そこで，次のことを用いる．

命題 6.2. コンパクトリーマン多様体 N に対して，$\epsilon_N > 0$ が存在して，$F : N \to N$ が C^1 ノルムに関して恒等写像と ϵ_N 程度近ければ，F は恒等写像とイソトピックである．

---

[16] M の直径が丁度 π であると，M は対称空間になってしまうので，$1 \geq K_M \geq 1-\epsilon$ を満たさない．

証明は初等的である．命題6.2を定理2.4の証明に用いるには，次の補題をつかう．

補題 6.3. 任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta_n(\epsilon) > 0$ が存在し，次が成り立つ．M を単連結 n 次元リーマン多様体とし $1 > K > 1 - \delta_n(\epsilon)$ を仮定する．このとき，貼り合わせ写像 (6.1) を恒等写像の間の C^1 ノルムに関する距離が ϵ より小さくなるようにとることができる．

証明は省略する．[8] Chapter 7 などを見てほしい．

さて，剛性定理（定理3.3）と有限性定理（定理3.1）の証明に以上の考え方がどのように使えるかを説明したい．Cheeger による定理3.1の元々の証明 [5] は，以上の考え方に近いものなのである．

M,N をリーマン多様体とし，それらが同じ数の距離球で覆われているとする．すなわち $M = \cup_{i=1}^k B_{p_i}(\epsilon, M)$, $N = \cup_{i=1}^k B_{q_i}(\epsilon, N)$ とする．10ϵ は M および N の単射半径より小さいとする．(10倍がついているのは技術的な理由である.）球体たちの交わり方のパターンは一致しているとする．すなわち，i, j について，$B_{p_i}(\epsilon, M) \cap B_{p_j}(\epsilon, M) \neq \emptyset$ であるのは，$B_{q_i}(\epsilon, N) \cap B_{q_j}(\epsilon, N) \neq \emptyset$ であるときで，そのときに限ると仮定する．

さて，M と N はいつ微分同相かを考えよう．そのために，M の座標系 $M = \cup_{i=1}^k B_{p_i}(\epsilon, M)$, と N の座標系 $N = \cup_{i=1}^k B_{q_i}(\epsilon, N)$ の座標変換を比べてみよう．座標変換の定義域と値域が同じになるように，次のようにする．$B_{p_i}(\epsilon, M) \cap B_{p_j}(\epsilon, M) \neq \emptyset$ と仮定する．すると，$B_{p_i}(\epsilon, M) \subset B_{p_j}(10\epsilon, M)$ である．各々の p_i,q_j に対して，等長変換 $T_{p_i}M \cong \mathbb{R}^n$, $T_{q_i}N \cong \mathbb{R}^n$ を決めておき，接空間たちを $\mathbb{R}^n$ と同一視する．(同一視の仕方はいろいろあるがとにかく決めておく.)

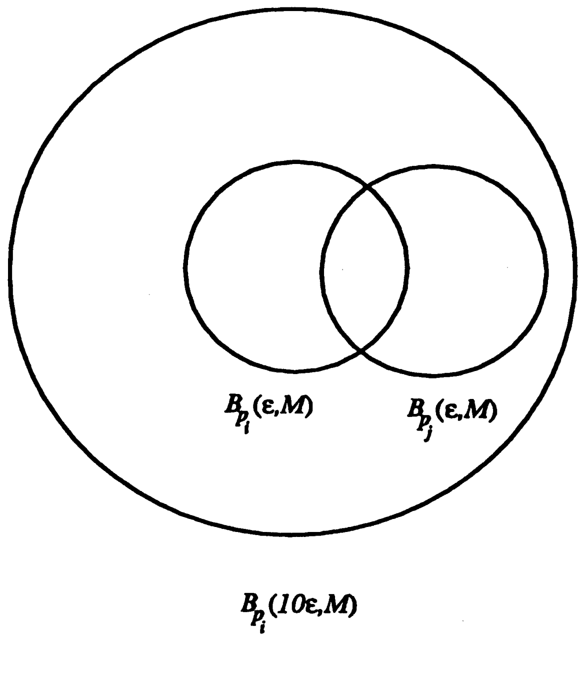


図 1

合成

$$\varphi_{ji}^M = \mathrm{Exp}_{p_j}^{-1} \circ \mathrm{Exp}_{p_i} : B^n(\epsilon) \to B^n(10\epsilon)$$

を考える．ここで $B^n(\epsilon)$ は $\mathbb{R}^n$ の原点を中心とした半径 ϵ の球体で，$\mathrm{Exp}_{p_j}^{-1}$ は指数写像 $\mathrm{Exp}_{p_j} : B^n(10\epsilon) \to N$ の逆写像である．φ_{ji}^N も同様に定義する．

次の命題では $\varphi_{ji}^M, \varphi_{ji}^N$ の 2 階微分（$C^{1,\alpha}$ ノルムでもよい）はある定数 C より小さいと仮定する．

命題 6.4. $\epsilon_{n,k}(C) > 0$ が存在して，次のことが成り立つ．もし，φ_{ji}^M と φ_{ji}^N が C^1 ノルムの意味で $\epsilon_{n,k}(C)$ 程度近ければ，M と N は微分同相である．

命題6.4 を Cheeger は次のようにして証明した．まず命題6.2 を用いて座標変換 φ_{ji}^M，φ_{ji}^N がイソトピックであることをいう．これを用いて，微分同相を作っていく．以上の証明の細部は [5] にある．7節で少し違った議論を用いて証明する．

命題6.4 をもちいて，定理3.1 が証明ができることは，技術的な細部を除いて，想像がつくであろう．すなわち，まず定理の仮定を満たすリーマン多様体を覆うにに必要な測地球の数は，ある定数以下である．また，測地球の数が有界ならば，それらの交わり方のパターンも有限種類である．交わり方のパターンが決まれば，命題6.4 より，座標変換，φ_{ji}^M がお互いに近い２つのリーマン多様体は微分同相であることがわかる．もし，あらわれる座標変換の 2 階微分までが一様に有界であれば，Ascoli-Alzera の定理によって，あらわれる座標変換全体の集合は C^1 ノルムの意味でコンパクトであることがわかるから，定理 3.1 が示される．

問題は，座標変換の 2 階微分を一様に評価することである．定理 3.1 の仮定は曲率に関するもので，曲率は計量の 2 階微分であるから，この仮定から座標変換の 2 階微分の評価が出そうである．しかし，測地座標を用いると，断面曲率に関する仮定は，座標変換の 2 階微分を評価するには不十分である．この問題点を回避するために，Cheeger は命題 6.4 のように「C^1 の意味で近い微分同相写像がイソトピックであること」を使うのでなく,「C^0 の意味で近い同相写像がイソトピック」というより高級な位相幾何学の定理を使った.（ただしこの場合のイソトピーは同相写像 (微分同相写像ではなく）を通ってのイソトピーである.）さらに位相幾何学のイソトピー拡張定理という定理を使って，命題6.4 を証明した．この議論だけだと 4次元の場合の定理 3.1 が証明されない[17]．（すなわち，微分同相の意味の有限性定理が証明されない．4次元以外では，同相であるが微分同相でない多様体は有限個であることが，手術の理論を用いて示されているので，微分同相の意味の有限性定理も，この議論で示される.）

現在では，次の節で述べる調和座標を用いることで，座標変換の $C^{2,\alpha}$ ノルムの，断面曲率による一様な評価ができる．

---

[17]この点はのちに [47] が技術的な議論を補って 4 次元でも定理 3.1 が示された．

以上説明したアイデアは，十分に近い写像同士はイソトピックである，ということを使って，同相や微分同相を作るもので，自然なアイデアであるが，技術的に実行に困難がともなう．

7. 調和座標とその応用

先の節で述べたように，測地座標は座標変換の微分の大きさ（ヘルダーノルム）を，曲率を用いて評価しようとするとき，最良の評価を与えない．この点を解決するのが，調和座標 (Harmonic coordinate) である[18]．調和座標には様々な応用があり，たとえば定理 3.4 の証明の，極限の計量が $C^{1,\alpha}$ 級であることの証明にも，重要な役割を果たす．

リーマン多様体 M から出発する．M の単射半径は r より遙かに大きいとする．一点 $p \in M$ をとり，T_pM の正規直交基を $e_i(p), i = 1, \cdots, n$ とする．$v_i(p) = \mathrm{Exp}_p(re_i(p)), w_i(p) = \mathrm{Exp}_p(-re_i(p))$ とし，

$$h_{p,i}(x) = \frac{d(x, w_i(p))^2 - d(x, v_i(p))^2}{4r^2} \tag{7.1}$$

とおく．$h_{p,i}$ のことを概線形関数 (almost linear function) とよぶ．($M = \mathbb{R}^n$ ならば，$h_{p,i}$ は線形関数である.)

$h_p = (h_{p,1}, \cdots, h_{p,n})$ は p の近傍での M の座標を与える．しかし，これはまだ基本的には距離関数だから，その微分の評価は最良ではない．$h_{p,i}$ を調和関数で置き換える．すなわち，次のような境界条件にもつ，ラプラス方程式 $\Delta\varphi = 0$ の境界値問題を考える．$r << \delta << i_M(p)$ なる δ をとり，

$$\varphi_{p,i} : B_p(\delta, M) \to \mathbb{R}$$

で次の条件を満たすものを考える．

(1) $\Delta\varphi_{p,i} = 0$.
(2) $q \in S_p(\delta, M)$ ならば $\varphi_{p,i} = h_{p,i}$.

定義 7.1. $\varphi_p = (\varphi_{p,1}, \cdots, \varphi_{p,n})$ を調和座標という．

調和座標が p の近傍で座標関数になっていることは，φ_i^p が h_i^p に C^1 ノルムの意味で近いことからわかる．

調和座標の座標変換について，次の $C^{2,\alpha}$ ノルムの評価が成り立つ．$D^n(\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \epsilon\}$ とおく．$10\epsilon < r$ なる ϵ をとり，$p, q \in M$ を $d(p,q) < \epsilon$ となるようにとる．φ_p の逆写像の制限 $\varphi_p^{-1} : D^n(\epsilon) \to M$ の像は $\varphi_q : B_q(r, M) \to \mathbb{R}^n$ の定義域に含まれる．従って，

$$\varphi_{q,p}^M = \varphi_q \circ \varphi_p^{-1} : D^n(\epsilon) \to \mathbb{R}^n \tag{7.2}$$

が定義される．

---

[18] ゲージ理論において，ゲージ理論の方程式の解のゲージ同値類をうまく選び，ゲージ変換の自由度をうまく消すことが，例えばモジュライ空間の研究で重要である．ここで考えているのは，「重力理論」であり，座標変換がゲージ変換にあたる．調和写像のようなうまい座標を選ぶ議論は，物理では Gauge fixing と呼ばれる操作に対応する．調和座標が導入されたのは，Uhlenbeck らがゲージ理論でクーロンゲージなどを用いたのと同時期である．この節の定理 3.4 の証明は，Uhlenbeck による自己共役接続のモジュライ空間のコンパクト性の議論とそっくりである．

定理 7.1. r,ϵ,α と次元 n にだけによる定数 $C(r,\epsilon,\alpha,n)$ が存在して，$\varphi_{q,p}^{M}$ の $C^{2,\alpha}$ ノルムは $C(r,\epsilon,\alpha,n)$ 以下である．

また，調和座標に関してリーマン計量の $C^{1,\alpha}$ ノルムも $C(r,\epsilon,\alpha,n)$ 以下である．

証明は調和関数のアプリオリ評価にもとづく．[34, 35, 20] をみよ．(そこでは後半（リーマン計量の $C^{1,\alpha}$ ノルムの評価）が述べてある．前半はこれから容易に従う．)

応用の例として定理 3.4 を証明してみよう[19]．$\mathfrak{M}_n(D,v)$ の元の列 M_k をとり，その Gromov-Hausdorff 距離に関する極限を X とする．定理 4.3 により，M_k の単射半径は k によらない正の数 r より大きいことに注意しておく．$10\epsilon < r$ なる ϵ をとる．2 節で説明したと同じ方法で，M_k の有限部分集合 $\{p_{i,k}|i=1,\cdots,I_k\}\in M_k$ を，次の条件を満たすようにとることができる．

(1) I_k は k によらない数より小さい．

(2) $\bigcup_i \varphi_{p_{i,k}}^{-1}(D^n(\epsilon)) = M_k$.

(1) より，部分列に移ると，I_k が k によらず一定の数 I であると仮定してよい．すると，(2) から，作られる座標近傍 $\cup_i\varphi_{p_{i,k}}^{-1}(D^n(\epsilon))$ たちの交わりのパターンは有限通りだから，再び部分列にうつって，これも k によらないとしてよい．すなわち，$i,j\le I$ に対して，

$$\varphi_{p_{i,k}}^{-1}(D^n(\epsilon))\cap\varphi_{p_{j,k}}^{-1}(D^n(\epsilon)) \tag{7.3}$$

が空であるかどうかは k によらないとしてよい．

さて，(7.3) が空でないような i,j に対して，(7.2) の $\varphi_{p_{j,k},p_{i,k}}^{M_k}$ を考える．$\alpha<1$ を一つ止めて，$1>\alpha'>\alpha$ なる α' に対して定理 7.1 を適用すると，$\varphi_{p_{j,k},p_{i,k}}^{M_k}$ の $C^{2,\alpha'}$ ノルムが有界であることがわかる．これから，部分列に移って $\varphi_{p_{j,k},p_{i,k}}^{M_k}$ が $C^{2,\alpha}$ 収束するとしてよい．その極限を

$$\varphi_{p_{j,\infty},p_{i,\infty}} : D^n(\epsilon)\to\mathbb{R}^n$$

とする．これらを座標変換として貼り合わせることにより，$C^{2,\alpha}$ 級の微分可能多様体 M_∞ を構成することができる．また，前に述べたように，調和座標におけるリーマン計量テンソルは $C^{1,\alpha'}$ ノルムは一様に有界なので，M_∞ 上の $C^{1,\alpha}$ 級リーマン計量 g_∞ が，M_k 上のリーマン計量の極限として，構成できる．M_k（の部分列）が (M_∞,g_∞) に Gromov-Hausdorff 収束することがわかるから，(M_∞,g_∞) は X に等長的である．これで定理 3.4 が証明された．

つぎに定理 3.3 を証明する．定理が正しくないとすると，$M_{1,k},M_{2,k}\in\mathfrak{M}_n(D,v)$ であって，$M_{1,k},M_{2,k}$ の間の Hausdorff 距離が $1/k$ 以下で，$M_{1,k}$ は $M_{2,k}$ に微分同相でないものが存在する．定理 3.3 より，部分列に移れば，$M_{1,k},M_{2,k}$ はそれぞれ X_1,X_2 に収束する．定理 3.4 により X_1,X_2 は $C^{1,\alpha}$ 級のリーマン多様体である．さらに，次の節で述べる重心技法をもちいると，部分列をとることで，$M_{1,k}$ は X_1 に，$M_{2,k}$ は X_2 に微分同相であるとしてよい．ところが，X_1,X_2 間の Gromov-Hausdorff

[19] 以下の議論は [36] を参考にした．

距離は0であるから，X_1 と X_2 は等長的で，特に微分同相である．これは矛盾である．

定理3.4の曲率の条件を $1 \geq K_M \geq -1$ から $K_M \geq -1$ に変更した類似は，Alexandrov空間のほとんど至る所の座標の存在についての大津・塩谷の定理（大津氏の論説を参照）で，また定理3.3の類似はPerelmanの安定性定理（山口氏の論説を参照）である．

8. 重心技法

6節では，イソトピーに関する定理を用いて，微分同相が構成できることを述べた．そこで言及したイソトピー拡張定理はかなり高級な定理で，使うときにも議論が技巧的に煩雑になる．重心技法 (Center of Mass technique) という方法を用いると，この点が簡易化される．重心技法はほかの目的たとえば群作用などにも応用される．この節では，このテクニックを紹介する．

命題6.4の証明を始めて見よう．命題6.4では指数写像 Exp_p あるいは測地座標の貼り合わせ写像についての仮定がおかれている．実は，必要になるのは，調和座標の場合である．そこで，ここでは Exp_p の代わりに一般の $\varphi_p : D^n(r) \to M$, $\psi_q : D^n(r) \to N$ を考える．すなわち，次の状況で考える．

(a) 被覆 $M = \cup_i \varphi_{p_i}(D^n(\epsilon))$, $N = \cup_i \psi_{q_i}(D^n(\epsilon))$ が存在する．
(b) 座標近傍の間の交わり方のパターンは一致している．すなわち，$\varphi_{p_i}(D^n(\epsilon)) \cap \varphi_{p_j}(D^n(\epsilon)) \neq \emptyset$ であるのは，$\psi_{q_i}(D^n(\epsilon)) \cap \psi_{q_j}(D^n(\epsilon)) \neq \emptyset$ である時で，そのときに限る．
(c) $\varphi_{p_i}(D^n(\epsilon)) \cap \varphi_{p_j}(D^n(\epsilon)) \neq \emptyset$ のとき，$\varphi_{p_i}(D^n(\epsilon)) \subseteq \varphi_{p_j}(D^n(r))$ である．
(d) 座標変換

$$\Phi_{ij} = \varphi_{p_i}^{-1} \circ \varphi_{p_i} : D^n(\epsilon) \to \mathbb{R}^n$$

の $C^{2,\alpha}$ ノルムは有界で C 以下である．

$$\Psi_{ij} = \psi_{q_i}^{-1} \circ \psi_{q_i} : D^n(\epsilon) \to \mathbb{R}^n$$

についても同様．
(e) Φ_{ij} と Ψ_{ij} は C^1 ノルムの意味で十分近い．

この状況で $M \to N$ なる微分同相 F を構成するのが目的である．
さて，$x \in \varphi_{p_i}(D^n(\epsilon))$ に対して，

$$F_i(x) = \psi_{q_i} \circ \varphi_{p_i}^{-1}(x) \in N \tag{8.1}$$

とおく．これは，座標近傍 $\varphi_{p_i}(D^n(\epsilon))$ 上で F を決めたことになる．問題点は，これらの写像が貼り合うか，つまり，$x \in \varphi_{p_i}(D^n(\epsilon)) \cap \varphi_{p_j}(D^n(\epsilon))$ のとき，

$$\psi_{q_i} \circ \varphi_{p_i}^{-1}(x) \stackrel{?}{=} \psi_{q_j} \circ \varphi_{p_j}^{-1}(x) \tag{8.2}$$

か，という点であるが，(8.3) は成り立たない．命題 6.4 の仮定（あるいは上の仮定 (e)）から従うのは，

$$d(\psi_{q_i} \circ \varphi_{p_i}^{-1}(x), \psi_{q_j} \circ \varphi_{p_j}^{-1}(x)) < \epsilon \tag{8.3}$$

である．(ϵ は十分小さい数.)（もっと正確に述べると，(8.3) は C^0 ノルムの評価であるが，仮定 (e) は C^1 ノルムについての評価である.）

そこで，$x \in \varphi_{p_i}(D^n(\epsilon))$ なる i について，$F_i(x)$ を「平均」してしまおうというのが，重心技法である．

命題 6.4 の証明の続きは，重心技法の説明の後にして，ここで，一般的に重心技法を説明する．

リーマン多様体 M 上の確率ボレル測度 $\mathfrak{m}$ （$\mathfrak{m}(M) = 1$ なるボレル測度）から出発する．$\mathfrak{m}$ の台を $Supp(\mathfrak{m})$ であらわす．M 上の関数 $d_{\mathfrak{m}}$ を

$$d_{\mathfrak{m}}(x) = \int d(x,p)\mathfrak{m}(p) \tag{8.4}$$

で定義する．

命題 8.1. 10ϵ を M の単射半径小さい数とする．また，$K_M \le \kappa$ で $20\epsilon < \pi/\sqrt{\kappa}$ とする[20]．

$Supp(\mathfrak{m})$ の直径が ϵ より小さければ，

$$B_{3\epsilon}(Supp(\mathfrak{m}), M) = \{x \in M | d(x, Supp(\mathfrak{m})) < 3\epsilon\}$$

上で，$d_{\mathfrak{m}}$ は凸関数である．

ここで，リーマン多様体上の関数が凸関数であるとは，任意の測地線への制限が凸関数であることをさす．

命題 8.1 は，$B_p(\pi/\sqrt{\kappa}, M)$ で，距離関数 d_p が凸であること[21]を用いて容易に証明される．

さて，$Supp(\mathfrak{m})$ の直径が ϵ より小さいと仮定する．このとき，集合 $B_{3\epsilon}(Supp(\mathfrak{m}), M)$ の外で，$d_{\mathfrak{m}}$ は 3ϵ 以上で，$Supp(\mathfrak{m})$ 上で $d_{\mathfrak{m}}$ は ϵ 以下である．したがって，$Supp(\mathfrak{m})$ は $B_{3\epsilon}(Supp(\mathfrak{m}), M)$ で最小値をとる．そこで $d_{\mathfrak{m}}$ は凸であるから，最小値を与える点はただ一つである．

定義 8.1. $d_{\mathfrak{m}}$ の最小値を与える点のことを，測度 $\mathfrak{m}$ の重心 (Center of mass) とよぶ．重心のことを $\mathfrak{CM}(\mathfrak{m})$ とかくことにする．

$M = \mathbb{R}^n$ ならば，

$$\mathfrak{CM}(\mathfrak{m}) = \int_{\mathbb{R}^n} x\mathfrak{m}(x)$$

が容易にわかる．

ここで命題 6.4 の証明に戻る．被覆 $M = \cup_i B_{p_i}(\epsilon, M)$ に随伴する 1 の分解 χ_i をとり，$x \in M$ に対して N 上の測度 $\mathfrak{F}(x)$ を

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_i \chi_i(x)\delta_{F_i(x)}$$

[20] $\kappa \le 0$ なら 2 番目の条件は空.

[21] これは Toponogov の比較定理の帰結

で定義する．ここで $\delta_{F_i(x)}$ は点 $F_i(x)$ でのデルタ測度で，総和は $x \in B_{p_i}(\epsilon, M)$ なる i についてとる．

(8.3) により，$Supp(\mathfrak{F}(x)) < \epsilon$ がわかる．そこでその重心を $F(x)$ とする．すなわち

$$F(x) = \mathfrak{CM}(\mathfrak{F}(x)) = \mathfrak{CM}\left(\sum_i \chi_i(x)\delta_{F_i(x)}\right). \tag{8.5}$$

$F(x)$ が連続であることは容易にわかる．微分同相であることを示すには，F のヤコビ行列が可逆であることを示す必要がある．それは次の補題からわかる．

補題 8.2. F_i たちが C^1 の意味でお互いに近ければ，(8.5) できまる F も F_i に C^1 の意味で近い．

あとは F が単射であることを示せばよい．F のヤコビ行列が可逆であることから，F は近くにある点を同じ点にうつすことがないことがわかる．一方，F は F_i に近いのであるから，遠くの点を同じ点にうつすことはない．これで命題 6.4 の証明が終わった．

重心技法にはほかの応用もいろいろある．もう一つだけ，群作用への応用を述べておく．M をリーマン多様体とする．群 G（簡単のため有限群とする）が M に 2 通りに作用しているとし，それを $\psi_1 : G \to \mathrm{Diff}(M), \psi_2 : G \to \mathrm{Diff}(M)$ とする．各元 $g \in G$ に対して，$\psi_1(g), \psi_2(g)$ の C^2 ノルムは C より小さいとする．

命題 8.3. *C, 次元 n, M の単射半径，曲率の絶対値の上限，だけによる定数 ϵ が存在して，次が成り立つ．*

任意の $g \in G, x \in M$ について，$d(\psi_1(g)(x), \psi_2(g)(x) < \epsilon$ ならば，微分同相 $\phi : M \to M$ で $\phi(\psi_1(g)(x)) = \psi_2(g)(\phi((x))$ なるものがある．

証明については [28] 参照（これが重心技法が最初にあらわれた論文だと思われる）．

命題 8.3 は単連結とは限らない多様体で断面曲率が 1 に近いものを調べることなどにも使われた．

9. 距離関数による埋め込みを用いた微分同相の構成

前の節では，微分同相を作る方法として，重心技法を説明した．また 6 節ではイソトピーに関する諸定理を使う方法に言及した．この節では，Gromov が [23, 24] で用いたもう一つの方法を説明する．この方法は筆者 [16] によって，崩壊がおこっている場合にも写像（ファイバー束の射影）を作る方法としても適用できることが指摘され，また，さらに山口氏 [60] によって，断面曲率が下からだけ評価されている場合に一般化された．

ここでは，定理 3.3 の別証明を与えることにする．この証明は Gromov[24] の記述を参考に勝田篤氏が [38] で完成したものである．$M, N \in \mathfrak{M}_n(D, v)$, $d_H(M, N) < \epsilon(n, v, D)$ とする．($\epsilon(n, v, D)$ はあとで選ぶ．) $\epsilon = \epsilon(n, v, D)$ とおく．M の 6ϵ ネット X を選んでおく．(ネットの定義は 5.1.) さらに，

$$(*) \qquad x, x' \in X,\ x \neq x' \text{ ならば}, \ d(x, x') > 3\epsilon$$

となるようにとることができる．$d_H(M,N) < \epsilon$ だから，$M, N \subseteq Z$ なる距離空間 Z で，$d_Z(M,N) < \epsilon$ なるものが存在する．$x \in X_M$ に対して，$\psi(x) \in N$ で $d(x,\psi(x)) < \epsilon$ なるものがある．(d は Z の距離．) この $\psi : X \to N$ も決めておく．$\psi(X)$ が N の 8ϵ ネットであることは容易にわかる．また

$$(**) \qquad x, x' \in X,\ x \neq x' \text{ ならば}, \ d(\psi(x), \psi(x')) > \epsilon$$

も容易にわかる．((*), (**) と X,$\psi(X)$ が 8ϵ ネットであることから，X, $\psi(X)$ が M,N のなかでそれほど偏らずに分布していることが保証される．)

X 上の区間 $[0,1]$ に値を持つ関数全体（有限次元ユークリッド空間）を $[0,1]^X$ とかく．M（あるいは N）を X（あるいは $\psi(X)$）からの距離関数を使って $[0,1]^X$ に埋め込むというのがアイデアである．距離関数が微分可能でないという点を回避するため，次のようにする．まず，ϵ が M,N の単射半径に比べて十分小さいように ϵ をとっておく．次に，$\chi : \mathbb{R}_{>0} \to [0,1]$ を次の条件を満たすなめらかな関数とする．

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & t < C\epsilon, \\ t & t \in [C^2\epsilon, C^3\epsilon], \\ \text{定数} & t > C^4\epsilon. \end{cases}$$

ここで C は十分大きい定数で後で決める．$C^5\epsilon$ は M,N の単射半径より小さいとする．(最初に C を決め，それに従って ϵ を決める．) そして，$I_M : M \to [0,1]^X$ を $I_M(p)(x) = \chi(d(p,x))$ で $I_N : N \to \mathbb{R}^X$ を $I_N(p)(x) = \chi(d(p,\psi(x)))$ で定める．すると，単射半径より大きい t では $\chi(t)$ が定数であることから，I_M, I_N は滑らかである．さらに，次のことがわかる．

補題 9.1. (1) I_M, I_N は埋め込みである．(2) $I_M(M)$ は $I_N(N)$ の管状近傍 $U(N)$ に含まれる．(3) 管状近傍を法束と同一視し，$\pi : U(N) \to N$ をその射影とすると，$I_M(M)$ への $\pi : U(N) \to N$ の制限は微分同相である．

証明はしないが，成り立つ大体の理由をのべておく．(1) が成り立つのは，任意の点 p に対して，そこからの距離が $[C^2\epsilon, C^3\epsilon]$ の範囲に十分たくさんの X あるいは $\psi(X)$ の点があるからである．すなわち，それらの点からの距離関数を考えると，p の近傍で I_M,I_N のヤコビ行列が可逆であることがわかるのである．

(2) を示すには，まず $x \in X \in M$ としたとき，$I_M(x)$ と $I_N(\psi(x))$ の距離が小さい ($d_H(M,N) = \epsilon$ 程度) ことに注意する．さらに，X,$\psi(X)$ は M,N で十分密に詰まっているから，$I_M(M)$，と $I_N(N)$ が十分近いことがわかる．次に $I_M(M)$, $I_N(N)$ の管状近傍のサイズを評価する必要がある．これは，I_M, I_N の２階微分の評価をすればよく，曲率についての仮定から可能である．実際には，管状近傍のサイズと $I_M(x)$ と $I_N(\psi(x))$ の距離を正確に評価する必要がある．

(3) を示すには，$I_M(M)$ への $\pi : U(N) \to N$ の制限のヤコビ行列が可逆であることを見なければならない．これは大体，$I_M(M)$ と $I_N(N)$ が C^1 の意味で近いこと，つまり対応する接空間も含めて近いことを示すことになる．距離関数の微分は，関わる 3 角形の角度であらわされるので，その証明は比較定理を使うことで可能になる．

補題 9.1 から定理 3.3 が直ちに得られる．

注意 9.1. (あ) 上の議論では距離関数を用いたが，代わりにラプラス作用素の固有関数を用いることもできる（たとえば，[17] を見よ）．すると，得られる微分同相の微分に関する評価がよくなる．この議論は，調和座標に関わりが深い．

(い) 上の議論では，ネットをとって有限次元のユークリッド空間に埋め込んだが，そうせずに全部の点からの距離関数を用いて，ヒルベルト空間あるいはバナッハ空間に埋め込むこともできる．連続群が作用している状況などでは，これが必要になる．(あ) で言及したやり方を用いれば，連続群の作用がある場合でも，有限次元への埋め込みで十分である．

10. 距離関数のモース理論

次の定理は定理 4.1 の系である．

定理 10.1. 閉多様体 M 上のモース関数で，臨界点が *2* 点しかないものが存在すれば，M は球面と同相である．

2 節では，定理 4.1 から出発して，多様体を球体で覆いその数を評価することにより，球面定理や有限性定理，コンパクト性定理を導いた．空間を覆うのに必要な可縮な開集合の数 $(+1)$ は Lusternik-Shnirel'man のカテゴリーと呼ばれ，モース理論で重要である．この節ではより直接的にモース理論を適用することを考える．

リーマン多様体 M が与えられると，それから自然に決まる関数は 1 点からの距離関数 $d_p(x) = d(p, x)$ である．d_p が単射半径の内側で臨界点を p 以外に持たないことが，$r <$ 単射半径 ならば $B_p(r, M)$ が球体と微分同相であることの証明の一つである．

距離関数にモース理論を適用するときの困難は，単射半径を超えると，距離関数が微分可能でなくなる点である．(d_p は p でも微分可能でないが，これはたいして問題にならない．たとえば 2 乗を考えればよい．) 定理 2.4 の証明中に，Grove-塩浜は，単射半径より外側の，微分可能でないところでも，距離関数のモース理論を用いた．そこで用いられた方法は，その後も種々に応用されている．

そのために基本的なのが次の定義である．

定義 10.1. q が距離関数 d_p の非臨界点であるとは，0 でないベクトル $\vec{V} \in T_qM$ が存在して，q と p を結ぶ 任意の 最短測地線 $\ell : [0, d(p, q)] \to M$ に対して，$\frac{d\ell}{dt}(0)$ と $\vec{V}$ の角度が $\pi/2$ 以下であることをいう．

たとえば，下の図のようにp,qをとると，pとqを結ぶ最短測地線は何本あるか不明であるが，どれも「下」を向いている．このことから，qはd_pの非臨界点であることがわかる．

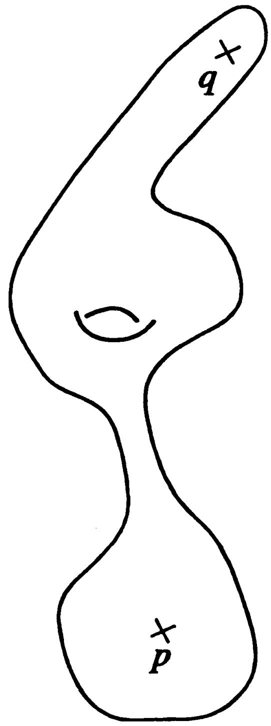


図2

注意 10.1. 定義 10.1 と似た状況として，ある連続関数fが，有限個の微分可能な関数f_α達を用いて，局所的に，$f = \inf f_\alpha$とかけている場合を考える[22]．このとき，一点pでfが非臨界的とは，ベクトル$\vec{V} \in T_pM$が存在して，$f(p) = f_\alpha(p)$なる任意のαに対して，$\vec{V}(f_\alpha) > 0$であることを指す．

さらに，d_pの有限個の1次結合$\sum a_i d_{p_i}$や，その有限個の下限などにも同様な定義ができ，命題 10.2 も成り立つ．これらをすべて含むような、連続関数のモース理論ができる関数のよい枠組みを筆者は知らない．

定義 10.1 を用いると，モースの補題のd_pに対する次の類似が証明される．

命題 10.2. $a \geq d_p(q) \geq b$なるqが全て非臨界的で，$B_p(b,M)$がコンパクトならば，$B_p(b,M) - B_p(a,M) = \{q \in M | a \leq d(p,q) \leq b\}$は$S_p(b,M) = \{q \in M | d(p,q) = b\}$と$[0,1]$の直積に同相である．

証明はモースの補題すなわち，

$f : M \to \mathbb{R}$が微分可能で，$f(q) \in [a,b]$なるどのqも臨界点でなく，$f^{-1}([a,b])$がコンパクトならば，$f^{-1}([a,b])$は$f^{-1}(\{a\}) \times [0,1]$と微分同相である．

の証明のまねをする．モースの補題の証明には，grad fの積分曲線を利用した．(例えば [42] をみよ．) d_pは微分可能ではないから，grad d_p

[22] d_pが一般にこの仮定を満たすわけではない．

は存在しない．そこで，代わりに，以下で構成するベクトル場 V を用いる．

$q \in B_p(b,M) - B_p(a,M)$ に対して，定義 10.1 のベクトル場を V_q と書く．もし V_q が q に滑らかに依存するように取ることができれば，ベクトル場 $V(q) = V_q$ を $-\operatorname{grad} f$ の代わりに用いることができる．(定義 10.1 の条件により，d_p は V 方向に行くと必ず小さくなる.)

V_q を滑らかにとるには次のようにする．まず各点 q に対して $\tilde{V}_q$ を (必ずしも q に滑らかに依存しなくてもかまわないから) とり，それを q の近傍に滑らかに拡張しやはり $\tilde{V}_q$ とかく．すると，q' が q の十分小さい近傍 U_q ないにあれば，$\tilde{V}_q(q')$ は q' で定義 10.1 の条件を満たすベクトル場になる．このような U_q のうちの有限個 U_{q_i} で $B_p(b,M) - B_p(a,M)$ を被覆し，1 の分解 χ_i を使って，

$$V(q) = \sum \chi_i(q)\tilde{V}_{q_i}(q)$$

とおけば求めるものである．

この V を使うと，命題 10.2 がモースの補題の証明と同様にして，証明される．

さて，定理 2.4 の証明に d_p のモース理論を応用するには，次の補題を用いる．

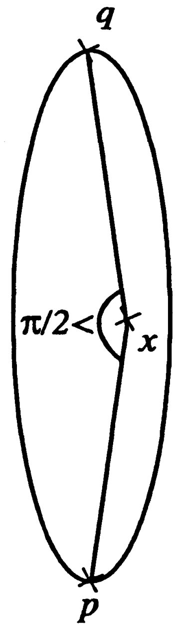


図 3

補題 10.3. M は定理 2.4 の仮定を満たすとする．2 点 $p, q \in M$ を，$d(p,q)$ が M の直径 D に一致するようにとる．

$x \in M$ を p, q 以外の点とし，$\ell_p : [0, d(p,x)] \to M$，$\ell_q : [0, d(q,x)] \to M$ を，それぞれ x と p, x と q を結ぶ最短測地線とする．(複数ある場合でもどれでもよい.)

このとき，接ベクトル $\frac{d\ell_p}{dt}(0), \frac{d\ell_q}{dt}(0) \in T_xM$ の間の角度は $\pi/2$ より大きい

補題 10.3 は 3 角形の比較定理（Toponogov の比較定理）の比較的やさしい演習問題なので，以下に与えておく．

Toponogov の比較定理は，補題 10.3 の仮定 $K_M \geq 1/4$ のもとでは，次の主張 10.4 を導く[23]．$x, y, z \in M$ とし，この 3 点を頂点とする最短測地線からなる 3 角形を考え，その辺の長さ，角の大きさを，$|xy|$, $\angle xyz$ などとかく． $X = |yz|$, $Y = |zx|$, $Z = |xy|$ とおく．

主張 10.4. $\angle zxy \leq \pi/2$ ならば，$\cos\frac{X}{2} \geq \cos\frac{Y}{2}\cos\frac{Z}{2}$.

補題 10.3 の証明を始める．$|\ell_p| = t$, $|\ell_q| = s$, $d(p,q) = D$ とおく．q で d_p の最大だから，q は臨界点である．よって，ℓ なる p, q を結ぶ最短測地線で，q での ℓ と ℓ_q の角度が $\pi/2$ 以下のものが存在する．ℓ, ℓ_p, ℓ_q からなる 3 角形に主張 10.4 を適用して，

$$\cos\frac{t}{2} \geq \cos\frac{s}{2}\cos\frac{D}{2}. \tag{10.1}$$

$D/2 > \pi/2$ ゆえ $\cos\frac{D}{2} < 0$．よって，$\cos\frac{s}{2}$, $\cos\frac{t}{2}$ の少なくとも一方は正である．$\cos\frac{s}{2} > 0$ として，一般性を失わない．

もし，ℓ_p と ℓ_q の角度が $\pi/2$ 以下ならば，再び主張 10.4 を適用して

$$\cos\frac{D}{2} \geq \cos\frac{s}{2}\cos\frac{t}{2}. \tag{10.2}$$

$\cos\frac{s}{2} > 0$ だから，(10.1), (10.2) より，

$$\cos\frac{D}{2} \geq \cos^2\frac{s}{2}\cos\frac{D}{2}.$$

$0 < D/2, s < \pi$[24] だからこれは矛盾である．

さて，補題 10.3 を用いると，d_p, d_q は p, q 以外の点を臨界点に持たないことがわかる．実際，ℓ_q の x での接ベクトルを V とおくと，d_p が x で非臨界点であるための定義 10.1 での条件を満たす．よって，命題 10.2 を用いて，M が球面と同相であることを証明することができる．すなわち定理 2.4 が証明された．

ここで命題 6.1 も，補題 10.3 の証明中にすでに示していたことに注意しておく．すなわち $\cos t/2 > 0$ または $\cos s/2 > 0$ を示したが，これは，$t < \pi$ または $s < \pi$ を意味する．

以上説明した考え方は，断面曲率の下からの評価が与えられている状況で，リーマン多様体を調べる上で基本的な方法を提供する．たとえば Alexandrov 空間の研究にも，同様な方法が使われる．

定理 2.4 は球面定理だが，これに対応する有限性定理として，最初に得られたのが，次の Gromov のベッチ数評価である．

定理 10.5. (Gromov [25]) M を n 次元リーマン多様体とし，断面曲率が $-\kappa (\kappa \geq 0)$ 以上で，直径が D であるとする．このとき，次元 n だけによる数 $C(n)$ が存在して，M のベッチ数の和について次の不等式が成り立つ．

$$\sum_k \operatorname{rank} H_k(M; F) \leq C(n)^{1+\kappa D}.$$

---

[23]大津氏の論説参照．

[24]これは Myers の定理から従う

ここで F は任意の体である.（右辺は $\kappa = 0$ のとき，つまり非負曲率の場合，D によらない.）

定理 10.5 から，たとえば $\mathbb{C}P^2$ の十分多くの連結和は非負曲率の計量を持たないことがわかる．

定理 10.5 の証明には一種の距離関数のモース理論を用いる．すなわち，モースの不等式の考え方を用いて，臨界点の数を評価する．ただし，距離関数が微分可能でないため，臨界点の指数にあたる概念を考えることがより困難で，また，距離関数そのもののモース理論でよいわけでもないため，実際に証明を遂行するには，一種の迂回路をとった，かなり技術的に困難な議論が必要である．ここでは省略する．（日本語による解説には [50] 第 4 章がある.）

距離関数（のような微分可能とは限らない関数）のモース理論は，他にも種々な目的に用いられており，たとえば，有限体積で曲率が 2 つの負の数の間にある完備リーマン次元多様体がコンパクト多様体の内部と同相であること ([22]) の証明などにも用いられる．

定理 2.4 に戻って，いくつかの注意を付け加える．定理 2.1 で条件を $1 \geq K_M \geq 1 - \epsilon$ とすると，得られる多様体は球面と同相なだけでなく幾何学的にも近い．つまり，n 次元単連結リーマン多様体の列 M_i が，$1 \geq K_{M_i} \geq 1 - 1/i$ を満たせば，M_i の Gromov-Hausdorff 距離に関する極限は n 次元球面に標準的な計量を与えたものと等長的である．

一方，定理 2.4 の状況で対応する主張は成り立たない．すなわち M_i が $K_{M_i} \geq 1$ を満たし，その直径が π にに近づくリーマン多様体の列とすると，M_i は球面と同相だが，M_i の Gromov-Hausdorff 収束に関する極限は，n 次元球面に標準的な計量を与えたものと等長的とは限らない[25].

実際，標準的な計量を与えた S^2 を，一定の軸の周りの $2\pi/n$ 回転で生成される巡回群の作用で割った商空間 $S^2/\mathbb{Z}_n$ を考えると，これは軸と球面の交点にあたる 2 点以外では曲率が 1 の滑らかな多様体である．2 点で滑らかな計量で近似することで，曲率が 1 以上のリーマン多様体の列ができる．この列は $K_{M_i} \geq 1$ で，直径は π に近づくが，その極限は $S^2/\mathbb{Z}_n$ で S^2 とは異なる[26].

---

[25] しかし，直径 $= \pi$ かつ $K_M \geq 1$(よりよわく Ricci $\geq n-1$ でもよい) なるリーマン多様体M は球面と等長的である [56, 14].

[26] すなわち，直径 $= \pi$ かつ $K_M \geq 1$ なる Alexandrov 空間は球面とはかぎらない．

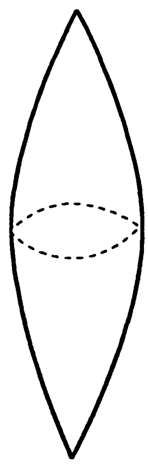


図4

この事実は $K_{M_i} \geq \mathrm{const}$ なる条件のもとでの M_i の極限が (次元が変わらない場合でも)，局所的にリーマン多様体とかなり違うという事実に対応する．たとえば，$\mathbb{R}^3$ のなかの凸集合の境界 S を考えると，S には接空間が存在しない点がある．断面曲率の絶対値が有界な場合は，Gromov-Hausdorff 収束は計量テンソルの $C^{1,\alpha}$ 級収束になるのであるから (定理 3.4)，とがった点はあらわれない．

今述べたことが理由で，次の問題は未解決である．

問題 10.1. 次のことが成り立つような ϵ_n はあるか．n 次元完備リーマン多様体 M が $K_M \geq 1/4$ を満たし，直径が $\pi/2 - \epsilon_n$ より大きければ，球面と微分同相である．

定理 2.4 の証明法，すなわち x から見て両側にある 2 点からの距離関数を考えることは，Alexandrov 空間の伸長器[27](strainer) という考え方の雛形であると思われる．

定理 2.4 の証明の考え方を，曲率が下から有界なリーマン多様体の列の収束にどう応用するかについては，大津氏と山口氏の論説で詳しく説明されている．

11. 断面曲率の下からの評価を仮定した有限性定理.

この節では，定理 3.5 の証明のアイデアを説明する．

その [29] で証明された半分は，$\mathfrak{M}'_n(D,v)$ の元であらされるホモトピー型の数が有限個であることである．ここではそちらの証明を説明する．証明の鍵となったのは，次の命題である．

命題 11.1. $\epsilon = \epsilon(n,D,v) > 0$ が存在し，任意の $M \in \mathfrak{M}'_n(D,v)$ に対して次のことが成り立つ．$p,q \in M$ を $d(p,q) < \epsilon$ なる 2 点とすると，q は d_p の臨界点ではない．

さらに，$\Delta = \{(x,,x) \in M \times M | x \in M\}$，$\Delta(\epsilon) = \{(x,,y) | d(x,y) < \epsilon\}$ とすると，Δ は $\Delta(\epsilon)$ の変位レトラクトである．レトラクション H :

---

[27]大津氏の論説参照

$\Delta(\epsilon) \times [0,1] \to \Delta(\epsilon)$ は，曲線 $t \mapsto H(p,q,t)$ の長さが $Cd(p,q)$ 以下であるようにとれる．ここで C は n, D, v のみによる数である．

命題 11.1 から定理 3.5 を導く証明は，基本的には命題 5.4 の証明と同様である．すなわち，命題 11.1 の前半から，半径 ϵ の距離球 $B_p(\epsilon, M)$ が可縮であることがわかり，また，M を覆うのに必要な $B_p(\epsilon, M)$ の数は，命題 5.2 を用いて 5 節と同様に評価される．

ただし，$B_p(\epsilon, M)$ の有限個の交わりが可縮であかどうかは，(ϵ が単射半径より小さい場合とは異なり）不明なため，命題 5.4 の証明を修正する必要がある．命題 11.1 の後半がそのために必要である．この点は省略する．

命題 11.1 は命題 5.5 と深い関係にあり，証明も後者の発展形である．そこで，まず，命題 5.5 の証明の概略を述べる．定理 4.5 より，命題 5.5 を証明するためには，$M \in \mathfrak{M}_n(D,v)$ に対して，M の最短測地線の長さ ϵ を下から評価すればよい．$\ell : S^1 \to M$ を長さ ϵ の測地線とする．$x \in M$ を任意にとり，x からみて一番近い $\ell(S^1)$ の点を $\ell(t)$ とする．すると，$\ell(t)$ で ℓ と $\ell_{x\ell(t)}$ は直交する[28]．（ここで $\ell_{x\ell(t)}$ は，x と $\ell(t)$ を結ぶ最短測地線である.）$\ell(0) = p$ とおく．p と $\ell(t)$ の距離は ϵ 以下だから，$d(x,p)$ が ϵ に比べて十分大きければ，ℓ_{xp} の角度は，$\pi/2$ にちかい．これで，次の補題 11.2 が示された．

補題 11.2. $\delta, \rho > 0$ とする．n, D, v, δ だけによる，ϵ が存在して，長さ ϵ 以下の閉測地線を ℓ，$\ell(0) = p$ とすると，M は下図の図形 $\subset T_pM$ からの指数写像の像に含まれる．

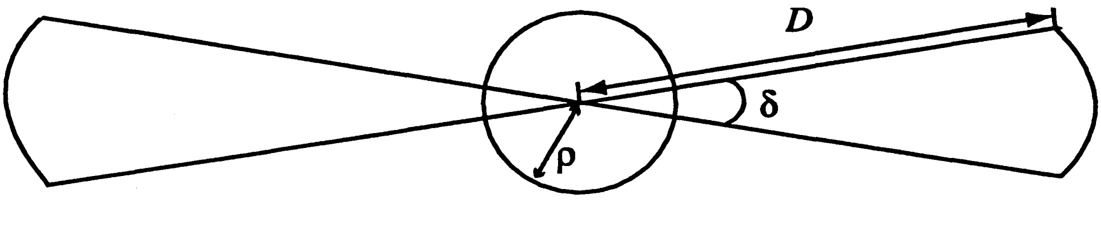


図 5

D（直径）に対して，δ を小さくすることで，図の細長くのびた部分の指数写像による像の体積は $v/2$ より小さくすることができる．図の円の部分の像の体積も ρ を小さくとることで，$v/2$ より小さくすることができる．したがって，長さ ϵ 以下の閉測地線があれば，体積は v よりも小さい．これで命題 5.5 が示された．

命題 11.1 の証明に移る．次の補題 11.3 を示せば十分である．

補題 11.3. $\theta = \theta(n,v,D) > 0$，$\epsilon = \epsilon(n,v,D) > 0$ が存在して，次のことが成り立つ．$M \in \mathfrak{M}'_n(D,v)$，$p, q \in M$ とし，$d(p,q) < \epsilon$ とする．ℓ_1, ℓ_2 を p, q を結ぶ最短測地線とする．このとき，ℓ_1 と ℓ_2 が p,q でなす角度はいずれも $\pi - \theta$ より小さい．

---

[28] 正確に言うと，x が測地線 ℓ に関する cut point であると，ℓ と $\ell_{x\ell(t)}$ は直交するとは限らない．しかし cut point の集合の測度は 0 でるから，補題 11.2 の証明には差し支えがない．

補題 11.3 が示されれば，そこでの q が d_p の非臨界点であることがわかり，命題 11.1 の前半が証明される．後半は前の節の議論（命題 10.2 とその証明）を用いて証明される．

補題 11.3 は命題 5.5 と同様にして証明される．すなわち，補題 11.2 にあらわれた図 5 を次の図 6 でおきかえればよい．

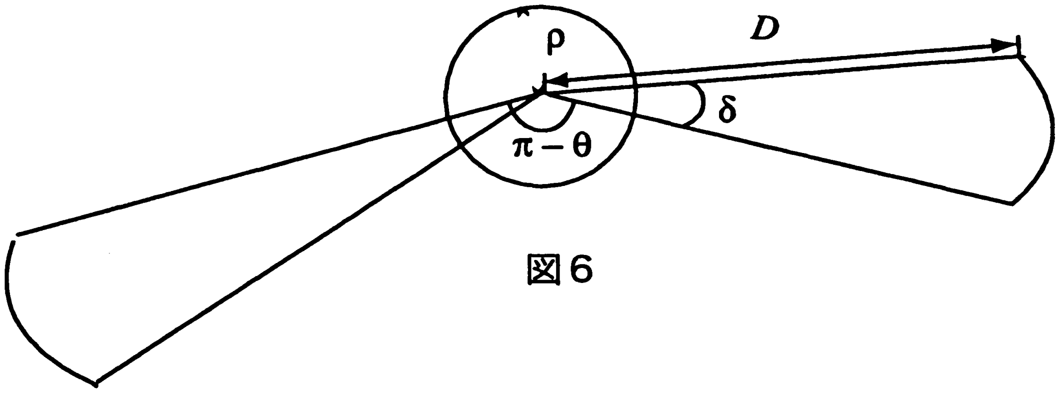


図 6

以上で定理 3.5 の半分の証明は説明したことにする．残りの部分すなわち同相類の数の有限性は，別の深い議論が必要である．ここではそれを詳しく述べることはできないが，基本的な手法は，Controlled surgery の理論を用いることである．このような手法が有効に使われたこと自身大変興味深く，またその後の発展もあるようである．現在では，Perelman の手法で，Controlled surgery を用いなくても，定理 3.5 を証明できる．その詳しい解説が山口氏の論説にある．

12. 魂の定理・分裂定理と局所構造

非コンパクト完備非負曲率リーマン多様体についての代表的な定理が，魂の定理[29](Soul theorem) および分裂定理 (splitting theorem) である．この両者は，リーマン多様体の極限で得られる空間あるいは Alexandrov 空間の局所構造を調べる上でも重要な役割を果たす．この節ではこの点についていくつかの事柄を説明する．

まず，どうして非コンパクトな多様体についての考察が，リーマン多様体の極限で得られる空間あるいは Alexandrov 空間の局所構造を調べる上で有用なのかについて説明する．いくつかの言葉を用意する．

一般に距離空間の曲線 $\ell : [a,b] \to X$ の長さとは，$a = t_0 < t_1 < \cdots t_N = b$ なる分割全体（N も動かす）をわたる，和

$$\sum d(\ell(t_i), \ell(t_{i+1}))$$

の上限をさす．

定義 12.1. 距離空間 X が測地空間 (Length space)[30]であるとは，任意の 2 点 $p, q \in X$ に対して，p, q を結ぶ長さ $d(p,q)$ の曲線が存在することをさす．

完備リーマン多様体は測地空間である．また測地空間の列の Gromov-Hausdorff 距離に関する極限は測地空間である．

[29]Soul theorem の訳語は山口孝男氏の数学の論説 [61] に従った

[30]Length space の訳語は大津氏の論説に従った．

定義 12.2. 完備距離空間がコンパクト生成 (compactly generated) とは，任意の点を中心とする任意の半径の距離球がコンパクトであることをさす．

コンパクトな測地空間の全体に Gromov-Hausdorff 距離を考えたものは完備である．コンパクト生成な測地空間全体の集合に入れる自然な距離は点付き Gromov-Hausdorff 距離 (pointed Gromov-Hausdorff distance) である．

定義 12.3. X, Y を距離空間 $x \in X$, $y \in Y$ としたとき，(X, y) と (Y, y) の間の点付き **Gromov-Hausdorff** 距離が ϵ 以下であるとは，距離球 $B_{1/\epsilon}(x, X)$ と $B_{1/\epsilon}(y, Y)$ の間の Gromov-Hausdorff 距離が ϵ 以下であることをさす．

点付き Gromov-Hausdorff 距離を用いて，定理 3.2 に対応する次の定理が示される．

定理 12.1. *リッチ曲率が $-(n-1)$ より大きい n 次元リーマン多様体 M（とその上の基点の組）全体の，点付き Gromov-Hausdorff 距離に関する閉包はコンパクトである．*

さて，これで接錐 (tangent cone) を定義できる．

定義 12.4. X を測地空間 $x \in X$ とする．d_X で X の距離 (関数) を表す．cd_X は X の距離関数を定める．$\lim_{c\to\infty}((X, cd_X), x)$（極限は点付き Gromov-Hausdorff 距離についてとる）が存在するとき，X の x での接錐とよび，T_xX とかく．

X が n 次元リーマン多様体ならば，各点の接錐は $\mathbb{R}^n$ と等長的である．

例 12.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト凸集合とする．$X = \partial\Omega$ とおき，測地距離を入れる．(つまり，X の 2 点間 x, y の距離とは x と y を結ぶ X の道の長さの下限である.)

このとき $x \in X$ での接錐は次のように求まる．x を始点とする半直線 $\ell : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ で十分小さい $t > 0$ に対して，$\ell(t) \in \Omega$ となるものを考える．このような ℓ の和集合は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．その境界が X の x での接錐である．

空間 X がよい性質をもてば，各点で接錐 T_xX が定まり，また x の X での近傍は，T_xX の原点（基点）の近傍と同相であることが期待される．(Alexandrov 空間ではこれが成り立つ．山口氏の論説をみよ.) すなわち，T_xX を調べることで，X の局所構造がわかる．

X がリーマン多様体 M_i の極限で，M_i の曲率が下から有界とする．このとき，X の「曲率」は下から有界と考えられる．すると，(X, cd_X) の曲率の下限は $c \to \infty$ で 0 に近づく．(計量を定数倍して大きくすると曲率は小さくなる.) すなわち，接錐が存在すれば，何らかの意味で，非負曲率であろう．(以上は正確な話ではないので，曲率はとりあえずリッチ曲率の場合も断面曲率の場合もあり得る.) これが非コンパクト非負曲率空間の研究が，Alexandrov 空間などの局所理論で重要である理由である．

Gromov の相対コンパクト性定理 (定理 12.1) を使うと，次のことがわかる．(証明は演習問題とする．)

M_i をリーマン多様体で Ricci $> -(n-1)$ とする．X をその Gromov-Hausdorff 距離に関する極限とする．$x \in X$ とする．c_k を $+\infty$ に収束する正の数の列とする．このとき，$((X, c_k d_X), x)$ には点付き Gromov-Hausdorff 距離に関する収束部分列が存在する．

一般には $((X, c_k d_X), x)$ は部分列をとらないと収束しない．従って，X にいつも接錐があるとは限らない．この点がリッチ曲率が下から有界であるリーマン多様体の列の収束先を研究する上で困難な点である．加須栄氏や酒井氏の論説にはこれに関わる考察がある．

断面曲率が -1 以上であるリーマン多様体の極限，あるいはより一般には Alexandrov 空間では，$\lim_{c\to\infty}((X, cd_X), x)$ は常に収束する．(大津氏，山口氏の論説参照．)

さて，魂の定理や分裂定理を説明しよう．まず，直線・半直線という概念を定義する．測地空間 X の測地線 $\ell : (a, b) \to X$ とは，局所的には長さが最短の曲線のことである．すなわち任意の $t \in (a, b)$ に対して，ϵ が存在し，$d(\ell(t-\epsilon), \ell(t+\epsilon))$ が ℓ の $(t-\epsilon, t+\epsilon)$ への制限の長さに一致することをさす．次の定義では，測地線のパラメータは弧長とする．

定義 12.5. X を測地空間とする．

測地線 $\ell : [0, \infty) \to X$ が半直線 (Ray) であるとは，$d(\ell(t), \ell(s)) = |t-s|$ が任意の t, s について成り立つことをさす．

測地線 $\ell : (-\infty, \infty) \to M$ が直線 (Line) であるとは，$d(\ell(t), \ell(s)) = |t-s|$ が任意の t, s について成り立つことをさす．

(条件式は同じである．定義域が異なっている．)

接錐が存在するときすなわち $\lim_{c\to\infty}((X, cd_X), x)$ の極限が部分列をとらなくても存在するときは，接錐は基点を通る半直線の和集合になる．

また，直線については次のことが成り立つ．

補題 12.2. X を測地空間とし $\ell : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ なる最短測地線で $\ell(0) = x$ なるものがあるとする．また x での接錐 $T_x X$ が存在するとする．このとき $T_x X$ は直線を含む．

実際 (X, cd_X) は基点を含む長さ $C\epsilon$ の最短測地線を含んでいる．このことから，その極限である $T_x X$ には長さ無限大の最短測地線つまり直線が含まれる．

さて，次の定理が分裂定理である．

完備測地空間 X は次のいずれかを満たすとする．

(a) 断面曲率が 0 以上のリーマン多様体．

(b) 断面曲率が ϵ_i 以上のリーマン多様体 M_i の極限．ただし，$\epsilon_i \to 0$.

(c) リッチ曲率が 0 以上のリーマン多様体．

(d) リッチ曲率が ϵ_i 以上のリーマン多様体 M_i の極限．ただし，$\epsilon_i \to 0$.

定理 12.3. X が直線を含んでいれば，X は $\mathbb{R} \times X_0$ なる直積と等長的である．

定理 12.3 の証明は，(a) の場合は Toponogov[57]，(c) の場合は Cheeger-Gromoll[10]，(b) の場合は Grove-Petersen[30] と山口 [60]，(d) の場合は Cheeger-Colding [31]による．((d) が一番一般的．）少し後で証明のアイデアの一端を述べるが，その前にリーマン多様体の極限の局所構造を調べるのにどう使うかを少しだけ述べる．(より詳しくは本書の他の論説をみよ．）定理 12.3 は繰り返し使うことができる．つまり，X_0 が直線を含んでいれば再び X_0 を直積に分解することができる．もし，それを X の次元の回数だけ繰り返すことができれば，$X = \mathbb{R}^n$ が証明されたことになる．補題 12.2 は，最短測地線の内点になっている点の接錐は直線を含むことを主張している．そこで，n（X の次元）本の「1 次独立」な測地線の内点になっている点を考えると，これを n 回繰り返すことができ，従って接錐は $\mathbb{R}^n$ になる．これは X が x で多様体になっていることを意味するであろう．以上の議論をどのようにすれば正確に遂行できるかは本書の他の論説に譲る．

分裂定理の証明のアイデアの一端を説明する．魂の定理も含めて，証明の主要なアイデアは，Busemann 関数の凸性である．まず Busemann 関数を定義する．X を測地空間 $\ell : [0,\infty) \to X$ をその半直線とする．

定義 12.6. 極限

$$b_\ell(x) = \lim_{t\to\infty}(t - d(x, \ell(t)))$$

のことを **Busemann** 関数とよぶ．

命題 12.4. *X が仮定 (a) または (b) を満たすとする．このとき，半直線 ℓ の Busemann 関数は凸である．*

X が仮定 (c) を満たすとする．このとき，Busemann 関数は劣調和である．

(d) の状況では劣調和という概念をそもそも定義できないので，事情はより複雑である．酒井氏の論説を参照せよ．

命題の証明には比較定理を用いる．(a)(b) の場合の証明には，大体半径が大きくなればなるほど，球面は（外から見て）凸に近づくということに注意し，Toponogov の比較定理を適用する[32]．(d) の場合には距離関数のラプラシアンについての比較定理を用いる．(関数が凸であるのは，ヘッセ行列の固有値がすべて非負である場合であるが，劣調和であるのは，ヘッセ行列の跡が非負である場合である．([37]4.6 などをみよ．))

命題 12.4 を定理 12.3 の証明にどう使うかを説明する．(a)(b) の場合を説明しよう．X には直線 $\ell : \mathbb{R} \to X$ があるというのが仮定であった．これから，2 本の半直線 $\ell_\pm : [0,\infty) \to X$ が定まる．すなわち

$$\ell_+(t) = \ell(t), \qquad \ell_-(t) = \ell(-t)$$

---

[31] Cheeger-Colding 関係の結果については，酒井氏の論説を参照．本人たちによる概説には [6, 15] がある．

[32] 半径が小さいときは，球面は内側からみて凸で，外から見ると凸でないことに注意．

である．これらに関する Buseman 関数 $b_{\ell_\pm}$ を考える．三角不等式から

$$b_{\ell_+}(t) + b_{\ell_-}(t) \le 0$$

が容易にわかる．命題 12.4 を用いると，左辺は凸である．有界な凸関数は定数に限るから，$\ell_+(t) + \ell_-(t)$ は定数である（実は 0）．すると，$\ell_+(t) = \mathrm{const} - \ell_-(t)$ は凸かつ凹であるから，その等位面は全測地的である．(ここで $S \subset M$ が全測地的とは，M の任意の 2 点を結ぶ任意の最短測地線が S に含まれることをさす．(言い換えると，凸部分集合であることをさす.)）これで，定理 12.3 が大体示された．(c) の場合には凸を劣調和に読みかえて同様の議論をする．

次に魂の定理 (Soul theorem) について述べる．

定理 12.5. 完備リーマン多様体 M が非正曲率をもてば，コンパクトで境界のない部分多様体 $S \subseteq M$ が存在し，M は S の法ベクトル束と微分同相である．さらに S は全測地的 *(Totally convex)* である．

N のことを M の魂 (Soul) という．定理 12.5 を証明する基礎になるのは，命題 12.4 である．この命題は半直線 $\ell : [0,\infty) \to M$ に対して，その Buseman 関数 b_ℓ が凸であることを主張する．特に任意の c に対して，閉集合

$$H(\ell, c) = \{x \in M | b_\ell(x) \ge c\}$$

は凸である．次の補題が定理 12.5 の証明の中心である．一点 $p \in M$ を固定し，$Ray(p)$ を $\ell(0) = p$ なる，半直線 ℓ 全体の集合とする．

補題 12.6. 集合 $C_c(p) = \bigcap_{\ell \in Ray(p)} H(\ell, c)$ はコンパクトである．

証明には背理法を用いる．すなわち $C_c(p)$ がコンパクトでないとし，$p_i \in C_c(p)$ を発散列とする．$d(p, p_i) = t_i$ とおき，$\ell_i(0) = p$ と $\ell_i(t_i) = p_i$ なる最短測地線を $\ell_i : [0, t_i] \to M$ とする．(パラメータは弧長とする.) $\frac{d\ell_i}{dt}(0) \in T_pM$ は大きさ 1 のベクトルであるから，部分列に移って収束するとしてよい．$\ell : [0,\infty) \to M$ を

$$\lim_{i\to\infty} \frac{d\ell_i}{dt}(0) = \frac{d\ell}{dt}(0)$$

なる測地線とすると，$\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$ より，ℓ が半直線であることが容易にわかる．一方，

$$\lim_{i\to\infty} b_\ell(p_i) = \infty$$

もわかる．これは $p_i \in C_c(p)$ に反する．

こうして，M のコンパクトな凸部分集合 $C_c(p)$ を見つけることができた．この中に，凸集合であるような部分多様体 S を見つけることができるのであるが，その証明は技術的なので省略する．(たとえば，[8]Chapter 8 をみよ.)

次に魂の定理がリーマン多様体の極限の研究にどのように使われるかの例を述べる．

M_i をリーマン多様体の列で，$1 \ge K_{M_i} \ge -1$ とする．$p_i \in M_i$ とし，p_i での単射半径 $i_{M_i}(p_i)$ が 0 に収束するとしよう．すなわちリーマ

ン多様体 M_i は崩壊しているとする．M_i の p_i の近くでの局所的な様子を調べるために，計量を定数倍して，$(M_i, C_i g_{M_i})$ を考える．ここで $C_i = 1/\sqrt{i_{M_i}(p_i)}$ で，g_{M_i} はもともとのリーマン計量である．このとき，$(M_i, C_i g_{M_i})$ の p_i での単射半径は 1 である．また $(M_i, C_i g_{M_i})$ の断面曲率は 0 に近づく．

定理 12.1 より，部分列に移って $((M_i, C_i g_{M_i}), p_i)$ は点付き Gromov-Hausdorff 距離に関して収束するとしてよい．その極限を M_∞ とおく．定理 3.4 により，M_∞ は $C^{1,\alpha}$ 級のリーマン多様体である．$(M_i, C_i g_{M_i})$ の断面曲率が 0 に近づくことを用いると，M_∞ は滑らかな平坦リーマン多様体であることがわかる．M_∞ に定理 12.5 を適用して，$S \subset M_\infty$ をえる．S は平坦な多様体の全測地的部分多様体であるから，平坦である．ここで，Biberbach の定理を使うと，S は平坦トーラスを有限群の等長変換による作用で割った商空間の形をしている．こうして，M_∞ の有限被覆のなかに，トーラスを見つけることができた．

Cheeger-Gromov の崩壊に関する主定理 ([13]) は，

「$1 \geq K_{M_i} \geq -1$ なるリーマン多様体列 M_i について，崩壊がおこっている（つまり単射半径が 0 に近づく）ならば，M_i にトーラスの「局所作用[33]」がある」

というものであるが，その証明のキーポイントは上の議論である．すなわち，単射半径が 1 になるように拡大してからその極限に魂の定理を適用する．

一点注意するべきことは，崩壊は種々のオーダーで同時に起こっており，従って，

「ある十分小さい ϵ があって，十分大きい i に対して，K_{M_i} での p_i の ϵ 近傍は M_∞ の魂 S とホモトピー同値」

なる命題は成立しないことである．M_i の十分小さいしかし i によらず一定のサイズの近傍を記述するには，平坦多様体だけでなく概平坦多様体（いいかえると巾零リー群の商）が必要である ([9])．

以上の説明は $1 \geq K_{M_i} \geq -1$ なる多様体の列についてで，その場合には平坦な多様体に定理 12.5 を適用した．$K_{M_i} \geq -1$ なる多様体の列に対して定理 12.5 を適用しようとすると，平坦とは限らないしかし断面曲率は 0 以上の測地空間に適用しなければならない．そのような議論は，大津氏・山口氏の論説にあらわれるので，ここでは省略する．

13. リッチ曲率，第 1 ベッチ数，基本群

今までは主に断面曲率に関する諸結果を述べてきた．この節で，リッチ曲率に関する諸結果にもふれる．酒井，加須栄両氏の論説には，最近の発展に関する詳しい記述がある[34]．ここでは，それ以前の結果を振り返りたい．リッチ曲率に関する結果には，解析を多用するものが多いが，ここでは，それらにはあまりふれない．

[33] F 構造という．正確な定義は省略する．[12] をみよ．

[34] 最近の結果に関する概説には，ほかに Cheeger[6] などがある．

まず，定理 2.2 を振り返りたい．定理 2.2 は Bochner トリックといわれる手法によって証明された．計量リーマン幾何学に関する定理で，Bochner トリックによって証明された定理では，次の定理が有名である．

定理 13.1. ([59]) n 次元コンパクトリーマン多様体 M のリッチ曲率が非負ならば，M の第 1 ベッチ数は n 以下である．

定理 13.1 のもとの Bochner による証明は，次の通りである．u を M の 1 型式としすると，次の Weitzenböck 型の等式が成り立つ．(証明はたとえば [37]P251 をみよ.)

$$\langle -\Delta u, u\rangle = -\frac{1}{2}\Delta\|u\|^2 + \langle \nabla u, \nabla u\rangle + \mathrm{Ricci}(u, u). \tag{13.1}$$

u を調和 1 型式とする．(13.1) に u を代入し M で積分すると，左辺は u が調和だから 0 で，右辺第 1 項の積分は消える．従って，

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla u\rangle \Omega_M + \int_M \mathrm{Ricci}(u, u)\Omega_M = 0. \tag{13.2}$$

(Ω_M は体積要素.) (13.2) の第 1 項は非負である．またリッチ曲率が非負という仮定より，第 2 項も非負である．従って， 第 1 項，第 2 項ともにゼロになる．すなわち，調和 1 形式がすべて平行であることがわかった．平行な微分形式は，一点での値で決まるから，調和 1 型式の次元はたかだか n である．

同様にして，高次のベッチ数もリッチ曲率を用いて評価されるかというと，そうはいかない．式 (13.1) の右辺第 3 項には曲率としてはリッチ曲率しかあらわれていない．これは微分 1 型式でだけ成り立つことで，微分 2 型式以上に対して，同様な式を書き下すと，右辺第 3 項はより複雑になる．微分 3 型式以上に対しても，定理 13.1 と同様な議論ができる条件が，定理 2.2 の仮定で，その条件はリッチ曲率より遙かに強い[35]．

前の節でリッチ曲率が非負な多様体に対する分裂定理を紹介したが，定理 13.1 はそれからも得られる．すなわち，次のことが成り立つ．

定理 13.2. M をリッチ曲率が非負なコンパクト多様体とすると，M の有限被覆 $\tilde{M}$ があって，$\tilde{M}$ は $X \times T^k$ なる直積と等長的である．ここで，X は単連結で，T^k は平坦トーラスである．

定理 13.2 を示すには，普遍被覆 $\hat{M}$ を考える．M の基本群が無限群であることを用いると，$\hat{M}$ に直線が含まれることが証明される[36]．そこで定理 12.3 を適用すると，$\hat{M} = \mathbb{R} \times Y$ と分かれる．$\hat{M} = \mathbb{R}^k \times Y'$ で Y' はもはや $\mathbb{R}$ を直積因子に含まない，なるように分解し直す．もし，Y' がコンパクトでないと，Y' が直線を含むことを示すことができるの

[35]ちなみに，スピノルに対して (13.1) と同様な式を書き下すと，第 2 項にはスカラー曲率しかあらわれない ([62] など指数定理の教科書をみよ)．これから，Lichnerowicz の定理,「スカラー曲率正のリーマン多様対の $\hat{A}$ 種数は 0」，が導かれる．

[36]$d(p_i, q_i) \to \infty$ なる点列 p_i, q_i をとる．x_i を p_i と q_i を結ぶ最短測地線の中点とする．$\pi_1(M)$ の元で動かして，$d(x, x_i) < R$ なる i によらない R があるとしてよい．すると，p_i, x_i, q_i を結ぶ最短測地線が収束部分列をもつ．この極限が直線になる．

で，矛盾である．すなわち，Y' はコンパクトである．$\pi_1 M$ の作用はこの直積分解をたもつ．これから定理 13.2 の分解が容易に得られる．

定理 13.2 で $k=n$ の場合，あるいは定理 13.1 でベッチ数が次元に等しい場合には，M は平坦になる．特に，定理 13.1 で等号が成立するときは M は平坦である．(このことはもともとの Bochner の証明からもわかる．)

定理 13.2 は Gromov によって次のように拡張された．

定理 13.3. $\rho \in \mathbb{R}$ について連続な関数 $b(n,\rho)$ で，$b(n,0)=n$ であるものが存在し，次の性質を持つ．M が直径 1, リッチ曲率 $\geq \rho$ なる n 次元コンパクトリーマン多様体であれば，その第 1 ベッチ数は $b(n,\rho)$ 以下である．

系 13.4. Ricci $> -\epsilon_n$, 直径 1 の n 次元コンパクトリーマン多様体の第 1 ベッチ数は n 以下である．ここで ϵ_n は次元 n のみによる正の数である．

Gromov の証明は，基本群の増大度（後出）を Bishop-Gromov の不等式（命題 5.2）を用いて評価するもので，後で述べる基本群に関する研究 (定理 13.8 や 13.9) の考え方に近い[37]．Bochner の考え方に近い解析的な証明が Gallot によって与えられている（Berger の講義録 [4] をみよ）．

定理 13.1 の証明法は，第 2 次以後のベッチ数の評価にはそのままでは適用できないと述べたが，定理 13.3 と同様な定理は第 2 以後のベッチ数に対しては成立しない．すなわち，

「M が直径 1, リッチ曲率 $\geq \rho$ なる n 次元コンパクトリーマン多様体のベッチ数は，ρ と n で決まるある数より小さい．」

という命題は誤りである．反例は [51, 45] 参照．仮定を，リッチ曲率 $\geq \rho$ から断面 $\geq \rho$ に変更すると「」の中の命題の結論が成立する．これが定理 10.5 であった．

系 13.3 で等号が成立する場合，すなわち，Ricci $> -\epsilon_n$ かつ第 1 ベッチ数が n の場合について述べる．まず，山口氏 [60] によって，次のことが示された．

定理 13.5. 直径が 1 で，$K_M > -\epsilon_n$, かつ第 1 ベッチ数が n である，n 次元リーマン多様体は，トーラスに微分同相である．

定理 13.5 の証明のために，山口氏は定理 12.3 の (b) の場合を用いた．Cheeger-Colding によって，定理 12.3 の (d) の場合が証明されたので，定理 13.5 はより弱い仮定で証明されている．すなわち

定理 13.6. (Cheeger-Colding) リッチ曲率 $> -\epsilon_n$ かつ第 1 ベッチ数が n である，n 次元リーマン多様体は，トーラスに微分同相である．

定理 13.2 の次の系に注意しておく．

系 13.7. コンパクトリーマン多様体 M が非負のリッチ曲率を持てば，$\pi_1(M)$ は指数有限のアーベル部分群をもつ．

[37] [4]§A3 参照．

これに関わる定理では，Milnorの次の結果が始まりであったといってよいであろう．

定理 13.8. (Milnor [41]) 完備なリーマン多様体Mが非負曲率を持つとし，$\pi_1(M)$の有限生成部分群をGとすると，Gは多項式増大度をもつ．

ここで，多項式増大度とは次のように定義する．Gを有限生成な元とし，$g_1,\cdots,g_k$をその生成元とする．g_iたちN個の積で表されるGの元全体の数を$f_G(N)$とかく．

定義 13.1. Gが多項式増大度 (polynomial growth) をもつとは，$f_G(N) < C(N^K+1)$なる自然数C,Kが存在することを指す．

Gが多項式増大度を持つかどうかは，生成元の取り方によらないことが知られている．

定理13.8の証明は，命題5.2にもとづいて次のようにして行う．簡単のためMはコンパクトとする．Gに対応するMの被覆空間を$\tilde{M}$とする．一点$p\in\tilde{M}$をとると，命題5.2より，

$$\mathrm{Vol}(B_p(R,\tilde{M})) \le CR^n$$

が成り立つ．基本領域を用いる初等的な議論で，

$$C^{-1} < \frac{\mathrm{Vol}(B_p(R,\tilde{M}))}{f_{\pi_1(M)}(R)} < C$$

なる定数Cの存在を示すことができるので，定理13.8が従う．

増大度関数f_Gは，Gが可換群から遠い程度を表しているといってもよい．実際Gが自由群であると，

$$f_G(R) > ce^{R/C}$$

なるc,Cがあり（このときGは指数増大度を持つという），一方$G=\mathbb{Z}^k$は多項式増大度を持つ．

Gromov[26]は次のことを示している．

定理 13.9. 有限生成群Gが多項式増大度を持つことと，Gが有限指数の巾零部分群を持つことは同値である．

証明にはGromov-Hausdorff距離やHilbertの第5問題などを用いるのであるが，ここでは述べない．定理13.8と13.9をあわせると，リッチ曲率が非負の完備なリーマン多様体の基本群の有限生成部分群は，有限指数の巾零部分群を含むことがわかる．

この事実は，筆者と山口氏の結果([19])[38]を経て，Cheeger-Coldingによって，次のように一般化された．

定理 13.10. 次元nだけによる正の数ϵ_nが存在して，次のことが成り立つ．完備リーマン多様体Mのリッチ曲率が$-\epsilon_n$より大きいならば，任意の$p\in M$に対して$\pi_1(B_p(1,M))$の$\pi_1 M$への像は，有限生成巾零部分群を含む．

[38]定理13.10でリッチ曲率を断面曲率で置き換えた結果が[19]である．

とくに，M の直径が 1 以下であれば，$\pi_1 M$ が有限生成巾零部分群を含む．

定理 13.10 は定理 13.8 を含んでいることに注意しておく．

定理 13.10 の結論の「巾零部分群」を「可換部分群」で置き換えることはできない．すなわち系 13.7 の仮定のリッチ曲率 ≥ 0 をリッチ曲率 $\geq -\epsilon_n$ で置き換えることはできない．巾零リー群の離散部分群による商空間（概平坦多様体，[23] をみよ）が反例を与える．

以上の説明からも窺えるように，リッチ曲率の仮定のもとでは，第 1 ベッチ数や，基本群に関わる定理はいろいろと示すことができるが，高次のベッチ数についての結果を示すことはより難しい．

リッチ曲率に関するリーマン幾何学では，ラプラシアンの固有値に関わることが重要であるが，本論説ではふれない．それで，いささか尻切れトンボであるが，それは加須栄氏や酒井氏の論説を読んでいただくことにして，ここで終わることにしたい．

参考文献

[1] Abresch, U. Meyer, W. *Injectivity radius estimates and sphere theorems.* In "Comparison geometry" 1 47, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[2] Berestovskij, V. N. Nikolaev, I. G. *Multidimensional generalized Riemannian spaces.* Geometry, IV, 165 243, 245 250, Encyclopaedia Math. Sci., 70, Springer, Berlin, 1993.

[3] Berger, M. *Les variétés Riemanniennes* (1/4)*-pincées.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 14 1960 161 170.

[4] Berger.M (辻下徹記), リッチ曲率と位相, 大阪大学理学部数学教室, 1982 年.

[5] Cheeger. J, *Finiteness theorems for Riemannian manifolds.* Amer. J. Math. 92 1970 61 74.

[6] Cheeger. J, *Degeneration of Riemannian metrics under Ricci curvature bounds.* Scuola Normale Superiore, Pisa, 2001.

[7] Cheeger, J. Colding, T. *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products.* Ann. of Math. (2) 144 (1996), no. 1, 189 237.

[8] Cheeger, J. Ebin, G. *Comparison theorems in Riemannian geometry.* North-Holland Mathematical Library, Vol. 9. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975.

[9] Cheeger, J. Fukaya, K. Gromov, M. *Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds.* J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), no. 2, 327 372.

[10] Cheeger, J. Gromoll, D. *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature.* J. Differential Geometry 6 (1971/72), 119 128.

[11] Cheeger, J. Gromoll, D. *On the lower bound for the injectivity radius of* 1/4*-pinched Riemannian manifolds.* J. Differential Geom. 15 (1980), no. 3, 437 442 (1981).

[12] Cheeger, J. Gromov, M. *Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded. I.* J. Differential Geom. 23 (1986), no. 3, 309 346.

[13] Cheeger, J. Gromov, M. *Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded. II.* J. Differential Geom. 32 (1990), no. 1, 269 298.

[14] Cheng, S. Y. *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications.* Math. Z. 143 (1975), no. 3, 289 297.

[15] Colding, T. *Aspects of Ricci curvature.* in " Comparison geometry " , 83 98, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[16] Fukaya, K. *Collapsing Riemannian manifolds to ones of lower dimensions.* J. Differential Geom. 25 (1987), no. 1, 139 156.
[17] Fukaya, K. *Collapsing Riemannian manifolds to ones with lower dimension. II.* J. Math. Soc. Japan 41 (1989), no. 2, 333 356.
[18] Fukaya, K. *Hausdorff convergence of Riemannian manifolds and its applications.* Recent topics in differential and analytic geometry, 143 238, Adv. Stud. Pure Math., 18-I, Academic Press, Boston, MA, 1990.
[19] Fukaya, K. and Yamaguchi, T. *The fundamental groups of almost non-negatively curved manifolds. Ann. of Math. (2) 136 (1992), no. 2, 253 333.*
[20] Greene, R. E. Wu, H. *Lipschitz convergence of Riemannian manifolds.* Pacific J. Math. 131 (1988), no. 1, 119 141.
[21] Gromoll, D. *Differenzierbare Strukturen und Metriken positiver Krümmung auf Sphären.* Math. Ann. 164 1966 353 371.
[22] Gromov, M. *Manifolds of negative curvature.* J. Differential Geom. 13 (1978), no. 2, 223 230.
[23] Gromov, M. *Almost flat manifolds.* J. Differential Geom. 13 (1978), no. 2, 231 241.
[24] Gromov, M. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* Edited by J. Lafontaine and P. Pansu. Textes Mathématiques, 1. CEDIC, Paris, 1981.
[25] Gromov, M. *Curvature, diameter and Betti numbers.* Comment. Math. Helv. 56 (1981), no. 2, 179 195.
[26] Gromov, M. *Groups of polynomial growth and expanding maps.* Comment. Math. Helv. 56 (1981), no. 2, 179 195.
[27] Gromov, M. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces.* With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes. Translated from the French by Sean Michael Bates. Progress in Mathematics, 152. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.
[28] Grove, K. Karcher, H. *How to conjugate C^1-close group actions.* Math. Z. 132 (1973), 11 20.
[29] Grove, K. Petersen, P. *Bounding homotopy types by geometry.* Ann. of Math. (2) 128 (1988), no. 1, 195 206.
[30] Grove, K. Petersen, P. *Manifolds near the boundary of existence.* J. Differential Geom. 33 (1991), no. 2, 379 394.
[31] Grove, K. Petersen, P. Wu, J.Y. *Geometric finiteness theorems via controlled topology.* Invent. Math. 99 (1990), no. 1, 205 213.
[32] Grove, K. Shiohama, K. *A generalized sphere theorem.* Ann. Math. (2) 106 (1977), no. 2, 201 211.
[33] Im Hof, H. Ruh, E. *An equivariant pinching theorem.* Comment. Math. Helv. 50 (1975), no. 3, 389 401.
[34] Jost, J. Karcher, H. *Geometrische Methoden zur Gewinnung von a-priori-Schranken für harmonische Abbildungen.* Manuscripta Math. 40 (1982), no. 1, 27 77.
[35] Jost, J. Karcher, H. *Almost linear functions and a priori estimates for harmonic maps.* Global Riemannian geometry (Durham, 1983), 148 155, Ellis Horwood Ser. Math. Appl., Horwood, Chichester, 1984.
[36] Kasue, A. *A convergence theorem for Riemannian manifolds and some applications.* Nagoya Math. J. 114 (1989), 21 51.
[37] 加須栄篤. リーマン幾何学. 培風館, 2001.
[38] Katsuda, A. *Gromov's convergence theorem and its application.* Nagoya Math. J. 100 (1985), 11 48.
[39] Klingenberg, W. *Contributions to Riemannian geometry in the large.* Ann. of Math. (2) 69 1959 654 666.

[40] Klingenberg, W. Sakai, T. *Injectivity radius estimate for 1/4-pinched manifolds.* Arch. Math. (Basel) 34 (1980), no. 4, 371 376.
[41] Milnor, J. *A note on curvature and fundamental group.* J. Differential Geometry 2 1968 1 7.
[42] Milnor, J. *Morse theory.* Annals of Mathematics Studies, No. 51 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963.
[43] Nikolaev, I. G. *Parallel translation and smoothness of the metric of spaces with bounded curvature.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 250 (1980), no. 5, 1056 1058.
[44] Nikolaev, I. G. *A metric characterization of Riemannian spaces.* Siberian Adv. Math. 9 (1999), no. 4, 1 58.
[45] Perelman, G. *Construction of manifolds of positive Ricci curvature with big volume and large Betti numbers.* in "Comparison geometry", 157 163, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
[46] Petersen, P. *Convergence theorems in Riemannian geometry.* in "Comparison geometry", 167 202, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
[47] Peters, S. *Cheeger's finiteness theorem for diffeomorphism classes of Riemannian manifolds.* J. Reine Angew. Math. 349 (1984), 77 82.
[48] Peters, S. *Convergence of Riemannian manifolds.* Compositio Math. 62 (1987), no. 1, 3 16.
[49] Rauch, H. E. *A contribution to differential geometry in the large.* Ann. of Math. (2) 54, (1951). 38 55.
[50] 酒井隆. Gromov 入門.「Gromov と幾何学」, Reports on Global Analysis XI (1986 年) 所収.
[51] Sha, J. Yang, D. *Examples of manifolds of positive Ricci curvature.* J. Differential Geom. 29 (1989), no. 1, 95 103.
[52] Shikata, Y. *On the differentiable pinching problem.* Osaka J. Math. 4 1967 279 287.
[53] Shiohama, K. *Sphere theorems.* Handbook of differential geometry, Vol. I, 865 903, North-Holland, Amsterdam, 2000.
[54] Sugimoto, M. Shiohama, K. *On the differentiable pinching problem.* Math. Ann. 195 1971 1 16.
[55] Suyama, Y. *Differentiable sphere theorem by curvature pinching.* J. Math. Soc. Japan 43 (1991), no. 3, 527 553.
[56] Toponogov, V. A. *Riemann spaces with curvature bounded below.* Uspehi Mat. Nauk 14 1959 no. 1 (85), 87 130.
[57] Toponogov, V. A. *Riemannian spaces containing straight lines.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 127 1959 977 979.
[58] Weinstein, A. *On the homotopy type of positively-pinched manifolds.* Arch. Math. (Basel) 18 1967 523 524.
[59] Yano, K. and Bochner, S. *Curvature and Betti numbers.* Annals of Mathematics Studies, No. 32, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1953
[60] Yamaguchi, T. *Collapsing and pinching under a lower curvature bound.* Ann. of Math. (2) 133 (1991), no. 2, 317 357.
[61] 山口孝男. 4次元多様体の崩壊. 数学 52 (2000), no. 2, 172 186.
[62] 吉田朋好. ディラック作用の指数定理. 共立出版, 1998 年.

ALEXANDROV 空間入門

大津幸男（九州大学数理学研究院）

1. 比較定理入門

Alexandrov 空間とは比較定理をもとにして曲率の概念を定義した距離空間である．この論説の主眼は Alexandrov 空間がどのようにして大域的 Riemann 幾何の中に現れるかを解説し，Burago-Gromov-Perelman [4] で与えられた Alexandrov 空間の基本的性質を示すことである．特に，山口，塩谷両氏の論説を理解するための基礎となることを紹介したい．

このセクションではなるべく Riemann 幾何の知識を仮定せずに，曲面論程度の知識のもとで比較的簡単な比較定理の証明を与える．そして，断面曲率が下から押さえられた Riemann 多様体の比較定理がなぜ個々の多様体の構造に依存せず成り立つのかを解説する．公理的に Alexandrov 空間を定義するのなら，このセクションの内容は必ずしも必要ないのだが，ここで現れる手法は Alexandrov 空間を解析する手法と深い関係にあり，また Alexandrov 空間を研究する大域 Riemann 幾何からの動機を理解してもらうためにもこのような構成をとった．ここでは比較定理の紹介が目的なので完全に一般的な形での命題やその証明を与えてはいないが，一般の場合どのように拡張すれば良いかの注意を与えたので，興味のわいた読者は自ら議論を埋めることができるだろう．

1.1. **Gauss-Bonnet の定理.** 古典的な Gauss-Bonnet の定理を思い出そう：2 次元連結完備 Riemann 多様体 M の区分的に微分可能な曲線で囲まれた閉領域を D とする，つまり，可微分曲線 $c_i : [0,1] \to M$ $(i = 1, \ldots, m)$ で $p_1 = c_1(1) = c_2(0), \ldots, p_m = c_m(1) = c_1(0)$ で $\partial D = \sum_{i=1}^m \operatorname{Im} c_i$ を充たすとする．このとき

$$(1.1)\qquad 2\pi \times \chi(D) = \int_D K_M(x)\, dA(x) + \sum_{i=1}^m \int_{c_i} k_g\, ds + \sum_{i=1}^m (\pi - \alpha_i),$$

ただし，$\chi(D)$ は D の Euler 数，K_M は Gauss 曲率，dA は面積要素，k_g は測地曲率，α_i は p_i での ∂D の（D の中から計った）角度である．

特に，D が三つの最短線で囲まれている場合を考える．$p \in M$ から $q \in M$ への最短線を pq と表すと，D はある $p, q, r \in M$ に対して $\partial D = pq \cup qr \cup rp$ である．p から q への最短線と q から r への最短線とが q でなす角度を $\angle pqr$ とする．すると線積分の部分は消え，

$$(1.2)\qquad \angle pqr + \angle qrp + \angle rpq - \pi = \int_D K_M(x)\, dA(x) + 2\pi(1 - \chi(D))$$

任意 $x \in D$ で $K_M(x) \geq \kappa$ が成り立つとしよう．$\chi(D) \leq 1$ なので

$$\angle pqr + \angle qrp + \angle rpq - \pi \geq \kappa\,\mathrm{area}(D). \tag{1.3}$$

ただし，area は面積を表す．また $K_M(x) \leq \overline{\kappa}$ が任意の点 $x \in D$ で成り立つとすると D が可縮のとき，

$$\angle pqr + \angle qrp + \angle rpq - \pi \leq \overline{\kappa}\,\mathrm{area}(D). \tag{1.4}$$

つまり，$K_M(x) \geq \kappa$ の場合は D の位相に制限がないのに，$K_M(x) \leq \overline{\kappa}$ の場合には D が可縮であることを要求しているところに重要な違いがある．

(1.3) と (1.4) より Gauss 曲率は $x \in M$ に対して

$$K_M(x) = \lim_{D \to x} \frac{\angle pqr + \angle qrp + \angle rpq - \pi}{\mathrm{area}(D)} \tag{1.5}$$

のように定まることを見よう，ただし，$D \to x$ とは $\sup\{d(x, y) \mid y \in D\} \to 0$ が成り立つこととする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，任意の $y \in B(x, \delta)$ に対して $K_M(x) - \varepsilon < K_M(y) < K_M(x) + \varepsilon$ となるような $\delta > 0$ をとる． 更に $\delta' > 0$ を小さく取って任意の $p, q, r \in B(x, \delta')$ に対して $D \subset B(x, \delta)$ で D は可縮とできる．(1.3) と (1.4) より

$$K_M(x) - \varepsilon < \frac{\angle pqr + \angle qrp + \angle rpq - \pi}{\mathrm{area}(D)} < K_M(x) + \varepsilon,$$

よって (1.5) は明らか．(1.5) は一般次元の多様体の断面曲率に拡張される．

この関係は角度と曲率の局所的な関係を表わしている．以下では角度と曲率の大域的な関係を調べることにする．上で指摘したように (1.3) も大域的な関係式であったが，それより強い関係が得られることを示そう．

1.2. Rauch の比較定理. M の Riemann 計量 g は極座標 (t, θ) で

$$\begin{aligned} &g = dt^2 + f(t,\theta)^2 d\theta^2 \\ &f(0,\theta) = 0, \quad \tfrac{\partial f}{\partial t}(0,\theta) = 1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

と表せる．正確には次のようになる：$p \in M$ を固定して指数写像 $\mathrm{Exp}_p : T_p \to M$ を考え，

$$\tilde{W}_p = \{u \in T_p \mid \text{ある } \delta > 0 \text{ に対して } [0, 1+\delta] \ni t \mapsto \mathrm{Exp}_p\, tu \in M \\ \text{が最短線で}, u \text{ での } \mathrm{Exp}_p \text{ の微分が非特異.}\}$$

T_p に 0 を中心に極座標 (t, θ) を入れて，$\mathrm{Exp}_p : \tilde{W}_p \to M$ を座標系と見たものである．このとき，$f(t,\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}$ は 最短線 $t \to \mathrm{Exp}_p\, tu$ に沿った Jacobi 場である．(実際は $\tilde{W}_p$ の定義の後半は必要無いことが知られている.) この極座標で Gauss 曲率は（簡単なテンソル計算で）

$$K_M(t,\theta) = \frac{-1}{f(t,\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,\theta)$$

となる．$f_\theta(t) = f(t,\theta)$ と置くと，

$$\frac{d^2 f_\theta}{dt^2}(t) + K_M(t,\theta) f_\theta(t) = 0. \tag{1.7}$$

$I_\theta = \{t > 0 \mid (t,\theta) \in \tilde{W}_p\}$ と置く，ここでは極座標と T_p の元を同一視している．このとき，I_θ は区間で，$t \in I_\theta$ ならば $f_\theta(t) > 0$ である．例えば，曲率が κ の単連結 2 次元完備 Riemann 多様体 $H^2(\kappa)$ では，$f = s_\kappa$ と置き (1.6), (1.7) を解くと

$$s_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin \sqrt{\kappa}\, t & \text{if } \kappa > 0 \\ t & \text{if } \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh \sqrt{-\kappa}\, t & \text{if } \kappa < 0 \end{cases}$$

がわかる．

$K_M \geq \kappa$ ならば

$$1 \geq \frac{f_\theta(s)}{s_\kappa(s)} \geq \frac{f_\theta(t)}{s_\kappa(t)} \quad \text{for } 0 \leq s \leq t \in I_\theta. \tag{1.8}$$

あるいは，これと同値な命題

$K_M \geq \kappa$ ならば

$$\frac{f'_\theta(t)}{f_\theta(t)} \leq \frac{s'_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} \quad \text{for } t \in I_\theta. \tag{1.9}$$

が成り立つことを示そう．まずこれらが同値であることは次のようにしてわかる．

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{f_\theta(t)}{s_\kappa(t)} = \lim_{t \searrow 0} \frac{f'_\theta(t)}{s'_\kappa(t)} = 1$$

なので，(1.8) の二番目の不等式が示せれば始めの不等式は明らかである．(1.8) の二番目の式を変形すると

$$\frac{f_\theta(t) - f_\theta(s)}{f_\theta(s)} \leq \frac{s_\kappa(t) - s_\kappa(s)}{s_\kappa(s)}$$

なので，$h > 0$ に対して $t = s + h$ と置いて両辺を h で割り $h \to 0$ とすると (1.9) となる．逆にこれが成り立つと，

$$\frac{d}{dt} \frac{f_\theta(t)}{s_\kappa(t)} = \frac{f'_\theta(t) s_\kappa(t) - s'_\kappa(t) f_\theta(t)}{s_\kappa(t)^2} \leq 0$$

より (1.8) が成り立つので，これらは同値な命題であることが分かる．よって (1.9) を示せばよい．

十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して

$$g(t) = \frac{f'_\theta(t)}{f_\theta(t)}, \quad \tilde{g}(t) = \frac{s'_{\kappa-\varepsilon}(t-\varepsilon)}{s_{\kappa-\varepsilon}(t-\varepsilon)}$$

と置き，

$$I'_\theta = \{t \in I_\theta \cap (\varepsilon, \infty) \mid \tilde{g}(t) \geq g(t)\}$$

が定義域 $I_\theta \cap (\varepsilon, \infty)$ と一致することを示そう．f_θ と $s_{\kappa-\varepsilon}$ の連続性と初期条件より

$$\lim_{t \to \varepsilon} \tilde{g}(t) = \infty > g(\varepsilon)$$

となるので，$t = \varepsilon$ の近傍 $\subset I'_\theta$ である．もし I'_θ が定義域と一致しないと仮定すると，ある $t_0 > \varepsilon$ が存在して，$\varepsilon \leq t < t_0$ ならば $t \in I'_\theta$ であり，t_0 にいくらでも近いところに $\notin I'_\theta$ なる $I_\theta \cap (t_0, \infty)$ の元がある．連続性より，この t_0 では $g(t_0) = \tilde{g}(t_0)$ でなければならない．(1.7) より

$$g'(t) = \left(\frac{f'_\theta(t)}{f_\theta(t)}\right)' = -K_M(t, \theta) - g^2(t) \tag{1.10}$$

なので

$$g'(t_0) = -K_M(t_0, \theta) - g^2(t_0) < -\kappa + \varepsilon - \tilde{g}^2(t_0) = \tilde{g}'(t_0)$$

となり，$g(t_0) = \tilde{g}(t_0)$ から，ある $\delta > 0$ が存在して $[t_0, t_0 + \delta) \subset I'_\theta$ となり，矛盾が生じる．よって $\tilde{g}(t) \geq g(t)$ が $I_\theta \cap (\varepsilon, \infty)$ で成り立ち，次に $\varepsilon \to 0$ とすることで (1.9) がわかる．

(1.8) は Rauch の比較定理と呼ばれるもので，上の証明からひとつの最大値原理と見るのが自然である．ここで比較定理の大域的性格の一端を垣間見ることができる．

注意 1.1. (1.7) から Gauss-Bonnet の定理 (1.1) を示すことができる．例えば Hopf [13] を見よ．

1.3. 距離と角度の比較. §1.1 では最短線のなす三角形とその角度により曲率が定まることをみた．ここでは Rauch の比較定理から距離関数の比較ができ，さらに角度の比較定理が導かれることをみる．簡単のためここでは $\kappa \leq 0$ について $K_M \geq \kappa$ となるとして話しを進める．

ある点 $q \in M$ が p の切断点（cut point）であるとは任意の $u \in \tilde{W}_p$ に対して $q = \mathrm{Exp}_p u$ とならないこととする．q と p を結ぶ最短線 pq に沿って第一共役点（first conjugate point）であるとは pq を $[0,1] \ni t \mapsto \mathrm{Exp}_p tu$ と表すとき（$t \in (0,1)$ について tu での Exp_p の微分が非特異で）u での Exp_p の微分が特異であることとする．q が切断点でなければ，ある $u \in \tilde{W}_p$ により $q = \mathrm{Exp}_p u$ と一意的に書け，u で Exp_p は非特異である．したがって，q が p の切断点ならばある最短線に沿って p の第一共役点となっているか，p から q への二本以上の最短線があるかの何れかである．p の切断点全体の集合を切断跡（cut locus）と云う．(以上の定義は普通の定義とは少し異なるが以下の議論ではこちらの方が都合が良いのでここでは取りあえずこのように定義しておく.)

ある点 $p \in M$ を固定し，p からの距離関数を $d_p : M \to \mathbf{R}$ で表す．このとき $q \in M$ から r への最短線を $c : [0, a] \to M$ と置く，ただし最短線のパラメータは弧長にとる．$c(s_0) \in M$ が p の切断点ではないとする．すると極座標が $c(s_0)$ の近傍で定義され，この近傍の点と p を結ぶ θ 一定の曲線が M 内での一意的な最短線となる．このとき

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=s_0} d_p \circ c(s) = -\cos \angle pc(s_0)r. \tag{1.11}$$

(これは角度の定義からほぼ明らかだが正確な議論は注意 1.3 に与えた.) さらに $K_M \geq \kappa$ ならば,

$$\frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=s_0} d_p \circ c(s) \leq \sin^2 \angle pc(s_0)r \frac{s'_\kappa(|pc(s_0)|)}{s_\kappa(|pc(s_0)|)}. \tag{1.12}$$

なぜなら (1.2), (1.7) および (1.9) より, $c(s)$ の極座標を (θ_s, t_s) と置くと, 十分小さな h に対して

$$\begin{aligned} \angle pc(s_0+h)r - \angle pc(s_0)r &= \int_{\theta_{s_0}}^{\theta_{s_0+h}} \int_0^{t_s} f''_\theta(t)\,dt\,d\theta + \theta_h - \theta_0 \\ &= \int_{\theta_{s_0}}^{\theta_{s_0+h}} f'_\theta(t_s)\,d\theta \\ &= \int_{s_0}^{s_0+h} \frac{f'_\theta(t_s)}{f_\theta(t_s)} \sin \angle pc(s)r\,ds \\ &\leq \int_{s_0}^{s_0+h} \frac{s'_\kappa(t_s)}{s_\kappa(t_s)} \sin \angle pc(s)r\,ds, \end{aligned} \tag{1.13}$$

二行目から三行目の変形で θ と s は, (1.6) と角度の定義より,

$$\frac{ds}{d\theta} \sin \angle pc(s)r = f_\theta(t_s)$$

と変換されることを使った. このことと (1.11) より (1.12) が分かる.

三点 $p, q, r \in M$ に対して最短線 pq, qr, rp の三組みを測地三角形と呼び, $\triangle pqr$ と表す. $H^2(\kappa)$ での測地三角形 $\triangle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ で

$$|\tilde{p}\tilde{q}| = |pq|, \quad |\tilde{q}\tilde{r}| = |qr|, \quad |\tilde{r}\tilde{p}| = |rp|$$

を満たすものを $\triangle pqr$ の ($H^2(\kappa)$ での) 比較三角形と呼び, $\tilde{\triangle} pqr = \triangle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ と表す. まず次を示そう.

補題 1.1. (1) $H^2(\kappa)$ 内の測地三角形 $\triangle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ と $\triangle \hat{p}\hat{q}\hat{r}$ が $|\tilde{p}\tilde{q}| = |\hat{p}\hat{q}|$, $|\tilde{q}\tilde{r}| = |\hat{q}\hat{r}|$ をみたすとき

$$|\tilde{p}\tilde{r}| \leq |\hat{p}\hat{r}| \Leftrightarrow \angle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r} \leq \angle \hat{p}\hat{q}\hat{r}.$$

(2) $H^2(\kappa)$ 内の測地三角形 $\triangle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$, $\triangle \tilde{p}\tilde{r}\tilde{s}$, $\triangle \hat{p}\hat{q}\hat{s}$ が

$$|\hat{p}\hat{q}| = |\tilde{p}\tilde{q}|, \quad |\hat{q}\hat{s}| = |\tilde{q}\tilde{r}| + |\tilde{r}\tilde{s}|, \quad |\hat{p}\hat{s}| = |\tilde{p}\tilde{s}|$$

をみたすとし, $|\hat{q}\hat{r}| = |\tilde{q}\tilde{r}|$ をみたす $\hat{r} \in \hat{q}\hat{s}$ を取る. このとき

$$\angle \tilde{p}\tilde{r}\tilde{q} + \angle \tilde{p}\tilde{r}\tilde{s} \leq \pi \Leftrightarrow \angle \hat{p}\hat{q}\hat{r} \leq \angle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r} \Leftrightarrow |\hat{p}\hat{r}| \leq |\tilde{p}\tilde{r}|.$$

Proof. (1) 良く知られた式

$$\cos \angle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r} = \frac{c_\kappa(|\tilde{p}\tilde{r}|) - c_\kappa(|\tilde{p}\tilde{q}|)c_\kappa(|\tilde{q}\tilde{r}|)}{\kappa\, s_\kappa(|\tilde{p}\tilde{q}|)s_\kappa(|\tilde{q}\tilde{r}|)}$$

より, $\angle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ が $|\tilde{p}\tilde{r}|$ の関数として単調増加であることは明らか, ただし, $c_\kappa(t) = s'_\kappa(t)$ であり, $\kappa = 0$ のときは $\kappa \to 0$ の極限とみなしている.

(2) $\tilde{q}$, $\bar{s}$ が $\tilde{p}\tilde{r}$ について反対側にあるとする．$\bar{s}$ を $\tilde{q}\tilde{r}$ を $\tilde{r}$ の方向に延ばした直線上に $|\bar{r}\bar{s}| = |\tilde{r}\tilde{s}|$ なるように取る．$\angle\tilde{p}\tilde{r}\tilde{q} + \angle\tilde{p}\tilde{r}\tilde{s} \leq \pi$ と仮定する．$\triangle\tilde{p}\bar{r}\bar{s}$ と $\triangle\tilde{p}\tilde{r}\tilde{s}$ に (1) を使うと

$$|\tilde{p}\tilde{s}| \leq |\tilde{p}\bar{s}|.$$

この三角形 $\triangle\tilde{p}\tilde{q}\bar{s}$ と $\triangle\hat{p}\hat{q}\hat{s}$ にもう一度 (1) を使うと

$$\angle\hat{p}\hat{q}\hat{r} = \angle\hat{p}\hat{q}\hat{s} \leq \angle\tilde{p}\tilde{q}\bar{s} = \angle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}.$$

また (1) より

$$|\hat{p}\hat{r}| \leq |\tilde{p}\tilde{r}|.$$

逆は上の議論を逆に辿れば良い． □

以上の準備のもとで次を示す．$\tilde{\triangle}pqr = \triangle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ と表し，$\tilde{\angle}pqr$ で $\angle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ を表すとするとき，

任意の測地三角形 $\triangle pqr$ に対して $H^2(\kappa)$ の比較三角形 $\tilde{\triangle}pqr = \triangle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ が存在して

$$\angle pqr \geq \tilde{\angle}pqr, \quad \angle qrp \geq \tilde{\angle}qrp, \quad \angle rpq \geq \tilde{\angle}rpq \tag{1.14}$$

が成り立つ（図 1(i)）．

これが Toponogov の比較定理である．Gauss-Bonnet の定理から比較三角形の面積の κ 倍は $\tilde{\angle}pqr + \tilde{\angle}qrp + \tilde{\angle}rpq - \pi$ となり，上から (1.3) の三角形の面積を比較三角形の面積に換えたものが成り立つことがわかる．もちろん角度の和の比較ができたからといって個々の角度の比較はできないので，(1.14) は (1.3) を著しく拡張していると見ることが出来る．

証明を与えよう．十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $H^2(\kappa)$ の代わりに $H^2(\kappa-\varepsilon)$ でこれが成り立つことを示せばよい．M 内の測地三角形 $\triangle pqr$ を固定する．$\tilde{p} \in H^2(\kappa-\varepsilon)$ からの距離関数 $d_{\tilde{p}}$ を考える．$c : [0, a] \to M$ を $q = c(0)$ から $r = c(a)$ への（長さをパラメータとする）最短線とする．ある $s \in (0, a)$ について $c(s)$ から q への最短線が c と重なるとすると等号が成り立つので，このようなことがおこらないとする，つまり，$0 < \angle pc(s)r < \pi$ となるとする．

点 $c(s_0)$ が p の切断点でないような $s_0 \in [0, a]$ を固定する．上で注意したように，ある近傍 $(s_0 - \delta', s_0 + \delta) \cap [0, a]$ が存在してこの上で切断跡とは交わらない．$s \in (s_0 - \delta', s_0 + \delta)$ とし，$\tilde{p} \in H^2(\kappa - \varepsilon)$，$\hat{c}_s$ を

$$|\tilde{p}\hat{c}_s(s)| = |pc(s)|, \quad \angle\tilde{p}\hat{c}_s(s)\hat{c}_s(a) = \angle pc(s)r \tag{1.15}$$

をみたす $H^2(\kappa-\varepsilon)$ の中の最短線とする．(1.12) の右辺は，$H^2(\kappa-\varepsilon)$ の場合に (1.13) の計算をたどり直してみれば明らかなように，対応する距離関数 $d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_s(s+h)$ の二回微分であり，$0 < \angle pc(s)r < \pi$ から等号は成り立たない．(1.15) より，十分小さな $\delta'' > 0$ が存在して $0 < |h| < \delta''$ ならば

$$d_p \circ c(s+h) < d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_s(s+h) \tag{1.16}$$

が成り立つ．これから

$$d_p \circ c(s) \leq d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_{s_0}(s) \tag{1.17}$$

が全ての $s \in (s_0 - \delta', s_0 + \delta)$ で成り立つことを示そう．そこで

$$l_0 := \sup\{l \in [s_0, s_0 + \delta] \mid d_p \circ c(s) < d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_{s_0}(s) \quad \text{for } s \in (s_0, l)\} < s_0 + \delta$$

として矛盾を示す．$d_p \circ c(l_0) = d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_{s_0}(l_0)$ となるので

$$\begin{aligned} &d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_{s_0}(s_1) - d_p \circ c(s_1) \\ &= \max\{d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_{s_0}(s) - d_p \circ c(s) \mid s_0 < s < l_0\} \end{aligned}$$

をみたし，任意の $s \in (s_1, l_0)$ に対して

$$d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_{s_0}(s) - d_p \circ c(s) < d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_{s_0}(s_1) - d_p \circ c(s_1)$$

となるような $s_1 \in (s_0, l_0)$ が存在する．第一の条件から，(1.11) に注意すると，

$$\angle \tilde{p}\hat{c}_{s_0}(s_1)\hat{c}_{s_0}(a) = \angle pc(s_1)c(a).$$

そこで $f(s) = d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_{s_0}(s) - d_p \circ c(s)$ と置き， $s = s_1$ で一回微分を考えると $\frac{d}{ds}|_{s=s_1} f(s) = 0$ で，二回微分を考えると (1.12) に注意することで

$$\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=s_1} f(s) \geq \sin^2 \angle pc(s_1)c(a) \left(\frac{s'_{\kappa-\varepsilon}(|\tilde{p}\hat{c}_{s_0}(s_1)|)}{s_{\kappa-\varepsilon}(|\tilde{p}\hat{c}_{s_0}(s_1)|)} - \frac{s'_{\kappa}(|pc(s_1)|)}{s_{\kappa}(|pc(s_1)|)} \right).$$

もし，$|\tilde{p}\hat{c}_{s_0}(s_1)| = |pc(s_1)|$ ならば右辺が 0 より大きくなり矛盾だが，$|\tilde{p}\hat{c}_{s_0}(s_1)| > |pc(s_1)|$ からだけではそのようなことは言えないので以下のように議論する．

そのため始めから $0 < \delta < |pc(s_0)|/10$ としておく．すると

$$\frac{9}{10}|pc(s_0)| < d_p \circ c(s) < \frac{11}{10}|pc(s_0)| \quad \text{for } s \in [s_0, s_0 + \delta]$$

が成り立つ．(1.16) が $s = s_1$ で成り立つので s_0 を s_1 にかえて同じ議論を繰り返す．ただし，$s = l_0$ で

$$d_p \circ c(l_0) = d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_{s_0}(l_0) > d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_{s_1}(l_0)$$

である．実際，三角形 $\triangle \tilde{p}\hat{c}_{s_0}(s_1)\hat{c}_{s_0}(l_0)$ と $\triangle \tilde{p}\hat{c}_{s_1}(s_1)\hat{c}_{s_1}(l_0)$ を較べると，$\tilde{p}' \in \tilde{p}\hat{c}_{s_0}(s_1)$ を $|\tilde{p}'\hat{c}_{s_0}(s_1)| = |pc(s_1)|$ と取ることで，

$$\triangle \tilde{p}\hat{c}_{s_1}(s_1)\hat{c}_{s_1}(l_0) \equiv \triangle \tilde{p}'\hat{c}_{s_0}(s_1)\hat{c}_{s_0}(l_0)$$

となり，右の三角形は $\triangle \tilde{p}\hat{c}_{s_0}(s_1)\hat{c}_{s_0}(l_0)$ に含まれるので，辺の長さの条件から上の不等式が言える．したがって

$$l_1 = \sup\{l \in [s_1, l_0] \mid d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_{s_1}(s) > d_p \circ c(s) \quad \text{for } s \in (s_1, l)\} < l_0$$

が存在し $[s_1, l_1] \subset (s_0, l_0)$ となる．これを何回も繰り替えすことで単調増加数列 $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ が取れ，これが収束することがわかる．このとき連続性から

$$d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_{s_i}(s_{i+1}) - d_p \circ c(s_{i+1}) \to 0 \quad \text{as } i \to \infty$$

が成り立つので，十分大きな i に対しては

$$\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=s_{i+1}} (d_{\tilde{p}} \circ \hat{c}_{s_i}(s) - d_p \circ c(s)) > 0$$

となり矛盾が生じる．$(s_0-\delta', s_0]$ でも同じ議論が成り立つ．

任意の $s\in(s_0-\delta', s_0+\delta)$ に対して測地三角形 $\triangle pc(s_0)c(s)$ の比較三角形 $\triangle\tilde{p}\tilde{c}_{s_0}\tilde{c}_s$ を取ると，(1.17) と補題 1.1 より

$$\angle pc(s_0)c(s)\geq\angle\tilde{p}\tilde{c}_{s_0}\tilde{c}_s, \tag{1.18}$$

逆に，(1.17) で s を s_0, s_0 を s とみなして補題 1.1 を使うと

$$\angle pc(s)c(s_0)\geq\angle\tilde{p}\tilde{c}_s\tilde{c}_{s_0} \tag{1.19}$$

もわかる．

まず p の切断跡と c とは交わらないと仮定する．コンパクト性の議論より，$[0,a]$ の適当な分割 $0=s_0<s_1<\cdots<s_m=a$ と $\triangle pc(s_i)c(s_{i+1})$ の比較三角形 $\triangle\tilde{p}\tilde{c}_i\tilde{c}_{i+1}$ で，$\tilde{c}_{i-1}$ と $\tilde{c}_{i+1}$ は $\tilde{p}\tilde{c}_{i-1}$ を含む最短線に関して反対側にあり，

$$\angle pc(s_{i-1})c(s_i)\geq\angle\tilde{p}\tilde{c}_{i-1}\tilde{c}_i\quad i=1,\ldots,m,$$
$$\angle pc(s_i)c(s_{i+1})\geq\angle\tilde{p}\tilde{c}_i\tilde{c}_{i+1}\quad i=0,\ldots,m-1$$

なるものが取れる，特に

$$\angle\tilde{p}\tilde{c}_{i-1}\tilde{c}_i+\angle\tilde{p}\tilde{c}_i\tilde{c}_{i+1}\leq\pi\quad i=1,\ldots,m-1. \tag{1.20}$$

このようにして $H^2(\kappa-\varepsilon)$ の凸多角形が得られる．

$\triangle\tilde{p}\tilde{c}_0\tilde{c}_1$, $\triangle\tilde{p}\tilde{c}_1\tilde{c}_2$ と $\triangle pc(s_0)c(s_2)$ の比較三角形 $\triangle\tilde{p}\hat{c}_0\hat{c}_2$ を較べると (1.20) と補題 1.1 (2) と (1) より

$$\angle\tilde{p}\hat{c}_0\hat{c}_2\leq\angle\tilde{p}\tilde{c}_0\tilde{c}_1,\quad\angle\tilde{p}\hat{c}_2\hat{c}_0\leq\angle\tilde{p}\tilde{c}_2\tilde{c}_1.$$

これを繰り返すことで，$\triangle pqr$ の比較三角形 $\triangle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ について

$$\angle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}\leq\angle\tilde{p}\tilde{c}_0\tilde{c}_1\leq\angle pc_0c_1=\angle pqr,$$
$$\angle\tilde{p}\tilde{r}\tilde{q}\leq\angle\tilde{p}\tilde{c}_{m-1}\tilde{c}_m\leq\angle pc_{m-1}c_m=\angle prq$$

がわかる．これは (1.14) の一部であるが p, q, r の名前を付け替えることで残りの場合もわかる．

次に切断跡と c との交わりがある場合も (1.18) と (1.19) が成り立つことがいえれば証明が終わる．$c(s_0)$ が切断点の場合，二本以上の最短線があるか，ある最短線に沿って p の第一共役点となっているかの何れかである．$c(s_0)$ から p への最短線が一本しかなく，$c(s_0)$ が p からの第一共役点であるとしよう，つまり $c(s_0)$ の極座標 (θ_{s_0}, t_{s_0}) が一意に定まり $0<t<t_{s_0}$ で $f_\theta(t)>0$ であり，$f_\theta(t_{s_0})=0$．このときも (1.12) が多少の補正のもとに成立することを示す．$p'\in pc(s_0)$, $p'\neq p$ を取り $d_{p'}$ を考えると

$$d_p(c(s))-d(p,p')\leq d_{p'}(c(s))$$

である．(1.7) が二階の常微分方程式であるので，二つの与えられた点で 0 になるものは定数倍を除いて一意的に決まることから $c(s_0)$ は p' の第一共役点でないことがわかる．従って (1.12) より

$$\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_s d_{p'}\circ c(s)\leq\sin^2\angle pc(s)r\,\frac{s'_{\kappa-\varepsilon}(|p'c(s)|)}{s_{\kappa-\varepsilon}(|p'c(s)|)}.$$

$\varepsilon > 0$ を取り直して p' を p に十分近く取れば (1.17) が成り立つようにできる．この場合，(1.18), (1.19) では $\tilde{p}$ を $\tilde{p}'$ に替えなければならないので，全ての比較三角形 $\triangle\tilde{p}\tilde{c}_i\tilde{c}_{i+1}$ を辺の長さが合うように取直す必要があるが，比較三角形を $\tilde{c}_i\tilde{c}_{i+1}$ を共有するそれに含まれる別の測地三角形にかえても角度の評価は（少し悪くなるが）変わらないので，全ての分割点で辺の長さを少し短かめに取り替えて議論すればよい．

二本以上最短線がある場合を考える．この場合角度の意味を正確に定める必要がある：

$$\underline{\angle} pc(s)r = \inf\{\angle_{c(s)}(c,\gamma) \mid \gamma \text{ は } c(s) \text{ と } p \text{ を結ぶ最短線}\}$$
$$\overline{\angle} pc(s)r = \sup\{\angle_{c(s)}(c,\gamma) \mid \gamma \text{ は } c(s) \text{ と } p \text{ を結ぶ最短線}\}$$

と定義する，ただし，$\angle_{c(s)}(c,\gamma)$ は c と γ の $c(s)$ でなす角のこと．すると

$$\lim_{s\nearrow s_0} \angle pc(s)r = \overline{\angle} pc(s_0)r \geq \underline{\angle} pc(s_0)r = \lim_{s\searrow s_0} \angle pc(s)r, \tag{1.21}$$

ただし，$\angle pc(s)r$ は最短線が一意でない場合どの角度をとっても良い．このことから $\underline{\angle} pc(s_0)r$ と $\overline{\angle} pc(s_0)r$ を実現する最短線が存在することが分かる，これらの最短線について（第一共役点ならば p を少しだけ取直すことで）(1.17) を $h > 0$ と $h < 0$ に制限した二つの評価が得られる.（もちろん d_p はこの点で微分できないが,）この場合も (1.18), (1.19) が成り立つ．(1.21) より比較三角形で (1.20) が成り立つこともわかるのでこの場合の議論も問題ない．

注意 1.2. この証明で用いた議論はどれも大域的なものであった，これは比較定理の大域的性格を強く反映している．

1.4. **Alexandrov-Toponogov の比較定理.** § 1.2–1.3 では M が 2 次元として話しをしたが，実は同様のことが一般次元の Riemann 多様体でも成立する．正確に述べよう：$R(\cdot,\cdot)\cdot$ を曲率テンソルとする．$p \in M$ に対して σ_p を T_p の 2 次元平面とする，すると，一次独立な $u, v \in T_p$ があって $\sigma_p = \langle u, v\rangle$ と書かれる．特に u, v を正規直交基底に取るとき，

$$K_M(\sigma_p) = g(R(u,v)v, u)$$

と置く，これが M の断面曲率である．これは u, v の取り方によらないことが簡単にわかる，また，2 次元の場合には Gauss 曲率に一致する．$K_M \geq \kappa$ とは任意の $p \in M$ と 2 次元平面 σ_p に対して $K_M(\sigma_p) \geq \kappa$ を表す．

定理 1.2 (Alexandrov-Toponogov). *n 次元連結完備 Riemann 多様体 M が $K_M \geq \kappa$ をみたすならば以下が成り立つ．*

(1) 任意の測地三角形 $\triangle pqr$ に対して $H^2(\kappa)$ の比較三角形 $\tilde{\triangle} pqr = \triangle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ が存在して

$$\angle pqr \geq \tilde{\angle} pqr, \quad \angle qrp \geq \tilde{\angle} qrp, \quad \angle rpq \geq \tilde{\angle} rpq$$

が成り立つ（図 1(i)）．

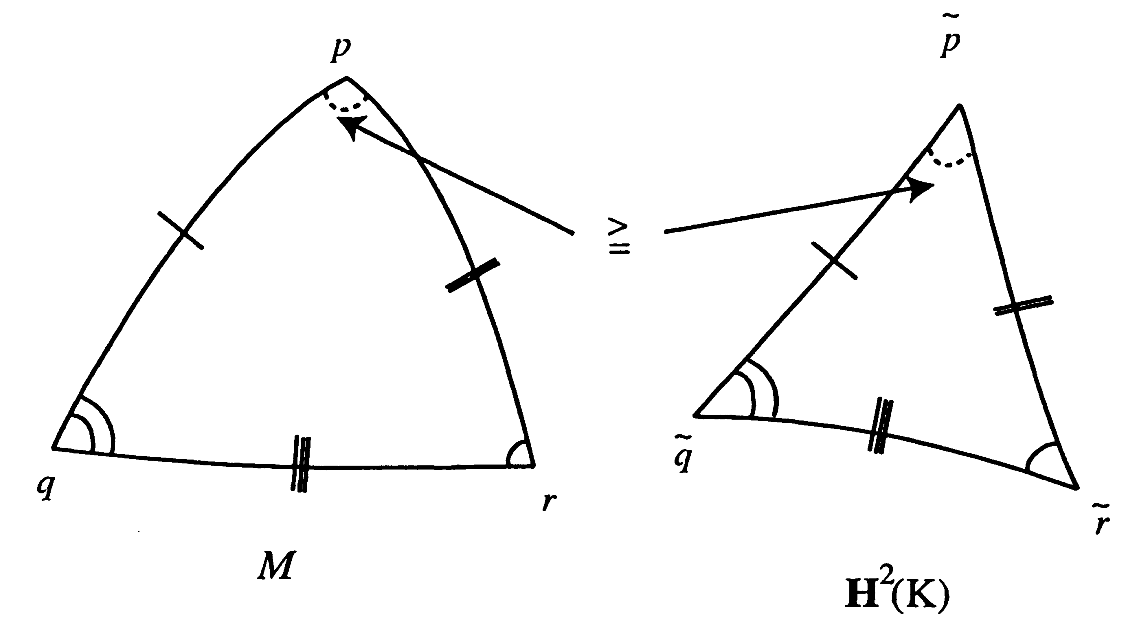


図 1 (i)

(2) 任意の測地三角形 $\triangle pqr$ に対して $H^2(\kappa)$ 内の測地三角形 $\triangle\hat{p}\hat{q}\hat{r}$ で $|pq| = |\hat{p}\hat{q}|$, $|qr| = |\hat{q}\hat{r}|$, $\angle pqr = \angle\hat{p}\hat{q}\hat{r}$ なるものをとると

$$|pr| \leq |\hat{p}\hat{r}|$$

が成り立つ（図 1(ii)）.

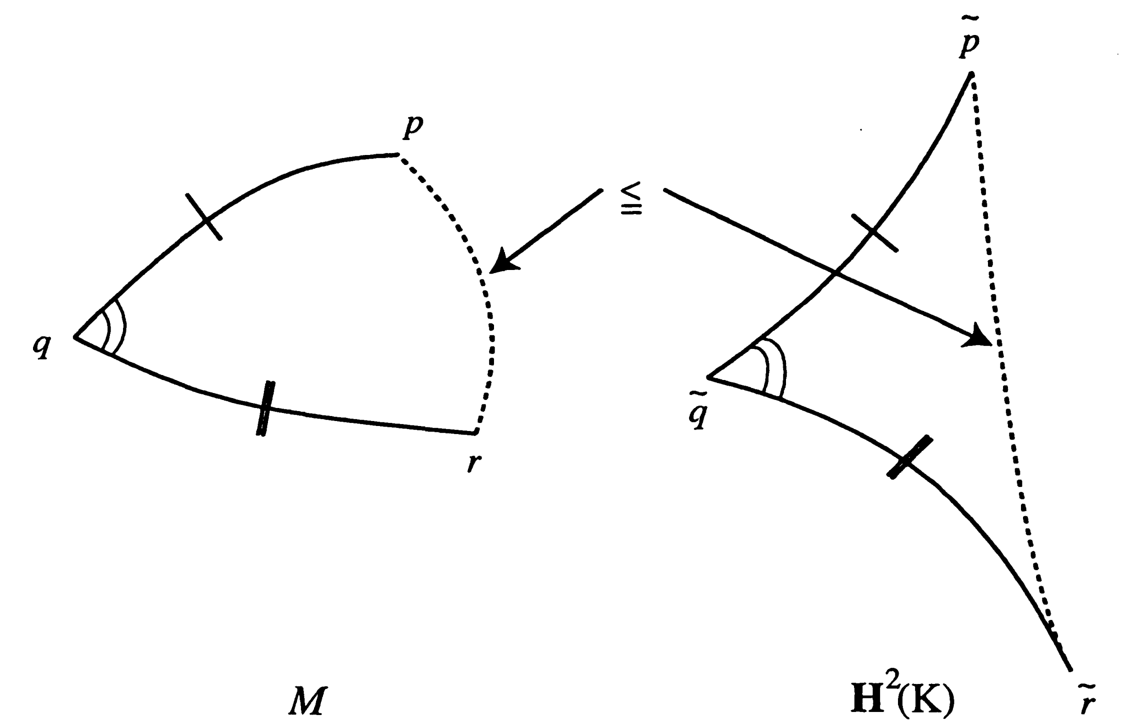


図 1 (ii)

(3) 任意の測地三角形 $\triangle pqr$ に対して $H^2(\kappa)$ の比較三角形 $\tilde{\triangle}pqr = \triangle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ が存在して

$$|st| \geq |\tilde{s}\tilde{t}|$$

が全ての $s \in pq$, $t \in pr$ と $|ps| = |\tilde{p}\tilde{s}|$, $|pt| = |\tilde{p}\tilde{t}|$ をみたす点 $\tilde{s} \in \tilde{p}\tilde{q}$, $\tilde{t} \in \tilde{p}\tilde{r}$ に対して成り立つ（図 1(iii)））.

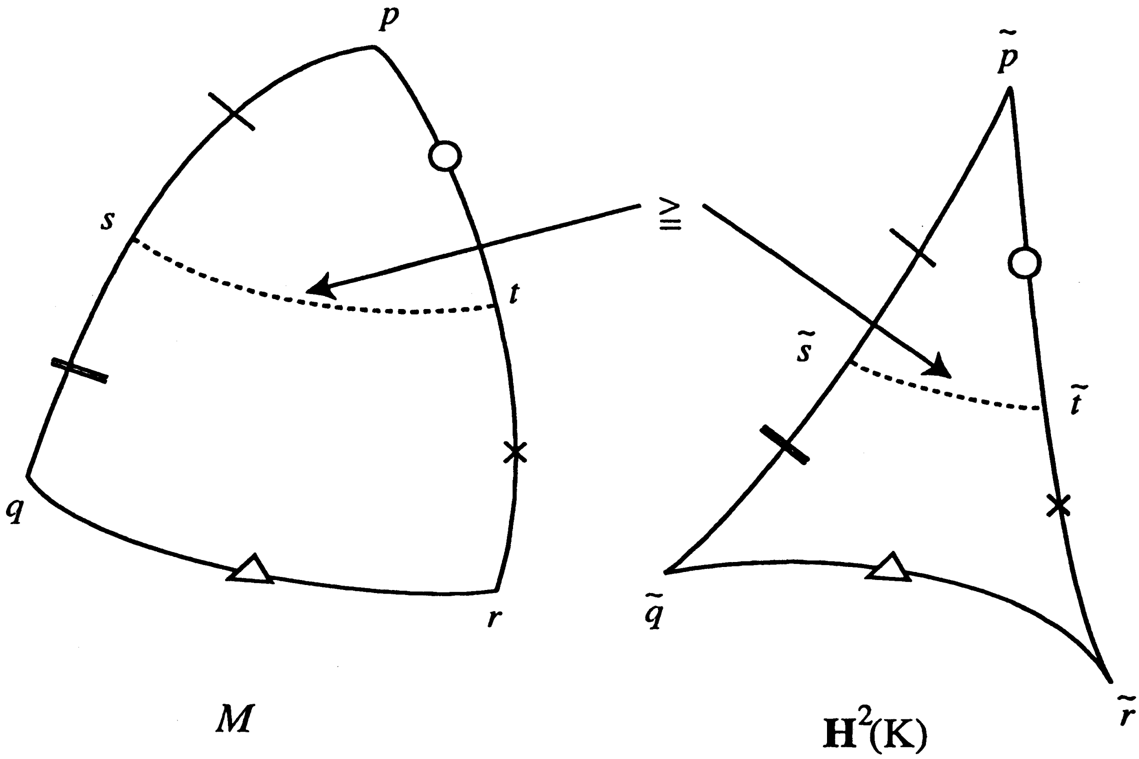


図 1 (iii)

(4) 任意の測地三角形 $\triangle pqr$ と任意の $s \in pq$, $t \in pr$ に対して $H^2(\kappa)$ の比較三角形 $\tilde{\triangle}pst$ が存在して角 $\tilde{\angle}spt$ が定まり，

$$(s,t) \mapsto \omega_{s,t} := \tilde{\angle}spt$$

は $s \in pq$, $t \in pr$ について単調非増加関数である，ただし， $s, s' \in pq$, $t, t' \in pr$ について $(s,t) \leq (s',t')$ を $|ps| \leq |ps'|$ かつ $|pt| \leq |pt'|$ と定める.

Proof. (1) は示したので残りの命題が同値であることを示せば良い.

(1) $\Rightarrow$ (2). $\triangle pqr$ に対して (1) の $\triangle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ を取る. $\hat{r} \in H^2(\kappa)$ を $|\hat{r}\tilde{q}| = |rq|$ $\angle\tilde{p}\tilde{q}\hat{r} = \angle pqr$ なるものすると，補題 1.1 と $\angle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r} \leq \angle\tilde{p}\tilde{q}\hat{r}$ より

$$|\tilde{p}\hat{r}| \geq |\tilde{p}\tilde{r}| = |pr|.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). $\triangle pqr$ に対して (2) の $\triangle\hat{p}\hat{q}\hat{r}$ をとる. $\tilde{r} \in H^2(\kappa)$ で $|\tilde{r}\hat{p}| = |rp|$, $|\tilde{r}\hat{q}| = |rq|$ なるものすると，$|pr| \leq |\hat{p}\hat{r}|$ より補題 1.1 (1) が使えて

$$\angle\hat{p}\hat{q}\tilde{r} \leq \angle\hat{p}\hat{q}\hat{r} = \angle pqr.$$

(1) ⇒ (3). $\triangle psr$, $\triangle rqs$ の比較三角形 $\tilde{\triangle} psr$, $\tilde{\triangle} rqs$ を取ると，(1) より

$$\tilde{\angle} rsp + \tilde{\angle} rsq \leq \angle rsp + \angle rsq \leq \pi.$$

したがって，補題 1.1 (2) より，

$$|rs| \geq |\tilde{r}\tilde{s}|.$$

全く同じ議論から $\triangle psr$ の比較三角形 $\tilde{\triangle} psr = \triangle \hat{p}\hat{s}\hat{r}$ について

$$|st| \geq |\hat{s}\tilde{t}|$$

で，補題 1.1 (1) を二回使うと

$$|\hat{s}\tilde{t}| \geq |\tilde{s}\tilde{t}|.$$

(3) ⇔ (4). $s \in pq$, $t, t' \in pr$ で $t' < t$ としよう．すると測地三角形 $\triangle pst$ の比較三角形 $\triangle \tilde{p}\tilde{s}\tilde{t}$ に対して $t' \in pt$ なので (3) より

$$|t's| \geq |\tilde{t'}\tilde{s}|.$$

そこで測地三角形 $\triangle pst'$ の比較三角形 $\triangle \hat{p}\hat{s}\hat{t'}$ を取ると，また補題 1.1 (1) より

$$\angle \tilde{s}\tilde{p}\tilde{t} = \angle \tilde{s}\tilde{p}\tilde{t'} \leq \angle \hat{s}\hat{p}\hat{t'}.$$

逆も同様に議論すればよい．

(4) ⇒ (1). $\triangle pqr$ に対して比較三角形を $\triangle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ とする．$s \in pq$, $t \in pr$ を $|ps| = |pt|$ と取り，$\triangle \hat{s}\hat{p}\hat{t}$ を $\triangle spt$ の比較三角形とすると (4) より

$$\angle \hat{s}\hat{p}\hat{t} \geq \angle \tilde{q}\tilde{p}\tilde{r}.$$

$|ps| \to 0$ とすると

$$\tilde{\angle} qpr \leq \lim_{|ps| \to 0} \angle \hat{s}\hat{p}\hat{t} = \angle qpr.$$

□

注意 1.3. (1) の証明は 2 次元で $\kappa \leq 0$ の場合に限ったが，一般の Riemann 多様体の場合にもほぼ同様の議論が成り立つので，変更しなければならない部分を注意しよう．まず，Rauch の比較定理 (1.9) の証明は (1.7) が Jacobi 場のみたす方程式であることに注意すれば，このまま一般の場合にも使える．

Toponogov の比較定理の証明では (1.11), (1.12) と補題 1.1 以外はほぼ同じである．まず，補題 1.1 (2) で $\kappa > 0$ のとき 測地三角形の大きさについて $|\hat{p}\hat{q}| + |\hat{q}\hat{s}| + |\hat{s}\hat{p}| < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ なる条件が必要になる．これは球面 $H^2(\kappa)$ 上に測地三角形があるための条件であり，この制限から任意の測地三角形 $\triangle pqr$ について $|pq| + |qs| + |sp| \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ となることもわかる．

(1.11), (1.12) を示すのに我々は簡単のため Gauss-Bonnet の定理を使って距離関数 d_p の二回微分を求めたのだが，一般の場合は第二変分公式を調べる必要がある．我々の場合は以下のように簡単に求められる: まず第一変分公式を思い出そう．可微分写像 $\alpha : [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$

に対して $\gamma_s=\alpha(t,s):[0,a]\to M$ を曲線とし，$L(\gamma_s)$ によりその長さを表すと

$$\frac{d}{ds}L(\gamma_s)=\left[\left\langle \tfrac{1}{\|T\|}T,S\right\rangle\right]_{t=0}^{a}-\int_0^a\left\langle \nabla_T\tfrac{1}{\|T\|}T,S\right\rangle dt,$$

ここで $T=\alpha_*\frac{\partial}{\partial t}$, $S=\alpha_*\frac{\partial}{\partial s}$ であり，$\langle,\rangle$ は Riemann 計量，$\|\cdot\|$ はノルム，∇ は Levi-Civita 接続を表す．ここで興味があるのは d_p の変分であるので，$\alpha(0,s)=p$, γ_s が全て最短測地線とし，$c(s)=\alpha(a,s)$ が速度 1 の曲線となる変分を考えると，第二項が消えるので

$$\frac{d}{ds}d_p\circ c(s)=\frac{d}{ds}L(\gamma_s)=\left\langle \tfrac{1}{\|T\|}T,S\right\rangle_{(a,s)}$$

となり，(1.11) がわかる．これをもう一度微分すると

$$\frac{d^2}{ds^2}d_p\circ c(s)=\left\langle (\nabla_{\frac{1}{\|T\|}T}S)^{\perp},S\right\rangle_{(a,s)}+\left\langle \tfrac{1}{\|T\|}T,\nabla_S S\right\rangle_{(a,s)},$$

ここで $X^{\perp}$ は X の T 方向の直交成分である．γ_0 を単位速度の最短線とする．$c(s)=\alpha(a,s)$ を単位速度の測地線と取ると第二項が消えるので

$$\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=0}d_p\circ c(s)=\left\langle (\nabla_T S)^{\perp},S^{\perp}\right\rangle_{(a,s)}.$$

ここで S の T についての直交成分の大きさと，$S=\alpha_*\frac{\partial}{\partial s}$ が γ_0 に沿った Jacobi 場であることに注意して，Rauch の比較定理を適用すれば (1.12) が得られる．

最後に $c(s)$ が p からの第一共役点である場合に $c(s)$ が p に十分近い $p'\in pc(s)$ からの第一共役点にならないことを使っているが，一般の場合には [17] などで展開されている指数形式を使った議論が必要となる．

別の観点からの証明は [5], [14] 等に与えられている．(それらの証明は [22], [15] の教科書にも紹介されているので参考にしてほしい．このセクションの理解を深めるための参考文献としてこの二つを挙げておく.)

1.5. **Bishop-Gromov の比較定理**. § 1.4 では幾つかの同値な命題を示した訳だが，(1), (2) では角度が Riemann 多様体で定義されることは当たり前として使っていた．ところが，(3), (4) では距離しか使っていないのでこの方が距離空間の幾何との関連がより明確である．次の二つのセクションでは，Riemann 多様体の構造を調べようとするとすぐに多様体だけでは不十分になり，自然に距離空間が現れること，しかも，その場合 (3), (4) の性質が保たれることを見る．だが，その前に Bishop-Gromov の体積の比較定理を紹介してこのセクションを終わろう．これは，断面曲率の下からの評価のもとでは Alexandrov-Toponogov の比較定理から導かれるのだが，もっと弱く Ricci 曲率の下からの評価のもとで成り立つのである．

n 次元の Riemann 多様体 $M=(M,g)$ の Ricci 曲率を Ric_M と表す，これは曲率テンソル $R(\cdot,\cdot)\cdot$ のトレースをとった (2,0) 対称テンソルで

ある．$u \in T_pM$, $g(u,u)=1$ と取ると $\mathrm{Ric}(u,u)$ は T_p の正規直交基底 $e_1=u$, $e_2, \dots e_n$ に対して

$$\mathrm{Ric}(u,u)=\sum_{i=2}^{n} g(R(e_i,u)u,e_i),$$

つまり，u を含む平面についての断面曲率の平均をとったものである．したがって断面曲率 $\geq \kappa$ ならば $\mathrm{Ric}_M \geq (n-1)\kappa$ である．

点 p を中心とした半径 $r>0$ の円板 $B(p,r)=B(p,r:M):=\{x\in M \mid d(p,q)<r\}$ に対してその体積 $\mathrm{vol}(B(p,r))$ が定まる．($B(p,r)=M$ という場合も含めて考察する．) 曲率が κ の単連結 n 次元完備 Riemann 多様体を $H^n(\kappa)$ と表すと，上と同様に $\tilde{p}\in H^n(\kappa)$ を固定して $b^n(r):=\mathrm{vol}(B(\tilde{p},r:H^n(\kappa)))$ が定まる．

定理 1.3 (Bishop-Gromov の比較定理). *n 次元の Riemann 多様体 M が $\mathrm{Ric}_M \geq (n-1)\kappa$ をみたすならば，任意の $p\in M$ に対して*

$$1 \geq \frac{\mathrm{vol}(B(p,r_0))}{b^n(r_0)} \geq \frac{\mathrm{vol}(B(p,r_1))}{b^n(r_1)} \quad \text{for } 0\leq r_0\leq r_1 \tag{1.22}$$

が成り立つ．

Proof. ここでは $n=2$ の場合に (1.8) から (1.22) が導かれることを示す．$f_\theta(r)$ は各 θ について，その向きにでる最短線が切断跡に交わるまで定義されている．そこでそれ以後は 0 と置くと $[0,\infty)\times[0,2\pi)$ で矛盾なく定義され，やはり (1.8) が成り立っている．そこで $0<r_0\leq r$ に対して

$$\int_0^{r_0} f_\theta(t)dt \geq \frac{f_\theta(r)}{s_\kappa(r)}\int_0^{r_0} s_\kappa(t)dt,$$

この両辺を $s_\kappa(r)$ 倍して，$r\in[r_0,r_1]$ で積分すると

$$\int_{r_0}^{r_1} s_\kappa(r)dr \times \int_0^{r_0} f_\theta(t)dt \geq \int_{r_0}^{r_1} f_\theta(r)dr \times \int_0^{r_0} s_\kappa(t)dt,$$

これを θ で積分して 2π を掛けると

$$\{b^2(r_1)-b^2(r_0)\}\,\mathrm{vol}(B(p,r_0)) \geq \{\mathrm{vol}(B(p,r_1))-\mathrm{vol}(B(p,r_0))\}b^2(r_0),$$

つまり，$0<r_0\leq r_1$ に対して

$$\frac{\mathrm{vol}(B(p,r_0))}{b^2(r_0)} \geq \frac{\mathrm{vol}(B(p,r_1))}{b^2(r_1)}.$$

$\lim_{r\to 0}\frac{\mathrm{vol}(B(p,r))}{b^2(r)}=1$ は明らか． □

注意 1.4. 一般の次元では曲座標での体積要素（この場合 $d\,\mathrm{Exp}_p$ の行列式）が (1.8) と同じ性質をみたすことを示せばよい．

1.6. 構成. 始めにも述べた通り，この論説の主眼は Alexandrov 空間の幾何，あるいはもっと一般に距離空間の幾何が如何に大域 Riemann 幾何と関わるかに視点をおいて Burago-Gromov-Perelman [4] の解説を与えることである．§2 ではこの節での結果をもとに距離空間における曲率の概念を導入しその基本的な性質を調べる．その後の §3 で Hausdorff 距離についての最小限の知識をまとめる．まず，距離空間全体の集合に Hausdorff 距離を導入し，断面曲率が下から押さえられ，次元が上から押さえられた Riemann 多様体の列の収束先が Alexandrov 空間になることを示す．その後 §4 で Alexandrov 空間の基本性質を紹介する．特に Alexandrov 空間の Hausdorff 次元が整数になること，および，方向の空間がコンパクトになることを示す．§5 は Otsu-Shioya [20] で展開された微分構造についての解説である．

2. 曲率の下から押さえられた距離空間

ここでは Alexandrov-Toponogov の比較定理を中心において，距離空間で曲率の概念が展開できることを示す．そのためまず距離空間に関連した基本的な概念を復習し，多様体との類似に注意しながら，曲率を導入しよう．

2.1. 測地空間. 距離空間 $X = (X, d)$ が内部距離空間であるとは任意の二点 $p, q \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して

$$d(p_i, p_{i-1}) < \varepsilon \quad i = 1, \dots, m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} d(p_i, p_{i-1}) < d(p, q) + \varepsilon$$

をみたすような $m \in \mathbf{N}$ と点 $p_0 = p, p_1, \dots, p_m = q$ が存在することである．$c(0) = p$, $c(1) = q$ をみたす連続写像 $c : [0,1] \to X$ を p, q を結ぶ曲線と云う．$p, q \in X$ を結ぶ曲線 $c : [0,1] \to X$ の長さを

$$L(c) = \sup\{ \sum_{i=1}^{m} d(c(t_i), c(t_{i-1})) \mid$$
$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1 \text{ は } [0,1] \text{ の任意の分割} \}$$

により定義し，

$$|pq| = \inf\{ L(c) \mid c : [0,1] \to X \text{ は } p, q \text{ を結ぶ曲線} \}$$

と置く．X を弧状連結としても一般に任意の二点 p, q に対して $|pq| < \infty$ となる p, q を結ぶ曲線が存在するとは限らないが，そのような曲線があるときそれを最短測地線(minimal geodesic) あるいは単に最短線と呼び pq と表す．もちろん，最短線は一意的に定まるかどうかは分からないので，これはその一つを表すとする．任意の二点を結ぶ最短測地線が存在するような距離空間を測地空間(Length space) と呼ぶ．このとき $X \times X \ni (p, q) \mapsto |pq|$ が X の距離となり，その距離について曲線の長さを計っても元の距離について計ったのと同じなので，距離を $d(p, q) = |pq|$ と取り測地空間を内部距離空間とみなすことにする．

(M,g) を連結 Riemann 多様体とする．このとき任意の p, $q \in M$ は微分可能な写像 $c:[0,1] \to M$ で $c(0)=p$, $c(1)=q$ となるものにより結ばれる，これを p と q を結ぶ曲線という．この長さが $L(c) = \int_0^1 \sqrt{g(\dot{c}(t),\dot{c}(t))}dt$ で定義され

$$d(p,q) := \inf\{L(c) \mid c \text{ は } p \text{ と } q \text{ を結ぶ曲線}\}$$

と定めると (M,d) は内部距離空間となる．これを Riemann 計量から導かれた距離といい，これにより Riemann 多様体を距離空間とみなす．連結完備 Riemann 多様体は Riemann 計量から導かれた距離に関して測地空間であることは良く知られた事実であり，§ 1 でも既に用いていた．以後断らないときは Riemann 多様体としては連結完備なものだけを考え測地空間とみなすこととする．連結完備 Riemann 多様体は完備局所コンパクト内部距離空間であるので，次からも測地空間であることがわかる．

命題 2.1. 完備局所コンパクト内部距離空間は測地空間である．

Proof. 任意の二点 p, $q \in X$ を結ぶ最短線 pq が存在することを示せばよい．X は局所コンパクトなので，ある $r>0$ が存在して $\overline{B(p,2r)}$ はコンパクトとなる．任意の $i \in \mathbf{N}$ に対して $p_0^i = p$, p_1^i, $\dots$, $p_{m_i}^i = q$ が存在して，

$$d(p_j^i, p_{j-1}^i) < \frac{1}{i} \quad j = 1, \dots, m_i, \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} d(p_j^i, p_{j-1}^i) < d(p,q) + \frac{1}{i}. \tag{2.2}$$

各 i に対して $r - \frac{1}{i} < d(p, p_j^i) \le r$ をみたす j があるのでこの点を $x(i)$ と置くと，コンパクト性より部分列 $\{i_1\} \subset \mathbf{N}$ と点 $x \in \overline{B(p,r)}$ が存在して $\lim_{i_1 \to \infty} x(i_1) = x$ となる．ここで

$$d(p, x(i)) \le \sum_{l=1}^{j} d(p_l^i, p_{l-1}^i), \quad d(x(i), q) \le \sum_{l=j+1}^{m} d(p_l^i, p_{l-1}^i),$$

と (2.2) より

$$d(x,q) = d(p,q) - d(p,x) = d(p,q) - r.$$

上の r を r_0, x を x_1 と置き，上の議論を繰り返すことで，$r_1 > 0, \dots, r_k > 0$, 部分列 $\{i_k\} \subset \{i_1\}$, x_1, $\dots$, $x_k \in X$ が取れて $\overline{B(x_{l-1}, 2r_l)}$ $(l = 1, \dots, k)$ がコンパクトで

$$d(x_l, x_k) = r_{l-1} + \cdots + r_k, \tag{2.3}$$

となる．このとき，ある k に対して $r_0 + \cdots + r_k = d(p,q)$ となるようにできる．そうでないとするとどのように取っても $\sum_{k=0}^{\infty} r_k < d(p,q)$ となり，(2.3) より $\{x_k\}$ は Cauchy 列となり，X の完備性よりある点 x に収束する．$\overline{B(x,2r)}$ がコンパクトすると，十分大きな k に対して r_k を r に近く取り直すとそこまでの和を $\sum_{k=0}^{\infty} r_k$ より大きな値に取り直せる．従って矛盾．

以上からコンパクト集合 K と $\{i\}$ のある適当な部分列が存在して $p_0^i = p$, p_1^i, $\ldots$, $p_{m_i}^i = q$ は常に K に含まれていることになる．以後，帰納的に $\{i\}$ の部分列を取ることで，$[0,1]$ の稠密な可算部分集合 A と各 $t \in A$ に対して $x_t \in X$ が見つかり，(2.3) を得たのと同じ理由から

$$d(x_s, x_t) = |s-t| d(p,q) \quad \text{for } s, t \in A$$

とできる．以上のようにして得られる $\{x_t \mid t \in A\} \subset X$ を完備化することで p, q を結ぶ曲線が得られるが，これが最短線であるのは明らかである． □

もちろん，任意の二点を結ぶ最短線が存在したからといって完備とも局所コンパクトとも限らないことはユークリッド空間の開円板や，適当な無限次元バナッハ空間を考えれば明らかである．完備局所コンパクト内部距離空間の場合最短線の列の極限が最短線になることも明らかである．

上の議論を少し変えることで次もわかる．

命題 2.2. 完備局所コンパクト内部距離空間の任意の有界閉集合はコンパクト．

Proof. 任意の $p \in X$, $r > 0$ に対して閉円板 $\overline{B(p,r)}$ がコンパクトであることを示せば良い．$\{q_i \in \overline{B(p,r)}\}$ を与えられた点列として，部分列を取って $|pq_i| \to r' \leq r$ と仮定できる．上の証明では q を固定したが，これを q_i として同じ議論を行うと，あるコンパクト集合と $\{q_i\}$ の部分列が存在してそれが全て含まれることになるので，収束部分列を見つけることが出来る． □

注意 2.1. 曲線 $c : [a,b] \to X$ が測地線とはどの点にもある近傍が存在してそこへの制限が最短線になることとする．任意の測地線が $\mathbf{R}$ まで拡張されるとき測地線完備という．完備な Riemann 多様体が測地線完備になることは Hopf-Rinow の定理として知られるが，一般に完備な距離空間は測地線完備とは限らない．

2.2. 曲率 $\geq \kappa$ の距離空間. § 1 で述べた Alexandrov の比較定理を使って距離空間の曲率の概念を定義する．X を測地空間とする．三点 p, q, $r \in X$ に対して最短線 pq, qr, rp の組みを測地三角形と呼び，$\triangle pqr$ と表す．$\kappa \in \mathbf{R}$ を固定する，$H^2(\kappa)$ での測地三角形 $\triangle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ で

$$|\tilde{p}\tilde{q}| = |pq|, \quad |\tilde{q}\tilde{r}| = |qr|, \quad |\tilde{r}\tilde{p}| = |rp|$$

を満たすものを $\triangle pqr$ の（$H^2(\kappa)$ での）比較三角形と呼び，$\tilde{\triangle} pqr = \triangle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ と表す．$s \in pq$ に対して $\tilde{s} \in \tilde{p}\tilde{q}$ で $|ps| = |\tilde{p}\tilde{s}|$ をみたすものを “$s \in pq$ に対応する $\tilde{s} \in \tilde{p}\tilde{q}$” ということにする．

定義 2.1. X を測地空間とする．

(Alexandrov の凸性 I) 任意の測地三角形 $\triangle pqr$ に対して $H^2(\kappa)$ の比較三角形 $\tilde{\triangle} pqr = \triangle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ が存在して

$$|st| \geq |\tilde{s}\tilde{t}|$$

が $s \in pq$, $t \in pr$ に対応する $\tilde{s} \in \tilde{p}\tilde{q}$, $\tilde{t} \in \tilde{p}\tilde{r}$ に対して成り立つ

とき，X は曲率 $\geq \kappa$ の距離空間であると云う．したがって，断面曲率 $\geq \kappa$ の連結完備 Riemann 多様体は Riemann 計量から定まる距離に関して曲率 $\geq \kappa$ の距離空間である．

上の定義から次は明らか．

(Alexandrov の凸性 I$'$) 任意の測地三角形 $\triangle pqr$ に対して $H^2(\kappa)$ の比較三角形 $\tilde{\triangle}pqr = \triangle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ が存在して

$$|sr| \geq |\tilde{s}\tilde{r}|$$

が $s \in pq$ に対応する $\tilde{s} \in \tilde{p}\tilde{q}$ に対して成り立つ．

逆にこの性質と Alexandrov の凸性 I は同値である．実際，測地三角形 $\triangle pqr$ に対して比較三角形 $\tilde{\triangle}pqr = \triangle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ を取ると，$s \in pq$ に対応する $\tilde{s}$ に対して

$$|sr| \geq |\tilde{s}\tilde{r}|.$$

次に比較三角形 $\tilde{\triangle}psr = \triangle\hat{p}\hat{s}\hat{r}$ と $t \in pr$ に対応する $\hat{t} \in \hat{p}\hat{r}$ に対して

$$|st| \geq |\hat{s}\hat{t}|.$$

そこで補題 1.1(1) を二回使うと

$$|\hat{s}\hat{t}| \geq |\tilde{s}\tilde{t}|$$

となるので元の式を得る．

注意 2.2. この定義では比較三角形の存在も要請している．もし $\kappa \leq 0$ ならば，比較三角形は常に存在するが，$\kappa > 0$ ならば注意 1.3 で注意したように比較三角形が存在するためには $|pq|+|qr|+|rp| \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ が必要となる．つまり，任意の測地三角形 $\triangle pqr$ に対して $|pq|+|qr|+|rp| \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ が成り立つことを要請していることになる．このことから $r \in pq$ と取ると $2|pq| = |pq|+|qr|+|rp| \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ となるので $\operatorname{diam} X \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ が得られる．これは $\mathrm{Ric}_M \geq n-1$ の n 次元 Riemann 多様体 M の Myers の定理に当たるものである．この場合は $\operatorname{diam} M = \pi$ ならば M は $S^n(1)$ に等長になる (Cheng) ことが知られているが，我々の場合はこれは成立しないことを後に示す．

定理 1.2 (3) $\Leftrightarrow$ (4) の議論より Alexandrov の凸性 I は次とも同値である．

(Alexandrov の凸性 II) 任意の測地三角形 $\triangle pqr$ と任意の $s \in pq$, $t \in pr$ に対して $H^2(\kappa)$ の比較三角形 $\tilde{\triangle}pst = \triangle\tilde{p}\tilde{s}\tilde{t}$ が存在して角 $\tilde{\angle}spt$ が定まり，

$$(s,t) \mapsto \omega_{s,t} = \tilde{\angle}spt$$

は $s \in pq$, $t \in pr$ について単調非増加関数である．

そこで異なる三点 $p,\ q,\ r \in X$ を取り，最短線 $pq,\ pr$ を定めると，任意の $s \in pq$ ($|ps| \le \min(|pq|, |pr|)$) に対して，$s' \in pr$ を $|ps'| = |ps|$ と取ると $s \mapsto \omega_{s,s'}$ が単調なので $\lim_{s\to p}\omega_{s,s'}$ が存在する，任意の $s \in pq,\ t \in pr$ に対しては $|ps| \le |pt|$ ならば $\omega_{s,s'} \ge \omega_{s,t} \ge \omega_{t',t}$ が $|ps'| = |ps|,\ |pt'| = |pt|$ をみたす $s' \in pr,\ t' \in pq$ に対して成り立つので $\lim_{(s,t)\to(p,p)}\omega_{s,t}$ が定まる，そこで最短線 pq と pr のなす角度を

$$\angle qpr = \lim_{(s,t)\to(p,p)} \omega_{s,t}$$

定義する．すると，$\omega_{s,t}$ の単調性より

(Toponogov の凸性 I) 任意の測地三角形 $\triangle pqr$ に対して $H^2(\kappa)$ の比較三角形 $\tilde{\triangle} pqr = \triangle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ が存在して

$$\angle pqr \ge \tilde{\angle} pqr, \quad \angle qrp \ge \tilde{\angle} qrp, \quad \angle rpq \ge \tilde{\angle} rpq$$

が成り立つ．

これと以下が同値なことはすでに示した．

(Toponogov の凸性 II) 任意の測地三角形 $\triangle pqr$ に対して $H^2(\kappa)$ 内の測地三角形 $\triangle\hat{p}\hat{q}\hat{r}$ で $|pq| = |\hat{p}\hat{q}|,\ |qr| = |\hat{q}\hat{r}|$, $\angle pqr = \angle\hat{p}\hat{q}\hat{r}$ なるものをとると

$$|pr| \le |\hat{p}\hat{r}|$$

が成り立つ．

角度のいくつかの基本的な性質を示そう．

命題 2.3. (1) 任意の $p,\ q,\ r,\ s \in X$ に対して

$$\angle pqs \le \angle pqr + \angle rqs;$$

(2) pq の内点 r と任意の $s \ne r$ に対して

$$\angle prs + \angle srq = \pi;$$

(3) $p_iq_i \to pq,\ q_ir_i \to qr$ のとき

$$\angle pqr \le \liminf_{i\to\infty} \angle p_iq_ir_i;$$

(4) $p_i \in pr$ で $p_i \to p$ のとき

$$\lim_{i\to\infty} \angle rp_iq = \lim_{i\to\infty} \tilde{\angle} p_ipq = \inf_{pq} \angle rpq.$$

Proof. (1) 角度の定義より角度は π 以下である．したがって $\angle pqr + \angle rqs < \pi$ の場合だけ考えれば良い．任意の $\delta > 0$ に対して $p' \in qp$, $s' \in qs$ で

$$\angle pqs - \delta < \tilde{\angle} p'qs'$$

なるものがある．$H^2(\kappa)$ に $\hat{q},\ \hat{r},\ \hat{p}',\ \hat{s}'$ を

$$|\hat{p}'\hat{q}| = |p'q|, \quad |\hat{r}\hat{q}| = |rq|, \quad |\hat{s}'\hat{q}| = |s'q|,$$
$$\angle\hat{p}'\hat{q}\hat{r} = \angle pqr, \quad \angle\hat{s}'\hat{q}\hat{r} = \angle sqr$$

をみたし，$\hat{q}'$ と $\hat{s}'$ が $\hat{r}\hat{q}$ に関して反対側に位置するように取る．仮定より $\hat{p}'\hat{s}'$ と $\hat{q}\hat{r}$ の交わり $\hat{r}'$ があるとしてよい．それに対応する qr 上の点を r' とすると三角不等式と Toponogov の凸性 II より

$$|p's'| \leq |p'r'| + |r's'| \leq |\hat{p}'\hat{r}'| + |\hat{r}'\hat{s}'| = |\hat{p}'\hat{s}'|$$

なので，補題 1.1 より

$$\tilde{\angle} p'qs' \leq \angle pqr + \angle rqs.$$

これより求めたい式が得られる．

(2) (1) より $\angle prs + \angle srq \geq \pi$ は明らか．$p' \in pr$, $s' \in rs$, $q' \in rq$ に対して比較三角形 $\triangle \tilde{p}'\tilde{s}'\tilde{q}'$ を取る．Alexandrov の凸性より $\tilde{r}$ を r に対応する $\tilde{p}'\tilde{q}'$ 上の点とすると

$$|\tilde{r}\tilde{s}'| \leq |rs'|$$

となる．そこで補題 1.1 (2) より

$$\tilde{\angle} p'rs' + \tilde{\angle} s'rq' \leq \pi$$

となり求めたい式を得る．

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $s \in pq$, $t \in rq$ が存在して

$$\angle pqr - \varepsilon \leq \tilde{\angle} sqt.$$

p_iq_i は pq に q_ir_i は qr に収束するので，$s_i \in p_iq_i$, $t_i \in q_ir_i$ で $|q_is_i| = |qs|$, $|q_it_i| = |qt|$ をみたすものを取ると，十分大きな i に対して

$$|\tilde{\angle} s_iq_it_i - \tilde{\angle} sqt| < \varepsilon,$$

したがって

$$\angle pqr - 2\varepsilon < \tilde{\angle} s_iq_it_i \leq \angle p_iq_it_i.$$

(4) (3) より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して i が十分大きいならば

$$\inf_{pq} \angle rpq \leq \angle qp_ir + \varepsilon$$

かつ

$$|\tilde{\angle} p_ipq + \tilde{\angle} pp_iq - \pi| < \varepsilon.$$

すると (2) より

$$\inf_{pq} \angle rpq \geq \tilde{\angle} p_ipq \geq \pi - \tilde{\angle} pp_iq - \varepsilon \geq \pi - \angle pp_iq - \varepsilon = \angle qp_ir - \varepsilon,$$

よって

$$\inf_{pq} \angle rpq = \lim_{i\to\infty} \tilde{\angle} p_ipq = \lim_{i\to\infty} \angle qp_ir.$$

□

上の命題から次がすぐに分かる．

系 2.4. 最短線は分岐しない．つまり

$$pq \cap pr \setminus \{p,q,r\} \neq \emptyset \Rightarrow pq \subset pr \text{ あるいは } pr \subset pq.$$

Proof. もし $s \in pq \cap pr$, $s \neq p, q, r$ なる s が存在するとする．$q' \in pq$, $r' \in pr$ で $|ps| < |pq'| = |pr'| \leq \min(|pq|, |pr|)$ をみたすものに対して

$$\angle psq' = \angle psr' = \pi$$

なので，上の (2) より $\angle q'sr' = 0$ となり，Toponogov の凸性 II から $q' = r'$ がわかる．$|pq'| = |pr'| < |ps|$ をみたす $q' \in pq$, $r' \in pr$ についても同様． □

Alexandrov の凸性のもう一つの言い換えを与えよう：$p, q, r, s \in X$ について $p' \in pq$, $r' \in pr$, $s' \in ps$ を取ると (1) より $\angle r'p's' \leq \angle r'p'p + \angle pp's'$，したがって

$$\angle r'p's' + \angle r'p'q + \angle s'p'q \leq \angle pp'r' + \angle r'p'q + \angle pp's' + \angle s'p'q \leq 2\pi,$$

最後で (2) を使った．次に $p' \to p$ とすると (3) より

$$\begin{aligned}
&\angle rps + \angle rpq + \angle spq \\
=&\angle r'ps' + \angle r'pq + \angle s'pq \\
\leq&\liminf_{p' \to p} \angle r'p's' + \liminf_{p' \to p} \angle r'p'q + \liminf_{p' \to p} \angle s'p'q \leq 2\pi.
\end{aligned}$$

最後に Alexandrov の凸性 II を使うと

$$\tilde{\angle} rps + \tilde{\angle} rpq + \tilde{\angle} spq \leq 2\pi.$$

以上で次の命題の必要性が分かった．

命題 2.5. *Alexandrov* の凸性と次は同値．

任意の $p_0, p_1, p_2, p_3 \in X$ について

$$\tilde{\angle} p_1p_0p_2 + \tilde{\angle} p_2p_0p_3 + \tilde{\angle} p_3p_0p_1 \leq 2\pi. \tag{2.4}$$

Proof. $\triangle pqr$ と pq の内点 s に対して

$$\tilde{\angle} psq + \tilde{\angle} qsr + \tilde{\angle} rsp \leq 2\pi$$

であり，$\tilde{\angle} psq = \pi$ より $\tilde{\angle} qsr + \tilde{\angle} rsp \leq \pi$．補題 1.1 (2) より $|rs| \leq |\tilde{r}\tilde{s}|$ が比較三角形 $\tilde{\triangle} pqr = \triangle\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ と $s \in qr$ に対応する $\tilde{s} \in \tilde{q}\tilde{r}$ に対して成り立つ．これが Alexandrov の凸性 I′ であった． □

ここで簡単な例を挙げ，上で示した性質についての注意を与える．

例 2.1. X を曲率 ≥ 1 の距離空間とする．$X \times [0, \infty)$ を同値関係

$$(x, r) \sim (y, s) \Leftrightarrow r = s = 0 \quad \text{or} \quad (x, r) = (y, s)$$

で割った空間を $C_X = X \times [0, \infty)/\sim$ と置き，(x, r) の定める同値類を $[x, r]$ で表す．$[x, r], [y, s] \in C_X$ に対して

$$|[x, r], [y, s]| = \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos|xy|} \tag{2.5}$$

と定めるとこれは C_X の距離になる（図 2）．

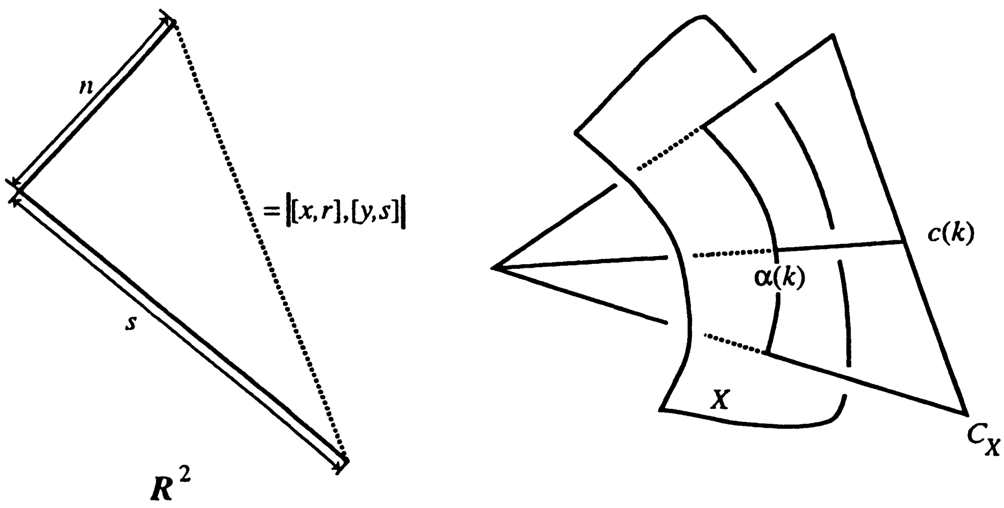


図 2

パラメータを長さにとって xy を $\alpha:[0,|xy|]\to X$ と表す．$\mathbf{R}^2$ に原点 0 で角度が $|xy|$ で辺の長さが r, s の三角形を取ると原点の対辺の長さが $|[x,r],[y,s]|$ なので，その対辺を $\bar{c}:[0,|[x,r],[y,s]|]\to\mathbf{R}^2$ と表し

$$c(t)=[\alpha(\angle\bar{c}(0)0\bar{c}(t)),|0\bar{c}(t)|]$$

という曲線を作ると C_X の最短線になることがわかる．よって C_X は測地空間になる．これを X の懸垂と呼ぶ．

これは曲率 ≥ 0 の距離空間であることを Alexandrov の凸性 I′ を調べることで示そう．測地三角形の頂点が $[x_1,s_1]$, $[x_2,s_2]$, $[x_2,s_2]$ であるとする．まず s_1, s_2, s_3 のどれも 0 に等しくないときは X 上の測地三角形 $\triangle x_1x_2x_3$ とその $S^2(1)$ 内の比較三角形 $\triangle\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ を取り，$\mathbf{R}^3$ に $s_1\tilde{x}_1$, $s_2\tilde{x}_2$, $s_3\tilde{x}_3$ を頂点とする三角形を作るとこれがもとの三角形の比較三角形となり Alexandrov の凸性 I′ が簡単に確認できる．s_1, s_2, s_3 のいずれかが0 に等しいときは測地空間を調べるとき構成した $\mathbf{R}^2$ の三角形が比較三角形となる．逆に，このように定めた C_X が曲率 ≥ 0 の距離空間ならば X は曲率 ≥ 0 の距離空間になることも同様にわかる．

$S^n(r)$ を $\mathbf{R}^{n+1}$ の原点を中心とした半径 $0<r\leq 1$ の円とすると，これは断面曲率 $1/r^2$ の Riemann 多様体なので曲率 ≥ 1 の距離空間となる．そこで $C_{S^n(r)}$ は曲率 ≥ 0 の距離空間となる．ここで $S^1(r)$ の場合は Riemann 多様体としては曲率は定義されていないが，Alexandrov の凸性の観点からは注意 2.2 で注意した理由から $r\leq 1$ となることを注意しておく．また $0<r<1$ の場合，$p_0=[x,0]$ と置くと (2.5) より任意の最短線は p_0 をその内点に持つことができないので，$C_{S^n(r)}\setminus\{p_0\}$ も曲率 ≥ 0 の距離空間となる．

次に $S^n(r)$ に有限群 Γ が等長に自由に作用しているとき $S^n(r)/\Gamma$ もやはり断面曲率 $1/r^2$ の Riemann 多様体なので $C_{S^n(r)/\Gamma}$ も曲率 ≥ 0 の距離空間となる．

例 **2.2.** 命題 2.3 (3) の不等式が等号とならない例を挙げよう．例 2.1 で $0<\rho\leq 1$ に対して $C_{S^1(\rho)}$ を考える．

$$R=\{(t\cos\theta,t\sin\theta)\in\mathbf{R}^2\mid t\geq 0,0\leq\theta\leq\rho\pi\}$$

と置き，ここに $\mathbf{R}^2$ から定まる距離を入れる．$\theta_0 \in \mathbf{R}$ に対して

$$P_{\theta_0}(t\cos\theta, t\sin\theta) = [(\rho\cos(\tfrac{\theta}{\rho}+\theta_0), \rho\sin(\tfrac{\theta}{\rho}+\theta_0)), t] \in C_{S^1(\rho)}$$

で写像 $P_{\theta_0} : R \to C_{S^1(\rho)}$ を定めると，定義より（中への）等長写像になる，したがって $C_{S^1(\rho)}$ 測地線は $R \subset \mathbf{R}^2$ の測地線から定まる．

ここで $p = r = [(\rho,0),1]$, $q = [(\rho,0),0]$ とし，$q_i = [(-\rho,0),\frac{1}{i}]$ $p_i = r_i = [(\rho,0),1]$ と取ると (3) の条件をみたし，$\angle pqr = 0$ である．$p_i = P_0(1,0)$, $q_i = P_0(\frac{1}{i}\cos\rho\pi, \frac{1}{i}\sin\rho\pi)$ なので上で注意したことから $\angle p_iq_iq \to \pi(1-\rho)$ となり，$\angle p_iq_ir_i \to 2\pi(1-\rho)$ となるので (3) で等号が成立しない．

例 2.3. 例 2.1 で (2.5) を

$$|[x,s],[y,t]| = \cos^{-1}(\cos s\cos t + \sin s\sin t\cos|xy|)$$

に変えたものを考えると，これは曲率 ≥ 1 の距離空間であることが同様に示せる．これは直径 π であるので注意 2.2 で注意したように，Cheng の定理が曲率 $\kappa \geq 1$ の距離空間で成り立たないことを示している．また (2.5) を

$$|[x,s],[y,t]| = \cosh^{-1}(\cosh s\cosh t - \sinh s\sinh t\cos|xy|)$$

に変えたものを考えると，これは曲率 ≥ -1 の距離空間である．

例 2.4. 3 本以上の半直線 $\{r \in \mathbf{R} \mid r \geq 0\}$ の端点を同一視した空間 X に半直線の自然な距離から定まる距離を入れた距離空間を考えると最短線が分岐するのでこれは任意の κ について曲率 $\geq \kappa$ の距離空間でないことがわかる．(これは，ここでは定義は述べないが，曲率 ≤ 0 の距離空間の例である．)

注意 2.3. [4] では曲率 $\geq \kappa$ の距離空間の定義を局所的に上にあげた凸性が成り立つとして定義している，つまり，任意の点にある近傍が存在して，この近傍の二点を結ぶ最短線はこの近傍に含まれ，その近傍に含まれる任意の測地三角形が (2.4) をみたすという定義である．この局所的な定義から大域的な（上に述べた）凸性を示すことができる，実際 [4] ではそのような定理が証明されている．したがって事実としてはこれらの定義は同値なので，ここでは簡単のために大域的なものを用いた．

3. Hausdorff 距離

このセクションでは大域リーマン幾何の中心的な概念である Hausdorff 距離を復習しよう．目標は Hausdorff 距離に関して次元や曲率が半連続であることを示すことである．ここまでの結果から次のセクションで Alexandrov 空間の概念が導入される．

3.1. **Hausdorff 距離.** 距離空間 $Z=(Z,d^Z)$ の中の部分集合 A と A' の Hausdorff 距離を

$$d_H^Z(A,A')=\inf\{\varepsilon>0\mid B(A,\varepsilon)\supset A', B(A',\varepsilon)\supset A\}$$

で定義する，ただし，$B(A,\varepsilon)=\{x\in Z\mid d^Z(x,A)<\varepsilon\}$ である．Gromov ([9]) はこの概念を次のように任意の距離空間の間に拡張した：距離空間 X, Y に対して

$$\begin{aligned} d_H(X,Y)=\inf\{d_H^Z(\varphi(X),\psi(Y))\mid\ & Z: \text{任意の距離空間} \\ & \varphi: X\to Z, \psi: Y\to Z: \text{任意の等長写像}\} \end{aligned}$$

（図３）．これが非負，対称であることは明らかである．

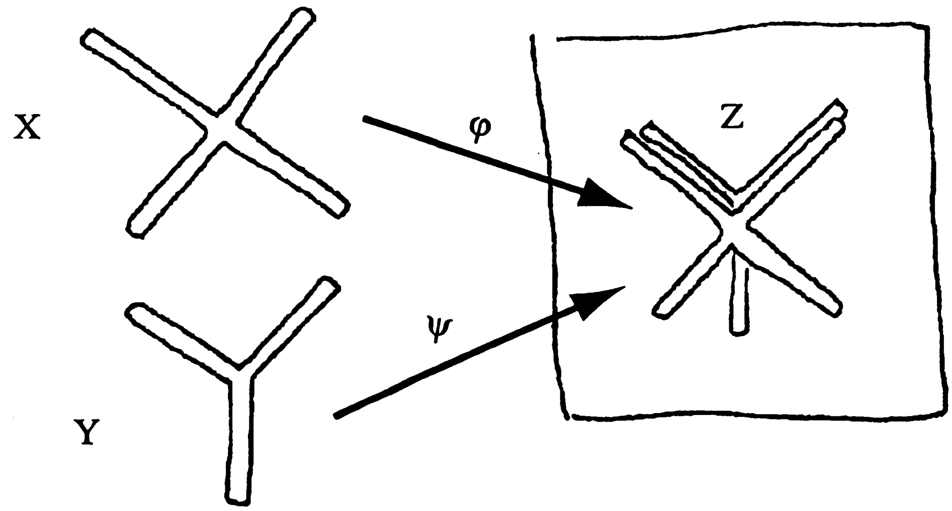


図 3

三角不等式

$$d_H(X,Y)\le d_H(X,W)+d_H(W,Y)$$

をみたすことを示そう．任意の $\varepsilon>0$ に対して距離空間 Z', Z'' と等長埋め込み $\varphi': X\to Z'$, $\psi': W\to Z'$, $\varphi'': Y\to Z''$, $\psi'': W\to Z''$ が存在して

$$\begin{aligned} d' &:= d_H^{Z'}(\varphi'(X),\psi'(W))<d_H(X,W)+\varepsilon, \\ d'' &:= d_H^{Z''}(\varphi''(Y),\psi''(W))<d_H(Y,W)+\varepsilon. \end{aligned}$$

そこで距離空間 Z を Z' と Z'' を $\psi'(W)$ と $\psi''(W)$ を同一視することで得られる距離空間とする，つまり，集合としての直和 $Z'\sqcup Z''$ に同値関係 $\sim$ を

$$\begin{aligned} p\sim q \Leftrightarrow p=q \text{ or } &\text{“}p=\psi'(w) \text{ and } q=\psi''(w) \text{ for } w\in W\text{ ”} \\ \text{or } &\text{“}p=\psi''(w) \text{ and } q=\psi'(w) \text{ for } w\in W\text{ ”}, \end{aligned}$$

で定義し，$Z = Z' \sqcup Z''/\sim$ と置く．

$$d^Z(p,q) = \begin{cases} d^{Z'}(p,q) & \text{if } p,q \in Z' \\ d^{Z''}(p,q) & \text{if } p,q \in Z'' \\ \inf_{w\in W}(d^{Z'}(p,\psi'(w)) + d^{Z''}(\psi''(w),q)) & \text{if } p \in Z', q \in Z'' \end{cases}$$

と定義すると (Z, d^Z) は距離空間になり，包含写像から導かれる自然な写像 $Z' \to Z$, $Z'' \to Z$ は等長写像になることがわかる．特に，$\varphi : X \to Z$, $\phi : Y \to Z$ を $\varphi(x) = \varphi'(x)$, $\phi(y) = \varphi''(y)$ で定めるとこれらは等長写像であり，構成から

$$\phi(Y) \subset B(\varphi(X), d' + d''), \qquad \varphi(X) \subset B(\phi(Y), d' + d'')$$

がわかる．これらから求めたい式が示される．

次に X の直径 $\operatorname{diam} X$ を

$$\operatorname{diam} X = \sup\{d(p,q) \mid p,q \in X\}$$

とする．一点からなる集合 $\{p_0\}$ に自明な距離をいれた距離空間を P と表すと

$$d_H(P,X) = \tfrac{1}{2}\operatorname{diam} X \tag{3.1}$$

となる，実際，$\operatorname{diam} X < \infty$ のとき，$\hat{X}$ を集合としての直和 $X \sqcup \{p_0\}$ とし，

$$d^{\hat{X}}(p,q) = \begin{cases} d(p,q) & \text{if } p,q \in X \\ \frac{1}{2}\operatorname{diam} X & \text{if } p = p_0 \text{ and } q \in X \\ 0 & \text{if } p = q = p_0 \end{cases}$$

と $d^{\hat{X}}$ を定義すると，これは $\hat{X}$ 上の距離になり，自明な包含写像 $X \to \hat{X}$ は等長写像，したがって $d_H(X,P) \le d_H^{\hat{X}}(X,\{p_0\}) \le \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$ となる．逆に，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある Z と等長写像 $\varphi : X \to Z$, $\psi : P \to Z$ が存在して $d_H^Z(\varphi(X), \psi(P)) < d_H(X,P) + \varepsilon$ となるので，$d(p,q) > \operatorname{diam} X - \varepsilon$ なる p, $q \in X$ に対して

$$\operatorname{diam} X - \varepsilon < d^Z(\varphi(p), \psi(p_0)) + d^Z(\varphi(q), \psi(p_0)) \le 2(d_H(X,P) + \varepsilon)$$

となり $d_H(X,P) \ge \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$ も分かる．$\operatorname{diam} X = \infty$ のときは明らか．

次に X, Y に対して $Z = \hat{X} \times \hat{Y}$ と取ると，$X \ni p \mapsto (p, p_0) \in Z$, $Y \ni q \mapsto (p_0, q) \in Z$ が等長写像であることより

$$d_H(X,Y) \le \tfrac{1}{2}\max(\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y) \tag{3.2}$$

がわかる．

以上から直径の有限な距離空間全体の上で d_H は擬距離を定めることがわかった．一意性については，$X = [0,1]$, $Y = X \cap \mathbf{Q}$ のとき $d_H(X,Y) = 0$ であるが $X = Y$ ではないので成り立たない，ただし，$X = Y$ とは X から Y への等長写像が存在することである．そこで，コンパクト距離空間全体のなす空間 $\mathcal{C}$ 上で d_H を考えることとする．すると

定理 3.1 (Gromov). $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, d_H)$ は距離空間である．

Proof. 距離関数 $d^X : X\times X \to \mathbf{R}$ は連続なので $X \in \mathcal{C}$ ならば $\mathrm{diam}\, X < \infty$ は明らか．したがって上に述べたことから一意性だけを示せば良い．$X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $d_H(X,Y) = 0$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して有限個の点 $p_1, \ldots, p_m \in X$ が存在して $\bigcup_{i=1}^m B(p_i, \varepsilon) = X$．したがって，$\{p_i\}_{i=1}^\infty$ と単調数列 $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ が存在して各 $k \in \mathbf{N}$ に対して

$$\bigcup_{i=1}^{m_k} B(p_i, \tfrac{1}{k}) = X.$$

また $d_H(X,Y) = 0$ より，空間 Z_k と等長写像 $\varphi_k : X \to Z_k$, $\psi_k : Y \to Z_k$ が存在して $d_H^{Z_k}(\varphi_k(X), \psi_k(Y)) < \frac{1}{k}$．したがって $q_1^k, \ldots, q_{m_k}^k \in Y$ が存在して $i = 1, \ldots, m_k$ に対して

$$d^Z(\varphi_k(p_i), \psi_k(q_i^k)) < \tfrac{1}{k},$$

特に

$$|d(p_i, p_j) - d(q_i^k, q_j^k)| < \tfrac{3}{k}, \quad \bigcup_{i=1}^{m_k} B(q_i^k, \tfrac{2}{k}) = Y.$$

Y はコンパクトなので点列 $\{q_1^k\}_{k=1}^\infty$ の収束部分列 $\{q_1^{k_1(j)}\}_{j=1}^\infty$ が見つかる．その極限を q_1 と置く．以下同様に部分列をとることで数列の列 $\mathbf{N} = \{n\} \supset \{k_1(j)\}_{j=1}^\infty \supset \{k_2(j)\}_{j=1}^\infty \supset \cdots \supset \{k_i(j)\}_{j=1}^\infty \supset \ldots$ を取り，$\{q_i^{k_i(j)}\}_{j=1}^\infty$ は Y のある点 q_i に収束するようにできる．このとき，構成の仕方から

$$|p_i p_j| = |q_i q_j|$$

で $\{q_i\}_{i=1}^\infty$ は Y の稠密な集合である．

写像 $\Phi : X \to Y$ を $\Phi(p_i) = q_i$ により定める．詳しくは，$p \in X$ を $\lim_{\alpha\to\infty} p_{i_\alpha} = p$ と表すと $\{q_{i_\alpha}\}_{\alpha=1}^\infty$ は Cauchy 列になるので，その値を $\Phi(p)$ と定める．これは $\{p_{i_\alpha}\}$ の取り方によらず，さらに上への等長写像であることも分かる． □

最後に Hausdorff 距離を定義する別の方法を与えよう．$\varepsilon > 0$ とするとき写像 $f : X \to Y$ が ε-近似写像とは任意の $x, x' \in X$ に対して

$$|d(x,x') - d(f(x), f(x'))| < \varepsilon$$

が成り立ち，更に，任意の $y \in Y$ に対してある $x \in X$ が存在して

$$d(f(x), y) < \varepsilon$$

となることである．f は連続であることを仮定していないことを注意しておく．もし，$d_H(X,Y) < \varepsilon$ ならば，ある Z と等長写像 $\varphi : X \to Z$, $\psi : Y \to Z$ が存在して $d_H^Z(\varphi(X), \psi(Y)) < \varepsilon$ なので，任意の $x \in X$ に対して $d^Z(\varphi(x), \psi(y)) < \varepsilon$ となる $y \in Y$ が存在する，このような y のひとつを選択して $f(x)$ と定義する．すると

$$|d(x,x') - d(f(x), f(x'))| < 2\varepsilon$$

であり，更に，任意の $y \in Y$ に対して $d^Z(\varphi(x), \psi(y)) < \varepsilon$ なる $x \in X$ が存在するので

$$\begin{aligned} d(f(x), y) &= d^Z(\psi(f(x)), \psi(y)) \\ &\leq d^Z(\psi(f(x)), \varphi(x)) + d^Z(\varphi(x), \psi(y)) < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

よって f は $2d_H(X,Y)$-近似写像である．

逆に ε-近似写像 $f : X \to Y$ が与えられると，集合としての直和 $Z = X \sqcup Y$ に

$$d^Z(x,y) = \begin{cases} d^X(x,y) & \text{if } x, y \in X \\ d^Y(x,y) & \text{if } x, y \in Y \\ d^Y(f(x), y) + \varepsilon & \text{if } x \in X, y \in Y \end{cases}$$

と定義すれば距離の公理をみたし，$X \subset Z, Y \subset Z$ は等長写像であることがわかる．さらに $X \subset B(Y,\varepsilon)$, $Y \subset B(X, 2\varepsilon)$ なので $d_H(X,Y) < 2\varepsilon$ となる．ε-近似写像は空間の収束を考えるとき使いやすいことが多い．

3.2. プレコンパクト性．$\mathcal{C}$ は距離空間になることがわかったが，リーマン幾何学への応用上考える対象を制限する必要がある．次の空間が重要である．$\kappa \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $\overline{d} \geq 0$ として

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \mathcal{R}(n, \kappa, \overline{d}) = \{M \mid & \dim M = n, \operatorname{diam} M \leq \overline{d}, \operatorname{Ric}_M \geq (n-1)\kappa \\ & \text{をみたすコンパクト Riemann 多様体}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \mathcal{M}(n, \kappa, \overline{d}) = \{M \mid & \dim M = n, \operatorname{diam} M \leq \overline{d}, K_M \geq \kappa \\ & \text{をみたすコンパクト Riemann 多様体}\}. \end{aligned}$$

前節でみたように Riemann 多様体は Riemann 計量に関して距離空間になるので，それによって $\mathcal{C}$ の元とみなし，$\mathcal{M} \subset \mathcal{R} \subset (\mathcal{C}, d_H)$ と考える．ここでの目標は次を示すことである：

定理 3.2 (Gromov のプレコンパクト性定理)．$\mathcal{R}(n,\kappa,\overline{d})$ は $(\mathcal{C}, d_H)$ の相対コンパクト集合で，特に，$\mathcal{R}(n,\kappa,\overline{d})$ はプレコンパクトである．

$X \in \mathcal{C}$ を一つ固定する．$\varepsilon > 0$ に対して $\{p_i \in X\}_{i \in \Lambda}$ が ε-ネットとは

$$\bigcup_{i \in \Lambda} B(p_i, \varepsilon) = X$$

となることである．$\{p_i \in X\}_{i \in \Lambda}$ が ε-離散集合であるとは任意の $i \neq j \in \Lambda$ に対して

$$d(p_i, p_j) \geq \varepsilon$$

が成り立つことである．X の ε-離散集合全体は包含関係を順序として順序集合をなしている．この順序に関して極大元 $\{p_i \in X\}_{i \in \Lambda}$ が存在するとこれは ε-ネットになる．実際，任意の $p \in X$ に対して $p \notin \{p_i \in X\}_{i \in \Lambda}$ ならば $\{p_i \in X\}_{i \in \Lambda} \cup \{p\}$ は ε-離散でないので $d(p_i, p) < \varepsilon$ となる $i \in \Lambda$ が存在する，$p \in \{p_i \in X\}_{i \in \Lambda}$ ならばそのような i が存在するのは明らか．従って，$\{p_i \in X\}_{i \in \Lambda}$ は ε-ネットである．

$\mathcal{R}$ の話しに戻り，

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $m = m(n, \kappa, \overline{d}; \varepsilon) \in \mathbf{N}$ が存在して，任意の $M \in \mathcal{R}(n, \kappa, \overline{d})$ とその ε-離散集合 $\{p_i\}_{i=1}^{l}$ に対して

$$l \leq m(n, \kappa, \overline{d}; \varepsilon) \tag{3.3}$$

を示そう．実際，$\{p_i\}_{i=1}^{l}$ が ε-離散集合とすると，$i \neq j$ に対して

$$B(p_i, \varepsilon/2) \cap B(p_j, \varepsilon/2) = \emptyset.$$

よって，

$$\operatorname{vol} M \geq \sum_{i=1}^{l} \operatorname{vol}(B(p_i, \varepsilon/2))$$

Bishop-Gromov の比較定理と $\operatorname{diam} M \leq \overline{d}$ より

$$\geq \sum_{i=1}^{l} b^n(\varepsilon/2) \times \frac{\operatorname{vol} M}{b^n(\overline{d})} = l \times b^n(\varepsilon/2) \times \frac{\operatorname{vol} M}{b^n(\overline{d})}.$$

つまり，

$$m = m(n, \kappa, \overline{d}; \varepsilon) := \left[\frac{b^n(\overline{d})}{b^n(\varepsilon/2)}\right] \geq l \tag{3.4}$$

である．

以上から任意の $M \in \mathcal{R}$ についてその極大 ε-離散集合 $\{p_i\}_{i=1}^{l}$ が存在し，常に $l \leq m = m(n, \kappa, \overline{d}; \varepsilon)$ となるので，適当に点を付け加えることで m 個の点からなる M の ε-ネット $\{p_i\}_{i=1}^{m}$ が存在することがわかる．点の順序まで指定した ε-ネットを $(p_i)_{i=1}^{m}$ と表し (ε, m)-ネットと呼ぶことにする．$\mathcal{R}_{\varepsilon,m}$ を $M \in \mathcal{R}$ とその上の (ε, m)-ネットの組み全体の集合とする．$\operatorname{Mat}(m, \mathbf{R})$ を $m \times m$ 実行列の集合とし，写像 $\Phi_{\varepsilon,m} : \mathcal{R}_{\varepsilon,m} \to \operatorname{Mat}(m, \mathbf{R})$ を

$$\Phi_{\varepsilon,m}(M, (p_i)_{i=1}^{m}) = (d(p_i, p_j))$$

で定義する，ここで $d(p_i, p_j)$ は行列の i-j 成分である．$\operatorname{diam} M \leq \overline{d}$ より $\Phi_{\varepsilon,m}$ の像は

$$\operatorname{Mat}(m, \overline{d}) = \{(a_{ij}) \in \operatorname{Mat}(m, \mathbf{R}) \mid 0 \leq a_{ij} \leq \overline{d}\}$$

に含まれている．$\operatorname{Mat}(m, \mathbf{R})$ の距離として成分のスープノルム $\|\cdot\|$ から定まるものを取ると，

$$d_H(M, M') \leq \|\Phi_{\varepsilon,m}(M, \Lambda) - \Phi_{\varepsilon,m}(M', \Lambda')\| + 2\varepsilon$$

が成り立つことを示そう．Λ を X の距離を制限した距離空間とみなすと，定義より $d_H(M, \Lambda) < \varepsilon$ であるので

$$d_H(\Lambda, \Lambda') \leq \|\Phi_{\varepsilon,m}(M, \Lambda) - \Phi_{\varepsilon,m}(M', \Lambda')\| \tag{3.5}$$

を示せばよい．$\delta = \|\Phi_{\varepsilon,m}(M, \Lambda) - \Phi_{\varepsilon,m}(M', \Lambda')\|$ と置く．$\Lambda = (p_i)_{i=1}^{m}$，$\Lambda' = (q_i)_{i=1}^{m}$ とし，写像 $f : \Lambda \to \Lambda'$ を $f(p_i) = q_i$ で決めると f は δ-近似写像で全単射となることから (3.5) がわかる．以上のことから簡単

な議論で $\mathcal{R}$ がプレコンパクトであることを示せるが，ここでは $\mathcal{R}$ の閉包 $\overline{\mathcal{R}}$ が列コンパクトであることを示すことにする．

$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\overline{\mathcal{R}}$ の空間の列とする．$X_i \in \overline{\mathcal{R}}$ より多様体の列 $\{M_{i,j} \in \mathcal{R}\}_{j=1}^{\infty}$ で $\lim_{j\to\infty} d_H(M_{i,j}, X_i) = 0$ となるものが存在する．そこで各 i に対して j_i を大きく取り $\lim_{i\to\infty} d_H(X_i, M_{i,j_i}) = 0$ となるようにできる．$M_i = M_{i,j_i}$ と置く．この部分列が存在してある距離空間 X に収束することを示そう．$M_i \in \mathcal{R}$ より M_i の $(1, m_1)$-ネット Λ_i^1 がある，ただし $m_1 = m(n, \kappa, \overline{d}; 1)$ である．これから帰納的に $(1/k, m_k)$-ネット Λ_i^k を $\Lambda_i^k \supset \Lambda_i^{k-1}$ となるように取っておく，ただし，$m_k = m(n, \kappa, \overline{d}; 1/k)$ である．すると

$$\Phi_{1,m_1}(\Lambda_i^1) \in \mathrm{Mat}(m_1, \overline{d})$$

なので，$\mathrm{Mat}(m, \overline{d})$ のコンパクト性から部分列 $\{i_1(j)\}_{j=1}^{\infty} \subset \{i\}$ が存在して $\{\Phi_{1,m_1}(\Lambda_{i_1}^1)\}$ はある行列 $D_1 \in \mathrm{Mat}(m_1, \overline{d})$ に収束する．これを繰り返して部分列の列 $\{i\} \supset \{i_1(j)\}_{j=1}^{\infty} \supset \cdots \supset \{i_k(j)\}_{j=1}^{\infty} \supset \cdots$ を取り，$\{\Phi_{1/k,m_k}(\Lambda_{i_k(j)}^k)\}_{j=1}^{\infty}$ はある行列 $D_k \in \mathrm{Mat}(m_k, \overline{d})$ に収束するようにできる．$P_{k+1} : \mathrm{Mat}(m_{k+1}, \overline{d}) \to \mathrm{Mat}(m_k, \overline{d})$ を初めの成分を取り出す自然な射影とすると，構成から $P_{k+1}(D_{k+1}) = D_k$ となる．$D_k = (d_{ij})_{i,j=1,\ldots,m_k}$ に対して有限集合 $\{p_i\}_{i=1}^{m_k}$ の距離を

$$d(p_i, p_j) = d_{ij}$$

と置くと，距離ゼロの点を同一視することで距離空間 Ξ_k を得る，上の性質から $\Xi_1 \subset \Xi_2 \subset \cdots \subset \Xi_k \subset \cdots$ でこれらはすべて等長埋め込みで，$m \geq k$ に対して

$$\Xi_m \subset \overline{B(\Xi_k, \tfrac{1}{k})}$$

である，ただし，右辺は Ξ_m ないの部分集合とみたもの．(3.5) と同じ理由から

$$d_H(\Xi_k, \Lambda_{i_k(j)}^k) \leq \|D_k - \Phi_{1/k,m_k}(M, \Lambda_{i_k(j)}^k)\|$$

なので，各 k について

$$\limsup_{j\to\infty} d_H(\Xi_k, M_{i_k(j)}) \leq \tfrac{1}{k},$$

したがって $\{i\}$ の部分列 $\{i_j\}$ が存在して

$$\lim_{j\to\infty} d_H(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Xi_k, M_{i_j}) = 0.$$

X を $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Xi_k$ の完備化とすると，(Ξ_k は X の $\frac{2}{k}$ ネットになるので) X はコンパクト距離空間で

$$\lim_{j\to\infty} d_H(X, X_{i_j}) = \lim_{j\to\infty} d_H(X, M_{i_j}) = 0$$

がわかる．

以上で $\overline{\mathcal{R}}$ は列コンパクトがいえた．したがって，$\overline{\mathcal{R}}$ はコンパクト，つまり，$\mathcal{R}$ は相対コンパクトで，パラコンパクトである．これで定理 3.2 の証明が終わった．

3.3. 極限として現れる空間の性質．定理 3.2 より，任意の Riemann 多様体の列 $M_i \in \mathcal{R}\,(i=1,2,\dots)$ に対してある部分列 $\{M_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ と $X \in \mathcal{C}$ が存在して $\lim_{j\to\infty} M_{i_j} = X$ となることがわかった．では X はどのような性質を持つだろうか．イメージを掴んでもらうために例を挙げよう．

例 3.1. $a, b > 0$ とする．$\mathbf{R}^2$ への群 $\mathbf{Z}^2$ の作用を $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(m,n)\cdot(x,y) = (x+am, y+bn)$$

により定義する．この作用で $\mathbf{R}^2$ を割った空間 $T_{a,b} = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ は平坦なトーラスである．(x,y) の同値類を $[x,y]$ と置く．同様に $\mathbf{R}$ への $\mathbf{Z}$ の作用を $m\cdot x = x+am$ で定め $S_a = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と置く．

まず

$$d_H(T_{a,b}, S_a) \le \frac{b}{2} \tag{3.6}$$

を示そう．そのために $Z = T_{a,b}$ として，$\varphi = \mathrm{id} : T_{a,b} \to Z$, $\phi : S_a \to Z$ を

$$\phi([x]) = [x, 0]$$

とすると，これは等長写像で，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\phi(S_a)$ の $\frac{b}{2}+\varepsilon$ 近傍は Z を覆っている．つまり，$d_H^Z(\varphi(T_{a,b}), \phi(S_a)) \le \frac{b}{2}+\varepsilon$ となり，(3.6) がわかる．したがって，$\lim_{b\to 0} T_{a,b} = S_a$ が成り立つ．更に P を一点からなる空間とすると $\lim_{a\to 0} T_{a,a} = P$．この例からわかるように極限では次元が下がることがある．

例 3.2. $\mathbf{R}^4$ への群 $\mathbf{Z}$ の作用を $m \in \mathbf{Z}$, $(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4$ に対して

$$m\cdot(x,y,z,w) = ((-1)^m x, (-1)^m y, (-1)^m z, w+\varepsilon m)$$

と定義する（図４）．

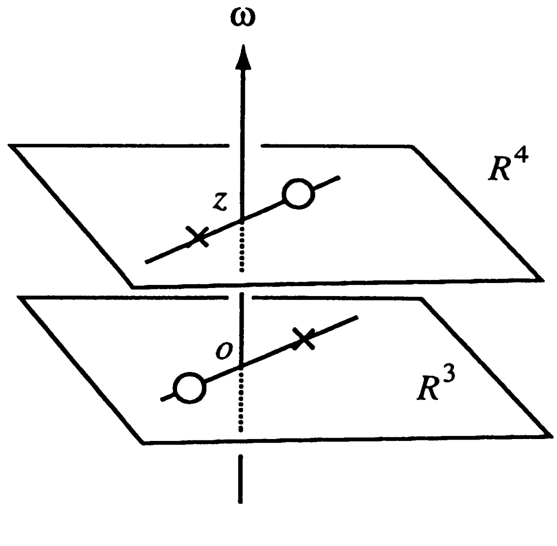


図４

この作用は固定点がなく $M_\varepsilon := \mathbf{R}^4/\mathbf{Z}$ は平坦なリーマン多様体である．次に同じように $\mathbf{R}^3$ の上に群 $F_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ の作用を $[m] \in F_2$,

$(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$[m] \cdot (x, y, z) = ((-1)^m x, (-1)^m y, (-1)^m z)$$

で定め $X = \mathbf{R}^3/F_2$ と置く．$\tilde{P} : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ を $\tilde{P}(x, y, z, w) = (x, y, z)$ とすると

$$\tilde{P}(m \cdot (x, y, z, w)) = [m] \cdot \tilde{P}(x, y, z, w)$$

が成り立つので，写像 $P : M_\varepsilon \to X$ を自然に導く．$\tilde{P}$ が直線を直線に写し，一点の P による引き戻しは直径 $\varepsilon/2$ 以下の円であるので，これは ε-近似写像である．よって，$\lim_{\varepsilon \to 0} M_\varepsilon = X$ となる．もちろん X は多様体でないので，多様体の収束した先は多様体とは限らないことがわかる．この例は コンパクトではないが，$\mathbf{Z}^3$ の平行移動による作用を考えこれで割れば（8 個の特異点を持つ）コンパクトな例が構成できる．

例 3.3. Y を $\mathbf{R}^3$ の内点を持つ凸な真部分集合とする．Y の境界 $X = \bar{Y} \setminus \operatorname{int} Y$ を考える．例 2.2 の例は $Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq c^2 z^2, z \geq 0\}$ $(c > 0)$ の境界として実現される．これからわかるように X は微分可能でない点をもつ可能性がある．Y の $\delta > 0$ 近傍の境界を考えるとこれは C^1 多様体であり，曲率 ≥ 0 の距離空間でもある．これを C^∞ 多様体として近似することで断面曲率 ≥ 0 の多様体の極限として X を表すことが出来る．

例 3.4. 各 $i \in \mathbf{N}$ に対して $\mathbf{R}^3$ 内の集合

$$Y_i = \{(x, y, z) \mid x,\ y,\ z \text{ のいずれか二つは } \tfrac{1}{i} \text{ の整数倍}\}$$

を考える，これはジャングルジムのようなもので，$i \to \infty$ で $\mathbf{R}^3$ に収束する．Y_i は多様体ではないがこの集合の $\frac{1}{i^2}$ 近傍内に滑らかな曲面 X_i を取ることが出来る．すると X_i は $i \to \infty$ で $\mathbf{R}^3$ に収束することがわかる．この場合は極限の次元が増加しているが，これは曲率 $\to -\infty$ となる部分が存在するためであることを後に示す．

まず完備局所コンパクト内部距離空間の極限の性質を調べよう．

補題 3.3. 完備局所コンパクト内部距離空間の列 $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ が完備距離空間 X に d_H について収束すると X は完備局所コンパクト内部距離空間である．

Proof. まず X が局所コンパクトであることを示す．それには X の有界集合 A がプレコンパクトであることを示せば良い．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $0 < \delta \ll \varepsilon$ とする．十分大きな k を取ると距離空間 Z_k と等長写像 $\varphi_k : X \to Z_k$, $\psi_k : X_k \to Z_k$ が存在して $d_H^{Z_k}(\varphi_k(X), \psi_k(X_k)) < \delta$. そこで有界閉集合 $B \subset X_i$ で $d_H^{Z_k}(\varphi_k(A), \psi_k(B)) < \delta$ なるものが存在する．X_k は完備局所コンパクト内部距離空間であるので，命題 2.2 より B はコンパクト集合であり，B の有限個の $\varepsilon - 3\delta$-ネット $\{q_i\}_{i=1}^m$ が存在し，そこから $p_i \in A$ で $d_H^{Z_k}(\varphi_k(p_i), \psi_k(q_i)) < \delta$ なるものがとれる．したがって $\{p_i \in X\}_{i=1}^m$ は A の ε-ネットとなり，A はプレコンパクトである．

次に X が内部距離空間になること示す．任意の $p \neq q \in X$ を固定する．任意の $\delta > 0$ に対して十分大きな k を取ると，距離空間 Z_k と等長写像 $\varphi_k : X \to Z_k$, $\psi_k : X_k \to Z_k$ が存在して $d_H^{Z_k}(\varphi_k(X), \phi_k(X_k)) < \delta$ となるので，p', $q' \in X_k$ を $d_Z(\varphi_k(p), \phi_k(p')) < \delta$, $d_Z(\varphi_k(q), \phi_k(q')) < \delta$ と取る．X_k は命題 2.1 より測地空間なので，任意の $m \geq 2$ に対して

$$d(p'_i, p'_{i-1}) = d(p', q')/m \quad i = 1, \dots, m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} d(p'_i, p'_{i-1}) = d(p', q')$$

をみたすような $p'_0 = p'$, $p'_1, \dots, p'_m = q'$ が存在する．$p_i \in X$ を $p_0 = p$, $p_m = q$, $d_Z(\varphi_k(p_i), \phi_k(p'_i)) < \delta$ となるように取ると

$$d(p_i, p_{i-1}) < d(p, q)/m + 3\delta \quad i = 1, \dots, m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} d(p_i, p_{i-1}) < d(p, q) + 2(m+1)\delta.$$

そこで与えられた $\varepsilon > 0$ に対して $m = 2d(p, q)/\varepsilon$ と置き $\delta < \varepsilon/2(m+1)$ と取ればよい． □

したがって，コンパクト距離空間 X が Riemann 多様体の列 $\{M_i\}$ の極限となるならば，この命題と命題 2.1 より X は測地空間である．

$\mathcal{X}$ を $\mathcal{C}$ の部分集合とし，その上の関数 $I : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ を考える．例えば，直径は diam : $\mathcal{C} \ni X \mapsto \operatorname{diam} X \in \mathbf{R}$ と見ることにより $\mathcal{C}$ の関数であり，(3.1) と d_H の三角不等式から d_H について連続関数になる．したがって

$$\operatorname{diam} X_i \leq \overline{d} \Rightarrow \operatorname{diam} X \leq \overline{d}$$

がわかる．つまりある性質を関数と捕らえてその（半）連続性が言えれば極限にその性質が遺伝すると言えるわけである．このような考察により，どのようなものが $\mathcal{X}$ 上の半連続関数となるかを調べることが，極限空間の性質を知ることにつながることがわかる．

まず

$$\mathcal{K} = \{X \mid \text{曲率が下から押さえられた距離空間}\}.$$

とし，$X \in \mathcal{K}$ に対して

$$\operatorname{curv} X := \sup\{\kappa \in \mathbf{R} \mid X \text{ は曲率 } \geq \kappa \text{ の距離空間}\}$$

と置き，curv : $\mathcal{K} \to \mathbf{R}$ とみなす．

命題 3.4. curv : $\mathcal{K} \to \mathbf{R}$ は上半連続である．

Proof. このためには X が $\operatorname{curv} X_i \geq \kappa$ をみたす X_i $(i = 1, 2, \dots)$ の極限ならば $\operatorname{curv} X \geq \kappa$ が成り立つことを示せば良いので，p_0, p_1, p_2, $p_3 \in X$ に対して (2.4) を示せば良い．X_k の p_0^k, p_1^k, p_2^k, $p_3^k \in X_k$ で

$$||p_i p_j| - |p_i^k p_j^k|| < 2d_H(X, X_k)$$

をみたすものがある．命題 2.5 より

$$\tilde{\angle} p_1^k p_0^k p_2^k + \tilde{\angle} p_2^k p_0^k p_3^k + \tilde{\angle} p_3^k p_0^k p_1^k \leq 2\pi.$$

$\tilde{\angle} p_i^k p_0^k p_j^k$ は辺の長さに連続に依存しているので $k \to \infty$ で

$$\tilde{\angle} p_1 p_0 p_2 + \tilde{\angle} p_2 p_0 p_3 + \tilde{\angle} p_3 p_0 p_1 \le 2\pi.$$

□

3.4. **Hausdorff 次元.** 次に上の観点から空間の次元を取り上げよう．

距離空間 X, $A \subset X$, $\alpha \ge 0$ とする．

$$G_\delta(A) = \{\{B_i\}_{i=1}^\infty \mid \bigcup_{i=1}^\infty B_i \supset A,\ \operatorname{diam} B_i < \delta\}$$

とする．A の α 次元 Hausdorff 測度を

$$\mathcal{H}^\alpha(A) = \lim_{\delta\to 0} \inf_{G_\delta(A)} \sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} B_i)^\alpha$$

と定義する．これは完全加法的な測度を定めている．A の Hausdorff 次元を

$$\begin{aligned}\dim_H A &= \sup\{\alpha > 0 \mid \mathcal{H}^\alpha(A) = \infty\}\\ &= \inf\{\alpha > 0 \mid \mathcal{H}^\alpha(A) = 0\}\end{aligned}$$

で定義する．M を n 次元 Riemann 多様体とし，Riemann 計量から導かれる距離空間とみると $\dim_H M = n$ であり，開集合 $A \subset M$ に対して $\mathrm{vol}(A) = c_n \mathcal{H}^n(A)$ となる，ただし，vol は Riemann 計量から導かれる体積で，c_n は n にしかよらない定数である．

次に $\beta_A(\delta)$ を A の δ-離散集合の個数の最大値とする．A の α 次元概測度（rough measure）を

$$V_r^\alpha(A) = \limsup_{\delta\to 0} \delta^\alpha \beta_A(\delta)$$

で定義する．A の概次元を

$$\begin{aligned}\dim_r A &= \sup\{\alpha > 0 \mid V_r^\alpha(A) = \infty\}\\ &= \inf\{\alpha > 0 \mid V_r^\alpha(A) = 0\}\end{aligned}$$

で定義する．

写像 $f : X \to Y$ が L-Lipshitz 写像とは

$$d(f(x), f(y)) \le L d(x,y) \quad \text{for } x, y \in X$$

が成り立つことであり，$g : X \to Y$ が L-拡大写像とは

$$d(g(x), g(y)) \ge L d(x,y) \quad \text{for } x, y \in X$$

が成り立つこととする．

補題 3.5. (1) $A \subset X$ について

$$\dim_H A \le \dim_r A;$$

(2) *L-Lipshitz 写像* $f : X \to Y$ に対して

$$\mathcal{H}^\alpha(f(A)) \le L^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A),$$

特に $\dim_H f(X) \le \dim_H X$. また L-拡大写像 $g : X \to Y$ に対して

$$\mathcal{H}^\alpha(g(A)) \ge L^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A),$$

特に $\dim_H g(X) \ge \dim_H X$.

(3) *L-Lipshitz* 写像 $f : X \to Y$ に対して

$$V_r^\alpha(f(A)) \le L^\alpha V_r^\alpha(A),$$

特に $\dim_r f(A) \le \dim_r X$. また L-拡大写像 $g : X \to Y$ に対して

$$V_r^\alpha(g(A)) \ge L^\alpha V_r^\alpha(A),$$

特に $\dim_r g(X) \ge \dim_r X$.

Proof. (1) 極大 δ-離散集合 $\{p_i\}_{i=1}^l$ は δ-ネットであったので

$$\bigcup_{i=1}^{l} B(p_i, \delta) \supset A, \quad \operatorname{diam} B(p_i, \delta) \le 2\delta$$

より $\{B(p_i, \delta)\}_{i=1}^l \in G_{2\delta}(A)$.

$$\mathcal{H}^\alpha(A) \le \limsup_{\delta \to 0} (2\delta)^\alpha \beta_A(\delta) = 2^\alpha V_r^\alpha(A).$$

したがって,

$$\alpha > \dim_r A \Rightarrow V_r^\alpha(A) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^\alpha(A) = 0 \Rightarrow \alpha > \dim_H A.$$

(2) 定義より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ と

$$\mathcal{H}^\alpha(A) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} B_i)^\alpha$$

となる $\{B_i\}_{i=1}^\infty \in G_\delta(A)$ が取れる.

$$\operatorname{diam} f(B_i) \le L \operatorname{diam} B_i \le L\delta$$

より, $\{f(B_i)\}_{i=1}^\infty \in G_{L\delta}(f(A))$ かつ

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} f(B_i))^\alpha \le L^\alpha (\mathcal{H}^\alpha(A) + \varepsilon)$$

なので,

$$\mathcal{H}^\alpha(f(A)) \le L^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A).$$

以下は (1) と同じ. g についてもほぼ同様. (3) もほぼ同じ. □

例 3.4 で取り上げた次元の増加が我々の興味を持っている場合には起こらないことを示そう.

補題 3.6. 任意の $X \in \overline{\mathcal{R}(n, \kappa, \overline{d})}$ に対して $\dim_H X \le n$.

Proof. $\lim_{i\to\infty} M_i = X$, $M_i \in \mathcal{R}$ とする．X の δ-離散集合 $\{p_j\}_{j=1}^l$ を取ると，M_i の $\delta - 2d_H(M_i, X)$-離散集合 $\{p_j^i\}_{j=1}^l$ を得ることができる．(3.3) より

$$\begin{aligned} l &\le \beta_{M_i}(\delta - 2d_H(M_i, X)) \\ &< m(n,\kappa,\overline{d};\delta - 2d_H(M_i,X)) \to m(n,\kappa,\overline{d};\delta), \end{aligned}$$

最後で $i \to \infty$ とした．従って，

$$\beta_X(\delta) \le m(n,\kappa,\overline{d};\delta) \le b^n(\overline{d})/b^n(\delta/2).$$

となり，

$$\dim_H X \le \dim_r X \le n.$$

□

$\dim_H$ の下半連続性については次のセクションで Alexandrov 空間を導入した後に論じるのが自然である．

3.5. 多様体の収束と崩壊．この論説では詳しく触れないので，ここで簡単に Riemann 多様体の収束と崩壊について説明しよう．まず，Rauch 以来球面定理と呼ばれる，ある条件をみたす Riemann 多様体が球面とある意味で近いことを示すのが大域 Riemann 幾何の一つの重要な問題であった．これが Cheeger による有限性定理の研究になり，Gromov による Hausdorff 距離の導入につながった．Riemann 多様体の収束とはこの Hausdorff 距離による別の空間への収束のことで，収束と言った場合極限と元の多様体はなんらかの意味で近いことを表すことが多い．上で述べた球面定理は標準球面への収束と密接に関わっている．収束先の空間が元の多様体とかなり異なるとき，特に Hausdorff 次元が元のものより低いときは崩壊と言う（例 3.1, 3.2 参照）．この場合も収束先の空間と元の多様体との関連を調べるのが大事な問題である．

いずれにせよどのような条件で収束と崩壊を考えるかにより結果，及び問題の難しさは変わってくる．最初に研究されたのは断面曲率が上下から一様に押さえられた場合であり，この場合 Gromov の収束定理がある，これは勝田，加須栄を始め多くの日本人が関わった問題であった．また崩壊については Gromov の概平坦多様体の理論 ([8]) に始まり，Cheeger-深谷-Gromov の構造定理 ([6]) まで深められた．次に断面曲率の上からの制限をなくして下からの制限だけで収束崩壊の研究が行われた．これが Alexandrov 空間に直接つながる問題である．大津-塩浜-山口 ([19]) による球面定理の研究，Grove-Petersen-Wu ([12]) による有限性定理の拡張，深谷-山口 ([7]) による崩壊における基本群の概冪零性に関する研究，そして，Burago-Gromov-Perelman([4]) による Alexandrov 空間の研究につながったのである．また，断面曲率を Ricci 曲率にかえた問題もいろいろに論じられており，特に Cheeger-Colding による興味深い研究が行われている．これについては酒井，加須栄両氏により詳しい解説がなされている．

4. ALEXANDROV 空間の基本性質

4.1. **Alexandrov 空間.** 距離空間 X が Hausdorff 次元が有限で，曲率 $\geq \kappa$ の完備局所コンパクト内部距離空間であるとき，X は曲率 $\geq \kappa$ の *Alexandrov* 空間という．ある $\kappa \in \mathbf{R}$ が存在して X が曲率 $\geq \kappa$ の Alexandrov 空間となるとき，単に X は Alexandrov 空間と云う．したがって，断面曲率 $K_M \geq \kappa$ の連結完備 Riemann 多様体は曲率 $\geq \kappa$ の Alexandrov 空間である．§ 3 の結果をまとめると次がわかる．

定理 4.1. *次元が n の断面曲率 $\geq \kappa$ をみたす連結完備 Riemann 多様体の（d_H に関する）極限は次元が n 以下で曲率 $\geq \kappa$ の Alexandrov 空間である．*

Alexandrov 空間の例を挙げよう：§ 2.2 及び § 3.3 の例を見直すことで次の二つがわかる．

例 4.1. 曲率 ≥ 1 の Alexandrov 空間 X から作った懸垂 C_X は曲率 ≥ 0 の Alexandrov 空間である．これを示すためには $\dim_H C_X = \dim_H X+1$ を示せばよいが，これは後に示す定理 4.7 からすぐにわかる．特に，Riemann 多様体 M に有限群 Γ が等長写像として作用しているとき，もし固定点が有限個ならば M/Γ も Alexandrov 空間である．

例 4.2. $\mathbf{R}^n$ の凸集合 の境界.

Riemann 幾何での証明が Alexandrov 空間でも注意深く変更することで成り立つことがある．例えば， Alexandrov 空間でも Toponogov の分解定理が成立する：曲線 $\sigma : \mathbf{R} \to X$ のパラメーターを曲線の長さに取るとき，σ が直線とは任意の $s, t \in \mathbf{R}$ に対して $\sigma|_{[s,t]}$ が最短線になることである．このとき

定理 4.2 ([11], [26]). *X を曲率 ≥ 0 の Alexandrov 空間が直線 σ を含むとすると，ある曲率 ≥ 0 の Alexandrov 空間 Y が存在して X は $\mathbf{R} \times Y$ に等長となる．*

4.2. **伸長点と次元.** 以下このセクションでは X は曲率 ≥ -1 の Alexandrov 空間であると仮定する．まず次を示そう．

補題 4.3. $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ *に対して* $p, q, r, s \in X$ *が次をみたすとする：*

$$|qs| < \delta_1 \min(|pq|, |rq|), \quad \tilde{\angle} pqr > \pi - \delta_2.$$

このとき（$|pq|$, $|rq|$ があまり大きくなければ）

$$|\tilde{\angle} pqs + \tilde{\angle} rqs - \pi| < 10\delta_1 + \delta_2. \tag{4.1}$$

さらに $|pq| = |ps|$ ならば $t \in qs$ に対して

$$|\tilde{\angle} ptq - \frac{\pi}{2}| < 20\delta_1 + 2\delta_2, \quad |\tilde{\angle} rtq - \frac{\pi}{2}| < 20\delta_1 + 2\delta_2.$$

Proof. まず，命題 2.5 より

$$\tilde{\angle} pqr + \tilde{\angle} pqs + \tilde{\angle} rqs \leq 2\pi \tag{4.2}$$

なので条件より

$$\tilde\angle pqs + \tilde\angle rqs \le 2\pi - \tilde\angle pqr \le \pi + \delta_2 \tag{4.3}$$

が成り立つ．

次に，Gauss-Bonnet の定理より

$$\tilde\angle pqs + \tilde\angle psq - \pi = -\tilde\angle qps - \mathrm{area}(\tilde\triangle pqs).$$

$H^2(-1)$ の正弦法則より

$$\sin\tilde\angle qps = \sin\tilde\angle pqs \frac{\sinh|sq|}{\sinh|pq|} \le \frac{\sinh|sq|}{\sinh|pq|}$$

なので，$|pq|$ があまり大きくないと，

$$\tilde\angle qps \le \tfrac{3}{2}\delta_1,$$

$$\mathrm{area}(\tilde\triangle pqs) \le \tilde\angle qps \max(\cosh|pq|-1, \cosh|ps|-1) \le \tfrac{1}{2}\delta_1$$

となり

$$|\tilde\angle pqs + \tilde\angle psq - \pi| < 2\delta_1 \tag{4.4}$$

がわかる．

(4.3) と逆の評価を与える．$H^2(-1)$ に $\tilde\triangle pqr = \triangle\tilde p\tilde q\tilde r$ を取り，$\tilde\triangle pqs = \triangle\tilde p\tilde q\bar s$ を $\bar s$ が $\tilde p\tilde q$ に関して $\tilde r$ と反対になるように，$\tilde\triangle rqs = \triangle\tilde r\tilde q\hat s$ を $\hat s$ が $\tilde r\tilde q$ に関して $\tilde p$ と反対になるように取ると，(4.2) が成立しているので，$\tilde\triangle psr$ については

$$\tilde\angle spr \le \tilde\angle spq + \tilde\angle qpr, \quad \tilde\angle srp \le \tilde\angle srq + \tilde\angle qrp$$

でなければならない．このことから Gauss-Bonnet の定理を使うと

$$\begin{aligned}
\tilde\angle psr &= \pi - \tilde\angle spr - \tilde\angle srp - \mathrm{area}(\tilde\triangle psr)\\
&\ge \pi - \tilde\angle qpr - \tilde\angle qrp - \tilde\angle spq - \tilde\angle srq - \mathrm{area}(\tilde\triangle psr)\\
&= \tilde\angle pqr - \tilde\angle spq - \tilde\angle srq + \mathrm{area}(\tilde\triangle pqr) - \mathrm{area}(\tilde\triangle psr).
\end{aligned}$$

上で与えた評価（及び，p を r に変えた評価）より，$|pq|, |qr|$ があまり大きくないと，

$$\tilde\angle psr > \pi - 4\delta_1 - \delta_2$$

がわかる．したがって，(4.2) を得たのと同じ理由から

$$\tilde\angle psq + \tilde\angle rsq \le \pi + 4\delta_1 + \delta_2$$

となる．また，(4.4)（及び，p を r に変えたもの）から

$$\tilde\angle pqs + \tilde\angle rqs \ge 2\pi - \tilde\angle psq - \tilde\angle rsq - 4\delta_1 \ge \pi - 8\delta_1 - \delta_2$$

となる．

さらに $|pq| = |ps|$ ならば (4.4) と (4.1) より

$$|\tilde\angle pqs - \tfrac{1}{2}\pi| < \delta_1, \quad |\tilde\angle rqs - \tfrac{1}{2}\pi| < 11\delta_1 + \delta_2,$$

よって Alexandrov の凸性 II から

$$\tilde\angle pqt \ge \tilde\angle pqs > \tfrac{1}{2}\pi - \delta_1, \quad \tilde\angle rqt \ge \tilde\angle rqs > \tfrac{1}{2}\pi - 11\delta_1 - \delta_2.$$

s を t に変えて (4.3) が成り立つので

$$\tilde{\angle}pqt \leq \tfrac{1}{2}\pi + 11\delta_1 + 2\delta_2 \quad \tilde{\angle}rqt \leq \tfrac{1}{2}\pi + \delta_1 + \delta_2.$$

もう一度 (4.4) より

$$|\tilde{\angle}ptq - \tfrac{1}{2}\pi| \leq 13\delta_1 + 2\delta_2, \quad |\tilde{\angle}rtq - \tfrac{1}{2}\pi| \leq 13\delta_1 + \delta_2.$$

□

ある点 $p \in X$ が (n,δ)-伸長点とは $X \setminus \{p\}$ の $2n$ 個の点 p_1, p_2, $\ldots p_n$, p_{-1}, $\ldots$, p_{-n} で

$$\tilde{\angle}p_\alpha p p_{-\alpha} > \pi - \delta, \quad \tilde{\angle}p_\alpha p p_\beta > \tfrac{\pi}{2} - \delta \quad (\alpha \neq \pm\beta) \tag{4.5}$$

をみたすものが存在することである．このような $\{p_\alpha\}_{\alpha=\pm1,\ldots,\pm n}$ を p の (n,δ)-伸長器と呼ぶことにする．定義から (n,δ)-伸長点は開集合をなすことがわかる．

写像 $\psi : X \to Y$ が X の開集合 U 上で ε-開写像であるとは任意の $p \in U$ と $\psi(p)$ に十分近い $x \in Y$ に対して（つまり，$B(p, \frac{1}{\varepsilon}|\psi(p)x|) \subset U$ なる $x \in Y$ に対して）

$$\psi(q) = x, \quad \varepsilon|pq| \leq |\psi(p)\psi(q)| \tag{4.6}$$

なる $q \in U$ が存在することとする．これは開写像である．

定理 4.4. $n \in \mathbf{N}$, $0 < \delta < 1/2n$ とし，$p \in X$ が $\{p_\alpha\}_{\alpha=\pm1,\ldots,\pm n}$ を (n,δ)-伸長器とする (n,δ)-伸長点であるとする．すると p の近傍 U が存在して，$\psi(q) = (d(p_1,q),\ldots,d(p_n,q))$ により写像 $\psi : U \to \mathbf{R}^n$ を決めると，これは $\frac{1-2n\delta}{\sqrt{n}}$-開写像である．

更に，p の近傍に $(n+1, 4\delta)$-伸長点が存在しないならば ψ は p の近傍と $\mathbf{R}^n$ の開集合との間の双 *Lipshitz* 同相である．

Proof. $\mathbf{R}^n$ のノルムを $||(x_1,\ldots,x_n)|| = |x_1|+\cdots+|x_n|$ とする．上で注意したように p の開近傍で，その全ての点が $\{p_\alpha\}_{\alpha=\pm1,\ldots,\pm n}$ を (n,δ)-伸長器とする (n,δ)-伸長点となるものがあるので，それを U とする．$q \in U$ に対して $\psi(q) = x$ とすると，x の十分近くの任意の点 $z = (z_1,\ldots,z_n)$ に対して $r \in U$ で $\psi(r) = z$ なるものが q から点列 $\{r_i \in X\}$ を構成してその極限として見つかることを示す．

$r_1 = q$ とする．$r_{i-1} \in U$ まで定義されたとして，

$$|z_\alpha - d(p_\alpha, r_{i-1})| = \max_{\beta=1,\ldots,n} |z_\beta - d(p_\beta, r_{i-1})|$$

なる $\alpha \in \{1,\ldots,n\}$ を取る．次に r_i を

$$r_i \in p_\alpha r_{i-1} \cup r_{i-1}p_{-\alpha}, \quad z_\alpha = d(p_\alpha, r_i) \tag{4.7}$$

となるように取る．まず $r_i \in r_{i-1}p_{-\alpha}$ の場合を考察する．Alexandrov の凸性 II と (4.5) より

$$\tilde{\angle}p_\alpha r_{i-1} r_i \geq \tilde{\angle}p_\alpha r_{i-1} p_{-\alpha} > \pi - \delta$$

なので

$$|z_\alpha - d(p_\alpha, r_{i-1})| > d(r_i, r_{i-1}) \cos\delta. \tag{4.8}$$

$r_i \in p_\alpha r_{i-1}$ の場合はこの関係式が成り立つのは明らかなので，これは全ての場合に成り立つ．$\beta \neq \pm\alpha$ に対しては命題 2.5 より

$$\tilde{\angle} p_\beta r_{i-1} r_i \leq 2\pi - \tilde{\angle} p_\beta r_{i-1} p_{-\beta} - \tilde{\angle} p_{-\beta} r_{i-1} r_i < \tfrac{\pi}{2} + 2\delta$$

なので

$$\begin{aligned} |z_\beta - d(p_\beta, r_i)| &\leq |z_\beta - d(p_\beta, r_{i-1})| + |d(p_\beta, r_{i-1}) - d(p_\beta, r_i)| \\ &\leq |z_\beta - d(p_\beta, r_{i-1})| + 2\delta\, d(r_{i-1}, r_i) \\ &\leq |z_\beta - d(p_\beta, r_{i-1})| + \frac{2\delta}{\cos\delta} |z_\alpha - d(p_\alpha, r_{i-1})|. \end{aligned} \tag{4.9}$$

したがって $\Delta_i := ||z - \psi(r_i)||$ と置くと，(4.7), (4.9) より

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \sum_{\beta \neq \alpha} |z_\beta - d(p_\beta, r_i)| \\ &\leq \sum_{\beta \neq \alpha} |z_\beta - d(p_\beta, r_{i-1})| + (n-1)\frac{2\delta}{\cos\delta} |z_\alpha - d(p_\alpha, r_{i-1})| \\ &\leq \Delta_{i-1} - \left(1 - (n-1)\frac{2\delta}{\cos\delta}\right) |z_\alpha - d(p_\alpha, r_{i-1})|. \end{aligned} \tag{4.10}$$

ここで $0 < \delta < 1/2n$ より

$$\cos\delta - 2(n-1)\delta > 1 - 2n\delta > 0$$

に注意して，(4.8) を使うと

$$\Delta_{i-1} - \Delta_i \geq (1 - 2n\delta) d(r_i, r_{i-1}). \tag{4.11}$$

よって

$$\begin{aligned} |qr_i| &\leq \sum_{j=1}^{i-1} d(r_j, r_{j+1}) \leq \frac{1}{1-2n\delta} \sum_{j=1}^{i-1} (\Delta_i - \Delta_{i+1}) \\ &\leq \frac{1}{1-2n\delta} \Delta_1 = \frac{1}{1-2n\delta} ||\psi(q) - z||, \end{aligned} \tag{4.12}$$

したがって，$\delta < 1/2n$ より，$||\psi(q) - z||$ を十分小さく取っておくと r_i は常に U に入り，すべての $i \in \mathbf{N}$ に対して $r_i \in U$ を取れることが保証される．

次に (4.10) と $\Delta_{i-1} \leq n|z_\alpha - d(p_\alpha, r_{i-1})|$ より

$$\Delta_i \leq \left\{1 - \frac{1}{n}\left(1 - (n-1)\frac{2\delta}{\cos\delta}\right)\right\} \Delta_{i-1} < \left(1 - \frac{1-2n\delta}{n}\right) \Delta_{i-1}.$$

したがって $\delta < 1/2n$ ならば，$\{\Delta_i\}_{i=1}^\infty$ は 0 に収束する．すると (4.11) より $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ は Cauchy 列になり，ある点 r に収束するが，これは $r \in U$ としてよい．このとき $z = \psi(r)$ は明らかで (4.12) から

$$|qr| \leq \sum_{i=1}^\infty d(r_i, r_{i+1}) \leq \frac{1}{1-2n\delta} ||\psi(q) - z||,$$

したがって，$\mathbf{R}^n$ の自然な距離に対して $\frac{\sqrt{n}}{1-2n\delta}$ 開写像になる．

後半を示す．ψ が Lipshitz 連続であることは明らかであるので，ψ が 1 対 1 であることを示せば $\frac{\sqrt{n}}{1-2n\delta}$ 開写像であることより双 Lipshitz 同相であることが分かる．そのため近傍 U を十分小さくえらんで，ここの点が $\{p_\alpha\}_{\alpha=\pm 1,\dots,\pm n}$ を (n,δ)-伸長器とする (n,δ)-伸長点で $\operatorname{diam} U < \frac{1}{10}\delta \min_{\alpha=1,\dots,n}|pp_\alpha|$ と仮定する．もし $q \neq q' \in U$ に対して $\psi(q)=\psi(q')$ ならば qq' の中点 r に対して補題 4.3 を使うと

$$|\tilde{\angle} p_\alpha r q - \tfrac{\pi}{2}| < 4\delta \tag{4.13}$$

となるので $r \in U$ は $\{p_\alpha\}_{\alpha=\pm 1,\dots,\pm(n+1)}$ ($p_{n+1}=q$, $p_{-n-1}=q'$) を $(n+1,4\delta)$-伸長器とする $(n+1,4\delta)$-伸長点となり矛盾する． □

空間の次元について論じるために準備をしよう：

補題 4.5. 点 $p \in X$ が $0<\delta<1/8n$ に対して (n,δ)-伸長点とすると，任意 $\varepsilon>0$ に対して p の幾らでも近いところに (n,ε)-伸長点が存在する．

Proof. $\{p_\alpha\}_{\alpha=\pm 1,\dots,\pm n}$ を p の (n,δ)-伸長器とする．定理 4.4 より写像 $\psi: U \to \mathbf{R}^n$ を $\psi(q)=(d(p_1,q),\dots,d(p_n,q))$ により定めると，これは開写像である．したがって，ある $q \in U$ が存在して

$$d(p_1,q) \neq d(p_1,p), \quad 0 < d(p,q) < \frac{\delta}{10}\min|pp_\alpha|,$$
$$d(p_2,q)=d(p_2,p),\dots,d(p_n,q)=d(p_n,p).$$

そこで q_1 を pq の中点とすると $\hat{p}_1=p$, $\hat{p}_{-1}=q$ に対して q_1 は $(1,0)$-伸長点である．(4.13) と同じ理由から

$$|\tilde{\angle} p_\alpha q_1 \hat{p}_{\pm 1} - \tfrac{\pi}{2}| < 4\delta \quad \text{for } \alpha=\pm 2,\dots,\pm n,$$

もちろん $q_1 \in U$ は $\{p_\alpha\}_{\alpha=\pm 2,\dots,\pm n}$ に対して $(n-1,\delta)$-伸長点である．

$\{\hat{p}_{\pm 1}, p_{\pm 2},\dots,p_{\pm n}\}$ は q_1 の $(n,4\delta)$-伸長点であるので，また写像 $\psi': U' \to \mathbf{R}^n$ を $\psi'(q)=(d(\hat{p}_1,q),\dots,d(p_n,q))$ により定めると，これは開写像である．したがって，ある $q' \in U'$ が存在して

$$d(\hat{p}_1,q')=d(\hat{p}_1,q_1),$$
$$d(p_2,q') \neq d(p_2,q_1), \quad 0<d(q_1,q') < \frac{\varepsilon}{10\cdot 4^n}|q_1\hat{p}_1|$$
$$d(p_3,q')=d(p_3,q_1),\dots,d(p_n,q')=d(p_n,q_1),$$

q_2 を q_1q' の中点とすると $\hat{p}_2=q_1$, $\hat{p}_{-2}=q'$ に対して

$$\tilde{\angle}\hat{p}_2 q_2 \hat{p}_{-2}=\pi, \quad \tilde{\angle}\hat{p}_1 q_2 \hat{p}_{-1} > \pi-\varepsilon/4^{n-1}, \quad |\tilde{\angle}\hat{p}_{\pm 1} q_1 \hat{p}_{\pm 2} - \tfrac{\pi}{2}| < \varepsilon/4^{n-1}.$$

また

$$|\tilde{\angle}\hat{p}_\alpha q_2 p_\beta - \tfrac{\pi}{2}| < 4\delta \quad \text{for } \alpha=\pm 1,\pm 2, \beta=\pm 3,\dots,\pm n,$$

もちろん $q_2 \in U$ は $\{p_\beta\}_{\beta=\pm 3,\dots,\pm n}$ に対して $(n-2,\delta)$-伸長点である．

この議論を繰り返して見つかる $q_n \in U$ が (n,ε)-伸長点である． □

X が一点からなる空間でないならば，$p \in X$ に対し別の点からの最短線を取るとその内点は $(1,0)$-伸長点である．一般に $0 < \delta < 1/32(n+1)$ について p の幾らでも近いところに (n,δ)-伸長点 q があったとする．定理 4.4 より $\{p_\alpha\}_{\alpha=\pm1,\dots,\pm n}$ を (n,δ)-伸長器とすると q の近傍 U が存在して，$\psi(r) = (d(p_1,r),\dots,d(p_n,r))$ により写像 $\psi : U \to \mathbf{R}^n$ を決めると，これは $\frac{1-2n\delta}{\sqrt{n}}$-開写像であり，更に，$\psi$ は p の近傍と $\mathbf{R}^n$ の開集合の双 Lipshitz 同相でなければ U 内に $(n+1,4\delta)$-伸長点 r が存在する．$0 < 4\delta < 1/8(n+1)$ なので，補題 4.5 より任意 $\varepsilon > 0$ に対して r の幾らでも近いところに，つまり U の中に，$(n+1,\varepsilon)$-伸長点が存在する．

任意に小さな $\delta > 0$ に対して $\{p_i\}_{i=\pm1,\dots,\pm n}$ を (n,δ)-伸長器とする (n,δ)-伸長点 q が存在するならば，q の近傍 U が存在して $\psi(r) = (d(p_1,r),\dots,d(p_n,r))$ により定まる写像 $\psi : U \to \mathbf{R}^n$ は開写像である．そこで，そこで $\dim_H \psi(U) = n$ となり，ψ は Lipshitz 連続なので補題 3.5 (2) より $\dim_H(U) \geq n$ となる．我々は Alexandrov 空間の定義で $\dim_H X < \infty$ を要請したので，このような $n \in \mathbf{N}$ は幾らでも大きくは取れないことがわかる．

以上の理由から各点 $p \in X$ に対してある $n \in \mathbf{N}$ と p の近傍 V_p が存在して次をみたす：任意の $\delta > 0$ に対して (n,δ)-伸長点 $q \in V_p$ が存在し，$\{p_i\}_{i=\pm1,\dots,\pm n}$ を q の (n,δ)-伸長器とするならば，q の近傍 U が存在して，$\psi(r) = (d(p_1,r),\dots,d(p_n,r))$ により定まる写像 $\psi : U \to \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合との双 Lipshitz 同相となる．このとき補題 3.5 より $\dim_H U = \dim_r U = n$ である．

次元に関する補題を用意しよう：

補題 4.6. *U, V が X の有界な開集合ならば*

$$\dim_H(U) = \dim_H(V).$$

Proof. $B(q,R) \subset V$ なる $q \in V$, $R > 0$ を固定し，$D = \max_{p \in U} |qp|$ と置く，各 $p \in V$ に対して $r \in B(q,R)$ を qp 上の点で $|qr| = \frac{R}{D}|qp|$ なるような点の一つをとり，$\Phi(p) = r$ と置くことで写像 $\Phi : V \to B(q,R)$ を定義すると，Alexandrov の凸性 I より

$$|\Phi(p)\Phi(p')| \geq \frac{\sinh D}{\sinh R}|pp'|$$

なので，補題 3.5 (2) より $\dim_H(V) \leq \dim_H(B(q,R)) \leq \dim_H(U)$ がわかる．$\dim_H(U) \geq \dim_H(V)$ も同じ理由から成り立つ． □

したがって V_p, U を上で取った近傍とすると $\dim_H V_p = \dim_H U = n$ がわかる．また，任意 p, $r \in X$ に対して $\dim_H V_p = \dim_H V_r$ もわかる．更に，$X_0 = \{p \in X \mid 0 < \delta < 1/2n$ に対して p は (n,δ)-伸長点 $\}$ と置くと，X_0 は X の開かつ稠密部分集合で X_0 は n 次元位相多様体であることもわかる．以上から次が証明された．

定理 4.7 ([4]). *X を Alexandrov 空間とすると，$n = \dim_H X$ は整数であり，X の開かつ稠密部分集合 X_0 が存在して X_0 は n 次元位相多様体である．*

4.3. 接錐・方向空間. 次に $p \in X$ を固定して

$$\tilde{\Sigma}_p = \{pq \mid q \in X \setminus \{p\}\}/\sim$$

ただし $pq \sim pr$ を $\angle pqr = 0$ で定義する. また pq を含む同値類を v_{pq} と表す. $\angle(v_{pq}, v_{pr}) = \angle qpr$ と置くと, 命題 2.3 (1) より $\angle$ は $\tilde{\Sigma}_p$ の距離を定めるので, $(\tilde{\Sigma}_p, \angle)$ を距離空間とみてその完備化を Σ_p と表し, 方向空間(Space of direction) と云う. このとき $u, v \in \Sigma_p$ に対してその距離を $\angle(u, v)$ で表す.

定理 4.8 ([4]). X を *Alexandrov* 空間とすると $p \in X$ について Σ_p はコンパクト集合.

Proof. この定理の証明のためには $\tilde{\Sigma}_p$ がプレコンパクトであることを示せば良い. そのために次を示そう.

補題 4.9. 任意の整数 $n \geq 1$ と $0 \leq m \leq n$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta = \delta(n, m, \varepsilon) > 0$ と $N = N(n, m, \varepsilon)$ が存在して次の性質をもつ. X を曲率 ≥ -1 の n 次元 *Alexandrov* 空間とするとき, p, $p_{\pm 1}$, ..., $p_{\pm m}$, q_1, ..., $q_N \in X$ で次のようなものは存在しない:

$$\begin{aligned} & p_{\pm 1}, \ldots, p_{\pm m} \text{は } p \text{ の } (m, \delta)\text{-伸長器}, \\ & \tilde{\angle} p_i p q_j > \tfrac{\pi}{2} - \delta \quad i = \pm 1, \ldots, \pm m, j = 1, \ldots, N, \qquad (4.14) \\ & \tilde{\angle} q_j p q_{j'} > \varepsilon \quad j \neq j' = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

この補題の $m = 0$ の場合から $\tilde{\Sigma}_p$ がプレコンパクトであることがわかる. $m = n$ の場合, $N = 1, \delta = \frac{1}{100n}$ とする. $p_{\pm 1}$, ..., $p_{\pm n}$ は (n, δ)-伸長器で q_1 に対して (4.14) がなりたつので, $p_{n+1} = p$, $p_{-n-1} = q_1$ と置き $p' \in pq_1$ を p に十分近く取ると, $p_{\pm 1}$, ..., $p_{\pm(n+1)}$ は p' の $(n+1, 2\delta)$-伸長器となる. 実際, $p_{\pm 1}, \ldots, p_{\pm m}$ が p' の (m, δ)-伸長器であることと $\tilde{\angle} p_i p' q_1 > \pi/2 - \delta$ は明らかで, 命題 2.3 (4) と仮定より $\tilde{\angle} pp'p_{-i} < \pi/2 + \delta$ となるので, 命題 4.3 より $\tilde{\angle} pp'p_i > \pi/2 - 2\delta$ が示せる. これは次元の仮定に矛盾している.

以下 m に関する逆の帰納法を用いてこの命題の主張が成り立つことを示す. まず次を準備しよう, これは角度の定義から簡単にわかる.

補題 4.10. $\{pq_i\}_{i=1}^m$ が与えられたとき, q_i を pq_i 上 p の近くに取直せば, 任意の $\delta > 0$ に対して p の近傍 U が存在して, 任意の $\triangle pqr \in U$ で $q \in pq_i$, $r \in pq_j$ をみたすものについて

$$|\angle pqr - \tilde{\angle} pqr| < \delta, \quad |\angle qrp - \tilde{\angle} qrp| < \delta, \quad |\angle rpq - \tilde{\angle} rpq| < \delta$$

が成り立つ.

$m + 1$ の場合まで命題の主張が示されたとして, m の場合を示す.

$$\delta(n, m, \varepsilon) < 0.001\varepsilon\delta(n, m+1, \varepsilon/2) \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}(N(n, m, \varepsilon) - N(n, m+1, \varepsilon/2)) \\ & > \frac{1000}{\delta(n, m, \varepsilon)} N(n, m+1, \varepsilon/2) \end{aligned} \tag{4.16}$$

をみたすように $\delta=\delta(n,m,\varepsilon)>0$ と $N=N(n,m,\varepsilon)$ を選び，p, $\{p_i\}_{i=\pm1,\ldots,\pm m}$, $\{q_j\}_{j=1}^{N}$ で (4.14) をみたすものが存在したとする．以下の目標は，上のように $\delta>0$ を十分小さく N を十分大きく取ると，与えられた点の組みを元にして $(m+1,\delta(n,m+1,\varepsilon/2))$-伸長器が作れ，この伸長器と適当に選んだ新たな点の組みで $m+1$ での (4.14) をみたすものが見つかることを示すことである．これから帰納法の仮定より矛盾が導かれる．

$p_{m+1}=p$, $p_{-m-1}=q_N$ とし pq_N の点で p に近いものをあたらめて p と置くと，上で $m=n$ の場合に $(n+1,2\delta)$-伸長器を作ったの同じ議論から，p, $\{p_i\}_{i=\pm1,\ldots,\pm(m+1)}$, $\{q_j\}_{j=1}^{N-1}$ について (4.14) が，δ を 2δ に置き換え，$j=N$ の場合を除いた形で成り立つことになる．δ について補題 4.10 が成り立つように p_i を pp_i に，q_j を pq_j に沿って p の近くに取り直しておく．

帰納法の仮定から

$$\tilde{\angle}p_{m+1}pq_j>\tfrac{\pi}{2}-3\delta,\quad \tilde{\angle}p_{-m-1}pq_j>\tfrac{\pi}{2}-3\delta$$

をみたすような j は高々 $N(n,m+1,\varepsilon/2)-1$ 個である，つまり，$N(n,m,\varepsilon)-N(n,m+1,\varepsilon/2)$ 個の j にはこの式が成り立たない．そこで，(4.16) のとり方から $\frac{1000}{\delta}N(n,m+1,\varepsilon/2)$ 個の j について

$$\tfrac{\pi}{2}-3\delta\geq\tilde{\angle}p_{m+1}pq_j$$

と仮定してよい．このとき

$$\varepsilon/3<\tilde{\angle}p_{m+1}pq_j\leq\angle p_{m+1}pq_j<\tilde{\angle}p_{m+1}pq_j+\delta\leq\tfrac{\pi}{2}-2\delta$$

となる．最初の不等式は高々一個の j を除いて成立する，なぜなら，もし $\tilde{\angle}p_{m+1}pq_j$, $\tilde{\angle}p_{m+1}pq_{j'}\leq\varepsilon/3$ ならば $\tilde{\angle}q_jpq_{j'}<2\varepsilon/3+3\delta<\varepsilon$ となり，$j=j'$ となるからである．各 j に対して $\phi_j=\tilde{\angle}p_{m+1}pq_j$ と置くと，$\phi_j\in[\varepsilon/3,\frac{\pi}{2}-2\delta]$ なので，この区間を $\delta/100$ の幅の小区間に分割して考えると，個数が $N(n,m+1,\varepsilon/2)$ 個以上の j の集合 A で

$$|\phi_j-\phi_{j'}|\leq0.01\delta\quad\text{for } j,j'\in A \tag{4.17}$$

なるものが存在する．

点 p' を pp_{m+1} 上の p の近くの点とし，$j\in A$ について q'_j を pq_j の点で $|pq'_j|=|pp'|/\cos\phi_j$ となるように取る．すると p', $\{p_i\}_{i=\pm1,\ldots,\pm(m+1)}$, $\{q'_j\}_{j\in A}$ について，$m+1$ についての (4.14) が成り立つことを示し，矛盾を導こう．まず，$\{p_i\}_{i=\pm1,\ldots,\pm(m+1)}$ が p' の $(m+1,2\delta)$-伸長器となるのは良い．

$$\tilde{\angle}q'_jp'q'_{j'}>\varepsilon/2$$

となるのは (4.14) の条件と (4.17) からわかる．次に補題 4.10 より

$$\tilde{\angle}p_{m+1}p'q'_j>\tfrac{\pi}{2}-10\delta,\quad \tilde{\angle}p_{-m-1}p'q'_j>\tfrac{\pi}{2}-10\delta$$

が出る．最後に $i=1,\ldots,m$ と $j\in A$ に対して

$$\tilde{\angle}p_ip'q'_j>\tfrac{\pi}{2}-\delta(n,m+1,\varepsilon/2) \tag{4.18}$$

となることを示せば良い．$\phi_j > \varepsilon/3$ より

$$|p'q_j'| > 0.1\varepsilon(|p'p| + |pq_j'|)$$

であり，(4.14) より

$$||p_iq_j'| - |p_ip'|| \le ||p_iq_j'| - |p_ip|| + |||p_ip'| - |p_ip|| \le 5\delta(|pp'| + |pq_j'|)$$

なので，(4.15) の δ の取り方から

$$||p_iq_j'| - |p_ip'|| < \frac{5\delta}{0.1\varepsilon}|p'q_j'| < 0.1\delta(n, m+1, \varepsilon/2)|p'q_j'|.$$

これから (4.18) が分かる． □

次に Σ_p の懸垂 C_{Σ_p} を K_p と表し，接錐(Tangent cone) と呼ぶ．$[u,t]$ を tu で表し，特に $(u,0)$ の代表する元を 0_p で表す．次に $\tilde{W}_p := \{|pq|v_{pq} \in K_p \mid q \in X\}$ と置き，指数写像 $\mathrm{Exp}_p : \tilde{W}_p \to X$ を

$$\mathrm{Exp}_p\,|pq|v_{pq} = q$$

で定義する．これは $B(0_p, R; \tilde{W}_p)$ に制限すると Toponogov の凸性 II より $s_{-1}(R)/R$-Lipshitz 写像である．

$X = (X, d)$ を距離空間とするとき，$\rho > 0$ に対して

$$\rho d(x,y) = \rho \times d(x,y)$$

と定義するとこれはまた距離なので，$\rho X = (X, \rho d)$ と表す．

補題 4.11. X を *Alexandrov* 空間とする．K_p は $(\rho X, p)$ の次の意味での極限，つまり，任意の $R > 0$ に対して

$$\lim_{\rho\to\infty} d_H(B(0_p, R; K_p), B(p, R; \rho X)) = 0.$$

特に，K_p は曲率 ≥ 0 の *Alexandrov* 空間である．

Proof. $\{\lambda_i > 0\}$ を 0 に収束する単調減少数列とする．i に対して $E_i : B(p, R : \frac{1}{\lambda_i}X) \to B(0_p, R; K_p)$ を $E_i = \mathrm{Exp}_p^{-1}$ と定義する，但し逆が一意的に定まらないところではその一つを取るとする．するとこれは $\lambda_i R/s_{-1}(\lambda_i R)$-拡大写像となる．そこである 0 に収束する $\{\varepsilon_i > 0\}$ があって E_i が ε_i-Hausdorff 近似写像となることを示せば良い．まず，ある $\varepsilon > 0$ と $\{i\}$ の部分列 $\{j\}$ があって E_j の像の ε 近傍が $B(0_p, R; K_p)$ を覆わないとする．つまり，ある $tu \in B(0_p, R; K_p)$ が存在してその ε 近傍が E_j の像と交わらないとする．定義から $\angle(u, v_{pq}) < \varepsilon/2R$ となる q が存在する．十分大きな j について $q_j \in pq$ で $|pq_j| = \lambda_j t$ なる点をとると，$q_j \in B(p, R : \frac{1}{\lambda_j}X)$, $E_jq_j = tv_{pq_j}$ なので仮定より $|tv_{pq_j}tu| > \varepsilon$ がわかり，特に $\angle(u, v_{pq}) > \varepsilon/R$ となり矛盾が生じる．こうではなく，距離のずれがある $\varepsilon > 0$ より大きいとしても同様に矛盾が出る．

$\frac{1}{\lambda_i}X$ は curv $\ge -\lambda_i^2$ の Alexandrov 空間であることは明らかだから，命題 3.4 より K_p の曲率は ≥ 0 が分かる． □

ここまでの結果で以下の本質的な部分は証明された．

定理 4.12 ([4]). *X を n 次元 Alexandrov 空間とすると，任意の $p \in X$ について Σ_p はコンパクトな曲率 ≥ 1 の $n-1$ 次元 Alexandrov 空間で K_p は曲率 ≥ 0 の n 次元 Alexandrov 空間である．*

5. 微分構造

5.1. **特異点．** まず Alexandrov 空間の詳しい構造を調べるために，例を検討しよう．

例 5.1. X を多面体とするとき $\operatorname{ap} X$ でその頂点を表すことにする．Y_1 を $\mathbf{R}^3$ の中の四面体とするとこれは凸集合なので例 4.2 で見たようにその境界 X_1 は Alexandrov 空間である．頂点での面の三角形の角度の和 $< 2\pi$ である，そこである $\varepsilon_1 > 0$ が取れて $< 2\pi - \varepsilon_1$ となる．X_1 を多面体とみてその重心細分を考え，Y の重心から新しく付け加えた点を Y_1 の外側へ少し動かし，それから新しい凸多面体 $Y_2 \supset Y_1$ を作り，その境界を X_2 と置く．構成から $\operatorname{ap} X_1 \subset \operatorname{ap} X_2$ であるが,「少し動かす」とは $\operatorname{ap} X_1$ の頂点では三角形の角度の和 $< 2\pi - \varepsilon_1$ をみたすように動かすという意味である．以下同様に各頂点での角度の制限を保ちながら凸多面体 $Y_i \supset \cdots \supset Y_1$ とその境界 X_i を作ると X_i は Alexandrov 空間であり，Alexandrov 空間 X に収束するが，この空間の特異点の集合 S_X は構成から X 内で稠密であることがわかる．

この例から見ると Alexandrov 空間の滑らかさはあまり期待できないように見えるが，それでも Riemann 多様体と類似の滑らかさを持つことをこのセクションで紹介する．

以下 X を曲率 ≥ -1 の Alexandrov 空間とし，$p \in X$ を固定しておく．$\delta > 0$ に対して

$$W_p^\delta = \{x \in X \mid \text{ある } y \in X \text{ が存在して } x \in py, |py| = (1+\delta)|px|\}$$

と置く．これは閉集合である．$x \in W_p^\delta$ に対して $x \in py, |py| = (1+\delta)|px|$ をみたす y を対応させることで写像 $E_p^\delta : W_p^\delta \to X$ を定義する．y が一意的に定まるのは 系 2.4 より明らか．Alexandrov の凸性より任意の $R > 0$ に対して，$L = L(R;\delta) > 0$ が存在して $\lim_{\delta\to 0} L(R;\delta) = 1$ で $E_p^\delta : W_p^\delta \cap B(p, R/(1+\delta)) \to B(p,R)$ は L-Lipshitz 写像である．切断跡 Cut_p を

$$\mathrm{Cut}_p = X \setminus \bigcup_{\delta>0} W_p^\delta \tag{5.1}$$

と定義する．

命題 5.1. *$\mathcal{H}^n(\mathrm{Cut}_p) = 0$.*

Proof. $E_p^\delta : W_p^\delta \cap B(p, R/(1+\delta)) \to B(p,R)$ は L-Lipshitz 写像であるので，補題 3.5 より

$$\mathcal{H}^n(B(p,R)) \leq L^n \mathcal{H}^n(W_p^\delta \cap B(p, R/(1+\delta))).$$

また (5.1) より

$$\lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^n(W_p^\delta \cap B(p, R/(1+\delta))) = \mathcal{H}^n(B(p,R) \setminus \mathrm{Cut}_p)$$

なので $\lim_{\delta\to 0} L = 1$ より

$$\mathcal{H}^n(B(p,R)) \le \mathcal{H}^n(B(p,R)\setminus \mathrm{Cut}_p)$$

がわかる. □

点 $p \in X$ が非特異とは $\Sigma_p = S^{n-1}(1)$ となることであり, これは $K_p = \mathbf{R}^n$ となることと同値である. $p \in X$ が特異とは非特異でないこととする. S_X を X の特異点全体の集合とする. 次に $\delta > 0$ に対して

$$\tilde{S}_{p,\delta} = \{x \in X \mid \tilde{\angle} pxy \le \pi - \delta \quad \text{for } y \in X \setminus \{x\}\}$$

と置く. 明らかに $\tilde{S}_{p,\delta}$ は閉集合で, $0 < \delta < \delta'$ に対して $\tilde{S}_{p,\delta} \subset \tilde{S}_{p,\delta'}$ が成り立つ. $\tilde{S}_p = \bigcup_{\delta>0} \tilde{S}_{p,\delta}$ と置く.

補題 5.2. ある $L = L(R,\delta) > 0$ が存在して

$$\angle xpy \ge L|xy| \quad \textit{for } x,y \in \tilde{S}_{p,\delta} \cap B(p,R)$$

成り立つ.

Proof.

$$\begin{aligned}
&\cosh(|px| + |xy|) - \cosh|py| \\
=&(\cosh|px|\cosh|xy| + \sinh|pk|\sinh|xy|) \\
&\quad - (\cosh|px|\cosh|xy| - \cos\tilde{\angle} pxy \sinh|pk|\sinh|xy|) \\
=&(1+\cos\tilde{\angle} pxy)\sinh|pk|\sinh|xy|
\end{aligned}$$

であるが,

$$\cosh(|px| + |xy|) - \cosh|py| \le (|px| + |xy| - |py|)\sinh(|px| + |xy|)$$

なので, $|px| + |xy| \le 3R$, $\tilde{\angle} pxy \le \pi - \delta$ より

$$(1-\cos\delta)\sinh|pk|\sinh|xy| \le (|px| + |xy| - |py|)\sinh 3R.$$

次に $\tilde{\angle} xpy$ に同様の計算を行うと

$$\begin{aligned}
(1-\cos\tilde{\angle} xpy)\sinh|pk|\sinh|py| &= \cosh|xy| - \cosh(|py| - |px|) \\
&\ge \tfrac{1}{2}(|xy| - |py| + |px|)|xy|
\end{aligned}$$

となり, 左辺 $\le \frac{1}{2}(\tilde{\angle} xpy)^2 \sinh|pk|\sinh R$ なので

$$(\tilde{\angle} xpy)^2 \ge \frac{1-\cos\delta}{\sinh 3R \sinh R}|xy|^2.$$

□

$\mathrm{Exp}_p^{-1} : \tilde{S}_{p,\delta} \cap B(p,R) \to \Sigma_p$ は上の補題より L 拡大写像になるので $\mathcal{H}^\alpha(\tilde{S}_{p,\delta} \cap B(p,R)) = 0$ が $\alpha > n-1$ に対してなりたつ. よって $\mathcal{H}^\alpha(\tilde{S}_p) = 0$ となり $\dim_H(\tilde{S}_p) \le n-1$ が分かる.

次に稠密な可算個の点 $\{p_i\}_{i=1}^\infty$ を取ると $S_X \subset \bigcup_{i=1}^\infty \tilde{S}_{p_i}$ となることも容易に示せるので次が示せた.

定理 5.3 ([4], [20]). X を n 次元 *Alexandrov* 空間とすると, $\dim_H S_X \le n-1$.

このセクションの応用として§3.4で予告した $\dim_H$ の半連続性について述べよう.

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}(n,\kappa,\overline{d})=\{X \mid \dim_H X\le n, \operatorname{diam} X\le \overline{d}, \operatorname{curv} X\ge \kappa \text{ をみたすコンパクト Alexandrov 空間}\}$$

と置き, $\dim_H$ を $\mathcal{A}\ni X\mapsto \dim_H X\in \mathbf{R}$ と見る. すると, 次が成り立つ.

定理 5.4 ([4]). $\dim_H:\mathcal{A}\to\mathbf{R}$ は下半連続関数である. したがって, $\mathcal{A}$ はコンパクト集合である.

証明には補題3.6と同様に $\beta_X(\delta)$ の(3.4)によるような評価を与えればよい. $X\in\mathcal{A}(n,\kappa,\overline{d})$ を n' 次元 Alexandrov 空間とし, $\{p_i\}_{i=1}^N$ を δ-離散集合とする. $p\in X\setminus S_X$ を取ると $K_p=\mathbf{R}^{n'}$ であるので u_i を p_i の $\operatorname{Exp}_p:\tilde{W}_p\to X$ による引き戻しの一つとすると, $u_i\in\overline{B(0,\overline{d};\mathbf{R}^{n'})}$ である. また, κ, $\overline{d}$ にしかよらない L が存在して $|u_i-u_j|>L\delta$. したがって $N\le m(n',0,\overline{d};L\delta)$ がわかる. あとの議論は補題3.6の証明と同じ.

5.2. **微分構造.** まず距離関数の一回微分を調べよう.

命題 5.5 (第一変分公式). p, $x\in X$ と xy に対して

$$|py|=|px|-|xy|\cos\min_{px}\angle pxy+o(|xy|)$$

Proof. $\varepsilon>0$ とする. 定理4.8より Σ_p はコンパクトなので極大 ε-離散集合 $\{v_{xx_i}\}_{i=1}^m$ が存在する. 命題2.3 (4) より $s\in[0,|xx_i|]$ に対して $x_i(s)\in xx_i$ を $|xx_i(s)|=s$ なる点とすると

$$\lim_{s\to 0}\tilde{\angle} pxx_i(s)=\min_{px}\angle pxx_i,$$

したがってある $s_\varepsilon>0$ が存在して $0<s<s_\varepsilon$ ならば

$$|\tilde{\angle} pxx_i(s)-\min_{px}\angle pxx_i|<\varepsilon$$

が任意の $i=1,\dots,m$ に対して成り立つ. 任意の $y\in B(x,s_\varepsilon)$ に対して $\angle yxx_i<\varepsilon$ なる i が存在するので, $y'\in xx_i$ を $|xy'|=|xy|$ とすると, Toponogov の凸性 II より $|yy'|<\varepsilon\sinh|xy|$, よって

$$|\tilde{\angle} pxy-\tilde{\angle} pxy'|<\operatorname{const}\varepsilon,$$
$$|\min_{px}\angle pxx_i-\min_{px}\angle pxy|<\varepsilon,$$

ただし const は定数を表す. 以上の式から

$$|\min_{px}\angle pxy-\tilde{\angle} pxy|<\operatorname{const}\varepsilon.$$

$H^2(-1)$ での計算から

$$\begin{aligned}|py|-|px|&=-|xy|\cos\tilde{\angle} pxy+O(|xy|^2)\\&=-|xy|\cos\min_{px}\angle pxy+o(|xy|).\end{aligned}$$

□

X を n 次元 Alexandrov 空間とし，$p \in X$ に対して $V_p = \{x \in X \mid px$ が一意的 $\}$ とすると，$X \setminus V_p \subset \mathrm{Cut}_p$ なので $X \setminus V_p$ は測度 0 である．$p_1, \dots, p_n \in X$ と開集合 U_ψ に対して $\psi : U_\psi \to \mathbf{R}^n$ を

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} d(p_1, x) \\ \vdots \\ d(p_n, x) \end{pmatrix}$$

により定義する．$V_\phi = \bigcap_{i=1}^n V_{p_i} \cap U_\psi \setminus S_X$ と置き，$g_\psi : V_\psi \to \mathrm{Sym}(n)$ を

$$g_\psi(x) = (\cos \angle p_i x p_j)$$

で定義する，ただし，$\mathrm{Sym}(n)$ は $n \times n$ の実対称行列の集合を表す．g_ψ が V_ψ 上正定値のとき ψ を自然な局所座標ということにする．

補題 5.6. $g_\psi : V_\psi \to \mathrm{Sym}(n)$ は連続である．

Proof. $x \in V_\psi$ とすると任意の $i = 1, \dots, n, \varepsilon > 0$ に対してある $p_{-i} \neq x$ があって $\tilde{\angle} p_i x p_{-i} > \pi - \varepsilon$ となる．$x_l \to x$ $(l \to \infty)$ とするならば命題 2.3 より

$$\liminf_{l \to \infty} \angle p_i x_l p_j \geq \angle p_i x p_j,$$
$$\liminf_{l \to \infty} \angle p_{-i} x_l p_j \geq \angle p_{-i} x p_j.$$

これと任意の ε に対して十分大きな l を取ると

$$\angle p_i x_l p_j + \angle p_j x_l p_{-i} \leq \pi + \varepsilon$$

これらから連続性がわかる． □

$x \in V_\psi$ に対して $\mathbf{R}^n$ 上の計量 $\langle , \rangle_{\psi(x)}$ を $u, v \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\langle u, v \rangle_{\psi(x)} = {}^t u g_\psi(x)^{-1} v$$

とし，$I_{\psi(x)} : K_x \to \mathbf{R}^n$ を $I_{\psi(x)}(u) = (\cos \angle(u, v_{xp_i}))$ と置く．

補題 5.7. (1) $I_{\psi(x)}$ は等長写像．

(2) $x \in V_\psi$, $y \in U_\psi$ に対して $\mathbf{h} = (\langle v_{xy}, v_{xp_i} \rangle_{\psi(x)})$ とすると

$$\psi(y) - \psi(x) = -|xy|\mathbf{h} + o(|xy|).$$

(3) $z \in V_\psi$, $x, y \in U_\psi$ に対して

$$|\psi(y) - \psi(x)|_{\psi(z)} = (1 + \varepsilon_z(|xz|, |yz|))|xy|,$$

ただし，$\varepsilon_z(|xz|, |yz|)$ は z に依存して決まる $|xz|, |yz| \to 0$ で 0 に収束する関数．

(4) 任意の $x \in X \setminus S_X$ に対して $x \in V_\psi$ をみたす双 *Lipshitz* な自然な局所座標系 $\psi : U_\psi \to \mathbf{R}^n$ が存在する．

Proof. (1) 任意の $u \in K_x$ を $u = \sum \xi_i v_{xp_i}$ と表すと,

$$\langle u, v_{xp_j} \rangle_{\psi(x)} = \sum \xi_i \langle v_{xp_i}, v_{xp_j} \rangle_{\psi(x)}$$

よって, $\xi = {}^t(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ と置くと $I_{\psi(x)}(u) = g_\psi(x)\xi$ なので

$$|u|^2 = {}^t\xi g_\psi(x)\xi = {}^tI_{\psi(x)}(u) g_\psi(x)^{-1} I_{\psi(x)}(u) = |I_{\psi(x)}(u)|^2_{\psi(x)}.$$

(2) これは命題 5.5 の言い換え.

(3) $z \in V_\psi$ とすると $z \notin \tilde{S}_{p_i}$ であるので任意の $\varepsilon > 0$ に対して p_i' が存在して $\tilde{\angle} p_i z p_i' > \pi - \varepsilon$ となる. xy 上の点 $y(t)$ に対して Toponogov の凸性を使って

$$|\angle p_i y(t) y - \angle p_i x y| < \mathrm{const}\, \varepsilon$$

が成り立つことを示す. あとは xy のコンパクト性から分割で距離の評価を行い足し合わせれば良い.

(4) $x \in X \setminus S_X$ とすると $K_x = \mathbf{R}^n$ で $X \setminus V_x$ は測度 0 なので $p_1, \ldots, p_n \in V_x$ を, xp_i は一意的に定まり $(\cos \angle p_i x p_j)$ は正定値となるように取れる. (3) より x の近傍 U_ψ を十分小さく取れば良い. □

X は多様体でないので微分構造を問題にするには, まずその概念を正確に定式化する必要がある. X を位相空間とし $Y \subset X$ とする. $\Phi = \{(U_\varphi, V_\varphi, \varphi)\}$ が $Y \subset X$ の $D^\dagger$ 座標系であるとは

(1) $V_\varphi \subset U_\varphi$ で U_φ は開集合, $\{V_\varphi\}$ は Y の被覆.

(2) $\varphi : U_\varphi \to \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合への同相写像.

(3) $U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$ ならば $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \to \psi(U_\varphi \cap U_\psi)$ は $\varphi(V_\varphi \cap V_\psi \cap Y)$ で $D^\dagger$ 級写像.

をみたすことである. 次にこの場合の Riemann 構造を定義する. $\{g_\varphi : V_\varphi \cap Y \to \mathrm{Sym}(n) \mid \varphi \in \Phi,\ g_\varphi(x)$ は正定値 $\}$ が $Y \subset X$ の $D^\dagger$ 座標系 Φ に附随した $D^{\dagger-1}$ Riemann 構造とは

(1) $g_\varphi \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(V_\varphi \cap Y)$ で $D^\dagger$ 級.

(2) $x \in V_\varphi \cap V_\psi$ ならば

$$g_\psi(x) = {}^t d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} g_\varphi(x)\, d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}.$$

をみたすことである.

これまでの結果をまとめ, 更に距離関数を適当に平均を取ることで次が分かる.

定理 5.8. *$X \setminus S_X \subset X$ には C^1 微分構造とそれに附随した C^0 Riemann 構造が存在し, この Riemann 構造から導かれた $X \setminus S_X$ 上の距離はもとの距離と一致する. 更に $X \setminus X_0$ が測度 0 の集合 $X_0 \subset X$ が存在して $X_0 \subset X$ に制限すると $C^{1,0.5}$ 微分構造と $C^{0.5}$ Riemann 構造となる.*

6. 関連した話題

これまでのところでは, Alexandrov 空間の基本的な性質しか解説していないので興味のわいた方は [4], [10], [20] 等に直接あたって頂きたい. また [23] も参考になるだろう. ここではこれからの展望について

簡単にコメントしたい．まず，ここで解説した結果の発展として次の結果がある．

定理 6.1 (Perelman の位相安定性定理 [21])．曲率 $\geq \kappa$ の n 次元コンパクト *Alexandrov* 空間 X に対して，ある $\varepsilon = \varepsilon(X) > 0$ が存在して曲率 $\geq \kappa$ の n 次元コンパクト *Alexandrov* 空間 Y が $d_H(X, Y) < \varepsilon$ をみたせば Y は X に同相である．

これについての解説は山口氏によってなされている．

微分構造については，一回の微分構造だけでなく二回微分構造と Jacobi 場についても研究されている（[18]）．また桑江-町頭-塩谷 ([16]) により Alexandrov 空間上の解析の研究が行われた，これはもっと一般の距離空間上の解析の研究につながるもので，塩谷氏により詳しい解説がなされている．この論説では曲率が下から押さえられた空間を問題にしたのだが，上から曲率の押さえられた空間も同様に定義され，これについての研究も行われている．

参考文献

[1] A. D. Alexandrov. A theorem on triangles in a metric space and some applicaions of it. *Tr. Mat.Inst. Stelkova*, 38:3–23, 1951.

[2] A. D. Alexandrov, V. N. Berestovskii, and I. G. Nikolaev. Generalized Riemannian spaces. *Uspekhi Mat. Nauk*, 41:1–54, 1986.

[3] V. N. Berestovskii and I. G. Nikolaev. Multidimensional generalized Riemannian spaces. In Y.G.Reshtnyak, editor, *Geometry IV*, pages 165–243. Springer, 1993.

[4] Y. Burago, M. Gromov, and G. Perelman. A. D. Alexandrov's spaces with curvatures bounded below. *Uspekhi Mat.Nauk*, 47:3–51, 1992.

[5] J. Cheeger and D. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry.* North–Holland, 1975.

[6] J. Cheeger, K. Fukaya, and M. Gromov. Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 5:327–372, 1992.

[7] K. Fukaya and T. Yamaguchi. The fundamental groups of almost nonnegatively curved manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 136:253–333, 1992.

[8] M. Gromov. Almost flat manifolds. *J. Differential Geom.*, 13(2):231–241, 1978.

[9] M. Gromov. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* CEDIC, Paris, 1981. Edited by J. Lafontaine and P. Pansu.

[10] M. Gromov. *Metric strucures for Riemannian and Non-Riemannian spaces.* Birkhäuser, 1998.

[11] K. Grove and P. Petersen. On the excess of metric spaces and manifolds. *preprint.*

[12] K. Grove, P. Petersen, and J. Y. Wu. Geometric finiteness theorems via controlled topology. *Invent. Math.*, 99(1):205–213, 1990.

[13] H. Hopf. *Differential geometry in the large.* Lecture notes in Math. Springer, 1983.

[14] H. Karcher. Riemannian comparison constructions. In *Global differential geometry*, pages 170–222. Math. Assoc. America, 1989.

[15] 加須栄篤. リーマン幾何学. 培風館, 2001.

[16] K. Kuwae, Y. Machigasira, and T. Shioya. Sobolev space, Laplacian, and heat kernel on Alexandrov spaces. *Math. Z.*, 238:269–316, 2001.

[17] J. Milnor. *Morse theory.* Ann. Math. Stud. Princeton Univ. Press, 1963.

[18] Y. Otsu. Almost everywhere existence of second differntiable structure of Alexandrov spaces. *preprint.*

[19] Y. Otsu, K. Shiohama, and T. Yamaguchi. A new version of differentiable sphere theorem. *Invent. Math.*, 98(2):219–228, 1989.

[20] Y. Otsu and T. Shioya. The Riemannian structure of Alexandrov spaces. *J. Differential Geom.*, 39:629–658, 1994.

[21] G. Perelman. A. D. Alexandrov's spaces with curvatures bounded below II. *preprint.*

[22] 酒井隆. リーマン幾何学. 裳華房, 1992.

[23] K. Shiohama. An introduction to the geometry of Alexandrov spaces. Seoul, 1993.

[24] V. A. Toponogov. Riemann spaces with curvature bounded below. *Uspehi Mat. Nauk*, 14(1 (85)):87–130, 1959.

[25] A. Wald. Begründung einer koordinatenlosen Differentialgeometrie der Flächen. *Ergebnisse eines mathematishen Kolloquiums*, 7:24–46, 1935.

[26] T. Yamaguchi. A convergence theorem in the geometry of Alexandrov spaces. In *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992)*, pages 601–642. Soc. Math. France, 1996.

ALEXANDROV 空間の位相的安定性

山口孝男（筑波大学大学院数理物質科学研究科）

1. はじめに

本稿では, Perelman([10], [11]) による位相的安定性定理について解説する.

[5] において、Gromov はコンパクト距離空間全体の等長類の集合 $\mathcal{C}$ に Gromov-Hausdorff 距離, d_{GH}, を導入し, Riemann 幾何学に革命をもたらした. n 次元閉 Riemann 多様体 M^n で、断面曲率 ≥ -1, 直径 $\leq D$ を満たすものの等長類全体の集合を $\mathcal{M}(n,D)$ と表す. Gromov のプレコンパクト性定理により次が成り立つ.

定理 1.1 ([5]). $\mathcal{M}(n,D)$ は $(\mathcal{C}, d_{GH})$ の相対コンパクトな部分集合である.

即ち, $\mathcal{M}(n,D)$ 内の任意の無限列 M_i^n のある部分列は, Gromov-Hausdorff 距離に関してある $X \in \mathcal{C}$ に収束する.

定理 1.1 から, $\mathcal{M}(n,D)$ を理解する為にその閉包 $\overline{\mathcal{M}(n,D} \subset \mathcal{C}$ を理解しようと試みるのは極めて自然といえよう. それ故 $\mathcal{M}(n,D)$ 内の無限列 M_i^n がコンパクト距離空間 $X \in \overline{\mathcal{M}(n,D)}$ に Gromov-Hausdorff 距離に関して収束すると仮定する. ここで、X は 次元が n 以下, 曲率が -1 以上の Alexandrov 空間の構造をもつことが分かる.

$\mathcal{M}(n,D)$ を理解する為の最も本質的な問題は次である. 以下、$\mathcal{M}(n,D)$ 内の無限列 M_i^n がコンパクト Alexandrov 空間 $X \in \overline{\mathcal{M}(n,D)}$ に Gromov-Hausdorff 距離に関して収束すると仮定し、i は十分大きいとする.

問題 1.2. M_i^n の位相を X の特異点などの幾何学を用いて記述せよ.

換言すれば, X の Gromov-Hausdorff 距離に関するある近傍を定め, その近傍に属する $\mathcal{M}(n,D)$ の元の位相を X の幾何学を用いて記述せよ, という問題である. プレコンパクト性定理 1.1 から, この様な近傍の有限個によって $\overline{\mathcal{M}(n,D)}$ は覆われるので, この意味で $\mathcal{M}(n,D)$ 内の多様体の位相が理解されることになる.

問題 1.2 に関して, X の次元が両極端である場合に次の結果が知られている.

定理 1.3 ([4]). X が 0 次元, 即ち X が 1 点である場合、M_i^n の基本群は概巾零, 即ち指数有限の巾零部分群を含む.

定理 1.4 (安定性定理 ([10])). X が n 次元である場合、M_i^n は X に同相である.

X の次元が $n-1$ 以下である場合に、M_i^n は X に崩壊するという．安定性定理 1.5 の主張するところは M_i^n が崩壊しなければ、その位相は極限を通じて変化しない、ということである．

では崩壊が起こる場合はどうであろうか？ 現時点では一般次元においては、$1 \leq \dim X \leq n-1$ の場合の崩壊の一般的な記述は知られていない．最近の研究 ([13], [15]) によって, 3, 4 次元 Riemann 多様体の崩壊のほぼ完全な記述が得られている．それらの議論では, X の特異点に近い M_i^n の小さな (しかし固定された) 半径の距離球の位相を調べる為に, M_i^n の Riemann 計量を拡大させて新しい極限空間を考察する手法が有力である．このとき, この新しい極限空間は X の次元より大きい次元をもち, 元の距離球の位相を調べるには, この新しい収束を調べればよいことになる．この意味で崩壊の研究をより次元の大きい空間への収束・崩壊の研究に帰着させることが出来る．特にこの新しい収束の状況で, もし崩壊が起こらなければ, 位相的安定性定理が効力を発揮することになる．また新しい極限空間は非負曲率をもつ完備 Alexandrov 空間となりその性質を解析する為に, [10], [11] で展開された Alexandrov 空間上の距離関数のモース理論が本質的重要性をもってくる．これらの意味で, 安定性定理は今後の崩壊論を展開させる上で, 重要性をもち続けるものと思われる．これが本稿で位相的安定性定理を取り上げる主な理由である．

実際には, 安定性定理は Riemann 多様体の極限だけではなく, Alexandrov 空間の極限に対しても同様に成立する:

定理 1.5 (安定性定理 ([10]))．曲率が下に有界な n 次元コンパクト *Alexandrov* 空間 X^n と定数 $\kappa \in \mathbf{R}$ に対して, $\epsilon = \epsilon(X^n, \kappa)$ が存在して, 曲率が κ 以上の n 次元コンパクト *Alexandrov* 空間 Y^n が, $d_{GH}(X^n, Y^n) < \epsilon$ を満たすならば, X^n と Y^n は同相になる．

この結果の証明の過程で, Alexandrov 空間に対する 次の 2 つの重要な構造定理が得られる．

定理 1.6 ([10])．X の任意の点 p の十分小さい距離球 $B(p, \epsilon)$ は p における *tangent cone* $K(\Sigma_p)$ に同相である．

特に、X は局所可縮である．

定理 1.7 ([10],[11])．X は位相的 *stratification*

$$X = X^n \supset X^{n-1} \supset X^{n-2} \supset \cdots \supset X^0,$$

で, 各 *strata* $X^i - X^{i-1}$ が (もし空でなければ) i 次元位相多様体であるものが存在する．

曲率が κ 以上, 直径が D 以下で体積が下から一様に正の定数 v_0 で押えられた n 次元 Alexandrov 空間の無限列は崩壊しないので ([1], [12], [17]), プレコンパクト性定理 (これは Alexandrov 空間に対しても成立する) と安定性定理 1.5 から次の有限性定理が得られる (Riemann 多様体に対する有限性定理は [7] によって得られていた)．

系 1.8 (有限性定理). 与えられた定数 κ, $D>0$, $v_0>0$ に対して，曲率 $\geq \kappa$, 直径 $\leq D$, 体積 $\geq v_0$ を満たす n 次元 *Alexandrov* 空間の位相型の集合は有限である．

以下，本稿では，[10]，[11] に従って定理 1.5, 1.6,1.7 について解説する．

議論は大きく幾何学的な部分と位相的な張り合わせの部分に分かれる．先ず初めの幾何学的な部分において, [11] に従って，Alexandrov 空間上の regular 写像の概念を定め，regular 写像に対するモース理論 (臨界点理論) を展開して，regular point の回りの "正則近傍" を構成する．これより Alexandrov 空間が局所可縮であることと, 位相的 stratification をもつことが直ちに従う．

定理 1.5 においては，大域的な同相写像を構成する必要がある．そのために位相的な議論において，上の正則近傍を用いて先ず局所同相写像を構成する．最後に stratification をもつ空間の同相写像の変形理論 ([14]) を適用することで局所同相写像のはり合わせを実行して大域的な同相写像を構成する．但し，正則近傍を用いた局所同相写像の構成では，[11] の意味の regular 写像の概念だけでは不十分であり，[10] で与えられたより一般的な広い意味の regular 写像の概念が必要と思われる箇所がある．従ってこの部分の完全な証明を与えるためには，[10] における非常にテクニカルな議論を展開する必要がある．しかし，本稿では，この部分において，[10] の意味の regular 写像に対する結果 ([10]) を引用するにとどめた．これにより読者がまず議論の本筋を把握した後，必要に応じ直接文献 [10] に挑まれることを望みたい．

2. 準備

Gromov-Hausdorff 収束と Alexandrov 空間に関する基礎的な事柄について準備する．詳しくは大津氏の解説 ([9]) を参考にして頂きたい．基本的な文献は [5], [6],[1] である．

Gromov-Hausdorff 収束

先ず, 距離,d_{GH}, の定義を述べておこう．距離空間 Z のコンパクト部分集合 A, B の古典的 Hausdorff 距離 $d_H^Z(A,B)$ が、A の ϵ-近傍が B を含み、そして B の ϵ-近傍が A を含むような $\epsilon>0$ の下限として定まる．一般のコンパクト距離空間 $X,Y\in\mathcal{C}$ の間の Gromov-Hausdorff 距離は

$$d_{GH}(X,Y)=\inf_{Z,f,g} d_H^Z(f(X),g(Y)),$$

と定義される．ここで下限は全ての距離空間 Z と等長的埋め込み $f: X\to Z$, $g:Y\to Z$ に渡る．収束に関してはこの正統的な定義は次のようにも言い換えられる：必ずしも連続とは限らない写像 $\varphi: X\to Y$ が ϵ-近似であるとは、次の 2 つの条件が満たされる場合である．

(1) $|d(\varphi(x_1),\varphi(x_2))-d(x_1,x_2)|<\epsilon$ が X の任意の 2 点 x_1, x_2 に対して成り立つ．

(2) $\varphi(X)$ の ϵ-近傍は Y に一致する．

このとき、無限列 $X_i \in \mathcal{C}$ と $Y \in \mathcal{C}$ に対して、$\lim_{i\to\infty} d_{GH}(X_i, Y) = 0$ が成立するためには、0 に収束するある正数列 ϵ_i に対して、ϵ_i-近似 $X_i \to Y$ が存在することが必要十分である.

Alexandrov 空間

X を曲率が κ 以上の 完備な Alexandrov 空間とする. X の3点 x, y, z に対して, それらを結ぶ3本の最短測地線 (一意的とは限らない) xy, yz, zx は, X 内の測地三角形 $\triangle xyz$ を定める. また, $\triangle xyz$ の比較三角形 $\triangle \tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ を定曲率 κ の完備単連結な曲面 (κ-平面) 上に取り, $\tilde{\triangle} xyz$ と略記する. $\kappa > 0$ のとき, $\triangle xyz$ の周の長さ $< 2\pi/\sqrt{\kappa}$ と仮定する. このとき, $\tilde{\triangle} xyz$ は合同を除いて一意に定まる. $\triangle xyz$ の y における角を $\angle xyz$ で表し, $\tilde{\triangle} xyz$ の $\tilde{y}$ における角を $\tilde{\angle} xyz$ で表す.

定理 2.1 (比較定理 ([1])). (1) 自然な対応 $\triangle xyz \to \tilde{\triangle} xyz$ は縮小写像になる;

(2) $\tilde{\angle} xyz \le \angle xyz$.

$p \in X$ から出る最短測地線の方向のみ考えた集合を $\hat{\Sigma}_p$ で表す. $\hat{\Sigma}_p$ は角度により距離空間になる. 一般に $\hat{\Sigma}_p$ は完備とは限らないのでこれを完備化した空間を Σ_p と表し p における方向の空間という.

定理 2.2 ([1]). X が n 次元のとき, 任意の p に対して

(1) Σ_p は曲率が *1* 以上の $n-1$ 次元コンパクト *Alexandrov* 空間になる.

(2) $\epsilon \to 0$ のとき, $(\frac{1}{\epsilon}X, p)$ は点付き *Gromov-Hausdorff* 収束に関して Σ_p 上の *Euclidean cone* $(K(\Sigma_p), o_p)$, *tangent cone,* に収束する. ここで, o_p は $K(\Sigma_p)$ の頂点を表す.

補題 2.3 (角度の下半連続性). $x_i \to x$, $y_i \to y$, $z_i \to z$ のとき,

$$\liminf \angle x_i y_i z_i \ge \angle xyz.$$

コンパクト集合 $A \subset X$ に対して, p から A への最短測地線全体を考え, それらの p における方向の集合を $A'_p \subset \Sigma_p$ と表す. A_p は Σ_p のコンパクト集合である.

二つのコンパクト集合 $A, B \subset X$ に対して, $\angle ApB := \angle(A'_p, B'_p)$ とおく. また, κ-平面上に3辺の長さが $d(p, A)$, $d(p, B)$, $d(A, B)$ の測地三角形を描き, p に対応する頂点における角度を $\tilde{\angle} ApB$ と表す. このとき,

$$\tilde{\angle} ApB \le \angle ApB,$$

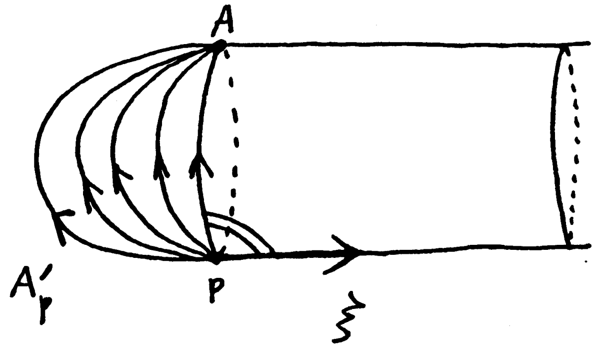
が成り立つ (これは A, B が一点である場合の比較定理 2.1 から容易に従う).

X が曲率 κ 以上の Alexandrov 空間であるとき, $Curv(X) \ge \kappa$ と略記することがある.

命題 2.4 (距離関数に対する第一変分公式 ([1])). コンパクト集合 A からの距離関数 $f(\cdot) := d(A, \cdot)$ は, $X - A$ 上で方向微分可能であり, 任意の点 $p \in X - A$ と $\xi \in \Sigma_p$ に対して,

$$f'_p(\xi) = -\cos \angle(A'_p, \xi),$$

が成り立つ.



命題 2.5 (体積比較 (Bishop-Gromov-型)cf.[17]). X を n 次元とし, $\mathcal{H}^n$ は ハウスドルフ n-測度を表すとする. このとき任意の $p \in X$, $0 < r < R$ に対して

$$\frac{\mathcal{H}^n(B(p,R))}{\mathcal{H}^n(B(p,r))} \leq \frac{v^n_\kappa(R)}{v^n_\kappa(r)},$$

が成り立つ. ここで $v^n_\kappa(r)$ は定曲率 κ の完備単連結な n 次元空間における半径 r の距離球の体積を表す.

3. ϵ-開写像

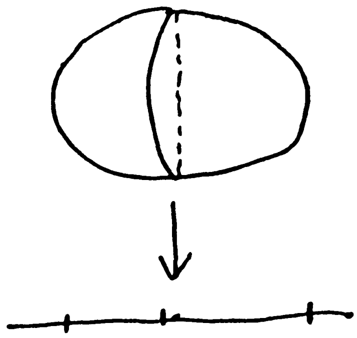
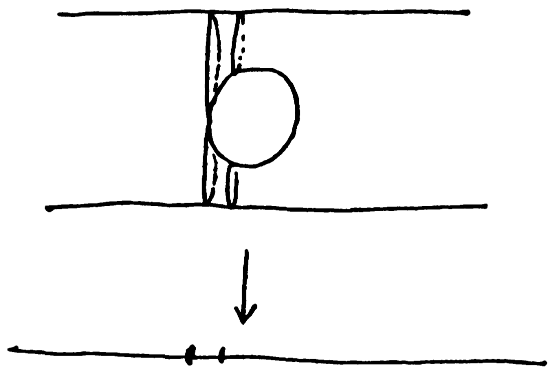
我々の主な考察の対象は, 4 で定義される regular な admissible 写像である. この節ではそのような写像を調べる際に有効な ϵ-開写像の概念について触れておく.

以後, X は 曲率が下に有界な Alexandrov 空間とする. $U \subset X^n$ を開集合, $f : U \to \mathbf{R}^k$ を連続写像とする. $\mathbf{R}^k$ のノルム $||\ \ ||$ は後の都合上, $||v|| = \max\{v_i \,|\, 1 \leq i \leq k\}$ で与えられるものとする.

定義 3.1. f が ϵ-開写像であるとは, 任意の $x \in U$ と $v \in \mathbf{R}^k$ で $B(x, \|f(x) - v\|/\epsilon) \subset U$ を満たすものに対して, 次を満たす $y \in U$ が存在するときをいう:

(1) $f(y) = v;$
(2) $\epsilon\, d(x,y) \leq ||f(x) - f(y)||.$

ϵ-開写像は開写像である. すなわち開集合を開集合に写す. C^∞-カテゴリーでの submersion は, 局所的に見れば ϵ-開写像である. また, 次の曲面達の射影を考えると臨界点の回りで ϵ-開写像の条件が崩れる. これらから ϵ-開写像の概念は写像の regularity と関係があることが推察される.

ϵ-開写像の判定条件.

$f : U \to \mathbf{R}^k$ を方向微分可能とする (例えば各成分関数 f_i がコンパクト集合からの距離関数であるような関数).

補題 3.2. 次の条件のいずれかが成り立てば, f は ϵ-開写像である.

(1) 任意の $x \in U$ と $v \in \mathbf{R}^k$ に対して, $\xi \in \Sigma_x$ で, $\|f(\cdot) - v\|'_x(\xi) < -\epsilon$, を満たすものが存在する;

(2) 任意の $x \in U$ に対して $\xi_i^+, \xi_i^- \in \Sigma_x$, $1 \le i \le k$, で次を満たすものが存在する:

$$f_i'(\xi_i^+) > \epsilon, \qquad f_i'(\xi_i^-) < -\epsilon, \qquad |f_i'(\xi_j^\pm)| = 0 \quad (i \ne j).$$

証明. (1). $B(x, \|f(x) - v\|/\epsilon) \subset U$ とする。仮定からある $\xi_1 \in \Sigma_x$ で, $\|f(\cdot) - v\|'_x(\xi_1) < -\epsilon$ を満たすものが存在する。十分小さい $t_1 > 0$ をとり、$x_1 := \exp(t_1 \xi_1)$ とおけば、

$$\|f(x_1) - v\| < \|f(x) - v\| - \epsilon d(x, x_1),$$

が成り立つ。そこで、この議論をどんどん続けていけば $f(x_1)$ は v に限りなく近付いていくことになり、結局, 定義 3.1 の条件を満たす y が見つかる。

(2). 任意の $p \in U$ と $v \in \mathbf{R}^k$ に対して $I := \{i \,|\, |f_i(p) - v_i| = \|f(p) - v\|\}$, $I_+ := \{i \in I \,|\, f_i(p) > v_i\}$, $I_- := \{i \in I \,|\, f_i(p) < v_i\}$. とおく。$\xi \in \Sigma'_p$ に対して、

$$\varphi_\xi(t) := \|f(\exp_p t\xi) - v\| := \max\{|f_i(\exp_p t\xi) - v_i| \,|\, i \in I\}$$

の微分を考える.

先ず、$I_- \ne \phi$ のとき、$\xi = \xi_j^+$, $(j \in I_-)$, 方向の変化が一番大きいのは f_j なので、$\varphi'_\xi(0) = -f_j'(\xi) < -\epsilon$. 次に、$I_+ \ne \phi$ のとき、$\xi := \xi_j^-$, $(j \in I_+)$, 方向の変化が一番小さいのは f_j なので、$\varphi'_\xi(0) = -f_j'(\xi_j^-) < -\epsilon$. よって (1) から従う。 □

4. Admissible 写像とその regularity

$U \subset X^n$ を開集合とする.

定義 4.1. $f : U \to \mathbf{R}$ が U において *admissible* であるとは, f が次の形に書かれる場合をいう:

$$f(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha \phi_\alpha(d(A_\alpha, x)), \tag{4.1}$$

ここで, A_α は X^n のコンパクト集合, $a_\alpha \geq 0$, $\sum a_\alpha \leq 1$, ϕ_α は $0 \leq \phi'_\alpha \leq 1$ を満たす C^∞-級関数である.

上の admissible 関数 f の $\xi \in \Sigma_p$ 方向の方向微分 $f'_p(\xi)$ は次で与えられる.

$$f'_p(\xi) = -\sum_{\alpha} a_\alpha \phi'(d(A_\alpha, p)) \cos \angle((A_\alpha)'_p, \xi). \tag{4.2}$$

定義 4.2. $g : U \to \mathbf{R}^k$ が *admissible* であるとは, $g = G \circ f$ と書けて, $f = (f_1, \ldots, f_k)$ の各成分関数 f_i が *admissible* で, G は $\mathbf{R}^k$ の開集合間の *bi-Lipschitz* 同相写像である場合をいう.

以下, admissible 写像 $g = G \circ f$ の regularity を定めるが, G が bi-Lipschitz 同相写像なので, $f = (f_1, \ldots, f_k)$ の regularity によって g の regularity を定めればよい. C^∞-カテゴリーでは, f の regularity は、$\{\nabla f_1, \ldots, \nabla f_k\}$ が一次独立である場合であるが、この条件の Alexandrov 空間版を考察しよう. Alexandrov 空間の場合, 求めるべき条件は, $(f_1)'_p, \ldots, (f_k)'_p$ の言葉で述べられるべきである. そのため, 先ず, 内積 $\langle (f_i)'_p, (f_j)'_p \rangle$ を定め, この内積に関する条件によって f の p における regularity を定義する:

定義 4.3. 二つの *admissible* 関数 f, g に対して, 簡単のため

$$f'_p = -\sum_{\alpha} a_\alpha \cos\, d(\Gamma_\alpha, x), \qquad g'_p = -\sum_{\beta} b_\alpha \cos\, d(\Lambda_\beta, x),$$

とおく. Γ_α, Λ_β は Σ_p のコンパクト部分集合である. このとき, "内積" $\langle f'_p, g'_p \rangle$ を

$$\langle f'_p, g'_p \rangle = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta \cos d(\Gamma_\alpha, \Lambda_\beta). \tag{4.3}$$

により定める.

C^∞-カテゴリーの generic な場合を想定し, $-(\nabla f)_p = \sum a_\alpha \Gamma_\alpha$, $-(\nabla g)_p = \sum b_\beta \Lambda_\beta$ は各々 p における接ベクトルとすると,

$$\langle f'_p, g'_p \rangle = \langle \nabla f, \nabla g \rangle_{T_p X},$$

が成り立つ.

例 4.4. 距離関数 $f = d(p, \cdot)$, $g = d(q, \cdot)$ と $x \in X - \{p, q\}$ に対して, $\xi = p'_x$, $\eta = q'_x$ とおく. 第一変分公式から

$$f'_x(\eta) > 0 \quad \text{iff} \quad \langle f'_x, g'_x \rangle < 0,$$

が成り立つ. またこれは一般の *admissible* 関数 f に対しても成立する.

観察 4.5. $\mathbf{R}^n$ のベクトル $v_1, \ldots, v_\ell, v_{\ell+1}$ が $\langle v_i, v_j\rangle < 0$, $1 \leq i \neq j \leq \ell+1$, を満たすならば $\ell \leq n$ であり, $v_1, \ldots, v_\ell$ は一次独立である.

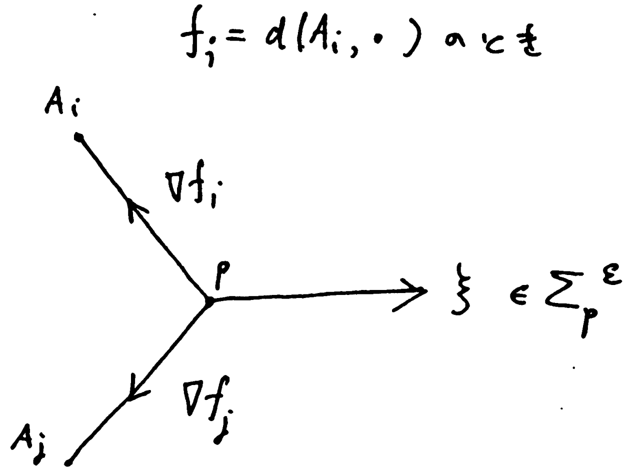
この観察に鑑みて次の定義を与えよう.

定義 4.6. $g = G \circ f$ を定義 *4.2* における *admissible* な写像とする. f が $p \in U$ において ϵ-**regular** であるとは,

(1) 任意の $1 \leq i \neq j \leq k$ に対して, $\langle (f_i)'_p, (f_j)'_p\rangle < -\epsilon$;

(2) $\Sigma_p^\epsilon := \{\xi \in \Sigma_p \,|\, (f_i)'_p(\xi) > \epsilon,\ 1 \leq i \leq k\}$ は空でない.

このとき、g も $p \in U$ において *ϵ-regular* であるという。U の各点で *ϵ-regular* な写像を U 上 *ϵ-regular* といい, ある $\epsilon > 0$ に対して *ϵ-regular* な写像を単に *regular* という。



上の定義により, X の一点 a からの距離関数 $f = d(a,\cdot)$ が p において regular であるのは, ある $\xi \in \Sigma_p$ に対して $f'_p(\xi) > 0$ が成り立つ場合であり, Riemann 幾何学における定義 (cf.[8]) と一致する.

例 4.7. X の任意の点 p と 任意の $0 < \epsilon < 1$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $f(x) = d(p, x)$ は $B(p,\delta) - \{p\}$ 上 $1-\epsilon$*-regular* である.

例 4.8. $p \in X$ が, (k,δ)*-strained point,* $\delta \ll 1/k$, $(a_i, b_i)_{1\leq i\leq k}$ を p における (k,δ)*-starainer* とする. このとき, $f(x) = (d(a_1, x), \ldots, d(a_k, x))$ は定義 *4.6* の意味では *regular* とならない. しかし適当に $a_1, \ldots, a_k$ を $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_k$ に取り換えることによって, $\tilde{f}(x) = (d(\tilde{a}_1, x), \ldots, d(\tilde{a}_k, x))$ が *regular* になるようにすることが出来る.

以後、regular な写像の性質を調べる。bi-Lipschitz 写像で不変な性質のみを考察するので、$G = id$ として、admissible な写像 $f = (f_1, \ldots, f_k) : U \to \mathbf{R}^k$ の性質を調べる。

C^∞-カテゴリーでは, 定義 4.6 の条件 (1), (2) は $\{\nabla f_i\}_{1\leq i\leq k}$ が一次独立であることを意味するので, f は C^∞-submersion となる. これは一般に位相的カテゴリーにおいても成り立つ. すなわち次が成り立つ.

定理 4.9. *Regular* 写像 $f : U \to \mathbf{R}^k$ は 位相的 *submersion* になる.

次が 位相的submersion の定義である.

定義 4.10. 位相空間の間の全射連続写像 $\pi : E \to B$ が位相的 **submersion** であるとは，各点 $p \in E$ が π に対する局所積近傍をもつときと定義される．すなわち，ファイバー $\pi^{-1}(\pi(p))$ における p の近傍 U と，$\pi(p)$ の B における近傍 N と E における p の近傍の上への位相的埋め込み $\varphi : U \times N \to E$ で，$\pi \circ \varphi$ が射影 $U \times N \to N$ に一致するものが存在する場合をいう.

定理 4.9 は 6 で証明される．定理 4.9 を証明することが当面の大きな目標である．以下の議論において, 定理 4.9 を示すための準備として, regular 写像の基本的な性質を述べよう.

補題 4.11. *f が ϵ-regular である点の集合は U の開集合である.*

証明. 角度の下半連続性から従う.

補題 4.12. *ϵ-regualr 写像は ϵ-開写像である.*

命題 4.13. *$f : U \to \mathbf{R}^k$ を ϵ-regular とするとき、*

(1) $k \leq n$;

(2) $k = n$ のとき、f は 局所 *bi-Lipschitz* 写像である。

補題 3.2, 命題 4.13 の証明の為に, admissible 関数の方向微分を抽象化した議論が必要である. 次節でこれについて準備する.

5. Admissible 関数の方向微分の抽象化

Alexandrov 空間上で admissible 写像を考察するメリットは，方向微分が明確に書けること (4.2) と，以下で見るように方向微分が解析可能な良い性質をもっていることである.

regular 写像の性質, 補題 4.12, 命題 4.13, を示すために，admissible 関数の方向微分の方向微分を考察する帰納的な議論が有効である．そのため，形式的には，admissible 関数の方向微分の形を抽象化しておく必要がある．但し，この抽象化によって議論はすっきりするが，一方で直観的な意味が分かりにくくなる感も否めない．常に式 (4.2) に立ち返って欲しい.

Σ^{n-1} を曲率が 1 以上の $n-1$ 次元コンパクト Alexandrov 空間とする. (これまでの文脈では，$\Sigma^{n-1} = \Sigma_p$, $p \in X^n$ である.)

定義 5.1. 関数 $\varphi : \Sigma^{n-1} \to \mathbf{R}$ が 関数空間 $DER(\Sigma^{n-1})$ に属するとは，φ が有限和

$$\varphi(x) = -\sum_{\alpha} a_\alpha \cos d(\Gamma_\alpha, x),$$

と書けるときである．ここで，$a_\alpha \geq 0$, $\sum a_\alpha \leq 1$, Γ_α は Σ^{n-1} のコンパクト集合である.

$\varphi \in DER(\Sigma^{n-1})$ のとき，$|\varphi(x)| \leq 1$ であり，φ は Lipschitz 定数 ≤ 1 の Lipischitz 関数となる.

補題 5.2. 点 $z \in \Sigma^{n-1}$ が測地線 xy 上にあるとき，次式が成り立つ:

$$\sin d(x,y)\cdot\varphi(z) \geq \sin d(x,z)\cdot\varphi(y) + \sin d(y,z)\cdot\varphi(x). \tag{5.1}$$

証明. 単位球面 $S^2(1)$ 上に測地三角形 $\triangle ABC$ と辺 AB 上の点 D を $d(A,B) = d(x,y)$, $d(A,D) = d(x,z)$ を満たすようにとる．$\triangle ACD$ と $\triangle BCD$ に対する余弦法則から

$$\sin(d(A,D)+d(C,D)) = \sin d(A,D)\cos d(B,C)+\sin d(B,D)\cos d(A,C),$$

が成り立つ．この式と曲率条件 $Curv(\Sigma^{n-1}) \geq 1$ から結論が従う． □

φ は方向微分可能であり,

$$\varphi'_x(\xi) = -\sum_\alpha \sin d(\Gamma_\alpha, x)\cos\angle((\Gamma_\alpha)'_x, \xi), \quad \xi \in \Sigma_x(\Sigma^{n-1}),$$

が成り立つので，再び $\varphi'_x \in DER(\Sigma_x(\Sigma^{n-1}))$ が成り立つ．

定義 5.3. 二つの $DER(\Sigma^{n-1})$ の元,

$$\varphi(x) = -\sum_\alpha a_\alpha \cos\, d(\Gamma_\alpha, x), \qquad \psi(x) = -\sum_\beta b_\alpha \cos\, d(\Lambda_\beta, x),$$

に対して，その "内積" $\langle\varphi,\psi\rangle$ を *(4.3)* と同様に次で定める．

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta \cos d(\Gamma_\alpha, \Lambda_\beta).$$

また $\langle\ ,\ \rangle$ は positively bilinear である．すなわち,

(1) $\langle\lambda\varphi,\psi\rangle = \lambda\langle\varphi,\psi\rangle$, $\lambda \geq 0$ は定数;

(2) $\langle\varphi_1+\varphi_2,\psi\rangle = \langle\varphi_1,\psi\rangle + \langle\varphi_2,\psi\rangle$,

が成り立つ．

一点 $p \in \Sigma^{n-1}$ に対して，$\chi_p := -\cos d(p,\cdot)$ で定義される $\chi_p \in DER(\Sigma^{n-1})$ を特性関数ということにする．すると，明らかに $\langle\varphi,\chi_p\rangle = -\varphi(p)$ が成り立つ．この意味で，各特性関数との内積により $DER(\Sigma^{n-1})$ の元が決定される．

補題 5.4. $\langle\varphi'_p,\psi'_p\rangle \leq \langle\varphi,\psi\rangle - \varphi(p)\psi(p)$.

φ'_p も ψ'_p も再び DER に属するのでこの補題は帰納的な議論において有用である．

証明. φ, ψ を定義 5.3 の通りとする．このとき、

$$\begin{aligned}
\varphi'_p &= -\sum a_\alpha \sin d(\Gamma_\alpha,p)\cos\angle((\Gamma_\alpha)'_p,\ \cdot\ ),\\
\psi'_p &= -\sum b_\beta \sin d(\Lambda_\beta,p)\cos\angle((\Lambda_\beta)'_p,\ \cdot\ ),\\
\langle\varphi'_p,\psi'_p\rangle &= \sum a_\alpha b_\beta \sin d(\Gamma_\alpha,p)\sin d(\Lambda_\beta,p)\cos\angle((\Gamma_\alpha)'_p,(\Lambda_\beta)'_p),\\
\langle\varphi,\psi\rangle &= \sum a_\alpha b_\beta \cos d(\Gamma_\alpha,\Lambda_\beta),\\
\varphi(p)\psi(p) &= \sum a_\alpha b_\beta \cos d(\Gamma_\alpha,p)\cos d(\Lambda_\beta,p).
\end{aligned}$$

よって次を示せばよい。

$$\begin{aligned}\sin d(\Gamma_\alpha,p)\sin d(\Lambda_\beta,p)\cos\angle((\Gamma_\alpha)'_p,(\Lambda_\beta)'_p) \quad + \quad & \cos d(\Gamma_\alpha,p)\cos d(\Lambda_\beta,p)\\ & \leq \cos d(\Gamma_\alpha,\Lambda_\beta).\end{aligned}$$

これは曲率条件 $Curv(\Sigma^{n-1})\geq 1$ から従う. □

補題 5.5. 任意の $\varphi\in DER(\Sigma^{n-1})$ に対して, 点 $\hat{p}\in\Sigma^{n-1}$ と $0\leq\hat{a}\leq 1$ が存在して、$\hat{\varphi}=\hat{a}\chi_{\hat{p}}$ とおくとき、

$$\langle\varphi,\psi\rangle\geq\langle\hat{\varphi},\psi\rangle$$

が全ての $\psi\in DER(\Sigma^{n-1})$ に対して成立する。

特に, $\varphi(p)\leq\hat{\varphi}(p)$ が任意の $p\in\Sigma^{n-1}$ に対して成立する.

C^∞-カテゴリーでは, $\varphi=df$, $\nabla f=-\hat{a}\xi$ のとき、$\hat{\varphi}=\hat{a}\chi_\xi$ とおけば、$\varphi=\hat{\varphi}$ が成り立つ。一般の場合には, 補題 5.5 の不等式の意味での一種の φ の polarization が存在するわけである。

証明. $\varphi=-\sum_\alpha a_\alpha\cos\, d(\Gamma_\alpha,)$, $\psi(x)=-\sum_\beta b_\alpha\cos\, d(\Lambda_\beta,\cdot)$, とする。$\Gamma_\alpha$ の任意の点 p_α を選んで、$\bar{\varphi}=\sum_\alpha\chi_{p_\alpha}$ とおく。このとき、$\langle\varphi,\psi\rangle\geq\langle\bar{\varphi},\psi\rangle$ が成り立つので、$\langle\quad,\quad\rangle$ が positive-bilinear であることを合わせると、初めから $\varphi=a_1\chi_{p_1}+a_2\chi_{p_2}$ の場合を考えれば十分である。

Case (1). $p_1=p_2$.

$\hat{a}=a_1+a_2$, $\hat{p}=p_1$ とおけばよい。

Case (2). $d(p_1,p_2)=\pi$.

$a_1\geq a_2$ とする。$d(p_2,\Lambda_\beta)\leq\pi-d(p_1,\Lambda_\beta)$ より、$\langle\varphi,\psi\rangle\leq\sum_\beta(a_1-a_2)b_\beta\cos d(p_1,\Lambda_\beta)=\langle(a_1-a_2)\chi_{p_1},\psi\rangle$. 従って $\hat{a}:=a_1-a_2$, $\hat{p}:=p_1$ とおけばよい。

Case (3). $0<d(p_1,p_2)<\pi$.

点 $\hat{p}\in p_1p_2$ と $\hat{a}$ を次のように定める。

$$\frac{a_1}{\sin d(\hat{p},p_2)}=\frac{a_2}{\sin d(\hat{p},p_1)}=\frac{\hat{a}}{\sin d(p_1,p_2)}.$$

このとき、

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\sum_\beta\left(\frac{\sin d(\hat{p},p_2)}{\sin d(p_1,p_2)}\cos d(p_1,\Lambda_\beta)+\frac{\sin d(\hat{p},p_1)}{\sin d(p_1,p_2)}\cos d(p_2,\Lambda_\beta)\right)\hat{a}b_\beta$$

であるが, (5.1) から

$$\sin d(\hat{p},p_2)\cos d(p_1,\Lambda_\beta)+\sin d(\hat{p},p_1)\cos d(p_2,\Lambda_\beta)\geq\sin d(p_1,p_2)\cos d(\hat{p},\Lambda_\beta)$$

が成り立つので,

$$\langle\varphi,\psi\rangle\geq\sum_\beta\cos d(\hat{p},\Lambda_\beta)\hat{a}b_\beta=\langle\hat{a}\chi_{\hat{p}},\psi\rangle,$$

となり、補題が示された。 □

補題 4.12 の証明の為に次を準備する.

補題 5.6. Σ^{n-1} を曲率が 1 以上の $n-1$ 次元コンパクト *Alexandrov* 空間, $\varphi_i \in DER(\Sigma^{n-1})$, $0 \le i \le k+1$, が

$$-\epsilon := \max\{\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \,|\, 0 \le i \ne j \le k+1\} < 0,$$

を満たすとする。このとき、次が成り立つ：

(1) $\varphi_i(\xi) \ge \epsilon, 0 \le i \le k$, を満たす $\xi \in \Sigma^{n-1}$ が存在する;

(2) $k \le n-1$;

(3) $\varphi_0(\eta) \ge \epsilon$, $\varphi_{k+1}(\eta) \le \epsilon$, $\varphi_i(\eta) = 0$ $(1 \le i \le k)$, となる $\eta \in \Sigma^{n-1}$ が存在する。

証明. (1). $\hat{\varphi}_{k+1} = \hat{a}\chi_{\hat{p}}$ を補題 5.5 のように選ぶとき, $q := \hat{p}$ とおく. このとき, 任意の $0 \le i \le k$ に対して,

$$\varphi_i(q) = -\langle \varphi_i, \chi_{\hat{p}} \rangle \ge \langle \varphi_i, \varphi_{k+1} \rangle / \hat{a} \ge \epsilon.$$

(2). $n-1$ に関する帰納法による. $n-1=0$ のときは易しい. 一般の $n-1$ の場合, (1) から, $\varphi_i(q) \ge \epsilon$, $0 \le i \le k$ を満たす $q \in \Sigma^{n-1}$ を選ぶ. このとき, $(\varphi_i)'_q \in DER(\Sigma_q(\Sigma^{n-1}))$ を考えると, 補題 5.4 から, $\langle (\varphi_i)'_q, (\varphi_j)'_q \rangle \le \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle - \varphi_i(q)\varphi_j(q) \le -\epsilon - \epsilon^2 < 0$. 従って, 帰納法の仮定から, $k-1 \le n-2$ が成り立ち結論が従う.

(3). $n-1$ に関する帰納法による. $n-1=0$ のときは易しい. $n-1 \ge 1$ とし,

$$\Omega := \{x \in \Sigma^{n-1} \,|\, \varphi_i(x) \ge 0,\ 0 \le i \le k\},$$

において, $p \in \Omega$ を, $\varphi_0|_\Omega$ の最大値を与える点として選ぶ. (1) から, Ω は空集合ではなく, $\varphi_0(p) \ge \epsilon$ である.

主張 5.7. $\varphi_i(p) = 0,\ 1 \le i \le k$.

証明. 背理法で, $\varphi_{j_0}(p) > 0$ がある $1 \le j_0 \le k$ に対して成立したと仮定する. 補題 5.4 から, $\{(\varphi_i)'_p\}_{0 \le i \le k} \subset DER(\Sigma_p(\Sigma^{n-1}))$ は補題の仮定を満たす. 従って (1) から, $\xi \in \Sigma_p$ で, j_0 以外の任意の $0 \le i \le k$ に対して $(\varphi_i)'_p(\xi) > 0$ を満たすものが存在する. p から ξ 方向に ちょっと進んだ点を q とすれば, $q \in \Omega$ かつ $\varphi_0(q) > \varphi_0(p)$ となり矛盾が生じる. □

主張 5.8. $\varphi_{k+1}(p) \le -\epsilon$.

証明. $\varphi_{k+1}(p) > -\epsilon$ と仮定する. 補題 5.4 から,

$$\langle (\varphi_0)'_p, (\varphi_{k+1})'_p \rangle \le \langle \varphi_0, \varphi_{k+1} \rangle - \varphi_0(p)\varphi_{k+1}(p) < -\epsilon + \epsilon^2 < 0.$$

また $\varphi_i(p) = 0$, $1 \le i \le k$ だから, $\langle (\varphi_i)'_p, (\varphi_{k+1})'_p \rangle \le \langle \varphi_i, \varphi_{k+1} \rangle < 0$. 従って $\{(\varphi_i)'_p\}_{0 \le i \le k+1}$ は補題の条件を満たす. よって (1) から $(\varphi_i)'_p(\xi) > 0$, $0 \le i \le k$, を満たす $\xi \in \Sigma_p$ が存在する. これは p の定め方に反する. □

補題 4.12 の証明. $f = (f_1, \ldots, f_k) : U \to \mathbf{R}$ を ϵ-regular とする. 各点 $p \in U$ に対して $\xi \in \Sigma_p$ で $(f_i)'_p(\xi) > \epsilon, 1 \le i \le k$, を満たすものを選んで, ξ に殆ど接する方向の最短測地線上に点 q をとる. $f_{k+1} := d(q, \cdot)$

を考えれば, $\{(f_i)'_p\}_{1\le i\le k+1}\subset DER(\Sigma_p)$ は補題 3.2 (2) の条件を満たす. よって f は ϵ-開写像である. □

命題 4.13 の証明. (1) は 補題 5.6 による。
(2). f は ϵ-開写像なので、f が局所的に一対一であることを示せば良い。もし f が局所的に一対一でないとすると、ある点 $p\in U$ に収束する点列 x_i で $f(x_i)=f(p)$ を満たすものが存在する。$(x_i)'_p$ の極限を $\xi\in\Sigma_p$ とすれば、第一変分公式から, $f'_p(\xi)=0$ が従う。f は ϵ-regular なので、$\eta\in\Sigma_p^\epsilon$ を選んだとき、$(f_i)'_p$, $1\le i\le n$, χ_ξ, χ_η は, $\langle(f_i)'_p,\chi_\xi\rangle=0$, $\langle(f_i)'_p,\chi_\eta\rangle\le-\epsilon$ を満たす。次の補題より、これは起こり得ない。 □

補題 5.9. 次の条件を満たす $DER(\Sigma^{n-1})$ の元 φ_i, $0\le i\le k+1$, と φ が存在するとき、$k\le n-2$ が成り立つ：

(1) 任意の $0\le i\ne j\le k+1$ に対して, $\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle\le-\epsilon$;
(2) 任意の $0\le i\ne j\le k$ に対して, $\langle\varphi_i,\varphi\rangle\le 0$;

証明. 補題 5.6 と同じ方針で証明される。 □

6. Regular 近傍定理とファイバー束定理

定義 6.1. *admissible* 写像 $g:U\to\mathbf{R}^k$ が $p\in U$ において *regular* であるとする. g が p において 補足不可能であるとは, どんな *admissible* 関数 $h:U\to\mathbf{R}$ をとっても (g,h) が p において *regular* とならない場合をいう.

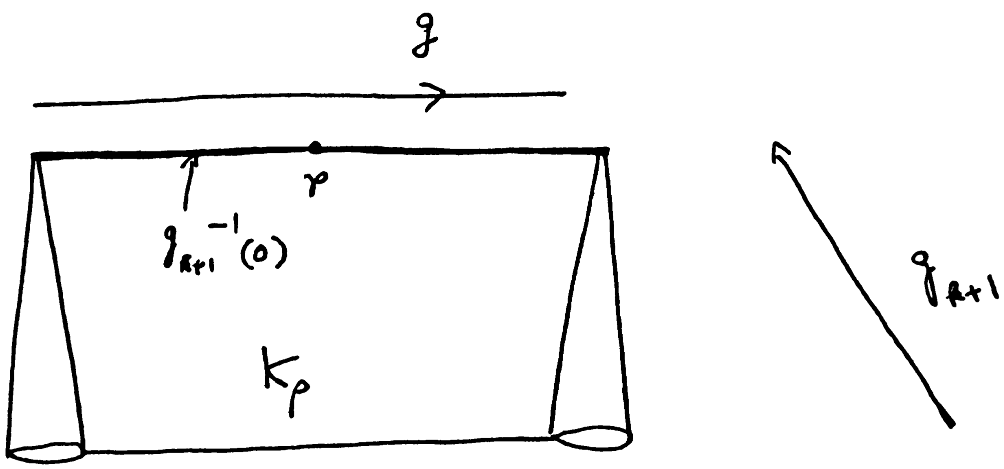
次の結果は重要である.

定理 6.2 (regular 近傍の存在). $p\in U$ を *admissible* 写像 $g=G\circ f:U\to\mathbf{R}^k$ の *regular point* とし、g は p において 補足不可能とする。このとき、p のある近傍 W 上で定義された *admissible* 関数 $g_{k+1}:W\to\mathbf{R}$ で次の条件を満たすものが存在する:

(1) $g_{k+1}\le 0,\quad g_{k+1}(p)=0;$
(2) 十分小さな $\rho>0$ が存在して、
$$K_\rho(p):=\{x\in W\mid |g(x)-g(p)|\le\rho,\ g_{k+1}(x)\ge-\rho\}$$
は コンパクト；
(3) 任意の $v\in g(K_\rho(p))$ に対して、$K_\rho(p)\cap g_{k+1}^{-1}(0)\cap g^{-1}(v)$ は 一点である;
(4) (g,g_{k+1}) は $K_\rho(p)-g_{k+1}^{-1}(0)$ 上で *regular* である。

$K_\rho(p)$ を p の回りの g に対する **regular 近傍**と呼ぶことにする.

例 6.3. X を長さ $\ll 2\pi$ の円周上の ユークリッド錐 K と $\mathbf{R}$ との直積空間 $K\times\mathbf{R}$ とし, $p=(o,0)\in X$ とする. ここで, o は K の頂点を表す. $a:=(o,-10)$, $b:=(q,1)$ とおく. 但し, q は, $d(o,q)=10$ なる K の点とする. このとき, 関数 $g(x)=d(a,x)$ は p において *regular* かつ補足不可能である. 定理 *6.2* で与えられる g_{k+1} として, $g_{k+1}(x)=d(b,x)$ とおくことができる.



定理 6.2 を仮定して，以下で当面の目標だった定理 4.9 の証明を与える．

定義 6.4. ある位相空間 Y が n 次元の MCS-空間であるとは，任意の点 $y \in Y$ がある $n-1$ 次元の MCS-空間 Σ 上の *cone* $K(\Sigma)$ に同相な近傍をもつとき，と帰納的に定義される．ここで 空集合は 次元 -1 の MCS-空間と約束する．

MCS-空間 Y は標準的な stratification $Y = Y^n \supset Y^{n-1} \supset \cdots \supset Y^0$ をもつ: ℓ-次元の stratum Y^ℓ は, Y の点 y で conical 近傍として $\mathbf{R}^m \times K(\Sigma^{n-m-1})$, $m \le \ell$, に同相なものをもつような点の集合として与えられる．ここで，Σ^{n-m-1} は, ある $(n-m-1)$-次元 MCS-空間である．

次は [11] における主定理である．

定理 6.5 (ファイバー束定理). $f : U \to \mathbf{R}^k$ を *admissible* 写像とする．

$(A)_k$ $f : U \to \mathbf{R}^k$ が p において *regular* のとき，f は p の回りで位相的 *submersion* である;

$(B)_k$ $f : U \to \mathbf{R}^k$ が *proper* で U 上 *regular* のとき，f は局所自明ファイバー束である;

$(C)_k$ $v \in R^k$ が f の *regular value* とする．即ち $f^{-1}(v)$ の各点で f は *regular* であるとする．このとき，ファイバー $f^{-1}(v)$ は MCS-空間である．

証明．証明は k に関する逆帰納法による．第一段 $k = n$ の場合は，f, $\tilde{f}$ は局所的に bilipschitz 同相になり明らかに $(A)_n$, $(B)_n$, $(C)_n$ が成り立つ．また， Siebenmann [14] の MCS-空間の同相写像の変形理論により， ファイバーが MCS-空間であるような proper な 位相的 submersion は局所自明ファイバー束になることが知られている．従って $(A)_k + (C)_k \Longrightarrow (B)_k$ が成り立つ．

最後に $(A)_{k+1} + (B)_{k+1} + (C)_{k+1} \Longrightarrow (A)_k + (C)_k$ を示そう．f が p において補足可能ならば問題ないので，補足不可能とする．g_{k+1}, $K_\rho(p)$ を定理 6.2 におけるものとする．$\Pi_\rho := g^{-1}(g(p)) \cap g_{k+1}^{-1}(-\rho) \cap K_\rho(p)$

とおくとき，定理 6.2 (4) から，同相写像

$$\phi : \Pi \times I^k_{g(p)}(\rho) \times [-\rho, 0) \to K_\rho(p) - g_{k+1}^{-1}(0)$$

を得るが，定理 6.2(3) から ϕ は同相写像

$$K(\Pi_\rho) \times I^k_{g(p)}(\rho) \to K_\rho(p)$$

へと拡張される．ここで $K(\Pi_\rho) := (\Pi_\rho \times [-\rho, 0))/(\Pi_\rho \times 0)$ は Π_ρ 上の cone を表す．これより $(A)_k$, $(C)_k$ が従う． □

$k = 0$ の場合を考えることにより，定理 6.5 から Alexandrov 空間が MCS-空間であることが従うので，確かに定理 1.7 は成立する． □

定理 6.5 (B) を 例 4.7 に適用することにより，X が局所的に cone の構造を持つことが従う:

定理 6.6. *X の任意の点 p の十分小さい距離球 $B(p, \epsilon)$ は $\partial B(p, \epsilon)$ 上の cone $K(\partial B(p, \epsilon))$ に同相である．*

これは 定理 1.6 より弱い．次節で 定理 1.6 と 定理 1.5 の証明の方針を与える．

7. Regular 近傍の存在証明

定理 6.2 の証明では，次の λ-concave の概念が本質的な役割を果たす:

定義 7.1. $f : U \to \mathbf{R}$ が **λ-concave** であるとは，早さ *1* の任意の測地線 $\gamma : [a, b] \to U$ に対して，$f \circ \gamma(t) + \lambda t^2$ が *concace*(上に凸) であるときをいう．

補題 7.2. コンパクト集合 $A \subset X^n$ からの距離関数 $f(x) = d(A, x)$ に対して，相対コンパクトな領域 $U \subset X^n - A$ を任意にとるとき，X の曲率の下限と $d(U, A) > 0$ にのみ依存する定数 $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在して

$$f(q) \le f(p) + f'_p(q'_p) d(p, q) - \lambda d(p, q)^2$$

が U 内の任意の点 p, q に対して成立する．

特に $f(x) = d(A, x)$ は U 上で *λ-concave* である．

証明. 第一変分公式の証明から従う． □

従って admissible 関数は，ある領域上で λ-concave である．

写像 $g = G \circ f : U \to \mathbf{R}^k$, $p \in U$ を定理 6.2 におけるものとする．各 f_i は p の近傍上 λ-concave であるとしてよい．先ず，$\xi \in \Sigma_p^\epsilon(f)$ をとり，ξ 方向に少し進んだ点を q とすれば次が成り立つ:

$$f_i(q) > f_i(p) + \epsilon d(p, q) - \lambda d(p, q)^2, \quad 1 \le i \le k.$$

この式と三角不等式から，$0 < \delta \le \mathrm{const}(\epsilon, d(p, q), \lambda)$ のとき， 任意の $x \in B(p, \delta)$, $y \in B(q, \epsilon d(p, q)/4)$ に対して，

$$f_i(y) > f_i(x) + \frac{\epsilon}{4} d(x, y) - \lambda d(x, y)^2,$$

が成り立つ．従って f_i の λ-concavity から，

$$(f_i)'_x(y'_x) > \frac{\epsilon}{4}, \tag{7.1}$$

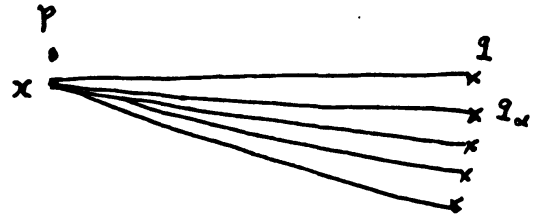
が成り立つ.

以下では, $\delta > 0$ は十分小, $c, c_1, c_2, \dots, > 0$ は, 初期データ p, f, $d(p,q)$, λ にのみ依存し, δ には依存しない定数とする.

有限集合 $\{q_\alpha\} \subset B(q, \epsilon d(p,q)/4) \cap \partial B(p, d(p,q))$ を $\tilde{\angle} q_\alpha p q_\beta \ge \delta$ が任意の $\alpha \neq \beta$ に対して成り立つように選ぶ. このとき, Σ_p における Bishop-Gromov 型の体積比較定理から $N := \#\{q_\alpha\} \ge c\delta^{1-n}$ が成り立つ. そこで, 次の admissible 関数

$$h := \frac{1}{N}\sum_\alpha h_\alpha : B(p,\delta) \to \mathbf{R},$$

を考察する.



ここで, $h_\alpha = \phi_\alpha(d(q_\alpha, \cdot))$, であり, C^∞-関数 ϕ_α は, $\phi_\alpha(0) = 0$,

$$\phi'_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{for } t \le d(p,q_\alpha) - \delta \\ 1/2, & \text{for } t \ge d(p,q_\alpha) + \delta \end{cases}$$

$$\phi''_\alpha(t) = -\frac{1}{4\delta}, \qquad \text{for } d(p,q_\alpha) - \delta \le t \le d(p,q_\alpha) + \delta,$$

を満たす. このとき, 7.1 から次が成り立つ.

補題 7.3. 任意の点 $x \in B(p,\delta)$ に対して次が成り立つ:

$$\langle h'_x, (f_i)'_x \rangle < -\epsilon/8, \quad 1 \le i \le k.$$

補題 7.4. h は $B(p,\delta)$ 上で $c\delta^{-1}$-*concave* である.

証明. 今, $x, z \in B(p,\delta)$ を結ぶ最短測地線 xz の中点を y とする. 任意の α に対して, h_α は $-c$-concave であるから、

$$2h_\alpha(y) - h_\alpha(x) - h_\alpha(z) \ge -cd(x,z)^2. \tag{7.2}$$

次に, $|\cos \angle q_\alpha y x| > \mu$ が成り立つ場合を考える. 仮に, $\cos \angle q_\alpha y x < -\mu$ とする. $Curv(X) \ge \kappa$ として, 比較三角形 $\tilde{\Delta} q_\alpha y z$ を κ-平面上にとり, $\tilde{x}$ を $\tilde{z}\tilde{y}$ の延長線上に $d(\tilde{x},\tilde{y}) = d(\tilde{y},\tilde{z})$ を満たすようにとる. このとき, X の曲率条件と ϕ''_α に関する条件から次が示される:

$$\begin{aligned} 2h_\alpha(y) - h_\alpha(x) - h_\alpha(z) &\ge 2\phi_\alpha(d(\tilde{q}_\alpha,\tilde{y})) - \phi_\alpha(d(\tilde{q}_\alpha,\tilde{x})) - \phi_\alpha(d(\tilde{q}_\alpha,\tilde{z})) \\ &\ge (\phi''_\alpha \mu^2 - \phi'_\alpha c_1) d(x,z)^2 \\ &\ge (c/\delta - c_1)\mu^2 d(x,z)^2 \\ &\ge \frac{c_2}{\delta}\mu^2 d(x,z)^2 \quad (\text{if} \quad \delta \ll \mu^2). \end{aligned}$$

ところが，次元の関係から

$$\#\{\alpha \,|\, |\cos\angle((q_\alpha)'_y, x'_y) \le \mu\} \le c\mu\delta^{1-n}$$

なので、$\mu \ll c$ のとき、殆どの α に対して (7.3) が成り立つ. 従ってこれらの不等式より平均をとることにより,

$$2h_\alpha(y) - h_\alpha(x) - h_\alpha(z) \ge \frac{c}{\delta} d(x,z)^2,$$

となり結論を得る. □

補題 7.5. f が $p \in U$ で補足不可能とすると、任意の $r \in B(p,\delta)$ に対して、

$$h(r) \le h(p) - c_1 d(p,r) + c_2 \max_{1\le i\le k}\{0, f_i(p) - f_i(r)\}.$$

証明. 先ず、f が $p \in U$ で補足不可能であることから、$\Sigma_p^0 := \{\xi \in \Sigma_p \,|\, f_i'(\xi) > 0, 1 \le i \le k\}$ の直径が $\pi/2$ 以下であることに注意する。実際、Σ_p^0 の直径が $\pi/2$ より大きいと仮定ると，$\xi_1, \xi_2 \in \Sigma_p^0$ で $d(\xi_1,\xi_2) > \pi/2$ なるものを選んで、p から ξ_1 方向に少し進んだ所に点 a を取り、$f_{k+1} = d(a,\cdot)$ とおく。このとき、(f, f_{k+1}) は p において regular となってしまう。

第一段. $f_i(r) \ge f_i(p) - \lambda d(p,r)^2$, $1 \le i \le k$, のとき.

このとき、$(f_i)'_p(r'_p) \ge 0$ なので、$r'_p \subset \bar{\Sigma}_p^0$. $(q_\alpha)'_p \subset \Sigma_p^0$ としてよいから、$d(r'_p, (q_\alpha)'_p) \le \pi/2$ となり、これより $h_\alpha(r) \le h_\alpha(p) - \lambda d(p,r)^2$ が従う。もし、$\cos\angle(r'_p, (q_\alpha)'_p) \ge \mu$ ならば

$$h_\alpha(r) \le h_\alpha(p) - \lambda d(p,r)^2 - \frac{1}{2}\mu d(p,r)^2. \tag{7.3}$$

ここで、

$$\#\{\alpha \,|\, 0 \le \cos\angle(r'_p, (q_\alpha)'_p) \le \mu\} \le c\mu\delta^{1-n}$$

なので、$\mu \ll c$ のとき、殆どの α に対して (7.3) が成り立つ. よって $h(r) \le h(p) - cd(p,r)$ が成り立つ。

第二段. ある $1 \le j \le k$ に対して，$f_j(r) < f_j(p) - \lambda d(p,r)^2$ のとき.

f が ϵ-開写像であることから、$s \in U$ で $\|f(s) - f(r)\| \ge \epsilon d(s,r)$ かつ次を満たすものがとれる:

$$f_i(s) = \begin{cases} f_i(p) - \lambda d(p,s)^2 & \text{if} \quad f_i(r) < f_i(p) - \lambda d(p,r)^2 \\ f_i(r) & \text{その他}. \end{cases}$$

第一段より，$h(s) \le h(p) - cd(p,s)$. 従って,

$$\begin{aligned} h(r) &\le h(s) + d(r,s) \\ &\le h(p) - cd(p,r) + (1+c)d(r,s). \end{aligned}$$

ここで，ある $1 \leq i_0 \leq k$ に対して次が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
(1+c)d(r,s) &\leq \frac{1+c}{\epsilon}||f(s)-f(r)|| \\
&= \frac{1+c}{\epsilon}|f_{i_0}(s)-f_{i_0}(r)| \\
&\leq \frac{1+c}{\epsilon}|f_{i_0}(p)-f_{i_0}(r)-\lambda d(p,s)^2| \\
&\leq \frac{1+c}{\epsilon}\max\{0, f_{i_0}(p)-f_{i_0}(r)\} + 2|\lambda|(d(p,r)^2+d(r,s)^2).
\end{aligned}
$$

これより結論が従う. □

注意 7.6. 補題 *7.5* において，f が p において補足不可能という条件は本質的である．実際，$X = \mathbf{R}^2$, f が一点からの距離関数のとき，補題 *7.5* の結論は成り立たない．

さて，g_{k+1} を定めよう．今 $W := B(p,\delta)$ とおき，$v \in \mathbf{R}^k$ に対して $W_v := f^{-}(v) \cap W$, $W_v^+ := \{x \in W \mid f_i(x) \geq v_i,\ 1 \leq i \leq k\}$, とおく．そして，

$$
g_{k+1} := h - H \circ f,
$$

と定める．ここで，$H(v) := \max\{h(x) \mid x \in \bar{W}_v\}$. f が ϵ-開写像であることから H が Lipschitz であることが従う．また，

$$
\begin{aligned}
(g, g_{k+1}) &= (G \circ f, h - H \circ f) \\
&= \begin{pmatrix} G & 0 \\ -H & Id \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

の形から，(g, g_{k+1}) は admissible である．

明らかに W 上で，$g_{k+1} \leq 0$ であり，補題 7.5 から，$g_{k+1}(p) = 0$ が従う．

$0 < \rho \ll \delta^2$ に対して，

$$
K_\rho(p) := \{x \in W \mid ||f(x) - f(p)|| \leq \rho,\ g_{k+1}(x) \geq -\rho\}
$$

とおく．f が ϵ-開写像であることと，補題 7.5 から，$K_\rho(p) \subset B(p, \delta/2)$ が成り立つので，$K_\rho(p)$ はコンパクト集合である．

補題 7.7. $z \in K_\rho(p) \cap g_{k+1}^{-1}(0)$ に対して $v := f(z)$ とくおき，任意の $x \in W_v \cap K_\rho(p)$ に対して

$$
h(z) \geq h(x) + c\delta^{-1}d(x,z)^2,
$$

が成り立つ．

補題 7.7 の証明を与える為に，準備として次を主張する．

主張 7.8. 補題 *7.7* の仮定の下に，

$$
\max_{W_v^+} h = \max_{W_v^+ \cap K_\rho(p)} h = \max_{W_v^+ \cap K_\rho(p)} h = h(z).
$$

初めの等号は補題 7.5 から従う．最後の等号は z の定め方から明らかである．真中の等号は次のようにして示せる．$\max_{W_v^+\cap K_\rho(p)} h > \max_{W_v^+\cap K_\rho(p)} h$ が成り立つと仮定し，$r \in W_v^+ \cap K_\rho(p)$ を $\max_{W_v^+\cap K_\rho(p)} h$ を実現する点とする．j_0 で $f_{j_0}(r) > v_{j_0}$ なるものを選んでおく．このとき，h'_r, $(f_i)'_r$, $1 \le i \le k$, は補題 5.6 の仮定を満たす $DER(\Sigma_r)$ の元であり，従って $h'_r(\xi) > 0$, $(f_i)'_r(\xi) > 0$, $i \neq j_0$, を満たす $\xi \in \Sigma_r$ が存在することになり r の選び方に反する． □

補題 7.7 の証明を与えよう．y を 最短測地線 xz の中点とすると，h が $c\delta^{-1}$-concave なので，

$$h(y) \ge h(z) + \frac{1}{2}(h(x) - h(z)) + c\delta^{-1}d(x,z)^2.$$

また f_i は $-c$-concave なので，

$$f_i(y) \ge \frac{1}{2}(f_i(x) + f_i(z)) - cd(x,z)^2 = v_i - cd(x,z)^2.$$

f は ϵ-開写像なので，y に近い点 $s \in W_v^+$ で，

$$h(s) \ge h(z) + \frac{1}{2}(h(x) - h(z)) + c\delta^{-1}d(x,z)^2,$$

を満たすものがとれる．主張 7.8 から $h(z) \ge h(s)$ なので結論が従う．
□

定理 6.2 (3) は 補題 7.7 から明らかである．(4) を示そう．(f,h) が $K_\rho(p) - g_{k+1}^{-1}(0)$ 上で regular であることを示せば良い．任意の $x \in K_\rho(p) - g_{k+1}^{-1}(0)$ に対して，$v := f(x)$ とおき，$z := W_v \cap g_{k+1}^{-1}(0)$ をとる．$u_0 := v + c_0 d(x,z)^2(1,\ldots,1) \in \mathbf{R}^k$ に対して，f が ϵ-開写像であることから，s を，$f(s) = u_0$, $\epsilon d(x,s) \le d(f(z), f(s))$ を満たすようとる．また $c > 0$ を，f_i が $-c$-concave であるようなものとする．このとき，$c_0 > 2c$ と c_0 選ぶことにより，また，補題 7.7 を用いることにより，

$$f_i(s) > f_i(x) + cd(x,s)^2, \tag{7.4}$$

$$h(s) > h(x) \tag{7.5}$$

が成り立つことが分かる．$\xi \in s'_x \subset \Sigma_x$ と ξ を選ぶとき，(7.4), (7.5) から $(f_i)'_x(\xi) > 0$, $h'_x(\xi) > 0$ が従う．$\langle h'_x, (f_i)'_x \rangle < -\epsilon/8$ は既に示してあるので，(f,h) が x で regular であることが示された． □

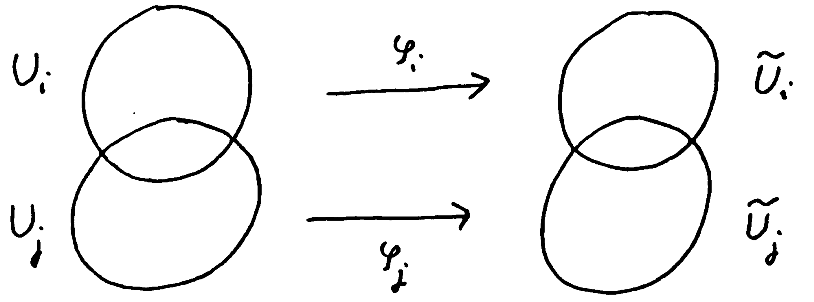
8. 安定性定理

この節で安定性定理の証明の方針について述べる．ここでの考察の対象は，Alexandrov 空間の収束である．

まず，位相的な準備として，以下の張り合わせ定理を準備する．

定理 8.1 (張り合わせ定理). *X を コンパクトな WCS-距離空間, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$ を X の開被覆とする。このとき、$\nu = \nu(X,\mathcal{U}) > 0$ が存在して、次が成り立つ: $\tilde{X}$ を別のコンパクトな WCS-距離空間で、ν-近似 $\theta : X \to \tilde{X}$ が存在するとする。$\tilde{X}$ の開被覆 $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U}_i\}_{i=1}^N$ と、同相写像*

$\varphi_i : U_i \to \tilde{U}_i$ で、$d(\theta|_{U_i}, \varphi_i) < \nu$ なるものが存在するとする。このとき、同相写像 $\varphi : X \to \tilde{X}$ で、$d(\varphi, \theta) < \tau(\nu)$ を満たすものが存在する



この結果は Siebenmann[14] による MCS-空間の同相写像の変形理論を用いることにより示される．位相多様体の同相写像の変形理論は，Edwards-Kiby[3] により初めて証明され，Cheeger の有限性定理 ([2]) の証明に適用された．

実際には，定理 8.1 の尊敬版も成り立つ．

定理 8.2 (張り合わせ定理 (尊敬版)). *定理 8.1 の仮定の下に，次の条件を満たす位相的 submersion*

$$f : X \to \mathbf{R}^k, \qquad h : X \to \mathbf{R}, \qquad \tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbf{R}^k, \qquad \tilde{h} : \tilde{X} \to \mathbf{R},$$

が与えられていると仮定する．

条件. 　コンパクト集合 $K \subset X$ が与えられ，

(a) $K \cap \bar{U}_\alpha \neq \phi$ のとき，U_α は (f, h) に関するある積近傍 に含まれ，U_α 上で $(\tilde{f}, \tilde{h}) \circ \varphi_\alpha = (f, h)$ が成り立つ;

(b) 任意の α に対して，U_α は f に関するある積近傍に含まれ，U_α 上で $\tilde{f} \circ \varphi_\alpha = f$ が成り立つ．

このとき，定理 8.1 における同相写像 $\varphi : X \to \tilde{X}$ を，次を満たすように取れる:

(1) $f = \tilde{f} \circ \varphi \quad on\ X;$

(2) $(f, h) = (\tilde{f}, \tilde{h}) \circ \varphi \quad on\ K.$

上で現れた写像に対する積近傍は次のように定義されるものである．

定義 8.3. $V \subset U$ が 写像 $g : U \to \mathbf{R}^\ell$ に関する積近傍であるとは，$g(V)$ が ある直方体 $I^\ell \subset \mathbf{R}^\ell$ に一致して，ある $v \in g(V)$ に対して次が成り立つときをいう:

- $g^{-1}(v) \cap V$ は MCS-空間である;
- 同相写像 $\psi : (g^{-1}(v) \cap V) \times I^\ell \to V$ で，$g \circ \psi$ が射影 $(g^{-1}(v) \cap V) \times I^\ell \to I^\ell$ に一致するものが存在する．

今，$X^n, \tilde{X}^n$ を曲率が κ 以上の Alexandrov 空間，$U \subset X^n$, $\tilde{U} \subset \tilde{X}^n$ は開集合，$g : U \to \mathbf{R}^k$ は $p \in U$ の近傍において ϵ-regular とする．更に，

$d_{GH}(U,\tilde{U}) < \nu$ として，$\theta : U \to \tilde{U}$ を ν-近似とする．$g = G \circ f$ と書ける．ここで G は bi-Lipschitz 同相写像で，f の各成分関数 f_i は X のコンパクト集合 $A_{i,\alpha}$ からの距離関数を用いて (4.1) のように表現されている．コンパクト集合 $\tilde{A}_{i,\alpha} := \overline{\theta(A_{i,\alpha})} \subset \tilde{X}^n$ からの距離関数を用いて，f_i と同じ表現で $\tilde{f}_i$ を定めることにより，admissible 写像 $\tilde{f} = \tilde{U} \to \mathbf{R}^k$ が定義される．ν が十分小さければ $\tilde{g} = G \circ \tilde{f}$ も $\epsilon/2$-regular となるので，$\tilde{p} \in \tilde{U}$ を $\tilde{g}(\tilde{p}) = g(p)$，$d(\theta(p),\tilde{p}) < \tau(\nu)$，$\lim_{\nu\to 0}\tau(\nu) = 0$ を満たすように選べる．このとき次が成り立つ．

定理 8.4. $\nu = \nu(U,p,g) > 0$ が十分小さいとき，p と $\tilde{p}$ の近傍 $U_1(p)$ と $\tilde{U}_1(\tilde{p})$ と同相写像 $\varphi : U_1(p) \to \tilde{U}_1(\tilde{p})$ で，次を満たすものが存在する*:*

(1) $\tilde{g} \circ \varphi = g$;

(2) $d(\varphi,\theta) < \tau(\nu)$.

$U_1(p)$ は $\tilde{X}^n$ に依らず定めることができる．

定理 8.4 は，k に関する逆帰納法によって証明される．第一段 $k = n$ の場合は，f, $\tilde{f}$ は局所的に bi-Lipschitz 同相になり容易である．一般の k の場合，帰納法の仮定から g は p において補足不可能であると仮定出来る．h, g_{k+1} を定理 6.2 における関数とする．ν-近似 θ を用いて，h, g_{k+1} から $\tilde{h}$, $\tilde{g}_{k+1}$ も定まる．$K_\rho(p)$ を p の回りの g に対する regular 近傍とし，$\tilde{p}$ の回りの $\tilde{g}$ に対する "regular 近傍" $K_\rho(\tilde{p})$ も形式的に同様に定義する．

ここでの問題点は，$\tilde{f}$ が $\tilde{p}$ において補足可能かも知れないという点である (実際 $\tilde{X}$ がリーマン多様体ならば常にそうである)．従って，$K_\rho(\tilde{p})$ が $\tilde{p}$ の回りの regular 近傍を与えるという保証はない．

任意の $0 < \delta < \rho$ に対して，$K_\rho(p) \cap \{-\rho \le g_{k+1} \le -\delta\}$ の各点で (f, g_{k+1}) が regular なので，帰納法と張り合わせ定理 (尊敬版) により，$\nu_\delta > 0$ が存在して，$\nu \le \nu_\delta$ のとき (従って $\tilde{X}$ は δ に依存する)，同相写像 $\varphi : K_\rho(p) \cap \{-\rho \le g_{k+1} \le -\delta\} \to K_\rho(\tilde{p}) \cap \{-\rho \le \tilde{g}_{k+1} \le -\delta\}$ で，$(\tilde{f}, \tilde{g}_{k+1}) \circ \varphi = (f, g_{k+1})$ をみたすものが存在する．特に，$\Pi_\rho := f^{-1}(f(p)) \cap g_{k+1}^{-1}(-\rho)$ と $\tilde{\Pi}_\rho := \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(p)) \cap \tilde{g}_{k+1}^{-1}(-\rho)$ は同相である．ファイバー束定理から

$$
\begin{aligned}
K_\rho(p) &\simeq F_p \times B(f(p),\rho), \quad F_p := f^{-1}(f(p)) \cap \{g_{k+1} \ge -\rho\} \\
K_\rho(\tilde{p}) &\simeq \tilde{F}_{\tilde{p}} \times B(\tilde{f}(\tilde{p}),\rho), \quad \tilde{F}_{\tilde{p}} := \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(\tilde{p})) \cap \{\tilde{g}_{k+1} \ge -\rho\},
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，$K_\rho(p)$ は regular 近傍なので，$F_p \simeq K(\Pi_\rho)$ が成り立つ．そこで問題となるのが，

問題 8.5. $\tilde{F}_{\tilde{p}}$ は $K(\tilde{\Pi}_\rho)$ に同相か *?*

もし，これが成り立てば，$K_\rho(p) \simeq K_\rho(\tilde{p})$ が成り立ち，$U_1(p) := K_\rho(p)$，$\tilde{U}_1(\tilde{p}) := K_\rho(\tilde{p})$ が定理8.4の条件を満たすことが分かる．問題 8.5 を肯定的に解くには $(\tilde{f}, \tilde{g}_{k+1})$ が $\tilde{F}_{\tilde{p}} - \{\tilde{p}\}$ 上で regular かどうか判定不可能なので，$\tilde{g}_{k+1}$ のみを考察していたのでは不十分である．そこで $\hat{g}_{k+1} := d(\tilde{p},\cdot)$ を考える．すると，$(\tilde{f}, \hat{g}_{k+1})$ は [10] の意味で regular になる (注意8.6参

照). そこで [10] におけるファイバー束定理を適用することにより，問題 8.5 を肯定的に解くことが出来る．こうして定理 8.4 が証明される．

注意 8.6. 本稿における *regular* 写像の定義は [11] による．[10] における *regular* 写像の定義はもっと一般的なものである．例えば典型的なものを挙げると，$f = (f_1, \ldots, f_k) : X^n \to \mathbf{R}^k$ がコンパクト集合 $A_i \subset X^n$ からの距離関数により，$f_i(x) = d(A_i, x)$ と表されているとき，f が $p \in X^n$ において (ϵ, δ)-*regular* であるとは，次が成り立つ場合をいう:

(1) 任意の $1 \le i \ne j \le k$ に対して，$\langle (f_i)'_p, (f_j)'_p \rangle < \delta$;

(2) $\Sigma_p^\epsilon := \{\xi \in \Sigma_p \mid (f_i)'_p(\xi) > \epsilon,\ 1 \le i \le k\}$ は空でない．

ある任意に固定された $\epsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が十分小さいとき，単に p において *regular* であるという．この定義の条件 *(1)* は 定義 *4.6* の条件より弱い．

定理 1.6 の証明.
$\epsilon > 0$ を十分小さく選んで, $d_p = d(p, \cdot)$ が $B(p, \epsilon) - \{p\}$ 上で regular であるように出来る。定理 6.6 から、$S(p, \epsilon) := \partial B(p, \epsilon)$ が Σ_p に同相であることを示せば良い。

$\Sigma_p = \Sigma_p \times \{1\} \subset K(\Sigma_p)$ と同一視する．収束 $(\frac{1}{\epsilon} X^n, p) \to (K(\Sigma_p), o_p)$, $\epsilon \to 0$, の下に，$S_\epsilon(p, 1) := S(p, 1; \frac{1}{\epsilon} X^n)$ は Σ_p に収束する．$\theta_\epsilon : B(p, 2; \frac{1}{\epsilon} X^n) \to B(o_p, 2; K(\Sigma_p))$ を $\tau(\epsilon)$-近似とする．$f := d_{o_p}$, $f_\epsilon := \frac{1}{\epsilon} d_p$ は各々 Σ_p, $S_\epsilon(p, 1)$ 上で regular なので，定理 8.4 から，Σ_p の開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^N$ と $S_\epsilon(p, 1)$ の開被覆 $\{\tilde{U}_i\}_{i=1}^N$, それに同相写像 $\varphi_i : U_i \to \tilde{U}_i$ で,

- $f_\epsilon \circ \varphi_i = f$;
- $d(\varphi_i, \theta|_{U_i}) < \tau(\epsilon)$,

を満たすものが存在する．φ_i は同相写像 $\Sigma_p \cap U_i \to S_\epsilon(p, 1) \cap \tilde{U}_i$ を導く．従って張り合わせ定理 8.1 により，同相写像 $\Sigma_p \to S(p, \epsilon)$ が得られる． □

定理 1.5 の証明.
本質的に定理 1.6 の証明と同じである．$d_{GH}(X^n, \tilde{X}^n) < \nu$ とし，$\theta : X \to \tilde{X}$ を ν-近似とする．X を中心からの距離関数が regular であるような "regular 距離球" 達 $B_i = B(p_i, r_i)$, $1 \le i \le N$, で覆っておく．$\tilde{X}$ の被覆 $\tilde{B}_i = B(\theta(p_i), r_i)$ を考える．主定理 8.4 と張り合わせ定理 8.1 から, 同相写像 $\varphi_i : B_i \to \tilde{B}_i$ で，$d(\theta|_{B_i}, \varphi_i) < \tau(\nu)$ なるものが存在する．最後に再び張り合わせ定理を用いて, 大域的同相写像 $\varphi : X^n \to \tilde{X}^n$ が得られる． □

9. 最後に

安定性定理の証明や，距離関数に対してモース理論を展開する観点に立つと，[10] におけるより一般的な regularity の定義の方が使い易い．但し，この場合の regular 近傍の性質 ([10]) は本稿の定理 6.2 にお

ける性質ほど良くない.（しかもこのregular 近傍の存在証明([10]) は難解である). この点をもっと整備して, [10] の意味での regular 写像に対して, 定理 6.2 に匹敵するような良い性質をもった regular 近傍を構成することは, 今後の大事な課題であろう.

最後に, 安定性定理における同相写像を Lipschitz 同相写像に置き換える問題も重要な問題として残されていることを指摘しておきたい.

REFERENCES

[1] Yu. Burago, M. Gromov, and G. Perel'man, *A. D. Aleksandrov spaces with curvatures bounded below*, Uspekhi Mat. Nauk **47** (1992), no. 2(284), 3 51, 222, translation in Russian Math. Surveys 47 (1992), no. 2, 1 58.

[2] J. Cheeger, *Finiteness theorems for riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **92** (1970), 61 74.

[3] R.D. Edwards and R.C. Kirby, *Deformations of spaces of imbeddings*, Ann. of Math. **93** (1971), 63 88.

[4] K. Fukaya and T. Yamaguchi, *The fundamental groups of almost nonnegatively curved manifolds*, Ann. of Math. (2) **136** (1992), no. 2, 253 333.

[5] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Textes Mathématiques [Mathematical Texts], vol. 1, CEDIC, Paris, 1981, Edited by J. Lafontaine and P. Pansu.

[6] ———, *Metric structures for riemannian and non-riemannian spaces*, Progress in Mathematics, vol. 152, Birkhäuser, Boston, 1999.

[7] K. Grove, P. Petersen V, and J.-Y. Wu, *Geometric finiteness theorems via controlled topology*, Invent. Math. **99** (1990), no. 1, 205 213, Erratum in Invent. Math. **104** (1991), no. 1, 221 222.

[8] K. Grove and K. Shiohama, *A generalized sphere theorem*, Ann. of Math. **106** (1977), 201 211.

[9] Y. Otsu, *Alexandrov* 空間入門, 本論説集.

[10] G. Perelman, *A. D. Alexandrov's spaces with curvatures bounded from below II*, preprint.

[11] ———, *Elements of Morse theory on Alexandrov spaces*, St. Petersburg Math. Jour. **5** (1994), no. 1, 207 214.

[12] T. Shioya, *Mass of rays in Alexandrov spaces of nonnegative curvature*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), no. 2, 208 228.

[13] T. Shioya and T. Yamaguchi, *Collapsing three-manifolds under a lower curvature bound*, to appear in J. Differential Geometry.

[14] L. C. Siebenmann, *Deformation of homeomorphisms on stratified sets I, II*, Comment. Math. Helv. **47** (1972), 123 163.

[15] T. Yamaguchi, *Collapsing 4-manifolds under a lower curvature bound*, in preparation.

[16] ———, *Riemann* 多様体の収束理論の展開, 数学 **47** (1995), 46 61.

[17] ———, *A convergence theorem in the geometry of Alexandrov spaces*, Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992), Sémin. Congr., vol. 1, Soc. Math. France, Paris, 1996, pp. 601 642.

ALEXANDROV 空間上の解析について

塩谷 隆（東北大学大学院理学研究科）

目次

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53C70, 58J35, 58J50; Secondary 31C15, 31C25, 35K05, 53C20, 53C23.

1. 始めに

Alexandrov 空間には今だミステリアスな部分が多い．例えば，任意の断面曲率 ≥ 1 の閉リーマン多様体の Euclidean cone の頂点の近傍を局所構造に持つ Alexandrov 空間が典型的に存在する．これは Alexandrov 空間の局所構造は正曲率リーマン多様体の大域構造を含んでいることを意味する．つまり，Alexandrov 空間の局所構造が完全に分かる為には，少なくとも正曲率多様体の分類が必要であり，これは現段階では非常に難しい問題であろう．また一方で Alexandrov 空間の理解が深まれば，それに収束するリーマン多様体の列の一様な性質を理解することに繋がり，Gromov のコンパクト性定理から，曲率が一様に下に有界なリーマン多様体全体に共通な，個々の多様体によらない性質を取り出すことが可能となる．Alexandrov 空間の研究は解析における超関数の理論の研究に類似している．関数空間の研究は超関数の理論を整備することによって進歩を遂げたが，それと同じことをリーマン多様体の族と Alexandrov 空間についても言うことができる．また，Gromov のコンパクト性は Rellich のコンパクト性を連想させるが，最近の研究で実際にこれらを結び付けることが可能となった．

本稿では Alexandrov 空間およびより一般の特異点を持つ空間上の解析についての最近の研究 [59, 60, 62, 61, 101, 100] を解説する．ここでは原論文の主張より強い仮定をおいて，その代わりに分かり易さに主眼をおいて説明する．例えば，この原稿を通じて Alexandrov 空間はコンパクトで境界がないなどを仮定する．以下に各章の概略を述べる．

いくつかの準備 (第2章) の後，最初の部分 (第3章) では Alexandrov 空間の基本的な解析的構造を中心に，論文 [59] の半分を解説する．大津氏と著者は共同で，Alexandrov 空間の非特異集合上に C^1 微分構造，およびそれに付随する C^0 リーマン計量を構成した ([81])．これによりソボレフ空間 $W^{1,p}$ およびエネルギー形式をリーマン多様体と同様に定義することができる．従って，ラプラシアン Δ が関数解析的に L^2 空間上の自己共役作用素として導入される．その後，G. Perelman はその C^1 構造が δ-非特異集合（$\delta > 0$ は十分小）の上で DC 構造に拡張されることを示し，リーマン計量が局所有界変動であることを証明した ([83])．ここで，DC とは凸関数の差 (Difference of Convex functions) の意味で，DC 構造とは座標変換が DC 関数であるような構造のことを言う．DC 構造の下では C^∞ 多様体と同様にテンソル計算が可能であり，DC 座標を使ってラプラシアンを符号付きラドン測度として定義できることが分かるが，これを DC ラプラシアン Δ^{DC} と呼ぶことにする．この章のキーとなる主張は，「Alexandrov 空間上の任意の $W^{1,p}$ 関数が δ-特異集合の回りではゼロになるような DC 関数で $W^{1,p}$ 近似できる」というものである．この結果として，エネルギー形式の正則性

や，特異集合の容量がゼロであることなどが分かる．さらに，DC 構造が C^∞ 構造に拡張できることを証明する．この応用として，関数解析的ラプラシアン Δ と DC ラプラシアン Δ^{DC} との間の関係を調べる．また，C^∞ 構造を使って，エネルギー形式から定義されるカラテオドリ距離が Alexandrov 空間上の元の距離に一致することを証明する．

次の第4章では,「リッチ曲率が下に有界な測度距離空間」の概念を定義し，そこから完備距離空間への写像空間の上の自然なエネルギー汎関数を構成する．この「リッチ曲率が下に有界な測度距離空間」は桑江氏と著者の共同論文 [60, 62] で導入されたが，そこでは Measure Contraction Property of Bishop-Gromov type, 略して MCPBG をみたす空間と呼んだ．これは Alexandrov 空間の拡張になっていて，大雑把に言えば，与えられた測度に関して Bishop の不等式と Bishop-Gromov 型の不等式が成り立つことで定義する． K.-T. Sturm [109] は曲率が下だけでなく上からも有界であるという条件に相当する測度についての仮定の下で，L^2 関数空間上のエネルギー汎関数を構成したが，我々の写像空間上のエネルギー汎関数の構成は Sturm の方法に基づいている．この方法の長所は2つあり，一つはソースとターゲットの空間が微分構造を持つ必要はないこと，特にターゲットには完備距離空間であること以上に何の仮定も必要ないことである．もう一つはターゲットがアダマール空間（つまり CAT(0)）の場合には L^2 写像空間もアダマール空間になり，エネルギー汎関数が凸であることが非常に初等的な議論で簡単に分かることである．この結果として，Jost-Mayer の gradient flow の構成 [47, 69] を適用でき，Eells-Sampson 型の定理，つまり同変写像の harmonic map flow の存在が得られる．

第5章では，測度付き Gromov-Hausdroff 収束の下で，エネルギー汎関数の列の収束性についての結果を解説する．エネルギー汎関数の収束理論，つまり変分収束理論 (the theory of variational convergences) において，中心的な役割を果たすのは E. De Giorgi の Γ-収束の概念（[29] を参照）と，それにつづく U. Mosco の研究 [71] である．論文 [61] では，これらの理論をエネルギー汎関数だけでなく関数空間の定義域である測度距離空間自身も摂動する場合に拡張した．この章では [61] の一部分を少し拡張した内容を解説する．主定理は,「もし各 ball 上の Poincaré の定数が一様に評価されたと仮定すると，部分列を取ればエネルギー汎関数が常に収束する」というものある．この定理は非常に一般的な設定の下で成り立つ. 実際，測度の２倍条件も必要なく，エネルギー汎関数はエネルギー測度さえ持てば半ノルムであることも必要ない．特に，L^p 写像のエネルギー汎関数に対しても適用できる．この定理の系として，２倍条件なしでも Rellich 型の定理が得られることが分かる．本稿では，[61] で展開した線形作用素の位相的摂動論の拡張と，そのスペクトル幾何的な応用については述べない．興味のある方は原論文 [61] を参照されたい．また，本稿と [61] では線形な場合しか扱わなかったが，現在，非線形への拡張が進行中である（[63]）．

次の第6章では、曲率 ≥ -1 のコンパクトな n 次元 Alexandrov 空間の列 X_i がコンパクト n 次元 Alexandrov 空間 X へ Gromov-Hausdorff 収束するとき，X_i 上のエネルギー汎関数が X 上のエネルギー汎関数へ

収束することを証明する．特に，X_i の k 番目の固有値が X の k番目の固有値へ収束することが分かる．また，3,4 章の結果として，Alexandrov 空間上に熱核が存在することを証明する．これにより加須栄氏と久村氏のスペクトル収束の理論 [53, 54] を Alexandrov 空間に適用できる．以上により，固定された次元をもつコンパクトな Alexandrov 空間全体の集合の上では，スペクトル位相と Gromov-Hausdorff 位相が一致することが分かる．

第 7 章では，正リッチ曲率を持つコンパクトなリーマン軌道体のラプラシアンの固有値に関する結果 ([100]) を解説する．多様体にはないリーマン軌道体の懸垂構造が，ラプラシアンの固有値と深く関わることが興味深い．

最後の章では Alexandrov 空間上の解析についての幾つかの問題および予想を列挙する．

謝辞. この原稿を書くにあたって，町頭氏と桑江氏には，数学的な内容から細かい語句の修正まで，多大なご協力をいただいた．ここに感謝の意を表する．

2. 準備

2.1. 一般的な記号の定義. 「$\mathrm{const}_{\alpha,\beta,\ldots}$」で $\alpha, \beta, \ldots$ に従属するある非負定数を表す．特に「const」で，ある普遍的な定数を表す．$O_{\alpha,\beta,\ldots}(\cdot)$, $\theta_{\alpha,\beta,\ldots}(\cdot)$ を $\alpha, \beta, \ldots$ に従属するある関数でそれぞれ

$$\varlimsup_{t\to 0} |O_{\alpha,\beta,\ldots}(t)/t| < +\infty, \qquad \lim_{t\to 0} \theta_{\alpha,\beta,\ldots}(t) = 0$$

をみたすものとする．これらはランダウ記号のように使う．(例えば $2\,\mathrm{const} = \mathrm{const}$, $\theta(t) + O(t) = \theta(t)$ など．)

2 実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $x \vee y := \max\{x, y\}$, $x \wedge y := \min\{x, y\}$ とおく．

位相空間の部分集合 A に対して，A° で A の開核を，$\bar{A}$ で閉包を表す．また，A の特性関数 I_A を次で定義する．

$$I_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A, \\ 0 & \text{if } x \notin A. \end{cases}$$

2.2. 距離空間に関する基本概念. ここでは距離空間の Gromov-Hausdorff 収束や概等長写像などについて基本的な定義を述べる．この辺りのことについては [39] を参照されたい．

(X, d_X) と (Y, d_Y) を距離空間，ϵ を正の実数とする．(必ずしも連続とは限らない) 写像 $f : X \to Y$ が ϵ-近似写像（または ϵ-ハウスドルフ近似写像）であるとは，次の (i), (ii) が成り立つときを言う．

(i) 任意の 2 点 $x, y \in X$ に対して，

$$|\, d_X(x, y) - d_Y(f(x), f(y))\,| < \epsilon.$$

(ii) $B(f(X), \epsilon) = Y$ が成り立つ．ここで，$B(A, r)$ は距離空間の部分集合 A の r-近傍とする．

X から Y への $\theta(\epsilon)$-近似写像が存在することと，Y から X への $\theta(\epsilon)$-近似写像が存在することは同値であることが簡単に分かる．

写像 $f : X \to Y$ に対して，

$$\mathrm{Lip}(f) := \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)} \ (\leq \infty)$$

(つまり最小のリップシッツ定数）とおく．f がリップシッツ写像であることの必要十分条件は $\mathrm{Lip}(f) < \infty$ が成り立つことである．全単射 $f : X \to Y$ が ϵ-概等長写像であるとは，

$$|\ln \mathrm{Lip}(f)| + |\ln \mathrm{Lip}(f^{-1})| \leq \epsilon$$

であるときを言う．$\mathrm{diam}\, X \leq D$ のとき，ϵ-概等長写像 $f : X \to Y$ は $\theta_D(\epsilon)$-近似写像になる．X と Y のリップシッツ距離を

$$d_{\mathrm{Lip}}(X,Y) := \inf\{\ \epsilon > 0 \mid \epsilon\text{-概等長写像 } f : X \to Y \text{ が存在する }\}$$

で定義する．

距離空間が有限コンパクト(*finitely compact*)であるとは，その全ての有界集合が相対コンパクトであると定義する．X, X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ を有限コンパクトな距離空間とする．このとき，列 X_i が X へ *Gromov-Hausdorff* 収束するとは，ある正の実数列 $\epsilon_i \searrow 0$ と ϵ_i-近似 $f_i : X_i \to X$ が存在するときを言う．$p \in X$, $p_i \in X$ $(i = 1, 2, \ldots)$ を取る．点付き空間の列 (X_i, p_i) が (X, p) へ 点付き *Gromov-Hausdorff* 収束するとは，任意の $r > 0$ に対してある数列 $\epsilon_i \searrow 0$, $r_i \searrow r$ と $f_i(p_i) = p$ を満たすような ϵ_i-近似写像 $f_i : \bar{B}(p_i, r) \to \bar{B}(p, r)$ が存在する，と定義する．

X を有限コンパクトな距離空間とする．離散部分集合 $N \subset X$ が X の ϵ-ネットであるとは，$B(N, \epsilon) = X$ であるときを言う．部分集合 $N \subset X$ が ϵ-離散であるとは，任意の異なる 2 点 $x, y \in N$ に対して $d_X(x, y) \geq \epsilon$ が成り立つことを言う．ϵ-離散な部分集合 $N \subset X$ が極大のとき，即ち N を含む X の ϵ-離散な部分集合が N のみであるとき，N は X の ϵ-ネットになることが分かる．正の実数の列 $\epsilon_i \searrow 0$ に対して，X の ϵ_i-ネット N_i を取ると，N_i は X へ Gromov-Hausdorff 収束する．

2.3. strainer と特異点． ここではこの原稿で使われる Alexandrov 空間に関する基本的な定義や事実を復習する．より詳しい説明については山口氏，大津氏の解説または [12, 98, 81] などを参照のこと．

X を曲率 $\geq \kappa$ の n 次元 Alexandrov 空間とし d_X をその距離関数とする．$m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ に対して，一点 $x \in X$ が (m, δ)-*strained* とは，ある $2m$ 個の点の集合 $\{p_i\}_{i=\pm 1, \ldots, \pm m} \subset X$ が存在し，任意の $i, j = \pm 1, \ldots, \pm m$ に対して，

$$\tilde{\angle} p_i x p_j > \begin{cases} \pi/2 - \delta & \text{if } i \neq \pm j, \\ \pi - \delta & \text{if } i = -j \end{cases}$$

をみたすときを言う．ここで，$\tilde{\angle} p_i x p_j$ は三角形 $\triangle p_i x p_j$ の比較三角形(つまり定曲率 κ の完備単連結空間型の中の 3 辺の長さが同じ三角形）の x に対応する頂点での角度を表す．このときの $\{p_i\}_{i=\pm 1, \ldots, \pm m}$ を x に

おける *strainer* と呼び，$\min_i d_X(x,p_i)$ を *strainer* $\{p_i\}$ の長さという．(m,δ)-strained でない X の点全体の集合を $S_{m,\delta}$ とおく．これは X の閉集合で そのハウスドルフ次元が $m-1$ 以下であることが知られている ([12] の 10.6 を見よ)．さらにもっと強く，勝手な閉集合 $C \subset S_{m,\delta}$ は要素の個数が $\leq O_{C,\delta}(\epsilon^{1-m})$ の ϵ-ネットをもつことが証明されている．$S_\delta := S_{n,\delta}$ のことを δ-特異集合，その元を δ-特異点と呼ぶ．

点 $x \in X$ が X の特異点であるとは，x における tangent cone K_x がユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に等長同型でない (つまり space of directions Σ_x が単位球面 S^{n-1} に等長同型でない) ときを言う．特異点全体の集合を S_X と書き，これを特異集合と呼ぶ．$S_X = \bigcup_{\delta>0} S_\delta$ が成り立つので，S_X のハウスドルフ次元は $n-1$ 以下となり，さらに $S_X \setminus \partial X$ のハウスドルフ次元は $n-2$ 以下となることが分かる ([12, 81])．特異集合はそれほど単純な集合ではなく X 上稠密になることもある ([81] の §0 を見よ)．また，非特異集合 $X \setminus S_X$ は凸集合である，つまり任意の $X \setminus S_X$ の 2 点を結ぶ最短測地線は $X \setminus S_X$ に含まれる ([12])．

$0 < \delta \ll 1/n$ をみたす δ を一つ固定する．もし点 $x \in X$ が 長さ ℓ の strainer $\{p_i\}_{i=\pm1,\dots,\pm n}$ をもつ strained point であるならば，写像 $\varphi(y) := (d_X(p_i,y))_{i=1,\dots,n}$ と

$$\tilde{\varphi}(y) := \left(\frac{1}{\mathcal{H}^n(B(p_i,r))} \int_{B(p_i,r)} d_X(y,z)\, \mathcal{H}^n(dz) \right)_{i=1,\dots,n}$$

は十分小さい $r > 0$ に対して $B(x,r)$ 上 $(\theta_n(\delta) + \theta_{n,\delta}(r/\ell))$-概等長である ([12, 81])．特に，$X \setminus S_\delta$ はリップシッツ多様体であることが分かる．

2.4. 測度空間上の L^p 空間．測度論の基本的な事柄は既知のものと仮定する．ここでは L^p 空間に関する記号を整理しておく．

本稿では，測度空間(*measure space* または *measured space*) とは，正値ラドン測度が付随した，局所コンパクトで第 2 可算公理をみたす距離付け可能な位相空間と定義する．以下，X を測度空間で m_X をその付随する正値ラドン測度とする．X からある位相空間 Y への写像 $u : X \to Y$ が m_X-可測であるとは，任意のボレル集合 $B \subset Y$ に対して，$f^{-1}(B)$ が m_X-可測集合であるときに言う．実数 $p \geq 1$ に対して，$L^p(X) = L^p(X; m_X)$ を m_X-可測かつ p 乗可積分な X 上の実数値関数全体の集合とする．関数 $u \in L^p(X)$ の L^p ノルムを

$$\|u\|_{L^p} := \|u\|_{L^p(X)} := \left(\int_X |u|^p \, dm_X \right)^{1/p}$$

で定義する．$p = \infty$ のとき，m_X-可測な X 上の関数 u に対して，u の L^∞ ノルムを

$$\|u\|_{L^\infty} := \|u\|_{L^\infty(X)} := \text{ess-sup}_X |u| := \inf\{\, a \geq 0 \mid |u| \leq a\ m_X\text{-a.e.} \,\}$$

と定義し，$L^\infty(X)$ を L^∞ ノルムが有限な X 上の m_X-可測関数全体の集合とする．ここで，m_X-a.e. は「測度 m_X に関して，ほとんど至る所」の意味である．また，ほとんど至る所同じ値を取る $L^p(X)$ 内の関数は同一視して考える，つまり，厳密には $L^p(X)$ はこのような同値類全体の集合とする．すると，$1 \leq p \leq \infty$ について，$L^p(X)$ は L^p ノ

ルムに関して可分なバナッハ空間となる．$1/p+1/q=1$ とするとき，$u \in L^p(X)$ と $v \in L^q(X)$ のペアリング積 (u,v) を次で定義する．

$$(u,v) := \int_X uv\, dm_X.$$

$p=q=2$ のとき，このペアリング積は L^2 内積と呼ばれ，これにより $L^2(X)$ は可分なヒルベルト空間となる．

2.5. 超関数微分. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，$u:\Omega \to \mathbb{R}$ を局所可積分関数とする．$C_0^\infty(\Omega)$ を C^∞ 関数 $f:\Omega \to \mathbb{R}$ でそのサポート $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$ が Ω の中のコンパクト部分集合であるようなもの全体の集合とする．u の超関数の意味の導関数または弱導関数とは，以下で定義される線形汎関数 $D^i u : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ のことを言う：

$$D^i u(f) := -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x^i} u\, dx \qquad (f \in C_0^\infty(\Omega),\ i=1,\ldots,n).$$

ここで，x^i は $\mathbb{R}^n$ の i 番目の座標で，dx は $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度である．同様に $u:\Omega \to \mathbb{R}$ の超関数の意味の *2* 階偏導関数 $D^{(i,j)}u : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ を以下で定義する．

$$D^{(i,j)}u(f) := \int_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} u\, dx \qquad (f \in C_0^\infty(\Omega),\ i,j=1,\ldots,n).$$

以下，超関数微分に対しても普通の微分と同じ記号 $\frac{\partial u}{\partial x^i} := D^i u$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} := D^{(i,j)}u$ などを使うことにする．一般に，超関数偏微分の可換性：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}$$

が成り立つことが定義から直ちに分かる．

2.6. 有界変動関数. 有界変動関数については最近出版された本 [4] に詳しく解説されている．ここでは基本的な事柄のみ述べる．

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．局所可積分関数 $u:\Omega \to \mathbb{R}$ が局所有界変動または BV_{loc} であるとは，$\bar{U} \subset \Omega$ をみたす任意の開集合 U に対して，

$$\sup\left\{ \int_U u \operatorname{div}\varphi\, dx \mid \varphi \in C_0^1(U,\mathbb{R}^n), |\varphi| \le 1 \right\} < \infty$$

であるときを言う．ここで，$C_0^1(U,\mathbb{R}^n)$ は C^1 関数 $f:U \to \mathbb{R}^n$ で $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq o\}}$ が U のコンパクト部分集合になる様な f 全体の集合とする．Ω 上の局所有界変動関数全体の集合を $BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ と書く．任意の $u \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対して，Ω 上のある正値ラドン測度 μ_u と μ_u-可測な関数 $\sigma_u:\Omega \to \mathbb{R}^n$ が存在して，$|\sigma_u| = 1$ μ_u-a.e. かつ任意の $\varphi \in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\, dx = -\int_\Omega \langle \varphi, \sigma_u \rangle\, d\mu_u$$

が成り立つことが知られている．ここで，$\langle \cdot,\cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積，$|\cdot| := \sqrt{\langle \cdot,\cdot \rangle}$ である．このラドン測度 μ_u を u の変動測度と呼

び $\|Du\|$ と書く．上より特に，$\sigma_u =: (\sigma_u^1, \ldots, \sigma_u^n)$ とおくと，u の超関数の意味の導関数は

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} = \sigma_u^i \|Du\|$$

である．

2.7. 凸関数と DC 関数. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が凸であるとは，任意の線分 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ と $t \in [0,1]$ に対して

$$u(\gamma(t)) \le t\, u(\gamma(0)) + (1-t)\, u(\gamma(1))$$

をみたすときを言う．$u : \Omega \to \mathbb{R}$ が凸ならば局所リップシッツ連続であり，さらにもし u が C^2 ならばそのヘッシアンは非負値の対称行列である．

局所リップシッツ連続な関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が DC 関数であるとは，任意の $x \in \Omega$ に対して，Ω に含まれる x のある近傍 U 上で定義された 2 つの凸関数 v, w が存在して，U 上で $u = v - w$ と書けているときを言う．任意の DC 関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ はほとんど至る所全微分可能で，その偏導関数 $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ は BV_{loc} 関数になり，さらに超関数の意味の 2 階偏導関数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$ は $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ の超関数の意味の偏導関数（つまり累次微分）に一致し，それは符号付きラドン測度となる．超関数微分の一般的な性質から，以下の可換性が成り立つ：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}.$$

A. D. Alexandrov [1] の古典的な定理より，任意の DC 関数はほとんど至る所 Stolz の意味で 2 階微分可能であることが，良く知られている．ここで,「Stolz の意味で 2 階微分可能」とは，2 階のテイラー展開が収束することを意味する．

局所リップシッツ写像 $u = (u_1, \ldots, u_m) : U \to \mathbb{R}^m$ が DC であるとは，各座標関数 u_i が DC 関数であると定義する．$V \subset \mathbb{R}^m$ をもう一つの開集合とするとき，もし $u : U \to V$ と $v : V \to \mathbb{R}^\ell$ が両方とも DC 写像ならば，その合成 $v \circ u : U \to \mathbb{R}^\ell$ も DC 写像になる．

u を Alexandrov 空間 X 上で (局所的に) 定義された局所リップシッツ関数とする．この u が凸関数であることを，X 上の任意の測地線 $\gamma : [0,1] \to X$ に対して，$u \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ が凸関数であると定義する．u が DC 関数であることも，前と同様に，局所的に 2 つの凸関数の差で表せることで定義する．

2.8. ディリクレ形式. リーマン多様体 M 上の 2 つの $W^{1,2}$ 関数 u, v に対して，

$$\mathcal{E}(u,v) := \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_M \, d\mathrm{vol}_M$$

とおく．ここで，∇u は u の弱い意味での微分（勾配ベクトル場），$\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ はリーマン計量から決まる内積，$d\mathrm{vol}_M$ はリーマン計量から決まる体積測度である．この双線形形式 $\mathcal{E} : W^{1,2}(M) \times W^{1,2}(M) \to \mathbb{R}$ はエネルギー形式と呼ばれるが，ディリクレ形式とはこのエネルギー形式の概念の抽象化である．ここではディリクレ形式の基本的な定義を

復習する．詳しくは [35] を参照のこと．関数解析のごく基本的な事柄は既知のものとする．

X を測度空間とする．m_X のサポートを以下で定義する．

$$\operatorname{supp} m_X := \{\, x \in X \mid x \text{ の任意の開近傍 } U \text{ に対して } m_X(U) > 0 \text{ が成り立つ} \,\}$$

今，$\operatorname{supp} m_X = X$ と仮定する，つまり，任意の空でない開集合 $O \subset X$ に対して $m_X(O) > 0$ とする． 稠密な線形部分空間 $\mathcal{F} \subset L^2(X)$ 上で定義された非負対称双線形形式 $\mathcal{E} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ を考える．つまり，任意の $u, v \in \mathcal{F}$, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，次をみたすものを考える．

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u,v) &= \mathcal{E}(v,u), \\ \mathcal{E}(au+bv, w) &= a\,\mathcal{E}(u,w) + b\,\mathcal{E}(v,w), \\ \mathcal{E}(u,u) &\geq 0. \end{aligned}$$

$u, v \in \mathcal{F}$ に対して

$$\mathcal{E}_1(u,v) := \mathcal{E}(u,v) + (u,v)$$

とおくと，これは $\mathcal{F}$ 上の内積を与え，これから決まるノルムを $\mathcal{E}_1^{1/2}$ と書く．$\mathcal{F}$ がノルム $\mathcal{E}_1^{1/2}$ に関して完備で（つまりヒルベルト空間になる），かつ任意の $u \in \mathcal{F}$ に対して

$$u^\sharp := 0 \vee u \wedge 1 \in \mathcal{F}, \qquad \mathcal{E}(u^\sharp, u^\sharp) \leq \mathcal{E}(u,u)$$

をみたすとき，組 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $L^2(X)$ 上のディリクレ形式と呼ぶ．

X 上の連続関数でそのサポートがコンパクトなもの全体の集合を $C_0(X)$ とおく．$L^2(X)$ 上のディリクレ形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が正則であるとは，$\mathcal{F} \cap C_0(X)$ が $\mathcal{E}_1^{1/2}$ に関して $\mathcal{F}$ で稠密で，かつ $C_0(X)$ で sup ノルムに関しても稠密であるときを言う．$\mathcal{F} \cap C_0(X)$ の部分集合 $\mathcal{C}$ が *special standard core* であるとは，以下の 3 つの条件をみたすときを言う．

($\mathcal{C}$.1) $\mathcal{C}$ は $\mathcal{E}_1^{1/2}$ に関して $\mathcal{F}$ で稠密で，かつ $C_0(X)$ の稠密な部分代数（つまり和と積に関して閉じている）である．

($\mathcal{C}$.2) 任意のコンパクト部分集合 $K \subset X$ と，それを含むような任意の相対コンパクトな開集合 $O \subset X$ に対して，K 上では $u = 1$ かつ $X \setminus O$ 上では $u = 0$ をみたすようなある非負関数 $u \in \mathcal{C}$ が存在する．

($\mathcal{C}$.3) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある C^∞ 関数 $\phi_\epsilon : \mathbb{R} \to [\,-\epsilon, \epsilon + 1\,]$ が存在して，以下の (a)–(c) をみたす．
  (a) $t \in [\,0, 1\,]$ のとき $\phi_\epsilon(t) = t$.
  (b) $s < t$ ならば $0 \leq \phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(s) \leq t - s$.
  (c) 任意の $u \in \mathcal{C}$ に対して $\phi_\epsilon \circ u \in \mathcal{C}$.

($\mathcal{C}$.1) により，special standard core が存在すれば，ディリクレ形式は正則である．$L^2(X)$ 上のディリクレ形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が 局所性をみたすとは，$\operatorname{supp} u$ と $\operatorname{supp} v$ が互いに交わらず，共にコンパクト集合であるような任意の関数 $u, v \in \mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{E}(u,v) = 0$ をみたすときを言う．ここで $\operatorname{supp} u$ は u のサポートを表す．$L^2(X)$ 上のディリクレ形

式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が強局所性をみたすとは，$\operatorname{supp} u$ と $\operatorname{supp} v$ が共にコンパクトで，$\operatorname{supp} v$ のある近傍上で $u = \mathrm{const}\ m_X$-a.e. をみたすような任意の関数 $u,v \in \mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{E}(u,v)=0$ であるときを言う．

$L^2(X)$ 上のディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の生成作用素とは次で定義される作用素 A のことを言う．先ず，A の定義域 $\mathcal{D}(A)$ は次で与えられる．

$$\mathcal{D}(A) := \{\, u \in \mathcal{F} \mid v \mapsto \mathcal{E}(u,v) \text{ は } L^2 \text{ 有界 } \}.$$

リースの補題より，任意の $u \in \mathcal{D}(A)$ に対して，ある $w \in L^2(X)$ が唯一つ存在して，$\mathcal{E}(u,v)=(w,v)$ が任意の $v \in \mathcal{F}$ に対して成り立つ．このとき，$Au := w$ と定義する．すると，$\mathcal{D}(A)$ は $L^2(X)$ で稠密で，$\mathcal{F}$ でノルム $\mathcal{E}_1^{1/2}$ に関して稠密であり，しかも A は $L^2(X)$ 上の非負自己共役作用素であることが知られている．

ディリクレ形式に付随した，集合の 1-容量 $\mathrm{Cap}(\cdot)$ の概念を次で定義する．先ず，開集合 $O \subset X$ に対して，

$$\mathrm{Cap}(O) := \inf\{\, \mathcal{E}_1(u,u) \mid u \in \mathcal{F} \text{ かつ } u \geq 1\ m_X\text{-a.e. on } O \,\}$$

と定義し，次に任意の部分集合 $B \subset X$ に対して，

$$\mathrm{Cap}(B) := \inf\{\, \mathrm{Cap}(O) \mid O \text{ は } B \text{ を含む } X \text{ の開集合} \,\}$$

と定義する．一般に，m_X-可測集合 $B \subset X$ に対して，$\mathrm{Cap}(B) \geq m_X(B)$ が成り立つ．また，$\mathcal{C}$ を special standard core とするとき，任意のコンパクト部分集合 $K \subset X$ に対して，

$$\mathrm{Cap}(K) = \inf\{\, \mathcal{E}_1(u,u) \mid u \in \mathcal{C},\ u \geq 1 \text{ on } K \,\},$$

が成り立つ．

$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を正則ディリクレ形式とするとき，任意の $u \in \mathcal{F}$ に対して，ある関数 $\tilde{u} : X \to \mathbb{R}$ と単調増加な X の閉集合の列 $\{F_k\}_{k=1,2,\dots}$ が存在して，$\lim_k \mathrm{Cap}(X \setminus F_k) = 0$ かつ，各 k に対して制限 $\tilde{u}|_{F_k}$ は F_k 上連続で，$\tilde{u} = u\ m_X$-a.e. をみたす ([35] の Theorem 2.1.3)．この関数 $\tilde{u}$ を u の *quasi-continuous* m_X*-version* と呼ぶ．

以下，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(X)$ 上の強局所正則ディリクレ形式とする．任意の $u,v \in \mathcal{F}$ に対して，次の (2.1),(2.2) をみたす符号つき有限ボレル測度 $\mu_{\langle u,v\rangle}$ が存在する ([35] の Theorem 1.4.2)．

$$\int_X \tilde{f}\, d\mu_{\langle u,v\rangle} = \mathcal{E}(uf,v) + \mathcal{E}(u,vf) - \mathcal{E}(uv,f), \quad u,v,f \in \mathcal{F}_b, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\mu_{\langle u,v\rangle}(X), \quad u,v \in \mathcal{F}. \tag{2.2}$$

ここで，$\mathcal{F}_b := \mathcal{F} \cap L^\infty(X)$ とおき，$\tilde{f}$ は f の quasi-continuous m_X-version である．この $\mu_{\langle u,v\rangle}$ を $u,v \in \mathcal{F}$ に付随するエネルギー測度と呼ぶ．$u=v$ のときは $\mu_{\langle u\rangle} := \mu_{\langle u,u\rangle}$ と書くことにする．

2 点 $x,y \in X$ に対して，

$$d_{\mathcal{E}}(x,y) := \sup\{\, u(y) - u(x) \mid u \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \cap C(X),\ \mu_{\langle u\rangle} \leq m_X \,\}$$

とおく．ここで，$\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ は $\mathcal{F}$ の局所化を表す，つまり，X 上の次の条件をみたす関数 u 全体の集合とする．勝手な相対コンパクトな開集合

$O \subset X$ に対して，ある関数 $v \in \mathcal{F}$ が存在して，O 上で $u = v\ m_X$-a.e. が成り立つ．

一般に $d_{\mathcal{E}} : X \times X \to [\,0, \infty\,]$ は擬距離になる，つまり対称性，三角不等式，$d_{\mathcal{E}}(x,x) = 0$ をみたすが，$d_{\mathcal{E}}(x,y) = 0$ だからといって $x = y$ とは限らない．$d_{\mathcal{E}}$ をディリクレ形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から導入されたカラテオドリ距離関数(*Carathéodory distance function* または *intrinsic metric*) と呼ぶ．これに関しては [104, 106] で詳しく調べられている．

3. ALEXANDROV 空間の解析的な構造

3.1. 位相空間上の「構造」．一般に Alexandrov 空間はある弱い意味での微分構造をもつが，それを正確に記述するには普通の多様体上の微分構造の言葉だけでは表現できない．この章では多様体上の微分構造の概念を一般化して，位相空間上の一般的な「構造」についての定義を与える．

3.1.1. $\mathcal{F}$-構造．最初に，$\mathbb{R}^n$ の部分集合の間の写像のクラスを公理論的に定めよう．$n \in \mathbb{N}$ に対して，以下のような集合族 $\mathcal{F}$ を考える．

$$\mathcal{F} = \{\, \mathcal{F}(U; A) \mid U \subset \mathbb{R}^n \text{ は開集合で } A \subset U \text{ は部分集合} \,\}$$

ただし，

(i) 各々の $\mathcal{F}(U; A)$ は U から $\mathbb{R}^n$ への写像のクラスである．
(ii) もし $A \supset B$ ならば $\mathcal{F}(U; A) \subset \mathcal{F}(U; B)$ が成り立つ．
(iii) もし $u \in \mathcal{F}(U; A)$, $v \in \mathcal{F}(V; B)$, $u(U) \subset V$ ならば，

$$v \circ u \in \mathcal{F}(U; A \cap u^{-1}(B))$$

が成り立つ．

ここでは具体的に以下のものを考える．

クラス C^1: $C^1(U; A)$ を U から $\mathbb{R}^n$ への写像で，A 上では C^1，つまり A 上で微分可能でその微分が A 上で連続なもの全体のクラスとする．

クラス DC: $DC(U; A)$ を U から $\mathbb{R}^n$ への写像で，ある $A \subset O \subset U$ をみたすような開集合 $O \subset \mathbb{R}^n$ 上で DC であるもの全体のクラスとする．

以下に多様体の微分構造を真似て定義をしよう．X をパラコンパクトなハウスドルフ空間，$Y \subset X$ を部分集合，族 $\mathcal{F}$ を上の (i)–(iii) をみたすものとする．組 (U, φ) が X の局所座標であるとは，$U \subset X$ が開集合で，φ が U から $\mathbb{R}^n$ のある開集合への位相同型写像であるときをいう．X の局所座標の部分族 $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ が「$Y \subset X$ 上の $\mathcal{F}$-アトラス」であるとは，次の (i), (ii) をみたすことで定義する．

(i) $Y \subset \bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U$ が成り立つ．
(ii) $U \cap V \neq \emptyset$ をみたす 2 つの局所座標 $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ に対して，

$$\psi \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{F}(\varphi(U \cap V); \varphi(U \cap V \cap Y)).$$

$Y \subset X$ 上の2つの $\mathcal{F}$-アトラス $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ が同値であるとは，$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ がまた $Y \subset X$ 上の $\mathcal{F}$-アトラスになることで定義する．各同値類を「$Y \subset X$ 上の $\mathcal{F}$-構造」と呼ぶ．

今，$Y = X$ と仮定しよう．このとき，$Y \subset X$ 上の $\mathcal{F}$-構造のことを簡単に，X 上の $\mathcal{F}$-構造と呼ぶことにする．もし X 上に $\mathcal{F}$-構造が存在するならば，X は必然的に位相多様体になるが，このとき X を $\mathcal{F}$-多様体と呼ぶ．$\mathcal{F} := C^1$ に取ったときは，$\mathcal{F}$-多様体は普通の意味での C^1 微分可能多様体になる．

3.1.2. C^1-構造と接空間．前節の意味で，$Y \subset X$ 上に C^1-構造が与えられたとする．このとき接ベクトルを定義しよう．3つ組 (U, φ, ξ) を考える．ここで，(U, φ) は C^1-構造に従属する局所座標で，ξ は $\mathbb{R}^n$ のベクトルである．2つのそのような3つ組 (U, φ, ξ), (V, ψ, η) が一点 $x \in Y$ において同値であるということを，$x \in U \cap V$ かつ任意の $j = 1, \ldots, n$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \eta^j$$

が成り立つことで定義する．ただし，$(x^1, \ldots, x^n) := \varphi$, $(y^1, \ldots, y^n) := \psi$, $(\xi^1, \ldots, \xi^n) := \xi$, $(\eta^1, \ldots, \eta^n) := \eta$ とおく．点 $x \in Y$ において，その同値類 $[(U, \varphi, \xi)]_x$ 全体の集合を x における接空間 T_xX と定義する．明らかに，接空間 T_xX は n 次元の $\mathbb{R}$ 上の線形空間の構造を持つ．$TX := \coprod_{x \in Y} T_xX$ を接束と呼ぶ．各局所座標 (U, φ) に対して

$$TU := \{\, [(U, \varphi, \xi)]_x \in TX \mid x \in U,\ \xi \in \mathbb{R}^n \,\}$$

は $U \times \mathbb{R}^n$ と同一視があるので，これにより TX 上へ位相を導入する．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ の一点 $x \in Y$ における微分 $df_x : T_xX \to \mathbb{R}$ も微分多様体と同様に定義する．Y 上の連続なベクトル場，テンソル場，微分形式なども微分多様体と同様に定義できるが，この辺のことは3.4章で改めて定式化を与える．

3.2. **Alexandrov 空間の構造．** X を n 次元 Alexandrov 空間として，$0 < \delta \ll 1/n$ をみたす δ を固定する．任意の点 $x \in X \setminus S_\delta$ のまわりに，2.3章で定義した局所座標 $(U, \tilde{\varphi})$ $(U := B(x, r))$ を取ることができる．そのような局所座標 $(U, \tilde{\varphi})$ 全体の族をアトラスとして，$X \setminus S_X \subset X$ 上の C^1-構造が決まり ([81])，さらに $X \setminus S_\delta \subset X$ 上の DC-構造がきまる ([83])．このような構造のことを特異集合 S_X の DC^1-構造と呼ぶことにする．DC^1-構造の一般的な定義は3.4章で行なう．今，$X \setminus S_\delta$ は DC-多様体になっていることに注意しよう．X 上の DC 関数で，$X \setminus S_X$ 上では C^1 になっているようなもののクラスも DC^1 で表すことにする．一般に，X の DC^1 局所座標 (U, φ) と関数 $u : U \to \mathbb{R}$ に対して，u が DC^1 であることと，$u \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ が DC^1 であることは同値である ([83] の第3章)．

[81] において，以下を満たすような $X \setminus S_X$ 上の自然な C^0-リーマン計量 g_X が定義された．

- g_X から決まる非特異集合 $X \setminus S_X$ 上の距離関数は X 上の元々の距離関数 d_X に一致する ([81]).
- 各点 $x \in X \setminus S_X$ において，tangent cone K_x と接空間 T_xX との間に等長的な自然な同一視がある ([81] の Lemma 3.6(1)).
- u を X 上のボレル可測な関数とするとき，リーマン計量から決まる体積要素 $d\mathrm{vol}_X$ に関する積分 $\int_X u\, d\mathrm{vol}_X$ は n 次元ハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^n$ に関する積分 $\int_X u\, d\mathcal{H}^n$ に一致する ([81] の §7.1).
- リーマン計量 g_X は BV_{loc} である ([83] の §4.2).

X 上のベクトル場 V が L^1_{loc} であるとは，任意の DC^1 局所座標 $(U, x^1, \ldots, x^n)$ に対して，$V = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ で定義される関数 $\xi^1, \ldots, \xi^n$ らが全て L^1_{loc} であると定義する．リーマン計量 g_X に従属して，勾配ベクトル場 ∇u の概念が，u が $X \setminus S_X$ 上で点別に微分可能なら点別に定義されたベクトル場として，またより一般に弱い微分の意味で $X \setminus S_\delta$ 上の L^1_{loc} ベクトル場として定義できる．$X \setminus S_X$ 上の L^1_{loc} ベクトル場 V が L^p であるとは，その g_X に関するノルム $|V|$ が L^p 関数であるとき，つまり

$$\|V\|_{L^p} := \left(\int_X |V|^p \, d\mathcal{H}^n \right)^{1/p} < \infty$$

のときをいう．

$p \geq 1$ に対して $W^{1,p}(X)$ を X 上の $(1,p)$-ソボレフ空間，つまり弱い微分の意味での勾配ベクトル場 ∇u が L^p になるような関数 $u \in L^p(X)$ 全体の空間とする．関数 $u \in W^{1,p}(X)$ の $W^{1,p}$ ノルム $\|u\|_{W^{1,p}}$ を次で定義する．

$$\|u\|_{W^{1,p}} := (\|u\|^p_{L^p} + \|\nabla u\|^p_{L^p})^{1/p}.$$

$p = 2$ のとき，エネルギー形式 $\mathcal{E}$ を以下で定義する．

$$\mathcal{E}(u, v) := \int_X \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, d\mathcal{H}^n, \qquad u, v \in W^{1,2}(X)$$

ここで，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ はリーマン計量 g_X から導入される内積である．このとき，$(\mathcal{E}, W^{1,2}(X))$ は強局所ディリクレ形式になることが簡単に確かめられる．しかしながら，多様体などの場合と違って $(\mathcal{E}, W^{1,2}(X))$ の正則性は明らかではない．これは S_δ という座標近傍の存在しない特異集合があるためである．正則性は確率論的にはブラウン運動の path の連続性の為に必要であることを注意しておく．この正則性については次の章で証明する．X の上のラプラシアン Δ をエネルギー形式 $(\mathcal{E}, W^{1,2}(X))$ の生成作用素として定義しておく．

3.3. 特異集合の回りのカットオフ関数の構成．この章では X を曲率 $\geq \kappa$ のコンパクト n 次元 Alexandrov 空間で境界を持たないと仮定する．この章の目標は以下の定理を証明することである．

定理 3.1. $1 \leq p \leq 2$ のとき，埋め込み

$$DC^1_0(X \setminus S_\delta) \hookrightarrow W^{1,p}(X)$$

は稠密である．

この定理を証明するには，S_δ のまわりのカットオフ関数を構成すればよい．カットオフ関数の構成の基礎となるアイデアは Chavel-Feldman [16] および Li-Tian [64] による．ここに，Chavel-Feldman は余次元 2 の部分多様体のまわりにカットオフ関数を構成し，Li-Tian は代数多様体の特異集合のまわりに同様の方法で構成した．それらの場合と違って我々の場合では，S_δ の r-近傍の境界の面積を評価する方法がないので，より精密な議論が必要となる．以下に証明に入っていこう．

C を以下の性質を持つ X のコンパクト部分集合とする．

(*) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある C の ϵ-ネット N_ϵ が存在して，その元の個数が $\# N_\epsilon \le O_C(\epsilon^{2-n})$ をみたす．

ここで，$O_C(\cdot)$ の定義は §2.1 を見よ．任意の $\delta > 0$ に対して $C := S_\delta$ は上の性質をみたすことを注意する (§2.3 を見よ)．

自然数 k を任意に取って固定する．(*) より，勝手な自然数 $i \ge k$ に対して，C の $3^{-(i+1)}$-ネット N_i で $\# N_i \le O_C(3^{(i+1)(n-2)})$ をみたすものが取れる．X の部分集合 A_i, A'_i を次のように定めよう．

$$
\begin{aligned}
A_i &:= B(N_i, 3^{-i}) \setminus B(N_i, 2 \cdot 3^{-(i+1)}), \\
A'_i &:= B(N_i, 2 \cdot 3^{-(i+1)}) \setminus B(N_{i+1}, 3^{-(i+1)}).
\end{aligned}
$$

すると，$B(N_i, 2 \cdot 3^{-(i+1)}) \supset B(N_{i+1}, 3^{-(i+1)})$ なので，各 i について A_i と A'_i は互いに交わらず，かつ $\bigcup_{i \ge k}(A_i \cup A'_i) = B(N_k, 3^{-k}) \setminus C$ をみたす．

補題 3.2. $2 \cdot 3^{-(i+1)} \le r \le 3^{-i}$ をみたすような任意の $r > 0$ と $i \ge k$ に対して，

$$
\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(N_i, r)) \le O_{C,\kappa}(r) \quad \text{かつ} \quad \mathcal{H}^n(B(N_i, r)) \le O_{C,\kappa}(r^2)
$$

が成り立つ．

証明. Alexandrov の凸性から，$\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x, r)) \le O_\kappa(r^{n-1})$ が任意の $x \in X$, $r > 0$ に対して成り立つ．従って，$2 \cdot 3^{-(i+1)} \le r \le 3^{-i}$ をみたす任意の $r > 0$, $i \ge k$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(N_i, r)) &\le \sum_{x \in N_i} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x, r)) \\
&\le \# N_i \cdot O_\kappa(r^{n-1}) \\
&\le O_{C,\kappa}(r).
\end{aligned}
$$

もう一つの不等式も同様に証明される． □

次に，一見当たり前そうな補題を述べるが，実はこの証明はそれほど明らかではない．

補題 3.3. $u\colon X \to \mathbb{R}$ を非負連続関数とすると，任意の $i \ge k$ に対して，

$$
\int_{A_i} u \, d\mathcal{H}^n \le \mathrm{const} \int_{2 \cdot 3^{-(i+1)}}^{3^{-i}} \int_{\partial B(N_i, r)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} dr
$$

が成り立つ．

証明. この証明では，全ての測地線は弧長でパラメータが付けられていると仮定する．自然数 $i \geq k$ を固定する．Γ_x $(x \in X)$ を N_i から x への最短測地線全体の集合とする．当然その長さは $d_X(N_i, x)$ に等しい．各々の $x \in X$ に対して，Γ_x から一つ測地線 γ_x をとり，$d_X(N_i, x) \leq r$ を満たす $r > 0, x \in X$ に対して，$\varphi_r(x) := \gamma_x(r)$ とおく．$2 \cdot 3^{-(i+1)} \leq r_1 < r_2 \leq 3^{-i}$ をみたす任意の r_1, r_2 に対して，写像 $f_{r_1,r_2}\colon A(N_i, r_1, r_2) \to \partial B(N_i, r_1) \times [r_1, r_2]$ を

$$f_{r_1,r_2}(x) := (\varphi_{r_1}(x), d_X(x, N_i)), \qquad x \in A(N_i, r_1, r_2)$$

で定義する．ここで，$A(N_i, r_1, r_2) := B(N_i, r_2) \setminus B(N_i, r_1)$ とおく．X の任意の点の cut locus は $\mathcal{H}^n$-測度ゼロ（大津氏の解説の命題 4.11 または [81] を参照の事）なので，f_{r_1,r_2} は $\mathcal{H}^n$-a.e. 連続となる．また，X の測地線は分岐しないので，f_{r_1,r_2} は単射である．次を証明しよう．

主張 3.4. ある κ にしかよらない定数 $L > 0$ が存在して，$f_{r_1,r_2}|_{A(N_i,r_1,r_2)^\circ}$ は局所 *L-expanding* である．つまり，任意の $x \in A(N_i, r_1, r_2)$ に対して，x のある近傍 U が存在して，任意の $y \in U$ に対して，

$$d_X(f_{r_1,r_2}(x), f_{r_1,r_2}(y)) \geq L\, d_X(x, y) \tag{3.1}$$

が成り立つ．

証明. 勝手に点 $x \in A(N_i, r_1, r_2)^\circ$ をとり固定し，$\delta_x := d_X(\gamma_x(0), N_i \setminus \{\gamma_x(0)\})$ とおく．与えられた $\epsilon \in (0, \delta_x)$ に対して，$y \in A(N_i, r_1, r_2)^\circ$ を x に ϵ に比べて十分近くとる．すると，最短測地線の極限はまた最短測地線であることから，ある測地線 $\gamma \in \Gamma_x$ が存在して，

$$\sup_t d_X(\gamma(t), \gamma_y(t)) < \epsilon$$

をみたす．$d_X(\gamma(0), \gamma_y(0)) < \delta_x$ より，$\gamma(0) = \gamma_y(0)$ が成り立つ．

今，もし $\gamma_x(0) \neq \gamma_y(0)$ ならば，$d_X(\gamma_x(0), \gamma(0)) = d_X(\gamma_x(0), \gamma_y(0)) \geq \delta_x$ が成り立ち，従って Alexandrov の凸性により，$d_X(\gamma_x(r_1), \gamma(r_1)) \geq c_x$ が成り立つ．ここで，$c_x > 0$ は x に従属し，y には独立な定数である．$\epsilon < c_x/2$ と仮定すると，

$$d_X(f_{r_1,r_2}(x), f_{r_1,r_2}(y)) \geq d_X(\gamma_x(r_1), \gamma_y(r_1)) \geq c_x/2$$

が成り立ち，特にこのとき (3.1) を得る．

もし $\gamma_x(0) = \gamma_y(0)$ ならば，Alexandrov の凸性を三角形 $\triangle xy\gamma_x(0)$ に適用すれば，ある定数 $L > 0$ に対して (3.1) が成り立つことが分かる． □

補題の証明に戻ろう．u は X のコンパクト部分集合の上では一様連続になるので，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，もし数列 $2 \cdot 3^{-(i+1)} = r_1 < \cdots < r_m = 3^{-i}$ が $\max_j(r_{j+1} - r_j) \leq \delta$ をみたすならば，任意の j に対して $A(N_i, r_j, r_{j+1})$ 上で

$$\left| u - u \circ \varphi_{r_j} \right| < \epsilon$$

が成り立つ．$d\mathcal{H}^n_Z$ を距離空間 Z 上の n 次元ハウスドルフ測度とする．上の主張 3.4 より，push-forward 測度 $(f_{r_j,r_{j+1}})_* \mathcal{H}^n_{A(N_i,r_j,r_{j+1})^\circ}$ の積空間

$\partial B(N_i, r_j) \times [r_j, r_{j+1}]$ 上のハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^n_{\partial B(N_i,r_j)\times[r_j,r_{j+1}]}$ によるラドン-ニコディム微分は

$$\frac{d(f_{r_j,r_{j+1}})_* \mathcal{H}^n_{A(N_i,r_j,r_{j+1})^\circ}}{d\mathcal{H}^n_{\partial B(N_i,r_j)\times[r_j,r_{j+1}]}} \le L^{-n}$$

を満たす．従って，

$$\begin{aligned}\int_{A_i} u\, d\mathcal{H}^n &= \sum_j \int_{A(N_i,r_j,r_{j+1})} u\, d\mathcal{H}^n \\ &\le L^{-n} \sum_j \int_{\partial B(N_i,r_j)} (u+\epsilon)(r_{j+1}-r_j)\, d\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned}$$

この最後の式は $\delta \to 0$ とすると，

$$L^{-n} \int_{2\cdot 3^{-(i+1)}}^{3^{-i}} \int_{\partial B(N_i,r)} (u+\epsilon)\, d\mathcal{H}^{n-1} dr$$

に収束する．$\epsilon > 0$ は任意なので，これで補題が証明された． □

関数 $\hat{\phi}_k \colon [0,\infty) \to [0,1]$ を以下のように定義する．

$$\epsilon := 3^{-k}/2, \qquad \epsilon' := e^{-\epsilon^{-2}},$$

$$\hat{\phi}_k(r) := \begin{cases} 1 & \text{if } \epsilon \le r, \\ \left(\frac{r}{\epsilon}\right)^\epsilon & \text{if } 2\epsilon' \le r \le \epsilon, \\ \left(\frac{2\epsilon'}{\epsilon}\right)^\epsilon \left(\frac{r}{\epsilon'} - 1\right) & \text{if } \epsilon' \le r \le 2\epsilon', \\ 0 & \text{if } 0 \le r \le \epsilon'. \end{cases}$$

さらに関数 $\phi_k \colon X \to [0,1]$ を次で定義する．

$$\phi_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \in C, \\ \hat{\phi}_k\left(\frac{3^{-(i+1)}}{2}\right) & \text{if } x \in A'_i, \\ \hat{\phi}_k\left(d_X(x,N_i) - \frac{3^{-i}}{2}\right) & \text{if } x \in A_i, \\ 1 & \text{if } x \in X \setminus B(N_k, 3^{-k}). \end{cases}$$

明らかに ϕ_k は DC 関数である．補題3.2と3.3より，$1 \le p \le 2$ に対して，

$$\|\nabla \phi_k\|^p_{L^p} \le \text{const} \sum_{i=k}^\infty \int_{2\cdot 3^{-(i+1)}}^{3^{-i}} \hat{\phi}'_k \left(r - \frac{3^{-i}}{2}\right)^p \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(N_i, r))\, dr$$

が成り立つ．この右辺を計算すると $k \to \infty$ のときゼロに収束することが分かる．さらに補題3.2より，$q \ge 1$ に対して $k \to \infty$ のとき $\|1-\phi_k\|_{L^q} \to 0$ であることが分かる．この結果として以下を得る．

補題 3.5. $1 \le p \le 2$ かつ $q \ge 1$ と仮定する．

(1) 任意の $u \in W^{1,p}(X)$ に対して，

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla(\phi_k u) - \nabla u\|_{L^p} = 0$$

が成り立つ．

(2) 任意の $u \in L^q(X)$ に対して，

$$\lim_{k\to\infty} \|\phi_k u - u\|_{L^q} = 0$$

が成り立つ．

(3) 特に

$$W_0^{1,p}(X \setminus C) = W^{1,p}(X)$$

が成り立つ．

証明. (1) は

$$\|\nabla(\phi_k u) - \nabla u\|_{L^p} \leq \|(1-\phi_k)\nabla u\|_{L^p} + \|u\nabla\phi_k\|_{L^p}$$

から従う．

(2) と (3) は直接的な帰結である． □

定理 3.1 の証明. $DC_0^1(X \setminus S_\delta) \subset W^{1,p}(X)$ は明らかである．$C := S_\delta$ とおくと，これは性質 $(*)$ をみたすことを思いだそう．前に定義した N_i に対して，$X_{\delta,k} := X \setminus \bar{B}(N_k, 3^{-k})$ は特異集合 $X_{\delta,k} \cap S_X$ の DC^1 多様体である．$X_{\delta,k}$ は有限個の DC^1 局所座標で覆われるので，標準的な多様体上の軟化子による議論（つまり各座標近傍上での軟化子を一の分解で張り合わせる）から，任意の k に対して，

$$W_0^{1,p}(X_{\delta,k}) \subset \overline{DC_0^1(X \setminus S_\delta)}^{W^{1,p}}$$

が分かる．ここで，$\overline{A}^{W^{1,p}}$ は A の $W^{1,p}$ ノルムに関する閉包を表す．従って，補題3.5(3) から，

$$W^{1,p}(X) = W_0^{1,p}(X \setminus S_\delta) = \overline{\bigcup_k W_0^{1,p}(X_{\delta,k})}^{W^{1,p}} \subset \overline{DC_0^1(X \setminus S_\delta)}^{W^{1,p}}$$

が成り立つ．これで定理が証明された． □

以下に X 上の関数の「軟化」の概念を定義しよう．C^∞ 関数 $\rho_n : [0,\infty) \to [0,\infty)$ を 0 のまわりでは定数で，$r \geq 1$ に対しては $\rho_n(r) = 0$，さらに

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(|x|)\, dx = 1$$

をみたすように取る．実数 $h \in (0,1)$ に対して，関数 $u \in L^1(X)$ の軟化を

$$u_h(x) := \frac{\int_{y\in X} \rho_n(d(x,y)/h)u(y)\ d\mathcal{H}^n}{\int_{y\in X} \rho_n(d(x,y)/h)\ d\mathcal{H}^n}$$

で定義する．明らかに u_h は DC 関数である．関数

$$X \ni x \mapsto \int_{B(z,r)} d(x,y)\ \mathcal{H}^n(dy)$$

が $X \setminus S_X$ 上 C^1 であることの証明と同様に，u_h は $X \setminus S_X$ 上で C^1 になることが分かる ([81] の Lemma 5.1)．つまり，軟化 u_h は DC^1 である．この軟化を使うことにより以下が証明される．

補題 3.6. 埋め込み $DC^1(X) \subset C(X)$ は一様ノルムに関して稠密である．

証明. 関数 $u \in C(X)$ を勝手に取って固定する．u の連続係数を $\omega(u,r) := \sup\{\ |u(x)-u(y)| \mid x,y \in X,\ d(x,y) < r\ \}$ と定義する．X のコンパクト性より，$r \to 0$ のとき $\omega(u,r) \to 0$ が成り立つ．$\operatorname{supp} \rho_n \subset [0,1]$ なので，任意の $x \in X$ に対して

$$|u_h(x) - u(x)| \le \omega(u,h)$$

が得られる．従って補題が成り立つ． □

この補題と定理3.1により，以下が得られる．

定理 3.7 (エネルギー形式の正則性). $DC^1(X)$ は X 上のエネルギー形式 $(\mathcal{E}, W^{1,2}(X))$ の *special standard core* である．特に $(\mathcal{E}, W^{1,2}(X))$ は強局所正則ディリクレ形式である．

以下の定理は Alexandrov 空間の特異集合 S_X が，ポテンシャル論の立場からは無視できることを意味する．

定理 3.8 (特異集合の概極性). X の特異集合 S_X の 1-容量はゼロである．

証明. 定理3.7から，$DC(X)$ はエネルギー形式 $(\mathcal{E}, W^{1,2}(X))$ の special standard core になることに注意しよう．従って任意の $\delta > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} \operatorname{Cap}(S_\delta) &= \inf\{\ \|u\|_{W^{1,2}}^2 \mid u \in DC(X),\ u|_{S_\delta} \ge 1\ \} \\ &\le \lim_{k\to\infty} \|1 - \phi_k\|_{W^{1,2}}^2 = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで ϕ_k は $C := S_\delta$ に対して前に定義したものである．これから定理が従う． □

3.4. *DC* 構造の下でのテンソル解析. この章では Perelman [83] が導入した DC 構造の下でのテンソル解析を，多様体論の復習も兼ねて丁寧に解説する．最終目標は発散公式（命題3.12）の証明である．

ここでは Alexandrov 空間より一般の設定で考えよう．M を n次元のパラコンパクトな位相多様体，$\mathcal{A}$ をその 与えられたアトラス，$S \subset M$ を閉部分集合とする．以下の条件を仮定する．

(i) $U \cap V \ne \emptyset$ をみたす任意の 2 つの局所座標 $(U,\varphi), (V,\psi) \in \mathcal{A}$ に対して，座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ は DC かつ $\varphi(U \cap V \setminus S)$ 上で C^1 である．

(ii) 任意の局所座標 $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ に対して，$\varphi(U \cap S)$ は $\mathcal{H}^{n-1}$-測度ゼロである．($\mathcal{H}^k$ は k 次元ハウスドルフ測度.)

DC^1 で M 上で局所的に定義された関数 u で以下の条件を満たすもののクラスを表すとする．任意の局所座標 $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ に対して，$\bar{u} := u \circ \varphi^{-1}$ がリップシッツ連続かつ DC で，さらに $\varphi(U \setminus S)$ 上で C^1 である．

M 上の局所座標でアトラス $\mathcal{A}$ に適合するものを DC^1 局所座標と呼ぶことにする．我々は上の (i),(ii) をみたすような多様体 M のことを特

異集合 S をもつ DC^1 多様体と呼ぶ．$0<\delta\ll 1/n$ のとき，Alexandrov 空間 X の δ-特異集合の補集合 $M:=X\setminus S_\delta$ は特異集合 $S:=S_X\cap M$ をもつ DC^1 多様体になる．

以下，M を特異集合 S をもつ DC^1 多様体とする．BV^0 を M 上で局所的に定義された以下の条件をみたす関数 u のクラスとする．任意の DC^1 局所座標 (U,φ) に対して，関数 $\bar{u}:=u\circ\varphi^{-1}$ が有界かつ BV で，さらに $\varphi(U\setminus S)$ 上では連続である．

DC^1 関数の一階偏導関数は BV^0 関数になる．次が知られている（[4, 114, 83] を見よ）．

補題 3.9 (Vol'pert [114]). M 上で（局所的に）定義された任意の BV^0 関数 u,v に対して，以下が成り立つ．

(1) 積 uv は BV^0 関数である．

(2) もし u が定符号で，かつ $|u|\geq \mathrm{const}>0$ ならば，$1/u$ も BV^0 である．

(3) BV^0 関数の超関数の意味の一階偏導関数はラドン測度になり，次をみたす．

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\bar{u}\bar{v})=\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^i}\,\bar{v}+\bar{u}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial x^i}.$$

ここで，任意の DC^1 局所座標 (U,φ) に対して，$\bar{u}:=u\circ\varphi$ とおく．

注意 3.10. 補題 3.9(3) を得るためには定義の条件：「$\varphi(U\cap S)$ が $\mathcal{H}^{n-1}$-測度ゼロ」が不可欠である．詳しくは [4] の §3.10 などを参照の事．

次に M 上のテンソル場の定義をする．定義の方法は普通の超関数テンソル場と同じ方法による．2つの非負整数 r,s に対して，3つ組 $(U,\varphi,(T^{i_1\dots i_r}_{a_1\dots a_s}))$ からなるある部分族 $\mathcal{T}$ で以下の (i)–(iii) をみたすものを考える．

(i) 各 (U,φ) は DC^1 局所座標で，

$$\bigcup\{U\mid (U,\varphi,(T^{i_1\dots i_r}_{a_1\dots a_s}))\in\mathcal{T}\}=M$$

が成り立つ．

(ii) 任意の $i_j,a_j=1,\dots,n$ に対して，$T^{i_1\dots i_r}_{a_1\dots a_s}$ は $\varphi(U\setminus S)$ 上の関数，またはより一般に $\varphi(U)$ 上の超関数である．

(iii) $U\cap V\neq\emptyset$ をみたす任意の $(U,\varphi,(T^{i_1\dots i_r}_{a_1\dots a_s})),(V,\psi,(S^{j_1\dots j_r}_{b_1\dots b_s}))\in\mathcal{T}$ に対して，

$$T^{i_1\dots i_r}_{a_1\dots a_s}=\sum_{\substack{j_1,\dots,j_r\\ b_1,\dots,b_s}}S^{j_1,\dots,j_r}_{b_1,\dots,b_s}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{j_r}}\frac{\partial y^{b_1}}{\partial x^{a_1}}\cdots\frac{\partial y^{b_s}}{\partial x^{a_s}}$$

が成り立つ．ここで，

$$(x^1,\dots,x^n)=:\varphi\quad\text{and}\quad(y^1,\dots,y^n):=\psi$$

とおく．

(i)–(iii) をみたす2つの族 $\mathcal{T}$ と $\mathcal{S}$ が同値であるとは，$\mathcal{T}\cup\mathcal{S}$ がまた (i)–(iii) をみたすときを言う．この同値関係に関する同値類 $[\mathcal{T}]$ として M 上の (r,s)-テンソル場を定義する．任意のテンソル場 $T=[\mathcal{T}]$ と任意の DC^1 局所座標 (U,φ) に対して，$\{(U,\varphi,(T^{i_1\dots i_r}_{a_1\dots a_s}))\}\cup\mathcal{T}\in T$ をみたすような $(T^{i_1\dots i_r}_{a_1\dots a_s})$ が存在する．これを局所座標 (U,φ) に関する T の成分と呼ぶ．しばしば $T^{i_1\dots i_r}_{a_1\dots a_s}$ と $T^{i_1\dots i_r}_{a_1\dots a_s}\circ\varphi$ を同一視して考えることがある．

テンソル場が BV^0（または DC^1，RM）であるとは，その成分が BV^0（それぞれ DC^1，符号つきラドン測度）であるときをいう．以下，テンソル場は全て BV^0, DC^1, または RM と仮定する．

M 上のテンソル場 T, S とスカラー f（M 上の BV^0 関数または符号つきラドン測度）に対して，そのテンソル積 $T\otimes S$，和 $T+S$，スカラー倍 fT は普通の多様体と同様に定義する．しかし，測度と測度の掛け算は出来ないので，テンソル積 $T\otimes S$ は T か S の少なくとも一方が BV^0 でないと定義できない．同様に，スカラー倍 fT も f か T の一方が BV^0 でないと定義できないことに注意しよう．

M 上のベクトル場や p 次微分形式（つまりカレント）もテンソル場を使って普通に定義できる．M 上のベクトル場 $V=\sum_i\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ による関数 f の微分

$$Vf:=\sum_i\xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

はいつでも定義できる訳ではない．もし f が DC^1 で V が RM ならば，上は意味を持つ．また f も V も両方ともに BV^0 のときも，上は意味を持つ．この様な場合に限って Vf を定義する．

2つの BV^0 ベクトル場 $V=\sum_i\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ と $W=\sum_i\eta^i\frac{\partial}{\partial y^i}$ の交換子積

$$[V,W]:=\sum_{i,j}\left(\xi^j\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j}-\eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

は RM ベクトル場になる．

与えられた (r,s)-テンソル場 T，1次微分形式 $\omega_1,\dots,\omega_r$，ベクトル場 $V_1,\dots,V_s$ に対して，以下の様な作用を定義する．

$$T(\omega_1,\dots,\omega_r,V_1,\dots,V_s):=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\\a_1,\dots,a_s}}T^{i_1,\dots,i_r}_{a_1,\dots,a_s}w_{1i_1}\dots w_{ri_r}\xi_1^{a_1}\dots\xi_s^{a_s}\tag{3.2}$$

ここで w_{ij} は ω_i の成分で，ξ_i^j は V_i の成分とする．この作用は T, $V_1,\dots,V_s$, $\omega_1,\dots,\omega_r$ らの高々一つのみが RM であるときにのみ定義される．

逆に，M 上の任意の BV^0 1次微分形式 $\omega_1,\dots,\omega_r$ と任意の BV^0 ベクトル場 $V_1,\dots,V_s$ に対して，M 上の符号つきラドン測度

$$T(\omega_1,\dots,\omega_r,V_1,\dots,V_s)$$

が与えられて，これが T, ω_i, V_i らに関して線形であるとき，上式 (3.2) をみたすようなテンソル場が一意的に決まる．

BV^0 p 次微分形式 ω の外微分 $d\omega$ は以下の式で定義されるが，これは RM $(p+1)$ 次微分形式である．

$$d\omega(V_0,\dots,V_p) := \sum_i (-1)^i V_i(\omega(V_0,\dots,\hat{V}_i,\dots,V_p)) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([V_i,V_j],V_0,\dots,\hat{V}_i,\dots,\hat{V}_j,\dots,V_p)$$

ここで，$V_0,\dots,V_p$ は任意の BV^0 ベクトル場とする．特に，もし ω が DC^1 ならば，外微分 $d\omega$ は BV^0 になる．

M 上のベクトル場 V の内部積 i_V は以下のように定義される．$(p+1)$ 次微分形式 ω に対して，$(0,p)$-テンソル場 $i_V\omega$ が以下で定まる．

$$i_V\omega(V_1,\dots,V_n) := \omega(V,V_1,\dots,V_p)$$

ここで，$V_1,\dots,V_p$ は M 上のベクトル場である．ただし，$i_V\omega(V_1,\dots,V_p)$ は，$\omega,V,V_1,\dots,V_p$ らの内の高々一つが RM であるときのみ定義されることに注意する．

M 上の BV^0 ベクトル場 V に関する BV^0 $(0,p)$-テンソル場 ω のリー微分 $L_V\omega$ は以下の式により，RM $(0,p)$-テンソル場として定まる．

$$(L_V\omega)(V_1,\dots,V_p) := V(\omega(V_1,\dots,V_p)) - \sum_{i=1}^{p}\omega(V_1,\dots,[V,V_i],\dots,V_p)$$

ここで，$V_1,\dots,V_p$ は BV^0 ベクトル場．計算により次が成り立つことが分かる．

$$L_V\omega = \begin{cases} i_V d\omega + d\, i_V\omega & (p \geq 1 \text{ のとき}) \\ i_V d\omega & (p = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{3.3}$$

部分集合 $N \subset M$ が M の m 次元 DC^1 部分多様体であるとは，任意の点 $x \in N$ に対して，x のまわりのある DC^1 局所座標 (U,φ) と m 次元平面 $L \subset \mathbb{R}^n$ が存在して，$\varphi(N \cap U) = L \cap U$ をみたすときを言う．M の DC^1 部分多様体 N 上には自然に DC^1 構造が導入されるが，特異集合のハウスドルフ次元が $m-1$ より大きくなる可能性があり，N 上では補題 3.9(3) が成り立たず，テンソル計算がうまく行かない部分が生じる．$(n-1)$ 次元の DC^1 部分多様体を DC^1 超曲面と呼ぶ．M 上の $(n-1)$ 次の微分形式 ω に対して，DC^1 超曲面 N の上に $(n-1)$ 次微分形式 $\iota^*\omega$ が

$$\iota^*\omega(V_1,\dots,V_{n-1}) := \omega(V_1,\dots,V_{n-1})$$

で定義される．ここで，$V_1,\dots,V_{n-1}$ は N に接するベクトル場である．

多様体と全く同様に部分積分を使った計算から次の命題を証明できる．

命題 3.11 (ストークスの公式)**.** $\Omega \subset M$ を DC^1 超曲面で囲まれる向き付け可能なコンパクトな領域とする．すると，任意の BV^0 $(n-1)$

次微分形式 ω に対して,

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \iota^*\omega.$$

が成り立つ.

これ以降では, M は BV^0 リーマン計量 $g = (g_{ij})$ を持つと仮定する. (つまり g は対称正値な BV^0 $(0,2)$-テンソル場.) Perelman [83] は [81] で定義された Alexandrov 空間上の自然なリーマン計量が BV^0 であることを証明した. $G := \det(g_{ij})$ とおき,

$$d\mathrm{vol}_M := \sqrt{G}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

を体積要素とする. すると, $d\mathrm{vol}_M$ は M 上の BV^0 n 次微分形式であり, M が向き付け可能なときのみ大域的に定義される. また一方で $d\mathrm{vol}_M$ を M 上の正値ラドン測度と同一視できて, これは M が向き付け不可能なときでも大域的に定義される. Alexandrov 空間 X に対しては $d\mathrm{vol}_X$ は $d\mathcal{H}^n$ と同一視される.

M 上の BV^0 ベクトル場 $V = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ の DC 発散 $\mathrm{div}^{DC} V$ を

$$\mathrm{div}^{DC} V := L_V d\mathrm{vol}_M = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}\,\xi^i\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

で定義する. これは体積要素と同様に, M 上の符号つきラドン測度と同一視することが出来る. M が C^∞ リーマン多様体のときは, M 上の C^∞ ベクトル場 V の普通の意味の発散 $\mathrm{div}\, V$ に対して, $\mathrm{div}^{DC} V = (\mathrm{div}\, V)\, d\mathrm{vol}_M$ が成り立つことを注意しよう. M 上の DC^1 関数 u の DC ラプラシアン $\Delta^{DC} u$ を

$$\Delta^{DC} u := -\,\mathrm{div}^{DC}\, \nabla u.$$

で定義する. これは一般に符号付きラドン測度である.

$\Omega \subset M$ を DC^1 超曲面で囲まれるコンパクト部分集合とする. このとき, $\partial\Omega \cap S$ のハウスドルフ次元は $n-2$ 以下なので, $\partial\Omega$ に沿った内向き法ベクトル場 $\mathbf{n}$ は $\mathcal{H}^{n-2}$-a.e. で定義出来る. M のリーマン計量 g から $\partial\Omega$ 上の BV^0 リーマン計量 $g_{\partial\Omega}$ が自然に導入される.

命題 3.12 (発散公式). M 上の任意の BV^0 ベクトル場 V に対して,

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}^{DC} V = -\int_{\partial\Omega} \langle V, \mathbf{n}\rangle\, d\mathrm{vol}_{\partial\Omega},$$

が成り立つ. ここで, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ はリーマン計量 g から導入される内積である.

証明. この証明は C^∞ 多様体の場合と全く同じである. つまりもし, M が向き付け可能なら, (3.3) より $\mathrm{div}^{DC} V = d(i_V \omega_M)$ が成り立ち, さらに

$$\langle V, \mathbf{n}\rangle\, d\mathrm{vol}_{\partial\Omega} = \langle V, \mathbf{n}\rangle\, \iota^*(i_{\mathbf{n}} d\mathrm{vol}_M) = \iota^*(i_V d\mathrm{vol}_M)$$

を得る. 従って, ストークスの公式より発散公式を得る.

M が向き付け不可能な場合は, $\Omega \subset M$ の向き付け可能な 2 重被覆 $\hat{\Omega} \subset \hat{M}$ をとれば, 上の議論より証明できる. □

3.5. C^∞ 構造. 次の定理は後の章で重要な役割を果たすことになる.

定理 3.13 (C^∞ 近似定理). X を n次元 *Alexandrov* 空間で曲率 $\geq \kappa$ とし, $0 < \delta \ll 1/n$ と仮定する. X の δ-特異点を含まないような任意のコンパクト部分集合 $C \subset X$ に対して, S_δ と交わらないようなある C の開近傍 U が存在して, 以下の (1),(2) を満たす.

(1) U 上 DC^1 構造は C^∞ 構造に拡張され, それに付随する U 上の C^∞ リーマン計量 $\tilde{g}_\delta$ が存在して, それは $U \setminus S_X$ 上で

$$|\, g_{_X} - \tilde{g}_\delta \,| < \theta_{n,\kappa}(\delta)$$

をみたす. ここで, $g_{_X}$ は X のリーマン計量で, $|\cdot|$ はC^0 ノルム.

(2) 上の C^∞ 構造は次の意味で一意である. 次元 n にのみ従属するある $\epsilon_n > 0$ が存在して, U 上 $|g_{_X} - \tilde{g}| < \epsilon_n$ を満たすような C^∞ リーマン計量 $\tilde{g}$ を持つようなU 上の C^∞ 構造は一つしかない.

証明. 先ず (1) を示す. この証明のためには, C のある開近傍 U からあるC^∞ リーマン多様体 N への $\theta_{n,\kappa}(\delta)$-概等長な DC^1 同型写像 f を構成すれば良い. その本質的なアイディアは大津氏の論文 [78] による. ここでは証明の概略のみを述べよう.

$\delta > 0$ と $x \in X$ に対して, 長さが ρ 以上の x におけるある (n,δ)-strainer が存在するような $\rho > 0$ の上限のことを, x における *δ-strain radius* と呼ぶ. 任意の $\delta > 0$ に対して, コンパクト集合 $C \subset X \setminus S_\delta$ の上では, δ-strain radius はある正の定数以上になることが簡単に分かる. 与えられたコンパクト集合 $C \subset X \setminus S_\delta$ 上での δ-strain radius の下限を $\ell (> 0)$ とおく. $0 < r \ll \delta, \ell$ なる r を固定する. C の $0.3r$-離散なネット $\{p_i\}$ をとり, 各 p_i における長さが $\geq \ell$ の (n,δ)-strainer $\{p_{i\alpha}\}_{\alpha=\pm1,\ldots,\pm n}$ をとる. すると, $B(p_i, r)$ から $U_i := f_i(B(p_i, r))$ への写像

$$f_i(x) := \left(\frac{1}{\mathcal{H}^n(B(p_{i\alpha}, r'))} \int_{B(p_{i\alpha}, r')} d_X(y,x)\, \mathcal{H}^n(dy) \right)_{\alpha=1,\ldots,n}$$

は $\theta_{n,\kappa}(\delta)$-概等長な DC^1 同型になる. ここで $0 < r' \ll r$ とする. この (U_i, f_i) たちを張り合わせて, 定理の N と f を構成する. その張り合わせのための写像を以下に作る. 等長写像 $F_{ij} \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ が存在して, 任意の i, j に対して

$$B(p_i, 0.9r) \cap B(p_j, 0.9r) \text{ 上で} \quad |F_{ij} \circ f_i - f_j| < \theta_{n,\kappa}(\delta)\, r$$
$$B(p_i, 0.9r) \cap B(p_j, 0.9r) \text{ 上 } \mathcal{H}^n\text{-a.e. で} \quad |\, dF_{ij} \circ df_i - df_j \,| < \theta_{n,\kappa}(\delta)$$

が成り立つ. F_{ij} らは $F_{ki} \circ F_{jk} \circ F_{ij} = id$ をみたすとは限らないので, これをみたすよう F_{ij} らを改造しよう. C^∞ 関数 $\phi \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ を $[0,1/2]$ 上で $\phi = 1$, $[1,\infty)$ 上では $\phi = 0$, かつ $-4 \leq \phi' \leq 0$ をみたすようにとる. $x \in U_i$ に対して, $\psi_i(x) := \phi(|x|/0.8r)$ とおく. $\tilde{F}_{1j} := F_{1j}$, $\tilde{F}_{j1} := \tilde{F}_{1j}^{-1}$ と定義する. $j \geq 2$ のとき, 写像 $\tilde{F}_{2j} : U_2 \to \mathbb{R}^n$

を，任意の $x \in U_2$ に対して

$$\tilde{F}_{2j}(x) := \psi_1 \circ \tilde{F}_{21}(x) \cdot \tilde{F}_{1j} \circ \tilde{F}_{21}(x) + (1 - \psi_1 \circ \tilde{F}_{21}(x))F_{2j}(x)$$

で定義する．すると，$\tilde{F}_{2j}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合の間の微分同相写像となる．$\tilde{F}_{j2} := \tilde{F}_{2j}^{-1}$ とおく．定義から，$V_i := f_i(B(p_i, 0.4r))$ とおくと $\tilde{F}_{12}(V_1)$ 上では $\tilde{F}_{2j} = \tilde{F}_{1j} \circ \tilde{F}_{21}$ が成り立つことが分かる．他の $\tilde{F}_{ij} \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ も同じ方法で帰納的に定義できるが，詳細は省く．

直和 $\tilde{N} := \bigsqcup_i (V_i \times \{i\})$ の2つの要素 $(x,i) \in V_i \times \{i\}, (y,j) \in V_j \times \{j\}$ に対して，$y = \tilde{F}_{ij}(x)$ が成り立つとき，これらが同値であると定義する．この同値関係に関する $\tilde{N}$ の商空間を N と定義し，$\pi : \tilde{N} \to N$ を自然な射影とする．$\varphi_i : \hat{V}_i := \pi(V_i \times \{i\}) \to V_i$ を自然な同型写像とすると，N はアトラス $\{(\hat{V}_i, \varphi_i)\}_i$ をもつ C^∞ 多様体であり，写像 $\tilde{F}_{ij} \colon V_i \to V_j$ はその座標変換になっている．N の C^∞ リーマン計量の定義は省略する．

求める同型写像 $f : U := \bigcup_i B(p_i, 0.4r) \to N$ は，以下で定義される写像 $f^{(i)}$ の帰納的極限として得られる．

$$f^{(1)}(x) := f_1(x),$$
$$f^{(2)}(x) := \psi_1 \circ f^{(1)}(x) \cdot \tilde{F}_{12} \circ f^{(1)}(x) + (1 - \psi_1 \circ f^{(1)}(x))\, f_2(x),$$
$$\cdots$$

(2) は [97] の結果から従う． □

次は X がリーマン多様体の時には良く知られている．

命題 3.14 (微分可能安定性). $n \in \mathbb{N}$ と $\kappa \in \mathbb{R}$ を固定する．もし，曲率 $\geq \kappa$ のコンパクトな n 次元 *Alexandrov* 空間の列 $\{X_i\}_{i=1,2,\ldots}$ が，ある δ-特異点を持たないコンパクトな n 次元 *Alexandrov* 空間へ収束したとすると，十分大きな i に対して X_i は X に C^∞ 微分同相になる．ここで，$0 < \delta \ll 1/n$ とする．

証明. 命題の仮定の下で，[115]（または後で証明する定理6.5）により，十分大きな i に対して X_i は X に $\theta_n(\delta)$-概等長であることが分かっている．これより命題は従う． □

この命題の直接の結果として以下の球面定理の一種を得る．これは [80] の定理の拡張である．

系 3.15 (微分可能球面定理). 自然数 n にのみ従属するある定数 $\epsilon_n > 0$ が存在して，曲率 ≥ 1 で $\mathcal{H}^n(X) \geq \omega_n - \epsilon_n$ をみたす様な任意の n 次元 *Alexandrov* 空間 X は標準球面 S^n に C^∞ 微分同相である．ここで，ω_n は n 次元単位球面の体積である．

3.6. エネルギー形式と解析的構造との関係. この章では，X をコンパクトな n 次元 Alexandrov 空間で境界を持たないと仮定する．最初に，発散公式（命題3.12）と C^∞ 近似定理（定理3.13）を使って，以下を証明する．

定理 3.16 (グリーンの公式). 任意の $u \in DC_0^1(X \setminus S_\delta)$ と $v \in DC^1(X)$ に対して，

$$\int_X v\, \Delta^{DC} u = \mathcal{E}(u, v)$$

が成り立つ.

証明. $u \in DC_0^1(X \setminus S_\delta)$ と $v \in DC^1(X)$ を勝手にとって固定する．定理 3.13 を $C := \operatorname{supp} u$ に対して適用すると，C のある近傍 U $(U \subset X \setminus S_\delta)$ の上に C^∞ 構造が存在する．C からの距離関数 $d_X(C, \cdot)$ をある C^∞ 関数 $\rho : [0, \infty) \to U$ で近似することが出来る．サードの定理を使うと，ρ のある正則値 $r > 0$ が存在して，$\rho^{-1}(r)$ は U の C^∞ 閉超曲面になり，$C \subset \rho^{-1}([0, r]) \subset U$ が成り立つようにできる．集合 $\Omega := \rho^{-1}([0, r])$ は δ-特異点を含まず，その境界 $\partial\Omega = \rho^{-1}(r)$ は $X \setminus S_\delta$ の DC^1 超曲面である．簡単な計算で次が分かる．

$$v\, \Delta^{DC} u = \langle \nabla u, \nabla v \rangle\, d\mathrm{vol}_X - \mathrm{div}^{DC}(v \nabla u).$$

この両辺を Ω 上で積分して発散公式 (命題 3.12) を使うと，最後の項は消えて，定理を得る． □

上の定理 3.16 より直接以下を得る．

系 3.17. 関数列 $u_i \in DC_0^1(X \setminus S_\delta)$ がある関数 $u \in \mathcal{D}(\Delta)$ へ $W^{1,2}$ 収束したとすると，

$$\lim_{i \to \infty} \int_X v\, \Delta^{DC} u_i = \int_X v\, \Delta u\, d\mathcal{H}^n$$

が任意の $v \in DC_0^1(X)$ に対して成り立つ．

$\partial X = \emptyset$ と仮定しているので，定理 3.1 より，任意の $u \in \mathcal{D}(\Delta)$ に対して上の系のような関数列 u_i はかならず存在する．系 3.17 より，任意の $u \in DC_0^1(X \setminus S_\delta) \cap \mathcal{D}(\Delta)$ に対して，$\Delta^{DC} u = \Delta u\, d\mathcal{H}^n$ なので，

$$\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi^i \sqrt{\det g}) \quad \mathcal{H}^n\text{-a.e.}$$

が得られる．しかしながら，$\mathcal{D}(\Delta)$ と $DC_0^1(X \setminus S_\delta)$ は両方とも $W^{1,2}(X)$ で稠密あるにもかかわらず，その共通部分 $\mathcal{D}(\Delta) \cap DC_0^1(X \setminus S_\delta)$ が非自明な関数を含むかどうかは分からない．関数 u に対して Δu を具体的に計算する方法は存在しないが，一方で $\Delta^{DC} u$ は局所座標から計算できる．系 3.17 は計算できない Δ を計算できる Δ^{DC} で近似できることを意味している．

次にエネルギー形式と距離関数の関係ついての次の定理を証明する．

定理 3.18 (カラテオドリ距離の適合性). X 上のエネルギー形式 $\mathcal{E}$ から導入されるカラテオドリ距離関数 $d_{\mathcal{E}}$ は X 上で元の距離関数 d_X に一致する．

証明. 任意の 2 点 $x,y \in X$ を固定する. $d_{\mathcal{E}}$ の定義を思い出すと,

$$d_{\mathcal{E}}(x,y) = \sup\{\, u(y)-u(x) \mid u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(X) \cap C(X),\ |\nabla u| \le 1\ \mathcal{H}^n\text{-a.e.}\,\}$$

である. x からの距離関数 $d_X(x,\cdot)$ はリップシッツなので, $d_X(x,\cdot) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(X) \cap C(X)$ であり, さらに $|\nabla d_X(x,\cdot)| \le 1\ \mathcal{H}^n$-a.e. だから,

$$d_{\mathcal{E}}(x,y) \ge d_X(x,y) - d_X(x,x) = d_X(x,y).$$

逆に, $|\nabla u| \le 1\ \mathcal{H}^n$-a.e. をみたす関数 $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(X) \cap C(X)$ をとる. $u(y)-u(x) \le d_X(x,y)$ を証明すれば十分である. 十分小さい $\epsilon > 0$ を固定すると, $d_X(x,x_\epsilon), d_X(y,y_\epsilon) < \epsilon$ をみたすようなある 2 点 $x_\epsilon, y_\epsilon \in X \setminus S_X$ を取ることができる. x_ϵ と y_ϵ を結ぶ最短測地線 γ をとる.

$\gamma \cap S_X = \emptyset$ なので, 定理3.13により, ある γ の近傍 U の上に C^∞ 構造とそれに従属するリーマン計量 $\tilde{g}$ が存在して, $U \setminus S_X$ 上で

$$|\, g_X - \tilde{g}\,| < \epsilon \tag{3.4}$$

が成り立つ. [81] の Proposition 6.1 より γ は C^1 曲線なので, x_ϵ から y_ϵ へ結ぶような ($\tilde{g}$ に関して) 弧長にパラメータを持つ C^∞ 曲線 $c : [\,0,\ell\,] \to U$ が存在して,

$$\ell = L(c) \le (1+\theta(\epsilon))\, d_X(x_\epsilon, y_\epsilon) \tag{3.5}$$

をみたす. 任意の $t \in [\,0,\ell\,]$ に対して, $\{E_1(t),\dots,E_{n-1}(t),\dot{c}(t)\}$ が $\tilde{g}$ に関する $T_{c(t)}U$ の正規直交基底になるように, c に沿った C^∞ ベクトル場 $E_i(t)$ $(i=1,\dots,n-1)$ を定めることができる. $I := (\,-\delta,\delta\,)^{n-1}$ $(\delta > 0)$ とおくとき, δ を十分小さくとれば, 写像

$$\varphi : I \times [\,0,\ell\,] \ni (x^1,\dots,x^{n-1},t) \mapsto \exp_{c(t)} \sum_i x^i E_i(t) \in U$$

が中への微分同相になり, さらに, 座標 $\varphi^{-1} = (x^1,\dots,x^n)$ $(x^n := t)$ に従属したリーマン計量の係数 $\tilde{g}_{ij}$ が次をみたす.

$$|\,\tilde{g}_{ij} - \delta_{ij}\,| < \epsilon \qquad (i,j = 1,\dots,n) \tag{3.6}$$

$\bar{u} := u \circ \varphi$ とおく. (3.4), (3.6) と $\sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^j} = |\nabla u|^2 \le 1\ \mathcal{H}^n$-a.e. より,

$$I \times [\,0,\ell\,] \text{ 上 } \mathcal{H}^n\text{-a.e. で } \quad \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right| \le 1+\theta(\epsilon)$$

が成り立つ. $\mathcal{H}^{n-1}$-a.e. $z \in I$ に対して, $t \mapsto \bar{u}(z,t)$ は絶対連続で, その点別微分は弱い意味での微分 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(z,t)$ に a.e. $t \in [\,0,\ell\,]$ で一致する (詳しくは [32] の §4.9.2 Theorem 2(i) およびその証明を参照せよ). 従って, $\mathcal{H}^{n-1}$-a.e. $z \in I$ に対して

$$\bar{u}(z,\ell) - \bar{u}(z,0) \le \int_0^\ell \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right| dt \le (1+\theta(\epsilon))\,\ell.$$

これと (3.5) から

$$u(y_\epsilon) - u(x_\epsilon) \le (1+\theta(\epsilon))\, d_X(x_\epsilon, y_\epsilon).$$

$\epsilon \to 0$ とすると，定理の証明が終る． □

4. 非線形ソボレフ空間とエネルギー汎関数

4.1. エネルギー汎関数の構成． 局所コンパクトで可分な距離空間 (X, d_X) で正値ラドン測度 m_X もったもの（言い替えると，測度空間 (X, m_X) で距離関数 d_X を持ったもの）を測度距離空間と呼ぶ．以下に「測度距離空間のリッチ曲率が下に有界である」という概念を定義しよう．

定義 4.1 (リッチ曲率が下に有界な測度距離空間)．自然数 $n \geq 2$ と実数 κ を固定する．X を測度距離空間で $\operatorname{supp} m_X = X$ と仮定する．X は次元 n に関してリッチ曲率が $(n-1)\kappa$ 以上であるということを，ある写像の族 $\{\Phi_t : X \times X \to X\}_{t \in [0,1]}$ が存在して以下の (i)–(iv) をみたすことで定義する．

(i) 任意の 2 点 $x, y \in X$ に対して，写像 $[0,1] \ni t \mapsto \Phi_t(x,y) \in X$ は x から y へ結ぶ最短測地線である．ここで，パラメータは t は弧長に比例する．

(ii) 各 $t \in [0,1]$ に対して，写像 $\Phi_t : X \times X \to X$ は $m_X \otimes m_X$-可測である．

(iii) 任意の点 $x \in X$ と実数 $t \in [0,1]$ を固定して，任意の $y \in X$ に対して $f(y) := \Phi_t(x,y)$ とおく．このとき，push-forward 測度 $f_* m_X$ の m_X によるラドン-ニコディム微分が次をみたす．

$$\frac{d(f_* m_X)}{dm_X} \leq (1 + \theta_{n,\kappa}(d_X(x,y)))\, t^{-n}$$

言い替えると，m_X-可測な部分集合 $A \subset X$ に対して，

$$m_X(f(A)) \geq (1 - \theta_{n,\kappa}(d_X(x,y)))\, t^n\, m_X(A)$$

が成り立つ．

(iv) 任意の $x \in X$ と $r > 0$ に対して，

$$m_X(B(x,r)) \leq (1 + \theta_{n,\kappa}(r))\, r^n$$

が成り立つ．

ある 2 点 x と y を結ぶ最短測地線が複数本あるときには，$\Phi_t(x,y)$ の取り方は一意的でないことを注意する．我々は常に X に対して $\{\Phi_t\}$ を一つ固定して考える．以下が成り立つ．

- もし M が n 次元完備リーマン多様体で (普通の意味での) リッチ曲率が $\geq (n-1)\kappa$ ならば，M はリーマン計量から導入される体積測度と距離関数に関して，定義 4.1 の意味で，次元 n に関してリッチ曲率が $\geq (n-1)\kappa$ となる．このとき，上の $\theta_{n,\kappa}(\cdot)$ は具体的に求まる．
- もし X が n 次元 Alexandrov 空間で曲率が $\geq \kappa$ ならば，X はその距離関数 d_X と n 次元ハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^n$ に関して，次元 n でリッチ曲率が $\geq (n-1)\kappa$ となる．$\{\Phi_t\}$ の可測性は [60] の Proposition 6.1 を見よ．

この章ではこれ以降，X を次元 n に関してリッチ曲率が $(n-1)\kappa$ 以上であると仮定し，Y を 完備距離空間，d_Y をその距離関数とする．簡単のため，X はコンパクトであると仮定する．実数 $p \geq 1$ と基点 $o \in Y$ を固定する．

定義 4.2 (写像空間)．以下のように写像空間を定義する．

$$C^{\mathrm{Lip}}(X,Y) := \{\, u : X \to Y \mid \mathrm{Lip}(u) < \infty \,\},$$

(つまり，X から Y へのリップシッツ写像全体の集合)

$$L^p(X,Y) := \{\, u : X \to Y \mid u \text{ は } m_X\text{-可測で}$$
$$x \mapsto d_X(u(x),o)^p \text{ は可積分 } \}/\sim$$

ここで，$\sim$ は次で定義される同値関係: $u \sim v \iff m_X$-a.e. $x \in X$ に対して $d_X(u(x),v(x)) = 0$.

2 つの写像 $u, v \in L^p(X,Y)$ の間の L^p 距離 を以下で定義する．

$$d_{L^p}(u,v) := \left(\int_X d_Y(u(x),v(x))^p \, m_X(dx) \right)^{1/p}$$

すると，$(L^p(X,Y), d_{L^p})$ は完備距離空間になる．ここでは X をコンパクトと仮定したので，空間 $L^p(X,Y)$ は基点 $o \in Y$ の取り方によらずに定まる．

X 上の非負連続関数全体の集合を $C_+(X)$ とおく．

定義 4.3 (近似エネルギー汎関数)．実数 $r > 0$ と関数 $\varphi \in C_+(X)$ を固定する．φ に関する写像 $u \in L^p(X,Y)$ の p 次の近似エネルギー $E_\varphi^{p,r}(u)$ を以下で定義する．

$$E_\varphi^{p,r}(u) := \frac{1}{2r^n} \int_X \varphi(x) \int_{B^*(x,r)} \left(\frac{d_Y(u(x),u(y))}{d_X(x,y)} \right)^p m_X(dy) m_X(dx) \ (\leq \infty)$$

ここで，$B^*(x,r) := B(x,r) \setminus \{x\}$ とおく．

$$\mathcal{D}(E_\varphi^{p,r}) := \{\, u \in L^p(X,Y) \mid E_\varphi^{p,r}(u) < \infty \,\}$$

とおく．

注意 4.4. もし Y がヒルベルト空間で，$p = 2$, $\varphi = 1$ とおくならば，$E_\varphi^{p,r} = E_1^{2,r}$ は 2 次形式になる．実際，双線形形式 $\mathcal{E}^r : \mathcal{D}(E_1^{2,r}) \times \mathcal{D}(E_1^{2,r}) \to \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{E}^r(u,v) := \frac{1}{2r^n} \int_{0<d_X(x,y)<r} \frac{(u(x)-u(y), v(x)-v(y))}{d_X(x,y)^2}$$
$$m_X \otimes m_X(dxdy), \qquad u, v \in \mathcal{D}(E_1^{2,r})$$

で定義すると，$E_1^{2,r}(u) = \mathcal{E}^r(u,u)$ が成り立つ．ここで，$(\cdot,\cdot)$ は Y の内積.

写像 $u \in L^p(X,Y)$ のエネルギーは近似エネルギー $E_\varphi^{p,r}(u)$ の $r \to 0$ としたときの極限として定義するが，この収束の証明のために次の補題が重要である．

補題 4.5. $\varphi \in C_+(X)$, $u \in L^p(X,Y)$, $0<r<R$ とする．任意の $N \in \mathbb{N}$ と $[0,1]$ の任意の分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_N=1$ に対して，

$$E_\varphi^{p,r}(u) \le (1+\theta_{n,\kappa}(R)) \sum_{k=1}^{N} (t_k - t_{k-1}) E_{\varphi_r}^{p,r(t_k-t_{k-1})}(u) \tag{4.1}$$

が成り立つ．特に，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，

$$E_\varphi^{p,r}(u) \le (1+\theta_{n,\kappa}(R))\, E_{\varphi_r}^{p,r/N}(u) \tag{4.2}$$

が成り立ち，さらに，任意の $t \in [0,1]$ に対して，

$$E_\varphi^{p,r}(u) \le (1+\theta_{n,\kappa}(R))\,(t\, E_{\varphi_r}^{p,rt}(u) + (1-t)\, E_{\varphi_r}^{p,r(1-t)}(u)) \tag{4.3}$$

が成り立つ．ここで，$\varphi_r(x) := \varphi(x) + \omega(\varphi,r)(x)$ で，

$$r \mapsto \omega(\varphi,r)(x) := \sup_{y \in B(x,r)} |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

は φ の $x \in X$ における連続係数である．

証明. $w_r(x,y) := I_{B^*(x,r)}(y)$ とおくと（$I_A(x)$ は 2.1 で定義した特性関数），w_r は対称で，

$$w_r(x,y) \le w_{tr}(x, \Phi_t(x,y)) \tag{4.4}$$

をみたす．今，$m_r := r^{-n/2} m_X$，

$$X_k(x,y') := \varphi(x) \left\{ \frac{d_Y(u(\Phi_{t_{k-1}/t_k}(x,y')), u(y'))}{d_X(\Phi_{t_{k-1}/t_k}(x,y'), y')} \right\}^p w_{t_k r}(x,y'),$$
$$F_k(x,y) := X_k(x, \Phi_{t_k}(x,y))$$

とおくと，

$$E_\varphi^{p,r}(u) \le \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (t_k - t_{k-1}) \int_X \varphi(x) \int_X F_k(x,y)\, m_r(dy) m_r(dx)$$

が成り立つ．$x \in X$ を固定して $y' := y'(y) := \Phi_{t_k}(x,y)$ とおくと，定義 4.1(iii) より，$m_{rt_k}(dy')/m_r(dy) \ge \Theta\, t_k^{n/2}$ である．ここで $\Theta := 1+\theta_{n,\kappa}(R)$ とおく．従って，

$$\begin{aligned} &\int_X \varphi(x) \int_X F_k(x,y)\, m_r(dy) m_r(dx) \\ &\le \Theta \int_X \varphi(x) \int_X X_k(x,y')\, m_{rt_k}(dy') m_{rt_k}(dx) \end{aligned}$$

を得る．$d(x,y')<r$ ならば $\varphi(x)\le\varphi_r(y')$ であることと，(4.4) を使うと，以下を得る．

$$E_\varphi^{p,r}(u)\le\frac{\Theta}{2}\sum_{k=1}^N(t_k-t_{k-1})\int_X\varphi(x)\int_X\left[\frac{d_Y(u(\Phi_{t_{k-1}/t_k}(x,y')),u(y'))}{d_X(\Phi_{t_{k-1}/t_k}(x,y'),y')}\right]^p$$
$$\times w_{t_kr}(x,y')\,m_{t_kr}(dy')m_{t_kr}(dx),$$
$$\le\frac{\Theta^2}{2}\sum_{k=1}^N(t_k-t_{k-1})\int_X\varphi_r(y')\int_X\left[\frac{d_Y(u(\Phi_{1-t_{k-1}/t_k}(y',x)),u(y'))}{d_X(\Phi_{1-t_{k-1}/t_k}(y',x),y')}\right]^p$$
$$\times w_{(t_k-t_{k-1})r}(y',\Phi_{1-t_{k-1}/t_k}(y',x))\,m_{t_kr}(dx)m_{t_kr}(dy').$$

定義 4.1(iii) より，上式は次の式で上から評価される．

$$\frac{\Theta^4}{2}\sum_{k=1}^N(t_k-t_{k-1})\int_X\varphi_r(y')\int_X\left[\frac{d_Y(u(x'),u(y'))}{d_X(x',y')}\right]^p$$
$$\times\, w_{(t_k-t_{k-1})r}(y',x')\,m_{(t_k-t_{k-1})r}(dx')m_{(t_k-t_{k-1})r}(dy').$$
$$=\Theta^4\sum_{k=1}^N(t_k-t_{k-1})E_{\varphi_r}^{p,r(t_k-t_{k-1})}(u).$$

従って証明終り． □

前補題より以下が得られる．

補題 4.6. 任意の $\varphi\in C_+(X)$, $u\in L^p(X,Y)$, $R>0$, $r\in(0,R/2]$ に対して，

$$E_\varphi^{p,R}(u)\le(1+\theta_{n,\kappa}(R))\,E_{\varphi_R}^{p,r}(u)$$

ここで E. De Giorgi が定義した Γ-収束の概念を少し復習しておこう．詳しくは [29] を参照のこと．(L,d_L) を距離空間で，$\{F^r:L\to[0,\infty]\}_{r\in(0,\infty)}$ を与えられた関数の族とする．$r\to 0$ のときの F^r の Γ-下極限と Γ- 上極限をそれぞれ以下に定義する．$u\in L$ に対して，

$$\Gamma\text{-}\varliminf_{r\to0}F^r(u):=\lim_{\epsilon\to0}\varliminf_{r\to0}\inf_{v\in B(u,\epsilon)}F^r(v),$$
$$\Gamma\text{-}\varlimsup_{r\to0}F^r(u):=\lim_{\epsilon\to0}\varlimsup_{r\to0}\inf_{v\in B(u,\epsilon)}F^r(v).$$

$\Gamma\text{-}\varliminf_{r\to0}F^r$ と $\Gamma\text{-}\varlimsup_{r\to0}F^r$ は $[0,\infty]$ に値を取るような L 上の下半連続関数である ([29] の Proposition 6.8)．次の性質が知られている ([29] の Remark 4.1 と Proposition 5.1):

$$\Gamma\text{-}\varliminf_{r\to0}F^r\le\Gamma\text{-}\varlimsup_{r\to0}F^r,$$
$$\Gamma\text{-}\varliminf_{r\to0}F^r\le\varliminf_{r\to0}F^r,$$
$$\Gamma\text{-}\varlimsup_{r\to0}F^r\le\varlimsup_{r\to0}F^r.$$

ある $u \in L$ に対して,

$$\Gamma\text{-}\varliminf_{r\to 0} F^r(u) = \Gamma\text{-}\varlimsup_{r\to 0} F^r(u)$$

が成り立つとき，その値を $r \to 0$ のときの F^r の u における Γ-極限と呼び，$\Gamma\text{-}\lim_{r\to 0} F^r(u)$ で表す．もし，各 $u \in L$ に対して，$F^r(u)$ が r に関して単調ならば，F^r の Γ-極限は常に存在する．もし，各 F^r が L 上で下半連続 かつ 各 $u \in L$ に対して $F^r(u)$ が $r \searrow 0$ に関して単調非減少ならば，F^r の Γ-極限は点別極限と一致する ([29] の Propositions 5.4, 5.7).

ここでは，$(L, d_L) := (L^p(X,Y), d_{L^p})$, $F^r := E^{p,r}_\varphi$ で考える．$E^{p,r} := E^{p,r}_1$ とおく (つまり $\varphi := 1$ にとる).

補題 4.7. 任意の $\varphi \in C_+(X)$, $u \in L^p(X,Y)$，$R > 0$ に対して,

$$E^{p,R}_\varphi(u) \le (1 + \theta_{n,\kappa}(R)) \cdot \Gamma\text{-}\varliminf_{r\to 0} E^{p,r}_{\varphi_R}(u) \tag{4.5}$$

が成り立つ．特に,

$$\varlimsup_{r\to 0} E^{p,r}(u) = \Gamma\text{-}\varliminf_{r\to 0} E^{p,r}(u). \tag{4.6}$$

もし，$\Gamma\text{-}\varliminf_{r\to 0} E^r(u) < \infty$ を仮定すると,

$$\varlimsup_{r\to 0} E^{p,r}_\varphi(u) = \Gamma\text{-}\varliminf_{r\to 0} E^{p,r}_\varphi(u) \tag{4.7}$$

が成り立つ.

証明. 補題4.6 より，任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\inf_{v\in B(u,\epsilon)} E^{p,R}_\varphi(v) \le \Theta \inf_{v\in B(u,\epsilon)} E^{p,r}_{\varphi_R}(v).$$

ここで，前と同様に $\Theta := 1 + \theta_{n,\kappa}(R)$ とおく．$r \to 0$ の後に $\epsilon \to 0$ とすると，$E^{p,R}_\varphi$ は下半連続だから，(4.5) を得る．(4.5) で $\varphi := 1$ とおいて $R \to 0$ とすると，(4.6) を得る.

最後に (4.7) を示す．$0 < r < r_0 < R$ と仮定する.

$$a_R := \sup_{x\in X} \omega(\varphi, R)(x)$$

(φ の X における連続係数) とおく．(4.5) と補題4.6 より,

$$\begin{aligned} E^{p,R}_\varphi(u) &\le \Theta\, E^{p,r_0}_{\varphi_R}(u) \le \Theta\,(E^{p,r_0}_\varphi(u) + a_R E^{p,r_0}(u)) \\ &\le \Theta\, E^{p,r_0}_\varphi(u) + a_R\Theta^2 \cdot \Gamma\text{-}\varliminf_{r\to 0} E^{p,r}(u). \end{aligned}$$

ここで，最後の項が r_0 によらないことに注意して，(4.5) の証明の議論を繰り返すと,

$$E^{p,R}_\varphi(u) \le \Theta \cdot \Gamma\text{-}\varliminf_{r\to 0} E^{p,r}_\varphi(u) + a_R\Theta^2 \cdot \Gamma\text{-}\varliminf_{r\to 0} E^{p,r}(u).$$

$R \to 0$ とすれば証明が終る. □

定義 4.8 (エネルギー汎関数とソボレフ空間). 補題4.7から，$r \to 0$ において E^r の Γ- 極限と点別極限が同じであることが分かった．この共通の極限を

$$E^p := \lim_{r\to 0} E^{p,r} = \Gamma\text{-}\lim_{r\to 0} E^{p,r} \ (\le \infty) \tag{4.8}$$

とおき，$L^p(X,Y)$ 上の p 次エネルギー汎関数と呼ぶ．

$$W^{1,p}(X,Y) := \mathcal{D}(E^p) := \{\, u \in L^p(X,Y) \mid E^p(u) < \infty \,\}$$

を X から Y への p 次ソボレフ空間と呼ぶ．さらに，$\varphi \in C_+(X)$ を固定するとき，補題4.7から，$W^{1,p}(X,Y)$ 上では $r \to 0$ において E^r_φ の Γ- 極限と点別極限が同じであることが分かるので，この極限を

$$E^p_\varphi(u) := \lim_{r\to 0} E^{p,r}_\varphi(u) = \Gamma\text{-}\lim_{r\to 0} E^{p,r}_\varphi(u) < \infty, \quad u \in W^{1,p}(X,Y)$$

とおく．

$C^{\mathrm{Lip}}(X,Y) \subset W^{1,p}(X,Y)$ かつ $1 \le p \le p'$ のとき $W^{1,p'}(X,Y) \subset W^{1,p}(X,Y)$ であることが簡単に分かる．次は定理3.7の一種の拡張である．証明は略す．

定理 4.9. Y がバナッハ空間と仮定すると，$(E^p, C^{\mathrm{Lip}}(X,B))$ は $L^p(X,B)$ で閉拡張可能である．さらにもし $Y = \mathbb{R}$, $p = 2$ ならば，その閉包 $(E^p, \mathcal{D}(E^p))$ は $L^2(X)$ 上の強局所正則ディィリクレ形式になり，$C^{\mathrm{Lip}}(X)$ はその *special standard core* である．

もし X が Alexandrov 空間のとき，3章で導入したように，X はその a.e. C^0 リーマン構造から決まるソボレフ空間 $W^{1,p}(X)$ があるが，次の定理でそれとここで定義したソボレフ空間との整合性について述べる．証明は略す．

定理 4.10. X をコンパクトな n 次元 *Alexandrov* 空間で，$m_X := \mathcal{H}^n$ を n 次元ハウスドルフ測度とする．このとき，定義 *4.8* のソボレフ空間 $W^{1,p}(X,\mathbb{R})$ と，*3.2* 章で導入された X の *a.e.*C^0 リーマン構造から決まるソボレフ空間 $W^{1,p}(X)$ は同じものである．さらに，任意の $\varphi \in C_+(X)$ と $u \in W^{1,p}(X)$ に対して，

$$E^p_\varphi(u) = \mathrm{const}_{n,p} \int_X |\nabla u(x)|^p \varphi(x)\, \mathcal{H}^n(dx)$$

が成り立つ．ここで，$\mathrm{const}_{n,p}$ はある正規化定数である．

写像 $u, v \in L^p(X,Y)$ と点 $q \in Y$ に対して，$d_Y(u,q) : X \ni x \mapsto d_Y(u(x),q) \in \mathbb{R}$，かつ $d_Y(u,v) : X \ni x \mapsto d_Y(u(x),u(y)) \in \mathbb{R}$ と定義する．以下を得る．

補題 4.11 (縮小性). $\varphi \in C_+(X)$ を任意の関数とする．

(1) $(Y', d_{Y'})$ をもう一つ別の完備距離空間とする．任意の関数 $u \in W^{1,p}(X,Y)$ と $\psi \in C^{\mathrm{Lip}}(Y,Y')$ に対して，$\psi \circ u \in W^{1,p}(X,Y')$ かつ

$$E^p_\varphi(\psi \circ u)^{1/p} \le \mathrm{Lip}(\psi)\, E^p_\varphi(u)^{1/p} \tag{4.9}$$

が成立する．

(2) 任意の $u, v \in W^{1,p}(X, Y)$ に対して，$d_Y(u, v) \in W^{1,p}(X, \mathbb{R})$ かつ

$$\left\{E_\varphi^p(d_Y(u,v))\right\}^{1/p} \le \left\{E_\varphi^p(u)\right\}^{1/p} + \left\{E_\varphi^p(v)\right\}^{1/p} \tag{4.10}$$

が成り立つ．

(3) 任意の $u, v \in W_b^{1,p}(X, \mathbb{R}) := W^{1,p}(X, \mathbb{R}) \cap L^\infty(X)$ に対して，$uv \in W_b^{1,p}(X, \mathbb{R})$ かつ

$$\left\{E_\varphi^p(uv)\right\}^{1/p} \le \|v\|_\infty \left\{E_\varphi^p(u)\right\}^{1/p} + \|u\|_\infty \left\{E_\varphi^p(v)\right\}^{1/p} \tag{4.11}$$

が成り立つ．

(4) 任意の $u \in W^{1,p}(X, \mathbb{R})$, $v \in C^{\mathrm{Lip}}(X, \mathbb{R})$ に対して，$uv \in W^{1,p}(X, \mathbb{R})$ かつ

$$\left\{E_\varphi^p(uv)\right\}^{1/p} \le \|v\|_\infty \left\{E_\varphi^p(u)\right\}^{1/p} + \|u\varphi\|_{L^p(X)} \operatorname{Lip}(v) \tag{4.12}$$

が成り立つ．

証明. (1): $o' \in Y'$ を基点とすると，任意の $x, y \in X$ に対して，

$$d_{Y'}(\psi \circ u(x), o') = d_{Y'}(\psi \circ u(x), \psi(o)) \le \operatorname{Lip}(\psi)\, d_Y(u(x), o), \tag{4.13}$$

$$d_{Y'}(\psi \circ u(x), \psi \circ u(y)) \le \operatorname{Lip}(\psi)\, d_Y(u(x), u(y)) \tag{4.14}$$

が成り立つ．(4.13) より $\psi \circ u \in L^p(X, Y', o')$ を，(4.14) より $\psi \circ u \in W^{1,p}(X, Y', o')$ と (4.9) を得る．

(2): 三角不等式より，任意の $x, y \in X$ に対して，

$$d_Y(u(x), v(x)) \le d_Y(u(x), o) + d_Y(v(x), o),$$

$$|\, d_Y(u(x), v(x)) - d_Y(u(y), v(y))\,| \le d_Y(u(x), u(y)) + d_Y(v(x), v(y))$$

を得る．これらから (2) が証明される．

(3) と (4) はほぼ明らか． □

4.2. エネルギー測度とポアンカレの不等式．

定理 4.12 (エネルギー測度の存在). 任意の $u \in W^{1,p}(X, Y)$ に対して，X 上のある有限ボレル測度 $\mu_{(u)}^p$ が存在して，任意の $\varphi \in C_+(X)$ に対して，

$$E_\varphi^p(u) = \frac{1}{2} \int_X \varphi(x)\, \mu_{(u)}^p(dx)$$

が成り立つ．

証明. $u \in W^{1,p}(X, Y)$ を固定する．$\psi \in C(X)$ に対して，$I_{(u)}(\psi) := E_{\psi^+}(u) - E_{\psi^-}(u)$ とおく．ここで，$\psi^+ := \max\{\psi, 0\}$, $\psi^- := \max\{-\psi, 0\}$ とおく．すると，$I_{(u)} : C(X) \to \mathbb{R}$ は正値線形汎関数になる．従って，X 上の正値ラドン測度 $\mu_{(u)}^p$ が存在して，任意の $\psi \in C(X)$ に対して

$$I_{(u)}(\psi) = \frac{1}{2} \int_X \psi(x)\, \mu_{(u)}^p(dx)$$

と表せる．$\varphi \in C^+(X)$ に対しては $I_{(u)}(\varphi) = E_\varphi(u)$ なので，これで定理が証明できた． □

上の測度 $\mu^p_{(u)}$ のことを $u \in W^{1,p}(X,Y)$ のエネルギー測度と呼ぶ．もし X が Alexandrov 空間で $Y = \mathbb{R}$ の場合は，$d\mu^p_{(u)} = \mathrm{const}_{n,p}|\nabla u|^p\, d\mathcal{H}^n$ が成り立つ．

注意 4.13. (1) $u \in W^{1,p}(X,Y)$ のエネルギー測度 $\mu^p_{(u)}$ は測度 m_X に対して絶対連続かどうかは分からない．もし $1 \le p' < p$, $u \in W^{1,p}(X,Y)$ ならば $u \in W^{1,p'}(X,Y)$ かつ $\mu^{p'}_{(u)} \ll m_X$ が成り立つ．

(2) [109] の Proposition 6.6 の証明と同様の方法で，次が証明できる．$u \in C^{\mathrm{Lip}}(X,Y)$ に対して，$\mu^p_{(u)} \ll m_X$ かつ $d\mu^p_{(u)}/dm \le \mathrm{Lip}_X(u)^p$ が成り立つ．さらに $u \in H^{1,p}(X,\mathbb{R}) := \overline{C^{\mathrm{Lip}}(X)}^{W^{1,p}}$ に対しても $\mu^p_{(u)} \ll m_X$ が成り立つ．

定理 4.14 (弱ポアンカレ不等式). $z \in X$, $R > r > 0$ と仮定する．

(1) 任意の $u \in W^{1,p}(X,Y)$ に対して，

$$\int_{B(z,r)}\int_{B(z,r)} d_Y(u(x),u(y))^p\, m_X(dx)m_X(dy) \le \mathrm{const}_{n,p,\kappa,R}\, r^{n+p}\int_{B(z,2r)} \mu^p_{(u)}(dx)$$

が成り立つ．

(2) 任意の $u \in W^{1,p}(X,\mathbb{R})$ に対して，

$$\int_{B(z,r)} |u(x) - u_{z,r}|^p\, m_X(dx) \le \frac{\mathrm{const}_{n,p,\kappa,R}\, r^p}{m_X(B(z,R))}\int_{B(z,2r)} \mu^p_{(u)}(dx) \tag{4.15}$$

が成り立つ．ここで，$u_{r,z} := \frac{1}{m_X(B(z,r))}\int_{B(z,r)} u(x)\ m_X(dx)$ とおく．

証明. (1): $z \in X$, $R > r > 0$ を固定する．すると，$I_{B(z,r)} \le \varphi$ かつ $\varphi_r \le I_{B(z,2r)}$ をみたすような関数 $\varphi \in C_+(X)$ が存在する．このとき補題4.7 を使って，

$$\begin{aligned}
&\int_{B(z,r)}\int_{B(z,r)} d_Y(u(x),u(y))^p\, m_X(dx)m_X(dy)\\
&\le \int_X \varphi(x)\int_{B(x,2r)} d_Y(u(x),u(y))^p\, m_X(dy)m_X(dx)\\
&\le \Theta\,(2r)^p(2r)^n E^{p,2r}_{\varphi}(u) \le \mathrm{const}_{n,p,\kappa,R}\, r^{n+p} E^p_{\varphi_r}(u)\\
&\le \mathrm{const}_{n,p,\kappa,R}\, r^{n+p}\int_X \varphi_r\, d\mu^p_{(u)}\\
&\le \mathrm{const}_{n,p,\kappa,R}\, r^{n+p}\int_{B(z,2r)} d\mu^p_{(u)}.
\end{aligned}$$

(2): ヘルダーの不等式より，

$$|u(x) - u_{z,r}|^p \le \frac{1}{m_X(B(z,r))}\int_{B(z,r)} |u(x)-u(y)|^p\, m_X(dy).$$

これと (1) から,

$$\int_{B(z,r)} |u(x) - u_{z,r}|^p \, m_X(dx) \le \frac{\mathrm{const}_{n,\kappa,R}\, r^{n+p}}{m_X(B(z,r))} \int_{B(z,2r)} \mu^p_{(u)}(dx).$$

定義 4.1(iii) から,

$$\frac{r^n}{m_X(B(z,r))} \le \Theta \frac{R^n}{m_X(B(z,R))}.$$

従って定理の証明終り. □

4.3. コンパクト性定理. [55] の Theorem 1.13.1 と同じ方法で以下が証明できる. 証明は省く.

定理 4.15 (コンパクト性定理). Y を有限コンパクトと仮定する. すると, $W^{1,p}(X,Y)$ の $L^p(X,Y)$ への埋め込みはコンパクトである. つまり, 写像の列 $\{u_i\}_{i=1,2,\dots} \subset W^{1,p}(X,Y)$ がもし

$$\sup_i \big(E^p(u_i) + d_{L^p}(u_i, o)\big) < \infty$$

をみたすならば, ある部分列 $\{j\} \subset \{i\}$ と写像 $u \in W^{1,p}(X,Y)$ が存在して, $j \to \infty$ のとき $d_{L^p}(u_j, u) \to 0$ が成り立つ.

X 上のラプラシアン Δ を $L^2(X)$ 上のディリクレ形式 $(E^2, W^{1,2}(X,\mathbb{R}))$ の生成作用素として定義する. 上の定理と関数解析の結果から以下が従う.

系 4.16. X のラプラシアン Δ のスペクトルは離散的であり, それは以下のような固有値の列である.

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \cdots \nearrow \infty$$

さらに, レゾルベント作用素 $(\lambda - \Delta)^{-1}$ $(\lambda \ne \lambda_i)$ と生成作用素 $e^{-t\Delta}$ $(t > 0)$ は全てコンパクト作用素である.

4.4. 同変写像の **harmonic map flow.** この章では, [47, 69] の結果を我々の場合に適用することによって, 同変写像の harmonic map flow (または heat flow) を得る.

離散群 Γ が測度空間 X へ測度を保って properly discontinuous に作用していて, さらに完備距離空間 Y へ等長的に作用していると仮定する. つまり, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma_* m_X = m_X$ かつ $\gamma^* d_Y = d_Y$ であり, 任意のコンパクト部分集合 $K \subset X$ に対して, $K \cap \gamma K \ne \emptyset$ をみたす $\gamma \in \Gamma$ は有限個とする. (ここで, 作用は効果的でなくともよいとする.) $m_{X/\Gamma}$ を商空間 X/Γ の m_X から導入された測度とする. 次を満たすボレル集合 $F \subset X$ (基本領域と呼ぶ) が存在すると仮定する : 射影 $\pi : X \to X/\Gamma$ の制限 $\pi|_F : F \to X/\Gamma$ は全単射かつ $\bar{F} = \overline{F^\circ}$. X が Alexandrov 空間で Γ が X へ等長的に作用している場合などは, Γ のディリクレ領域の境界を少し補正することでこの様な F が得られる. 写像 $u : X \to Y$ が Γ-同変であるとは, 任意の $x \in X, \gamma \in \Gamma$ に対して,

$$u(\gamma x) = \gamma(u(x))$$

が成り立つことで定義する.

定義 4.17 (同変写像空間). 2つの Γ-同変な m_X-可測写像 $u,v:X\to Y$ に対して,

$$d_{L^p_\Gamma}(u,v) := \left(\int_{X/\Gamma} d_Y(u(x),v(x))^p\, m_{X/\Gamma}(dx)\right)^{1/p}$$

とおく. ただし, X/Γ の点と F の点を $\pi|_F$ で同一視する. ある固定された m_X-可測写像 $f_0:X\to Y$ に対して,

$$L^p_\Gamma(X,Y,f_0) := \{\, u:X\to Y \mid u \text{ は } \Gamma\text{-同変な } m_X\text{-可測写像で } d_{L^p_\Gamma}(u,f_0)<\infty \text{ をみたす} \,\}/\sim$$

と定義する. ここで, $\sim$ は定義 4.2 で定義した同値関係である. すると, $(L^p_\Gamma(X,Y,f_0), d_{L^p_\Gamma})$ は完備距離空間になる.

以降, X を (必ずしもコンパクトでない) 測度距離空間で次元 n に関してリッチ曲率 $\geq (n-1)\kappa$ と仮定する. このとき, 近似エネルギー汎関数 $E^{p,r}: L^p_\Gamma(X,Y,f_0)\to[0,\infty]$ を, その定義式で m_X を $m_{X/\Gamma}$ に変更することで同様に定義する. これから, 前と同様に p 次エネルギー汎関数 $E^p: L^p_\Gamma(X,Y,f_0)\to[0,\infty]$ と p 次ソボレフ空間 $W^{1,p}_\Gamma(X,Y,f_0)$ が定義される.

以下, $p=2$ かつ Y を (距離的) 完備なアダマール空間とする. つまり, (距離構造が) 完備な測地的距離空間で, 以下の三角形の比較条件をみたすものとする : 任意の3点 $x,y,z\in Y$ と x から z への任意の最短測地線 $c:[0,1]\to Y$ と任意の $t\in[0,1]$ に対して,

$$d_Y(y,c(t))^2 \leq (1-t)\,d_Y(x,y)^2 + t\,d_Y(y,z)^2 - t(1-t)\,d_Y(x,z)^2$$

をみたす.

Y の与えられた2点を結ぶ最短測地線は一意であることを注意する.

以下に良く知られた補題を証明する. より詳しくは [46] を参照の事.

補題 4.18. 任意の *2* つの写像 $u,v\in L^2_\Gamma(X,Y,f_0)$ と点 $x\in Y$ に対して, $[0,1]\ni t\mapsto w_t(x)\in Y$ を $u(x)$ から $v(x)$ へ結ぶ Y の測地線とする. このとき, $[0,1]\ni t\mapsto w_t$ は $L^2_\Gamma(X,Y,f_0)$ の中の u から v への最短測地線である. さらに, $(L^2_\Gamma(X,Y,f_0), d_{L^2_\Gamma})$ は完備アダマール空間になる.

証明. w_t が Γ-同変かつ m_X-可測であることは簡単に分かる. 最初の主張は以下から従う.

$$\begin{aligned} d_{L^2_\Gamma}(u,w_t)^2 &= \int_{X/\Gamma} d_Y(u(x),w_t(x))^2\, m_{X/\Gamma}(dx) \\ &= t^2\int_{X/\Gamma} d_Y(u(x),v(x))^2\, m_{X/\Gamma}(dx) = t^2 d_{L^2_\Gamma}(u,v)^2. \end{aligned}$$

次に三角形の比較条件を確かめる. 3つの写像 $u,v,w\in L^2_\Gamma(X,Y,f_0)$ と測地線 $[0,1]\ni t\mapsto u_t\in L^2_\Gamma(X,Y,f_0)$ を $u_0=u$, $u_1=w$ をみたすようにとる. つまり, 任意の $x\in Y$ に対して, $t\mapsto u_t(x)$ は $u(x)$ か

ら $w(x)$ への最短測地線である．すると，任意の $x \in Y$, $t \in [0,1]$ に対して，

$$d_Y(v(x),u_t(x))^2 \leq (1-t)\,d_Y(u(x),v(x))^2 + t\,d_Y(v(x),w(x))^2 \\ - t(1-t)\,d_Y(u(x),w(x))^2.$$

これを測度 $m_{X/\Gamma}(dx)$ に関して積分すると，

$$d_{L^2_\Gamma}(v,u_t)^2 \leq (1-t)\,d_{L^2_\Gamma}(u,v)^2 + t\,d_{L^2_\Gamma}(v,w)^2 - t(1-t)\,d_{L^2_\Gamma}(u,w)^2$$

従って補題が証明された． □

補題 4.19. エネルギー汎関数 $E^2 : L^2_\Gamma(X,Y,f_0) \to [0,\infty]$ は下半連続な凸関数である．

証明．Γ-極限は常に下半連続なので，下半連続性は明らか．凸性を証明しよう．勝手な最短測地線 $[0,1] \ni t \mapsto u_t \in L^2_\Gamma(X,Y,f_0)$ をとると，任意の $x,y \in X$, $t \in [0,1]$ に対して，

$$d_Y(u_t(x),u_t(y))^2 \leq t\,d_Y(u_1(x),u_1(y))^2 + (1-t)\,d_Y(u_0(x),u_0(y))^2$$

が成り立つことが，三角形の比較条件から分かる（詳しくは [46] などを見よ）．これから，近似エネルギー汎関数 $E^{2,r}$ の凸性を得る．凸関数の極限はまた凸関数なので，補題が証明された． □

次にアダマール空間上の凸関数の勾配ベクトル場についての Jost [47] と Mayer [69] の仕事を紹介しよう．ここでは証明なしで結果を述べるだけにとどめる．(L,d_L) をアダマール空間で，$F : L \to [0,\infty]$ を下半連続な凸関数とする．各 $h > 0$ に対して，関数

$$L \ni u \mapsto F(u) + \frac{1}{2h} d_L(u,v)^2$$

の最小値を実現する点が存在する．それを $J_h(v)$ とおく．$u \in L$ から出発する F の勾配曲線が以下で定義される．

$$T_0 u := u \quad \text{かつ} \quad T_t u := \lim_{n\to\infty} J^n_{t/n}(u), \quad t \in (0,\infty).$$

定理 4.20 (Jost-Mayer [47, 69])．　(1) 写像

$$[0,\infty) \times W \ni (t,u) \mapsto T_t u \in L$$

は連続である．ここで $W := \{ u \in L \mid F(u) < \infty \}$ とおく．

(2) $\{T_t\}$ は半群の性質をみたす，つまり

$$T_{s+t} = T_s \circ T_t \qquad (s,t \geq 0).$$

(3) $[0,\infty) \ni t \mapsto F(T_t u)$ は単調非増加な凸関数である．

注意 4.21. X がリッチ曲率が下に有界な測度距離空間で $Y = \mathbb{R}$ のときは，$T_t = e^{-t\Delta}$ となり，$f(t,x) := T_t u(x)$ は熱方程式 $(\Delta + \frac{\partial}{\partial t})f(t,x) = 0$ の解であることが分かる．

上の定理を我々の場合に適用すると以下が得られる．

定理 4.22. $m_X(X/\Gamma) < \infty$ かつ Y/Γ がコンパクトと仮定する．このとき，任意の Γ-同変写像 $u \in W^{1,2}_\Gamma(X, Y, f_0)$ から出発する *harmonic map flow* は $W^{1,2}_\Gamma(X, Y, f_0)$ の中に解 $T_t u$ をもつ．さらに，$t \to \infty$ のとき，$W^{1,2}_\Gamma(X, Y, f_0)$ の中で $T_t u$ はエネルギー最小の Γ-同変写像へ $d_{L^2_\Gamma}$-収束する．

5. 汎関数の収束

5.1. **測度付き Gromov-Hausdorff 収束．** この章では，深谷氏 [34] の導入した測度距離空間の測度付き Gromov-Hausdorff 収束について基本的な事実を証明する．

以降では $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を任意の有向集合とする．コンパクト距離空間の等長類全体の集合を $\mathcal{C}$ とおき，コンパクト測度距離空間の同型類全体の集合を $\mathcal{CM}$ で表す．

定義 5.1 (測度付き Gromov-Hausdorff 位相)**.** 有向系 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset \mathcal{CM}$ が空間 $X \in \mathcal{CM}$ へ測度付き *Gromov-Hausdorff* 収束するとは，以下が成り立つときを言う．ゼロに収束する正の実数の有向系 $\{\epsilon_\alpha\}$ と m_{X_α}-可測な ϵ_α-近似写像 $f_\alpha : X_\alpha \to X$ が存在して，push-forward 測度 $f_{\alpha*}m_{X_\alpha}$ が m_X へ漠収束する．つまり，任意の関数 $u \in C(X)$ に対して

$$\lim_\alpha \int_{X_\alpha} u \circ f_\alpha \, dm_{X_\alpha} = \int_X u \, dm_X \tag{5.1}$$

が成り立つ．($C(X)$ は X 上の実数値連続関数全体の集合.) この収束から $\mathcal{CM}$ 上の位相が定義される．これを 測度付き *Gromov-Hausdorff* 位相と呼ぶ．

注意 5.2. ここで，$\{X_\alpha\}$ を可算な空間列でなく有向系にしたのは，位相を定義するには可算列では不十分なためである．

命題 5.3. $\mathcal{CM}$ 上の測度付き *Gromov-Hausdorff* 位相はハウスドルフである．

証明. 一つの有向系 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset \mathcal{CM}$ が，2 つの空間 $X, X' \in \mathcal{CM}$ の両方へ測度付き Gromov-Hausdorff 収束したと仮定する．このとき，X と X' が測度距離空間として同型であることを証明すれば良い．今，(5.1) をみたすような 2 つの m_{X_α}-可測な ϵ_α-近似 $f_\alpha : X_\alpha \to X$ と $g_\alpha : X_\alpha \to X'$ が存在する．ここで，$\epsilon_\alpha \searrow 0$ である．$3\epsilon_\alpha$-近似 $\hat{f}_\alpha : X \to X_\alpha$ で，任意の $x \in X$ に対して $d(f_\alpha \circ \hat{f}_\alpha(x), x) < \epsilon_\alpha$ をみたし，任意の $x \in X_\alpha$ に対して $d(\hat{f}_\alpha \circ f_\alpha(x), x) < \epsilon_\alpha$ をみたすものが存在する．写像 $h_\alpha := g_\alpha \circ \hat{f}_\alpha : X \to X'$ は $4\epsilon_\alpha$-近似である．さらに，部分有向系を取り直せば，h_α はある等長写像 $\iota : X \to X'$ へ収束する (詳しくは [39] の 3.6 Proposition を参照せよ)．次が成り立つ．

$$\lim_\alpha \sup_{x\in X_\alpha} d(\iota \circ f_\alpha(x), g_\alpha(x)) = 0. \tag{5.2}$$

$u \in C(X')$ を任意の関数とする．u の一様連続性と (5.2) から，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\alpha_\epsilon \in \mathcal{A}$ が取れて，任意の $\alpha \geq \alpha_\epsilon$ と $x \in X_\alpha$ に対

して，$|u\circ\iota\circ f_\alpha(x)-u\circ g_\alpha(x)|<\epsilon$ が成り立つ．これより，

$$\begin{aligned}&\varlimsup_\alpha\left|\int_{X_\alpha}u\circ\iota\circ f_\alpha\,dm_{X_\alpha}-\int_{X_\alpha}u\circ g_\alpha\,dm_{X_\alpha}\right|\\&\le\epsilon\,\varlimsup_\alpha m_{X_\alpha}(X_\alpha)\le\epsilon\,m_X(X).\end{aligned}$$

故に，

$$\begin{aligned}\int_{X'}u\circ\iota\,dm&=\lim_\alpha\int_{X_\alpha}u\circ\iota\circ f_\alpha\,dm_{X_\alpha}\\&=\lim_\alpha\int_{X_\alpha}u\circ g_\alpha\,dm_{X_\alpha}=\int_{X'}u\,dm'\end{aligned}$$

となり，これは $\iota_*m=m'$ であることを意味する．従って X と X' は測度距離空間として同型である． □

$M>0$ に対して，

$$\mathcal{CM}(M):=\{\,X\in\mathcal{CM}\mid m_X(X)\le M\,\}$$

とおく．

命題 5.4. 射影 $\mathcal{CM}(M)\to\mathcal{C}$ は固有写像である．つまり，$\mathcal{CM}(M)$ の部分集合が *Gromov-Hausdorff* 位相でコンパクトならば，測度付き *Gromov-Hausdorff* 位相でもコンパクトになる．

証明. 有向系 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}\subset\mathcal{CM}(M)$ がある空間 $X\in\mathcal{C}$ へ Gromov-Hausdorff 収束したとする．X 上のある有限正値ボレル測度 m_X が存在して，それに関して $X\in\mathcal{CM}(M)$ でかつ，$\{X_\alpha\}$ のある部分有向系が X へ測度付き Gromov-Hausdorff 収束することを証明すれば良い．ϵ_α-近似写像 $f_\alpha:X_\alpha\to X$ $(\epsilon_\alpha\searrow 0)$ をとる．f_α がボレル可測な $2\epsilon_\alpha$-近似で置き換えられることを示そう．先ず，f_α の像が離散集合になるように f_α を少し変更することが出来る．次に，それをさらに，f_α の像の各点の逆像が X_α のボレル集合になるように f_α を変更する．これをするには，X_α を小さい直径をもつボレル集合たちに分割すれば良い．これによって，f_α はボレル可測になる．従って，最初から f_α はボレル可測であると仮定して良い．各 $\alpha\in\mathcal{A}$ に対して，$f_{\alpha*}m_{X_\alpha}$ は X 上の有限正値ボレル測度で，$\varlimsup_\alpha(f_{\alpha*}m_{X_\alpha})(X)\le M$ をみたしている．従って，部分有向系に取り替えれば，$f_{\alpha*}m_{X_\alpha}$ はある有限ボレル測度 m_X へ漠収束して，これは $m_X(X)\le M$ をみたす．これで命題が証明できた． □

5.2. 変分収束理論．

ここでは E. De Giorgi, G. Dal Maso, U. Mosco らによって確立された変分収束理論（the theory of variational convergences）の測度付き Gromov-Hausdorff 収束の下での拡張 [61] について解説する．

以下において，$p\in[1,\infty]$ とし，$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}\subset\mathcal{CM}$ と $X\in\mathcal{CM}$ をそれぞれ与えられた有向系と空間とする．

定義 5.5 (L^p 収束)**.** $u_\alpha\in L^p(X_\alpha)$ なる関数の有向系 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が関数 $u\in L^p(X)$ へ L^p (強) 収束するということを，次の条件 (i),(ii) が成り立つことで定義する．

(i) X_α が X へ測度付き Gromov-Hausdorff 収束する．

(ii) u へ L^p 収束するようなある有向系 $\{\tilde{u}_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}} \subset C(\operatorname{supp} m_X)$ が存在して，

$$\lim_\beta \overline{\lim_\alpha} \|\Phi_\alpha \tilde{u}_\beta - u_\alpha\|_{L^p(X_\alpha)} = 0$$

が成り立つ．ここで，$f_\alpha : X_\alpha \to X$ を (5.1) をみたす ϵ_α-近似写像 ($\epsilon_\alpha \searrow 0$) とするとき，$v \in C(\operatorname{supp} m_X)$ に対して，$\Phi_\alpha v := v \circ f_\alpha$ と定義する．

この収束から直和

$$L^p(\mathcal{CM}) := \bigsqcup_{X\in\mathcal{CM}} L^p(X)$$

の上に位相が定まる．それを L^p (強) 位相と呼ぶ．

空間 $L^p(\mathcal{CM})$ を $\mathcal{CM}$ 上のバナッハ空間束のようなものと考えよう．このとき，位相の定義から明らかに，射影 $L^p(\mathcal{CM}) \to \mathcal{CM}$ は連続である．命題5.3より，$L^p(\mathcal{CM})$ はハウスドルフ空間であることが分かる (詳しい証明は省略する)．

定義 5.6 (L^p 弱収束). $u_\alpha \in L^p(X_\alpha)$ なる有向系 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が関数 $u \in L^p(X)$ へ L^p 弱収束するということを次の (i),(ii) が成り立つことで定義する．

(i) X_α が X へ測度付き Gromov-Hausdroff 収束する．

(ii) $v_\alpha \in L^q(X_\alpha)$ なる有向系 $\{v_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が関数 $v \in L^q(X)$ へ L^q 強収束するならば，

$$\lim_\alpha (u_\alpha, v_\alpha) = (u, v) \tag{5.3}$$

が成り立つ．ここで，$q \in [1,\infty]$ は $1/p + 1/q = 1$ で定義される数である．

この収束により $L^p(\mathcal{CM})$ 上に位相が定義されるが，これを L^p 弱位相と呼ぶ．

$L^p(\mathcal{CM})$ 上の弱位相もまたハウスドルフ位相になる．また，$L^p(\mathcal{CM})$ 上強収束すれば弱収束する．

次にターゲットが距離空間の写像の場合へ拡張する．以降において，次を常に仮定する．

仮定 5.7. 有向系 $\{X_\alpha\} \subset \mathcal{CM}$ は空間 $X \in \mathcal{CM}$ へ測度付き Gromov-Hausdorff 収束する．

次に Γ-収束の概念を拡張しよう．$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ とおく．

定義 5.8 (Γ-収束). 仮定5.7の下で，汎関数の有向系 $F_\alpha : L^p(X_\alpha) \to \bar{\mathbb{R}}$ ($\alpha \in \mathcal{A}$) が汎関数 $F : L^p(X) \to \bar{\mathbb{R}}$ へ Γ-収束する，または F が $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ の Γ-極限であることを，次の (F1) と (F2) で定義する．

(F1) もし，有向系 $u_\alpha \in L^p(X_\alpha)$ が写像 $u \in L^p(X)$ へ L^p 収束するならば，

$$F(u) \le \underline{\lim}_\alpha F_\alpha(u_\alpha).$$

が成り立つ.

(F2) 任意の写像 $u \in L^p(X)$ に対して，ある有向系 $u_\alpha \in L^p(X_\alpha)$ が存在して，それは u へ L^p 収束して，かつ

$$F(u) = \lim_\alpha F_\alpha(u_\alpha)$$

をみたす.

もし汎関数の有向系 $F_\alpha : L^p(X_\alpha) \to \bar{\mathbb{R}}$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ が汎関数 $F : L^p(X) \to \bar{\mathbb{R}}$ へ Γ-収束するならば，F は下半連続であることが分かっている．従って，$L^p(X)$ $(X \in \mathcal{CM})$ 上の汎関数全体の集合を考えてしまうと，この上には Γ-収束からは位相が定まらない．何故なら，もし F が下半連続でないなら，定値の汎関数有向系 $F_\alpha = F$ が自分自身 F へ Γ-収束しないからである．しかし，下半連続全体の汎関数全体の集合の上には Γ-収束から位相が定まる．それを Γ-位相と呼ぶことにする.

次の補題は重要であるが，証明は略す.

補題 5.9. 任意の汎関数の有向系 $F_\alpha : L^p(X_\alpha) \to \bar{\mathbb{R}}$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ は常に Γ-収束する部分有向系をもつ.

任意に汎関数の有向系 $F_\alpha : L^p(X_\alpha) \to \bar{\mathbb{R}}$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ と汎関数 $F : L^p(X) \to \bar{\mathbb{R}}$ を与える．U. Mosco [71] は，埋め込み $W^{1,2} \hookrightarrow L^2$ のコンパクト性の概念の拡張として，漸近的コンパクト性を定義した．ここではそれをさらに拡張する.

定義 5.10 (漸近的コンパクト性). 仮定 5.7 の下で，有向系 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が漸近的コンパクト (*asymptotically compact*) であるとは，$\overline{\lim}_\alpha(F_\alpha(u_\alpha) + \|u_\alpha\|_{L^p}) < \infty$ をみたすような任意の有向系 $u_\alpha \in L^p(X_\alpha)$ に対して，それが L^p 収束部分有向系をもつときを言う.

定義 5.11. F_α が F へコンパクトに収束するとは，F_α が F へ Γ-収束して，さらに $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が漸近的コンパクトであると定義する.

補題 5.9 から直接に以下が得られる.

系 5.12. もし $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が漸近的コンパクトならば，それはコンパクト収束する部分有向系をもつ.

固定されたヒルベルト空間上の関数列に対して U. Mosco [71] は重要な収束概念を導入した．それは今日 Mosco 収束と呼ばれている．我々はその概念を拡張しよう.

定義 5.13 (Mosco 収束). 仮定 5.7 の下で，汎関数の有向系 $F_\alpha : L^p(X_\alpha) \to \mathbb{R}$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ が $F : L^p(X) \to \mathbb{R}$ へ *Mosco* 収束するということを，定義 5.8 の (F2) と以下の (F1') をみたすことで定義する.

(F1') もし有向系 $u_\alpha \in L^p(X_\alpha)$ が $u \in L^p(X)$ へ弱収束するならば，

$$F(u) \le \underline{\lim}_\alpha F_\alpha(u_\alpha).$$

が成り立つ.

Mosco 収束は $L^p(X)$ $(X \in \mathcal{CM})$ 上の下半連続汎関数全体の集合の上に位相を定義するが，それを Mosco 位相と呼ぶ.

明らかに Mosco 収束するならば Γ-収束する．Mosco 位相はハウスドルフになる．汎関数の有向系が特に $L^2(X)$ 上の非負値対称形式の有向系である場合，Mosco 収束，対応する生成作用素 A のグラフの収束，半群 e^{-tA} の強収束，レゾルベント $(\lambda - A)^{-1}$ の強収束，スペクトル測度の強収束などは全て同値であることが [61] で証明されている．ここではその詳細には触れないことにする．

次が簡単に分かる．

補題 5.14. 汎関数の有向系 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が漸近的コンパクトであると仮定する．このとき以下の (1)–(3) は互いに同値である．

(1) $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が F へ Γ-収束する．
(2) $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が F へ *Mosco* 収束する．
(3) $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が F へコンパクト収束する．

5.3. ポアンカレの不等式と漸近的コンパクト性．$X \in \mathcal{CM}$ に対して，次の条件を満たすような汎関数 $F : L^p(X) \to [0,\infty]$ を考えよう：

(μ) 各 $u \in \mathcal{D}(F) := \{\, u \in L^p(X) \mid F(u) < \infty \,\}$ に対してある有限非負ボレル測度 $\mu_{(u)}$ が定まっていて，$\frac{1}{2}\mu_{(u)}(X) = F(u)$ をみたす．

例えば強局所正則ディリクレ形式は (μ) を満たす．この条件 (μ) を満たす様な F の全体の集合を $\mathcal{F}_\mu L^p(X)$ と書く．

与えられた列 $X_i \in \mathcal{CM}$ がある $X \in \mathcal{CM}$ へ測度付き Gromov-Hausdorff 収束すると仮定する．与えられた汎関数の列 $F_i \in \mathcal{F}_\mu L^p(X_i)$ と定数 $c \geq 1$ に対して，以下の条件を考える．

(P) ある $r_0 > 0$ が存在して，任意の $r \in (\,0, r_0\,]$, i, $u \in \mathcal{D}(F_i)$ に対して，ある定数 $\bar{u}_{x,r}$ が存在して，

$$\|u - \bar{u}_{x,r}\|_{L^p(B(x,r);m)} \leq \mathrm{const}\cdot r \left(\int_{B(x,cr)} d\mu_{i(u)}\right)^{1/p}$$

が成り立つ．ここで，μ_i は F_i に付随するボレル測度である．

もし X_i が次元 n でリッチ曲率が $\geq \kappa(n-1)$ かつ，$m_X(X_i) \geq \mathrm{const} > 0$ ならば，定理 4.14(2) より p 次のエネルギー汎関数に対して (P) が成り立つ．

定義 5.15 (局所被覆位数)．S を局所コンパクト距離空間，$c \geq 1, r > 0$ を定数とする．$\{x_\lambda\}$ を S の任意の離散部分集合で，$d(x_\lambda, x_{\lambda'}) \geq r$ $(\lambda \neq \lambda')$ をみたすものとする．そのような $\{x_\lambda\}$ を全て動かしたときの cr-球体による被覆 $\{B(x_\lambda, cr)\}_\lambda$ の最大位数，つまり球体の重なりの個数の最大値を $K_{c,S}(r)$ とする．ある関数 $f(r)$ に対して，任意の $r > 0$ に対して $K_{c,S}(r) \leq f(r)$ であるときに，S の c-局所位数は高々 $f(r)$ であると言う．

例 5.16. ℓ^2-ノルムをもつ空間 $Q := [\,0,1\,] \times [\,0,1/2\,] \times \cdots \times [\,1, 1/2^n\,] \times \ldots$ を考える．これは無限次元コンパクト距離空間である．Q の c-局所被覆位数は高々 $O(r^{-\log_2(c+1)})$ であることを以下に示す．先ず，$\mathbb{R}^n$ においては，球体の体積を評価することにより $K_{c,\mathbb{R}^n}(r) \leq (c+1)^n$

を得る．$Q_n := [0,1]\times[0,1/2]\times\cdots\times[1,1/2^n]\subset\mathbb{R}^n$ に対して，$K_{c,Q_n}(r)\le K_{c,\mathbb{R}^n}(r)\le(c+1)^n$ が成り立つ．普遍的な定数 $a>0$ が存在して，$n\ge\log_2(1/r)+a$ のとき $K_{c,Q}(r)\le a\,K_{c,Q_n}(r)$．従って，$K_{c,Q}(r)\le O(r^{-\log_2(c+1)})$ を得る．もし $2^p>c+1$ ならば Q は以下に述べるの定理 5.17 の条件をみたすことに注意する．

この章の目的は以下を証明することである．

定理 5.17 (漸近的コンパクト性定理). $c\ge1$ を定数，X の c-局所被覆位数は高々 $o(r^{-p})$ と仮定する．同じ定数 c に対して条件 (P) を仮定すると，列 $\{F_i\}$ は漸近的コンパクトになる．特に $\{F_i\}$ はコンパクト収束するような部分列をもつ．

この定理の系として以下を得る．

系 5.18. $X\in\mathcal{CM}$, $F\in\mathcal{F}_\mu$, $c\ge1$ とする．X の c-局所被覆位数は高々 $o(r^{-p})$ と仮定する．ある $r_0>0$ が存在して，任意の $r\in(0,r_0]$, $u\in\mathcal{D}(F)$ に対して，ある定数 $\bar{u}_{x,r}$ が存在して，

$$\|u-\bar{u}_{x,r}\|_{L^p(B(x,r);m)}\le\mathrm{const}\cdot r\left(\int_{B(x,cr)}d\mu_{\langle u\rangle}\right)^{1/p}$$

が成り立つと仮定する．ここで，$\bar{u}_{x,r}$ は u, x, r にのみ従属するある定数である．このとき，埋め込み $(\mathcal{D}(F),F_1)\hookrightarrow L^p(X)$ はコンパクトになる，つまり，関数列 $u_i\in L^p(X)$ が $\sup_i(\|u_i\|_{L^p}^p+F(u_i))<\infty$ をみたすならば，$\{u_i\}$ は L^p 強収束する部分列を持つ．

注意 5.19. 論文 [61] の Lemma 5.5 の証明にはギャップがある．ここでは，局所被覆位数の条件を加えることで，そのギャップを埋めている．[61] の Lemma 5.5 は本稿の補題 5.21 に相当する．[61] の 5.2 章の主張は全て X の局所被覆位数の条件の下で成り立ち，それを使っている他の章の主張においては，自動的に局所被覆位数の条件が成り立つので，そのままで正しい．

次の補題は標準的な議論により得られるので，証明は省略する．

補題 5.20. もし，コンパクト距離空間の列 S_i がコンパクト距離空間 S へ *Gromov-Hausdorff* 収束するならば，任意の $r>0$ に対して，

$$\varlimsup_i K_{c,S_i}(r)\le K_{c,S}(r).$$

が成り立つ．

定理 5.17 の証明. 以下，定理の条件を仮定する．$r_j\le r_0$ なる実数列 $r_j\searrow0$, $j=1,2,\dots$ をとる．任意の i, j に対して，X_i の極大な r_j-離散ネット $\{x^i_{jk}\}_{k=1}^{N^i_j}$ をとる．$\bar{u}^i_{jk}:=\bar{u}_{x^i_{jk},r_j}$ とおくと仮定 (P) より，任意の i, j, k, $u\in\mathcal{D}(E_i)$ に対して，

$$\int_{B(x^i_{jk},r_j)}|u(x)-\bar{u}^i_{jk}|^p\,dx\le\mathrm{const}\cdot r_j^p\int_{B(x^i_{jk},cr_j)}d\mu_u \tag{5.4}$$

が成り立つ．$U^i_{jk} := B(x^i_{jk}, r_j) \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} B(x^i_{jl}, r_j)$ とおく．$k \neq l$ のとき $U^i_{jk} \cap U^i_{jl} = \emptyset$ かつ $\bigcup_{k=1}^{N^i_j} U^i_{jk} = X_i$ であることを注意する． 任意の $u \in \mathcal{D}(E_i)$ に対して，関数 $\bar{u}^i_j : X_i \to \mathbb{R}$ を各 U^i_{jk} 上で $\bar{u}^i_j := \bar{u}^i_{jk}$ と定義する．

補題 5.21. 以下の *(1),(2)* をみたす様な正の数列 θ^i_j が存在する．

(1) $\lim_j \overline{\lim}_i \theta^i_j = 0$.

(2) 任意の $u \in \mathcal{D}(E_i)$ に対して，

$$\|u - \bar{u}^i_j\|_{L^p(X)} \leq \theta^i_j \, E_i(u)^{1/p}.$$

証明. (5.4) より，任意の i, j に対して，

$$\begin{aligned}\|u - \bar{u}^i_j\|^p_{L^p(X)} &= \sum_{k=1}^{N^i_j} \int_{U^i_{jk}} |u(x) - \bar{u}^i_{jk}|^p \, dx \leq \mathrm{const} \cdot r^p_j \sum_{k=1}^{N^i_j} \int_{B(x^i_{jk}, cr_j)} d\mu_u \\ &\leq \mathrm{const} \cdot r^p_j \, K_{c,X_i}(r_j) \int_{X_i} d\mu_u.\end{aligned}$$

補題 5.20 と仮定より，$\overline{\lim}_i K_{c,X_i}(r_j) \leq K_{c,X}(r_j) \leq o(r_j^{-p})$．$\theta^i_j := \mathrm{const} \cdot r^p_j \, K_{c,X_i}(r_j)$ とおくと，補題が得られる． □

以下の議論の利便性をから次のような関数を導入しておく．$a < b$, $x \in S \in \mathcal{C}$ に対して，関数 $L_+(x,a,b) : S \to [0,1]$ と $L_-(x,a,b) : S \to [0,1]$ を，任意の $y \in S$ に対して

$$L_+(x,a,b)(y) := \left(\frac{d_S(x,y) - a}{b - a} \right)^\sharp, \quad L_-(x,a,b)(y) := \left(\frac{b - d_S(x,y)}{b - a} \right)^\sharp$$

と定義する．すると，$L_\pm(x,a,b)$ は共にリップシッツ定数 $1/(b-a)$ 以下のリップシッツ関数である．

$u_i \in \mathcal{D}(F_i)$ を $\sup_i (F_i(u_i) + \|u_i\|_{L^p}) < \infty$ をみたす関数列とする．このとき，定理を証明するためには $\{u_i\}$ が L^p 強収束する部分列を持つことを証明すれば良い．(5.1) をみたす可測な ϵ_i-近似 $f_i : X_i \to X$ ($\epsilon_i \searrow 0$) をとる．u_i に対して x^i_{jk} と U^i_{jk} ($k = 1, \ldots, N^i_j$) を前に定義したものとする．このとき，j に従属して $\{i\}$ のある部分列 I_j が存在して，任意の $k = 1, \ldots, N^i_j$ にたいして，極限たち $x_{jk} := \lim_{i \in I_j} f_i(x^i_{jk})$, $N_j := \lim_{i \in I_j} N^i_j$, $c_{jk} := \lim_{i \in I_j} \bar{u}^i_{jk}$ が全て同時に存在するようにできる．I_j を部分列に取り替えることにより，全ての $i \in I_j$ について $N_j = N^i_j$ と仮定して良い．さらに，各 j について $I_{j+1} \subset I_j$ と仮定して良いので，対角線論法を使うことにより，全ての I_j の共通の部分列を選ぶことが出来る．以下 i は全てこの部分列の元とする．$U_{jk} := B(x_{jk}, r_j) \setminus \bigcup_{\ell=1}^{k-1} B(x_{j\ell}, r_j)$ とおく．任意の $\epsilon > 0$ と $x \in X$ に対して，次のように定義する．

$$\chi^\epsilon_{B(x,r_j)} := L_-(x, r_j - 2\epsilon, r_j - \epsilon) : X \to [0,1],$$

$$\chi^\epsilon_{U_{jk}} := \chi^\epsilon_{B(x_{jk},r_j)} \cdot \prod_{\ell=1}^{k-1} (1 - \chi^\epsilon_{B(x_{j\ell},r_j)}) : X \to [0,1].$$

主張 5.22. 任意の $j=1,2,\dots,k=1,\dots,N_j$ に対して，

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\|\chi^{\epsilon}_{U_{jk}}-I_{U_{jk}}\|_{L^p(X)}=0, \tag{5.5}$$

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\lim_{i}\|\Phi_i\chi^{\epsilon}_{U_{jk}}-I_{U^i_k}\|_{L^p(X_i)}=0 \tag{5.6}$$

が成り立つ．ここで，Φ_i は f_i に対して定義 5.5(ii) で定義されるものである．

証明. $A(x,r,R):=B(x,R)\setminus B(x,r)$ とおく．

$$\{I_{U_{jk}}\neq\chi^{\epsilon}_{U_{jk}}\}\subset\bigcup_{\ell=1}^{N_j}A(x_{j\ell},r_j-2\epsilon,r_j-\epsilon)$$

より以下が成り立つ．

$$\|I_{U_{jk}}-\chi^{\epsilon}_{U_{jk}}\|_{L^p(X)}\leq\sum_{\ell=1}^{N_j}m_X(A(x_{j\ell},r_j-2\epsilon,r_j-\epsilon)).$$

これより (5.5) が従う．

$\epsilon>0$ を任意にとって固定し，i を十分大とする．任意の $y\in X_i$, $\ell=1,\dots,N_j$ に対して，

$$|\,d(x^i_{j\ell},f_i(y))-d(x_{j\ell},y)\,|<\epsilon_i<\epsilon/2.$$

だから，$\{I_{U^i_{jk}}\neq\chi^{\epsilon}_{U_{jk}}\circ f_i\}\subset\bigcup_{\ell=1}^{N_j}A^i_{\ell\epsilon}$ が成り立つ．ここで，$A^i_{\ell\epsilon}:=A(x^i_{j\ell},r_j-3\epsilon,r_j-\epsilon/2)$ とおく．従って，

$$\|I_{U^i_{jk}}-\chi^{\epsilon}_{U_{jk}}\circ f_i\|_{L^p(X_i)}\leq\sum_{\ell=1}^{N_j}m_X(A^i_{\ell\epsilon}).$$

今，

$$\varphi_{\ell\epsilon}:=L_-(x_{j\ell},r_j-\epsilon/4,r_j-\epsilon/8)\cdot L_+(x_{j\ell},r_j-5\epsilon,r_j-4\epsilon):X\to[0,1]$$

とおくと，十分大きな i に対して $I_{A^i_{\ell\epsilon}}\leq\varphi_{\ell\epsilon}\circ f_i$ が成り立ち，従って，

$$\overline{\lim_i}\,m_X(A^i_{\ell\epsilon})\leq\overline{\lim_i}\int_{X_i}\varphi_{\ell\epsilon}\circ f_i\,dm_{X_i}=\int_X\varphi_{\ell\epsilon}\,dm.$$

$\epsilon\to 0$ のとき上の右辺はゼロに収束する．これで主張が証明された． □

$\bar{u}^i_j$ は前に定義した関数とする．X 上の２つの関数を

$$\bar{u}_j:=\sum_{k=1}^{N_j}c_{jk}I_{U_{jk}}\qquad\text{and}\qquad\tilde{u}^{\epsilon}_j:=\sum_{k=1}^{N_j}c_{jk}\,\chi^{\epsilon}_{U_{jk}}.$$

で定義する．

主張 5.23. 任意の $j = 1, 2, \ldots$ に対して，以下が成り立つ．

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \|\tilde{u}_j^\epsilon - \bar{u}_j\|_{L^p(X)} = 0,$$

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \overline{\lim_i} \|\Phi_i \tilde{u}_j^\epsilon - \bar{u}_j^i\|_{L^p(X_i)} = 0.$$

従って $\lim_i \bar{u}_j^i = \bar{u}_j$ (L^p 強収束) が得られる．

証明. 主張 5.23 は主張 5.22 の直接の結果である． □

主張 5.24. 関数列 $\{\bar{u}_j\}$ は $L^p(X)$ 上の L^p ノルムに関するコーシー列である．

証明. 主張 5.23 から，任意の j, j' に対して，

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}_j - \bar{u}_{j'}\|_{L^p(X)} &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \|\tilde{u}_j^\epsilon - \tilde{u}_{j'}^\epsilon\|_{L^p(X)} \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \lim_i \|\Phi_i \tilde{u}_j^\epsilon - \Phi_i \tilde{u}_{j'}^\epsilon\|_{L^p(X_i)} \\
&= \overline{\lim_i} \|\bar{u}_j^i - \bar{u}_{j'}^i\|_{L^p(X_i)} \\
&\le \overline{\lim_i} (\|\bar{u}_j^i - u_i\|_{L^p(X_i)} \\
&\qquad + \|u_i - \bar{u}_{j'}^i\|_{L^p(X_i)}).
\end{aligned}$$

補題 5.21 より，$j, j' \to \infty$ のとき上式右辺はゼロに収束する．これで主張 5.24 が証明された． □

主張 5.24 より，極限 $u := \lim_{j \to \infty} \bar{u}_j \in L^p(X)$ が存在する．u_i が u へ L^p 強収束することを以下に証明しよう．ある実数列 $\epsilon_j \searrow 0$ が存在して，$\lim_j \tilde{u}_j^{\epsilon_j} = u$ かつ

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_j} \overline{\lim_i} \|\Phi_i \tilde{u}_j^{\epsilon_j} - u_i\|_{L^p(X_i)} \\
&\le \overline{\lim_j} \overline{\lim_{\epsilon \searrow 0}} \overline{\lim_i} \|\Phi_i \tilde{u}_j^\epsilon - u_i\|_{L^p(X_i)}
\end{aligned}$$

をみたす．主張 5.23 より，上式の右辺は

$$\le \overline{\lim_j} \overline{\lim_i} \|\bar{u}_j^i - u_i\|_{L^p(X_i)} = 0$$

となる．これで目標の定理 5.17 の証明が終った． □

6. エネルギー汎関数の収束と熱核

6.1. エネルギー汎関数の収束.

$n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathcal{A}(n)$ を曲率 ≥ -1 の境界をもたないコンパクトな n次元 Alexandrov 空間の等長同型類全体の集合とする．与えられた Alexandrov 空間の列 $X_i \in \mathcal{A}(n)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ が Alexandrov 空間 $X \in \mathcal{A}(n)$ へ Gromov-Hausdorff 収束したと仮定する．任意に固定された $p \ge 1$ に対して，$W^{1,p}(X_i) = W^{1,p}(X_i, \mathbb{R})$, $W^{1,p}(X) = W^{1,p}(X, \mathbb{R})$ 上の p 次エネルギー汎関数をそれぞれ E_i^p, E^p とおく．この章の主定理を以下に述べる．

定理 6.1. 上の仮定の下で，$(X_i, \mathcal{H}^n)$ は $(X, \mathcal{H}^n)$ へ測度付き *Gromov-Hausdorff* 収束して，E_i^p は E^p へコンパクト収束する．

この定理の証明は後回しにして，先にこの定理から得られる系を述べる．$X \in \mathcal{A}(n)$ に対して，

$$0 = \lambda_0(X) < \lambda_1(X) \le \lambda_2(X) \le \cdots \nearrow \infty$$

を X のラプラシアンの固有値を順に並べたものとすると，以下を得る．

系 6.2. 定理 6.1 と同じ仮定の下で，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{i\to\infty} \lambda_k(X_i) = \lambda_k(X) \tag{6.1}$$

が成り立つ．さらに，$\{u_k^i\}_{k=0,1,\ldots}$ を $L^2(X_i)$ の完全正規直交基底で，各 u_k^i は $\lambda_k(X_i)$ に対応する X_i 上のラプラシアンの固有関数とする．すると，$\{i\}$ をある部分列に取り替えると，$i \to \infty$ のとき u_k^i は $\lambda_k(X)$ に対応する X 上のラプラシアンのある固有関数 u_k へ L^2 強収束して，$\{u_k\}_{k=0,1,\ldots}$ は $L^2(X)$ の完全正規直交基底になる．

証明. 定理 6.1 を仮定して系を証明する．最初に $k = 1$ の場合を考えよう．$\lambda_1(X)$ に対するラプラシアンの固有関数 v_1 で $\|v_1\|_{L^2} = 1$ をみたすものをとる．すると，$\lambda_1(X)$ がレイリー商 $u \mapsto E^2(u)/\|u\|_{L^2}^2$ の最小値であり，それが $\lambda_1(X)$ に対応する固有関数で実現されることより，$E^2(v_1) = \lambda_1(X)$ が成り立つ．定義 5.8 の (F2) より，ある $v_1^i \in W^{1,2}(X_i)$ が存在して，$i \to \infty$ のとき $E_i^2(v_1^i) \to E^2(v_1) = \lambda_1(X)$ かつ $\|v_1^i\|_{L^2} \to 1$ をみたす．従って，

$$\lambda_1(X_i) \le \frac{E_i^2(v_1^i)}{\|v_i\|_{L^2}} \to \lambda_1(X). \tag{6.2}$$

u_k^i を系の固有関数とすると，(6.2) より $E_i^2(u_1^i) = \lambda_1(X_i)$ は一様に有界なので，$\{E_i^2\}$ の漸近的コンパクト性より，u_1^i は L^2 強収束部分列をもつ．その任意の L^2 強収束部分列の極限 $u_1 \in L^2(X)$ に対して，$\|u_1\|_{L^2} = 1$ が成り立ち，さらに (F2), (6.2) より

$$\lambda_1(X) \le E^2(u_1) \le \varlimsup_{i\to\infty} E^2(u_1^i) = \varlimsup_{i\to\infty} \lambda_1(X_i) \le \lambda_1(X).$$

上式はどんな $\{u_1^i\}$ の収束部分列に対しても成り立つので，$\lambda_1(X_i) \to \lambda_1(X)$ が証明された．さらに上式より u_1 がレイリー商の最小値を取ることが分かるので，u_1 は X 上のラプラシアンの固有値 $\lambda_1(X)$ に対応する固有関数である．

u_2^i に対しても同様の議論で，(6.1) が得られ，部分列を取れば u_2^i は u_1 に直交するある固有関数へ収束することが分かる．以下，帰納的に全ての k に対して証明される． □

$\mathcal{A}(n, D, v)$ を $X \in \mathcal{A}(n)$ で直径が $\mathrm{diam}(X) \le D$ で n 次元ハウスドルフ測度が $\mathcal{H}^n(X) \ge v > 0$ なる空間全体の集合とする．以下が成り立つことが分かる．

系 6.3. (1) n, k, D, v にのみ従属する定数 $\mathrm{const}_{n,k,D,v}$ が存在して，任意の $X \in \mathcal{A}(n, D, v)$ に対して

$$\lambda_k(X) \le \mathrm{const}_{n,k,D,v} < \infty$$

が成り立つ．

(2) n, D, v にのみ従属する正の定数 $\mathrm{const}_{n,D,v}$ が存在して，任意の $X \in \mathcal{A}(n, D, v)$ に対して

$$\lambda_1(X) \geq \mathrm{const}_{n,D,v} > 0$$

が成り立つ．

証明． (1): $\mathcal{A}(n, D, v)$ は Gromov-Hausdorff 位相に関してコンパクトである．さらに，上の系より $\lambda_k : \mathcal{A}(n) \to \mathbb{R}$ は Gromov-Hausdorff 位相に関して連続なので，像 $\lambda_k(\mathcal{A}(n, D, v))$ はコンパクト集合である．従って (1) が成り立つ．

(2): 任意の $X \in \mathcal{A}(n, D, v)$ に対して $\lambda_1(X) > 0$ なので，$\lambda_1(\mathcal{A}(n, D, v))$ のコンパクト性から $\lambda_1(\mathcal{A}(n, D, v))$ は 0 を含まない．従って (2) が成り立つ． □

注意 6.4. 上の (2) はポアンカレの不等式からも証明できる．

定理 6.1 を証明するために以下が必要である．

定理 6.5. 定理 6.1 と同じの仮定の下で，$0 < \delta \ll 1/n$ をみたす任意の δ に対して，ある ϵ_i-近似 $f_{\delta,i} : X \to X_i$ ($\epsilon_i \searrow 0$) とコンパクト部分集合 $D_{\delta,i} \subset X \setminus S_\delta$ が存在して，以下の (1)–(3) をみたす．

(1) 制限 $f_{\delta,i} : D_{\delta,i} \to f_{\delta,i}(D_{\delta,i})$ は $\theta(\delta)$-概等長写像である．
(2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_{\delta,i} = X \setminus S_\delta$.
(3) $\lim_{i\to\infty} \mathcal{H}^n(X_i \setminus f_{\delta,i}(D_{\delta,i})) = 0$.

証明の概略． r と t を $0 < t \ll r$ をみたすような十分小さい数とする．$X \setminus B(S_\delta, r)$ の t-ネット $\{x_j\}_{j=1}^m$ をとる．すると，各 x_j において $\theta(\delta)$-strainer $\{p_{jk}\}_{k=\pm1,\dots,\pm n}$ が存在して，$U_j := B(x_j, 2t)$ から $\varphi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n$ への写像 $\varphi_j := (d_X(p_{jk}, \cdot))_{k=1,\dots,n}$ が $\theta(\delta)$-概等長になる．近似 $X \to X_i$ により，点 x_j, p_{jk} を全て X_i 上の点に写し，それを y_j, q_{jk} とおく．i を十分大と仮定して，$V_j := B(y_j, 5t)$ から $\psi_j(V_j) \subset \mathbb{R}^n$ への写像 $\psi_j := (d_X(q_{jk}, \cdot))_{k=1,\dots,n}$ も $\theta(\delta)$-概等長と仮定して良い．$U_j' := B(x_j, t)$ とおく．リップシッツ写像 $\chi_j : X \to [0,1]$ を

$$\operatorname{supp}\chi_j \subset U_j, \quad \chi_j = 1 \text{ on } U_j', \quad \text{and} \quad X = \bigcup_j (\operatorname{supp}\chi_j)^\circ$$

をみたすようにとることができる．関数列 $f_{\delta,i}^j : \bigcup_{\ell=1}^j U_\ell' \to X_i$ を以下のように帰納的に定義しよう．

$$f_{\delta,i}^1 := \psi_1^{-1} \circ \varphi_1 : U_1' \to X_i$$

かつ $j \geq 2$ に対して，

$$f_{\delta,i}^j(x) := \begin{cases} f_{\delta,i}^{j-1}(x) & \text{if } x \in \bigcup_{\ell=1}^j U_\ell' \setminus U_j, \\ \psi_j^{-1} \circ ((1-\chi_j)\psi_j \circ f_{\delta,i}^{j-1} + \chi_j\varphi_j)(x) & \text{if } x \in \bigcup_{\ell=1}^j U_\ell' \cap U_j. \end{cases}$$

すると，i が r に対して十分大きいとき，$f_{\delta,i} := f_{\delta,i}^m : X \setminus B(S_\delta, r) \to X_i$ が $\theta(\delta)$-概等長であることが証明される．正の実数の列 r_i をゆっくりとゼロに収束するようにとって，定理の $\theta(\delta)$-概等長写像を $f_{\delta,i} : D_{\delta,i} := X \setminus B(S_\delta, r_i) \to f_{\delta,i}(D_{\delta,i})$ と定義すれば良い． □

定理 6.1 の証明. 定理6.5より, $(X_i, \mathcal{H}^n)$ は $(X, \mathcal{H}^n)$ へ測度付き Gromov-Hausdorff 収束する. 定理 4.14, 5.17 より, $\{E_i^p\}$ は漸近的にコンパクトである. 従って補題 5.14 より, E_i^p が E^p へ Γ-収束することを示せば十分である.

先ず (F2) を証明する. 任意に $u \in W^{1,p}(X)$ を固定する. このとき, ある $u_i \in W^{1,p}(X_i)$ が存在して, $i \to \infty$ のとき u_i が u へ L^p 強収束して, $E_i^p(u_i) \to E^p(u)$ なることを示せば良い. $\epsilon, \delta > 0$ を任意にとる. 定理 3.1 より, $u^{(\epsilon)} \in DC_0^1(X \setminus S_\delta)$ が存在して, $\|u^{(\epsilon)} - u\|_{W^{1,2}} < \epsilon$ をみたす. i が十分大きいとき, $u_{\delta,i}^{(\epsilon)} := u^{(\epsilon)} \circ f_{\delta,i}^{-1}$ とおくと, これは $W^{1,2}(X_i)$ の要素であり,

$$E_i^p(u_{\delta,i}^{(\epsilon)}) = (1 + \theta(\delta))E^p(u^{(\epsilon)}) = (1 + \theta(\delta))(E^p(u) + \theta(\epsilon))$$

をみたす. 従って, $\delta_i, \epsilon_i \to 0$ をうまく取れば, $u_i := u_{\delta_i,i}^{(\epsilon_i)}$ が u へ L^p 強収束して, $E_i^p(u_i) \to E^p(u)$ が成り立つ. これで (F2) が証明された.

次に (F1) を証明する. $u_i \in W^{1,p}(X_i)$ が $u \in L^p(X)$ へ L^p 強収束したと仮定する. このとき $E^p(u) \le \underline{\lim}_i E_i^p(u_i)$ を示せば良い. $\delta > 0$ とリップシッツな境界を持つコンパクト集合 $\Omega \subset X \setminus S_\delta$ を固定する. 十分大きな i に対して $\Omega \subset D_{\delta,i}$ が成り立つことに注意する. $u_{\delta,i} := u_i \circ f_{\delta,i}|_\Omega$ は i が大きいとき $W^{1,p}(\Omega)$ の要素であり, $\|u_{\delta,i}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le (1 + \theta(\delta))\|u_i\|_{W^{1,p}}$ は一様に有界である. 故に, 埋め込み $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ のコンパクト性から, 部分列を取ると $i \to \infty$ のとき $u_{\delta,i}$ は Ω 上で L^p 強収束し, $W^{1,p}$ 弱収束する. その極限を u_δ^Ω とおくと,

$$E^p(u_\delta^\Omega) \le \underline{\lim}_{i} E^p(u_{\delta,i}) \le (1 + \theta(\delta)) \underline{\lim}_{i} E_i^p(u_i)$$

が成り立つ. $\Omega \subset \Omega'$ をみたす別のリップシッツな境界をもつコンパクト集合 $\Omega' \subset X \setminus S_\delta$ をとり, またさらに部分列を取って同様の方法で $u_\delta^{\Omega'}$ を得る. すると, $u_\delta^{\Omega'}$ は u_δ^Ω の拡張である. 単調増加な列 $\Omega_j \nearrow X \setminus S_\delta$ をとることにより, 対角線論法から $u_\delta^{\Omega_j} = u_\delta|_{\Omega_j}$ なる関数 $u_\delta \in W^{1,p}(X)$ が得られる. $u_\delta^{\Omega_j}$ は u_δ へ L^p 弱収束して, $E^p(u_\delta) \le (1 + \theta(\delta)) \underline{\lim}_i E_i^p(u_i)$ が成り立つ. 正の実数の列 $\delta_i \searrow 0$ をとる. $W^{1,p}(X) \hookrightarrow L^p(X)$ のコンパクト性 (定理 4.15) から u_{δ_i} はある L^p 関数 v に L^p 強収束して, $E^p(v) \le \underline{\lim}_i E^p(u_{\delta_i})$ をみたす. v の構成法から, u_i は v へ L^p 弱収束して, $E^p(v) \le \underline{\lim}_i E_i^p(u_i)$ が成り立つことが分かる. 一方で u_i の L^p 強位相に関する極限は u だったから, $u = v$ である. 証明終り. □

6.2. 熱方程式と熱核の存在. ここでは [105, 107] の結果を (証明なしに) 使うことによって, Alexandrov 空間上の熱方程式の局所解のヘルダー連続性と熱核の存在性を示す.

X をコンパクトな n 次元 Alexandrov 空間とする. [67, 105] に従って X 上の熱方程式とその局所解の定式化を行なう. $I \subset \mathbb{R}$ を開区間とする. 関数 $u : I \times X \ni (t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbb{R}$ で以下で定義されるノル

ムが有限なもの全体の集合を $W^{1,2}(I \times X)$ とおく.

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(I\times X)} := \int_I \left(\|u\|^2_{W^{1,2}(X)} + \left\| \frac{\partial}{\partial t} u \right\|^2_{W^{1,2}(X)^*} \right) dt$$

ここで, $\|\cdot\|_{W^{1,2}(X)}$ は $W^{1,2}(X)$ の $W^{1,2}$ ノルムで, $\|\cdot\|_{W^{1,2}(X)^*}$ は $W^{1,2}(X)$ の双対空間 $W^{1,2}(X)^*$ のノルム, $\frac{\partial}{\partial t}u \in W^{1,2}(X)^*$ は u の超関数微分である. すると, $W^{1,2}(I \times X)$ は実ヒルベルト空間になる. $\mathbb{R} \times X$ 上の直積測度を $d\underline{m} := dt \otimes dm_X$ とおく. $O \subset X$ を開集合とするとき, $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(I \times O)$ を $I \times O$ 上の $\underline{m}$-可測な関数 u で以下をみたすもの全体の集合とする. $\bar{I}' \subset I$, $\bar{O}' \subset O$ をみたす任意の相対コンパクトな部分集合 $I' \subset \mathbb{R}$ と $O' \subset O$ に対して, ある関数 $u' \in W^{1,2}(I \times X)$ が存在して $I' \times O'$ 上 $\underline{m}$-a.e. $u = u'$ が成り立つ. $W^{1,2}_{\square}(I \times O)$ を関数 $u \in W^{1,2}(I \times X)$ で, ほとんど全ての $t \in I$ に対して関数 $u(t,\cdot)$ が O でコンパクトサポートをもつようなもの全体の集合とする. 関数 $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(I \times O)$ が熱方程式

$$\left(\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0$$

の $I \times O$ 上での局所解であるとは, 任意の $\phi \in W^{1,2}_{\square}(I \times O)$ と $\bar{J} \subset I$ をみたす任意の相対コンパクトな区間 J に対して,

$$\int_J \left(\mathcal{E}(u,\phi) + \left(\frac{\partial}{\partial t} u, \phi \right) \right) dt = 0$$

が成り立つことと定義する. ここで, $(\frac{\partial}{\partial t}u, \phi)$ は $\frac{\partial}{\partial t}u(t,\cdot) \in W^{1,2}(X)^*$ と $\phi(t,\cdot) \in W^{1,2}(X)$ のペアリングである.

定理 6.6 (放物型ハルナック不等式). $x_0 \in X$, $r > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ を任意にとって固定する. すると, $(t_0 - 4r^2, t_0) \times B(x_0, 2r)$ 上での熱方程式

$$\left(\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right) u(t,x) = 0$$

の非負に値をとる任意の局所解 $u(t,x)$ に対して,

$$\sup_{(s,y)\in Q^-} u(s,y) \le \mathrm{const}_X \inf_{(s,y)\in Q^+} u(s,y)$$

が成り立つ. ここで, $Q^- := (t_0 - 3r^2, t_0 - 2r^2) \times B(x_0, r)$ *and* $Q^+ := (t_0 - r^2, t_0) \times B(x_0, r)$ とおく.

証明. Bishop-Gromov の不等式により, 次の２倍条件を得る.

$$\varlimsup_{r\to 0} \sup_{x\in X} \frac{\mathcal{H}^n(B(x,2r))}{\mathcal{H}^n(B(x,r))} < \infty.$$

これと, 弱ポアンカレの不等式 (定理4.14), 定理3.18, および [107] の結果から定理6.6が得られる. □

定理 6.7 (熱方程式の局所解のヘルダー連続性). (1) 熱方程式

$$\left(\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right) u(t,x) = 0$$

の任意の局所解 $u(t,x)$ は $\mathbb{R} \times X$ 上で局所ヘルダー連続である.

(2) X 上のラプラシアン Δ の任意の固有関数は X 上でヘルダー連続になる.

証明. (1) は放物型ハルナック不等式を使った標準的な議論から証明される ([72] を見よ).

f を X のラプラシアンの固有値 λ の固有関数とすると，関数 $u(t,x) := f(x)e^{-\lambda t}$ は熱方程式の解になる．従って，(1) を使うと (2) が証明される． □

上の定理の (1) の正確な意味は，u が局所ヘルダー連続な $dt \otimes d\mathcal{H}^n$-a.e. version をもつと言うことである．(2) についても同様.

定理 6.8 (熱核の存在). $\mathcal{H}^n$-可測な局所ヘルダー連続関数

$$(0,\infty) \times X \times X \ni (t,x,y) \longmapsto p_X(t,x,y) \in [0,\infty)$$

が一意的に存在して以下の (1)–(3) をみたす.

(1) 任意の $t > 0$, $u \in L^2(X)$, $\mathcal{H}^n$-*a.e.* $x \in X$ に対して,

$$e^{-t\Delta}u(x) = \int_X p_X(t,x,y)\, u(y)\, \mathcal{H}^n(dy).$$

(2) 任意の $s, t > 0$, $x, y \in X$ に対して,

$$p_X(t,x,y) = p_X(t,y,x), \tag{2a}$$

$$p_X(s+t,x,y) = \int_X p_X(s,x,z)\, p_X(t,z,y)\, \mathcal{H}^n(dz), \tag{2b}$$

$$p_X(t,x,y) > 0. \tag{2c}$$

(3) $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \nearrow \infty$ をラプラシアン Δ の固有値を並べたもので，$\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ を対応する固有関数から成る $L^2(X)$ の完全正規直交基底とすると，任意の $t > 0$, $x, y \in X$ に対して以下が成り立つ.

$$p_X(t,x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x)\varphi_i(y)$$

ここで，上の収束は $(0,\infty) \times X \times X$ のコンパクト集合上で一様である.（このような $\{\lambda_i\}$, $\{\varphi_i\}$ の存在は系 *4.16* より従う.）

証明. 証明は [109] の 7.4 Theorem と同様である．任意に $t > 0$ をとり固定する．$r > 0$ を $4r^2 < t$ をみたすようにとる．$x_0 \in X$ に対して，$Q_r(t,x_0) := (t - r^2, t + r^2) \times B(x_0, r)$ とおく．$f \in L^2(X)$ に対して,

$u(s,x) := e^{-s\Delta} f^+(x) (\geq 0)$ は熱方程式の局所解である．故に [105] の Theorem 2.1 と半群 $e^{-t\Delta}$ の L^1 縮小性から，

$$\begin{aligned}
\text{ess-sup}_{B(x_0,r)} u(t,\cdot) &\leq \text{ess-sup}_{Q_r(t,x_0)} u \\
&\leq \text{const}_X \int_{Q_{2r}(t,x_0)} u(s,x)\, \mathcal{H}^n(dx)ds \\
&\leq \text{const}_X \int_{t-4r^2}^{t+4r^2} \|e^{-s\Delta} f^+\|_{L^1}\, ds \\
&\leq \text{const}_X\, r^2 \|f^+\|_{L^1} \leq \text{const}_X\, r^2 \|f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

同様に，$\text{ess-sup}_{B(x_0,r)} e^{-t\Delta} f^- \leq \text{const}_X\, r^2 \|f\|_{L^1}$ だから，

$$\begin{aligned}
\|e^{-t\Delta} f\|_{L^\infty(B(x_0,r))} &\leq \text{ess-sup}_{B(x_0,r)} e^{-t\Delta} f^+ + \text{ess-sup}_{B(x_0,r)} e^{-t\Delta} f^- \\
&\leq \text{const}_X\, r^2 \|f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

つまり，$T_t^{B(x_0,r)} f := (e^{-t\Delta} f)|_{B(x_0,r)}$ と定義すると，$T_t^{B(x_0,r)} : L^1(X) \to L^\infty(B(x_0,r))$ は有界作用素である．従って Dunford-Pettis の定理より，密度関数が存在するのでそれを $p_X^{B(x_0,r)}(t,x,y)$ とおく．これは x, y に関して一様に有界で，任意の $f \in L^1(X)$, $x \in B(x_0,r)$ に対して

$$e^{-t\Delta} f(x) = \int_X p_X^{B(x_0,r)}(t,x,y) f(y)\, \mathcal{H}^n(dy)$$

をみたす．今もう一つの球体 $B(x_1,r)$ に対して，同じ方法で密度関数 $p_X^{B(x_1,r)}(t,x,y)$ を得たとする．このとき，任意の $x \in B(x_0,r) \cap B(x_1,r)$ をとると，任意の $f \in L^1(X)$ に対して，

$$\int_X p_X^{B(x_0,r)}(t,x,y) f(y)\, \mathcal{H}^n(dy) = \int_X p_X^{B(x_1,r)}(t,x,y) f(y)\, \mathcal{H}^n(dy)$$

だから，$p_X^{B(x_0,r)}(t,x,y) = p_X^{B(x_1,r)}(t,x,y)$ $\mathcal{H}^n$-a.e. $y \in X$ が成り立つ．従って，X を半径 r の有限個の球体で覆うことにより．熱核 $p_X(t,x,y)$ が得られる．$e^{-t\Delta}$ の自己共役性から (2a) が成り立ち，$e^{-(s+t)\Delta} = e^{-s\Delta} \circ e^{-t\Delta}$ より (2b) が得られる．(2c),(3) はリーマン多様体と同様の方法で示せるので省略する（[15, 30] などを参照）．後は $p_X(t,x,y)$ の局所ヘルダー連続性を示せば良い．先ず，(2a),(2b) から

$$\begin{aligned}
\int_X p_X(t,x,y)^2\, \mathcal{H}^n(dy) &= \int_X p_X(t,x,y)\, p_X(t,y,x)\, \mathcal{H}^n(dy) \\
&= p_X(2t,x,x) < \infty.
\end{aligned}$$

故に，任意の $t > 0$ と $\mathcal{H}^n$-a.e. $x \in X$ に対して，$p_X(t,x,\cdot) \in L^2(X)$ である．$z \in X$, $\epsilon > 0$ に対して $f(x) := p_X(\epsilon, z, x)$ とおくと，$t > \epsilon$ のとき $u(t,x) = e^{-(t-\epsilon)\Delta} f(x)$ は熱方程式の解になる．さらに，

$$u(t,x) = \int_X p_X(t-\epsilon, x, y)\, p_X(\epsilon, y, z)\, \mathcal{H}^n(dy) = p_X(t,x,z)$$

つまり，$(0,\infty) \times X \ni (t,x) \mapsto p_X(t,x,z) \in \mathbb{R}$ は熱方程式の解なので，定理 6.7(1) よりヘルダー連続になる． □

次に加須栄氏と久村氏によるスペクトル距離 ([53, 54]) について説明しよう．X と Y を共にコンパクトな Alexandrov 空間とする．$\epsilon > 0$ に対して，2 つの $\mathcal{H}^n$-可測な写像 $f : X \to Y$ と $h : Y \to X$ が ϵ-スペクトル近似であるとは，

$$e^{-(t+1/t)} | p_X(t, x, y) - p_Y(t, f(x), f(y)) | < \epsilon,$$
$$e^{-(t+1/t)} | p_X(t, h(z), h(w)) - p_Y(t, z, w) | < \epsilon$$

が任意の $t > 0$, $x, y \in X$, $z, w \in Y$ に対して成り立つときを言う．X と Y のスペクトル距離 $d_{\mathrm{spec}}(X, Y)$ を ϵ-スペクトル近似 $f : X \to Y$ と $h : Y \to X$ が共に存在するような $\epsilon > 0$ の下限で定義する．ただし，もしこのような f または h が存在しないときは，$d_{\mathrm{spec}}(X, Y) := \infty$ と定義する．スペクトル距離から導入される位相をスペクトル位相と呼ぶ．[54] ではリーマン多様体についてのみ議論しているが，[54] のほとんど全ての結果が Alexandrov 空間でもそのまま成り立つことを注意する．定理 6.1（系 6.2）から，以下が証明できる．ここでは証明は省く．

定理 6.9. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$\mathcal{A}(n)$ 上でスペクトル位相と *Gromov-Hausdorff* 位相は一致する．

原論文 [101] では $\mathcal{A}(n)$ の Alexandrov 空間が境界をもたないことは仮定していない．ここでは証明を簡単にするために仮定した．

注意 6.10. 定理 3.7, 3.18 と弱ポアンカレ不等式（定理 4.14）には様々な応用がある．実際，Alexandrov 空間に対して以下が成り立つことが分かる．

- 熱核の Davies 型のガウス評価が得られる（[30] を参照）．これは Sturm の論文 [105] の Theorem 2.4 より従う．さらにグリーン関数の評価も [9] の Theorem 1.3 から得られる．
- 半群の強フェラー性が成り立つ．これは [109] の 7.6 Theorem と同様に証明される．
- ここでは簡単のためコンパクトな Alexandrov 空間しか扱わなかったが，非コンパクトな Alexandrov 空間に対しても同様のことが成り立つ (コンパクト性定理およびスペクトルの離散性を除く)．[104] の結果を使うことにより，非コンパクト Alexandrov 空間に対する，ある種のリューヴィル型の定理が得られる．
- 桑江氏の結果 [57] により，Alexandrov 空間上の劣調和関数に対して強最大値原理が成り立つことが分かる．
- Ramírez の結果 [90, 41] から，熱核の短時間漸近公式が成り立つことが分かる．

7. ラプラシアンの固有値と懸垂構造

次の結果が良く知られている：n 次元閉リーマン多様体 M のリッチ曲率が $\mathrm{Ric}_M \geq n-1$ $(n \geq 2)$ のとき，M のラプラシアンの第一固有値は $\lambda_1 \geq n$ をみたす (Lichnerowicz [66])．さらに等号成立は M が単位球面 S^n に等長同型であることが必要十分である (Obata [75])．ここで

はこれらの結果をリーマン軌道体（Riemannian orbifold）に一般化することを考える．このとき，多様体の場合と違って，ラプラシアンの k 番目の固有値が軌道体の k 階の懸垂構造を特徴付けることが分かる．

以下にリーマン軌道体の定義を与える．

定義 7.1 (リーマン軌道体)．距離空間 X が n 次元リーマン軌道体 (*Riemannian orbifold*) であるとは，ある高々可算な X の開被覆 $\{U_i\}$ および，各 i に対して（必ずしも完備でない）n 次元リーマン多様体 $\tilde{U}_i$ と，$\tilde{U}_i$ へ効果的かつ等長に作用する有限群 Γ_i が存在して，以下の (i)–(iv) が成り立つときを言う．

(i) U_i らの有限個の共通部分はまた $\{U_i\}$ に入る．

(ii) 各 $\tilde{U}_i$ は凸である，つまり $\tilde{U}_i$ の任意の 2 点を結ぶ最短測地線が $\tilde{U}_i$ の中に存在する．

(iii) 各 i に対して，U_i は商空間 $\tilde{U}_i/\Gamma_i$ に等長同型である．$\pi_i : \tilde{U}_i \to U_i$ を自然な射影とする．

(iv) もし $U_i \subset U_j$ ならば Γ_i は Γ_j の部分群であり，$\tilde{U}_i$ は $\tilde{U}_j$ に等長的に埋め込まれた部分多様体で，$\iota_{ij} : U_i \to U_j$ を包含写像，$\tilde{\iota}_{ij} : \tilde{U}_i \to \tilde{U}_j$ を埋め込みとすると，

$$\pi_j \circ \tilde{\iota}_{ij} = \iota_{ij} \circ \pi_i$$

が成り立つ．

リーマン軌道体が *good* であるとは，リーマン多様体の properly discontinuous で効果的な等長群の作用の商空間で書けているときを言う．リーマン軌道体が good でないとき *bad* と呼ぶ．n 次元リーマン軌道体 X のリッチ曲率が $\mathrm{Ric}_X \geq \kappa(n-1)$ であるとは，各 $\tilde{U}_i$ のリッチ曲率が $\mathrm{Ric}_X \geq \kappa(n-1)$ であることを言う．断面曲率についても同様に定義する．

完備な n 次元リーマン軌道体 X の断面曲率が $\geq \kappa$ のとき，これは n 次元 Alexandrov 空間で曲率 $\geq \kappa$ となる．

X を n 次元リーマン軌道体とするとき以下が成り立つ．任意の点 $p \in X$ に対して，ある p の開近傍 U_p，$\mathbb{R}^n$ に微分同相な（完備でない）n 次元凸リーマン多様体 $\tilde{U}_p$，$\tilde{U}_p$ へ等長かつ効果的に作用する有限部分群 $\Gamma_p \subset O(n)$ が存在して，U_p は $\tilde{U}_p/\Gamma_p$ に等長同型，かつ $p \in \pi_p(\mathrm{Fix}(\Gamma_p))$ が成り立つ．ここで，$\pi_p : \tilde{U}_p \to U_p$ は自然な射影で，

$$\mathrm{Fix}(\Gamma_p) := \{\, x \in \tilde{U}_p \mid \text{任意の } \gamma \in \Gamma_p \text{ に対して，} \gamma x = x \text{ が成り立つ} \,\}$$

（固定点集合）とおく．このような Γ_p は各 $p \in X$ に対して一意的に定まり，p における局所群と呼ばれる．

X をコンパクトな n 次元リーマン軌道体とする．このとき，X は Alexandrov 空間になる．点 $p \in X$ が Alexandrov 空間としての特異点であることと，局所群 Γ_p が非自明であることは必要十分条件である．さらに非特異点全体の集合 $X \setminus S_X$ は（完備でない）リーマン多様体である．以下において，X の局所群の固定点集合の余次元は常に 2 以

上であると仮定する．これは X が Alexandrov 空間として境界を持たないことと同値である．$C_0^\infty(X \setminus S_X)$ を $X \setminus S_X$ 上でコンパクトなサポートをもつ C^∞ 関数全体の集合とする．X の Alexandrov 空間としてのラプラシアンは $C_0^\infty(X \setminus S_X)$ 上の C^∞ ラプラシアンの Friedrichs 拡張（[91] などを見よ）に一致する．系 4.16 より，Δ は離散スペクトル $\{\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \nearrow +\infty\}$ をもつ．この章では以下の定理を証明する．

定理 7.2. X をコンパクトな n 次元リーマン軌道体で $n \ge 2$ かつリッチ曲率が $\mathrm{Ric}_X \ge n-1$ と仮定する．このとき以下の (1), (2) が成り立つ．

(1) $\lambda_1 \ge n$ である．

(2) $1 \le k \le n$ をみたす任意の自然数 k を固定する．このとき，$\lambda_k = n$ が成り立つことと，X がある *good* リーマン多様体 S^{n-k}/Γ の k 階 *spherical suspension* $\mathrm{susp}^k(S^{n-k}/\Gamma)$ に等長同型であることが必要十分である．ここで，S^{n-k} は $n-k$ 次元の単位球面で，$\Gamma \subset O(n-k+1)$ は $S^{n-k} \subset \mathbb{R}^{n-k+1}$ に作用する有限群である．特に，$\lambda_n = n$ の必要十分条件は X が単位球面 S^n に等長同型であることである．

注意 7.3. (1) E_k を k 次単位行列として，

$$\Gamma_k := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_k \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in \Gamma \right\} \subset O(n+1) \tag{7.1}$$

とおくとき，$\mathrm{susp}^k(S^{n-k}/\Gamma)$ は S^n/Γ_k に等長同型である．

(2) $1 \le k \le n \ge 2$ のとき，ある n 次元 good リーマン軌道体 S^n/Γ_k が存在して，$\lambda_k = n < \lambda_{k+1}$ をみたす．実際，$(n-k)$ 次元 good 軌道体 S^{n-k}/Γ で直径が π より小さいものの k 階 spherical suspension がそうである．ここで，$\Gamma \subset O(n-k+1)$ は有限部分群．

以下に定理の証明のために必要な補題を証明する．X をコンパクトな n 次元リーマン軌道体で，u を X のラプラシアン Δ の固有値 λ の固有関数とする．

補題 7.4. 任意の点 $p \in X$ に対して，関数 $\tilde{u}_p := u \circ \pi_p$ は $\tilde{U}_p$ 上で C^∞ で，$\tilde{U}_p$ 上 $\Delta \tilde{u}_p = \lambda \tilde{u}_p$ をみたす．

証明. 定理 6.7(2) より，$\tilde{u}_p$ は $\tilde{U}_p$ 上で連続である．さらに，$\tilde{u}_p$ は $\tilde{U}_p \setminus \tilde{S}_p$ 上 C^∞ になる．$\|\tilde{u}_p\|^2_{W^{1,2}(\tilde{U}_p)} = \#\Gamma_p \cdot \|u\|^2_{W^{1,2}(U_p \setminus S_X)} < \infty$ だから，$\tilde{u}_p \in W^{1,2}(\tilde{U}_p)$ となる．任意の関数 $\varphi \in W_0^{1,2}(\tilde{U}_p)$ をとり固定する．$\mathrm{codim}\, \tilde{S}_p \ge 2$ より，定理 3.1 と同じ証明から $C_0^\infty(\tilde{U}_p \setminus \tilde{S}_p)$ が $W_0^{1,2}(\tilde{U}_p)$ において稠密であることが分かる．故に，ある関数列 $\varphi_i \in C_0^\infty(\tilde{U}_p \setminus \tilde{S}_p)$ が存在して，$i \to \infty$ のとき $\|\varphi_i - \varphi\|_{W^{1,2}} \to 0$ をみたす．グリーンの公式より

$$\int_{\tilde{U}_p} \langle \nabla \tilde{u}_p, \nabla \varphi_i \rangle \, d\mathrm{vol}_X = \int_{\tilde{U}_p} \varphi_i \Delta \tilde{u}_p \, d\mathrm{vol}_X$$

が成立する．ここで，$d\mathrm{vol}_X$ はリーマン計量から導入される体積測度である．$i \to \infty$ のとき，上式左辺は $\int_{\tilde{U}_p} \langle \nabla \tilde{u}_p, \nabla \varphi \rangle \, d\mathrm{vol}_X$ へ，右辺は $\lambda \int_{\tilde{U}_p} \tilde{u}_p \, \varphi \, d\mathrm{vol}_X$ へ収束する．従って $\tilde{u}_p$ は $\Delta \tilde{u}_p = \lambda \tilde{u}_p$ の弱解になる．よって，$\tilde{u}_p$ は $\tilde{U}_p$ 上 C^∞ になる（[36] を参照）． □

注意 7.5. Y.-J. Chiang [25] は X 上のソボレフ空間を Γ_p-同変な C^∞ 関数全体の集合の $W^{1,2}$ 閉包で定義した．実はそれは我々の定義したソボレフ空間 $W^{1,2}(X) := W^{1,2}(X \setminus S_X)$ と同じものになることが証明できる．これにより，補題 7.4 は [25] の Theorem 2.4 からも証明される．

補題 7.6. 次が成立する．

$$\int_{X \setminus S_X} \Delta(|\nabla u|^2) \, d\mathrm{vol}_X = 0$$

証明. $\operatorname{codim} S_X \geq 2$ より，$r > 0$ に対して特異集合 S_X の C^∞ な境界を持つある近傍 U_r が存在して

$$\lim_{r \to 0} \mathrm{vol}(\partial U_r) = 0 \qquad \text{かつ} \qquad \bigcap_{r>0} U_r = S_X$$

をみたす．補題 7.4 から $|\nabla(|\nabla u|^2)|$ が $X \setminus S_X$ 上で有界であることが分かる．$\mathbf{n}$ を U_r の ∂U_r に沿った外側法ベクトル場とすると，

$$\begin{aligned}\left| \int_{X \setminus U_r} \Delta(|\nabla u|^2) \, d\mathrm{vol}_X \right| &\leq \int_{\partial U_r} |\langle \nabla(|\nabla u|^2), \mathbf{n} \rangle| \, d\mathrm{vol}_{\partial U_r} \\ &\leq \mathrm{vol}(\partial U_r) \sup_{X \setminus S_X} |\nabla(|\nabla u|^2)| \to 0 \quad (r \to 0)\end{aligned}$$

が成り立つ． □

定理 7.2(1) の証明. 補題 7.6 を使うことにより，標準的な議論で証明できる．実際，Weitzenböck の公式より，λ_1 の固有関数 u は 以下をみたす．

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\Delta(|\nabla u|^2) &= |D^2 u|^2 - \langle \nabla \Delta u, \nabla u \rangle + \mathrm{Ric}_X(\nabla u, \nabla u) \\ &\geq \lambda_1^2 u^2/n + (n - 1 - \lambda_1)|\nabla u|^2\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{Ric}_X \geq n-1$ を使った．上式の両辺を $X \setminus S_X$ 上で積分すると，補題 7.6 より左辺はゼロになる．従って，$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \lambda_1 \|u\|_{L^2}^2$ から $\lambda_1 \geq n$ を得る． □

以下において，$\mathrm{Ric}_X \geq n-1$ と仮定する．$1 \leq k \leq n$ なる k を固定し，$\lambda_k = n$ と仮定する．u を Δ の固有値 n の固有関数とする．

補題 7.7. 任意の最短測地線 $\gamma : [0, \ell] \to X$ に対して，2つの数 $a = a(\gamma) \in \mathbb{R}$ と $b = b(\gamma) \in [0, 2\pi)$ が存在して，任意の $t \in [0, \ell]$ に対して

$$u \circ \gamma(t) = a \cos(t + b)$$

が成り立つ．

証明. $X \setminus S_X$ は凸集合なので，γ へ収束するようなある最短測地線の列 $\gamma_i : [0, \ell_i] \to X \setminus S_X$ $(i = 1, 2, \dots)$ が存在する．[15] の III.4 と同じ議論により補題 7.6 を使うと，ある $a_i \in \mathbb{R}$ と $b_i \in [0, 2\pi)$ が存在して，任意の $t \in [0, \ell_i]$ に対して

$$u \circ \gamma_i(t) = a_i \cos(t + b_i)$$

が成り立つ．u は連続なので，任意の $t \in [0, \ell)$ に対して，$i \to \infty$ のとき $u \circ \gamma_i(t)$ は $u \circ \gamma(t)$ へ収束する．部分列を取って，a_i と b_i がそれぞれある $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ と $b \in [0, 2\pi]$ へ収束すると仮定して良い．もし $|a| = \infty$ ならば，$\cos(t_0 + b) \neq 0$ をみたすある $t_0 \in [0, \ell)$ を取ると

$$|u \circ \gamma_i(t_0)| = |a_i \cos(t_0 + b_i)| \to \infty \quad (i \to \infty)$$

が成り立つが，これは u の有界性に反する．従って，$|a| < \infty$ である．u の連続性より補題が得られる． □

補題 7.8. $p, q \in X$ をそれぞれ u の最大値と最小値を取る点とする．このとき，$d_X(p, q) = \pi$, $u(p) = -u(q)$ かつ，任意の $x \in X$ に対して，$u(x) = u(p) \cos d_X(p, x)$ が成り立つ．

証明. 関数 $\tilde{u}_p := u \circ \pi_p : \tilde{U}_p \to \mathbb{R}$ は $\tilde{p}$ において最大値を取るので，$\nabla \tilde{u}_p = 0$ である．γ を p から出て弧長をパラメーターに持つ最短測地線とする．γ の $\tilde{U}_p$ へのリフト $\hat{\gamma}$ を取ると，

$$(u \circ \gamma)'(0) = (\tilde{u}_p \circ \hat{\gamma})'(0) = \langle \nabla \tilde{u}_p, \dot{\hat{\gamma}}(0) \rangle = 0$$

が成り立ち，これと補題 7.7 から

$$u \circ \gamma(t) = u(p) \cos d_X(p, \gamma(t))$$

が得られる．もし γ が p から q へ結ぶとすると，上と同じ議論から

$$u \circ \gamma(t) = u(q) \cos(d_X(p, q) - t)$$

が成り立つ．ここで，$\int_X u \, d\mathrm{vol}_X = 0$ より $u(p) > 0 > u(q)$ が成り立つので，$d_X(p, q) = \pi$ かつ $u(p) = -u(q)$ を得る． □

定理 7.2(2) の証明. $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = n$ と仮定する．各 $i = 1, \dots, k$ に対して u_i を λ_i に対応する固有関数とする．$p_i, q_i \in X$ をそれぞれ u_i の最大値と最小値を取る点とする．補題 7.8 より $d_X(p_i, q_i) = \pi$ が成り立ち，これと [11] の Theorem 1 と 2 から，X が good リーマン軌道体 S^n/Γ' であることが分かる．ここで，$\Gamma' \subset O(n+1)$ は $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ へ等長に作用するある群である．L を $\mathbb{R}^{n+1}$ の線形部分空間で，Γ' の各要素が L の点を固定すると仮定する．さらに，L をこのようなものの中で極大なものとする．一般性を失うことなく $L = \{(0, \dots, 0)\} \times \mathbb{R}^\ell \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と仮定して良い．すると，$\Gamma' = \Gamma_\ell$ があるΓ $\in O(n - \ell + 1)$ に対して成り立つ．ここで，Γ_ℓ は (7.1) で定義されたものである．我々は $\ell \geq k$ を証明すれば良い．射影 $\pi : L \to L/\Gamma_\ell$ は等長写像であることに注意する．$\iota := \pi^{-1} : L/\Gamma_\ell \to L$ とおくと，補題 7.8 より，各 i について p_i と q_i は $(S^n \cap L)/\Gamma_\ell \subset X$ の対蹠点である．従って，$\xi_i := u_i(p_i)\, \iota(p_i) \in L$ とおくと，$S^n \cap L$ 上で $u_i \circ \pi = \langle \xi_i, \cdot \rangle$ が成り立つ．ここで，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は L 上のユークリッド内積である．もし 2 つの関数 $f, h \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ が

$(S^n \cap L)/\Gamma_\ell$ 上で一致するならば，X 上で $f = h$ であることを注意する．従って，u_i は ξ_i の双対と同一視できる．$\{u_i\}_{i=1,\dots,k}$ は一次独立だから，$\{\xi_i\}_{i=1,\dots,k}$ もそうである．これにより $\ell \geq k$ を得る．

次に逆を証明しよう．ある有限部分群 $\Gamma \subset O(n-k+1)$ $(1 \leq k \leq n)$ に対して，$X = \mathrm{susp}^k(S^{n-k}/\Gamma) = S^n/\Gamma_k$ が good リーマン軌道体であると仮定する．すると，$L := \{(0,\dots,0)\} \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{n+1}$ は等長的に $\mathbb{R}^{n+1}/\Gamma_k$ へ埋め込まれている．L の正規直交基底 $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,k}$ をとると，$p_i := \pi(\xi_i)$, $q_i := \pi(-\xi_i) \in (S^n \cap L)/\Gamma_k \subset X$ である．ここで，$\pi : L \to L/\Gamma_k$ は等長な射影である．各 i に対して，X が p_i, q_i を頂点とする spherical suspension あることに注意すると，$u_i := \cos d_X(p_i, \cdot)$, $(i = 1,\dots,k)$ が一次独立な固有関数で，その固有値は全て n であることが分かる． □

8. 残された問題

ここでは未だ解かれていない幾つかの予想および問題を述べる．

8.1. Gromov-Hausdorff 収束に関する問題.

予想 8.1. 自然数 n を固定する．$X_i \in \mathcal{A}(n)$ を Alexandrov 空間の列で，Y_i を有限コンパクトな完備距離空間の列とする．X_i があるコンパクトな測度距離空間 X へ測度付き Gromov-Hausdorff 収束して，Y_i がある有限コンパクトな距離空間へ Gromov-Hausdorff 収束するならば，$L^p(X_i, Y_i)$ 上の p 次エネルギー汎関数 E_i^p は $L^p(X, Y)$ 上の p 次エネルギー汎関数へコンパクト収束する．

これは幾つかの問題を含んでいる．

一つは関数だけでなく写像に対するエネルギー汎関数の収束の定式化である．これは桑江氏と著者とで現在考察中である（[63]）．

もう一つは，極限の次元が n より小さくなる，つまり「崩壊」が起こるときの場合である．このときは例え $Y_i = Y = \mathbb{R}$ であってもエネルギー汎関数の収束を証明するのは難しい．リッチ曲率が一様に下に有界なリーマン多様体のときは Cheeger-Colding によって解かれているが,「Li-Yau の gradient estimate」を使っている．これについては予想 8.6 を参照のこと．

予想 8.2. 自然数 n を固定する．X_i を（コンパクトとは限らない）曲率 ≥ -1 の n 次元 Alexandrov 空間で，Y_i を有限コンパクトなアダマール空間とする．X_i がある測度距離空間 X へ測度付き Gromov-Hausdorff 収束して，Y_i がある有限コンパクトな距離空間へ Gromov-Hausdorff 収束すると仮定する．離散群 Γ が各 X_i へ等長的かつ properly discontinuous に作用して，各 Y_i へ等長的に作用しているとする．これから，極限において Γ の X と Y への等長的な作用が得られ，これは X 上の極限測度を保った作用になっている．このとき，$W_\Gamma^{1,2}(X_i, Y_i)$ 上の harmonic map flow T_t^i が $W_\Gamma^{1,2}(X, Y)$ 上の harmonic map flow T_t へ収束する，つまり，写像の列 $u_i \in W_\Gamma^{1,2}(X_i, Y_i)$ が $u \in W_\Gamma^{1,2}(X, Y)$ へ L^2 収束するならば，任意の $t > 0$ に対して $T_t^i u_i$ は $T_t u$ へ L^2 収束する．

もし $Y_i = Y = \mathbb{R}$ かつ Γ が自明な場合には，harmonic map flow T_t は半群 $e^{-t\Delta}$ に他ならないので，上はエネルギー形式が Mosco 収束することと同値である（定義 5.13 の後の段落の文を参照）．この場合で，さらに X_i が崩壊しないときや，X_i がリッチ曲率 $\geq -(n-1)$ のリーマン多様体のときには [61] で証明された．Y_i, Y, Γ が一般のときは今の所分かっていない．上の予想より弱い (nonlinear) resolvent の収束については現在進行中である（[63]）．

多様体や測度の収束とエネルギー汎関数の変分収束に関しては，物理や確率論と関係して重要かつ興味深い研究が多数行なわれている．しかしそれらは Alexandrov 空間とは直接関係なくこの原稿の範囲を越えるので，ここでは述べない事にする．ただ，一つコメントすると，物理的な観点からは曲率の（上または下からの）一様な有界性は条件が強過ぎて，例えば曲率の L^p ノルムの有界性などの方が興味深い（少なくとも著者はそう思っている）．これは曲率が爆発した極限に興味深い特異性が現れるからである．

8.2. 正曲率空間とラプラシアンの固有値に関する問題. 次の予想は他のものよりは証明するのが易しいと思われる．

予想 8.3. $\kappa \in \mathbb{R}, n \geq 2$ を定数とし，X を n 次元コンパクトリーマン軌道体で断面曲率 $\geq \kappa$ かつ $\mathrm{Ric}_X \geq n-1$ とする．このとき，κ, n にのみ従属したある定数 $\epsilon(n,\kappa) > 0$ が存在して，もし ある k $(1 \leq k \leq n)$ に対して k 番目の固有値 $\lambda_k < n + \epsilon(n,\kappa)$ ならば X はある good リーマン軌道体 S^{n-k}/Γ の k 回 spherical suspension $\mathrm{susp}^k(S^{n-k}/\Gamma)$ に同相である．

これは Croke [28] および Perelman [85] の結果の一般化である．ここでもし断面曲率の下限の条件がなければ，上の予想は成り立たない．実際 リーマン多様体の場合でも反例が知られている．[5, 77] を見よ．

以下は予想 8.3 より難しい．

予想 8.4. X を コンパクトな n 次元 Alexandrov 空間で曲率 ≥ 1 とする．

(1) $\lambda_1 \geq n$ である．

(2) k を $1 \leq k \leq n$ なる自然数とする．このとき，$\lambda_k = n$ であることと，X が曲率 ≥ 1 のあるコンパクトな $n-k$ 次元 Alexandrov 空間 Y の k 回 spherical suspension $\mathrm{susp}^k(S^{n-k}/\Gamma)$ に等長同型であることは必要十分である．

(1) は Petrunin が [88, 89] で解いたと主張しているが，Perelman の非公開の定理などを使っていて，その証明は著者には未だ不透明である．

8.3. **Regularity** に関する問題. Alexandrov 空間は位相多様体であっても一般には曲率が一様に下に有界な C^∞ 計量で Gromov-Hausdorff 近似できないことは分かっている（[48] を見よ）．しかし次は期待できる．

予想 8.5. 任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対して，定理3.13(1) の C^∞ リーマン計量 $\tilde{g}_\delta$ をうまく選んで，その断面曲率が $K_{\tilde{g}_\delta} \geq \kappa - \epsilon$ を満たすようにできる．

上の予想は色々な応用が考えられ非常に重要である．例えば，上を仮定すると，Alexandrov 空間 X 上の $X \setminus S_\delta$ を通る quasi-geodesic が C^∞ 計量の測地線で近似できることが分かるので，X の接球面束上の Liouville 測度の測地流による保存性が得られる．この保存性は今の所，直接証明する手立ては見つかっていない．

予想 8.6. Alexandrov 空間のラプラシアンの固有関数はリップシッツ連続である．そのリップシッツ定数は曲率の下限，直径，次元にのみ依存する定数で上から評価される．

これはリーマン多様体のときは Li-Yau の gradient estimate [65] にあたるものである．これが解ければ，恐らく予想8.1 で $Y_i = Y = \mathbb{R}$ の場合は解けるであろうと思われる．

リップシッツ連続性は Petrunin が [88, 89] で証明したと主張しているが，前に述べた様にその証明ははっきりしない．ただし，彼の評価ではリップシッツ定数が Alexandrov 空間 X のハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^n(X)$ にも依存しているので，予想8.1 にはまだ距離がある．

次の問題に関してはまだ何の手がかりもない．

予想 8.7. Alexandrov 空間からアダマール空間への同変写像の harmonic map flow はホモトピーである．

8.4. **微分形式に関する問題.** Alexandrov 空間上の微分形式に対して，リップシッツ多様体と同様に d や δ は定義できるが（[112] を見よ），それ以上のことについては今の所ほとんど何も分かっていない．cone-manifold 上の L^2-ドラム・コホモロジー，ホッジ理論，交差ホモロジー，指数定理，η-不変量などは Cheeger を始め現在でもさかんに研究されているが（[17, 18, 19, 20, 23, 73] などを参照），これらが Alexandrov 空間でも成り立つかどうかは興味深い．また曲率の下限の条件がこれらの不変量にどのように反映されるかは特に重要な問題であろう．もし Perelman が証明したとされている Lipschitz stability（与えられた Alexandrov 空間に Gromov-Hausdorff 距離が十分近い同じ次元をもつ Alexandrov 空間は双リップシッツ同型である．ただし，これらの Alexandrov 空間の曲率は全て ≥ -1 と仮定する）はこれらを調べるのに非常に有効であると考えられる．

参考文献

[1] A. D. Alexandrov, *Almost everywhere existence of the second differential of a convex function and some properties of convex surfaces connected with it*, Leningrad State Univ. Annals [Uchenye Zapiski] Math. Ser. **6** (1939), 3–35.

[2] ———, *Die innere Geometrie der konvexen Flächen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1955.

[3] A. D. Alexandrov, V. N. Berestovskii, and I. G. Nikolaev, *Generalized Riemannian spaces*, Russian Math. Surveys **41** (1986), no. 3, 1–54.

[4] L. Ambrosio, N. Fusco, and Pallara D., *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford University Press, New York, 2000.

[5] M. T. Anderson, *Metrics of positive Ricci curvature with large diameter*, Manuscripta Math. **68** (1990), no. 4, 405 415.

[6] P. Bérard, G. Besson, and S. Gallot, *Embedding Riemannian manifolds by their heat kernel*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), no. 4, 373 398.

[7] P. H. Bérard, *Spectral geometry: Direct and inverse problems*, Lecture Notes in Math., no. 1207, Springer-Verlag, 1986.

[8] M. Berger, P. Gauduchon, and E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Math., vol. 194, Springer-Verlag, 1971.

[9] M. Biroli and U. Mosco, *A Saint-Venant type principle for Dirichlet forms on discontinuous media*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **169** (1995), 125 181.

[10] ———, *Sobolev inequalities on homogeneous spaces*, Potential Anal. **4** (1995), no. 4, 311 324, Potential theory and degenerate partial differential operators (Parma).

[11] J. E. Borzellino, *Orbifolds of maximal diameter*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), no. 1, 37 53.

[12] Yu. Burago, M. Gromov, and G. Perel'man, *A. D. Aleksandrov spaces with curvatures bounded below*, Uspekhi Mat. Nauk **47** (1992), no. 2(284), 3 51, 222, translation in Russian Math. Surveys 47 (1992), no. 2, 1 58.

[13] P. Buser, *A note on the isoperimetric constant*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **15** (1982), no. 2, 213 230.

[14] G. De Cecco and G. Palmieri, *On the regularity of eigenfunctions of the Laplace operator on a Lipschitz manifold*, J. Math. Pures Appl. **68** (1989), 121 134.

[15] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Academic Press, 1984.

[16] I. Chavel and E. A. Feldman, *Spectra of domains in compact manifolds*, J. Funct. Anal. **30** (1978), no. 2, 198 222.

[17] J. Cheeger, *On the spectral geometry of spaces with cone-like singularities*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **76** (1979), no. 5, 2103 2106.

[18] ———, *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds*, Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979), Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980, pp. 91 146.

[19] ———, *Hodge theory of complex cones*, Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 101, Soc. Math. France, Paris, 1983, pp. 118 134.

[20] ———, *Spectral geometry of singular Riemannian spaces*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 4, 575 657 (1984).

[21] ———, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), no. 3, 428 517.

[22] J. Cheeger and T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. III*, J. Differential Geom. **54** (2000), no. 1, 37 74.

[23] J. Cheeger, M. Goresky, and R. MacPherson, *L^2-cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties*, Seminar on Differential Geometry, Ann. of Math. Stud., vol. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982, pp. 303 340.

[24] S. Y. Cheng, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications*, Math. Z. **143** (1975), no. 3, 289 297.

[25] Y.-J. Chiang, *Harmonic maps of V-manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **8** (1990), no. 3, 315 344.

[26] T. H. Colding, *Large manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. **124** (1996), no. 1-3, 193 214.
[27] ———, *Shape of manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. **124** (1996), no. 1-3, 175 191.
[28] C. B. Croke, *An eigenvalue pinching theorem*, Invent. Math. **68** (1982), no. 2, 253 256.
[29] G. Dal Maso, *An introduction to Γ-convergence*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.
[30] E. B. Davies, *Heat kernels and spectral theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 92, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
[31] J. Eells, Jr. and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109 160.
[32] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
[33] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer, Berlin, 1969.
[34] K. Fukaya, *Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator*, Invent. Math. **87** (1987), 517 547.
[35] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, de Gruyter Studies in Math., vol. 19, Walter de Gruyter, Berlin New York, 1994.
[36] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, 1983.
[37] G. Gregori, *Sobolev spaces and harmonic maps between singular spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **7** (1998), no. 1, 1 18.
[38] A. A. Grigor'yan, *The heat equation on noncompact Riemannian manifolds*, Mat. Sb. **182** (1991), no. 1, 55 87, Engl. Transl., Math. USSR Sb **72** (1992), 47 77.
[39] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999, Based on the 1981 French original [MR 85e:53051], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.
[40] M. Gromov and R. Schoen, *Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1992), no. 76, 165 246.
[41] M. Hino and J. A. Ramírez, *Small-time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups*, Ann. Probab. **31** (2003), no. 3, 1254 1295.
[42] C. Hodgson and J. Tysk, *Eigenvalue estimates and isoperimetric inequalities for cone-manifolds*, Bull. Austral. Math. Soc. **47** (1993), no. 1, 127 143.
[43] J. Jost, *Equilibrium maps between metric spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **2** (1994), no. 2, 173 204.
[44] ———, *Generalized harmonic maps between metric spaces*, Geometric analysis and the calculus of variations, Internat. Press, Cambridge, MA, 1996, pp. 143 174.
[45] ———, *Generalized Dirichlet forms and harmonic maps*, Calc. Var. Partial Differential Equations **5** (1997), no. 1, 1 19.
[46] ———, *Nonpositive curvature: geometric and analytic aspects*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
[47] ———, *Nonlinear Dirichlet forms*, New directions in Dirichlet forms, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 1 47.
[48] V. Kapovitch, *Regularity of limits of noncollapsing sequences of manifolds*, Geom. Funct. Anal. **12** (2002), 121 137.

[49] A. Kasue, *Convergence of riemannian manifolds and harmonic maps*, preprint.
[50] ———, *Convergence of Riemannian manifolds and Laplace operators. I*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), no. 4, 1219 1257.
[51] ———, *Convergence and energy forms in measure metric spaces*, Sūgaku **55** (2003), no. 1, 20 36.
[52] ———, *Convergence of Riemannian manifold and Laplace operators. II*, preprint.
[53] A. Kasue and H. Kumura, *Spectral convergence of Riemannian manifolds*, Tôhoku Math. J. (2) **46** (1994), no. 2, 147 179.
[54] ———, *Spectral convergence of Riemannian manifolds. II*, Tôhoku Math. J. (2) **48** (1996), no. 1, 71 120.
[55] N. J. Korevaar and R. M. Schoen, *Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets*, Comm. Anal. Geom. **1** (1993), no. 3-4, 561 659.
[56] ———, *Global existence theorems for harmonic maps to non-locally compact spaces*, Comm. Anal. Geom. **5** (1997), no. 2, 333 387.
[57] K. Kuwae, *On a strong maximum princple for Dirichlet forms*, to appear in the Proceedings of Stochastic Processes, Physics and Geometry: New Interplays. A volume in Honor of Sergio Albeverio, Canadian Mathematical Society, Conference Proceedings.
[58] K. Kuwae, Y. Machigashira, and T. Shioya, *Beginning of analysis on Alexandrov spaces*, Geometry and topology: Aarhus (1998), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 275 284.
[59] ———, *Sobolev spaces, Laplacian, and heat kernel on Alexandrov spaces*, Math. Z. **238** (2001), no. 2, 269 316.
[60] K. Kuwae and T. Shioya, *On generalized measure contraction property and energy functionals over Lipschitz maps*, Potential Anal. **15** (2001), no. 1-2, 105 121, ICPA98 (Hammamet).
[61] ———, *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*, Comm. Anal. Geom. **11** (2003), no. 4, 599 673.
[62] ———, *Sobolev and Dirichlet spaces over maps between metric spaces*, J. Reine Angew. Math. **555** (2003), 39 75.
[63] ———, *Variational convergence over metric spaces*, in preparation, 2004.
[64] P. Li and G. Tian, *On the heat kernel of the Bergmann metric on algebraic varieties*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 4, 857 877.
[65] P. Li and S. T. Yau, *Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold*, Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980, pp. 205 239.
[66] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations*, Travaux et Recherches Mathématiques, III. Dunod, Paris, 1958.
[67] J.-L. Lions and E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I III*, Springer-Verlag, New York, 1972, Translated from the French by P. Kenneth, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181 183.
[68] J. Masamune, *Essential self-adjointness of Laplacians on Riemannian manifolds with fractal boundary*, Comm. Partial Differential Equations **24** (1999), no. 3-4, 749 757.
[69] U. F. Mayer, *Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), no. 2, 199 253.

[70] K. McLeod and R. Picard, *A compact imbedding result on Lipschitz manifolds*, Math. Ann. **290** (1991), 491 508.
[71] U. Mosco, *Composite media and asymptotic Dirichlet forms*, J. Funct. Anal. **123** (1994), no. 2, 368 421.
[72] J. Moser, *A Harnack inequality for parabolic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), 101 134.
[73] M. Nagase, *L^2-cohomology and intersection homology of stratified spaces*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 1, 329 368.
[74] J. R. Norris, *Heat kernel asymptotics and the distance function in Lipschitz Riemannian manifolds*, Acta Math. **179** (1997), 79 103.
[75] M. Obata, *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 333 340.
[76] Y. Otsu, *Almost everywhere existance of second differentiable structure of Alexandrov spaces*, preprint.
[77] Y. Otsu, *On manifolds of positive Ricci curvature with large diameter*, Math. Z. **206** (1991), no. 2, 255 264.
[78] ———, *On manifolds of small excess*, Amer. J. Math. **115** (1993), no. 6, 1229 1280.
[79] ———, *Differential geometric aspects of Alexandrov spaces*, Comparison geometry (Berkeley, CA, 1993 94), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 135 148.
[80] Y. Otsu, K. Shiohama, and T. Yamaguchi, *A new version of differentiable sphere theorem*, Invent. Math. **98** (1989), no. 2, 219 228.
[81] Y. Otsu and T. Shioya, *The Riemannian structure of Alexandrov spaces*, J. Differential Geom. **39** (1994), no. 3, 629 658.
[82] G. Perelman, *A. D. Alexandrov's spaces with curvatures bounded from below II*, preprint.
[83] ———, *DC-structure on Alexandrov space*, preprint.
[84] ———, *Elements of Morse theory on Alexandrov spaces*, St. Petersburg Math. Jour. **5** (1994), no. 1, 207 214.
[85] ———, *A diameter sphere theorem for manifolds of positive Ricci curvature*, Math. Z. **218** (1995), no. 4, 595 596.
[86] G. Perelman and A. Petrunin, *Quasigeodesics and gradient curves in Alexandrov spaces*, preprint.
[87] P. Petersen, *On eigenvalue pinching in positive Ricci curvature*, Invent. Math. **138** (1999), no. 1, 1 21.
[88] Anton Petrunin, *Harmonic functions on Alexandrov spaces and their applications*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **9** (2003), 135 141 (electronic).
[89] ———, *Subharmonic functions on Alexandrov space*, preprint.
[90] J. A. Ramírez, *Short-time asymptotics in Dirichlet spaces*, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), no. 3, 259 293.
[91] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, vol. I - IV, Academic Press, 1975.
[92] M. Renesse, *Heat kernel and diffusion process comparison on Alexandrov spaces*, to appear in Potential Analysis.
[93] Yu. G. Reshetnyak (ed.), *Geomtry IV*, Encyclopaedia of Math. Sci., vol. 70, Springer-Verlag, 1993.
[94] T. Sakai, *Riemannian geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, Translated from the 1992 Japanese original by the author.
[95] L. Saloff-Coste, *Uniformly elliptic operators on Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **36** (1992), no. 2, 417 450.

[96] I. Satake, *On a generalization of the notion of manifold*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42** (1956), 359 363.

[97] Y. Shikata, *On a distance function on the set of differentiable structures*, Osaka J. Math. **3** (1966), 65 79.

[98] K. Shiohama, *An introduction to the geometry of Alexandrov spaces*, Lecture Notes Series, no. 8, Research Institute of Math., Global Analysis Research Center, Seoul National Univ., Seoul 151-742, Korea, 1992.

[99] T. Shioya, *Mass of rays in Alexandrov spaces of nonnegative curvature*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), no. 2, 208 228.

[100] ———, *Eigenvalues and suspension structure of compact Riemannian orbifolds with positive Ricci curvature*, Manuscripta Math. **99** (1999), no. 4, 509 516.

[101] ———, *Convergence of Alexandrov spaces and spectrum of Laplacian*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), no. 1, 1 15.

[102] ———, 測度距離空間上の解析と曲率, ２１世紀の数学 幾何学の未踏峰 , to appear, 2004.

[103] M. L. Silverstein, *Symmetric Markov processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1974, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 426.

[104] K.-T. Sturm, *Analysis on local Dirichlet spaces. I. Recurrence, conservativeness and L^p-Liouville properties*, J. Reine Angew. Math. **456** (1994), 173 196.

[105] ———, *Analysis on local Dirichlet spaces. II. Upper Gaussian estimates for the fundamental solutions of parabolic equations*, Osaka J. Math. **32** (1995), no. 2, 275 312.

[106] ———, *On the geometry defined by Dirichlet forms*, Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications (Ascona, 1993), Progr. Probab., vol. 36, Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 231 242.

[107] ———, *Analysis on local Dirichlet spaces. III. The parabolic Harnack inequality*, J. Math. Pures Appl. (9) **75** (1996), no. 3, 273 297.

[108] ———, *Monotone approximation of energy functionals for mappings into metric spaces. I*, J. Reine Angew. Math. **486** (1997), 129 151.

[109] ———, *Diffusion processes and heat kernels on metric spaces*, Ann. Probab. **26** (1998), no. 1, 1 55.

[110] ———, *How to construct diffusion processes on metric spaces*, Potential Anal. **8** (1998), no. 2, 149 161.

[111] ———, *Monotone approximation of energy functionals for mappings into metric spaces. II*, Potential Anal. **11** (1999), no. 4, 359 386.

[112] N. Teleman, *The index of signature operators on Lipschitz manifolds*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1983), no. 58, 39 78 (1984).

[113] W. P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University Press, 1978.

[114] A. I. Vol'pert, *Spaces BV and quasi-linear equations*, Matem. Sbornik, 1967.

[115] T. Yamaguchi, *A convergence theorem in the geometry of Alexandrov spaces*, Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992), Sémin. Congr., vol. 1, Soc. Math. France, Paris, 1996, pp. 601 642.

リッチ曲率が下に有界な多様体族とその極限

酒井 隆（岡山大学理学部）

目次

1. 序

1981年に，M. ベルジェは "Riemannian manifolds whose Ricci curvature is bounded from below" というタイトルの下で大阪大学で一連の講義を与え，また日本数学会で特別講演をおこなった ([B 1])．そこでは，グロモフ・ハウスドルフ距離，リッチ曲率が下から押さえられたリーマン多様体の族に対するプレコンパクト性定理，リッチ曲率が殆ど非負のリーマン多様体の第1ベッチ数評価，最良ソボレフ定数に関するS.ギャロの仕事等が解説されている．また，この年の筑波大学でのベルジェも参加した研究集会で，塩浜勝博はリッチ曲率の条件下で次の球面定理を述べた（[S 1]）：M を $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$, $K_M \geq -\kappa$ をみたす m 次元完備リーマン多様体とする．その体積が（m, κ に関連して）単位球面 S_1^m の体積に近ければ，M は球面に同相である．

それ以来リッチ曲率について多くの重要な進歩があったが，ここでは，そのうち特にT. H. コールディング，J. チーガー・コールディング等による一連の重要な仕事の（基本的な部分を中心にして）解説を試みる．

ここで扱う内容を概説する前に，S. B. マイヤースとS. ボホナーによる1940年代の古典的な結果を想起しよう．マイヤース（[My]）は測地線の第2変分公式を用いて，m 次元完備リーマン多様体 M のリッチ曲率が正定数 k に対して $\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ をみたせば，M はコンパクトで，その直径 $d(M)$ は $\pi/\sqrt{k}$ を越えないことを示した．普遍リーマン被覆を考えることにより，M の基本群が有限であることも分かる（特に，第1ベッチ数 $b_1(M)=0$ である）．このアイデアはその後比較定理として大きく発展し，ラウチ・ベルジェ・クリンゲンバーグ等による球面定理等で重要な役割を果たした．

科学研究費補助金：基盤研究 (B) (2) 課題番号 12440020 による援助を受けている．

特に, 断面曲率が下から定数で押さえられた完備リーマン多様体の場合には, その測地3角形の角をモデルの定曲率（単連結）空間形の同じ辺長を持つ測地3角形の角と比較するトポノゴフ比較定理があり, これを用いて距離関数の挙動を詳しく調べることができた. 例えば, グローブ・塩浜（[GroS]）によって導入された距離関数の危点の概念は以後の発展で基本的な役割を果たしたが, 危点の挙動を調べるのにトポノゴフ比較定理が有用である.

リッチ曲率が下から押さえられている場合には, 距離関数を直接制御することは容易ではなかった. ただし, 体積に関しては, 1960 年代にすでに R. L. ビショップによる比較定理があった（[BiCr]）: $\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ をみたす完備リーマン多様体の距離球 $B_R(p; M)$ の体積は, 定曲率 k の単連結空間形の同じ半径の距離球の体積を超えない. この結果は J. ミルナーにより, リッチ曲率非負のコンパクト・リーマン多様体の基本群が多項式増大度を持つことを示すのに用いられた ([M]). さらに, この比較定理の M. グロモフによる同心距離球の体積に対する相対形不等式は, 以後の発展で非常に有用であることが分かった（[G 3], また §2 を参照されたい).

他方, S. ボホナーは, リッチ曲率非負の m 次元コンパクト・リーマン多様体 M の第1ベッチ数は, 不等式 $b_1(M) \leq m$ をみたし, 等号成立は M が平坦トーラスの一つに等長的であるとき, かつそのときに限ることを示した（[Bo], [YanoBo]). 実際, 以後ボホナー・テクニックと呼ばれた解析的な手法によって, 上の場合 M の調和形式が平行になることを導いた. ラプラシアンの正の第1固有値に関するリヒネロビッツ・小畠の定理もボホナーの公式の解析により得られる（[Lic], [Ob], §2 を参照されたい). さらに, この手法は広く数学の多くの分野での「消滅定理」に応用された.

また, ボホナーの解析的な手法は, 1970 年代後半から始まる S.-T. ヤウ達の, リッチ曲率の仮定の下での調和関数やラプラシアンの固有関数に対する勾配評価や, 固有値評価でも基本的な役割を果たしている（[CheY], [LiY], [SchY 2], [Y 1,2]).

1980 年頃に M. グロモフは, リッチ曲率が殆ど非負のリーマン多様体 M の第1ベッチ数 $b_1(M)$ に対して次のような評価を与えた: $\epsilon = \epsilon(m) > 0$ が存在して, m 次元コンパクト・リーマン多様体 M が $d^2(M)\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)\epsilon$ をみたせば $b_1(M) \leq m$ である（S. ギャロによる別証明がある). さらにグロモフは, $b_1(M) = m$ なら M はトーラス T^m に同相になるであろうという予想を与えた（[G 3], [Ga 1]: これは [B 1] でも解説された).

さて, 曲率と多様体構造に関する最近の発展の中で, グロモフの与えた影響は非常に大きい. 計量構造に関して自然な条件をみたす多様体を全体として捕らえるために, グロモフはコンパクト距離空間の族に距離を導入した. この概念はこの報告でも最も基本的な役割を果たすので, 定義を復習しておこう（[G 3], [F 2], [Sa 1] 等を参照). まず, 距離空間 Z の空でない部分集合 $X, Y \subset Z$ に対する古典的なハウスドル

フ距離 $d_H^Z(X, Y)$ は

$$(1.1)\quad \begin{cases} d_H^Z(X, Y) := \inf\{\epsilon > 0 \mid \bar{B}_\epsilon(X) \supset Y \text{ かつ } \bar{B}_\epsilon(Y) \supset X\} \\ \qquad\qquad\quad = \max\{\sup_{x\in X} d(x, Y), \sup_{y\in Y} d(y, X)\} \end{cases}$$

で与えられた．ただし，$\bar{B}_\epsilon(X) := \{z \in Z \mid d(z, X) \leq \epsilon\}$ である．d_H^Z をまた d_H^d とも書く．

このとき，族

$$\mathcal{SUB}(Z) := \{ X \subset Z \mid X \text{ は空でないコンパクト部分集合} \}$$

にこの d_H^Z を与えれば，$(\mathcal{SUB}(Z), d_H^Z)$ は距離空間となる．また，もし (Z, d) が完備（コンパクト）ならば，$(\mathcal{SUB}(Z), d_H^Z)$ もまた完備（コンパクト）である．さて，グロモフはさらに一般に，距離空間 X, Y の間の距離を

(1.2)

$$\begin{cases} d_{GH}(X, Y) := \inf\{d_H^Z(f(X), g(Y)) \mid f : X \to Z,\ g : Y \to Z \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{は距離を保つ等長埋め込み}\} \end{cases}$$

で与えた．このとき，d_{GH} は族 $\mathcal{MET} := \{$コンパクト距離空間の等長類$\}$ 上距離の公理をみたし，グロモフ・ハウスドルフ距離と呼ばれる．

これと同値な定義の仕方を述べよう．距離空間 X, Y の直和 $X \amalg Y$ 上の距離 δ は，包含写像 $X, Y \hookrightarrow X \amalg Y$ が距離を保つ等長埋め込みのとき，X, Y に適合しているという．次は容易に確かめられる．

$$(1.3)\quad d_{GH}(X, Y) := \inf\{d_H^\delta(X, Y) \mid \delta \text{ は } X \amalg Y \text{ 上の適合距離}\}.$$

次のバージョンは深谷による：距離空間の間の（必ずしも連続とは限らない）写像 $f : X \to Y$ は

$$(1.4)\quad \begin{cases} |d(f(x_1), f(x_2)) - d(x_1, x_2))| < \epsilon, \quad x_1, x_2 \in X, \\ \bar{B}_\epsilon(f(X)) \supset Y \end{cases}$$

をみたすとき，ϵ–ハウスドルフ近似と呼ばれる．次に

$$(1.5)\quad \begin{cases} \hat{d}_{GH}(X, Y) := \inf\{\epsilon > 0 \mid \epsilon\text{–ハウスドルフ 近似} \\ \qquad\qquad\qquad f : X \to Y,\ g : Y \to X \text{ が存在する}\} \end{cases}$$

と定義すれば，$(2/3)d_{GH} \leq \hat{d}_{GH} \leq 2d_{GH}$ が成り立つ．よって，$\hat{d}_{GH}$ は $\mathcal{MET}$ 上 d_{GH} と同じ位相を与えるので（ただし，$\hat{d}_{GH}$ は3角不等式をみたさないが），以下 $\hat{d}_{GH}(X, Y)$ の代わりに $d_{GH}(X, Y)$ とも書く．また，ϵ–ハウスドルフ近似 $f : X \to Y$ があれば，$\hat{d}_{GH}(X, Y) < 3\epsilon$ となることを注意しておこう．

$\{\mathcal{MET}, d_{GH}\}$ のコンパクト性に関する基本的な性質として，グロモフは次のプレコンパクト性定理を示した ([G 1, 3])．

完備距離空間 $\{\mathcal{MET}, d_{GH}\}$ の部分集合 $\mathcal{X} \subset \mathcal{MET}$ は次の条件 (i), (ii) をみたすとき，一様コンパクトであるという：

(i) 正定数 d が存在して，任意の $X \in \mathcal{X}$ の直径 $d(X)$ は $d(X) \leq d$ をみたす．

(ii) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，正整数 $K = K(\epsilon)$ が存在して，任意の $X \in \mathcal{X}$ はたかだか K 個の元からなる ϵ–網を持つ．ここで，$\{x_i\}_{i=1}^k \subset X$

は, 任意の $x \in X$ に対して $d(x, x_i) \leq \epsilon$ をみたす x_i が取れるとき, すなわち, $\bigcup_i \bar{B}_\epsilon(x_i; X) = X$ をみたすとき, X の ϵ–網と呼ばれた.

定理 1.1. 一様コンパクトな $\mathcal{X} \subset \mathcal{MET}$ は距離 d_{GH} に関してプレコンパクトである. よって, その閉包 $\overline{\mathcal{X}}$ はコンパクトである.

証明は列 $\{X_n\} \subset \mathcal{X}$ が与えられたとき, あるコンパクト距離空間 Z を構成して $X_n (n = 1, 2, \ldots)$ を Z に等長的に埋め込み, $\mathcal{SUB}(Z)$ がコンパクトであることを用いる.

さて, リーマン幾何に戻り, リッチ曲率に関して多様体族

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_m(d) := \{M \mid M \text{ は } m \text{ 次元コンパクトリーマン多様体で} \\ \mathrm{Ric}_M \geq -(m-1),\ d(M) \leq d \text{ をみたす}\} \quad (\subset \mathcal{MET}) \end{aligned}$$

を考える. グロモフはまた次を示した ([G 2, 3]).

定理 1.2. $\mathcal{S}_m(d)$ は $\mathcal{MET}$ で d_{GH} に関してプレコンパクトである.

証明はビショップ・グロモフの体積比較定理を用いて一様コンパクト性を示し, 定理 1.1 を適用する (§2 を参照).

コンパクトとは限らない距離空間の族を扱うときは, 次の点付きグロモフ・ハウスドルフ距離の方が都合がよい: (X, p), (Y, q) を基点付きの距離空間とする. $\bar{B}_r(p; X) := \{x \in X \mid d(x, p) \leq r\}$ は X の p を中心とする半径 r の閉距離球であった. 次のように定義する:

(1.6)
$$\left\{ \begin{aligned} & d_{p,GH}((X, p), (Y, q)) := \inf\{\epsilon > 0 \mid X \amalg Y \text{ 上の適合距離 } \delta \text{ が} \\ & \quad \text{存在して } \delta(p, q) < \epsilon,\ \bar{B}_{1/\epsilon}(p; X) \subset \bar{B}_\epsilon(Y; (X \amalg Y, \delta)), \\ & \quad \text{および } \bar{B}_{1/\epsilon}(q; Y) \subset \bar{B}_\epsilon(X; (X \amalg Y, \delta)) \text{ をみたす}\}. \end{aligned} \right.$$

すると前と同様に, リッチ曲率が下からある定数で押さえられた m 次元点付き完備リーマン多様体全体のなす族は, 距離 $d_{p,GH}$ に関してプレコンパクトになる. しかし, $\mathcal{S}_m(d)$ の境界に属する距離空間 X は, 一般にはリーマン多様体の構造を持つとは限らず, 特異点を許容し得る. X は弧長空間で, そのハウスドルフ次元は m を超えないことは比較的容易に示せるが, その構造を詳しく調べるのは困難な問題である. しかし, これらのグロモフによるアイデアはリッチ曲率が下から有界な多様体の族の研究を刺激し, その後の研究の一般的な指針を与えたと言えよう.

なお, J. チーガーの有限性定理 ([C 1, 2]) に始まる, 断面曲率の条件をみたすリーマン多様体の族の研究は, グロモフ・ハウスドルフ距離を用いたコンパクト性や崩壊現象についての多くの研究により発展し, 詳しいことが分かっている (深谷による優れた報告 [F 2], またこのサーベイ研究会のアレキサンドロフ空間に関する報告や [BuGPe], [Pe 4] を見られたい). また, リッチ曲率が有界で, 直径が上から, 単射半径が下から押さえられた場合のコンパクト性についてはアンダーソン・チーガーの研究がある ([AnC 1, 2]).

さて非負リッチ曲率多様体の研究で, 非コンパクトの場合には 1970 年代初めのチーガー・グロモール ([CGr], [EscHe]) による分裂定理と呼ばれる重要で美しい結果がある: もし, 非負リッチ曲率の完備リーマン

多様体 M が直線 γ (γ 上の任意の 2 点に対して最短線を与えるような測地線) を含めば, M は分裂する. すなわち, $M = \boldsymbol{R} \times N$ とリーマン直積の形に書ける.

この結果の証明では, 距離関数 (この場合はブーゼマン関数) のラプラシアンの評価による劣調和性と最大値原理が重要な役割を果す. この手法は 20 年後にアブレッシュ・グロモールによって, エクセス関数 $E_{pq}(x) := d(p,x) + d(q,x) - d(p,q)$ に対する評価を得るために改良された ([AbGr]). それによって非負リッチ曲率空間での距離関数の危点の挙動が, 直径増大度に関する仮定の下に, 調べられた.

1990 年代前半に G. ペレルマン ([Pe 1]) は, このエクセス関数の評価とビショップ・グロモフの体積比較定理を用いた独創的な議論で, 冒頭の塩浜の結果を断面曲率に関する仮定なしで導いた: $\epsilon = \epsilon(m) > 0$ が存在して, $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ である m 次元完備リーマン多様体 M の体積が $\mathrm{vol}\, M \geq (1-\epsilon)\mathrm{vol}\, S_1^m$ をみたせば, M は球面 S^m に同相である. 以上で, コールディングの仕事が始まるまでのだいたいの様子について述べた.

1990 年代後半に始まる T. H. コールディングの研究, また彼と J. チーガーの共同研究によって多くの重要な問題が解決されることになる. まず, コールディングはペレルマンの球面定理に関して, 幾何学的な側面での結果を得た ([Co 1, 2]). すなわち, $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ の仮定の下で, M の体積 $\mathrm{vol}\, M$ は, グロモフ·ハウスドルフ距離 $d_{GH}(M, S_1^m)$ が小さいときかつそのときに限り, また M の半径 $\mathrm{rad}\, M (:= \min_{p\in M} \max_{x\in M} d(p,x))$ が $\pi = \mathrm{rad}\, S_1^m$ に近いときかつそのときにかぎり, 球面の体積 $\omega_m = \mathrm{vol}\, S_1^m$ に近いことを示した (これらはアンダーソン, チーガー, ペレルマン等によって予想されていた). 特に, この状況の下で, M は球面に同相になる.

これらの主張を示すのに, コールディングは L^2 版トポノゴフ比較定理を開発して距離関数の挙動を制御した. 上述のリッチ曲率が正で球面に「近い」状況では, まず距離関数をラプラシアンの (第 1) 固有関数で近似する. 次に, ボホナーの公式を用いて, 固有関数のヘッシアンに関する L^2 の意味での評価を積分不等式の形で与える. さらに, これを単位接バンドル UM (これは M の測地線の集合とみなせる) 上の積分不等式に転換する. これより, M 上の測地線の挙動を, 単位球面上の測地線の挙動と L^2 の意味で比較することができる. また, リッチ曲率が $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ をみたすコンパクト m 次元リーマン多様体全体の族上で, 体積汎関数はグロモフ・ハウスドルフ距離に関して球面で連続となることが示された.

次に, コールディングはリッチ曲率が下から非正の定数で押さえられている一般の場合には, 距離関数を (局所的に距離球に制限して) 調和関数で近似し, 後は同様の議論を行うことにより, 一般の L^2 版トポノゴフ比較定理を得た ([Co 3]). 実際, これらの結果の証明では, ビショップ・グロモフの比較定理, 距離関数のラプラシアン評価, ヤウ等による調和関数の勾配評価, ラプラシアンの固有値評価等のさまざまな手法が用いられた.

またこの手法を応用して, より一般に, リッチ曲率が下から押さえられたリーマン多様体の族上で体積汎関数のグロモフ・ハウスドルフ距離に関する連続性が示された（正確には §4 を見られたい). さらに, これを用いて上に述べたグロモフの予想の証明が与えられた.

次に, チーガー・コールディング ([CCo 1]) は先に触れたチーガー・グロモールの分裂定理を, 殆ど非負リッチ曲率の完備リーマン多様体列の点付きグロモフ・ハウスドルフ距離に関する極限空間の場合に拡張した. この場合, 近似のリーマン多様体に直線は存在せず, 先の質的な議論を量的な評価の積み重ねに置きかえることになる. 再び, 近似のリーマン多様体上（ブーゼマン関数に対応する）距離関数を調和関数 b で近似し, b のヘッシアンを評価する. この場合, 最大値原理によってエクセスが非常に小さくなることを示し, これより b のヘッシアンのノルムが L^2 の意味で小になることを評価する. これを, 測地線のなす空間上の積分不等式に転換して, 考えている空間と直積 $X = \boldsymbol{R} \times Z$ の間のハウスドルフ近似を構成することができる. 一般化された分裂定理を応用して彼等は, グロモフの予想（[G 3]）「$\epsilon = \epsilon(m) > 0$ が存在して, m 次元コンパクト・リーマン多様体 M が $d^2(M)\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)\epsilon$ をみたせば, 基本群 $\pi_1(M)$ は殆ど冪零（有限指数の冪零部分群をふくむ）である」を解決した（深谷・山口（[FYa]）は断面曲率に対して $d^2(M)K_M \geq -\epsilon$ をみたすとき予想を示し, リッチ曲率の場合でも極限空間で分裂定理等が示されれば予想が成立することを示していた).

さて, この報告の目的は比較定理の手法と, コールディングやチーガー達によって新しく開発された手法のうちの幾つかの基本的な考え方に焦点を当てて解説することにある. §2 では, リッチ曲率が下から押さえられたリーマン多様体に対して, ビショップ・グロモフの体積比較定理の応用, 距離関数のラプラシアンの評価, 最大値原理の応用, ボホナーの公式, 調和関数の勾配評価等, 後で必要になる基本的な手法について述べる.

§3 では, コールディングによる L^2 版トポノゴフ比較定理の証明を述べる. 最初に, リッチ曲率正の場合（距離関数をラプラシアンの固有関数によって近似することによって, 測地線にそっての距離関数の挙動を球面の場合と L^2 の意味で比較する). 次に, リッチ曲率が下から非負定数で押さえられている一般の場合（調和関数を近似に用いて,「短い」測地線にそっての距離関数の挙動をユークリッド空間の場合と L^2 の意味で比較する）を扱う.

§4 では, §2, 3 での準備の下で, コールディングによる体積汎関数の連続性の証明を述べる. 次に §5 で, チーガー・コールディング による一般化された分裂定理の証明を述べる. §3 – §5 では, 彼等の証明の方針にしたがっているが, 細部までできるだけ丁寧に述べることを心がけた. 断面曲率が下から押さえられている場合の幾何学的な着想や議論に比べて, リッチ曲率の場合, 解析的な細かい議論を積み重ねることが必要となるためである.

最後の §6 では, 応用としてリッチ曲率が $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ をみたすリーマン多様体を扱う. 特に, M が標準的な球面にグロモフ・ハウスドルフ距離に関して近い条件を体積, 半径, ラプラシアンの固有値の言

葉で述べ, この場合 M は位相的には球面に（微分）同相である事を示す. これにより, 種々の球面定理を統一して述べることができ, 相互の関係が理解できると思う.

次に, この報告で触れることができなかった点について述べておこう. まず, チーガー・コールディングはこの分裂定理の手法を用いて, さらにリッチ曲率が下に有界な多様体族とその極限空間の構造に関する組織的, 一般的な研究を行っている（[CCo 2]). これについては殆ど述べられなかったが, この方面, 特に ラプラシアンの固有値と固有関数の（測度付）グロモフ・ハウスドルフ収束下で振る舞いについての深谷予想（[F 2]）に関連して, 本書でも加須栄篤氏の解説（[Kas 2]）があり参照されたい.

ただ, 上記と関連して次の結果（安定性定理）は挙げておきたい：コンパクト m 次元リーマン多様体の列 $\{M_i\}$ が $\mathrm{Ric}_{M_i} \geq -(m-1)$ をみたし, 同じ m 次元のコンパクト・リーマン多様体 M にグロモフ・ハウスドルフ収束したとする. このとき, 十分大きな i に対して M_i は M に微分同相である.

なお、[CCo 2] の I, II, III 部のそれぞれの序文と I の付録 A.2 には, 全体の概観の説明があり, まずそれらを読まれることを勧める.

また, コールディング・ミニコッツィによるリッチ曲率が下から押さえられた空間上の調和関数に関する一連の仕事についても触れていない（文献として, [CoMi 1, 2] だけ挙げておく).

リッチ曲率に関しては, より強い断面曲率の仮定の下で成り立つ結果が必ずしも成り立たない（例えば, グロモフのベッチ数に関する有限性定理 [G 2] や, 直径球面定理はリッチ曲率の場合は成立しない). このため多くの例が構成されているが, 残念ながら殆ど割愛した（[An 1, 3, 5], [BeB], [C 3], [CCo 1], [Me 1, 2, 3], [Ot 1], [Pe 2,3], [ShaYa 1, 2] 等を参照されたい).

リッチ曲率が下から押さえられた多様体を, ボホナー・テクニック, 等周不等式を用いて調べる, ギャロ, ベラール等フランス学派の研究がある. それについては [Ga 1, 2], [Be 1, 2], [BeMey] を参照されたい. また, リッチ曲率の変形による手法（[Au], [Eh], [Ha], [Hu] ）がある. なお, 3 次元以上の任意の多様体には, リッチ曲率が至る所負の完備リーマン計量がはいり（[Lo]), したがって, リッチ曲率が上から押さえられた多様体は対象としては広すぎることを注意しておこう.

最後に, コールディング, チーガー・コールディングの仕事の解説としてコールディング自身による [Co 4, 5], ギャロによる [Ga 3] がある. また, 曲率と多様体構造に関する全般的な解説として [B 2], [Gr], [G 4,5], [S 2] を挙げておこう. 1997 年には加須栄氏の招きでコールディング氏が来日し, 一連の講義を行ったことを付け加えておく.

2. 準備

2.1. ここでは, m 次元リーマン多様体 $M=(M,g)$ のリッチ曲率に関する基本的な事実をまとめておく. 以下特に断らない限り, 多様体は連結とする.

定義 2.1. リーマン多様体 (M,g) のリッチテンソル Ric_M は M 上のベクトル場 X, Y に対して

$$\mathrm{Ric}_M(X,Y) := \mathrm{tr}\,(Z \to R(Z,X)Y) \tag{2.1}$$

で定義される．ここで, $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ は g のレビ・チビタ接続に関する曲率テンソルであり，リッチテンソルはこれを一度縮約して得られる．$u \in UM$ に対して，$\rho(u) = \mathrm{Ric}_M(u,u)$ をリッチ曲率と呼ぶ．これは，M の単位接束 UM 上の滑らかな関数である．定数 k に対して，$\rho(u) \geq k$ が任意の $u \in UM$ に対して成り立つとき $\mathrm{Ric}_M \geq k$ と書き，リッチ曲率が下から k で押さえられているという．

さて，$\{e_i\}_{i=1}^m$ を接空間 T_pM の $e_1 = u$ をみたす正規直交基底とする．いま，$K_M(u,e_i)$ で $\{u, e_i\}$ により張られる T_pM の断面の断面曲率を表せば，$\rho(u) = \sum_{i=2}^m K_M(u,e_i)$ と書ける．すなわち，リッチ曲率 $\rho(u)$ は，u を含む T_pM の断面の断面曲率の平均と考えられる．リッチテンソルが対称であること，またリッチ曲率がリッチテンソルを定めることは容易に分かる．

ここで，正規座標系に関する計量テンソルのテイラー展開を用いた，リッチ曲率の幾何学的な解釈を挙げておく（以下，この節で証明抜きで述べる事実の証明は，例えば，[BGauMa], [Bes], [CEb], [Cha 1, 2], [GaHLa], [J], [Ka], [K], [Ot 2]], [P 1], [SchY 2], [Sa 1] 等にある).

補題 2.2. $p \in M$ の周りの正規座標系 $\{x_i\}$ に関する計量テンソルの成分を (g_{ij}) とする．このとき，$u \in U_pM$, $r \in \boldsymbol{R}^+$ に対して

$$\det(g_{ij}(ru)) = 1 - \frac{\rho(u)}{3}r^2 + O(r^3). \tag{2.2}$$

いま，γ_u を初期方向 $u \in U_pM$ の測地線とする．指数写像 $\exp_p$ の tu でのヤコビアンの絶対値は $\sqrt{\det(g_{ij}(tu))}$ で与えられた．よって

$$\theta(t,u) := \sqrt{\det(g_{ij}(tu))}\; t^{m-1} \tag{2.3}$$

と置けば，$\theta(t,u)$ は M の超曲面 $\exp_p\{t\,u \mid u \in U_pM\}$ の $\gamma_u(t)$ における体積要素を定める．また，距離球 $B_r(p)(= B_r(p;M)) := \{x \in M \mid d(p,x) < r\}$ の体積は，r が p での M の単射半径 $i_p(M)$ より小さいならば

$$\mathrm{vol}\,B_r(p) = \int_0^r dt \int_{U_pM} \theta(t,u)du \tag{2.4}$$

により与えられる．ここで，(2.2) より

$$\begin{cases} \theta(t,u) = t^{m-1} - \frac{\rho(u)}{6}t^{m+1} + O(t^{m+2}), \\ \lim_{r\to 0} \frac{v_0^m(r) - \mathrm{vol}\,B_r(p)}{r^{m+2}} = \frac{\rho(u)}{6(m+2)}\omega_{m-1} \end{cases} \tag{2.5}$$

である．ただし，$v_0^m(r)$ は $\boldsymbol{R}^m$ の半径 r の距離球の体積，ω_{m-1} は $\boldsymbol{R}^m$ の $(m-1)$ 次元単位球面 S_1^{m-1} の体積を表す．

これより，リッチ曲率は距離球の体積を制御すると思える．しかし，この事実を正確に示すには，いわゆる比較定理の手法が必要になる．すなわち，（単連結）定曲率空間形をモデルの空間として取り，その距離球の体積と比較することを考える．

いま，M_k^m で定曲率 k の m 次元単連結完備リーマン多様体を表す．そのリッチ曲率は定数 $(m-1)k$ に等しい．また M_k^m では，θ は $\theta(t,u)=s_k(t)^{m-1}$ で与えられる．ここで，$s_k(t)$ は 微分方程式 $f''(t)+kf(t)=0$ の初期条件 $f(0)=0, f'(0)=1$ をみたす一意な解である．例えば，$k<0$ ならば $s_k(t)=\sinh\sqrt{|k|}t/\sqrt{|k|}$ となる．

また，$v_k^m(r)$ で $B_r(p;M_k^m)$ の体積を表す．これは M_k^m の斉次性から中心 p に依らず，$v_k^m(r)=\omega_{m-1}\int_0^r s_k(t)^{m-1}dt$ で与えられる．

次に， R. L. ビショップによる基本的な体積比較定理を述べる (特に，大津氏の論説 [Ot 2], また [BiCr], [HKa], [Ka], [Sa 1] 等を参照されたい).

定理 2.3. m 次元完備リーマン多様体 M^m のリッチ曲率が $\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ をみたすとする．このとき，任意の $u\in UM$ に対して

$$f(t):=\frac{\theta(t,u)}{s_k(t)^{m-1}}$$

で定義される関数は $[0,t_0]$ で単調非増加である． ここで，t_0 は $t\to\theta(t,u)$ の最初の（正の）零点であり，γ_u に沿っての始点 $\gamma_u(0)$ の第 1 共役値に等しい．$\lim_{t\to 0} f(t)=1$ に注意して，特に $f(t)\leq 1$，すなわち次が成り立つ．

$$\theta(t,u)\leq s_k(t)^{m-1},\quad t\in[0,t_0]. \tag{2.6}$$

さらに，$f(t)=1$ がある $t\in(0,t_0]$ に対して成立すれば，$f(s)\equiv 1$ がすべての $s\in[0,t]$ に対して成り立ち，接ベクトル $\dot\gamma_u(s)$ を含む $T_{\gamma_u(s)}M$ の任意の断面 σ に対して $K_M(\sigma)\equiv k$ である．

比較定理がどのように使われるのかを見るために，古典的な S. B. マイヤースの定理（[My]）を再び挙げておく．

系 2.4. m 次元完備リーマン多様体 M^m のリッチ曲率が $\mathrm{Ric}_M\geq(m-1)k$, $k>0$ をみたすとする．すると M はコンパクトで，その直径 $d(M)$ は $d(M)\leq\pi/\sqrt{k}$ をみたす．また，M の基本群 $\pi_1(M)$ は有限である．

証明. $\pi/\sqrt{k}$ は $s_k(t)=(1/\sqrt{k})\sin\sqrt{k}t$ の最初の正の零点であるから，(2.6) より $t_0\leq\pi/\sqrt{k}$ を得る．よって，任意の正規測地線はパラメーターの値が $\pi/\sqrt{k}$ を超えれば始点の共役点を含み，最短線にはなり得ない．特に，$d(M)\leq\pi/\sqrt{k}$ で，M はコンパクトである．その普遍リーマン被覆空間 $\tilde{M}$ も完備で，リッチ曲率について同じ条件をみたし，したがってコンパクトになる．よって，$\pi_1(M)$ は有限である． □

系 2.5. 完備リーマン多様体 M^m は $\mathrm{Ric}_M\geq(m-1)k$ をみたすとする． このとき，$\mathrm{vol}\,B_r(p;M)\leq v_k^m(r)$ ($k>0$ なら $r\leq\pi/\sqrt{k}$ とする) であり，等号は $B_r(p;M)$ が空間形 M_k^m の半径 r の距離球に等長的なとき，かつそのときに限り成立する． 特に $k>0$ の場合，

$\operatorname{vol} M \le v_k^m(\pi/\sqrt{k}) = \operatorname{vol} S_k^m$ で, 等号は M が半径 $1/\sqrt{k}$ の球面 S_k^m に等長的なときかつ, そのときに限り成立する.

さて, ビショップ比較定理の次のバージョンは M. グロモフ（[G 3], [CGTa]）によるが, リッチ曲率が下から押さえられたリーマン多様体を調べる際に非常に有用であることが分かる（証明は先に挙げた文献を参照されたい).

定理 2.6. 定理 *2.3* と同じ仮定の下で, $r \to \operatorname{vol} B_r(p; M)/v_k^m(r)$ はすべての $r \ge 0$ に対して単調非増加である. 特に, $0 \le r \le R$ に対して

$$\frac{\operatorname{vol} B_R(p)}{v_k^m(r)} \le \frac{\operatorname{vol} B_R(p)}{\operatorname{vol} B_r(p)} \le \frac{v_k^m(R)}{v_k^m(r)} \le \frac{v_k^m(R)}{\operatorname{vol} B_r(p)}. \tag{2.7}$$

系 2.7. 定理 *2.3* と同じ仮定の下で次が成り立つ： $s := d(x_1, x_2)$ と置く.

$$\frac{\operatorname{vol} B_{r_3}(p) - \operatorname{vol} B_{r_2}(p)}{\operatorname{vol} B_{r_1}(p)} \le \frac{v_k^m(r_3) - v_k^m(r_2)}{v_k^m(r_1)} \quad (r_1 \le r_2 \le r_3), \tag{2.8}$$

$$\frac{\operatorname{vol} B_{r_2}(x_2)}{\operatorname{vol} B_{r_1}(x_1)} \ge \frac{v_k^m(r_2)}{v_k^m(r_1+s)} \quad (r_2 \le r_1 + s), \tag{2.9}$$

$$\frac{\operatorname{vol} B_{r_2}(x_2)}{\operatorname{vol} B_{r_1}(x_1)} \ge \frac{v_k^m(r_2)}{v_k^m(s+r_1) - v_k^m(s-r_1)} \quad (s \ge r_1 + r_2). \tag{2.10}$$

(2.8) は定理の証明と同様の方針で示されるが, $r_1 = r_2 = r, r_3 = R$ と置けば (2.7) が得られることを注意しておこう. (2.9) を見るには, 3 角不等式から $B_{r_1}(x_1) \subset B_{r_1+s}(x_2)$ に注意すればよい. また, (2.10) を示すには次の様にすればよい： $B_{r_1}(x_1) \subset B_{s+r_1}(x_2) \setminus \bar{B}_{s-r_1}(x_2)$ に注意して, (2.8) より

$$\frac{\operatorname{vol} B_{r_2}(x_2)}{\operatorname{vol} B_{r_1}(x_1)} \ge \frac{\operatorname{vol} B_{r_2}(x_2)}{\operatorname{vol} B_{s+r_1}(x_2) - \operatorname{vol} B_{s-r_1}(x_2)} \ge \frac{v_k^m(r_2)}{v_k^m(s+r_1) - v_k^m(s-r_1)}.$$

系 2.8. 定理 *2.3* の仮定の下で, $\{B_r(x_i)\}_{i=1}^N$ を $B_R(p)$ に含まれる互いに交わらない半径 r の距離球の族とする. このとき,

(1) $N \le v_k^m(2R)/v_k^m(r)$.

(2) 任意の $q \in B_R(p)$ に対して, q が $B_{4r}(x_i)$ に含まれているような x_i の個数は $v_k^m(9r)/v_k^m(r)$ を超えない.

証明. (1) $\operatorname{vol} B_R(p) \ge \sum \operatorname{vol} B_r(x_i)$ で $B_R(p) \subset B_{2R}(x_i)$ だから

$$1 \ge \sum \frac{\operatorname{vol} B_r(x_i)}{\operatorname{vol} B_R(p)} \ge \sum \frac{\operatorname{vol} B_r(x_i)}{\operatorname{vol} B_{2R}(x_i)} \ge \frac{v_k^m(r)}{v_k^m(2R)} N.$$

(2) $\mathcal{I}' := \{i \in I \mid q \in B_{4r}(x_i)\}$ と置けば, 3 角不等式から $\bigcup_{i\in\mathcal{I}'} B_r(x_i) \subset B_{5r}(q)$ を得る. よって

$$1 \ge \sum_{i\in\mathcal{I}'} \frac{\operatorname{vol} B_r(x_i)}{\operatorname{vol} B_{5r}(q)} \ge \sum_{i\in\mathcal{I}'} \frac{\operatorname{vol} B_r(x_i)}{\operatorname{vol} B_{9r}(x_i)} \ge \frac{v_k^m(r)}{v_k^m(9r)} \sharp\mathcal{I}'$$

であり, したがって $\sharp\mathcal{I}' \le v_k^m(9r)/v_k^m(r)$ である. □

系 2.8 (1) を用いて, グロモフのプレコンパクト性定理 (定理 1.2) を証明することができる. 実際, 一様コンパクトの条件 (ii) を示せばよい. 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $M \in \mathcal{S}_m(d)$ 内に互いに交わらない距離球 $\{B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)\}$ の極大族を取る. 系 2.8 (1) よりその個数 N は有限で, 一様に上から $v_k^m(d)/v_k^m(\epsilon/2)$ によって評価できる. 他方, 極大性から $\{B_\epsilon(x_i)\}_{i=1}^N$ は M を被覆し, したがって $\{x_i\}_{i=1}^N$ は M の ϵ–網を与える.

次に, リッチ曲率正の場合への応用 (§6 で必要になる) について述べる. 以下の主張 (3) は G. ペレルマン ([Pe 1]) による.

系 2.9. M は m 次元完備リーマン多様体で $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ をみたすものとする. $\omega_m = \mathrm{vol}\, S_1^m (= v_1^m(\pi))$ であった.

(1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta = \delta(\epsilon, m) > 0$ が存在して $\mathrm{vol}\, M \geq \omega_m - \delta$ ならば, 任意の $p \in M$ に対して $d(p,q) \geq \pi - \epsilon$ をみたす点 $q \in M$ が取れる. すなわち, $\mathrm{rad}\, M (:= \min_{p\in M} \max_{x \in M} d(p,x)) \geq \pi - \epsilon$.

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta = \delta(\epsilon, m) > 0$ が存在して $p, q \in M$ が $d(p,q) \geq \pi - \delta$ をみたせば, 任意の $x \in M$ に対して

$$d(p,x) + d(q,x) - d(p,q) \leq \epsilon.$$

(3) 任意の $c_2 > c_1 > 1$ と $(c_1 - 1 >)\epsilon > 0$ に対して, 次の性質をみたす $\delta = \delta(c_1, c_2, \epsilon) > 0$ が存在する: $p \in M$ と $0 < R < \pi/c_2$ に対して, $\mathrm{vol}\, B_{c_2R}(p) \geq (1-\delta) v_1^m(c_2 R)$ であるとする. このとき, 任意の $a \in B_R(p)$ に対して, $b \in B_{c_2R}(p) \setminus B_{c_1R}(p)$ と $\gamma \in \min(p,b)$ で, $d(a,\gamma) \leq \epsilon R$ をみたすものが取れる. ここで, $\min(p,b)$ は p から b への弧長を径数とする最短測地線の集合を表す.

証明. (1) $0 < \delta < \omega_m - v_1^m(\pi - \epsilon)$ を取る. $M \subset B_{\pi-\epsilon}(p)$ とすれば, 定理 2.3 より

$$\mathrm{vol}\, M \leq \mathrm{vol}\, B_{\pi-\epsilon}(p) \leq v_1^m(\pi-\epsilon) < \omega_m - \delta$$

で矛盾を得る.

(2) $\epsilon/2 > \delta > 0$ を $\mathrm{vol}\, A_\delta < v_1^m(\epsilon/2)$ がみたされるように選ぶ. ここで, A_δ は $S_1^{m-1} \subset S_1^m$ を赤道とみなすとき領域 $\{a \in S_1^m \mid d(a, S_1^{m-1}) < \delta/2\} \subset S_1^m$ を表す. いま, $x \in M$ で $d(p,x) + d(x,q) - d(p,q) > \epsilon$ をみたす点があったとする. すると, $r := d(p,x) - \epsilon/2 > 0$, かつ $0 < s := d(p,q) - r < d(x,q) - \epsilon/2$ である. また, $d(p,q) = r + s \geq \pi - \delta$ に注意する. このとき, $B_{\epsilon/2}(x) \cap (B_r(p) \cup B_s(q)) = \emptyset$ であり, したがって

$$\begin{aligned} 1 - \tfrac{v_1^m(\epsilon/2)}{\omega_m} &\geq \frac{\mathrm{vol}\, M - \mathrm{vol}\, B_{\epsilon/2}(x)}{\mathrm{vol}\, M} \geq \frac{\mathrm{vol}\, B_r(p) + \mathrm{vol}\, B_s(q)}{\mathrm{vol}\, M} \\ &\geq \tfrac{v_1^m(r) + v_1^m(s)}{\omega_m} \geq 1 - \tfrac{\mathrm{vol}\, A_\delta}{\omega_m} \end{aligned}$$

となり矛盾を得る (最後の不等式は簡単な球面幾何の演習問題である).

(3) $0 < \delta < \epsilon^m (c_2^m - c_1^m)/(c_1^m (c_2+1)^m + \epsilon^m (c_2^m - c_1^m))$ を選ぶ. いま, 点 $a \in B_R(p)$ で, 任意の $b \in B_{c_2R}(p) \setminus B_{c_1R}(p)$ に対して p と b を結ぶどの最短測地線も $B_{\epsilon R}(a)$ と交わらないようなものが存在したとする. すると, ビショップ・グロモフの定理 (の証明) から

$$\frac{\mathrm{vol}\, B_{c_2R}(p) - \mathrm{vol}\, B_{c_1R}(p)}{v_1^m(c_2R) - v_1^m(c_1R)} \leq \frac{\mathrm{vol}\, B_{c_1R}(p) \setminus B_{\epsilon R}(a)}{v_1^m(c_1R)}$$

が分かる．他方，再びビショップ・グロモフの定理から

$$\mathrm{vol}\, B_{\epsilon R}(a) \geq \frac{v_1^m(\epsilon R)}{v_1^m((c_2+1)R)} \mathrm{vol}\, B_{(c_2+1)R}(a) \geq \frac{v_1^m(\epsilon R)}{v_1^m((c_2+1)R)} \mathrm{vol}\, B_{c_2 R}(p)$$

であり，また $v_1^m(c_1R)/v_1^m(c_2R) \geq c_1^m/c_2^m$ である．

よって，仮定の $\mathrm{vol}\, B_{c_2R}(p) \geq (1-\delta)v_1^m(c_2R)$ と上の事実，ビショップ・グロモフの定理から

$$\begin{aligned}
1 - \delta\tfrac{v_1^m(c_2R)}{v_1^m(c_2R)-v_1^m(c_1R)} &\leq \tfrac{(1-\delta)v_1^m(c_2R)-v_1^m(c_1R)}{v_1^m(c_2R)-v_1^m(c_1R)} \leq \tfrac{\mathrm{vol}\, B_{c_2R}(p)-\mathrm{vol}\, B_{c_1R}(p)}{v_1^m(c_2R)-v_1^m(c_1R)} \\
&\leq \tfrac{\mathrm{vol}\, B_{c_1R}(p)\setminus B_{\epsilon R}(a)}{v_1^m(c_1R)} \leq \tfrac{\mathrm{vol}\, B_{c_1R}(p)}{v_1^m(c_1R)} - \tfrac{\mathrm{vol}\, B_{c_2R}(p)}{v_1^m((c_2+1)R)}\tfrac{v_1^m(\epsilon R)}{v_1^m(c_1R)} \\
&\leq 1-(1-\delta)\tfrac{v_1^m(\epsilon R)}{v_1^m(c_1R)}\tfrac{v_1^m(c_2R)}{v_1^m((c_2+1)R)}
\end{aligned}$$

であり，これより

$$\frac{v_1^m(\epsilon R)}{v_1^m(c_1R)} \leq \delta \left\{ \frac{v_1^m((c_2+1)R)}{v_1^m(c_2R)-v_1^m(c_1R)} + \frac{v_1^m(\epsilon R)}{v_1^m(c_1R)} \right\}$$

すなわち

$$1 \leq \delta \left\{ \frac{v_1^m(c_1R)}{v_1^m(\epsilon R)} \frac{v_1^m((c_2+1)R)}{v_1^m(c_2R)-v_1^m(c_1R)} + 1 \right\} \leq \delta \left\{ 1 + \frac{c_1^m(c_2+1)^m}{\epsilon^m(c_2^m - c_1^m)} \right\}$$

となり，これは δ の選び方に矛盾する． □

注意 2.10. 上の系 (2) で，$d(M)=\pi$ と仮定すれば次が成り立つ：$p,q \in M$ が $d(p,q)=\pi$ をみたせば，$d(p,x)+d(x,q)=d(p,q)$ が任意の $x \in M$ に対して成り立つ．これより

$$M = \bar{B}_r(p) \cup \bar{B}_{\pi-r}(q),\, B_r(p) \cap B_{\pi-r}(q) = \emptyset (0 < r < \pi)$$

である．さらに，体積比較定理（の等号成立の場合）を用いて，M が単位球面 S_1^m に等長的であることが示せる（チェンの最大直径定理 ([Che])）．

ここで，リーマン多様体 M 上の積分不等式を M の最短測地線の空間上の積分不等式に転換する，チーガー・コールディングによる一般的な方法について述べる ([CCo 1])．M^m を $\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ をみたすリーマン多様体，e を M 上の正値可積関数とする．A_1, A_2 は M の開集合で，任意の $y_i \in A_i$ $(i=1,2)$ に対して，y_1 と y_2 を結ぶ最短測地線 γ_{y_1,y_2} はある開集合 W に含まれているものとする．以下

$$\int_{A_1 \times A_2} dy_1 dy_2 \int_0^{d(y_1,y_2)} e(\gamma_{y_1,y_2}(s))\, ds$$

を $\int_W e\, d\nu_g$ を用いて評価したい．正確に云えば，$B \subset A_1 \times A_2$ を点対 (y_1,y_2) で y_1 から y_2 へ唯一本の最短測地線が存在するようなものから成る部分集合とし，B 上の積分を考えるべきであるが，B は $A_1 \times A_2$ と同じ測度を持つので，以下 $B = A_1 \times A_2$ として議論する．$D := \sup\{d(y_1,y_2) \mid y_i \in A_i\}$ と置く．また，$v_i \in U_{y_i}M, i=1,2$ に対して

$$I(y_i, v_i) := \{t \mid \gamma_{v_i}(t) \in A_{i+1} \text{ で，} \gamma_{v_i} \mid [0,t] \text{ は最短測地線 }\} \subset \boldsymbol{R}$$

と置く．ただし，γ_{v_i} は初期方向 v_i の測地線で，$A_3 = A_1$ と考えるものとする．$D(A_i, A_{i+1})$ で (y_i, v_i) が UA_i を動くときの $I(y_i, v_i)$ の（1次元）測度の上限を表す．

定理 2.11. 上の状況で次が成り立つ： ある正定数 $c(m,k,D)$ が存在して

(2.11)
$$\begin{cases} \int_{A_1\times A_2} dy_1 dy_2 \int_0^l e(\gamma_{y_1,y_2}(s))\,ds \leq \\ c(m,k,D)[D(A_1,A_2)\mathrm{vol}\,(A_1) + D(A_2,A_1)\mathrm{vol}\,(A_2)] \int_W e\,d\nu_g. \end{cases}$$

証明. $(y_1, y_2) \in B$, $l = d(y_1, y_2)$ に対して

$$E_1(y_1,y_2) := \int_{l/2}^{l} e(\gamma_{y_1,y_2}(s))\,ds, \quad E_2(y_1,y_2) := \int_0^{l/2} e(\gamma_{y_1,y_2}(s))\,ds$$

と置き，また $E = E_1 + E_2$ とする．さて $y_1 \in A_1, v_1 \in U_{y_1}M$ を固定して，測地線 $\gamma = \gamma_{v_1}$ を取れば，γ に沿って M の体積要素 dM は曲座標に関して $ds \wedge \mathcal{A}(s)$ の形に書ける (実際，$\mathcal{A}(s) = \theta(s, v_1)\,dS^{m-1}$ である)．対応してモデル空間で，$\underline{p} \in M_k^m$ に対して

$$A_k(u) := \mathrm{vol}_{m-1}(\partial B_u(\underline{p})) = \omega_{m-1} s_k^{m-1}(u)$$

と置く．このとき，ビショップ・グロモフの比較定理によって，$0 \leq u \leq l$ に対して $\mathcal{A}(l)/\mathcal{A}(u) \leq A_k(l)/A_k(u)$ が成り立つ．よって

$$E_1(y_1, \gamma(l))\mathcal{A}(l) \leq c(m,k,D) \int_{l/2}^{l} e(\gamma(u))\mathcal{A}(u)\,du.$$

ただし，$c(m,k,D) := \sup_{l/2 \leq u \leq l} A_k(l)/A_k(u)$ と置いた．この不等式の両辺を $I(y_1, v_1)$ 上積分して

$$\int_{I(y_1,v_1)} E_1(y_1,\gamma(l))\mathcal{A}(l)dl \leq c(m,k,D)D(A_1,A_2) \int_0^{T(v_1)} e(\gamma(u))\mathcal{A}(u)\,du$$

を得る．ここで，$T(v_1)$ は $t \in I(y_1, v_1)$ をみたす t の値の上限である．再び，$\{v_1 \in U_{y_1}M \mid I(y_1, v_1) \neq \emptyset\}$ 上積分して

$$\int_{A_2} E_1(y_1,y_2)\,dy_2 \leq c(m,k,D)D(A_1,A_2) \int_W e\,d\nu_g.$$

次に，最後の不等式を A_1 上積分する．A_1 と A_2 の役割を入れ替えて対称な議論を行えば，E_2 に対する評価を得る．両方の不等式を加えて

$$\int_{A_1\times A_2} E(y_1,y_2)dy_1dy_2 \leq C \int_W e\,d\nu_g$$

を得る．ただし，$C = c(m,k,D)[D(A_1,A_2)\mathrm{vol}\,(A_1) + D(A_2,A_1)\mathrm{vol}\,(A_2)]$ で，これより (2.11) が従う．　□

この手法は命題 5.8 で用いられる．また，同様の考えで，M 上の積分不等式を単位接束 UM 上の積分不等式に転換する手法がある（補題 3.6, 3.7 を参照)．

2.2. リーマン多様体上の関数に作用するラプラシアンはリッチ曲率と密接に関連するが，それについて復習する．滑らかな関数 $f : M \to \boldsymbol{R}$ に対して，$\langle \nabla f, X\rangle = Xf$ によって定まる M 上のベクトル場 ∇f を f の勾配ベクトル場と呼ぶ．次に，f のヘッシアン $D^2 f$ （対称２次共変テンソル場）とラプラシアン Δf を

$$D^2 f(X, Y) := \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle \tag{2.12}$$

$$\Delta f := -\mathrm{tr}\, D^2 f \tag{2.13}$$

によって定義する[1]．局所座標系に関する表示はそれぞれ

$$\nabla f = g^{ji}\nabla_j f\,\partial_i,\quad D^2 f = \nabla_i \nabla_j f dx^i \otimes dx^j,\quad \Delta f := -g^{ij}\nabla_i\nabla_j f$$

によって与えられる[2]．

次に，完備リーマン多様体 M の一点 p からの距離関数 $d_p; d_p(x) := d(p, x)$ にのみ依存する関数 f のラプラシアンを考える．ここでも，θ が再び現れる．$u \in UM$ に対して，$i(u) := \sup\{t > 0 \mid \gamma_u|[0, t]$ は最短線$\}$ と置く．$i(u)$ が有限値なら，$\exp_p i(u)u$, $u \in U_pM$ が γ_u に沿っての p の切断点である．また，$0 < t < i(u), u \in U_pM$ ならば d_p は $\gamma_u(t)$ の近傍で滑らかであり，勾配ベクトルは $\nabla d_p(\gamma_u(t)) = \dot\gamma_u(t)$ で与えられる(特に，$\|\nabla d_p\| = 1$ である)．

さて，実変数実数値 C^∞ 級関数 ϕ に対して

$$\Delta(\phi \circ d_p)(\gamma_u(t)) = -\phi''(t) - \frac{\theta'(t, u)}{\theta(t, u)}\phi'(t) \tag{2.14}$$

が成り立つ．ここで，θ' は t に関する微分を意味する．特に

$$\Delta d_p(\gamma_u(t)) = -\frac{\theta'(t, u)}{\theta(t, u)} \tag{2.15}$$

であり，モデル空間 M_k^m の場合には $r := d_{\bar p}$ と置いて

$$\Delta_{M_k^m} r = -(m-1)\frac{c_k(r)}{s_k(r)} \quad (c_k(r) := s_k'(r)) \tag{2.16}$$

となることに注意する．これらは，例えば第２変分公式を用いて計算できるが，詳しくは先に挙げたテキストを参照されたい．

定理 2.12. M^m は完備リーマン多様体で $\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ をみたすとし，$\phi(t)$ を滑らかな実変数実数値関数とする．

(1) $0 < t < i(u)$, $u \in U_pM$ に対して次が成り立つ:$\phi'(t) \geq 0$ (*resp.* ≤ 0) ならば

$$\Delta(\phi \circ d_p)(\gamma_u(t)) \geq (\textit{resp.} \leq) \Delta_{M_k^m}(\phi \circ r)\,|_{r=t}\,. \tag{2.17}$$

右辺の項は初期方向 u には依らず，$-\phi''(t) - (m-1)(c_k(t)/s_k(t))\phi'(t)$ に等しい．

---

[1]ラプラシアンの定義で符号は著者により違う．ここでは，チーガー・コールディングのものと符号が逆になっている．

[2]総和に関するアインシュタインの規約に従い，和の記号を省略している．

(2) $\Omega \subset M$ を境界 $\partial\Omega$ を持つコンパクト領域，$p \in M \setminus \Omega$ とし，$\phi : (0, +\infty) \to \boldsymbol{R}$ は $\phi' \geq 0$ *(resp.,* ≤ 0*)* をみたす滑らかな関数とする．このとき d_p が Ω で滑らかであれば

$$\frac{1}{vol\,\Omega}\int_\Omega |\Delta(\phi \circ d_p)| d\nu_g \leq$$
$$2\max_{x\in\Omega}\{-\Delta_{M_k^m}(\phi \circ r)\mid_{r=d_p(x)}\} + \max_{p\in\partial\Omega}(\phi'(d_p(x)))\frac{\mathrm{vol}_{m-1}\partial\Omega}{\mathrm{vol}\,\Omega}$$
(*resp.,*
$$2\max_{x\in\Omega}\{\Delta_{M_k^m}(\phi \circ r)\mid_{r=d_p(x)}\} + \max_{x\in\partial\Omega}(-\phi'(d_p(x)))\frac{\mathrm{vol}_{m-1}\partial\Omega}{\mathrm{vol}\,\Omega})$$

が成立する．

証明. 定理 2.3 より $\{\theta(t,u)/s_k^{m-1}(t)\}' \leq 0$, すなわち，$\theta'(t,u)/\theta(t,u) \leq (m-1)(c_k(t)/s_k(t))$ が成り立つ．このとき，(1) は (2.14) からしたがう．

(2) ($\phi' \leq 0$) を示すために，実数値関数 g に対して $g_+ := \max(g, 0)$, $g_- := \max(-g, 0)$ と置き，

$$\int_\Omega |g| d\nu_g = 2\int_\Omega g_+ d\nu_g - \int_\Omega g d\nu_g \leq 2\mathrm{vol}\,\Omega\,\max_\Omega g_+ + \left|\int_\Omega g d\nu_g\right|$$

に注意する．この不等式を $g = \Delta(\phi \circ d_p)$ に適用する．(1) とグリーンの定理から，$\phi \circ d_p|\Omega$ が最大値を取る点では $\Delta(\phi \circ d_p) \geq 0$ に注意して

$$\int_\Omega |\Delta(\phi \circ d_p)| \leq \left|\int_\Omega \Delta(\phi \circ d_p)\right| + 2\mathrm{vol}\,\Omega\,\max_{x\in\Omega}\{\Delta_{M_k^m}(\phi \circ r)\mid_{r=d_p(x)}\}$$
$$\leq \int_{\partial\Omega} \|\nabla(\phi \circ d_p)\| d\nu_g + 2\mathrm{vol}\,\Omega\,\max_{x\in\Omega}\{\Delta_{M_k^m}(\phi \circ r)\mid_{r=d_p(x)} \leq$$
$$\mathrm{vol}_{m-1}\partial\Omega\,\max_{x\in\Omega}(-\phi'(d_p(x))) + 2\mathrm{vol}\,\Omega\,\max_{x\in\Omega}\{\Delta_{M_k^m}(\phi \circ r)\mid_{r=d_p(x)}\}$$

であり，証明が終わった． □

さて，d_p は p の切断点 (cut point) では必ずしも微分可能ではなかった．しかし，上の結果 (1) は次の一般化された意味では切断点でも成立する：M 上の連続関数 f と $x_0 \in M$ に対して，x_0 の近傍 U で定義された滑らかな関数 g は，$g(x_0) = f(x_0)$ でありかつ U 上で $g \geq f$ をみたすとき，x_0 で f の上からのバリアであるという．次に，任意の $\epsilon > 0$ に対して，x_0 での f の上からのバリア $f_{x_0,\epsilon}$ が存在して $\Delta f_{x_0,\epsilon}(x_0) \geq a - \epsilon$ をみたすとき，f は x_0 で $\Delta f(x_0) \geq a$ をみたすという．また，$\Delta f(x_0) \leq a$ は，上の意味で $\Delta(-f)(x_0) \geq -a$ が成り立つ場合をいう．

このとき，定理 2.12 (1) は $\gamma_u(i(u))$ でも上のバリアの意味で成立する．実際，任意の十分小さな $\delta > 0$ に対して，関数 $g(x) = d_{\gamma_u(\delta)}(x) + \delta > 0$ は $x_0 = \gamma_u(i(u))$ で d_p の上からのバリアであり

$$\Delta(\phi \circ g)(x_0) = -\phi''(d_{\gamma_u(\delta)}(x_0)) - \frac{\theta'}{\theta}(i(u) - \delta, \dot\gamma_u(i(u) - \delta))\phi'(d_{\gamma_u(\delta)}(x_0))$$

が成り立つ．あとはビショップの比較定理を用いればよい．

例えば，ϕ を実数値 C^∞ 関数で $\phi' < 0$ をみたすものとし，$\Delta_{M_k^m}(\phi \circ d_{\bar p}) + b = 0$ がある定数 b に対して成立するとする．このとき，M 上 $\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ が成り立つとすれば

$$\Delta(\phi \circ d_p) \leq -b \tag{2.18}$$

がバリアの意味で成立する．

次のカラビによる最大値原理は重要であり (証明は例えば，[Bes], [EscHe], [Sa 1] 等参照)，以下の多くの個所で現れる．

定理 2.13. M を連結リーマン多様体，f を M 上の連続関数とする．f が劣調和，すなわち $\Delta f \leq 0$ が至る所バリアの意味で成立すれば，f は定数関数でないかぎり最大値を取らない．

注意 2.14. (1)　最大値原理にはいろいろなバージョンがあり，P. ペーターセン ([P 2], [PW]) により用いられたものを与えておく：$\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ で，$u : M \to \boldsymbol{R}$ は $\Delta u \leq g$ をみたすとする．ただし，g は非負関数．このとき $p > m/2$ に対して，$\|g\| := (\int_M |g|^p \, d\nu_g)^{1/p}$ を g の L^p ノルムとするとき

$$u(x) \leq C(m, k, d(M), p)\|g\|_p + \frac{1}{\mathrm{vol}\, M}\int_M u \, d\nu_g.$$

(2)　距離関数 d_p には，必ずしも微分可能でない点（すなわち，p の切断点）があるので，微積分の手法やラプラシアンの比較定理を適用するとき，正確には微分可能なもので近似する必要のある場合がある．先のバリアによる近似もそうであるが，軟化子を考えることもできる．例えば，Ω をリーマン多様体 M のコンパクト領域，$p \in M \setminus \Omega$ とする．いま，$\phi : \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ は滑らかな単調増加関数とする．$\phi \circ d_p$ を Ω 上の関数とみなすとき，p の切断点では微分可能性は保証されない．まず，カットオフ関数 $\rho : [0, \infty) \to \boldsymbol{R}^+$ で次をみたすものを取る：

$$\mathrm{supp}\, \rho \subset [0, 2], \quad \rho \mid [0, 1/2] \equiv 1, \quad \omega_{m-1}\int_0^\infty \rho(t) t^{m-1} dt = v_0^m(1).$$

次に，$\rho_n(t) := n^m \rho(nt)$ とすれば，$\mathrm{supp}\, \rho_n \subset [0, 2/n]$ である．さて，

$$\phi_{p,n}(x) = \frac{1}{v_0^m(1)}\int_M \phi(d(p, y))\rho_n(d(y, x))dy$$

と定義する．このとき，$\phi_{p,n}$ は Ω 上滑らかで，任意の $\epsilon > 0$ に対して n を十分大に取れば

$$|\phi_{p,n} - \phi \circ d_p| < \epsilon, \quad \|\nabla \phi_{p,n}\| < \phi' \circ d_p + \epsilon$$

をみたす．例えば，$x \in \Omega$ で第 2 の不等式を示そう．n を（$2/n$ が Ω における M の単射半径より小になるように）十分大きく取り，部分積分を考えれば

$$\begin{aligned} v_0^m(1)\nabla \phi_{p,n}(x) &= \textstyle\int_M \phi(d(p, y))\rho_n'(d(y, x))\nabla d_y(x) dy \\ &= -\textstyle\int_M \phi(d(p, y))\rho_n'(d(y, x))\tau_x^y(\nabla d_x(y)) dy \\ &= \textstyle\int_M \phi'(d(p, y))\rho_n(d(y, x))\tau_x^y(\nabla d_p(y)) dy + \psi\left(\frac{1}{n} \mid \phi, M, \Omega\right) \end{aligned}$$

である．これより

$$\|\nabla \phi_{p,n}\| \leq \phi' \circ d_p(x) + \psi\left(\frac{1}{n} \mid \phi, M, \Omega\right)$$

が成り立つ．ここで，τ_x^y は y から x への最短測地線に沿っての平行移動であり，$\psi(\frac{1}{n} \mid \phi, M, \Omega)$ は与えられた ϕ, M, Ω に対し，$n \to \infty$ のとき $\psi(\frac{1}{n} \mid \phi, M, \Omega) \to 0$ を意味する．

さらに，M のリッチ曲率が $\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ をみたせば，任意の $\epsilon > 0$ に対して n を十分大に取るとき

$$\Delta\phi_{p,n} \geq \Delta_{M_k^m}(\phi \circ r)|_{r=d(p,x)} - \epsilon$$

もみたす．ただし，$r := d_{\bar{p}}$ は M_k^m での距離関数である．実際，$x \in \Omega$ で上の不等式を示すのに，$t \downarrow 0$ のとき p の切断跡の補集合に収束するコンパクト領域の増大列 C_t を取る．x の十分小さな近傍にコンパクトな台を持つ任意の滑らかな非負関数 $f(f \leq 1)$ に対して，n を十分大に取れば

$$\begin{aligned}
&v_0^m(1)\textstyle\int_M \Delta\phi_{p,n} f d\nu_g = v_0^m(1)\int_M \phi_{p,n}\Delta f d\nu_g\\
&\quad= \textstyle\int\int \phi(d(p,y))\rho_n(d(x,y))\Delta_x f dxdy\\
&\quad= \textstyle\int \phi(d_p(y))dy \int \Delta_x(\rho_n \circ d_y) f(x)dx\\
&\quad= \textstyle\int f(x)dx \int \phi(d_p(y))\Delta_y(\rho_n \circ d_x)dy + \psi(\frac{1}{n} \mid \phi, M, \Omega)\\
&\quad= \textstyle\int f(x)dx \int \langle \nabla_y(\phi \circ d_p), \nabla_y(\rho_n \circ d_x)\rangle dy + \psi(\frac{1}{n} \mid \phi, M, \Omega)\\
&\quad= \textstyle\lim_{t\to 0}\int_M f(x)dx \int_{C_t} \Delta_y(\phi \circ d_p)\cdot \rho_n \circ d_x dy\\
&\qquad+ \textstyle\lim_{t\to 0}\int_M f(x)dx \int_{\partial C_t} \phi'(d_p(y))\rho_n \circ d_x dy + \psi(\frac{1}{n} \mid \phi, M, \Omega)\\
&\quad\geq \textstyle\int f(x)dx \int \Delta_{M_k^m}(\phi \circ r)|_{r=d(p,x)}\rho_n \circ d_x dy + \psi(\frac{1}{n} \mid \phi, M, \Omega)\\
&\quad= v_0^m(1)\Delta_{M_k^m}(\phi \circ r)|_{r=d(p,x)} \textstyle\int_M f(x)dx + \psi(\frac{1}{n} \mid \phi, M, \Omega).
\end{aligned}$$

したがって，定理 2.12 (1) は「$0 \leq t \leq i(u)$」で成り立ち，(2) の「d_p が Ω で滑らか」という仮定は以下の議論で省いてよい．

再び最大値原理に戻り，以下その応用例としてアブレッシュ・グロモールによるエクセス評価（[AbrGr], [C 4] も参照）を挙げておこう．まず，次の準備から始める．

補題 2.15. モデル空間 M_k^m 上で $r := d_p$ を点 p からの距離関数とし，$R > 0$, $b > 0$ を与える．このとき，滑らかな関数 $G : (0, R] \to (0, \infty)$ で、次の (i) - (iv) をみたすものがただひとつ存在する：

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & G > 0 \quad (0 < r < R), & \text{(ii)} & G' < 0 \quad (0 < r < R),\\
\text{(iii)} & G(R) = 0,\ G'(R) = 0, & \text{(iv)} & \Delta_{M_k^m}(G \circ r) + b = 0.
\end{array}$$

証明. これを見るのに，まず方程式 (iv) は

$$G'' + (m-1)\frac{c_k(r)}{s_k(r)}G' = b \quad (c_k(r) := s_k'(r))$$

と同値であることに注意する．これを境界条件 (iii); $G(R) = G'(R) = 0$ の下で解いて，次式で与えられる一意な解を得る：

$$G(r) = b\int_r^R dt \int_t^R \frac{s_k(s)^{m-1}}{s_k(t)^{m-1}}ds = b\int\int_{r \leq t < s \leq R} \frac{s_k(s)^{m-1}}{s_k(t)^{m-1}}dsdt, \tag{2.19}$$

これが (i), (ii) をみたすことは明らかである． □

補題 2.16. m 次元完備リーマン多様体 M^m は $\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ をみたすものとする．$\eta > 0$ に対して，$u : B_{R+\eta}(p) \to \boldsymbol{R}$ を次をみたすリプシッツ関数とする：

(i) $u \geq 0$.

(ii) $u(p_0)=0$ がある $p_0 \in \bar{B}_R(p)$ に対して成立する.
(iii) $\operatorname{dil} u\,(:= \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)}) \leq a$.
(iv) 一般のバリアの意味で $\Delta u \geq -b$.
このとき, $0<c<R$ に対して $u(p) \leq ac + G(c)$ が成り立つ.

証明. 任意に小さくできる $\epsilon > 0$ に対して, R の代わりに $R+\epsilon$ から定まる G に対して主張を示せば十分である. これを矛盾により示す. すなわち, ある $0<c<R$ に対して $u(p) \geq ac + G(c) > ac$ と仮定する. このとき, $x \in \partial B_c(p)$ に対して (iii) より $u(x) \geq u(p) - ac \geq G(c)$, すなわち $u|\partial B_c(p) \geq (G\circ r)|\partial B_c(p)$ が成り立つ. ここで, $r = d_p$ と置いた. 他方 (i) と G の性質 (iii) から, $u|\partial B_{R+\epsilon}(p) \geq 0 = (G\circ r)|\partial B_{R+\epsilon}(p)$ である. まとめて,

$$(G\circ r - u)|\partial B_c(p) \leq 0, \quad (G\circ r - u)|\partial B_{R+\epsilon}(p) \leq 0$$

が成り立つ. 次に, (ii) と G の性質 (i) より $(G\circ r - u)(p_0) > 0$ である. もし, $d(p,p_0) \leq c$ なら (iii) より $u(p) \leq ac$ で矛盾を得るから, $p_0 \in A := B_{R+\epsilon}(p)\setminus \bar{B}_c(p)$ である. よって, $(G\circ r - u)|\bar{A}$ は内点 $q \in A$ で (狭義) 最大値を取る. 他方, (2.17) と (iv) から $\Delta(G\circ r - u) \leq -b+b = 0$ が成り立つから, $G\circ r - u$ は劣調和関数であり, q を含む A の連結成分上で最大値原理に矛盾する. □

さて, $p,q \in M$ に対してエクセス関数 $E := e_{p,q}$ を

$$E(x) = d(p,x) + d(q,x) - d(p,q) \tag{2.20}$$

で与える. 次はエクセス関数の基本的な性質である.

補題 2.17. M は m 次元完備リーマン多様体で $\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ をみたすとする. エクセス関数 E は次をみたす.

(i) $E(x) \geq 0$.
(ii) $E|\gamma \equiv 0$ が任意の $\gamma \in \min(p,q)$ に対して成り立つ.
(iii) $\operatorname{dil} E \leq 2$.
(iv) $\Delta E \geq -(m-1)(\frac{c_k}{s_k}(s_1) + \frac{c_k}{s_k}(s_2)) \geq -2(m-1)\frac{c_k}{s_k}(s)$, ただし, $s_1(x) := d(x,p), s_2(x) := d(x,q), \quad s(x) := \min(s_1(x), s_2(x))$ と置いた.

証明. (i) – (iii) は明らか. (iv) を見る. リッチ曲率の仮定の下で $\Delta r \geq \Delta_{M_k^m} r$ であった. 定理 2.12 から

$$\Delta E \geq \Delta_{M_k^m}(d_{\bar{p}} + d_{\bar{q}}) = -(m-1)\left(\frac{c_k\circ d_{\bar{p}}}{s_k\circ d_{\bar{p}}} + \frac{c_k\circ d_{\bar{q}}}{s_k\circ d_{\bar{q}}}\right).$$

ここで, $s \to c_k(s)/s_k(s)$ が単調非増加関数であることに注意して定理の主張がでる. □

さて, $h(x) := \min_{\gamma\in\min(p,q)} d(x,\gamma)$ と置く. もし, $h(x)=0$ なら $E(x)=0$ であり, 3 角不等式から $E(x) \leq 2h(x)$ が成り立つ. アブレッシュ・グロモール ([AbGr], [C 4]) は, リッチ曲率が下から押さえられた多様体で $h(x)/s(x)$ が小さいとき, この不等式を改良したエクセス関数の評価を与え, 非負リッチ曲率の多様体の構造を調べるのに用い

た．方法は上の補助関数とラプラシアン比較定理，最大値原理を用いる．この考え方は §5, §6 でも重要である．

命題 2.18. $\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ とすれば次が成り立つ．

$$E(x) \leq 2c + G(c) \quad (0 < \forall c < h(x)). \tag{2.21}$$

ここで，G は補題 *2.1* で $R = h(x)$ かつ $b := 2(m-1)c_k(s_0)/s_k(s_0)$ として定義されたものである．ただし，$s_0 := \min\{s(y) \mid y \in \bar{B}_{R+\eta}(x)\}$ と置いた．さらに，もし $h(x) < s(x)/2$ が成り立ち，$k \leq 0$ かつ $m \geq 2$ ならば

$$E(x) < 8\left(\frac{h(x)^m}{s(x)}\right)^{\frac{1}{m-1}} = 8\left(\frac{h(x)}{s(x)}\right)^{\frac{1}{m-1}} h(x). \tag{2.22}$$

証明. $\eta > 0$ を十分小に取り，$s_0 > s(x)/2$ としてよい．補題 2.16 を $u := E, R := h(x), a := 2$ として，また b は上のとおりとして適用する．すると，x から γ に下ろした垂線の足は E の零点で，$B_{R+\eta}(x)$ に含まれる．このとき，(2.21) は補題 2.16 からしたがう．(2.22) を $k=0$, $m>2$ の場合に示す．このときは $b = 2(m-1)/s_0$ で，(2.19) から

$$G(c) = \frac{m-1}{ms_0}\left\{c^2 + \frac{2}{m-2}R^m c^{2-m} - \frac{m}{m-2}R^2\right\}.$$

再び，補題 2.16 を $c := (\frac{2h^m}{s})^{1/(m-1)}(x)$ と置いて E に適用する．$h(x) < s(x)/2$ より $c < R$ だから

$$\begin{aligned} E(x) &\leq 2c + G(c) < 2c + \tfrac{2(m-1)}{m(m-2)s_0}R^m c^{2-m} \\ &< 2c + \tfrac{4(m-1)}{m(m-2)}\tfrac{h(x)^m}{s(x)}c^{2-m} \\ &= 2c + \tfrac{2(m-1)}{m(m-2)}c^{m-1}c^{2-m} < 4c < 8\left(\tfrac{h(x)^m}{s(x)}\right)^{\frac{1}{m-1}} \end{aligned}$$

で証明が終わる． □

系 2.19. M^m は $\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ をみたす完備リーマン多様体とする．正値連続関数 $\kappa : [0,\infty] \to [0,\infty]$ で，$t \downarrow 0$ のとき $\kappa(t) \downarrow 0$ をみたすものが存在して，任意の $a, b, c \in M$ と $\gamma \in \min(b,c)$ に対して

$$d(a,b) + d(a,c) - d(b,c) \leq \kappa\left(\frac{d(a,\gamma)}{\min\{d(a,b), d(a,c)\}}\right) d(a,\gamma) \tag{2.23}$$

と書ける．

注意 2.20. (1) M が非負断面曲率の完備リーマン多様体の場合は，トポノゴフの比較定理を用いてエクセス関数に対してもっと良い評価が得られる: すなわち，$E(x) \leq 2h(x)\frac{h(x)}{s(x)}$ が成り立つ．

(2) エクセス関数に対する最大値原理と同様にして示されるもので，*P.* ペーターセン ([P 2]) により与えられたものを挙げておく：M^m は完備で $\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ をみたすとし，$\epsilon, a > 0$, $p > m/2$ を与える．このとき，$c = c(\epsilon, m, k, p, a) > 0$ が存在して，$u : B_R(p; M) \to [0,\infty]$ が

$$u(p) \leq c\,G(R/2), \quad \|\nabla u\| \leq a, \quad \Delta u \geq \phi\,(\text{ただし，}\|\phi\|_p \leq c)$$

をみたせば，$\sup_{B_R(p)} u \leq \epsilon$ が成り立つ．ただし，G は補題 *2.15* で $k=0$, $b=1$ として与えられたものである．

次に, リッチ曲率が下から押さえられている場合に，ディリクレ境界条件に関する距離球のラプラシアンの第 1 固有値の下からの評価について述べる．M^m はコンパクト境界付リーマン多様体（境界が空でもよい）で，そのリッチ曲率が

$$\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)k \qquad (k \geq 0)$$

をみたすとする．$p_0 \in M$, $R>0$ とし，$d(p_0, \partial M) \geq 5R$ ($\partial M = \emptyset$ ならば $d(M) \geq 2R$) と仮定する．次はリィ・シェーンによる ([LiSc], [LiY] 参照).

定理 2.21. 上の仮定のもとで $B_R(p_0)$ のディリクレ境界条件に関するラプラシアンの第 1 固有値は次をみたす：

$$\lambda_1(B_R(p_0)) \geq (2R)^{-2}(1+\sqrt{k}R)^2 \exp(-4m(1+\sqrt{k}R)). \tag{2.24}$$

証明. まず, $B_R(p_0)$ 上定義されその境界で零となる任意の滑らかな関数 ϕ に対して，次のポアンカレ不等式を示す：

$$\int_{B_R(p_0)} |\phi| d\nu_g \leq c_1 \int_{B_R(p_0)} \|\nabla \phi\| d\nu_g. \tag{2.25}$$

ただし， $c_1 := R(1+\sqrt{k}R)^{-1}\exp(2m(1+\sqrt{k}R))$ と置いた．

$p_1 \in \partial B_{2R}(p_0)$ を選び（仮定からこの集合は空でない), $r := d_{p_1}$ と置く．ラプラシアンの比較定理から，バリアの意味で

$$-\Delta r \leq (m-1)\frac{c_{-k}(r)}{s_{-k}(r)} \leq (m-1)\{\sqrt{k}+1/r\}$$

である．また，$B_{3R}(p_1) \cap \partial M = \emptyset$ と $B_R(p_0) \subset B_{3R}(p_1) \setminus B_R(p_1)$ に注意する．このとき，任意の $\alpha > 0$ に対して，$B_R(p_0)$ 上 a.e. で $\|\nabla r\| = 1$ に注意して

$$\begin{aligned}\Delta \exp(-\alpha r) &= -\alpha \exp(-\alpha r)(\Delta r + \alpha)\\ &\leq \alpha \exp(-\alpha r)\{(m-1)(1/R+\sqrt{k}) - \alpha\}\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\alpha := m(\sqrt{k}+1/R)$ と置けば，$B_R(p_0)$ 上 a.e. で

$$\Delta \exp(-\alpha r) \leq -\alpha \exp(-3\alpha R)(\sqrt{k}+1/R)$$

である．この両辺に $|\phi|$ を掛けて $B_R(p_0)$ 上積分する．グリーンの公式とコーシー・シュワルツの不等式を用いて，再び $\|\nabla r\| = 1$ に注意すれば

$$\alpha(\sqrt{k}+1/R)\exp(-3\alpha R)\int_{B_R(p_0)} |\phi| d\nu_g \leq \alpha \int_{B_R(p_0)} \exp(-\alpha r)\|\nabla \phi\| d\nu_g$$

を得る． $B_R(p_0)$ 上では $\exp(-\alpha r) \leq \exp(-\alpha R)$ だから，上の不等式から容易にポアンカレ不等式 (2.25) が従う.

さて，ポアンカレ不等式で $|\phi|$ を ϕ^2 で置き換えて，コーシー・シュワルツの不等式を用いれば

$$\begin{aligned}\int_{B_R(p_0)} \phi^2 d\nu_g &\le 2c_1 \int_{B_R(p_0)} |\phi| \cdot \|\nabla\phi\| d\nu_g \\ &\le 2c_1 \left\{ \int_{B_R(p_0)} |\phi|^2 d\nu_g \right\}^{1/2} \left\{ \int_{B_R(p_0)} \|\nabla\phi\|^2 d\nu_g \right\}^{1/2}\end{aligned}$$

で，これよりレイリー商を考えることにより定理は容易に示される． □

注意 2.22. (1) リッチ曲率が下から押さえられたリーマン多様体のラプラシアンの固有値評価については多くが知られている．$\mathrm{Ric}_M \ge (m-1)k$ をみたすコンパクト m 次元リーマン多様体 M に対して，正の第 i 固有値 $\lambda_i(M)$ の上からの評価については *S. Y.* チェンによる

$$\lambda_i(M) \le \lambda_1 \left(B_{\frac{d(M)}{2i}}(o; M_k^m) \right)$$

がある．ここで，右辺はモデル空間の距離球でのディィリクレ境界条件に関するラプラシアンの第 1 個有値である．$\lambda_1(M)$ の下からの評価については，*S.* ギャロの等周不等式による評価

$$\lambda_1(M) \ge \frac{1}{4} \left\{ \int_0^{\frac{d(M)}{2}} c_k^{m-1}(t)\, dt \right\}^{-2}$$

やリィ・ヤウの勾配評価による（ $k \le 0$ の場合の）

$$\lambda_1(M) \ge \frac{\pi^2}{d^2(M)} \exp(-C_m \sqrt{(m-1)|k|}d(M))$$

等がある．ただし，$C_m := \max\{\sqrt{2}, \sqrt{m-1}\}$ である．

また，距離球のディィリクレ境界条件に関する第 1 個有値の上からの評価については，*S. Y.* チェンによる

$$\lambda_1(B_r(p)) \le \lambda_1 (B_r(o; M_k^m)); \quad 0 < r < i_p(M)$$

が知られている（詳しくは [Cha 1], [Che], [Ga 1], [Kas 1], [LiTr], [LiY] 等を参照されたい）．

(2) 上の定理の証明の手法で次も分かる：$p \in M^m, q \in \partial B_{2R}(p)$ であるとし，$\bar{B}_{4R}(p)$ 上 $\mathrm{Ric}_M \ge -(m-1)k$ $(k \ge 0)$ が成立するとする．このとき，正定数 $c(m,k,R)$ と $\bar{B}_R(p)$ 上の関数 H を

$$\Delta H + 1 < 0, \quad 0 < H \le c(m,k,R), \quad H \le -c(m,k,R)\Delta H \tag{2.26}$$

をみたすように取ることができる．実際，$r := d_q$ と置くと，ラプラシアンの比較定理から $\bar{B}_R(p)$ 上で

$$\Delta r \ge -(m-1)\frac{c_{-k}}{s_{-k}} \circ r \ge -(m-1)\sqrt{k}\coth 3\sqrt{k}R =: -C_1.$$

$\alpha > 0$ に対して $\exp(-\alpha r)$ のラプラシアンを考えると

$$\Delta \exp(-\alpha r) = -\alpha \exp(-\alpha r)(\Delta r + \alpha) \le \alpha(C_1 - \alpha)\exp(-\alpha r).$$

そこで $\alpha = 2C_1$ と取ると，$\bar{B}_R(p)$ 上で

$$\Delta \exp(-2C_1 r) \le -2C_1^2 \exp(-2C_1 r) < -2C_1^2 \exp(-6C_1 R) =: -C_2.$$

よって，$H := \exp(-2C_1 r)/C_2$ と取れば良い．

2.3. まず，リーマン多様体 M 上の滑らかな関数 f の勾配ベクトル，ヘッシアン，ラプラシアンとリッチ曲率に関するボホナーの公式を復習しよう：

$$-\frac{1}{2}\Delta\|\nabla f\|^2 = \|D^2 f\|^2 + \mathrm{Ric}_M(\nabla f, \nabla f) - \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle. \tag{2.27}$$

ここで，$\nabla f, D^2 f, \Delta f$ はそれぞれ，f の勾配ベクトル，ヘッシアン，ラプラシアンを表した．この公式は，共変微分の順序を変えると曲率テンソルが現れるというテンソル解析における典型的な方法により示され（今の場合は縮約するのでリッチ曲率が現れる），どんな滑らかな関数 f に対しても適用される（演習として計算を実行してみるとよい）．一見形式的に見えるが，f が幾何学的に意味がある関数の場合，この公式は非常に有用である．例として，よく知られたリヒネロビッツ・小畠の定理を挙げよう：

定理 2.23. M を $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ をみたす m 次元完備リーマン多様体，$\lambda_1(M)$ を関数に作用するラプラシアンの（正）の第 1 固有値とする．このとき，$\lambda_1(M) \geq m$ であり，等号成立は M が半径 1 の球面に等長的，かつそのときに限る．

これを見るのに，ボホナーの公式 (2.27) を固有値 $\lambda_1 := \lambda_1(M)$ に対するラプラシアンの固有関数 f に適用する．次の分解

$$\|D^2 f\|^2 = \left\|D^2 f + \frac{\Delta f}{m} g\right\|^2 + \frac{(\Delta f)^2}{m}$$

が成り立つから

$$-\frac{1}{2}\Delta\|\nabla f\|^2 \geq \left\|D^2 f + \frac{\lambda_1 f}{m} g\right\|^2 + \frac{\lambda_1^2}{m} f^2 + \{(m-1) - \lambda_1\}\|\nabla f\|^2$$

を得る．この不等式の両辺を M 上積分して，グリーンの定理と

$$\lambda_1 = \int_M \|\nabla f\|^2 d\nu_g \Big/ \int_M f^2 d\nu_g$$

に注意して求める不等式を得る．等号成立のときは，f のヘッシアンは $D^2 f = -fg$ をみたし，これより M は $S^m(1)$ に等長的であることが分かる． □

ボホナーの公式を用いる結果で，後から必要になるものを幾つか挙げる．M 上の関数 f は $\Delta f = 0$ をみたすとき，調和関数と呼ばれた．まず，リッチ曲率が下から押さえられた完備リーマン多様体 M^m 上の調和関数に対する，リィ・ヤウ等による勾配評価について述べる．次の定理と証明は [SchY 2] を参考にした．

定理 2.24. M を $\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)k$ をみたす m 次元完備リーマン多様体とする（ただし，$m \geq 2, k \geq 0$）．u を M 上の正値調和関数とす

ると，$p \in M, a > 0$ に対して

$$(2.28) \qquad \frac{\|\nabla u\|}{u} \leq C(m)\frac{1+a\sqrt{k}}{a} \qquad (B_{a/2}(p)\text{ 上で})$$

が成り立つ．ここで，$C(m)$ は次元 m のみに依存する正定数である．

証明．$\nabla u(x) \neq 0, x \in B_a(p)$ と仮定してよい．まず，次に注意する：

$$(2.29) \qquad -\|\nabla u\|\Delta(\|\nabla u\|) + (m-1)k\|\nabla u\|^2 \geq \frac{1}{m-1}\|\nabla(\|\nabla u\|)\|^2.$$

実際，(2.27) を u に適用して，リッチ曲率に関する仮定から

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2}\Delta\|\nabla u\|^2 &= -\Delta(\|\nabla u\|)\|\nabla u\| + \langle \nabla\|\nabla u\|, \nabla\|\nabla u\|\rangle \\ &\geq \|D^2u\|^2 - (m-1)k\|\nabla u\|^2\end{aligned}$$

を得る．他方，$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$, $\sum_{i=1}^m x_i^2 = 1$ ならば，

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \geq \frac{m}{m-1}\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 x_i^2$$

が成り立つことに注意しよう ($\sum \lambda_i = 0$, $\sum \lambda_i^2 = 1$ の下で，λ_1^2 の最大値は $\frac{m-1}{m}$ であった)．特に，$\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ をヘッシアン $D^2u(x)$ の固有値，$\{e_i\}$ は λ_i に対する固有ベクトルからなる T_xM の o.n.b., $x_i := \langle e_i, \nabla u/\|\nabla u\|\rangle$ として適用する．定義より，$\sum \lambda_i = 0$ かつ $\|D^2u(x)\| = \sum \lambda_i^2$ であった．そこで

$$\|\nabla(\|\nabla u\|)\|^2 = \sum_i (e_i(\|\nabla u\|))^2 = \sum_i (D^2u(e_i, \nabla u/\|\nabla u\|))^2$$

に注意して，上の不等式から $\|D^2u\|^2 \geq \frac{m}{m-1}\|\nabla(\|\nabla u\|)\|^2$ を得る．これらの不等式を合わせて (2.29) が得られる．

次に，$\phi := \|\nabla u\|/u$ と置いて

$$(2.30) \qquad \Delta\phi \leq (m-1)k\phi + (2 - \frac{2}{m-1})\frac{\langle\nabla\phi, \nabla u\rangle}{u} - \frac{1}{m-1}\phi^3.$$

を示す．実際，まず

$$\nabla\|\nabla u\| = u\nabla\phi + \phi\nabla u, \quad \Delta\|\nabla u\| = u\Delta\phi - 2\langle\nabla\phi, \nabla u\rangle$$

に注意する．このとき，(2.29) より

$$\begin{aligned}&(m-1)k\|\nabla u\|^2 - \tfrac{1}{m-1}\|\nabla(\|\nabla u\|)\|^2 \geq \|\nabla u\|\Delta(\|\nabla u\|) \\ &= u\Delta\phi \cdot \|\nabla u\| - 2\langle\nabla\phi, \nabla u\rangle\|\nabla u\|.\end{aligned}$$

ここで，$\|\nabla(\|\nabla u\|)\|^2 \geq \phi^2\|\nabla u\|^2 + 2\phi u\langle\nabla\phi, \nabla u\rangle$ に注意して整理すれば，求める不等式 (2.30) を得る．

さて，$r := d_p$ は p からの距離関数とし，$\bar{B}_a(p)$ 上で $F(x) := (a^2 - r(x)^2)\phi(x)$ と置く．$F|\partial B_a \equiv 0$ であるから，F は最大値を内点 $x_0 \in B_a(p)$ で取る．このとき，x_0 で

$$(*) \quad \frac{1}{m-1}F^2 - 2C_1aF - C_2(1+\sqrt{k}a)^2a^2 \leq 0$$

が成り立つ．ただし，C_1, C_2 は m に依存する正定数である．これを見るのに，x_0 は p の切断点でないとしてよい（切断点の場合は先の近似の手法を用いよ）．まず，x_0 で

(2.31)

$$\begin{cases} 0 = \nabla F = \phi\nabla(a^2 - r^2) + (a^2 - r^2)\nabla\phi, \\ 0 \le \Delta F = \phi\Delta(a^2 - r^2) + (a^2 - r^2)\Delta\phi - 2\langle\nabla(a^2 - r^2), \nabla\phi\rangle \end{cases}$$

が成り立つことに注意しよう．次に，距離関数のラプラシアンの比較定理より（例えば $C = 2m$ として）

$$\begin{aligned}\Delta r^2 &= 2r\Delta r - 2\|\nabla r\|^2 \\ &\ge -2 - 2(m-1)r\tfrac{c_{-k}\circ r}{s_{-k}\circ r} \ge -2 - 2(m-1)(1+\sqrt{k}r) \\ &\ge -C(1+\sqrt{k}r)\end{aligned}$$

を得る．よって，(2.30), (2.31) から $r \le a$ に注意して

$$\begin{aligned}&(m-1)k\phi + (2 - \tfrac{2}{m-1})\tfrac{\langle\nabla\phi, \nabla u\rangle}{u} - \tfrac{1}{m-1}\phi^3 \ge \Delta\phi \\ &\ge \tfrac{1}{a^2-r^2}\{-\phi\Delta(a^2-r^2) + 2\langle\nabla(a^2-r^2), \nabla\phi\rangle\} \\ &= \tfrac{1}{a^2-r^2}\{\phi\Delta r^2 - \tfrac{2\phi}{a^2-r^2}\langle\nabla r^2, \nabla r^2\rangle\} \\ &\ge -\tfrac{\phi}{a^2-r^2}\{C(1+\sqrt{k}a) + \tfrac{8a^2}{a^2-r^2}\}.\end{aligned}$$

ここで，(2.31) とコーシー・シュワルツの不等式から

$$(a^2 - r^2)\frac{\langle\nabla\phi, \nabla u\rangle}{u} = \phi\frac{\langle\nabla r^2, \nabla u\rangle}{u} \le 2\phi^2 r \le 2\phi^2 a$$

が成り立つ． 上の不等式を整理して， $r < a$, $a^2/(a^2 - r^2) > 1$ に注意すれば，点 x_0 で

$$\frac{F^2}{m-1} - 2(2 - \frac{2}{m-1})aF - \{(m-1)ka^2 + C(1+\sqrt{k}a) + 8\}a^2 \le 0$$

を得るから，求める不等式 $(*)$ が証明された．これより，

$$F(x_0) = \sup_{B_a(p)} F \le C'(m)a(1+\sqrt{k}a)$$

である．特に， $B_{a/2}(p)$ 上で

$$\frac{3a^2}{4}\sup_{B_{a/2}(p)} \phi \le C'(m)a(1+\sqrt{k}a)$$

が成立し、勾配評価の証明が完了した． □

系 2.25. M は m 次元完備リーマン多様体で $\mathrm{Ric}_M \ge -(m-1)k$, $k \ge 0$ をみたすとする．u を M の距離球 $B_a(p)$ 上の調和関数とすれば次が成り立つ：

$$\sup_{B_{a/2}(p)} \|\nabla u\| \le C(m)\left(\frac{1+\sqrt{k}a}{a}\right)\sup_{B_a(p)} |u|. \tag{2.32}$$

証明. 定理を $v := u + \sup_{B_a(p)}|u| + \epsilon$ に適用して $\epsilon \to 0$ とすればよい． □

これより特に，非負リッチ曲率の完備リーマン多様体上では正値（または有界な）調和関数は定数であることが分かる．また，計量のスケーリングを変えることにより次を得る：

系 2.26. $\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)kR^{-2}$ $(k \geq 0)$ であるとし，$u : B_{2R}(p) \to \boldsymbol{R}$ を調和関数とすれば，次が成り立つ：

$$\sup_{B_R(p)} \|\nabla u\| \leq \frac{C(m,k)}{R} \sup_{B_{2R}(p)} |u|. \tag{2.33}$$

系 2.27 (ハルナックの不等式). M は $\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)k$ $(k \geq 0)$ をみたす m 次元完備リーマン多様体とする．u を M の距離球 $B_a(p)$ 上の正値調和関数とする．このとき，次が成り立つ：

$$\sup_{B_{a/4}(p)} u \leq C(m,a,k) \inf_{B_{a/4}(p)} u. \tag{2.34}$$

証明. 任意の $y_i \in B_{a/4}(p)$, $i = 1,2$ に対して，y_1 から y_2 への弧長を径数とする最短測地線 $\gamma : [0,l] \to M$ は3角不等式より $B_{a/2}(p)$ に含まれる．定理より，$B_{a/2}(p)$ 上で $\|\nabla u\|/u \leq C(m,a,k)$ であるから

$$\log \frac{u(y_2)}{u(y_1)} = \int_0^l \frac{d}{dt} \log u(\gamma(t)) dt \leq \int_0^l \frac{\|\nabla u(\gamma(t))\|}{u(\gamma(t))} dt \leq C(m,a,k)\frac{a}{2}$$

が成り立ち，主張がしたがう． □

注意 2.28. (1) 上では，調和関数の勾配評価について述べたが，ラプラシアンの固有関数やより一般の楕円型偏微分方程式の解に対してもヤウ達による勾配評価がある：例えば，$\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ をみたすリーマン多様体 M^m のコンパクト領域 $\Omega \subset M$ で，ディリクレ（或いはノイマン）境界条件をみたす方程式 $\Delta u = F(u)$ の解を u とする．このとき，u の勾配のノルム $\|\nabla u\|$ を $m, k, u, F(u)$ とその導関数 $F'(u)$ の値を用いて評価することができる（[LiY] を参照）．

(2) *P.* ペーターセンはコンパクト・リーマン多様体 M のラプラシアンの固有値 λ の固有関数 f に対して次の形の勾配評価を与えた（[P 2]): $\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)k$ とすると

$$|\nabla f(x)| \leq C(k,m,d(M),\lambda)\|f\|_2$$

が成り立つ．証明はボホナーの公式，加藤の不等式を用いて反復法による（[Be 2] も参照されたい）．

次に，$\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)$ をみたす完備リーマン多様体 M^m の距離球 $B_R(p)$ 上のカットオフ関数 ϕ で，次元 m と R のみに依存する正定数 $c(m,R)$ による一様な評価 $\|\nabla\phi\|$, $|\Delta\phi| \leq c(m,R)$ をみたすものが構成できることを示す．これは，チーガー・コールディング（[CCo 3]）によるが，例えば，以下の距離球上で調和関数のヘッシアンの L^2 評価を行うときに有用である．

定理 2.29. 与えられた $R > 0$ に対して，次をみたす定数 $c(m,R) > 0$ が存在する：M は $\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)$ なる m 次元完備リーマン多様体

で，$p \in M$ とする．このとき，次をみたす滑らかな関数 $\phi : M \to [0,1]$ を取ることができる．

$$\phi \mid B_{R/2}(p) \equiv 1, \quad \operatorname{supp} \phi \subset B_R(p), \tag{2.35}$$

$$\|\nabla \phi\|, \ |\Delta \phi| \leq c(m, R). \tag{2.36}$$

証明. 補題 2.15 ($k = -1$) で，$R > 0$ に対して $b = \delta(m, R) > 0$ を $G(R/2) = 1$ が成り立つように選ぶ．$G : (0, \infty) \to (0, \infty)$ は $(0, R]$ で狭義単調減少で $G(R/2) = 1, G(R) = 0$ であり，次の微分方程式

$$G''(r) + (m-1) \coth r \cdot G'(r) = \delta \tag{2.37}$$

をみたす．$r := d_p$ と置くと，ラプラシアンの比較定理（定理 2.12）から

$$\Delta(G \circ r) \leq -G''(r) - (m-1) \coth r \, G'(r) = -\delta$$

である．いま，関数 $k : \bar{B}_R(p) \setminus B_{R/2}(p) \to \boldsymbol{R}$ で，条件

$$\Delta k + \delta \equiv 0, \quad k \mid \partial B_{R/2}(p) \equiv 1, \quad k \mid \partial B_R(p) \equiv 0$$

によって定まるものを取れば，$\Delta(G \circ r - k) \leq 0$ が成り立つから，最大値原理によって

$$0 \leq G \circ r(x) \leq k(x) \qquad (\bar{B}_R(p) \setminus B_{R/2}(p) \text{ 上で}) \tag{2.38}$$

である．他方，補題 2.15 と同様に

$$K(s) := \int_0^s dt \int_0^t \frac{(\sinh u)^{m-1}}{(\sinh t)^{m-1}} du$$

と置く．$K : [0, \infty) \to [0, \infty)$ は狭義単調増加関数で，$K(0) = K'(0) = 0$ であり

$$K''(s) + (m-1) \coth s \cdot K'(s) = 1 \tag{2.39}$$

をみたす．さて，$s := d_x$, $x \in B_R(p) \setminus B_{R/2}(p)$ と置けば，再びラプラシアンの評価（定理 2.12）により $\Delta(K \circ s) \geq -1$ であり，これより $\Delta(k - \delta K \circ s) \leq 0$ を得る．また，$\partial B_R(p)$ 上で $k - \delta K \circ s < 0$ が成り立ち，$(k - \delta K \circ s)(x) = k(x) \geq 0$ である．よって，最大値原理から $k - \delta K \circ s$ は最大値を $\partial B_{\frac{R}{2}}(p)$ で取り，$s(y) \geq r(x) - R/2$ $(y \in \partial B_{R/2}(p))$ に注意すれば，次が成り立つ．

$$1 - \delta K(r(x) - R/2) \geq k(x). \tag{2.40}$$

さて，$1 = G(R/2) > 1 - \delta K(R/2)$ より，$\frac{1}{3} > \eta = \eta(m, R) > 0$ を選んで

$$G(R(1+\eta)/2) > 1 - \delta K((1-\eta)R - R/2)$$

をみたすようにできる．すると，(2.38) と (2.40) より

$$\begin{cases} G(R(1+\eta)/2) \leq k(x) < 1 & ; \quad x \in B_{(1+\eta)R/2}(p) \setminus B_{R/2}(p), \\ 0 \leq k(x) \leq 1 - \delta K((1-\eta)R - R/2) & ; \quad x \in B_R(p) \setminus B_{(1-\eta)R}(p) \end{cases}$$

が成り立つ．そこで，滑らかな関数 $\psi : [0,1] \to [0,1]$ を

$$\psi \mid [G(R/2 + \eta), 1] \equiv 1, \quad \psi \mid [0, 1 - \delta K((1-\eta)R - R/2)] \equiv 0$$

をみたすように選び，

$$(2.41)\qquad \phi := \begin{cases} \psi \circ k; & \bar{B}_R(p) \setminus B_{R/2}(p) \text{ 上で} \\ 1; & B_{R/2}(p) \text{ 上で} \end{cases}$$

と置く．明らかに，$\operatorname{supp}\phi \subset B_R(p)$ で，$\operatorname{supp}\nabla\phi, \operatorname{supp}\Delta\phi$ は $\bar{B}_{(1-\eta)R}(p) \setminus B_{R(1+\eta)/2}(p)$ に含まれる．さらに，$\bar{B}_R(p) \setminus B_{R/2}(p)$ 上で

$$\nabla\phi = \psi'\nabla k, \quad \Delta\phi = -\psi''\|\nabla k\|^2 + \psi'\delta,$$

が成り立つ．このとき，定理の主張はリィ・ヤウの勾配評価 ([LiY]，注意 2.28 (1) 参照) を k に適用すれことによって得られる．　□

次に，定理 2.29 の応用として，やはりコールディングによる調和関数のヘッシアンの L^2–ノルムの評価を与えよう ([Co 3])．

命題 2.30. $\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)k,\ k \geq 0$ と仮定する．u を $B_4(p)$ 上定義された調和関数とし，$c_1 := \sup_{S_4(p)} |u| = \sup_{B_4(p)} |u|$ と置く．このとき次が成り立つ

$$(2.42)\qquad \|D^2u\|^2_{2,B_1(p)} \left(:= \frac{1}{\mathrm{vol}\, B_1(p)} \int_{B_1(p)} \|D^2u\|^2 d\nu_g\right) \leq C(m,k)c_1^2.$$

証明．勾配評価により，$B_2(p)$ 上で $\|\nabla u\|^2 \leq \bar{C}(m,k)c_1^2$ である．他方，ボホナーの公式とリッチ曲率に関する仮定より

$$(2.43)\qquad \|D^2u\|^2 \leq -\frac{1}{2}\Delta\|\nabla u\|^2 + (m-1)k\|\nabla u\|^2$$

を得る．いま，$\phi : [0,\infty) \to [0,1]$ を定理 2.29 で与えられた，$\operatorname{supp}\phi \subset B_2(p), \phi \mid B_1(p) \equiv 1$ かつ $\|\nabla\phi\|, |\Delta\phi| \leq C_1(m,k)$ をみたすカットオフ関数とする．また，

$$-\phi\Delta\|\nabla u\|^2 = -\Delta\phi\|\nabla u\|^2 + \mathrm{div}\{\phi\nabla\|\nabla u\|^2 - \|\nabla u\|^2\nabla\phi\}$$

に注意する．(2.43) の両辺に $\phi \circ d_p$ を掛けて $B_2(p)$ 上積分して，グリーンの定理，勾配評価，ビショップ・グロモフの比較定理を用いれば

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1(p)} \|D^2u\|^2 d\nu_g \leq \int_{B_2(p)} \phi\|D^2u\|^2 d\nu_g \\
&\leq \int_{B_2(p)} \phi\left\{-\tfrac{1}{2}\Delta\|\nabla u\|^2 + (m-1)k\|\nabla u\|^2\right\} d\nu_g \\
&= \int_{B_2(p)} \|\nabla u\|^2 \left\{-\tfrac{1}{2}\Delta\phi + (m-1)k\right\} d\nu_g \\
&\leq \bar{C}c_1^2 \int_{B_2(p)} \left\{\tfrac{1}{2}|\Delta\phi| + (m-1)k\right\} d\nu_g \leq \bar{C}_1(m,k)c_1^2 \tfrac{v_k^m(2)}{v_k^m(1)} \mathrm{vol}\, B_1(p)
\end{aligned}$$

を得て，これより定理の主張が従う．　□

3. L^2 版トポノゴフ比較定理

この節では，T.H. コールディング ([Co 1,2]) による，リッチ曲率が下から押さえられた多様体に対するトポノゴフ比較定理の L^2 版について述べる．

まず，リッチ曲率が下から正定数 $m-1$ で押さえられた m 次元リーマン多様体 M の場合を考える．単位球面 S_1^m の場合，距離関数（の余弦）がラプラシアンの正の第 1 固有値 m の固有関数であることに注意

しよう．M の直径が π に近い場合には，距離関数（の余弦）を固有値が殆ど m に近いラプラシアンの固有関数で近似できることを示し，ボホナーの公式を用いてそのヘッシアンの挙動を L^2 ノルムを用いた積分不等式の形で与える．最後に，これを単位接束 UM (長さ一定の測地線の空間とみなして）上の積分不等式に転換して，距離関数に対する L^2 版比較定理（定理 3.1）を得る．この結果のリッチ曲率正の多様体への応用については §6 を参照されたい．

次に，リッチ曲率が非負の定数で下から押さえられている一般の場合を扱う．この場合は距離関数を局所的に調和関数で近似し，後は上と同様の方針で議論して，十分近い 2 点間の距離関数に関する L^2 版比較定理を得る．

3.1. リッチ曲率正の場合は，球面の距離関数と比較するが，まず記号を導入する．$f \in C^0(M), l > 0$ に対して $h_f(= h_{f,l}) \in C^0(UM \times [0,l])$ を

$$h_f(v,t) := \frac{1}{\sin l}\{f(\gamma_v(0))\sin(l-t) + f(\gamma_v(l))\sin t\} \tag{3.1}$$

によって定める．ここで，γ_u は $\gamma_u(0) = \pi(u), \dot{\gamma_u}(0) = u$ をみたす正規測地線であった．同様に，M 上のリプシッツ関数 f に対して，$UM \times \boldsymbol{R}$ 上殆ど至る所 (a.e.) で定義された関数 g_f を

$$g_f(v,t) := f(\pi(v))\cos t + \langle \nabla f, v\rangle \sin t \tag{3.2}$$

で定める．h_f (g_f) は微分方程式

$$\frac{\partial^2 h_f}{\partial t^2} = -h_f \qquad \left(resp., \frac{\partial^2 g_f}{\partial t^2} = -g_f\right)$$

の境界条件 (resp., 初期条件)

$$\begin{gathered} h_f(v,0) = f(\gamma_v(0)), h_f(v,l) = f(\gamma_v(l)) \\ \left(resp., g_f(v,0) = f(\pi(v)), \tfrac{\partial g}{\partial t}(v,0) = \langle \nabla f, v\rangle\right) \end{gathered}$$

の一意な解として特徴付けられることを注意しよう．また，もし f が $D^2 f + fg = 0$（g は計量テンソル）をみたせば，$h_f(v,t) = g_f(v,t) = f(\gamma_v(t))$ である．

次に，コンパクト・リーマン多様体 N 上の関数の（正規化された）ノルムを次で定める：

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \left(\tfrac{1}{\operatorname{vol} N}\int_N |f|^p d\nu_g\right)^{\frac{1}{p}}, \\ \|f\|_{2,1} &:= \left(\tfrac{1}{\operatorname{vol} N}\int_N |f|^2 d\nu_g + \tfrac{1}{\operatorname{vol} N}\int_N \|\nabla f\|^2 d\nu_g\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

このとき，次のリッチ曲率正の場合の L^2 版トポノゴフ比較定理を得る．

定理 3.1. 任意の $\epsilon > 0$ と $0 < l_0 < \pi$ に対して，$\delta = \delta(\epsilon, m, l_0) > 0$ が存在して次が成り立つ：M を $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ をみたす m 次元閉リーマン多様体とする．いま，$p, q \in M$ で $d(p,q) > \pi - \delta$ をみたすものが

存在したと仮定する．このとき，$f := \cos d_p, h_p := h_{f,l}\,(0 < l \le l_0)$ に対して

$$(3.3)\qquad \frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM} d\nu_G \int_0^l |f(\gamma_v(t)) - h_p(v,t)|^2 dt < \epsilon,$$

$$(3.4)\qquad \frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM} d\nu_G \int_0^l \left|(f\circ\gamma_v)'(t) - \frac{\partial h_p}{\partial t}(v,t)\right|^2 dt < \epsilon,$$

が成り立つ．ただし，G は単位接束 UM 上の佐々木計量である．

証明の前に

$$(f\circ\gamma_v)'(t) = -\sin d_p(\gamma_v(t))\cdot\langle\nabla d_p, \dot\gamma_v(t)\rangle,$$

および UM のリュービル測度 $d\nu_G$ は測地流で不変であることを注意する．また，単位球面 (S^m_1, g_0) の場合，$f = \cos d_p$ はラプラシアンの正の第 1 固有値 m の固有関数であり，$\frac{\partial^2 h_f}{\partial t^2} = -h_f$ をみたす．

証明は 3 つのステップに分けて行う．以下，簡単のため被積分項のリーマン測度 $d\nu_g, d\nu_G$ 等は省く．

第 1 段．$\epsilon, k > 0, 0 < l_0 < \pi$ を与える．我々はまず，$\delta(>0)$ を ϵ, m, k, l_0 に応じて十分小に取るとき，$f \in C^3(M)$ で条件 $\|f\|_2 \le k, \|\Delta f - mf\|_2 < \delta$ をみたすものに対しては，主張の (3.3), (3.4) が成立することを示す．方針はボホナーの公式を用いて，f のヘッシアン $D^2 f$ の L^2 ノルムを f のラプラシアン Δf を用いて評価する．まず，リッチ曲率に関する仮定，グリーンの公式

$$\int_M \langle\nabla\Delta f, \nabla f\rangle = \int_M |\Delta f|^2, \quad \int_M \|\nabla f\|^2 = \int_M f\Delta f$$

等に注意して，ボホナーの公式 (2.27) より

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\mathrm{vol}\,M}\textstyle\int_M \left\{\|D^2 f\|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{m}\right\}\\
&= \tfrac{1}{\mathrm{vol}\,M}\textstyle\int_M \left\{\langle\nabla\Delta f, \nabla f\rangle - \mathrm{Ric}_M(\nabla f, \nabla f) - \frac{(\Delta f)^2}{m}\right\}\\
&\le \tfrac{m-1}{m\,\mathrm{vol}\,M}\textstyle\int_M \{(\Delta f)^2 - m\|\nabla f\|^2\} = \frac{m-1}{m\,\mathrm{vol}\,M}\int_M \Delta f(\Delta f - mf)\\
&\le \left(1 - \tfrac{1}{m}\right)\|\Delta f\|_2 \|\Delta f - mf\|_2 \le \delta(\delta + mk)\left(1 - \tfrac{1}{m}\right)
\end{aligned}$$

である．他方，$\left\|D^2 f + \frac{\Delta f}{m} g\right\|^2 = \|D^2 f\|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{m}$ だから

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{1}{\mathrm{vol}\,M}\textstyle\int_M \|D^2 f + fg\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left\|D^2 f + \tfrac{\Delta f}{m} g\right\|_2 + \left\|\tfrac{\Delta f}{m} g - fg\right\|_2\\
&\le \sqrt{(mk+\delta)\delta\left(1 - \tfrac{1}{m}\right)} + \tfrac{\delta}{\sqrt{m}}
\end{aligned}$$

を得る．次に，上の評価を長さ l の測地線の空間上の積分の評価に転化する．測地流 ϕ_t は UM のリュービル測度を不変にすることに注意

し，積分の順序変更をおこなって

$$\begin{aligned}&\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM}\int_0^l|(f\circ\gamma_v)''(t)+f\circ\gamma_v(t)|^2dt\\&=\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_0^l dt\int_{UM}|(f\circ\gamma_{\phi_tv})''(0)+(f\circ\gamma_{\phi_tv})(0)|^2\\&=\frac{1}{\omega_{m-1}\mathrm{vol}\,M}\int_M\int_{U_pM}|(D^2f+fg)(v,v)|^2\\&\le\frac{1}{m\,\mathrm{vol}\,M}\int_M\|D^2f+fg\|^2\le\frac{1}{m}\left\{\sqrt{(mk+\delta)\delta\left(1-\frac{1}{m}\right)}+\frac{\delta}{\sqrt{m}}\right\}^2.\end{aligned}$$

ただし，上で T_pM 上の対称双一次形式 ϕ に対する不等式 $\int_{U_pM}|\phi(v,v)|^2\le(\omega_{m-1}/m)\|\phi_p\|^2$ を用いた．これはコーシー・シュワルツの不等式と $\int_{S^{m-1}}x_i^2=\omega_{m-1}/m$ から容易に得られる．

さて，$h(t):=f(\gamma_v(t))-h_f(v,t)$, $h(0)=h(l)=0$ と置いて，ヴィルティンガーの不等式

$$-\int_0^l h''(t)h(t)dt=\int_0^l h'(t)^2dt\ge\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\int_0^l h(t)^2dt$$

に注意する．$h''(t)=D^2f(\dot\gamma_v(t),\dot\gamma_v(t))+h_f(v,t)$ だから，上の不等式を UM 上積分して

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM}\int_0^l h(t)^2dt\le\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM}\int_0^l\{-h''(t)h(t)\}dt\\&=\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM}\left\{\int_0^l h(t)^2dt-\int_0^l\{D^2f(\dot\gamma_v(t),\dot\gamma_v(t))+f(\gamma_v(t))\}h(t)dt\right\}\\&\le\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM}\int_0^l h(t)^2dt+\left(\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM}\int_0^l h(t)^2dt\right)^{\frac12}\times\\&\qquad\left(\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM}\int_0^l|(f\circ\gamma_v)''(t)+f(\gamma_v(t))|^2\right)^{\frac12}\end{aligned}$$

である．よって，δ を十分小にとることにより

$$\begin{aligned}&\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM}\int_0^l h(t)^2dt\\&\le\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\left(\left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2-1\right)^{-2}\int_{UM}\int_0^l|(f\circ\gamma_v)''(t)+f(\gamma_v(t))|^2dt\\&\le\left(\frac{\sqrt{\frac{(mk+\delta)\delta}{m}(1-\frac{1}{m})}+\frac{\delta}{m}}{(\frac{\pi}{l_0})^2-1}\right)^2\le\frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

とできる．同様にして

$$\begin{aligned}&\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM}\int_0^l h'(t)^2dt=-\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM}\int_0^l h''(t)h(t)dt\\&\le\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM}\int_0^l h(t)^2dt+\left(\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM}\int_0^l h(t)^2dt\right)^{\frac12}\times\\&\qquad\left(\frac{1}{l\,\mathrm{vol}\,UM}\int_{UM}\int_0^l|(f\circ\gamma_v)''(t)+f(\gamma_v(t))|\right)^{\frac12}\\&\le\frac{\epsilon}{2}+\left(\sqrt{\frac{(mk+\delta)\delta}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)}+\frac{\delta}{m}\right)\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}<\epsilon\end{aligned}$$

であり，(3.3), (3.4) が示された．

第２段．ここでは次の事実を示す．任意の $\epsilon>0$ に対して，$\delta=\delta(\epsilon,m)>0$ が存在して次をみたす：点 $p,q\in M$ は $d(p,q)>\pi-\delta$ をみたすとし，$f(x):=\cos d(p,x)$ と置く．すると $g\in C^\infty(M)$ で

$$\|g\|_2\le1,\quad\|\Delta g-mg\|_2<\epsilon,\quad\|f-g\|_{2,1}<\epsilon\tag{3.5}$$

をみたすものが存在する．証明の前に，m 次元単位球面では，上の $f(x)$ はラプラシアンの正の第 1 固有値 m の固有関数であることを再び注意しよう．上では，距離関数を固有関数で近似できることを主張している．

1° 仮定から $B_r(p) \cap B_{\pi-\delta-r}(q) = \phi$ が $0 < r < \pi - \delta$ に対して成り立つことに注意して，ビショップ・グロモフの体積比較定理から

$$\begin{aligned} \frac{v_1^m(r+\delta)}{v_1^m(\pi)} &= \frac{v_1^m(\pi)-v_1^m(\pi-\delta-r)}{v_1^m(\pi)} \\ &\geq \frac{\operatorname{vol} M - \operatorname{vol} B_{\pi-\delta-r}(q)}{\operatorname{vol} M} \geq \frac{\operatorname{vol} B_r(p)}{\operatorname{vol} M} \geq \frac{v_1^m(r)}{v_1^m(\pi)}. \end{aligned}$$

$0 < \delta < r - s$ に対して，$A_{s,r}(p)$ で円環面 $\{x \in M \mid s \leq d(p,x) \leq r\} = \bar{B}_r(p) \setminus B_s(p)$ を表す．このとき上の不等式から

$$\frac{v_1^m(r) - v_1^m(s+\delta)}{v_1^m(\pi)} \leq \frac{\operatorname{vol} A_{s,r}(p)}{\operatorname{vol} M} \leq \frac{v_1^m(r+\delta) - v_1^m(s)}{v_1^m(\pi)},$$

すなわち

$$\left| \frac{\operatorname{vol} A_{s,r}(p)}{\operatorname{vol} M} - \frac{v_1^m(A_{s,r})}{v_1^m(\pi)} \right| \leq \frac{v_1^m(A_{r,r+\delta}) + v_1^m(A_{s,s+\delta})}{v_1^m(\pi)}$$

を得る．ここで，$v_1^m(A_{s,r})$ は m 次元単位球面の円環面 $A_{s,r}(*)$ の体積を表す．

このとき，上で述べたこととリーマン積分の定義から次が成り立つ：任意の $\epsilon_0 > 0$ に対して，$\delta = \delta(\epsilon_0, m) > 0$ が存在して，$d(p,q) > \pi - \delta$ ならば $f(x) := \cos d_p(x)$ に対して

$$\begin{cases} \left| \|f\|_2^2 - \frac{1}{m+1} \right| < \epsilon_0, \\ m\|f\|_2^2 + \frac{\epsilon_0^3}{3} \geq \|\nabla f\|_2^2, \\ \left| \frac{1}{\operatorname{vol} M} \int_M f \right| \leq \min\left\{ \frac{\epsilon_0}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{\epsilon_0^3}{3m}} \right\}. \end{cases} \tag{3.6}$$

実際，これ等の不等式を見るのに，まず m 次元単位球面上では

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{m+1}, \quad \|\nabla f\|_2^2 = \frac{m}{m+1}, \quad \int_{S^m} f = 0$$

が成り立つことに注意する．また系 2.9 (2) とビショップ比較定理から，集合 $\{y \in M \mid d(y,p) > \pi - \delta\}$ の体積は δ を十分小さく取ることにより幾らでも小さくできる．例えば，$(3.6)_1$ を見るには，$[0, d(M)]$ の十分細かな細分 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_k = d(M)$ と小さな $\delta > 0$ を取る．すると

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &\approx \textstyle\sum_i \int_{A_{r_i,r_{i+1}}} \frac{\cos^2 d_p}{\operatorname{vol} M} \approx \sum_i \cos^2 r_i \frac{\operatorname{vol} A_{r_i,r_{i+1}}(p)}{\operatorname{vol} M} \\ &\approx \textstyle\sum_i \cos^2 r_i \frac{v_1^m(A_{r_i,r_{i+1}})}{v_1^m(\pi)} \approx \frac{1}{v_1^m(\pi)} \int_{S_1^m} \cos^2 d_* = \frac{1}{m+1}. \end{aligned}$$

他も同様である．

2° 次に，ラプラシアン Δ の固有値問題を考えて

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$$

を，Δ の固有値を重複度まで込めて並べたものとする．リヒネロビッツの不等式より $\lambda_1 \geq m$ である．いま，$\{g_j\}_{j=0,1,2,\ldots}$ を $(L^2(M), d\nu_g/\mathrm{vol}\,M)$ の固有値 λ_j に対応する固有関数からなる正規直交系とすれば，f は次のようにフーリエ級数展開される：

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j g_j + \alpha_0,\ \text{ただし}\ \alpha_0 = \frac{1}{\mathrm{vol}\,M}\int_M f, \quad \alpha_0^2 < \frac{\epsilon_0^3}{3m}.$$

よって，レイリー商を考えて (3.6) により

$$m \leq \lambda_1 \leq \frac{\|\nabla f\|_2^2}{\|f - \frac{1}{\mathrm{vol}\,M}\int_M f\|_2^2} \leq \frac{m\|f\|_2^2 + \frac{\epsilon_0^3}{3}}{\|f\|_2^2 - \frac{\epsilon_0^3}{3m}} < m + \epsilon_0.$$

ここで，$\epsilon_0 > 0$ は $\epsilon_0 + \frac{2}{3}\epsilon_0^2 + \frac{\epsilon_0^3}{3m} < \frac{1}{m+1}$ が成立するように，十分小さく取った．そこで $\mu = m + \epsilon_0$ と取れば，我々は関数 $g = \sum_{m \leq \lambda_j \leq \mu} \alpha_j g_j \in C^\infty(M)$ を考えることができる．$\|g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 < 1$ に注意すると

$$\|\Delta g - mg\|_2^2 = \sum_{m \leq \lambda_j \leq \mu} (m - \lambda_j)^2 \alpha_j^2 < \epsilon_0^2.$$

他方，$\|g - f\|_2^2 < \epsilon_0^2$ である．実際，μ の定義と (3.6) に注意して

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 = \frac{1}{\mathrm{vol}\,M}\int_M f\Delta f = \frac{1}{\mathrm{vol}\,M}\int_M \|\nabla f\|^2 \leq \frac{\epsilon_0^3}{3} + \frac{m}{\mathrm{vol}\,M}\int_M f^2 \\ &\textstyle= \frac{\epsilon_0^3}{3} + m\alpha_0^2 + m\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^2 \leq \frac{2\epsilon_0^3}{3} + m\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^2.\end{aligned}$$

よって，$\epsilon_0 \sum_{\lambda_j > \mu} \alpha_j^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j - m)\alpha_j^2 \leq \frac{2\epsilon_0^3}{3}$ であり，したがって

$$\|f - g\|_2^2 \leq \sum_{\lambda_j > \mu} \alpha_j^2 + \alpha_0^2 < \epsilon_0^2.$$

同様にして

$$\sum_{\lambda_j > \mu} \lambda_j \alpha_j^2 \leq \frac{2}{3}\epsilon_0^3 + m\sum_{\lambda_j > \mu}\alpha_j^2 - \sum_{\lambda_j \leq \mu}(\lambda_j - m)\alpha_j^2 \leq m\epsilon_0^2$$

であり，結局

$$\|\nabla f - \nabla g\|_2^2 = \frac{1}{\mathrm{vol}\,M}\int_M (f-g)\Delta(f-g) = \sum_{\lambda_j > \mu}\lambda_j\alpha_j^2 \leq \epsilon_0^2$$

を得る．これで第２段の証明が完了した（一般に，$f = \cos d_p$ には微分可能でない点があるので，正確には注意 2.14 (2) を参照).

第３段．任意の $\epsilon, k > 0$ と $l_0 \in (0, \pi)$ に対して，$\delta = \delta(\epsilon, m, l_0, k) > 0$ が存在して次をみたす: M 上のリプシッツ関数 f が $g \in C^3(M)$ によって

$$\|g\|_2 \leq k, \quad \|\Delta g - mg\|_2 < \delta, \quad \|f - g\|_{2,1} < \delta$$

をみたすように近似されたとすれば，任意の $0 < l \le l_0$ に対して

$$\frac{1}{l \operatorname{vol} UM} \int_{UM} \int_0^l |f(\gamma_v(t)) - h_{f,l}(v,t)|^2 dt < \epsilon, \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{l \operatorname{vol} UM} \int_{UM} \int_0^l \left| (f \circ \gamma_v)'(t) - \frac{\partial h_{f,l}}{\partial t}(v,t) \right|^2 dt < \epsilon \tag{3.8}$$

が成り立つ．

主張を確かめるのに，近似により $f \in C^1(M)$ としてよい．以下の議論では，$(M,\, d\nu_g/\operatorname{vol} M)$ と $(UM \times [0,l],\, dt d\nu_G/(l \operatorname{vol} UM))$ に関する L^2 ノルムを考えるが，積分で測度の記号は省略する．すると

$$\begin{aligned} &\|f(\gamma_v(t)) - h_f(v,t)\|_2 \\ &\quad \le \|(f-g)(\gamma_v(t))\|_2 + \|g(\gamma_v(t)) - h_g(v,t)\|_2 + \|(h_g - h_f)(v,t)\|_2 \\ &\le \|f-g\|_2 (1 + \tfrac{2\sqrt{2}}{\sin l_0}) + \tfrac{\sqrt{\epsilon}}{2} < \sqrt{\epsilon}. \end{aligned}$$

実際，まず第1段の議論より，$\|g(\gamma_v(t)) - h_g(v,t)\|_2 < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$ としてよい．次に，測地流は UM 上のリュービル測度を不変にし，$\|(f-g)(\gamma_v(t))\|_2 \le \|f-g\|_2$ を得る．また

$$\begin{aligned} &\|(h_g - h_f)(v,t)\|_2 \le \left\| \tfrac{\sin(l-t)}{\sin l}(f-g)(\gamma_v(0)) \right\|_2 + \left\| \tfrac{\sin t}{\sin l}(f-g)(\gamma_v(l)) \right\|_2 \\ &\le 2\|f-g\|_2 \left\{ \tfrac{1}{l} \int_0^l \tfrac{\sin^2 t}{\sin^2 l} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \le 2\|f-g\|_2 \sqrt{1 + \tfrac{1}{\sin^2 l_0}} \end{aligned}$$

である．同様にして (3.8) を得るが，この場合は

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial h_f}{\partial t}(v,t) = -f(\gamma_v(0)) \sin t &+ \tfrac{1-\cos l}{\sin l} f(\gamma_v(0)) \cos t \\ &+ \tfrac{1}{l} \int_0^l \langle \nabla f(\gamma_v(s)), \dot{\gamma}_v(s) \rangle ds \cdot \tfrac{l}{\sin l} \cos t \end{aligned}$$

で，したがって

$$\left\| \frac{\partial(h_f - h_g)}{\partial t}(v,t) \right\|_2 \le \left(1 + \frac{1-\cos l_0}{\sin l_0} \right) \|f-g\|_2 + \frac{l_0}{\sin l_0} \|\nabla(f-g)\|_2$$

となることに注意されたい．これで，第3段の証明が終わった．

定理 3.1 の証明は $f = \cos \circ d_p$ および $k = 1$ とおいて，第1段から第3段を順次適用すればよい．□

上の議論を少し変えることにより，定理 3.1 の局所版を得る．

定理 3.2. $\epsilon > 0$ と $l_0 \in (0,\pi)$ を与える．このとき，$\delta = \delta(\epsilon, l_0, m)$ が存在して次をみたす： M は m 次元閉リーマン多様体で $\mathrm{Ric}_M \ge m-1$ をみたし，かつ $d(p,q) > \pi - \delta$ である点 $p, q \in M$ が存在したとする．いま有限個の $A_i \subset UM$ で，ある $0 < r_i \le l_0$ に対して $B_i = \pi^{-1}(B_{r_i}(\pi(A_i)))$ が互いに交わらないようなものが与えられたとす

る． このとき，$f = d_p, h_{p,r_i} := h_{f,r_i}$ に対して

$$(3.9) \quad \sum_i \frac{1}{r_i \operatorname{vol} UM} \int_{A_i} \int_0^{r_i} |f(\gamma_v(t)) - h_{p,r_i}(v,t)|^2 dt < \epsilon,$$

$$(3.10) \quad \sum_i \frac{1}{r_i \operatorname{vol} UM} \int_{A_i} \int_0^{r_i} \left| (f \circ \gamma_v)'(t)) - \frac{\partial h_{p,r_i}}{\partial t} \right|^2 dt < \epsilon.$$

実際，定理 3.1 の証明の第 1 段の最後の議論を $v \in A_i$ として，$h_i(t) = f \circ \gamma_v(t) - h_{f,r_i}(v,t)$ に適用して

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{r_i \operatorname{vol} UM} \textstyle\int_{A_i} \int_0^{r_i} h_i(t)^2 dt \\ &\le \tfrac{((\frac{\pi}{l_0})^2-1)^{-2}}{r_i \operatorname{vol} UM} \textstyle\int_{A_i} \int_0^{r_i} |(f\circ\gamma_v)''(t) + f \circ \gamma_v(t)|^2 \\ &\le \tfrac{((\frac{\pi}{l_0})^2-1)^{-2}}{m \operatorname{vol} M} \textstyle\int_{\pi(B_i)} \|D^2 f + fg\|^2. \end{aligned}$$

これらの不等式を i に関して加えれば，第 1 段の仮定をみたす f に対しては (3.9), (3.10) が成り立つことが分かる． 同様に，第 3 段の議論も局所化できる．□

また，$f = \cos d_p$ に対して，h_f の代わりに (3.2) で与えられた

$$g_f(v,t) = f(\pi(v)) \cos t + \langle \nabla f, v \rangle \sin t$$

を考えれば次が成り立つ．

定理 3.3. 前定理と同じ状況で次を得る：

$$(3.11) \quad \sum_i \frac{1}{r_i^3 \operatorname{vol} UM} \int_{A_i} \int_0^{r_i} |f(\gamma_v(t)) - g_f(v,t)|^2 dt < \epsilon,$$

$$(3.12) \quad \sum_i \frac{1}{r_i \operatorname{vol} UM} \int_{A_i} \int_0^{r_i} \left| (f \circ \gamma_v)'(t) - \frac{\partial g_f}{\partial t} \right|^2 dt < \epsilon.$$

証明. (3.11) は，(3.12) を t に関して積分することによって得られる． (3.12) を示すのに，まず $s \in [0, \epsilon r_i]$ に対して，$|f|$, $\|\nabla f\| \le 1$ より

$$|f \circ \gamma_v(s) - h_{f,r_i}(v,s)| < \epsilon(2l_0 + 1)$$

であることに注意する．次に，定理 3.2 の δ を十分小に取ることにより，(3.10) から

$$\sum_i \frac{1}{r_i \operatorname{vol} UM} \int_{\pi^{-1}(B_{\epsilon r_i}(\pi(A_i)))} \int_0^{\epsilon r_i} \left| (f \circ \gamma_v)'(t) - \frac{\partial h_{f,r_i}}{\partial t}(v,t) \right|^2 dt < \epsilon^2$$

を得る．よって，任意の i に対して $s_i \in [0, \epsilon r_i]$ で

$$\sum_i \frac{1}{\operatorname{vol} UM} \int_{\pi^{-1}(B_{\epsilon r_i}(\pi(A_i)))} \left| (f \circ \gamma_v)'(s_i) - \frac{\partial h_{f,r_i}}{\partial t}(v, s_i) \right|^2 < \epsilon$$

をみたすものが存在する．以下の議論は簡略化して述べるが，「殆どすべての」は全空間の体積に較べて任意に小さくできる体積を持つ部

分集合を除いて成り立つことを意味する．すると，殆どすべての $v \in \pi^{-1}(B_{\epsilon r_i}(\pi(A_i)))$ に対して，$f \circ \gamma_v$ と h_f は s_i で殆ど等しい値と方向微分を持つ．よって，これらは $t=0$ でも殆ど等しい微分を持ち，h_f と g_f も殆どすべての $v \in A_i$ に対して $t=0$ で同じ値と殆ど等しい微分を持つ．h_f, g_f の定義に戻れば，殆どすべての $v \in A_i$ に対して，$\frac{\partial g_f}{\partial t}$, $\frac{\partial h_f}{\partial t}$ は $0 \le t \le r_i$ で殆ど等しい値を持つ．よって

$$\sum_i \frac{1}{r_i \operatorname{vol} UM} \int_{A_i} \int_0^{r_i} \left| \frac{\partial g_f}{\partial t}(v,t) - \frac{\partial h_{f,r_i}}{\partial t}(v,t) \right|^2 dt < \psi_2(\epsilon \mid m).$$

定理はこの不等式と (3.10) から従う（なお，注意 3.13 を参照されたい）． □

3.2. 次に，リッチ曲率が非負の定数で下から押さえられている場合の，距離関数に関する L^2 版比較定理を述べる（定理 3.10 – 定理 3.12 を見よ）．この場合は，距離関数を局所的に調和関数で近似する方針を採る．この比較定理は次節の体積の連続性で本質的に用いられるが，距離関数を調和関数で近似するという考え方は §5 でも重要である．以下，次の状況で考える．

$R > 0, \Lambda \ge 0$ を与える．M を m 次元完備リーマン多様体で $\mathrm{Ric}_M \ge -(m-1)\Lambda R^{-2}$ をみたすものとし，$d(p,q) > 2R$ をみたす 2 点 $p, q \in M$ が存在すると仮定する．$b^+ := d_q - d_q(p)$ と置き，その挙動を UM 上の積分不等式の形で評価する．まず，b^+ を距離球上同じ境界値を取る調和関数で近似することを考える．

補題 3.4. $0 < \delta \le 1/2$ と $y \in B_R(p)$ に対して，b を $B_{2\delta R}(y)$ 上の調和関数で，境界上 $b|S_{2\delta R}(y) = b^+|S_{2\delta R}(y)$ をみたすものとする．このとき，正定数 $C = C(R,\Lambda,m)$ が存在して

$$\|b - b^+\|^2_{2,1,B_{2\delta R}(y)} \le \frac{\delta RC}{\operatorname{vol} B_{2\delta R}(y)} \int_{B_{2\delta R}(y)} |\Delta b^+| \tag{3.13}$$

が成り立つ．

証明. $\|b-b^+\|^2_{2,1} = \|b-b^+\|^2_2 + \|\nabla b - \nabla b^+\|^2_2$ であった．さて，$b - b^+$ を評価する際，$b^+ = d_q - d(q,y)$ としても最初のものと定数の差しかないないから取り直す．すると，$z \in B_{2\delta R}(y)$ に対して，$|b^+(z)| \le d(z,y) \le 2\delta R$ で，したがって最大値原理から，$\sup_{B_{2\delta R}(y)} |b| \le \sup_{B_{2\delta R}(y)} |b^+| \le 2\delta R$ である．故に

$$\begin{aligned}
&\operatorname{vol} B_{2\delta R}(y) \|\nabla b - \nabla b^+\|^2_{2,B_{2\delta R}(y)} = \textstyle\int_{B_{2\delta R}(y)} (b-b^+)\Delta(b-b^+) \\
&= -\textstyle\int_{B_{2\delta R}(y)} (b-b^+)\Delta b^+ \le \sup_{B_{2\delta R}(y)} |b-b^+| \int_{B_{2\delta R}(y)} |\Delta b^+| \\
&\quad \le 4\delta R \textstyle\int_{B_{2\delta R}(y)} |\Delta b^+|.
\end{aligned}$$

ここで，正確には距離関数 b^+ は滑らかでない点があるので，滑らかな関数で近似して議論する必要がある（注意 2. 14 (2) 参照）．他方，$B_{2\delta R}(y)$ 上でラプラシアンのディィリクレ境界条件（$d(p,q) > 2R$ より $S_{2\delta R}(y) \ne \emptyset$ に注意）に関する第 1 固有値を λ_1 とすれば

$$\lambda_1 \|b - b^+\|^2_{2,B_{2\delta R}(y)} \le \|\nabla(b - b^+)\|^2_{2,B_{2\delta R}(y)}$$

である．ここで，リィ・シェーンの固有値評価（定理 2.21）より，正定数 $C_* := C_*(R,\Lambda,m)$ が存在して $\lambda_1 \geq C_*$ であるから

$$\begin{aligned}\|b-b^+\|^2_{2,1,B_{2\delta R}(y)} &\leq (1+\tfrac{1}{\lambda_1})\|\nabla(b-b^+)\|^2_{2,B_{2\delta R}(y)}\\ &\leq \tfrac{\delta RC}{\mathrm{vol}\,B_{2\delta R}(y)}\int_{B_{2\delta R}(y)}|\Delta b^+|\end{aligned}$$

が成り立ち，(3.13) が示された． □

次に，$b^+ = d_q - d(p,q)$ に対して $\int_{B_R(p)}|\Delta b^+|d\nu_g/\mathrm{vol}\,B_R(p)$ を，定理 2.12 (2) で $\phi(t) = t, \Omega = \bar{B}_R(p)$ としたものを用いて評価する．$q \notin B_R(p)$ であった．ビショップ・グロモフの比較定理と $\cosh t/\sinh t \leq (1+t)/t$ $(t \geq 0)$ に注意して

$$(3.14)\quad \left\{\begin{aligned}&\tfrac{1}{\mathrm{vol}\,B_R(p)}\int_{B_R(p)}|\Delta b^+|d\nu_g\\ &\leq 2(m-1)\tfrac{c_{-\Lambda R^{-2}}(R)}{s_{-\Lambda R^{-2}}(R)} + \tfrac{\mathrm{vol}_{m-1}\partial B_R(p)}{\mathrm{vol}\,B_R(p)}\\ &\leq 2(m-1)\tfrac{c_{-\Lambda R^{-2}}(R)}{s_{-\Lambda R^{-2}}(R)} + \tfrac{\mathrm{vol}_{m-1}\partial B_R(*,M^m_{-\Lambda R^{-2}})}{v^m_{-\Lambda R^{-2}}(R)}\\ &\leq 2(m-1)\tfrac{\Lambda+\sqrt{\Lambda}}{R} + \tfrac{\sqrt{\Lambda}}{R}\tfrac{\sinh^{m-1}\sqrt{\Lambda}}{\int_0^{\sqrt{\Lambda}}\sinh^{m-1}s\,ds} \leq \tfrac{C_1(m,\Lambda)}{R}.\end{aligned}\right.$$

これを (3.13) に適用すれば，補題 3.4 より

$$\|b-b^+\|^2_{2,1,B_{2\delta R}(y)} \leq C_2(R,m,\Lambda)\delta$$

の形の評価を得る．

次に，調和関数に対するヘッシアン評価 (命題 2.30) を b に適用すれば，次が成立する（実際，$\sup_{B_{8\delta R}(y)}|b| \leq 8\delta R$ に注意して, スケールを変更して命題 2.30 を適用すればよい).

補題 3.5. $\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)\Lambda R^{-2}$ で，$p,q \in M$ は $d(p,q) > 2R$ をみたすとする．$0 < \delta \leq \frac{1}{8}$ と $y \in B_R(p)$ に対し，b を $B_{8\delta R}(y)$ 上の $b \mid \partial B_{8\delta R}(y) = b^+ \mid \partial B_{8\delta R}(y)$ をみたす調和関数とする．このとき，$C = C(\Lambda,m) > 0$ が存在して，b のヘッシアンの L^2 ノルムに対して

$$(3.15)\quad \|D^2 b\|^2_{2,B_{8\delta R}(y)} \leq \frac{C}{\delta^2 R^2}$$

が成立する．

次の補題は M 上の一般の関数 f の方向微分の挙動を，f のヘッシアンの L^2 ノルムを用いて，UM 上の積分不等式の形で評価する方法を与える．

補題 3.6. M を完備リーマン多様体とし，$r > 0$ を与える．すると，任意の $f \in C^\infty(M)$, $0 \leq t \leq l$ と $x \in M$ に対して

$$(3.16)\quad \left\{\begin{aligned}&\tfrac{1}{\mathrm{vol}\,UB_r(x)}\int_{UB_r(x)}\left|(f\circ\gamma_v)'(t) - \tfrac{f(\gamma_v(l))-f(\gamma_v(0))}{l}\right|\\ &\leq \tfrac{2l}{\mathrm{vol}\,B_r(x)}\int_{B_{r+l}(x)}\|D^2 f\|.\end{aligned}\right.$$

証明. まず最初に

$$\left|(f\circ\gamma_v)'(t)-\frac{f(\gamma_v(l))-f(\gamma_v(0))}{l}\right|=$$
$$\left|\int_0^t\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(f\circ\gamma_v)d\tau-\frac{1}{l}\int_0^l\int_0^s\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(f\circ\gamma_v)d\tau ds\right|\le 2\int_0^l\left|\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(f\circ\gamma_v)\right|d\tau$$

に注意する. 再び, リュービル測度が測地流で不変であることを想起して $UB_r(x)$ 上積分すれば

$$\frac{1}{\operatorname{vol}UB_r(x)}\int_{UB_r(x)}\left|(f\circ\gamma_v)'(t)-\frac{f(\gamma_v(l))-f(\gamma_v(0))}{l}\right|$$
$$\le\frac{2}{\operatorname{vol}UB_r(x)}\int_0^l\int_{UB_r(x)}\left|\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(f\circ\gamma_v)\right|d\tau\le\frac{2l}{\operatorname{vol}B_r(x)}\int_{B_{r+l}(x)}\|D^2f\|$$

を得る. □

次の補題も, 同様に直接の計算で確かめられる.

補題 3.7. 前定理と同じ仮定の下で, $f\in C^\infty(M)$ と M 上のリプシッツ関数 g で $\|f-g\|_{2,1,B_{r+l}(x)}<\epsilon\operatorname{vol}B_r(x)/\operatorname{vol}B_{r+l}(x)$ をみたすものが与えられたとせよ. f が

$$\frac{1}{\operatorname{vol}B_r(x)}\int_{B_{r+l}(x)}\|D^2f\|<\frac{\epsilon}{l}$$

をみたせば, 任意の $0<t<l$ に対して

$$\frac{1}{\operatorname{vol}UB_r(x)}\int_{UB_r(x)}\left|(g\circ\gamma_v)'(t)-\frac{g(\gamma_v(l))-g(\gamma_v(0))}{l}\right|<4\epsilon \tag{3.17}$$

が成り立つ.

さて, 一般化されたトポノゴフの比較定理を得るために, $B_R(p)$ 内に互いに交わらない R に較べて十分小さな半径 δR の距離球を密に取る. これらの距離球上で, 前のように距離関数を調和関数で近似してそのヘッシアン評価を行う. 補題 3.4 で見たように, 小さい距離球で考えないと調和関数による良い近似が得られないためである. そのため, この場合は「短い」測地線に沿っての距離関数の挙動を, ユークリッド空間のそれと L^2 の意味で比較することになる. 最初に, 次を準備する.

補題 3.8. $0<\delta<\frac{1}{8}, R>0, D>1, \Lambda\ge 0$ を与える. $\operatorname{Ric}_M\ge-(m-1)\Lambda R^{-2}$ とする. $p\in M$ に対して, f を $B_R(p)$ 上のリプシッツ関数で $\|f\|_{1,B_R(p)}\le K$ をみたすものとする. このとき, 有限個の距離球 $B_{8\delta R}(x_i)\subset B_R(p)$ と, R と δ に依存しない正整数 $\lambda=\lambda(\Lambda,m)$ が存在して次をみたす:

(1) 任意の $q\in B_R(p)$ に対して, $q\in B_{2\delta R}(x_i)$ をみたす x_i はたかだか λ 個である.

(2) $\operatorname{vol}(\bigcup_i B_{\delta R}(x_i))>\left(\frac{v^m_{-\Lambda}(R-8\delta R)}{v^m_{-\Lambda}(R)}-\frac{\lambda}{D}\right)\operatorname{vol}B_R(p)$.

(3) $\|f\|_{1,B_{2\delta R}(x_i)}<DK$.

証明. スケールを代えて $R=1$ としてよい. $B_{1-8\delta}(p)$ に含まれる, 互いに交わらない半径 $\delta/2$ の距離球の極大な族 $\{B_{\delta/2}(x_i)\}_{i=1}^N$ を取る. (1) は系 2.8 (2) からしたがう. 実際,

$$\lambda = \int_0^{\frac{9\delta\sqrt{\Lambda}}{2}} \sinh^{m-1} t dt / \int_0^{\frac{\delta\sqrt{\Lambda}}{2}} \sinh^{m-1} t dt$$

と取ればよい. この λ は δ に関して単調増加であることに注意しよう. 容易に, $B_{1-8\delta}(p) \subset \bigcup_i B_\delta(x_i)$ が3角不等式と極大性から分かる.

さて, $I := \{i \mid \|f\|_{1,B_{2\delta}(x_i)} \geq DK\}$ と置けば

$$\begin{aligned}&K\lambda \mathrm{vol}\, B_1(p) \geq \lambda \textstyle\int_{B_1(p)} |f| \geq \sum_{i\in I} \int_{B_{2\delta}(x_i)} |f| \\ &\geq DK \textstyle\sum_{i\in I} \mathrm{vol}\, B_{2\delta}(x_i) \geq DK \mathrm{vol}\,(\bigcup_{i\in I} B_\delta(x_i))\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{\lambda}{D}\mathrm{vol}\, B_1(p) \geq \mathrm{vol}\,(\bigcup_{i\in I} B_\delta(x_i))$$

である. 他方, $i \notin I$ ならば

$$\begin{aligned}&\mathrm{vol}\,(\textstyle\bigcup_{i\notin I} B_\delta(x_i)) \geq \mathrm{vol}\, B_{1-8\delta}(p) - \mathrm{vol}(\bigcup_{i\in I} B_\delta(x_i)) \\ &\geq \left\{\tfrac{\mathrm{vol}\, B_{1-8\delta}(p)}{\mathrm{vol}\, B_1(p)} - \tfrac{\lambda}{D}\right\} \mathrm{vol}\, B_1(p) \geq \left\{\tfrac{v_{-\Lambda}^m(1-8\delta)}{v_{-\Lambda}^m(1)} - \tfrac{\lambda}{D}\right\} \mathrm{vol}\, B_1(p).\end{aligned}$$

これより, $\{x_i \mid i \notin I\}$ を中心とする距離球の族を考えれば, (2), (3) がしたがう. □

以上の議論をまとめて, 次の主補題を得る.

補題 3.9. $R > 0, \Lambda \geq 0$ を与える. $\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)\Lambda R^{-2}$ とし, $p, q \in M$ は $d(p,q) > 2R$ をみたすとする. 前と同様に, $b^+ = d_q - d(p,q)$ と置く. すると, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\epsilon, \Lambda, m) > 0$, 有限個の距離球 $B_{8\delta R}(x_i) \subset B_R(p)$, $B_{8\delta R}(x_i)$ 上定義された調和関数 b_i で, 次をみたすものが存在する:

(1) $\mathrm{vol}\,(\bigcup_i B_{\delta R}(x_i)) \geq (1-\epsilon)\mathrm{vol}\, B_R(p)$.

(2) $\|b_i - b^+\|_{2,1,B_{2\delta R}(x_i)}^2 < \epsilon(1+R^2)$.

(3) $\|D^2 b_i\|_{2,B_{2\delta R}(x_i)}^2 < \frac{\epsilon}{\delta^2 R^2}$.

証明. 再び $R=1$ としてよい. まず, (3.14) より $\|\Delta b^+\|_{1,B_1(p)} \leq C_1 = C_1(\Lambda, m)$ である. 前補題 3.8 を $f = \Delta b^+$, $K = C_1$ として適用して, 任意の $D > 1, 0 < \delta_1 (< \frac{1}{8})$ に対して, 有限個の距離球 $B_{8\delta_1}(y_j) \subset B_1(p)$ を選んで補題 3.8 (1) と

$$\begin{cases} \mathrm{vol}(\bigcup_j B_{\delta_1}(y_j)) > \left(\frac{v_{-\Lambda}^m(1-8\delta_1)}{v_{-\Lambda}^m(1)} - \frac{\lambda}{D}\right) \mathrm{vol}\, B_1(p), \\ \frac{1}{\mathrm{vol}\, B_{2\delta_1}(y_j)} \int_{B_{2\delta_1}(y_j)} |\Delta b^+| \leq DC_1 \end{cases}$$

をみたすようにできる. δ_1 を十分小に, D を十分大に取ることにより (1) を得る. 次に各 j に対して, $B_{8\delta_1}(y_j)$ 上で $b_j|S_{8\delta_1}(y_j) = b^+|S_{8\delta_1}(y_j)$

をみたす調和関数 b_j を取る．このとき，補題 3.4, 3.5 より

$$\begin{cases} \|b_j - b^+\|^2_{2,1,B_{2\delta_1}(y_j)} < \delta_1 D C_1 C, \\ \frac{1}{\operatorname{vol} B_{2\delta_1}(y_j)} \int_{B_{2\delta_1}(y_j)} \|D^2 b_j\|^2 < \frac{C_2(\Lambda,m)}{\delta_1^2} \end{cases}$$

が成り立つ．そこで各 j に対して，再び前補題を $B_{\delta_1}(y_j)$ 上の関数 $|b_j - b^+|^2 + \|\nabla b_j - \nabla b^+\|^2$ と $\|D^2 b_j\|^2$ に，R, δ をそれぞれ δ_1, δ_2 と考えて適用する．$\delta = \delta_1\delta_2$ と置く．すると，有限個の距離球 $\{B_{2\delta}(x_i)\}$ を選んで，任意の i に対して $B_{8\delta}(x_i) \subset B_{\delta_1}(y_j)$ なる j が存在するように，また任意の $D_1 > 1$ に対して

$$\begin{cases} \operatorname{vol}(\bigcup_i B_\delta(x_i)) \geq \left(\frac{v^m_{-\Lambda}(1-8\delta_2)}{v^m_{-\Lambda}(1)} - \frac{\lambda}{D_1}\right) \operatorname{vol}(\bigcup_j B_{\delta_1}(y_j)), \\ \|b_i - b^+\|^2_{2,1,B_{2\delta}(x_i)} < \delta_1 D_1 D C_1 C, \\ \frac{1}{\operatorname{vol} B_{2\delta}(x_i)} \int_{B_{2\delta}(x_i)} \|D^2 b_i\|^2 < \frac{1}{\delta^2} C_2(\Lambda, m) D_1 \delta_2^2 \end{cases}$$

をみたすようにできる．D, D_1 を十分大に，δ_1, δ_2 を十分小に取ることによって，$\{B_\delta(x_i)\}$ は補題の主張 (1), (2), (3) をみたすことが分かる． □

上の補題を用いて，目的の L^2 版トポノゴフ比較定理を以下の３つの形で与えよう．

定理 3.10. $R > 0, \Lambda \geq 0$ を与える．$\operatorname{Ric}_M \geq -(m-1)\Lambda R^{-2}$ とし，$p, q \in M$ は $d(p,q) > 2R$ をみたすとする．$b^+ := d_q - d_q(p)$ と置く．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta = \delta(\epsilon, \Lambda, m) > 0$ と有限個の距離球 $B_{\delta R}(x_i) \subset B_R(p)$ が存在して，任意の i と $0 \leq r_i \leq \delta R$ に対して次をみたす：

$$\operatorname{vol}\,(\bigcup_i B_{\delta R}(x_i)) > (1-\epsilon)\operatorname{vol} B_R(p), \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\operatorname{vol} UB_{\delta R}(x_i)} \int_{UB_{\delta R}(x_i)} \{|(b^+ \circ \gamma_v)'(r_i) - \\ \qquad\qquad \frac{b^+(\gamma_v(\delta R)) - b^+(\gamma_v(0))}{\delta R}| < \epsilon\sqrt{R^2+1}. \end{cases} \tag{3.19}$$

証明．$\{B_{\delta R}(x_i)\}$ は補題 3.9 のものとする．(3.18) は明らか．補題 3.9 (2), (3) とビショップ・グロモフの定理から

$$\begin{cases} \|b_i - b^+\|_{2,1,B_{2\delta R}(x_i)} < \sqrt{\epsilon(R^2+1)} \frac{v^m_{-1}(2\delta\sqrt{\Lambda})}{v^m_{-1}(\delta\sqrt{\Lambda})} \frac{\operatorname{vol} B_{\delta R}(x_i)}{\operatorname{vol} B_{2\delta R}(x_i)}, \\ \|D^2 b_i\|_{2,B_{2\delta R}(x_i)} \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{\delta R}. \end{cases}$$

補題 3.7 を，$f = b_i$, $g = b^+$, $r = l = \delta R$ に適用して

$$\frac{1}{\operatorname{vol} B_{\delta R}(x_i)} \int_{B_{2\delta R}(x_i)} \|D^2 b_i\| \leq \frac{v^m_{-1}(2\delta\sqrt{\Lambda})}{v^m_{-1}(\delta\sqrt{\Lambda})} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\delta R}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\operatorname{vol} UB_{\delta R}(x_i)} \int_{UB_{\delta R}(x_i)} \left|(b^+ \circ \gamma_v)'(t) - \frac{b^+(\gamma_v(\delta R)) - b^+(\gamma_v(0))}{\delta R}\right| \\ &< 4\sqrt{\epsilon(R^2+1)} \frac{v^m_{-1}(2\delta\sqrt{\Lambda})}{v^m_{-1}(\delta\sqrt{\Lambda})} \end{aligned}$$

を得る．ϵ を取り直せば (3.19) がしたがう． □

定理 3.11. $R>0$, $\Lambda \geq 0$ を与える．$\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)\Lambda R^{-2}$ とする．$p,q \in M$ は $d(p,q) > 2R$ をみたすとし，$b^+ := d_q - d_q(p)$ と置く．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta = \delta(\epsilon, \Lambda, m) > 0$ と $\mu = \mu(R, \Lambda, m) > 0$ が存在して，任意の $0 \leq r \leq \delta R$ に対して

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathrm{vol}\, UB_R(p)} \int_{UB_R(p)} \big|(b^+ \circ \gamma_v)'(r) \\ \qquad\qquad\qquad - \frac{b^+(\gamma_v(\delta R)) - b^+(\gamma_v(0))}{\delta R}\big| < \epsilon\mu, \end{array} \right. \tag{3.20}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathrm{vol}\, UB_R(p)} \int_{UB_R(p)} \big|(b^+(\gamma_v(r)) - \frac{r}{\delta R} b^+(\gamma_v(\delta R)) \\ \qquad\qquad\qquad - \frac{\delta R - r}{\delta R} b^+(\gamma_v(0))\big| < \epsilon\mu r \end{array} \right. \tag{3.21}$$

が成り立つ．

証明. 第 2 の不等式は第 1 の不等式を $[0,r]$ 上積分して得られる．次に

$$\left|(b^+ \circ \gamma_v)'(r) - \frac{b^+(\gamma_v(\delta R)) - b^+(\gamma_v(0))}{\delta R}\right| \leq 2$$

に注意して

$$\begin{aligned} &(3.20)\text{ の左辺 } \leq \tfrac{2}{\mathrm{vol}\, UB_R(p)} \{\mathrm{vol}\,(UB_R(p)) - \mathrm{vol}\,(\cup_i UB_{\delta R}(x_i))\} \\ &\quad + \tfrac{1}{\mathrm{vol}\, UB_R(p)} \int_{\cup_i UB_{\delta R}(x_i)} \left|(b^+ \circ \gamma_v)'(r) - \tfrac{b^+(\gamma_v(\delta R)) - b^+(\gamma_v(0))}{\delta R}\right| \\ &\quad \leq 2\epsilon + \lambda\epsilon\sqrt{1+R^2} \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，λ は補題 3.8 で与えられたもので，$\mu = 2 + \lambda\sqrt{1+R^2}$ と置いた． □

定理 3.12. $R>0$, $\Lambda \geq 0$ を与える．$\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)\Lambda R^{-2}$ とする．$p,q \in M$ は $d(p,q) > 2R$ をみたすとし $b^+ := d_q - d_q(p)$ と置く．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta = \delta(\epsilon, \Lambda, m) > 0$ と $\mu = \mu(R, \Lambda, m) > 0$ が存在して，任意の $0 \leq r \leq \delta R$ に対して

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\, UB_R(p)} \int_{UB_R(p)} |(b^+ \circ \gamma_v)'(r) - \langle v, \nabla b^+ \rangle| < \epsilon\mu, \tag{3.22}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathrm{vol}\, UB_R(p)} \int_{UB_R(p)} \big|b^+(\gamma_v(r)) - b^+(\gamma_v(0)) \\ \qquad\qquad\qquad - \langle v, \nabla b^+ \rangle r\big| < \epsilon r\mu \end{array} \right. \tag{3.23}$$

が成り立つ．

証明. 前と同様に，第 2 の不等式は第 1 の不等式を $[0,r]$ 上積分して得られる．次に，(3.22) を示すには次の 2 つの不等式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathrm{vol}\, UB_R(p)} \int_{UB_R(p)} \left|(b^+ \circ \gamma_v)'(r) - \frac{b^+(\gamma_v(\delta R)) - b^+(\gamma_v(0))}{\delta R}\right| < \epsilon\mu, \\ \frac{1}{\mathrm{vol}\, UB_R(p)} \int_{UB_R(p)} \left|-(b^+ \circ \gamma_v)'(0) + \frac{b^+(\gamma_v(\delta R)) - b^+(\gamma_v(0))}{\delta R}\right| < \epsilon\mu \end{array} \right.$$

を加えて，$(b^+ \circ \gamma_v)'(0) = \langle v, \nabla b^+ \rangle$ に注意すればよい． □

注意 3.13. 以上の比較定理は積分の形で与えられているので，実際に使うときにはさらに工夫を要する．一般に，ある性質 $\mathcal{P}$ が集合 A の ϵ–殆どすべての点で成り立つとは，$\mathcal{P}$ が成立する A の点の集合 P が $\mathrm{vol}\,P \geq (1-\epsilon)\mathrm{vol}\,A$ をみたすときをいう（$\mathrm{vol}\,(A \setminus P) < \epsilon\,\mathrm{vol}\,P$ といっても同じである).

特に，A が $\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)$, $d(M) \leq D$ をみたす m 次元コンパクト・リーマン多様体 M（或いは，同じリッチ曲率の条件をみたす完備リーマン多様体の距離球 $B_r(p)$）の場合は，ビショップ・グロモフの定理から次が成り立つ：任意の $\eta > 0$ に対して，$\epsilon > 0$ が存在して性質 $\mathcal{P}$ が ϵ–殆どすべての点で成り立てば，P は η–稠密である（すなわち，任意の $x \in M$ に対し $d(p,x) < \eta$ なる $\mathcal{P}$ をみたす点 p がある). 実際，もし $B_\eta(p) \subset M \setminus P$ ならば

$$\frac{v_{-1}^m(\eta)}{v_{-1}^m(D)} \leq \frac{\mathrm{vol}\,B_\eta(p)}{\mathrm{vol}\,M} \leq \frac{\mathrm{vol}(M \setminus P)}{\mathrm{vol}\,M} \leq 1 - \frac{\mathrm{vol}\,P}{\mathrm{vol}\,M} \leq \epsilon$$

だから，η に対し $\epsilon < v_{-1}^m(\eta)/v_{-1}^m(D)$ と取ればよい．

また，M 上の関数 u が $\|u\|^2 := \frac{1}{\mathrm{vol}\,M}\int_M u^2\,d\nu_g \leq \delta$ をみたすとする．$P_\epsilon := \{x \in M \mid |u(x)| < \epsilon\}$ と置く．すると

$$\delta \geq \frac{1}{\mathrm{vol}\,M}\int_{M\setminus P_\epsilon} u^2\,d\nu_g \geq \epsilon^2\left(1 - \frac{\mathrm{vol}\,P_\epsilon}{\mathrm{vol}\,M}\right)$$

で，$|u(x)| < \epsilon$ が $\frac{\delta}{\epsilon^2}$–殆どすべての点で成り立つ．特に，任意の $\eta > 0$ に対して $\delta > 0$ を十分小に取ることができれば，$|u(x)| < \epsilon$ をみたす点は η–稠密となる（補題 4.4, 4.5, 5.9, 6.6 等を参照).

4. 体積の連続性とその応用

リーマン多様体の列がグロモフ・ハウスドルフ距離に関して収束するとき，幾何学的不変量がどのように振る舞うかを調べることは基本的に重要な問題である．例えば，直径や半径は，コンパクト距離空間のなす族上の汎関数とみたとき，グロモフ・ハウスドルフ距離に関して連続であることは容易に分かる．また，体積（汎関数）は族

$$\mathcal{M}_{m,d,v} := \{(M,g) \mid\ |K_M| \leq 1,\ d(M) \leq d,\ \mathrm{vol}\,M \geq v \text{ をみたす } m \text{ 次元コンパクト・リーマン多様体}\}$$

上一様連続である．実際，グロモフのコンパクト性定理より $\mathcal{M}_{m,d,v}$ はリプッシツ距離に関してコンパクトであった．

他方，体積 (ハウスドルフ測度) 汎関数は，一般にはコンパクト距離空間のなす族上連続ではない．例えば，$\boldsymbol{R}^2$ 内で点 $(\frac{k}{n},0)$ と点 $(\frac{2k+1}{2n},\frac{\sqrt{3}}{2n})$, 点 $(\frac{2k+1}{2n},\frac{\sqrt{3}}{2n})$ と点 $(\frac{k+1}{n},0)$ $(k=0,\ldots,n-1)$ を次々に結んで得られる折れ線に誘導距離を導入した M_n は，x 軸上の単位区間 $M=[0,1]\times\{0\}$ にハウスドルフ距離に関して収束する．しかし，$\mathrm{vol}\,M_n = 2$, $\mathrm{vol}\,M = 1$ である．また，$\dim M > 1$ のコンパクト・リーマン多様体 M の ϵ–網 N を取る．N の任意の 2 点を M の最短測地線で結んで得られる M の部分集

合 G の $\frac{1}{n}$-管状近傍 $M_n := T_{\frac{1}{n}}(G)$ を考える．すると，$d_{GH}(M, M_n) \le \epsilon$ であるが，$\lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}\, M_n = 0$ である．

さて，定数 $\Lambda \ge 0, d > 0$ に対して，$\mathrm{Ric}_{M_n} \ge -(m-1)\Lambda$, $d(M_n) \le d$ をみたす m 次元コンパクト・リーマン多様体の列 $\{M_n\}$ が与えられたとする．いま，M_n が m 次元コンパクト・リーマン多様体 M にグロモフ・ハウスドルフ距離に関して収束したとする．以下この節では，$\mathrm{vol}\, M_n \to \mathrm{vol}\, M$ であることを示そう．この事実は M. アンダーソン・J. チーガーによって予想され，T.H. コールディング（[Co 1,2]）によって示された．以下で，重要な応用を持つ．

定理 4.1. 正定数 r を固定する．このとき体積汎関数は，$\mathrm{Ric}_M \ge -(m-1)$ をみたすすべての完備 m 次元リーマン多様体 M のすべての半径 r の距離球の族上で，グロモフ・ハウスドルフ距離に関して連続である．

証明における議論の中心の部分は次の主補題である：

補題 4.2. 任意の $\epsilon > 0$ に対して，$R = R(\epsilon, m) > 1$, $\Lambda = \Lambda(\epsilon, m) > 0$, $\delta = \delta(\epsilon, m) > 0$ が存在して次が成立する：M を $\mathrm{Ric}_M \ge -(m-1)\Lambda$ をみたす m 次元完備リーマン多様体，$p \in M$ とする．
$d_{GH}(B_R(p; M), B_R(o; \boldsymbol{R}^m)) < \delta$ ならば $|\mathrm{vol}\, B_1(p; M) - v_0^m(1)| < \epsilon$ である．

ここで，$v_0^m(1)$ は $B_1(o; \boldsymbol{R}^m)$ の体積であった．まず，上の補題を仮定して定理の証明を行う．最初に，上の補題から成り立つ事実を挙げる．次の系 4.3 は補題 4.2 の半径 R を十分大に取らなくても，Λ, δ を十分小に取り直せば，$R = 1$ としてよいことを主張している．

系 4.3. 任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\Lambda = \Lambda(\epsilon, m) > 0$, $\delta = \delta(\epsilon, m) > 0$ が存在して次が成り立つ: M を $\mathrm{Ric}_M \ge -(m-1)\Lambda$ をみたす m 次元完備リーマン多様体とする．$p \in M$ に対して，$d_{GH}(B_1(p; M), B_1(o; \boldsymbol{R}^m)) < \delta$ であれば $|\mathrm{vol}\, B_1(p; M) - v_0^m(1)| < \epsilon$ である．

これを示すのに，まず補題 4.2 の $R = R(\frac{\epsilon}{2}, m)$, $\Lambda = \Lambda(\frac{\epsilon}{2}, m)$, $\delta = \delta(\frac{\epsilon}{2}, m)$ を取る．また，$(1 >)\nu > 0$ を $v_0^m(1 - R\nu) > v_0^m(1) - \frac{\epsilon}{4}$ をみたすように選ぶ．さて，$\boldsymbol{R}^m$ 内に（閉包が）互いに交わらない有限個の距離球 $B_{r_j}(\bar{x}_j) \subset B_{1-R\nu}(o)$ $(0 < r_j < \nu/2)$ を $\sum_j v_0^m(r_j) > v_0^m(1) - \epsilon/2$ をみたすように取る．$\mu := \min\{r_j\}(< \nu/2)$ と置く．いま，$d_{GH}(B_1(p), B_1(o)) < \mu\delta/R$ と仮定する．もし，$x_j \in B_{1-R\nu/2}(p)$ ならば $B_{Rr_j}(x_j) \subset B_1(p)$ に注意しよう．さて $\delta > 0$ に対して，$B_{1-\frac{R\nu}{2}}(p; M)$ に含まれる有限個の互いに交わらない距離球 $B_{r_j}(x_j)$ で

$$d_{GH}(B_{Rr_j}(x_j; M), B_{Rr_j}(\bar{x}_j; \boldsymbol{R}^m)) < \mu\delta$$

をみたすものを取ることができる．いま δ を十分小さく取り，各 j に対して補題 4.2 をスケールを変えて（r_j 倍する．その際，リッチ曲率の仮定が成り立っていることに注意せよ）適用することによって

$$v_0^m(r_j) - \frac{\epsilon r_j^m}{2} < \mathrm{vol}\, B_{r_j}(x_j)$$

が成り立っているとしてよい．$\sum_j r_j^m < 1$ に注意して，j に関して和を取れば

$$v_0^m(1) - \epsilon < \sum_j v_0^m(r_j) - \frac{\epsilon}{2}\sum_j r_j^m < \sum_j \mathrm{vol}\, B_{r_j}(x_j) < \mathrm{vol}\, B_1(p) \le v_{-\Lambda}^m(1)$$

を得る．最後の不等式を示すのに，$\mathrm{Ric}_M \ge -(m-1)\Lambda$ のもとでビショップ比較定理を用いた．最後に，Λ をさらに十分小に取り直して系の主張が得られる．□

次に，系 4.2 を用いて定理 4.1 を示そう．M は $\mathrm{Ric}_M \ge -(m-1)$ をみたすとし

$$\mathrm{vol}\, B_r(p; M) = \liminf_{\delta\to 0}\left\{\sum_j v_{-1}^m(r_j) | B_r(p; M) \subset \bigcup B_{r_j}(x_j),\ r_j \le \delta\right\}$$

であることに注意しよう．$\epsilon > 0$ に対して，$B_r(p; M)$ を $\sum_j v_{-1}^m(r_j) < \frac{\epsilon}{2} + \mathrm{vol}\, B_r(p; M)$ をみたす有限個の距離球 $B_{r_j}(x_j)$ で被覆する．次に，$\delta_0 > 0$ を $\sum_j v_{-1}^m(r_j + 2\delta_0) < \frac{\epsilon}{2} + \sum_j v_{-1}^m(r_j)$ をみたすように選ぶ．

さて，$\mathrm{Ric}_N \ge -(m-1)$ をみたすある m 次元完備リーマン多様体 N と $q \in N$ に対して，$d_{GH}(B_r(p; M), B_r(q; N)) < \delta_0$ が成り立つとする．すると，$\bar{x}_j \in B_r(q; N)$ を選んで $B_r(q; N) \subset \bigcup_j B_{r_j+2\delta_0}(\bar{x}_j)$ とできる．このとき，ビショップの比較定理より

$$\begin{aligned}&\mathrm{vol}\, B_r(q; N) \le \textstyle\sum_j \mathrm{vol}\, B_{r_j+2\delta_0}(\bar{x}_j) \le \sum_j v_{-1}^m(r_j + 2\delta_0)\\ &< \textstyle\sum_j v_{-1}^m(r_j) + \frac{\epsilon}{2} < \mathrm{vol}\, B_r(p; M) + \epsilon\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．

次に，逆の不等式 $\mathrm{vol}\, B_r(p; M) - \epsilon \le \mathrm{vol}\, B_r(q; N)$ を示そう．こちらに系 4.3 を用いる．

まず，有限個の互いに交わらない距離球 $B_{r_j}(x_j) \subset B_r(p; M)$ で

$$\begin{cases} 0 < r_j < \delta, \quad d_{GH}(B_{r_j}(x_j; M),\ B_{r_j}(o; \boldsymbol{R}^m)) < \delta r_j/2, \\ (1+\epsilon)^{-1}\sum_j v_0^m(r_j) \le \mathrm{vol}\, B_r(p; M) \le \sum_j v_0^m(r_j) + \epsilon(1-\epsilon)/2 \end{cases}$$

をみたすものを取る．ただし，$\delta = \delta\left(\frac{\epsilon v_0^m(1)}{2\mathrm{vol}\, B_r(p;M)}, m\right)$ は系 4.3 で与えられたものである．次に，系 4.3 の $\Lambda = \Lambda\left(\frac{\epsilon v_0^m(1)}{2\mathrm{vol}\, B_r(p;M)}, m\right)$ を $\Lambda < \min r_j^2$ となるように取る．もし $d_{GH}(B_r(p; M), B_r(q; N))$ が十分小であれば，互いに交わらない距離球 $B_{r_j}(\bar{x}_j) \subset N$ を $d_{GH}(B_{r_j}(\bar{x}_j), B_{r_j}(o)) < \delta r_j$ となるように選べる．そこで，系 4.3 をスケーリングを変えて (r_j 倍する．その際，リッチ曲率の仮定が成り立っていることに注意せよ) 適用して

$$\mathrm{vol}\, B_{r_j}(\bar{x}_j) - v_0^m(r_j) \ge -\frac{\epsilon\, v_0^m(r_j)}{2\mathrm{vol}\, B_r(p; M)}$$

を得る．j について加えれば

$$\begin{aligned}&\mathrm{vol}\, B_r(q; N) \ge \textstyle\sum_j \mathrm{vol}\, B_{r_j}(\bar{x}_j) \ge \sum_j v_0^m(r_j)\left\{1 - \frac{\epsilon}{2\mathrm{vol}\, B_r(p;M)}\right\}\\ &\ge \mathrm{vol}\, B_r(p; M) - \frac{\epsilon(1-\epsilon)}{2} - \frac{\epsilon(1+\epsilon)}{2} \ge \mathrm{vol}\, B_r(p; M) - \epsilon\end{aligned}$$

となる．よって，補題 4.2 を仮定して定理 4.1 の証明が終わった．□

そこで，補題 4.2 の証明に移る．大体の方針を述べると，L^1 の意味で殆ど等長写像になるハウスドルフ近似 $\Phi : B_1(p) \to B_{1+\epsilon_1}(o; \boldsymbol{R}^m)$ を構成し，$\Phi(B_1(p)) \cap B_1(o)$ が $B_1(o)$ の体積の殆ど全部を占めることを示す．以下，３つの段階に分けて示す．
第１段．まず，任意の $\epsilon_1 > 0$ に対して ϵ_1–ハウスドルフ近似 $\Phi : B_1(p) \to B_{1+\epsilon_1}(o)(\subset \boldsymbol{R}^m)$ を構成する．$\{e_j\}_{j=1}^m$ を $\boldsymbol{R}^m$ の標準基底とする．$R \gg 1, 0 < \delta \ll 1$ に対して，補題 4.2 の仮定から，$e_j^R \in B_R(p)$ を $d_{GH}(Re_j, e_j^R) < \delta$ をみたすように選ぶ．さて，$b_j^+ : M \to \boldsymbol{R}$ を

$$b_j^+(x) := d(e_j^R, x) - d(e_j^R, p) \tag{4.1}$$

と定義すれば，これらはリプシッツ関数で，殆ど至る所 $\|\nabla b_j^+\| = 1$ をみたす．次に

$$\Phi := (b_1^+, \ldots, b_m^+) \tag{4.2}$$

と置けば，$\Phi : M \to \boldsymbol{R}^m$ はリプシッツ定数 $\leq \sqrt{m}$ のリプシッツ写像である．仮定から，$x, y \in B_1(p)$ に対して $|d(x,y) - d(\bar{x}, \bar{y})| < 2\delta$ をみたす $\bar{x}, \bar{y} \in B_{1+2\delta}(o)$ が選べて，$R \gg 1$ に注意すれば

$$|d(e_j^R, x) - d(e_j^R, y)| \approx |d(Re_j, \bar{x}) - d(Re_j, \bar{y})| \approx |\bar{x}_j - \bar{y}_j|$$

を得る．よって，R を十分大に δ を小に取れば，容易に Φ が ϵ_1–ハウスドルフ近似を与えること，すなわち

$$|d(\Phi(x), \Phi(y)) - d(x,y)| < \epsilon_1, \ B_{1+\epsilon}(o) \subset B_{\epsilon_1}(\Phi(B_1(p)))$$

をみたすことが分かる．特に，任意の $\bar{x} \in B_1(o)$ に対して $B_r(\bar{x})$ が $B_1(o)$ に含まれていて $\Phi(\bar{B}_1(p))$ と交わらなければ，$r < \epsilon_1$ である．

次に，微分 $D\Phi_x : T_xM \to \boldsymbol{R}^m$ が，$B_1(p)$ 上 L^1 の意味で殆ど等長的であることを見よう．次が成り立つが，その証明で L^2 版トポノゴフ比較定理を用いる．

補題 4.4. 任意の $\epsilon_2 > 0$ に対して $R = R(\epsilon_2, m) > 1, \delta = \delta(\epsilon_2, m) > 0$ が存在して，$\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1), d_H(B_R(p), B_R(o)) < \delta$ ならば，$j_1 \neq j_2$ に対して

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\, B_1(p)} \int_{B_1(p)} |\langle \nabla b_{j_1}^+, \nabla b_{j_2}^+ \rangle| < \epsilon_2 \tag{4.3}$$

が成り立つ．特に，

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\, UB_1(p)} \int_{UB_1(p)} |\|D\Phi(v)\| - 1| < \epsilon_2 \tag{4.4}$$

としてよい．

証明．まず，定理 3.11 を $(b_j^+(\gamma_v))'(0) = \langle \nabla b_j^+, v \rangle$ に注意して，$R = 1, \Lambda = 1$ として適用する．任意の $\bar{\epsilon} > 0$ に対して $l = l(\bar{\epsilon}, m) > 0$ が存

在して，各 j に対し次式が成立する：

$$\frac{1}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\int_{UB_1(p)}\left|\langle\nabla b_j^+, v\rangle-\frac{b_j^+(\gamma_v(l))-b_j^+(\gamma_v(0))}{l}\right|<\bar{\epsilon}. \tag{4.5}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とし，j_1 を固定して $C_\theta:=\{v\in UB_1(p)|\ \angle(v,\nabla b_{j_1}^+)<\theta\}$ と置く．$v\in C_\theta$ なら $\langle v,\nabla b_{j_1}^+\rangle>\cos\theta$ だから, $v\in C_\theta$ に対して

$$\begin{aligned}&\left|1-\left|\tfrac{b_{j_1}^+(\gamma_v(l))-b_{j_1}^+(\gamma_v(0))}{l}\right|\right|\leq\\&(1-\cos\theta)+\left|\langle\nabla b_j^+, v\rangle-\left|\tfrac{b_{j_1}^+(\gamma_v(l))-b_{j_1}^+(\gamma_v(0))}{l}\right|\right|\end{aligned}$$

である．これを C_θ 上積分して, (4.5) (の積分領域を C_θ に制限したもの) を適用すれば

$$\left\{\begin{aligned}&\tfrac{1}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\int_{C_\theta}\left|1-\left|\tfrac{b_{j_1}^+(\gamma_v(l))-b_{j_1}^+(\gamma_v(0))}{l}\right|\right|\\&\leq(1-\cos\theta)\tfrac{\operatorname{vol} C_\theta}{\operatorname{vol} UB_1(p)}+\bar{\epsilon}\end{aligned}\right. \tag{4.6}$$

を得る．他方，Φ は $\epsilon_1(=\psi(\delta+\frac{1}{R}\mid m))$–ハウスドルフ近似であるから，$j_1\neq j_2$ に対して

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\left\{\int_{C_\theta}\left|\tfrac{b_{j_1}^+(\gamma_v(l))-b_{j_1}^+(\gamma_v(0))}{l}\right|^2+\int_{C_\theta}\left|\tfrac{b_{j_2}^+(\gamma_v(l))-b_{j_2}^+(\gamma_v(0))}{l}\right|^2\right\}\\&\leq\tfrac{1}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\int_{C_\theta}\left\|\tfrac{\Phi(\gamma_v(l))-\Phi(\gamma_v(0))}{l}\right\|^2\leq\tfrac{\operatorname{vol} C_\theta}{\operatorname{vol} UB_1(p)}(1+\tfrac{\epsilon_1}{l})^2\end{aligned} \tag{4.7}$$

である．$v\in C_\theta$ に対し，単位球面の距離に関する３角不等式と余弦公式から

$$\begin{aligned}|\langle\nabla b_{j_2}^+, v\rangle|&\geq|\langle\nabla b_{j_2}^+,\nabla b_{j_1}^+\rangle|\cos\theta-\sin\angle(\nabla b_{j_2}^+,\nabla b_{j_1}^+)\sin\theta\\&\geq|\langle\nabla b_{j_2}^+,\nabla b_{j_1}^+\rangle|\cos\theta-\sin\theta\end{aligned}$$

に注意する．上の不等式を前と同様に C_θ 上積分して, (4.5) を用いれば

$$\begin{aligned}&\tfrac{\cos\theta\, v_1^{m-1}(\theta)}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\int_{B_1(p)}|\langle\nabla b_{j_2}^+,\nabla b_{j_1}^+\rangle|-\sin\theta\tfrac{\operatorname{vol} C_\theta}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\\&\leq\tfrac{1}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\int_{C_\theta}|\langle\nabla b_{j_2}^+, v\rangle|\leq\bar{\epsilon}+\tfrac{1}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\int_{C_\theta}\left|\tfrac{b_{j_2}^+(\gamma_v(l))-b_{j_2}^+(\gamma_v(0))}{l}\right|\end{aligned}$$

を得る．ただし，$\operatorname{vol} C_\theta=v_1^{m-1}(\theta)\operatorname{vol} B_1(p)$ に注意されたい．したがって

$$\left\{\begin{aligned}&\tfrac{\cos\theta}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\int_{B_1(p)}|\langle\nabla b_{j_2}^+,\nabla b_{j_1}^+\rangle|\leq\\&\tfrac{\sin\theta}{v_1^{m-1}(\pi)}+\tfrac{\epsilon_2}{v_1^{m-1}(\theta)}+\tfrac{1}{v_1^{m-1}(\theta)}\tfrac{1}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\int_{C_\theta}\left|\tfrac{b_{j_2}^+(\gamma_v(l))-b_{j_2}^+(\gamma_v(0))}{l}\right|\end{aligned}\right. \tag{4.8}$$

である．さて，$|b_j^+(\gamma_v(l))-b_j^+(\gamma_v(0))|\leq l$ に注意する．すると，コーシー・シュワルツの不等式, (4.6), (4,7) を用いて, すぐ前の不等式 (4.8)

の右辺の最後の項は次のように評価されることが分かる：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\int_{C_\theta}\left|\frac{b_{j_2}^+(\gamma_v(l))-b_{j_2}^+(\gamma_v(0))}{l}\right| \\
&\leq \sqrt{\frac{\operatorname{vol} C_\theta}{\operatorname{vol} UB_1(p)}}\left\{\frac{1}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\int_{C_\theta}\left|\frac{b_{j_2}^+(\gamma_v(l))-b_{j_2}^+(\gamma_v(0))}{l}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{\frac{\operatorname{vol} C_\theta}{\operatorname{vol} UB_1(p)}}\left\{\frac{(1+\frac{\epsilon_1}{l})^2\operatorname{vol} C_\theta}{\operatorname{vol} UB_1(p)}-\frac{1}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\int_{C_\theta}\left|\frac{b_{j_1}^+(\gamma_v(l))-b_{j_1}^+(\gamma_v(0))}{l}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{\frac{\operatorname{vol} C_\theta}{\operatorname{vol} UB_1(p)}}\left\{\frac{\operatorname{vol} C_\theta}{\operatorname{vol} UB_1(p)}((\tfrac{\epsilon_1}{l})^2+2\tfrac{\epsilon_1}{l})\ +\right. \\
&\qquad \left.\frac{1}{\operatorname{vol} UB_1(p)}\int_{C_\theta}\left|1-\left|\frac{b_{j_1}^+(\gamma_v(l))-b_{j_1}^+(\gamma_v(0))}{l}\right|\right|\left|1+\left|\frac{b_{j_1}^+(\gamma_v(l))-b_{j_1}^+(\gamma_v(0))}{l}\right|\right|\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{v_1^{m-1}(\theta)}{v_1^{m-1}(\pi)}\left\{2\bar{\epsilon}\frac{v_1^{m-1}(\pi)}{v_1^{m-1}(\theta)}+\{(\tfrac{\epsilon_1}{l})^2+2\tfrac{\epsilon_1}{l}+2(1-\cos\theta)\}\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

以上の議論をまとめて，(4.3) の左辺は，(4.8) と最後の不等式でまず θ を小に，次に $\bar{\epsilon}$ を小に，最後に R を十分大 δ を十分小に取って ϵ_1 を十分小にすることにより，幾らでも小さくすることが可能である．これで，(4.3) が示せた．(4.4) は (4.3) と ${}^tD\Phi(v)D\Phi(v)=[\langle\nabla b_i^+,\nabla b_j^+\rangle]$ からしたがう． □

第２段．(4.2) で定義された写像 $\Phi: B_1(p)\to B_{1+\epsilon_1}(o)$ に対して

$$
\operatorname{vol}(\Phi(B_1(p)))\leq \operatorname{vol} B_1(p) \tag{4.9}
$$

が $\det D\Phi_x\leq|\nabla b_1^+|\cdots|\nabla b_m^+|\leq 1$ (a.e.) より成立する．以下，我々は任意の $\epsilon>0$ に対して，もし R が十分大で Λ,δ が十分小ならば

$$
\operatorname{vol}(B_1(o)\setminus\Phi(B_1(p)))<\epsilon \tag{4.10}
$$

とできることを示す．このとき, 補題 4.2 は

$$
\begin{aligned}
&v_0^m(1)+\epsilon\geq v_{-\Lambda}^m(1)\geq \operatorname{vol} B_1(p)\geq \operatorname{vol}(\Phi(B_1(p))) \\
&\geq \operatorname{vol} B_1(o)-\operatorname{vol}(B_1(o)\setminus\Phi(B_1(p)))\geq v_0^m(1)-\epsilon
\end{aligned}
$$

よりしたがう．(4.9) を示すのにまず次の準備を行う．任意の $\epsilon>0$ に対し，$\epsilon_3>0$ を十分小に取って $\operatorname{vol}(B_1(o)\setminus B_{1-2\epsilon_3}(o))<\epsilon$ と仮定してよい．$A:=B_1(o)\setminus\Phi(\bar{B}_1(p)), A_1:=B_{1-2\epsilon_3}(o)\setminus\Phi(\bar{B}_1(p))$ と置く．$\operatorname{vol}(A\setminus A_1)<\epsilon$ より，(4.9) を示すには, R,Λ,δ を適当に選んで $\operatorname{vol} A_1$ が幾らでも小さく出来ることを示せばよい．方針を大雑把に述べると，A_1 の主要部を十分小さな（都合のよい性質を持つ）距離球の族で覆い，単位接束をこの族の和集合へ制限したものの部分集合 $C_{1/4}$ を次の性質を持つように構成する：その体積は $\operatorname{vol} A_1$ に比較して定数倍以上あり，$v\in C_{1/4}$ に対しては

$$
\left\|D\Phi(v)-\frac{\Phi(\gamma_v(r_i))-\Phi(\gamma_v(0))}{r_i}\right\|>\frac{1}{4}
$$

が成り立つ．この不等式を $C_{1/4}$ 上積分して, L^2 版比較定理（定理 3.12）を用いて $\operatorname{vol} C_{1/4}$ が小になることを示す（技術的には大分煩雑になる）．

さて，Φ が ϵ_1 $(0<\epsilon_1<\frac{\epsilon_3}{2})$–ハウスドルフ近似だから，$\bar{x}\in A_1$ に対して，$\bar{y}\in\Phi(B_1(p))$ で $d(\bar{x},\bar{y})<\epsilon_1$ をみたすものが取れる．$\bar{y}\in B_1(o)$ である．次に，$\mathrm{vol}\, C>\frac{1}{2}\mathrm{vol}\, A_1$ をみたすコンパクト集合 $C\subset A_1$ と，C の次の意味で極大な有限被覆 $\{B_{r_i}(p_i)(\subset A_1)\}_{i=1}^k$ を選ぶ：$(A_1\supset)B_s(p_i)\supset B_{r_i}(p_i)$ ならば $r_i=s$ となる．ここで，ϵ_1 の定義と $r_i<\epsilon_1$ から $S_{r_i}(p_i)\cap\Phi(\bar{B}_1(p))\neq\emptyset$ に注意しよう（ここでの ϵ_1 は定理 3.12 の $\delta(\epsilon,\Lambda,m)$ より小としてよい）．

さて，上の $\{1,\ldots,k\}$ から部分集合 I_k を次の操作によって選ぶ：$r_1\geq r_2\geq\ldots\geq r_k$ と仮定してよい．$I_1=\{1\}$ から始めて，$I_1\subset\cdots\subset I_k$, $I_i\subset\{1,\ldots,i\}$ を帰納的に，条件

$$i+1\in I_{i+1}\Leftrightarrow B_{3\sqrt{m}r_{i+1}}(p_{i+1})\cap B_{3\sqrt{m}r_j}(p_j)=\emptyset\ (\forall\, j\in I_i)$$

によって定義する．すると，Λ を十分小に選ぶことによって次が成り立つ：

$$S_{r_i}(p_i)\cap\Phi(\bar{B}_1(p))\neq\emptyset, \tag{4.11}$$

$$\{B_{3\sqrt{m}r_i}(p_i)\}_{i\in I_k}\ \text{は互いに交わらない}, \tag{4.12}$$

$$C\subset\bigcup_{i\in I_k}B_{9\sqrt{m}r_i}(p_i)\ \text{かつ}\ \sum_{i\in I_k}v_0^m(r_i)\geq\frac{\mathrm{vol}\, A_1}{3(9\sqrt{m})^m}. \tag{4.13}$$

さて，もうひとつ補題を準備する．$X:B_1(p)\to\boldsymbol{R}^m$ を $\|X\|\equiv 1$ みたす関数とする．$B\subset B_1(p)$ と $\theta>0$ に対して

$$C_{\theta,B}:=\{v\in UB\mid\|D\Phi(v)-X(\pi(v))\|<2\sin(\theta/2)\}$$

と置く．このとき，次が成り立つ．

補題 4.5. 任意の $\epsilon>0$ に対して，$R=R(\epsilon,m,\theta)>1$, $\delta=\delta(\epsilon,m,\theta)>0$ が存在して，$\mathrm{Ric}_M\geq-(m-1), d_H(B_R(p),B_R(o))<\delta$ ならば

$$\frac{\mathrm{vol}\, C_{\theta,B}}{\mathrm{vol}\, UB_1(p)}\geq\frac{v_1^{m-1}(\theta/2)}{v_1^{m-1}(\pi)}\frac{\mathrm{vol}\, B}{\mathrm{vol}\, B_1(p)}-\epsilon \tag{4.14}$$

が成り立つ．

証明. 主張の幾何学的な意味は難しくないが，証明は技術的には煩雑になる．$\epsilon_4>0$ に対して

$$E:=\{q\in B_1(p)\mid|\|D\Phi(v)\|-1|<\epsilon_4;\forall v\in U_qM\}$$

と置く．まず，E は $B_1(p)$ で体積の殆どの部分を占めること見よう（注意 3.13 参照）．$\|D\Phi\|\leq\sqrt{m}$ だから，$\delta_1=\delta_1(m,\epsilon_4)(=\epsilon_4/(2\sqrt{m}))>0$ が存在して，$v_0\in U_xM$, $x\in B_1(p)$ に対して $|\|D\Phi(v_0)\|-1|\geq\epsilon_4$ ならば，$v\in B_{\delta_1}(v_0;U_xM)$ に対して

$$|\|D\Phi(v)\|-1|>\frac{\epsilon_4}{2}$$

が成り立つ．すると補題 4.4 から，任意の $\epsilon_2 > 0$ に対して $R > 1, \delta > 0$ が存在し，$d_H(B_R(p), B_R(o)) < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}&\tfrac{\epsilon_4}{2} v_1^{m-1}(\delta_1)\mathrm{vol}(B_1(p) \setminus E) \le \textstyle\int_{UB_1(p)\setminus D} |\|D\Phi\| - 1| \\ &\le \epsilon_2 \omega_{m-1} \mathrm{vol}\, B_1(p)\end{aligned}$$

を得る．ただし，$D := \{v \in UB_1(p) \mid |\|D\Phi\| - 1| < \epsilon_4\}$ と置いた．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を十分小に $R > 1$ を十分大に取ることによって，$\frac{\mathrm{vol}\, E}{\mathrm{vol}\, B_1(p)} > 1 - \epsilon$ とできる．特に，$B \subset B_1(p)$ に対して

$$\frac{\mathrm{vol}\, B \cap E}{\mathrm{vol}\, B_1(p)} \ge \frac{\mathrm{vol}\, B}{\mathrm{vol}\, B_1(p)} - \epsilon$$

である．次に，$v, w \in U_qM$, $q \in E$ に対して次式が成り立つ：

$$|\langle v, w\rangle - \langle D\Phi(v), D\Phi(w)\rangle| < 3\epsilon_4.$$

よって，T_qM の o.n.b. $\{E_i\}$ を取り，与えられた $X = (a_1, \ldots, a_m)$, $\sum_i a_i^2 = 1$ に対して $Z = \sum_{i=1}^m a_i D\Phi(E_i)$ と置けば，$\|Z - X\| < \psi(\epsilon_4 \mid m)$ をみたす．次に

$$\tilde{C}_{\theta, B\cap E} := \{v \in U(B \cap E) \mid \angle(D\Phi(v), Z(\pi(v))) < \theta\}$$

と置く．いま，$\epsilon_4 > 0$ を小に取り $\psi(\epsilon_4 \mid m, \theta) > 0$ を適当に選べば

$$\tilde{C}_{\theta - \psi(\epsilon_4|m,\theta), B\cap E} \subset C_{\theta, B}$$

をみたすようにできる．このとき

$$\frac{\mathrm{vol}\, C_{\theta,B}}{\mathrm{vol}\, UB_1(p)} \ge \frac{\mathrm{vol}\, \tilde{C}_{\theta-\psi(\epsilon_4|m,\theta), B\cap E}}{\mathrm{vol}\, UB_1(p)} \ge \frac{v_1^{m-1}(\theta - \psi(\epsilon_4 \mid m, \theta))}{v_1^{m-1}(\pi)} \frac{\mathrm{vol}\, B \cap E}{\mathrm{vol}\, B_1(p)}$$

である．したがって，m, θ に応じて ϵ_4 を小に取り，さらに δ を小に $R > 1$ を大に取ることにより

$$\frac{\mathrm{vol}\, C_{\theta,B}}{\mathrm{vol}\, UB_1(p)} \ge \frac{v_1^{m-1}(\theta/2)}{v_1^{m-1}(\pi)} \frac{\mathrm{vol}\, B}{\mathrm{vol}\, B_1(p)} - \epsilon$$

とできる．これで，補題 4.5 の証明が完了した． □

第 3 段． 以上の準備の下で，目的の $\mathrm{vol}\, A_1$ が十分小さいことを示す．そのため，各 $i \in I_k$ に対して，(4.11) より $y_i \in S_{r_i}(p_i) \cap \Phi(\bar{B}_1(p))$ と $\Phi(x_i) = y_i$ をみたす $x_i \in \bar{B}_1(p)$ を選ぶ．Φ はリプシッツ定数 $\le \sqrt{m}$ のリプシッツ写像だから

$$\Phi(B_{\frac{r_i}{2\sqrt{m}}}(x_i)) \subset B_{\frac{r_i}{2}}(y_i) \subset B_{\frac{3r_i}{2}}(p_i)$$

で，ビショップ・グロモフの不等式から

$$\sum \frac{\mathrm{vol}\, B_{\frac{r_i}{2\sqrt{m}}}(x_i)}{\mathrm{vol}\, B_1(p)} \ge \sum \frac{\mathrm{vol}\, B_{\frac{r_i}{2\sqrt{m}}}(x_i)}{\mathrm{vol}\, B_2(x_i)} \ge \sum \frac{v_{-\Lambda}^m(\frac{r_i}{2\sqrt{m}})}{v_{-\Lambda}^m(2)}$$

である．さて，$\theta > 0$ と $i \in I_k$ に対して

$$C_\theta^i := \left\{v \in UB_{\frac{r_i}{2\sqrt{m}}}(x_i) \mid \|D\Phi(v) + \nabla d_{p_i}(\Phi(\pi(v)))\| < 2\sin\frac{\theta}{2}\right\}$$

と置けば，(4.12) からこれらは互いに交わらない．$C_\theta := \bigcup_{i\in I_k} C_\theta^i$ とする．

次に，$B := \bigcup_{i\in I_k} B_{\frac{r_i}{2\sqrt{m}}}(x_i)$ と置き，X を $X \mid B_{\frac{r_i}{2\sqrt{m}}}(x_i) := -\nabla d_{p_i}$ をみたすように取れば，$C_\theta = C_{\theta,B}$ と書けることに注意しよう．補題 4.5 と (4.13) により，任意の $\epsilon > 0$ に対してさらに Λ を十分小に取れば

$$
(4.15)\qquad \begin{cases} \frac{\operatorname{vol} C_\theta}{\operatorname{vol} UB_1(p)} \geq \frac{v_1^{m-1}(\theta/2)}{v_1^{m-1}(\pi)}\left(\sum_{i\in I_k} \frac{\operatorname{vol} B_{r_i/(2\sqrt{m})}(x_i)}{\operatorname{vol} B_1(p)}\right) - \epsilon \\ \geq \frac{v_1^{m-1}(\theta/2)}{v_1^{m-1}(\pi)} \sum_i \frac{v_{-\Lambda}^m(r_i/(2\sqrt{m}))}{v_{-\Lambda}^m(2)} - \epsilon \\ \geq \frac{v_1^{m-1}(\theta/2)}{v_1^{m-1}(\pi)} \sum_i \frac{v_0^m(r_i/(2\sqrt{m}))}{v_{-\Lambda}^m(2)} - \epsilon \\ \geq C(m,\Lambda)\frac{v_1^{m-1}(\theta/2)}{v_1^{m-1}(\pi)} \operatorname{vol} A_1 - \epsilon. \end{cases}
$$

さて，$x \in B_{r_i/(2\sqrt{m})}(x_i), i \in I_k$ に対して，$r_i/2 < d(p_i, \Phi(x)) < 3r_i/2$ に注意すれば　$\Phi(x) - r_i\nabla d_{p_i}(\Phi(x)) \in B_{r_i/2}(p_i)$ である．

次に，$v \in \bigcup_{i\in I_k} UB_{r_i/(2\sqrt{m})}(x_i)$ とする．$\Phi(x_i) = y_i(\in \bar{A}_1), \Phi(p) = o$ より

$$
\begin{aligned} d(p,\pi(v)) &\leq d(p,x_i) + \tfrac{r_i}{2\sqrt{m}} \leq d(o,y_i) + \tfrac{r_i}{2\sqrt{m}} + \epsilon_1 \\ &\leq 1 - 2\epsilon_3 + \tfrac{r_i}{2\sqrt{m}} + \epsilon_3 < 1 - \tfrac{\epsilon_3}{2} \end{aligned}
$$

で，$\gamma_v(r_i) \in B_1(p)$ となる．したがって，

$$
B_{r_i}(p_i) \cap \Phi(\bar{B}_1(p)) = \emptyset, \quad -r_i\nabla d_{p_i}(\Phi(\pi(v))) + \Phi(\gamma_v(0)) \in B_{\frac{r_i}{2}}(p_i)
$$

に注意して，　$i \in I_k$ ならば

$$
\| -r_i\nabla d_{p_i}(\Phi(\pi(v))) + \Phi(\gamma_v(0)) - \Phi(\gamma_v(r_i))\| > \frac{r_i}{2}
$$

すなわち

$$
\left\|\nabla d_{p_i}(\Phi(\pi(v))) + \frac{\Phi(\gamma_v(r_i)) - \Phi(\gamma_v(0))}{r_i}\right\| > \frac{1}{2}
$$

が成り立つ．他方，$v \in C_\theta$ に対しては

$$
\|D\Phi(v) + \nabla d_{p_i}(\Phi(\pi(v)))\| < 2\sin\frac{\theta}{2} \leq \theta
$$

であった．したがって，例えば $\theta = 1/4$ と取れば，$v \in C_{1/4}$ に対して

$$
(4.16)\qquad \left\|D\Phi(v) - \frac{\Phi(\gamma_v(r_i)) - \Phi(\gamma_v(0))}{r_i}\right\| > \frac{1}{4}
$$

である．よって，(4.15), (4.16) より

$$
\begin{aligned} &C(m,\Lambda)\tfrac{v_1^{m-1}(1/8)}{v_1^{m-1}(\pi)} \operatorname{vol} A_1 - \epsilon \leq \tfrac{\operatorname{vol} C_{1/4}}{\operatorname{vol} UB_1(p)} \\ &\leq \tfrac{4}{\operatorname{vol} UB_1(p)} \int_{C_{1/4}} \left\|D\Phi(v) - \tfrac{\Phi(\gamma_v(r_i)) - \Phi(\gamma_v(0))}{r_i}\right\| \\ &\leq \tfrac{4}{\operatorname{vol} UB_1(p)} \int_{UB_1(p)} \left\|D\Phi(v) - \tfrac{\Phi(\gamma_v(r_i)) - \Phi(\gamma_v(0))}{r_i}\right\| < C_1(m,\Lambda)\epsilon \end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，最後の不等式を導くのに定理 3.12 を用いた．これより，$\operatorname{vol} A_1 < \psi(\epsilon \mid m,\Lambda)$ （左辺は $\epsilon \to 0$ のとき $\psi(\epsilon \mid m,\Lambda) \to 0$ を意味する）であり，補題 4.2 の証明が完了した．□

特に，グロモフ・ハウスドルフ距離に関して球面に近い場合は次を得る．

系 4.6. 任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta = \delta(\epsilon, m)$ が存在して次が成立する：$\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)$ をみたす $m(\geq 2)$ 次元完備リーマン多様体 M に対して，$d_H(M, S^m) \leq \delta$ ならば $\omega_m \geq \mathrm{vol}\, M \geq \omega_m - \epsilon$ である．

定理 4.1 は応用上も大事である．まず，無限遠接錐に関する応用を挙げる．(M, g) は非コンパクトな完備リーマン多様体とし，そのスケールを変えた点付リーマン多用体の列 $\{(M, p, r_j^{-2} g)\}$ (ただし， $r_j \uparrow \infty$) を考える．この列が，点付グロモフ・ハウスドルフ距離に関してある弧長空間 M_∞ に収束するとき，M_∞ は M の無限遠接錐であるという．もし，M が非負のリッチ曲率を持てば，グロモフのプレコンパクト性定理より，$(M, p, r_j^{-2} g)$ は収束する部分列を持つ．しかし，無限遠接錐の一意性は一般に成り立たない．

定理 4.7. M をリッチ曲率非負の m 次元完備リーマン多様体とする．もし，M のある無限遠接錐 M_∞ が $\boldsymbol{R}^m$ に等長的ならば，M 自身 $\boldsymbol{R}^m$ に等長的である．

証明. 列 $\{(M, p, g_i = r_i^{-2} g)\}$ が d_{GH} に関して $(\boldsymbol{R}^m, o)$ に収束したとする．定理 4.1 より

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\mathrm{vol}(B_{r_i}(p; g))}{r_i^m} = \lim_i \mathrm{vol}(B_1(p; g_i)) = v_0^m(1).$$

いま，$f(r) := \mathrm{vol}(B_r(p))/r^m$ と置く．(M, g_i) が再び非負リッチ曲率多様体であることに注意して，ビショップ・グロモフの定理を用いれば，$f(r)$ は単調非増加で $f(r) \leq v_0^m(1)$ であることが分かる．他方，上より $\lim f(r_i) = v_0^m(1)$. よって， $f \equiv v_0^m(1)$ で，M は $\boldsymbol{R}^m$ に等長的である（系 2.5). □

注意 4.8. (1) 体積の連続性については，定理 *4.1* の状況で極限空間 $X = \lim M_i$ が崩壊しない場合（すなわち，ある $v > 0$ が存在して $\mathrm{vol}\, M_i \geq v$ が成り立つ場合）には，X に m 次元ハウスドルフ測度を与えれば体積の連続性が成り立つ．また，k 次元リーマン多様体 M^k に崩壊する場合でも，k 次元ハウスドルフ容量に関しては連続性が成り立つ（[CCo 2,3] を参照).

(2) $\{M_i^m\}$ は $\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)$ をみたす m 次元リーマン多様体の列で，滑らかな m 次元多様体 M にグロモフ・ハウスドルフ距離に関して収束したとする．体積の連続性から，十分小さな半径の M_i の距離球の体積は，十分大きな各 i に対して殆ど極大である（同じ半径の $\boldsymbol{R}^m$ の距離球の体積に殆ど等しい). これと，§6 で述べるペレルマンの結果（補題 *6.3*) を用いて，コールディングは次を示した ([Co 3])：上の状況で $\epsilon = \epsilon(M) > 0$ が存在して，十分大きな各 i と任意の $p \in M$ に対して，$\pi_1(B_\epsilon(p; M_i))$ の自然な包含写像による像は $\pi_1(M_i)$ で自明となる（深谷・山口の予想 [FYa]).

(3) 連続性の定理の逆として，リッチ曲率の仮定の下に十分小さな距離球の体積が同じ半径のユークリッド距離球の体積に近ければ，それ

らのグロモフ・ハウスドルフ距離も近いことを示せる（定理 6.19 参照).

(4) 連続性の応用として，コールディング（[Co 3]）はさらに序で述べたグロモフ予想を証明した：$\epsilon = \epsilon(m) > 0$ が存在して，m 次元コンパクト・リーマン多様体 M が $d^2(M)\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)\epsilon$ をみたし，$b_1(M) = m$ ならば M はトーラス T^m に（微分）同相である.

5. 極限空間での分裂定理

最初に，チーガー・グロモールの分裂定理 ([CGr]) を復習しよう．完備リーマン多様体 M の正規測地線 $\gamma : \boldsymbol{R} \to M$ は，$d(\gamma(s), \gamma(t)) = |t-s| (\forall s, t \in \boldsymbol{R})$ をみたすとき直線と呼ばれる．すなわち，γ の任意の２点に対して，これらを端点とする γ の部分はこれら２点を結ぶ最短線であり，また M が直線を許容すればコンパクトとはなり得ない．直線は，もっと一般に完備弧長空間でも同様に定義される．チーガー・グロモールの分裂定理は次を主張する：

定理 5.1. M をリッチ曲率非負の m 次元完備リーマン多様体とする．M が直線を含めば分裂する．すなわち，$(m-1)$ 次元の完備リッチ曲率非負のリーマン多様体 N が存在して，M はリーマン直積 $\boldsymbol{R} \times N$ に等長的である.

証明について簡単に触れる．$t \geq 0$ に対し，$\gamma^+(t) := \gamma(t), \gamma^-(t) := \gamma(-t)$ により与えられた $\gamma(0)$ を始点とする２つの半直線 $\gamma^\pm$ を取り，それらのブーゼマン関数 $b_\pm$，すなわち，

$$b_\pm(q) := \lim_{t \to +\infty} (t - d(q, \gamma^\pm(t))) \tag{5.1}$$

を考える．リッチ曲率非負の仮定に注意して，距離関数のラプラシアンに関する比較定理（定理 2.12）から，$b_\pm$ は劣調和関数となる（正確には距離関数は可微分でない点があるので，ここではバリアによる近似の弱い意味で云っている．しかし最大値原理は成り立つ．§2 のエクセス評価の議論参照)．３角不等式から $b_+ + b_- \leq 0$ で，γ 上では $b_+ + b_- = 0$ だから最大値原理により $b_- \equiv -b_+$ を得る．次に，$b_\pm$ が調和関数であることを見よう．$p \in M$ を中心とする（半径十分小の）距離球を考え，$h_\pm$ をその境界上で $b^\pm$ に一致する B 上の調和関数とする．最大値原理を劣調和関数 $b_\pm - h_\pm$ に適用して，$b_\pm \leq h^\pm$ を得る．$0 = b_+ + b_- \leq h_+ + h_-$ に注意して，もう一度最大値原理を $h_+ + h_-$ に適用すれば，境界で最大値 0 を取るから $h_+ + h_- = b_+ + b_- = 0$，したがって $b_+ = h_+, b_- = h_-$ を得る．よって $b_\pm$ も調和関数となり，特に滑らかである.

他方，距離関数の性質より $\|\nabla b_\pm\| \equiv 1$ も成り立つ．これより，ボホナーの公式に注意すれば

$$0 = -\frac{1}{2}\Delta\|\nabla b_\pm\|^2 = \|D^2 b_\pm\|^2 + \mathrm{Ric}_M(\nabla b_\pm, \nabla b_\pm) - \langle \nabla b_\pm, \nabla \Delta b_\pm \rangle \geq 0$$

で，$D^2 b_\pm \equiv 0$ となる．すなわち，$b_\pm$ のレベルは全測地的である．$\nabla b_\pm$ の流れを φ_s とし，$\Phi(s, x) := \varphi_s(x), x \in N := (b_\pm)^{-1}(0)$ と置けば，$\Phi : \boldsymbol{R} \times N \to M$ は等長写像となることを示すことができる．□

この定理の応用として，チーガー・グロモールは非負リッチ曲率を許容するコンパクト多様体 M の基本群 $G := \pi_1(M,p)$ は殆ど結晶群であること示した（[CGr]）．すなわち，G の有限正規部分群 H が存在して G/H が結晶群（ユークリッド空間の運動群の一様離散部分群）に同型である．証明は M の普遍被覆空間に上の分裂定理を適用すればよい．

さてチーガー・コールディング（[CCo 1]）は，この分裂定理を殆ど非負リッチ曲率の完備リーマン多様体の列の点付きグロモフ・ハウスドルフ距離に関する極限空間の場合に拡張した．それについて以下述べるが，先の質的な議論を量的な評価で置き換えることが必要となる．

以下，m 次元リーマン多様体 M で次の状況を考える.（非常に離れた）２点 $q^-, q^+ \in M$ を取り，エクセス関数

$$E(x) = d(q^-, x) + d(q^+, x) - d(q^-, q^+) \tag{5.2}$$

を考える．また，$s^-(x) := d(x, q^-), s^+(x) := d(x, q^+)$，$s(x) := \min(s^-(x), s^+(x))$ と置く．次がこの節の主要な主張である．

定理 5.2. 任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\tau = \tau(\epsilon, m) > 0$ と $L = L(\epsilon, m) > 1$ が存在して次が成立する：$p \in M$ と $R > 0$ に対して

$$\begin{cases} s(p) \geq LR, \quad E(p) \leq \tau R, \\ \mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)\tau R^{-2} \quad (B_{2LR}(p) \text{ 上で}) \end{cases} \tag{5.3}$$

が成り立つならば，距離空間 Z と $\underline{p} \in X := \boldsymbol{R} \times Z$ が存在して，グロモフ・ハウスドルフ距離 d_{GH} に関して

$$d_{GH}(B_R(p; M), B_R(\underline{p}; X)) \leq \epsilon R$$

が成立する．

注意 5.3. 直線を含む断面曲率非負の完備リーマン多様体に対する分裂定理は *V.I.* トポノゴフにより与えられた（[T]）．証明は３角形の比較定理による幾何学的議論で出来る：この場合，ブーゼマン関数 $b_\pm$ は凸関数となる．他方，３角不等式から $b_+ + b_- \leq 0$ で，凸関数 $b_+ + b_-$ は上に有界となる．これより $b_+ + b_- \equiv 0$ となり，$b_\pm$ はアフィン関数であり，そのレベルは全測地的となる．この証明法は曲率が０以上のアレキサンドロフ空間の場合にも原則として適用される．

以下，定理 5.2 の証明をいくつかの段階に分けて行う．
第１段（エクセス関数の評価）.

３角不等式から $E(x) \geq 0$, $\mathrm{dil}E(:= \sup \frac{|E(x)-E(y)|}{d(x,y)}) \leq 2$ である．また，リッチ曲率に関する仮定 $\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)\tau$ の下で，距離関数のラプラシアン評価から

$$\Delta E \geq -(m-1)\left\{\frac{c_{-\tau}(s^-)}{s_{-\tau}(s^-)} + \frac{c_{-\tau}(s^+)}{s_{-\tau}(s^+)}\right\} \tag{5.4}$$

が（一般のバリア意味で）成り立つ．$c_{-\tau}(s)/s_{-\tau}(s)$ は s に関して単調減少であることを注意しておこう．

命題 5.4. 任意の $\epsilon > 0$ に対し，$\tau = \tau(\epsilon, m) > 0$, $L = L(\epsilon, m) > 1$ が存在し，$p \in M$ と $R > 0$ に対して *(5.3)* が成立すれば

$$\sup_{B_R(p)} E \leq \epsilon R \tag{5.5}$$

が成り立つ．

証明. 証明の際，計量のスケールを定数倍して $R = 1$ の場合を考えれば十分である．$x \in B_1(p) \setminus \{p\}$ とする．十分小さな $a > 0$ に対して，$B_{1+a}(x) \setminus \{x\}$ 上で定義された関数 $G = G \circ r$, $r = d_x$ を考える．ここで，$G : (0, 1+a] \to (0, \infty)$ は補題 2.15 で与えられたものである．今の場合，$R = 1 + a$ かつ

$$s_0 := \min\{s(z) \mid z \in \bar{B}_{1+a}(x)\} \tag{5.6}$$

と置いて，b を $b > 2(m-1)\frac{c_{-\tau}(s_0)}{s_{-\tau}(s_0)}$ をみたすように選ぶ．すると，対応する G に対しては，(5.4) と G の性質より

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial r} < 0 \ (0 < r < 1 + a), & G(1+a) = 0, \\ \Delta(E - G) > 0 & (B_{1+a}(x) \setminus \{x\} \text{ 上で}) \end{cases} \tag{5.7}$$

が成り立つ．よって，任意の $1 > c > 0$ に対して，最大 (小) 値原理から $E - G$ は $B_{1+a}(x) \setminus B_c(x)$ の内点で最小値を取ることはない．

さて，仮定の τ を $0 < \tau < G(1)$ をみたすように選べば，$d(x,p) < 1$ だから $(E - G)(p) \leq \tau - G(p) < \tau - G(1) < 0$ であることが分かる．以下，円環面 $\bar{B}_{1+a}(x) \setminus B_c(x)$, $0 < c < d(p,x)$ 上で関数 $E - G$ を考える．これは $\partial B_{1+a}(x)$ で最小値を取ることはない．実際，p はこの円環面の内点で $E(p) - G(p) < 0$ をみたすが，$z \in \partial B_{1+a}(x)$ に対しては，$E(z) \geq 0$, $d(p,x) < 1$ に注意して

$$(E - G)(z) - (E - G)(p) \geq G(p) - E(p) > 0$$

が成り立つからである．

以下，これより $E(x) \leq 2c + G(c)$ が従うことを見よう．実際，そうでなければある $z \in \partial B_c(x)$ が存在して，$\mathrm{dil}\, E \leq 2$ に注意すれば，$E(z) \geq E(x) - 2c > G(c) = G(z)$ となる．$E(p) - G(p) < 0$ であったから，$E - G$ は $\partial B_c(x)$ で最小値を取り得ないことになる．前の議論と合わせると $E - G$ は $\bar{B}_{1+a}(x) \setminus B_c(x)$ の境界で最小値を取り得ないので，これは最大 (小) 値原理に矛盾する．

さて命題の証明に戻り，$\epsilon > 0$ を任意に与える．$E(p) < \tau$ だから，十分小さな $\eta_0 > 0$ を選び $d(p,x) \leq \eta_0$ ならば $E(x) \leq 2\tau < \epsilon$ とできる．他方，$d(p,x) > \eta_0$ ならば上の議論で $c = \eta_0$ と置いて，$E(x) \leq 2\eta_0 + G(\eta_0)$ を得る．ここで，$c_{-\tau}(s_0)/s_{-\tau}(s_0) = \sqrt{\tau}\cosh(\sqrt{\tau}s_0)/\sinh(\sqrt{\tau}s_0)$ であった．よって，定義から $G(\eta_0)$ (同じことだが，b 或いは，$(m-1)c_{-\tau}(s_0)/s_{-\tau}(s_0)$) は τ を十分小にし，次に s_0 (同じことだが L) を十分大にすることによりいくらでも小さくできる． □

このようなエクセス評価は，最初アブレッシュ・マイヤーにより考察された (§2.2 参照)．以下，$\tau < 1$ とする．特に，リッチ曲率は一様

に下から押さえられているとして良い．

第２段（距離関数の調和関数による近似）．

距離関数 $b^{\pm}(x) := d(x, q^{\pm}) - d(p, q^{\pm})$ を距離球 $B_R(p)$ に制限して，例えば b^+ を $b \mid \partial B_R(p) = b^+ \mid \partial B_R(p)$ をみたす調和関数 b で近似することを考える．以下，R に対して τ, L^{-1} を十分小に取ることにより，b のヘッシアン $D^2 b$ が L^2 ノルムに関していくらでも小さくできることを示したい．まず次に注意する．

補題 5.5. 命題 *5.4* の状況で考えるとき次が成り立つ：

$$|b - b^+| \le \psi(\tau, L^{-1} \mid m)R. \quad (B_R(p)\ \text{上で}) \tag{5.8}$$

ここで，m, τ, L に依存する正定数 $\psi(\tau, L^{-1} \mid m)$ は，次元 m を固定するとき，$\tau, L^{-1} \downarrow 0$ ならば $\psi(\tau, L^{-1} \mid m) \downarrow 0$ であることを意味する．

証明. 再び $R = 1$ として良い． ラプラシアンの比較定理から

$$\Delta b^{\pm} \ge -(m-1)\frac{c_\tau}{s_\tau} \circ d_{q^{\pm}} \ge -(m-1)\frac{c_\tau}{s_\tau}(L) =: -\psi(\tau, L^{-1} \mid m)$$

が成り立つ． $\bar{B}_1(p)$ 上の補助関数 H を $\Delta H + 1 < 0, c(m) \ge H > 0$ をみたすように取る (注意 2.22 参照)．すると

$$\Delta(-b^+ + b + \psi H) \le \psi(\Delta H + 1) < 0 \tag{5.9}$$

で，最大値原理より $-b^+ + b + \psi H \le \psi H(1)$，すなわち，$b^+ - b \ge -c(m)\psi$ を得る．$b^+(x) + b^-(x) = E(x) - E(p)$ であったから，命題 5.4 より $B_1(p)$ 上で，$-\tau < b^+(x) + b^-(x) < \epsilon$ である．

同様にして，$\Delta(-b^- - b + \psi H) < 0$ であり，したがって最大値原理より

$$-b^- - b + \psi H \le -\min\{(b^+ + b^-) \mid \partial B_1(p)\} + c(m)\psi.$$

これより，$b + b^- > -\tau - c(m)\psi$ で，$b^+ + b^- > -\tau$ に注意すれば

$$b^+ - b = b^+ + b^- - (b + b^-) < \epsilon + \tau + c(m)\psi$$

が成り立ち，証明が終わる． □

さて，定理 2.12 を $\phi(t) = t, \Omega = B_R(p)$ として，d_{q^+} に適用（正確には注意 2.14 (2) を参照）すれば

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{B_R(p)} |\Delta b^+|\, d\nu_g \le 2\max_{x \in B_R(p)}\{-\Delta_{M^m_{\tau R^{-2}}} r\ |_{r = d_{q^+}(x)}\}\operatorname{vol} B_R(p) \\ + \operatorname{vol}_{m-1} \partial B_R(p)\end{aligned}$$

を得る．ここで，ビショップ・グロモフ体積比較定理に注意して

$$\begin{cases} \operatorname{vol}_{m-1}\partial B_R(p) \le \dfrac{\operatorname{vol}_{m-1}\partial B_R(*; M^m_{-\tau R^{-2}})}{\operatorname{vol} B_R(*; M^m_{-\tau R^{-2}})}\operatorname{vol} B_R(p) \\ \quad = \dfrac{\sqrt{\tau}\sinh^{m-1}\sqrt{\tau}}{\int_0^{\sqrt{\tau}}\sinh^{m-1} u\, du}\dfrac{\operatorname{vol} B_R(p)}{R} \le \dfrac{c_1(m)}{R}\operatorname{vol} B_R(p), \\ -\Delta_{M^m_{\tau R^{-2}}} r\ |_{r = d_{q^+}(x)} \le (m-1)\dfrac{c_{-\tau R^{-2}}(LR)}{s_{-\tau R^{-2}}(LR)} \\ \quad \le (m-1)\dfrac{\sqrt{\tau}}{R}\dfrac{\cosh(\sqrt{\tau}(L-1))}{\sinh(\sqrt{\tau}(L-1))} \le \dfrac{\psi(\tau, L^{-1} \mid m)}{R}. \end{cases}$$

すなわち,

$$\frac{1}{\operatorname{vol} B_R(p)} \int_{B_R(p)} |\Delta b^+|\, d\nu_g \leq \frac{c_2(m)}{R} \tag{5.10}$$

が成立する.

補題 5.6. 命題 *5.4* の状況で考えるとき次が成り立つ：

$$\frac{1}{\operatorname{vol} B_R(p)} \int_{B_R(p)} \|\nabla(b - b^+)\|^2 d\nu_g \leq \psi(\tau, L^{-1} \mid m). \tag{5.11}$$

証明. グリーンの公式より

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{B_R(p)} \|\nabla(b-b^+)\|^2 d\nu_g = \int_{B_R(p)} \Delta(b-b^+)\cdot(b-b^+) d\nu_g \\ &\leq R\psi \textstyle\int_{B_R(p)} |\Delta b^+| d\nu_g \leq c_2(m)\psi \cdot \operatorname{vol} B_R(p)\end{aligned}$$

で, これより主張がしたがう. □

以上の準備の下に, 第２段の目的のヘッシアンの L^2 ノルムの評価を得る.

命題 5.7. 命題 *5.4* の状況で考えるとき次が成り立つ.

$$\frac{1}{\operatorname{vol} B_{R/2}(p)} \int_{B_{R/2}(p)} \|D^2 b\|^2\, d\nu_g \leq \frac{\psi(\tau, L^{-1} \mid m)}{R^2}. \tag{5.12}$$

証明. 計量のスケーリングにより $R = 1$ としてよい. ボホナーの公式を調和関数 b に適用して

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Delta\|\nabla b\|^2 &= -\|D^2 b\|^2 - \operatorname{Ric}_M(\nabla b, \nabla b) \\ &\leq -\|D^2 b\|^2 + (m-1)\tau\|\nabla b\|^2.\end{aligned}$$

ここで ϕ を定理 2.18 で与えられたカットオフ関数とし, 上の不等式の両辺に ϕ をかけて

$$\phi\|D^2 b\|^2 \leq (m-1)\tau\phi\|\nabla b\|^2 - \frac{1}{2}\phi\Delta\|\nabla b\|^2$$

となる. ここで, 次の式に注意する.

$$\begin{cases} -\phi\Delta\|\nabla b\|^2 &= \operatorname{div}\{\phi\nabla(\|\nabla b\|^2) - \|\nabla b\|^2\nabla\phi\} - \Delta\phi\|\nabla b\|^2, \\ \quad\|\nabla b\|^2 &= \langle\nabla(b-b_+), \nabla b\rangle + \langle\nabla(b-b_+), \nabla b_+\rangle + \|\nabla b_+\|^2, \\ -\Delta\phi\|\nabla b\|^2 &\leq |\Delta\phi|\|\nabla(b-b_+)\|(\|\nabla b(x)\| + 1) - \Delta\phi\ (a.e.). \end{cases}$$

また, リィ・ヤウの勾配評価（定理 2.24）により, $\sup\{\|\nabla b(x)\|; x \in B_{\frac{1}{2}}(p)\} \leq c(m)$ である. これらと補題 5.6, グリーンの公式, コーシー・シュワルツの不等式に注意して

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{B_{\frac{1}{2}}(p)} \|D^2 b\|^2 \leq \int_{B_1(p)} \phi\|D^2 b\|^2 \\ &\leq \textstyle\int_{B_1(p)} \{(m-1)\tau\phi\|\nabla b\|^2 - \frac{1}{2}\phi\Delta\|\nabla b\|^2\} \\ &\leq \tau c_1(m)\operatorname{vol} B_1(p) - \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{B_1(p)} \Delta\phi\|\nabla b\|^2 \\ &\leq \tau c_1(m)\operatorname{vol} B_1(p) + c_2(m)\textstyle\int_{B_1(p)} \|\nabla(b-b_+)\| - \tfrac{1}{2}\int_{B_1(p)} \Delta\phi \\ &\leq \psi(\tau, L^{-1} \mid m)\operatorname{vol} B_1(p).\end{aligned}$$

ここで，$\int_{B_1(p)} \Delta\phi = 0$ を用いた．$\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)$ としてよかったから，ビショップ・グロモフの体積比較定理より $\mathrm{vol}\, B_1(p) \leq c_3(m) \mathrm{vol}\, B_{1/2}(p)$ に注意して，命題の証明が終わる． □

以下，$R = 2R_1$ と置くことにより，命題5.4 の仮定 (5.5) が $R = 2R_1$ に対して成り立つときは，コーシー・シュワルツの不等式に注意して

$$(5.13)\qquad \begin{cases} |b - b^+| \leq \psi(\tau, L^{-1} \mid m) R_1 \quad (B_{R_1}(p) \text{ 上で}), \\ \frac{1}{\mathrm{vol}\, B_{R_1}(p)} \int_{B_{R_1}(p)} \|\nabla(b - b^+)\| \leq \psi(\tau, L^{-1} \mid m), \\ \frac{1}{\mathrm{vol}\, B_{R_1}(p)} \int_{B_{R_1}(p)} \|D^2 b\| \leq \frac{\psi(\tau, L^{-1}|m)}{R_1} \end{cases}$$

が成立しているとしてよい．以下，(5.13) の各式の右辺を，共通の δ_1 によって表す．このとき R_1 に対して，δ_1 は τ, L^{-1} を十分少に取ることにより，いくらでも小さくできることを注意しよう．

第３段（測地線に沿っての挙動）．

次に積分評価 $(5.13)_3$ に，コールディングの方法（定理 2.11）を，$A_1 = A_2 = B_R(p), W = B_{2R}(p), D(A_1, A_2) = D(A_2, A_1) = 2R$ として適用して，これを測地線の空間における積分評価に転換しよう．次が成立する．

命題 5.8. $B_{4R}(p)$ 上で $\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)\tau R^{-2}$ であり

$$(5.14)\qquad \frac{1}{\mathrm{vol}\, B_{2R}(p)} \int_{B_{2R}(p)} \|D^2 b\| d\nu_g \leq \delta_1$$

が成り立つならば

$$(5.15)\qquad \begin{cases} \frac{1}{(\mathrm{vol}\, B_R(p))^2} \int_{B_R(p) \times B_R(p)} dy_1 dy_2 \int_0^l \|D^2 b\| \circ \gamma_{y_1 y_2}(s) ds \\ \leq c(m, \tau, R)\delta_1. \end{cases}$$

ただし，$l := d(y_1, y_2)$ と置いた．

さて，$y_1, y_2 \in B_R(p)$ を固定して，y_1 と y_2 を結ぶ弧長を径数とする最短測地線 $\gamma_{y_1 y_2}$ を取り

$$(5.16)\qquad \mathcal{U}(s) = \mathcal{U}(s; y_1, y_2) := b(\gamma_{y_1 y_2}(s))$$

と置く．このとき，$\mathcal{U}'(s) = \langle \nabla b, \dot\gamma_{y_1 y_2}(s) \rangle$ であり，ヘッシアンの定義から $D^2 b(\dot\gamma_{y_1 y_2}, \dot\gamma_{y_1, y_2}) = \mathcal{U}''(s)$ が成り立つ．すると，(5.15) を

$$\frac{1}{(\mathrm{vol}\, B_R(p))^2} \int_{B_R(p) \times B_R(p)} dy_1 dy_2 \int_0^l |\mathcal{U}''(s)| ds \leq c(m, \tau, R)\delta_1$$

の形に書くことができる（定理 2.11 の前の注意を参照されたい）．

b^+ は本質的には点 q^+ からの距離関数であった．$\epsilon > 0$, $y_1 \in B_R(p)$ に対して，$D_\epsilon(y_1)$ で次をみたすような点 $y_2 \in B_R(p)$ の集合を表す：ただ一つの最短測地線 $\gamma_{y_1 y_2}$ が存在して，$[0, l]$ $(l := d(y_1, y_2))$ の殆どすべての s に対して $\gamma_{y_1 y_2}(s)$ で ∇b^+ が一意に定まって

$$(5.17)\qquad \begin{cases} \int_0^l |\mathcal{U}''(s)| ds < \epsilon, \\ \int_0^l \|\nabla b - \nabla b^+\| \circ \gamma_{y_1 y_2}(s) ds < \epsilon, \\ \|\nabla b(y_2) - \nabla b^+(y_2)\| < \epsilon \end{cases}$$

が成り立つ．さて

$$Q_\epsilon := \{y_1 \in B_R(p) \mid \|\nabla b(y_1) - \nabla b_+(y_1)\| < \epsilon,\\ \mathrm{vol}\, D_\epsilon(y_1) \geq (1-\epsilon)\mathrm{vol} B_R(p)\}$$

と置けば，次が成立する．

補題 5.9. 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\zeta = \zeta(\epsilon, m, \tau, R) > 0$ が存在して，$0 < \delta_1 < \zeta$ が（$R_1 = 2R$ と置いた）*(5.13)* で成立すれば

$$\mathrm{vol}\,(Q_\epsilon) \geq (1-\epsilon)\mathrm{vol}\, B_R(p) \tag{5.18}$$

である．

実際，体積の計算を実行すれば，仮定から $\mathrm{vol}(B_R(p)\backslash Q_\epsilon) \leq \epsilon \mathrm{vol}\, B_R(p)$ が成り立つことが分かる（補題 3.13 を参照）．

そこで，$\mathcal{U}_+(s) := b^+(\gamma_{y_1 y_2}(s))$ と置けば，$(5.17)_2$ から

$$\int_0^l |\mathcal{U}'(s) - \mathcal{U}'_+(s)| ds < \epsilon \tag{5.19}$$

が $y_2 \in D_\epsilon(y_1)$ に対して成り立つ．

以上の準備の下で，$B_R(p) \subset M$ の距離構造を（Z をうまく選んで）リーマン直積 $X = \boldsymbol{R} \times Z$ の距離球のそれと比較することができる．

第４段 (直積空間の距離構造).

まず，リーマン直積 $X = \boldsymbol{R} \times Z$ の距離の基本的性質を復習しておこう：次はピタゴラスの定理である．

$$\left\{ \begin{aligned} d_X((r_1, z_1), (r_2, z_2)) &= \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + d_Z^2(z_1, z_2)} \\ &=: \rho(r_1, r_2, d_Z(z_1, z_2)). \end{aligned} \right. \tag{5.20}$$

また，３角不等式

$$\rho(r_1, r_3, v_1 + v_2) \leq \rho(r_1, r_2, v_1) + \rho(r_2, r_3, v_2)$$

が成り立ち，r_2 を適当に選ぶと等号が成立する．さて，$\underline{r} : \boldsymbol{R} \times Z \to \boldsymbol{R}$, $\underline{\pi} : \boldsymbol{R} \times Z \to Z$ を標準的な射影とする．いま，$\underline{x}_i, \underline{y}_i \in \boldsymbol{R} \times Z (i = 1, 2)$ は $\underline{\pi}(\underline{x}_1) = \underline{\pi}(\underline{y}_1), \underline{\pi}(\underline{x}_2) = \underline{\pi}(\underline{y}_2)$ をみたすとする．このとき，

$$\left\{ \begin{aligned} & d_X(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \\ & \quad = \sqrt{d_X(\underline{x}_1, \underline{x}_2)^2 + (\underline{r}(\underline{y}_2) - \underline{r}(\underline{y}_1))^2 - (\underline{r}(\underline{x}_2) - \underline{r}(\underline{x}_1))^2} \\ & \quad =: Q(\underline{r}(\underline{x}_1), \underline{r}(\underline{y}_1), \underline{r}(\underline{x}_2), \underline{r}(\underline{y}_2), d_X(\underline{x}_1, \underline{x}_2)), \\ & \rho(r_1, r_2, v) = Q(0, r_1, 0, r_2, v) \end{aligned} \right. \tag{5.21}$$

と書ける．さて，Z はリーマン多様体であるとし，$\underline{\gamma}(s) = (\underline{r}(s), \underline{c}(s)), 0 \leq s \leq l$ を $X = \boldsymbol{R} \times Z$ の弧長を径数とする測地線とする．$\underline{\theta}(s) := \angle(\dot{\underline{\gamma}}(s), \frac{\partial}{\partial r})$ は定数であり，$\underline{r}, \underline{\theta}$ は測地線に沿って

$$\left\{ \begin{aligned} & \underline{r}(\underline{\gamma}(s)) = r_0 + (r_l - r_0)\tfrac{s}{l} =: \underline{\mathcal{U}}_+(s) (= \underline{\mathcal{U}}_+(s; r_0, r_l, l)) \\ & \cos \underline{\theta}(s) = \underline{\mathcal{U}}'_+(s) = \tfrac{r_l - r_0}{l}, \quad \underline{\theta}(s) =: \Theta(r_0, r_l, l) \end{aligned} \right. \tag{5.22}$$

をみたす．ただし，$r_0 = \underline{r}(0), r_l = \underline{r}(l)$ と置いた．$\underline{r}, \underline{\theta}$ は l と境界条件 r_0, r_l のみに依存し，Z 上のリーマン計量には依らないことを注意しよう．

さて，$\underline{x} \in X$ とし，$\underline{x}_2, \underline{y}_2 \in X = \boldsymbol{R} \times Z$ は $d(\underline{x}_2, \underline{y}_2) = \underline{r}(y_2) - \underline{r}(x_2)$ をみたすとする．つまり，これらは同じ直線 $\boldsymbol{R}$ 上にあるとする．$\underline{\lambda}$ を $\underline{x}_2$ と $\underline{y}_2$ を結ぶ最短測地線とし，$\underline{l}(s) := d(\underline{x}, \underline{\lambda}(s))$ と置く．すると

$$\underline{l}(s) = \sqrt{(s+a)^2 + b^2}, \quad \underline{l}'(s) = \frac{s+a}{\underline{l}(s)}$$

が成り立つ．ただし，$a := \underline{r}(\underline{x}_2) - \underline{r}(\underline{x})$ と置き，b は $a^2 + b^2 = \underline{l}(0)^2$ から定まる．また，$d = d(\underline{x}_2, \underline{y}_2) = \underline{r}(y_2) - \underline{r}(x_2)$ に対して

$$\underline{l}(d) = Q(\underline{r}(\underline{x}), \underline{r}(\underline{x}), \underline{r}(\underline{x}_2), \underline{r}(\underline{y}_2), \underline{l}(0)) \tag{5.23}$$

と書ける．

第５段（距離構造の比較）.

さて、M の２点 $y_1, y_2 \in B_R(p)$ を結ぶ測地線 $\gamma_{y_1 y_2}$ に沿って定義された先の $\mathcal{U}, \mathcal{U}_+$ に戻る．モデルの空間 X で, 対応する微分方程式

$$\underline{\mathcal{U}}''(s) = 0, \quad \underline{\mathcal{U}}(0) = b(y_1), \quad \underline{\mathcal{U}}'(0) = \langle \nabla b(y_1), \dot{\gamma}_{y_1 y_2}(0)) \rangle =: \alpha$$

を考えれば，これは容易に解けて $\underline{\mathcal{U}}(s) = b(y_1) + \alpha s$ である．また

$$\underline{\mathcal{U}}_+(s) = \underline{\mathcal{U}}_+(s; b^+(y_1), b^+(y_2)) := b^+(y_1) + \frac{b^+(y_2) - b^+(y_1)}{l} s \tag{5.24}$$

と置き，以下 $\mathcal{U}$ および $\mathcal{U}_+$ をそれぞれ $\underline{\mathcal{U}}$, $\underline{\mathcal{U}}_+$ と比較する．

補題 5.10. $B_{2R}(p)$ 上で $|b - b_+| < \epsilon$ が成り立つとする．このとき，$y_2 \in D_\epsilon(y_1)$ に対して

$$|\mathcal{U}_+(s) - \underline{\mathcal{U}}_+(s)| \leq 2\epsilon s + 4\epsilon \leq 4(R+1)\epsilon, \tag{5.25}$$

$$\int_0^l |\mathcal{U}_+'(s) - \underline{\mathcal{U}}_+'(s)| ds \leq 3\epsilon + 2\epsilon l \leq (4R+3)\epsilon \tag{5.26}$$

が成立する．ただし，$l = d(y_1, y_2)$ と置いた．

証明. $\mathcal{U}(0) = \underline{\mathcal{U}}(0)$ と $\mathcal{U}'(0) = \underline{\mathcal{U}}'(0) = \underline{\mathcal{U}}'(s)$ に注意して (5.17) から

$$|\mathcal{U}'(s) - \underline{\mathcal{U}}'(s)| \leq \int_0^s |\mathcal{U}''(s)| ds \leq \epsilon,$$
$$|\mathcal{U}(s) - \underline{\mathcal{U}}(s)| \leq \int_0^s |\mathcal{U}'(s) - \underline{\mathcal{U}}'(s)| ds \leq \epsilon s$$

であり，特に

$$|\mathcal{U}(l) - \underline{\mathcal{U}}(l)| = |b(y_2) - b(y_1) - \alpha l| \leq \epsilon l,$$

すなわち

$$\left| \frac{b(y_2) - b(y_1)}{l} - \langle \nabla b(y_1), \dot{\gamma}_{y_1 y_2}(0) \rangle \right| < \epsilon \tag{5.27}$$

を得る．これより，$|b - b_+| < \epsilon$ に注意して

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{U}_+(s) - \underline{\mathcal{U}}_+(s)| \leq |\mathcal{U}_+(s) - \mathcal{U}(s)| + |\mathcal{U}(s) - \underline{\mathcal{U}}(s)| + |\underline{\mathcal{U}}(s) - \underline{\mathcal{U}}_+(s)| \\
&\leq \epsilon(s+1) + |b(y_1) - b^+(y_1)| + \left| \tfrac{b^+(y_2) - b^+(y_1)}{l} - \langle \nabla b(y_1), \dot{\gamma}_{y_1 y_2}(0)) \rangle \right| s \\
&\leq 2\epsilon s + 4\epsilon
\end{aligned}$$

がしたがう．同様にして

$$\begin{aligned}&\int_0^l |\mathcal{U}'_+(s) - \underline{\mathcal{U}}'(s)|ds \\ &\leq \int_0^l |\mathcal{U}'_+(s) - \mathcal{U}'(s)|ds + \int_0^l |\mathcal{U}'(s) - \underline{\mathcal{U}}'(s)|ds + \int_0^l |\underline{\mathcal{U}}'(s) - \underline{\mathcal{U}}'_+(s)|ds \\ &\leq 2\epsilon l + 3\epsilon\end{aligned}$$

が成り立ち，補題が示された． □

上の議論の中で，また

(5.28) $$|\mathcal{U}'(s) - \underline{\mathcal{U}}'(s)| \leq \epsilon, \quad |\underline{\mathcal{U}}'(s) - \underline{\mathcal{U}}'_+(s)| \leq \epsilon + 2\frac{\epsilon}{l}$$

も示されている．さらに，任意の $y_1 \in Q_\epsilon$ を固定するとき，$(5.17)_3$ と上の注意より，$y_2 \in D_\epsilon(y_1)$ に対して

(5.29) $$|\mathcal{U}'_+(l; y_1, y_2) - \underline{\mathcal{U}}'_+(l; b_+(y_1), b_+(y_2))| < 3\epsilon + \frac{2\epsilon}{l} \quad (l = d(y_1, y_2))$$

である．よって，$\mathrm{vol}(B_R(p) \setminus D_\epsilon(y_1)) < \epsilon\, \mathrm{vol}(B_R(p))$ に注意して

(5.30) $$\begin{cases} \frac{1}{\mathrm{vol}\, B_R(p)} \int_{z \in B_R(p)} l|\mathcal{U}'_+(l; y_1, z) - \underline{\mathcal{U}}'_+(l; b^+(y_1), b^+(z))|dz \\ < 2\epsilon(5R + 1) \end{cases}$$

を得る．

次に，$x_1, y_1, x_2, y_2 \in B_R(p)$ で，$b^+(y_1) - b^+(x_1) = d(x_1, y_1)$ と $b^+(y_2) - b^+(x_2) = d(x_2, y_2)$ をみたすものが与えられたとき，$d(y_1, y_2)$ と $Q(b^+(x_1),$
$b^+(y_1), b^+(x_2), b^+(y_2), d(x_1, x_2))$ を比較しよう．次の補題が距離の比較に関する本質的な主張である．

補題 5.11. 任意の $\epsilon_1 > 0$ に対し，$\zeta = \zeta(\epsilon_1, m, \tau, L, R_1) > 0$ が存在して *(5.13)* が $0 < \delta_1 < \zeta$ に対して成り立てば

(5.31) $$|d(y_1, y_2) - Q(b^+(x_1), b^+(y_1), b^+(x_2), b^+(y_2), d(x_1, x_2))| < \epsilon_1$$

が $b^+(y_i) - b^+(x_i) = d(x_i, y_i)\,(i = 1, 2)$ をみたす任意の $x_1, x_2, y_1, y_2 \in B_{R_1}(p)$ に対して成立する．

証明. $x_1 = y_1 =: x$ の場合に主張を示せば十分である．(5.17) の $\epsilon > 0$ を以下 $\epsilon_2 > 0$ と書いて任意に与える．これは $\delta_1 > 0$ を十分小さく取ればいくらでも小さくできることを注意する．$\lambda = \gamma_{x_2 y_2}$ として，まず $x \in Q_{\epsilon_2}$, $\lambda \subset D_{\epsilon_2}(x)$ の特別の場合を考える．$l(s) := d(x, \lambda(s)), d := d(x_2, y_2)$ と置く．いま，$\theta(l(s); x, \lambda(s))$ を

(5.32) $$\cos\theta(l(s); x, \lambda(s)) = \mathcal{U}'_+(l(s); x, \lambda(s))$$

で定義する．他方

$$\underline{\mathcal{U}}'_+(s) = \cos\Theta(b^+(x), b^+(\lambda(s)), l(s)) = \frac{b^+(\lambda(s)) - b^+(x)}{l(s)} = \frac{s + a}{l(s)}$$

に注意する．ただし，$a := b^+(x_2) - b^+(x)$ と書いた．すると，(5.28) から

(5.33) $$l(s)\left|\cos\theta(l(s); x, \lambda(s)) - \frac{s + a}{l(s)}\right| < l(s)\left(3\epsilon_2 + \frac{\epsilon_2}{l(s)}\right)$$

が任意の $0 \le s \le d$ に対して成立する．

さて，モデル空間の $\boldsymbol{R} \times Z$ で点 $\underline{x}, \underline{x}_2, \underline{y}_2$ を

$$\begin{cases} \underline{r}(\underline{x}) = b^+(x), \underline{r}(\underline{x_2}) = b^+(x_2), \underline{r}(\underline{y_2}) = b^+(y_2) \\ d(\underline{x}_2, \underline{y}_2) = d = \underline{r}(\underline{y}_2) - \underline{r}(\underline{x}_2), d(\underline{x}, \underline{x}_2) = l(0) \end{cases}$$

をみたすように取る．$\underline{\lambda}$ を $\underline{x}_2$ と $\underline{y}_2$ を結ぶ $\boldsymbol{R}$ 方向の測地線とし，$\underline{l}(s) := d(\underline{x}, \underline{\lambda}(s))$ と置く．$\underline{l}(0) = l(0) = d_M(x, x_2)$ であり，また

$$\underline{l}(s) = \sqrt{(s+a)^2 + b^2}, \quad \underline{l}'(s) = \frac{s+a}{\underline{l}(s)} \ (a^2 + b^2 = l(0)^2)$$

である．さらに

$$l(d) = d_M(x, y_2), \quad \underline{l}(d) = Q(b^+(x), b^+(x), b^+(x_2), b^+(y_2), d_M(x, x_2))$$

に注意しよう．第 1 変分公式 から

$$l'(s) = \cos\theta(l(s); x, \lambda(s)), \quad \underline{l}'(s) = \cos\Theta(b_+(x), b_+(\lambda(s)), \underline{l}(s))$$

が成立する．すると (5.33) から

$$|l(s)l'(s) - \underline{l}(s)\underline{l}'(s)| = |l(s)l'(s) - (s+a)| \le 3\epsilon_2(s + 1 + l(0)).$$

この不等式を $[0, d]$ 上積分して

$$|l(d)^2 - \underline{l}(d)^2| < \epsilon_2 \left\{(6l(0) + 4)d + d^2\right\}$$

を得る．したがって

$$|l(d) - \underline{l}(d)| < \psi(\epsilon_2 | R_1) \tag{5.34}$$

となり，この特別の場合の補題の証明が終わる．

さて一般の場合は，上の証明に近似の議論を付け加える．まず，十分小さな $\eta > 0$ を固定して $d(x_2, y_2) > \eta$ としてよいことに注意する．$\eta^3 > \epsilon_2 > 0$ を十分小とする．このとき，補題 5.9 とビショップ・グロモフ体積比較定理より，$y \in B_\eta(x) \cap Q_{\epsilon_2}, q \in B_\eta(x_2), w \in B_\eta(y_2) \cap D_{\epsilon_2}(q)$ を選べる．

$$\lambda = \gamma_{qw}, \ l(s) = d(y, \lambda(s)), \ d = d(q, w)$$

と置く．ここで，定理 2.11 を (5.30) に前と同様に適用して，上の状況で次式が成り立つとしてよい：

$$\int_0^d l(s)|\mathcal{U}'_+(l(s); y, \lambda(s)) - \underline{\mathcal{U}}'_+(l(s); b^+(y), b^+(\lambda(s)))|ds < \eta^2. \tag{5.35}$$

ただし，

$$\underline{\mathcal{U}}'_+(l(s); b^+(y), b^+(\lambda(s)), l(s)) = \cos\Theta(b^+(y), b^+(\lambda(s)), l(s)) \\ = \tfrac{b^+(\lambda(s)) - b^+(y)}{l(s)}$$

であった．他方，$w \in D_{\epsilon_2}(q)$ であるから，$d > \eta - 2\eta^3$ に注意して補題 5.10 を用いて，少し計算を要するが

$$\begin{cases} |b^+(\lambda(s)) - (b^+(x_2) + s)| \le |\mathcal{U}_+(s) - \underline{\mathcal{U}}_+(s)| + |\underline{\mathcal{U}}_+(s) - (b^+(q) + s)| \\ \qquad +|b^+(q) - b^+(x_2)| < 2\epsilon_2(s+2) + 5\eta^2, \\ \int_0^d |1 - \langle\dot{\lambda}(s), \nabla b^+(\lambda(s))\rangle| ds < 2\epsilon_2(d+2) + 5\eta^2 \end{cases}$$

を得る．ここで第2の不等式を示すのに，$\langle \dot{\lambda}(s), \nabla b_+(\lambda(s))\rangle = \mathcal{U}'_+(s;q,w)$ と仮定の $d(x_2,y_2) = b^+(y_2) - b^+(x_2)$ を用いた．

さて，$\alpha(s) := \angle(\dot{\gamma}_{y\lambda(s)}(l(s)), \dot{\lambda}(s))$ と置く．第1変分公式より，殆ど至るところの s に対して $l'(s) = \cos\alpha(s)$ が成り立つ．また，

$$\begin{aligned}
&|\cos\alpha(s) - \mathcal{U}'_+(l(s); y, \lambda(s))| \leq \|\dot{\lambda}(s) - \nabla b_+(\lambda(s))\| \\
&= \sqrt{2(1 - \langle \dot{\lambda}(s), \nabla b^+(\lambda(s))\rangle)}
\end{aligned}$$

に注意して，コーシー・シュワルツの不等式より

$$\int_0^d |\cos\alpha(s) - \mathcal{U}'_+(l(s); y, \lambda(s))| ds < 2\sqrt{d\{\epsilon_2(d+2) + 3\eta^2\}}$$

が成り立つ．この不等式と (5.35) から

(5.36)
$$\int_0^d l(s)|\cos\alpha(s) - \cos\Theta(b^+(y), b^+(\lambda(s)), l(s))| ds < \psi(\epsilon_2, \eta \mid R_1)$$

を得る．ただし，$\psi(\epsilon_2, \eta \mid R_1)$ は $R_1 > 0$ を固定するとき，$\epsilon_2, \eta \downarrow 0$ ならば $\psi(\epsilon_2, \eta \mid R_1) \downarrow 0$ を意味する．

他方，モデル空間 X で $\underline{l}(0) = l(0)$ etc. と置いて同じ状況を考えれば

$$\int_0^d \underline{l}(s)|\cos\underline{\alpha}(s) - \cos\Theta(\underline{r}(\underline{y}), \underline{r}(\underline{\lambda}(s), \underline{l}(s))| ds < \psi(\epsilon_2, \eta \mid R_1) \tag{5.37}$$

である．ここで，再び第1変分公式により

$$\frac{1}{2}(l(s)^2 - \underline{l}(s)^2)' = l(s)\cos\alpha(s) - \underline{l}(s)\cos\underline{\alpha}(s)$$

が殆ど至る所の s に対して成立し，前と同様に上の不等式を積分することにより，補題の証明が完了する． □

なお，補題は $|b^+(y_i) - b^+(x_i)| = d(x_i, y_i)\ (i = 1, 2)$ の仮定の下で成立することを注意しておこう．

第6段（グロモフ・ハウスドルフ距離の評価）．

この段落では，M の距離球 $B_R(p; M)$ がグロモフ・ハウスドルフ距離に関して，直積空間 $X := \boldsymbol{R} \times Z$ の距離球 $B_R(\underline{p}, X)$ に近いことを示そう．ここで，距離空間 Z は（標準的ではないが）以下で自然に定義される．集合としては，$Z := (b^+)^{-1}(-2R) \cap B_{12R}(p)\ (= d_{q^+}^{-1}(d(q^+, p) - 2R) \cap B_{12R}(p))$ として与える．

Z 上の距離構造を考える前に準備をする．十分小さな $\eta > 0$ を固定して，まず最初に (5.13) の右辺の δ_1 を十分少に取ることにより，$x \in Z$ と $(LR >) a > -2R$ に対して，$y \in (b^+)^{-1}(a)$ で

$$a + 2R \leq d(x, y) \leq a + 2R + \eta \tag{5.38}$$

をみたすものが取れることに注意しよう．実際，x と q_- を結ぶ最短測地線上に点 y で $d(y, q^+) = d(p, q^+) + a$, すなわち，$y \in (b^+)^{-1}(a)$ をみ

たすものを取る．すると，(5.5) より

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(x,q^-) - d(y,q^-) \le d(x,q^-) - d(q^-,q^+) + d(y,q^+) \\ &\le E(x) - d(x,q^+) + d(y,q^+) = E(x) + a - b^+(x) \\ &\le 12\epsilon R + 2R + a \end{aligned}$$

である．

さて $\chi > 0$ をひとつ選び， $x, x' \in Z$ に対して

(5.39)

$$\begin{cases} l_\chi(x.x') := \inf\{\sum_1^N d(x_{i-1}, x_i) \mid \\ \qquad\qquad x_0 = x, x_N = x', x_i \in Z, d(x_{i-1}, x_i) \le \chi\} \end{cases}$$

と定義すれば， Z は距離 l_χ を持つ距離空間になる．$X := \boldsymbol{R} \times Z$ には直積距離 d_χ を導入する（(5.20) を見よ）．さて，$y \in B_R(p)$ に対して y に一番近い点 $z \in Z$ を取り，$z := \pi(y)$ と表す．$z \in B_{4R}(p)$ であり，$b^+(y) - b^+(z) = d(y,z)$ を確かめることができる（演習とする：3 角不等式と y, d^+ を結ぶ最短線を考える）．そこで

$$\beta(y) := (b^+(y), \pi(y)) \tag{5.40}$$

と定義する．以下，補題 5.11 を $R_1 := 12R$ として適用して，我々は β が求めるハウスドルフ近似であることを示したい．まず，$\underline{p} := (0, \pi(p))$ と置く．ここで $\pi(p)$ は最短測地線 γ_{pq^+} 上にあり，$d(p, \pi(p)) = 2R$ であることは容易に分かる．

いま，$y, y' \in B_R(p)$ に対して最短測地線 $\gamma = \gamma_{yy'} \subset B_{2R}(p)$ を取る．$\{t_i = \frac{i}{N} l\,; i = 0, \ldots, N\}$ を $[0, l]$ の細分とし，γ 上等間隔に並ぶ点列 $\gamma(t_i)$ を取る． $N = N(\chi, R)$ を十分大きく選ぶことにより，補題 5.11, (5.21) から

$$\begin{cases} d(\pi(\gamma(t_{i-1})), \pi(\gamma(t_i))) \le \epsilon_1 + \\ Q(b^+(\gamma(t_{i-1})), -2R, b^+(\gamma(t_i)), -2R, d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))) \le \chi \end{cases} \tag{5.41}$$

である．すると再び (5.31) より

(5.42)

$$\begin{cases} \epsilon_1 > |d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) - \\ Q(-2R, b^+(\gamma(t_{i-1})), -2R, b^+(\gamma(t_i)), l_\chi(\pi(\gamma(t_{i-1})), \pi(\gamma(t_i)))| \end{cases}$$

を得る．これより，$y, y' \in B_R(p)$ に対して

$$d(y, y') \ge d_\chi(\beta(y), \beta(y')) - \psi(\epsilon_1, \eta, \chi \mid R) \tag{5.43}$$

である．実際，上と (5.20), $(5.21)_2$ (の Q で 0 を $-2R$ に置き換えたもの) より，

$$\begin{aligned} & d(y,y') = \textstyle\sum_{i=1}^N d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \\ & \ge \textstyle\sum Q(-2R, b^+(\gamma(t_{i-1})), -2R, b^+(\gamma(t_i)), l_\chi(\pi(\gamma(t_{i-1})), \pi(\gamma(t_i))) \\ & \qquad -N(\chi, R)\epsilon_1 \\ & = \textstyle\sum \rho(b^+(\gamma(t_{i-1})), b^+(\gamma(t_i)), l_\chi(\pi(\gamma(t_{i-1})), \pi(\gamma(t_i))) - \psi(\epsilon_1, \eta, \chi \mid R) \\ & \ge \rho(b^+(y), b^+(y'), l_\chi(\pi(y), \pi(y'))) - \psi(\epsilon_1, \eta, \chi \mid R) \\ & = d_\chi(\beta(y), \beta(y')) - \psi(\epsilon_1, \eta, \chi \mid R) \end{aligned}$$

である．

次に，β の像が $B_R(\underline{p};X)$ で ψ–稠密であることをみる．まず (5.38) により，$x \in Z$ に対して $y \in (b^+)^{-1}(2R)$ で $|d(x,y)-4R| \le \eta$ をみたすものが取れることに注意する．さて，任意の $\underline{z} \in B_R(\underline{p};X)$ に対して $x := \underline{\pi}(\underline{z}) \in Z$ と置く．y は上のとおりとし，$\gamma_{x,y}$ 上に点 z を $b^+(z) = \underline{r}(\underline{z})$ をみたすように取る．このとき，$x \in B_{3R}(p)$，$z \in B_{R+\epsilon_1}(p)$ であることが分かる．ここで，$d_\chi(\beta(z),\underline{z}) = l_\chi(\pi(z),x)$ が成り立つことに注意しよう．さて (5.38) の議論により，$d(z,x)$ は殆ど $\underline{r}(z)+2R$ に等しい．また

$$d_\chi(\beta(z),x) = \sqrt{(l_\chi(x,\pi(z)))^2 + (\underline{r}(z)+2R)^2}$$

であった．そこで $y=z, y'=x$ と置いて，(5.43) を ($B_{3R}(p)$ で) 適用すれば

$$d_\chi(\beta(z),\underline{z}) = l_\chi(x,\pi(z)) \le \psi(\epsilon_1,\eta,\chi \mid R)$$

を得て，稠密性が示された．

最後に，$y,y' \in B_R(p)$ に対して $d(y,y')$ の上からの評価を与えよう．点列 $\pi(y) = x_0, x_1, \ldots, x_{N_1} = \pi(y')$ は $x_i \in Z, d(x_{i-1},x_i) < \chi$ をみたすとする．ここで

$$\sum_{i=1}^{N_1} d(x_{i-1},x_i) = l_\chi(\pi(y),\pi(y'))$$

がみたされているとしても一般性を失わない．
特に，$d(x_{i-1},x_i)+d(x_i,x_{i+1}) \ge \chi$ がすべての i に対して成り立つ．よって，$N_1 \le \bar{c}(R)/\chi$ であり，$r_i(>0)$ を選んで

$$d_\chi(\beta(y),\beta(y')) = \sum_{i=1}^{N_1} \rho(r_{i-1},r_i,l_\chi(x_{i-1},x_i))$$

とできる．さて x_i に対して，(5.38) より $y_i \in (b^+)^{-1}(r_i-2R)$ を $d(x_i,y_i) < r_i+\eta$ をみたすように選べば，(5.40), (5.42) から $l_\chi(x_i,\pi(y_i)) < \psi$ がわかる．このとき

$$\begin{aligned} d(y,y') &\le \textstyle\sum_1^{N_1} d(y_{i-1},y_i) \le \sum_1^{N_1}\{\rho(r_{i-1},r_i,l_\chi(x_{i+1},x_i)) + \psi\} \\ &\le d_\chi(\beta(y),\beta(y')) + \tfrac{\bar{c}(R)}{\chi}\psi(\epsilon_1,\eta \mid \chi \mid R) \end{aligned}$$

である．最後に，上の β を少し変形することにより，容易に $B_R(p)$ と $B_R(\underline{p})$ の間の ψ–ハウスドルフ近似を構成できる．上記の議論をまとめて，スケーリングを考えれば，定理 5.2 の証明が完了する．□

上では便宜上，Z を $(b^+)^{-1}(-2R)$ として考えたが，証明の中の議論で Z の代わりに $Z_1 := B_{12R}(p) \cap (b^+)^{-1}(0)$ としても定理の主張が成り立つことが分かる（実際，$y \in (b^+)^{-1}(0)$ に $\pi(y) \in Z$ を対応させる写像は ψ–ハウスドルフ近似である）．また，任意の $\epsilon > 0$ を与えるとき，$B_R(\underline{p};(Z_1,l_\chi))$ の一様な個数 $N_1(m,\epsilon,\chi,R)$ 個の元からなる ϵ-網が取れることを注意する（$B_R(\underline{p};X)$ の一様な個数の ϵ-網を射影 π によって写せばよい）．以下，Z_1 を改めて Z と考える．

さて定理 5.2 より，次のこの節の目的の次の定理が従う．

定理 5.12. $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ を m 次元完備リーマン多様体の列とする．いま，列 $\{(B_{R_i}(q_i; M_i), q_i)\}$ が，点付きグロモフ・ハウスドルフ距離に関して，$R_i \to \infty$ のとき完備弧長距離空間対 (Y, y) に収束したとする．すなわち，

$$d_{GH}((B_{R_i}(q_i; M_i), q_i), (Y, y)) \to 0 \quad (R_i \to \infty) \tag{5.44}$$

とする．さらに，$\tau_i \downarrow 0$ に対して

$$\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)\tau_i \tag{5.45}$$

が成り立つとする．このとき，もし Y が直線を含めば，Y は直積 $Y = \boldsymbol{R} \times Z$ に分裂する．

これを見るのに，γ を Y の直線とし

$$p := \gamma(0),\ \epsilon_i := d_{GH}((B_{R_i}(q_i; M_i), q_i),\ (Y, y))$$

と置く．いま，任意の $R > 0$ をひとつ固定する．必要なら M_i の部分列を取り，R_i は 定理5.2 の $2L(\epsilon_i, m)R$ より大，$\tau_i > 0$ は $\tau(\epsilon_i, m)$ より小としてよい．また，$p, \underline{q}_R^{\pm} := \gamma(\pm 2L(\epsilon_i, m)R) \in Y$ に対して，$p_i, q_i^{\pm} \in M_i$ を，d_{GH} に関してそれぞれ $\underline{q}_R^{\pm}, p$ に非常に近い点として選んで，定理5.2 の仮定 (5.3) が成り立っているとしてよい．よって距離空間 (Z_i, l_{χ_i}) が存在して，$(X_i := \boldsymbol{R} \times Z_i, d_{\chi_i})$ に対して

$$d_{GH}(B_R(p_i; M_i), B_R(\underline{p}_i; X_i)) \leq \epsilon_i R$$

が成り立つ．$\{Z_i\}$ は上の注意とグロモフのプレコンパクト性定理から収束部分列を持つ．Z を極限空間をとする．Z_i の（新しい）選び方に注意すれば，Z は弧長空間 Y の γ から決まる半直線 γ^+ に関するブーゼマン関数 b^+ の 0 値集合 $(b^+)^{-1}(0)$ （内の距離球）に他ならない．また，Z の距離は Z の曲線の長さの下限から決まる内部距離になる．したがって，$B_R(\underline{p}; Y)$ は $B_R((0, \underline{p}); \boldsymbol{R} \times Z)$ に等長的である．R は任意であったから，必要なら対角線論法を用いて定理 5.12 が従う．□

注意 5.13. (1) グロモフは次を予想した（[G 3]）：$\epsilon = \epsilon(m) > 0$ が存在して，m 次元コンパクト・リーマン多様体 M が $d^2(M)\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)\epsilon$ をみたせば，M の基本群 $\pi_1(M)$ は殆ど冪零（有限指数の冪零部分群をふくむ）である．

深谷・山口（[FYa]）は，断面曲率に対して $d^2(M)K_M \geq -\epsilon$ をみたすとき予想を示し，リッチ曲率の場合でも極限空間で分裂定理と注意 *4.8 (2)* が成り立てば予想が成立することを指摘した．チーガー・コールディングの分裂定理への動機の一つはここにあると思われる．

(2) $\mathrm{Ric}_{M_i} \geq -(m-1)$ をみたす完備 m 次元点付きリーマン多様体の列 $\{(M_i, p_i)\}$ はプレコンパクト性定理から収束部分列を持つ．しかし一般に，極限空間 (X, p) は完備弧長空間であるが多様体にはならず，特異点を許容し得る．チーガー・コールディングは [CCo 3] で極限空間の構造（正則性，特異点集合の構造，計量不変量の収束下での挙動）の組織的な研究を行っている．

その際の基本的な概念は，$x \in X$ における接錐 $C_X X$ である．X の距離 d_X のスケールを替えて得られる列 $\{(X, x; r_i^{-1} d_X)\}$ は，$r_i \to 0$ のと

き，グロモフのプレコンパクト性定理から収束部分列を持つ．その（任意の）極限空間を $x \in X$ における接錐という．一般に（崩壊しない場合でも）、接錐の一意性は成り立たない．しかし，接錐は，$q_i \to x$ として列 $\{(M_i, q_i, r_i^{-1} d_{M_i})\}$ を考えればその極限空間として得られるから，リッチ曲率の下限が 0 に収束する点付きリーマン多様体列の極限空間として得られ，分裂定理を適用できる状況にある．分裂定理の手法を用いて接錐の構造を調べることもチーガー・コールディング達の動機であったと思われる．実際，例えば，彼等は次を示している（[CCo 1]）：与えられた $\epsilon > 0$ と整数 $m \geq 2$ に対して，$\rho = \rho(\epsilon, m) > 0$, $\delta = \delta(\epsilon, m)$ が存在して次の主張が成立する．$\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)$ の m 次元完備リーマン多様体 M が $p \in M$, $0 < r_0 \leq \rho$ に対して，$\mathrm{vol}\, B_{2r_0}(p) \geq 2^m(1-\delta)\mathrm{vol}\, B_{r_0}(p)$ をみたせば

$$d_{GH}(B_{2r_0}(p; M) \setminus B_{r_0}(p; M), B_{2r_0}(o; X) \setminus B_{r_0}(o; X)) < r_0 \epsilon.$$

ここで，$X = C(Z) = (0, \infty) \times_r Z$ は，ある弧長空間 Z 上の距離錐（$ds^2 = dr^2 + r^2 ds_Z^2$ によって定義される捩れ積から決まる距離を持つ錐 X）であり，o は錐の頂点である．

特に，M が非負リッチ曲率でユークリッド体積増大度を持てば（すなわち，$\lim_{r\to\infty} \mathrm{vol}\, B_r(p)/r^m$ が存在して正），上の状況で $R_0 \to \infty$ のとき δ をいくらでも小にできるので，M の p での任意の無限遠錐 M_∞ は距離錐となる（無限遠錐については定理 *4.7* を参照）．また，リッチ曲率が下から押さえれた多様体列が崩壊しない場合，極限空間の接錐は距離錐であることも分かる．

(3) 個人的な感想であるが，チーガー・コールディングの論文の中でも特に [CCo 1] は，一般の捩れ積の形で非常に多くの主張が書かれていて理解するのが大変である．私は，勾配ベクトルの長さが一定となる幾何学的関数に興味があって調べていたが，ボホナーの公式はこの場合も有用で，リッチ曲率が密接に関連する．そのような関数を許容する場合の状況は，分裂定理の場合に比較してずっと扱いやすい．実際，この状況で剛性が成り立つときの摂動版を彼等の方法でを実行してみて（[Sa 2,3,4]），分裂定理もやっと理解できたのが実情です（ただ，[CCo 1] が全部理解できたわけではありません．日暮れて道遠しです）．

6. リッチ曲率正の多様体

6.1. $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ である完備 m 次元リーマン多様体はコンパクトで，不等式 $d(M) \leq \pi$, $\mathrm{vol}\, M \leq \omega_m (:= \mathrm{vol}\, S_1^m)$ をみたした．さらに，等号成立のときは M は単位球面に等長的になる（系 2.5，注意 2.10）．この小節では，その摂動版，すなわち，リッチ曲率の仮定の下で直径（半径）や体積がそれぞれ π や ω_m に近ければ，M は位相的にも球面に近いか？を考える．

これは体積に対しては肯定的で，この体積に関する条件は半径やグロモフ・ハウスドルフ距離の言葉で述べることができる．他方，断面曲率の場合と違って，直径に対しては主張は成立しない（アンダーソン，大津等による反例がある．注意 6.18 (2) 参照）．

まず，序文で述べた塩浜の結果を改良した G. ペレルマンによる基本的な結果（[Pe 1]）について述べる．

定理 6.1. 自然数 $m \geq 2$ に対して $\delta_m > 0$ が存在して，$\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ である m 次元完備リーマン多様体 M の体積が $\mathrm{vol}\, M \geq \omega_m(1-\delta_m)$ をみたせば，M は m 次元球面 S^m に同相である．

定理 6.2. 自然数 $m \geq 2$ に対して $\delta_m > 0$ が存在して，次が成り立つ：M はリッチ曲率非負の完備リーマン多様体とする．いま，ある $p \in M$ に対して $\mathrm{vol}\, B_R(p) \geq (1-\delta_m)v_0^m(R)$ が任意の $R > 0$ に対して成り立つとする．このとき，M は可縮である．

これらの定理は相対ホモトピー群に関する次の考察から導かれる：リッチ曲率と体積の仮定の下で，$f : S^k = \partial D^{k+1} \to B_R(p)$ $(1 \leq k \leq m-1)$ は，一定の半径 $c_1 R\,(c_1 > 1)$ の同心球内で定値写像にホモトープであることを示す．それには次の補題が重要な役割を果たす．

補題 6.3 (主補題). M は $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ をみたす m 次元完備リーマン多様体とする．このとき，与えられた $c_2 > c_1 > 1$ と整数 $k \geq 0$ に対して，次をみたす $\delta = \delta_k(m, c_1, c_2) > 0$ が存在する：$p \in M$, $0 < R < \pi/c_2$ に対して，任意の $B_\rho(q) \subset B_{c_2 R}(p)$ が

$$\mathrm{vol}\, B_\rho(q) \geq (1-\delta)v_1^m(\rho) \tag{6.1}$$

をみたすとする．このとき

(A) 任意の連続写像 $f : S^k = \partial D^{k+1} \to B_R(p)$ は，連続写像 $g : D^{k+1} \to B_{c_1 R}(p)$ に拡張できる．

(B) 任意の連続写像 $f : S^k \to M \setminus B_R(p)$ は，連続写像 $f' : S^k \to M \setminus B_{c_1 R}(p)$ に連続的に変形できる．

主補題は非負リッチ曲率の場合（また，$\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)$ の場合）でも，対応して（δ を $R \to \infty$ のとき R にも依存して選ぶことにより）成り立つことを注意しておこう．

まず，主補題を仮定して定理 6.1 を示す．$p, q \in M$ で，$d(p,q) = d := d(M)$ をみたすものを取る．任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を十分小に取れば $\pi \geq d > \pi - \epsilon$ で，任意の $x \in M$ に対して $d(p,x) < d - d(x,q) + \epsilon$ であった (系 2.9 (2))．定理の仮定とビショップ・グロモフの比較定理から

$$\frac{1}{1-\delta} \geq \frac{\omega_m}{\mathrm{vol}\, M} = \frac{v_1^m(\pi)}{\mathrm{vol}\, B_\pi(q)} \geq \frac{v_1^m(\rho)}{\mathrm{vol}\, B_\rho(q)} \geq 1$$

であるから，主補題の仮定 (6.1) が成り立つ．

以下，$1 \leq k \leq m-1$ に対して $\pi_k(M) = 0$ を示す．$f : S^k \to M$ を与える．まず，$\pi/c_2 > R > (d+\epsilon)/2$ なる $c_2 > 1, R$ を取る．次に，$c_2 > c_1 > 1$ を $R > (1+1/c_1)R/2 > (d+\epsilon)/2$ となるように取る．さて，$k \leq m-1$ より $f(S^k)$ に含まれない点 $q \in M$ があるから，ある $0 < \epsilon_0 < d + \epsilon - R$ に対して $\mathrm{Im}\, f \subset M \setminus B_{\epsilon_0}(q)$ であるとしてよい．いま $d + \epsilon - R < c_1^N \epsilon_0$ をみたす最初の正整数 N を取れば，$R/(d+\epsilon-R) > c_1$ に注意して $c_1^N \epsilon_0 < R$ である．そこで，(B) の操作を N 回 $f : S^k \to M \setminus B_{\epsilon_0}(q)$ に適用すれば，f は連続的に

$\tilde{f}: S^k \to M \setminus B_{c_1^N \epsilon_0}(q) \subset B_R(p)$ に変形できる．ここで，最後の包含関係は $d(x,q) \geq c_1^N \epsilon_0 > d + \epsilon - R$ ならば，$d(p,x) < d + \epsilon - d(x,q) < R$ であることから従う．したがって，(A) の操作を $\tilde{f}$ に適用できて，f は自明なホモトピー類に属する．よって，$k = 1, \ldots, m-1$ に対して $\pi_k(M) = 0$ であること，すなわち M がホモトピー球面であることがわかる．このとき，$m \geq 4$ に対してはポアンカレ予想の解決から，$m = 3$ に対してはハミルトンの結果 ([Ha 1]) から M は球面に同相である．

次に，定理 6.2 を示すには，任意の $k \geq 0$ に対して $\pi_k(M) = 0$ を示せばよい．M の任意の距離球 $B_\rho(q) (\subset B_{c_2 R}(p))$ に対して，$R_1 > c_2 R - \rho$ を取り $B_{R_1}(q) \supset B_{R_1 - d(p,q)}(p)$ に注意する．すると，定理の仮定とビショップ・グロモフの比較定理から，$R_1 \to \infty$ として

$$\frac{\operatorname{vol} B_\rho(q)}{v_0^m(\rho)} \geq \frac{\operatorname{vol} B_{R_1}(q)}{v_0^m(R_1)} \geq \frac{\operatorname{vol} B_{R_1 - d(p,q)}(p)}{v_0^m(R_1 - d(p,q))} \frac{v_0^m(R_1 - d(p,q))}{v_0^m(R_1)} \geq 1 - 2\delta_m$$

を得て，主補題の仮定 (6.1) がみたされる．さて，$f: S^k \to M$ を与える．十分大きな R に対して $f(S^k) \subset B_R(p)$ としてよい．このとき，(A) の操作が適用できて，f は自明なホモトピー類に属する．□

そこで，補題 6.3 の主張 (A) の証明に移る．k に関する帰納法による．$k = 0$ のときは，f の区間 D^1 への拡張は，$f(S^0)$ の 2 点を中心 p に結ぶ M の最短線（半径）からなる曲線を考えることにより容易に得られる．

次に，(A) が k より小さい正整数に対して成立したとし，$f: S^k \to B_R(p)$ を与える．f を $g: D^{k+1} \to B_{c_1 R}(p)$ に拡張するのに，以下 3 つの段階に分けて示す．

D^{k+1} の胞体分割の列 $K_j (j = 0, 1, 2, \ldots)$ で，前のものの細分となっているものを取る．f を D^{k+1} に直接拡張する代わりに，各 K_j の k-スケルトン上の写像 f_j に（蜜蜂の巣のように）拡張する（第 2 段）．第 1 段で，そのための基本的な写像の変形の構成法（補題 6.4 (C)）を与える．最後に，$j \to \infty$ として，胞体分割を細分していったときの f_j の極限を取って求める拡張が得られる．

1° 次の補題 6.4 (C) が証明のキーであるが，以下の議論では系 2.9 (3), 系 2.19 が重要な役割を果たす．$\kappa, \delta(c_1, c_2, d_0)$ は，それぞれ系 2.19 と 系 2.9 (3) で与えられたものとし，$\delta_0(c_1, c_2) := \delta(c_1, c_2, d_0)$ と置く．補題の主張を述べる前に，$d_0 < d_1 < \ldots < d_k$, $\delta_i(c_1, c_2) > 0$ $(i = 0, \ldots, k)$ を次の条件をみたすように帰納的に選んでおく：

$$\begin{cases} \frac{d_{i+1}}{d_i} > 100,\ \frac{d_0}{d_i} > 100k \cdot \kappa(100\frac{d_i}{d_{i+1}}),\ 100 d_k < 10^{-k}(1 + \frac{d_0}{2k})^{-k}(1 - \frac{1}{c_1}), \\ \delta_i(c_1, c_2) := \min\{\delta(c_1, c_2, d_0),\ \delta_j(1 + \frac{d_0}{2k}, c_2); j = 0, \ldots, i-1\}. \end{cases}$$

以下，$\delta = \delta_k(c_1, c_2)$ と置く．

補題 6.4 (C). $\rho > 0$, $q \in M$ に対して

$$\operatorname{vol} B_{c_2 \rho}(q) \geq (1 - \delta) v_1^m(c_2 \rho)$$

が成り立つとする．写像 $\phi: S^k \to B_\rho(q)$ と S^k の 3 角形分割 T で，その任意の単体 $\Delta \in T$ の直径が $d(\phi(\Delta)) < d_0 \rho$ をみたすものを与える．

このとき，連続写像 $\tilde{\phi}: S^k \to B_{(1-d_0)\rho}(q)$ で次をみたすものが構成できる：

$$d(\phi(\Delta) \cup \tilde{\phi}(\Delta)) \le 10 d_k \rho \le \frac{(1-c_1^{-1})\rho}{10^{k+1}(1+\frac{d_0}{2k})^k} \quad (\forall \Delta \in T). \tag{6.2}$$

証明. $\tilde{\phi}$ を i–スケルトン $\mathrm{skel}_i(T)$, $i = 0, \ldots, k$ 上で，各 i–単体 $\Delta \in \mathrm{skel}_i(T)$ に対して次の条件をみたすように，k に関して帰納的に構成する：

(i) $\phi(\Delta) \subset \bar{B}_{\rho(1-2d_0)}(q)$ ならば $\tilde{\phi} \mid \Delta \equiv \phi \mid \Delta$.

(ii) $\tilde{\phi}(\Delta) \subset \bar{B}_{(1-d_0(2-\frac{i}{k}))\rho}(q)$.

(iii) $d(\phi(\Delta) \cup \tilde{\phi}(\Delta)) \le 10 d_i \rho$.

実際，T の頂点 $x \in \mathrm{skel}_0(T)$ で $d(q, \phi(x)) > \rho(1-2d_0)$ なるものに対しては，$\tilde{\phi}(x)$ を q から x への最短測地線上の点で，$d(q, \tilde{\phi}(x)) = \rho(1-2d_0)$ をみたすものと定める．次に，$\tilde{\phi}$ が $i < k$ である $\mathrm{skel}_i(T)$ 上では定義されているとし，$(i+1)$ 単体 Δ を与える．(i) より $\phi(\Delta) \not\subset \bar{B}_{\rho(1-2d_0)}(q)$ としてよい．系 2.9 (3) を $\phi(\Delta)(\subset B_\rho(q))$ の点に適用して，点 $r_\Delta \in M \setminus B_{c_1\rho}(q)$ で $d(\phi(\Delta), \overline{qr_\Delta}) \le 2d_0\rho$ をみたすものを取る．ここで，$\overline{qr_\Delta}$ は q から r_Δ への最短線である．さて，$q_\Delta \in \overline{qr_\Delta}$ を $d(q, q_\Delta) = \rho(1-d_{i+1})$ をみたすように定める．すると任意の $x \in \partial\Delta$ に対して，(ii) と d_i の選び方から

$$\begin{aligned}
&d(\tilde{\phi}(x), q) \le (1 - d_0(2-\tfrac{i}{k}))\rho, \\
&d(\tilde{\phi}(x), \overline{q_\Delta r_\Delta}) \le 10 d_i \rho + d(\phi(x), \overline{q_\Delta r_\Delta}) \le 10 d_i \rho + 2 d_0 \rho < 20 d_i \rho, \\
&d(\tilde{\phi}(x), q_\Delta) \ge d(\phi(x), q_\Delta) - 10 d_i \rho \ge d(\phi(x), q) - d(q, q_\Delta) - 10 d_i \rho \\
&\qquad \ge (d_{i+1} - 10 d_i - 3 d_0)\rho > \tfrac{d_{i+1}}{2}\rho, \\
&d(\tilde{\phi}(x), r_\Delta) \ge d(r_\Delta, q) - d(\tilde{\phi}(x), q) \ge \{(c_1 - 1) + d_0(2 - i/k)\}\rho > \tfrac{d_{i+1}}{2}\rho
\end{aligned}$$

が成り立つ．系 2.19 を $\tilde{\phi}(x), q_\Delta, r_\Delta$ に適用して

$$d(\tilde{\phi}(x), r_\Delta) + d(\tilde{\phi}(x), q_\Delta) - d(r_\Delta, q_\Delta) < 20\kappa(100 d_i/d_{i+1}) d_i \rho$$

を得る．この不等式に，３角不等式

$$d(q_\Delta, r_\Delta) + \rho(1 - d_{i+1}) = d(q, r_\Delta) \le d(\tilde{\phi}(x), r_\Delta) + d(\tilde{\phi}(x), q)$$

を加えると，$x \in \partial\Delta$ に対して

$$\begin{aligned}
&d(\tilde{\phi}(x), q_\Delta) \le 20\kappa(100 d_i/d_{i+1}) d_i \rho - \rho(1 - d_{i+1}) + d(\tilde{\phi}(x), q) \\
&\le \rho\{20\kappa(100 d_i/d_{i+1}) d_i + d_{i+1} - d_0(2 - \tfrac{i}{k})\} \le \rho\{d_{i+1} - d_0(2 - \tfrac{2i+1}{2k})\}
\end{aligned}$$

すなわち，$\tilde{\phi}(\partial\Delta) \subset B_{(d_{i+1} - d_0(2-\frac{2i+1}{2k}))\rho}(q_\Delta)$ である．よって主張 (A) に関する帰納法の仮定を（$c_1 = 1 + \frac{d_0}{2k}$ として）$\tilde{\phi} \mid \partial\Delta$ に適用して，$\tilde{\phi}$ を Δ 上に

$$\tilde{\phi}(\Delta) \subset B_{(d_{i+1} - d_0(2 - \frac{i+1}{k}))\rho}(q_\Delta)$$

をみたすように拡張できる．このとき，$\tilde{\phi} \mid \Delta$ に対する主張 (iii) は容易に示すことができる． □

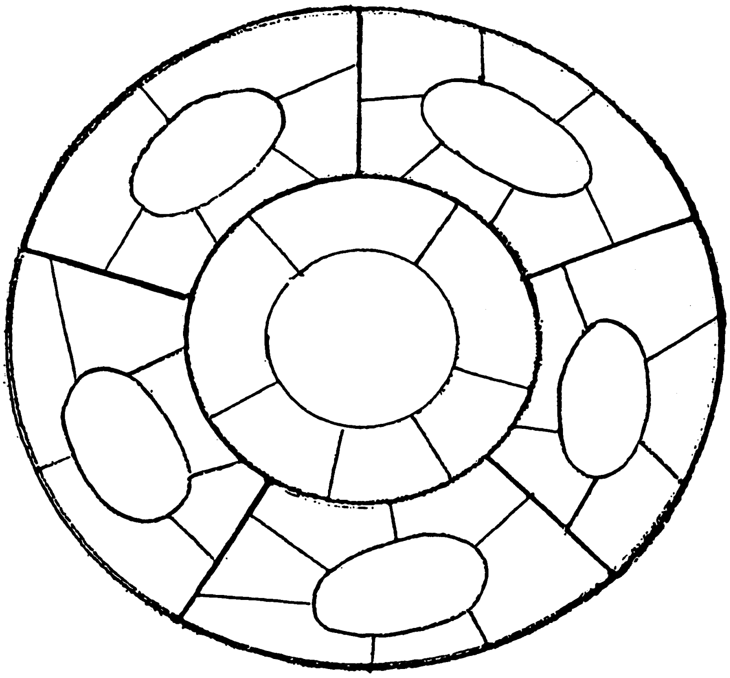


図 1

2° さて，与えられた写像 $f : S^k \to B_R(p) \subset M$ に対して，D^{k+1} の有限胞体分割 $K_j\,(j = 0, 1, 2, \ldots)$ と連続写像 $f_j : \mathrm{skel}_k(K_j) \to M$ で次の性質をみたすものを構成する：

(a) K_{j+1} は K_j の胞体細分で，$\mathrm{skel}_k(K_j)$ 上 $f_{j+1} \equiv f_j$ である．
(b) 各 $(k+1)$–胞体 $\sigma \in K_j$ に対して，$p_\sigma \in B_{c_1R}(p)$ と $R_\sigma > 0$ で $f_j(\partial\sigma) \subset B_{R_\sigma}(p_\sigma)$ となるもので，次をみたすものが取れる： $\sigma \in K_j, \sigma' \in K_{j+1}$ が $\sigma' \subset \sigma$ をみたせば，$B_{c_1R_{\sigma'}}(p_{\sigma'}) \subset B_{c_1R_\sigma}(p_\sigma)$, $R_{\sigma'} \leq (1 - d_0)R_\sigma$ である．
(c) K_0 はただ一つの $(k+1)$–胞体 $\sigma_0 := D^{k+1} \setminus S^k \in K_0$ を持ち，$\mathrm{skel}_k(K_0) = S^k = \partial D^{k+1}$ である．また，$f_0 \equiv f$, $R_{\sigma_0} = R$, $p_{\sigma_0} = p$ である．

$j = 0$ に対しては，$\rho = R$, $q = p$ および $\phi = f$ として補題 (C) の条件をみたす S^k の 3 角形分割 T を取る．すると，$K_0, f_0, R_{\sigma_0}, p_{\sigma_0}$ が上の条件 (c) によって定まる．次に，D^{k+1} を $S^k \times (0, 1] \cup \{0\}$ と考えて，K_1 を $\mathrm{skel}_k(K_1) = S^k \times \{1/2\} \cup S^k \times \{1\} \cup \mathrm{skel}_{k-1}(T) \times [1/2, 1]$ となるように，また K_1 の $(k+1)$–胞体 は $S^k \times (0, \frac{1}{2}] \cup \{0\}$ と $\Delta \times [1/2, 1]$ で与えられるように定める．ここで，Δ は T の k–単体である．

さて，f_1 をまず $S^k\times\{1\}$ 上では $f_1\equiv f_0$ で，$S^k\times\{1/2\}$ 上では補題 (C) を f_0 に適用して，$f_1\equiv\tilde{f_0}$ により定義する．次に，f_1 を $\mathrm{skel}_{k-1}(T)\times[1/2,1]$ に拡張する．そのため，$\Delta\in\mathrm{skel}_i(T)$ $(i=0,1,\ldots,k-1)$ に対して, f_1 を $\Delta\times[1/2,1]$ に，その境界から補題 6.3 (A) の帰納法の仮定を用いて拡張する．実際，$i=0$ に対しては，Δ は S^k の 1 点 x であり，$f_1\mid\{x\}\times[1/2,1]$ はその像が $f_0(x)$ と $\tilde{f_0}(x)$ を結ぶ最短測地線となるように定める．(6.2) より

$$d(f_1(\{x\}\times[1/2,1]))\le 10^{-k-1}\left(1+\frac{d_0}{2k}\right)^{-k}(1-c_1^{-1})R.$$

あとは i に関する帰納法の仮定のもとで，$c_1=1+d_0/(2k)$ として (A) を適用する．これより，$\mathrm{skel}_i(T)\times[1/2,1]$ 上で，各 i–単体 Δ に対して

$$(6.3)\qquad \left\{\begin{array}{l} d(f_1(\Delta\times[1/2,1]))\le 10^{i-k-1}(1+\frac{d_0}{2k})^{i-k}(1-c_1^{-1})R \\ \qquad\qquad\qquad\qquad(\le 10^{-2}(1+\frac{d_0}{2k})^{-1}(1-c_1^{-1})R) \end{array}\right.$$

が成り立つように f_1 を拡張できる．f_1 は上の (b) をみたすことを確かめよう．$(k+1)$–胞体 $\sigma=\Delta\times[1/2,1]$ に対して，(6. 2), (6. 3) に注意して

$$\begin{aligned} &d(f_1(\partial\sigma))\le 10d_kR+10^{-2}\left(1+\tfrac{d_0}{2k}\right)^{-1}(1-c_1^{-1})R \\ &\le 10^{-1}(1-c_1^{-1})R. \end{aligned}$$

よって，$p_\sigma\in f_1(\partial\sigma)$ で $d(p,p_\sigma)\le R+\frac{1}{10}(1-c_1^{-1})R(<c_1R)$ をみたすものを選べる．また，$R_\sigma<10^{-1}(1-c_1^{-1})R$ を選んで，$p_\sigma\in B_{c_1R}(p), f_1(\partial\sigma)\subset B_{R_\sigma}(p_\sigma)$ とできる．このとき，$B_{c_iR_\sigma}(p_\sigma)\subset B_{c_iR}(p)$ $(i=1,2)$ であることは容易に確かめられる．中心部分の $(k+1)$–胞体 $S^k\times(0,1/2]\cup\{0\}$ に対しては, $p_\sigma:=p, R_\sigma:=(1-d_0)R$ と取る．

さて，j に対しては $f_j:\mathrm{skel}_k(K_j)\to M$ の構成が完了したとする．任意の $(k+1)$–胞体 $\sigma\in K_{j+1}$ を $S^k\times(0,1]\cup\{0\}$ として表現する．前と同様に，S^k の十分細かい 3 角形分割 T を取る．$B_{c_2R_\sigma}(p_\sigma)\subset B_{c_2R}(p)$ に注意して $q=p_\sigma,\rho=R_\sigma$ と置き，補題 (C) を $f_j:S^k\times\{1\}\to B_{R_\sigma}(p_\sigma)$ に適用する．ここで，K_j の細分 K_{j+1} は

$$\sigma\cap\mathrm{skel}_k(K_{j+1})=S^k\times\{1/2\}\cup S^k\times\{1\}\cup\mathrm{skel}_{k-1}(T)\times[1/2,1]$$

によって定める．そこでまず, $S^k\times\{1\}$ 上で $f_{j+1}\equiv f_j$ と定義する．次に $S^k\times\{1/2\}$ 上では $f_{j+1}\equiv\tilde{f_j}$ とする．さらに $c_1:=1+\frac{d_0}{2k}$ と置いて，主補題 (A) を次々に適用して, f_{j+1} を $\mathrm{skel}_i(T)\times[1/2,1]$ $(i=0,1,\ldots,k-1)$ 上に，任意の $\Delta\in\mathrm{skel}_i(T)$ に対して

$$d(f_{j+1}(\Delta\times[1/2,1])\le 10^{i-k-1}(1+\frac{d_0}{2k})^{i-k}(1-c_1^{-1})R_\sigma$$

をみたすように拡張できる．このとき，前と同様に f_{j+1} は上の (b) をみたすことを示せる．こうして，帰納的に 2° の主張が示せた．

3° 2° の構成を用いて主張 (A) を示す．$x\in D^{k+1}$ に対して，$(k+1)$–胞体の列 $\{\sigma_j\in K_j\}_{j=0}^{\infty}$ で，すべての j に対して $\sigma_{j+1}\subset\sigma_j, x\in\bar{\sigma}_j$ をみたすものが取れる．このとき，$\bigcap\bar{\sigma}_j=\{x\}$ に注意する．$f_j(\partial\sigma_j)\subset$

$B_{R_j}(p_{\sigma_j})$, $R_{\sigma_j} \leq (1-d_0)^j R$ であり，$\bar{B}_{c_1 R_{\sigma_j}}(p_{\sigma_j}) \supset \bar{B}_{c_1 R_{\sigma_{j+1}}}(p_{\sigma_{j+1}})$ であった．このとき，$\{\bar{B}_{c_1 R_{\sigma_j}}(p_{\sigma_j})\}$ は M のコンパクト部分集合の列で，その直径は 0 に収束する．よって $\{p_{\sigma_j}\}$ はコーシー列で，$g(x) := \lim p_{\sigma_j}$ と定義できる．もし $x \notin \mathrm{skel}_k(K_j)$ ならば，x に対応する上の $\{\sigma_j\}$ は一意に定まる．他方，$x \in \mathrm{skel}_k(K_j)$ ならば $g(x) = f_j(x)$ であるから，これより $g(x)$ が定義された．構成から，$g \mid S^k \equiv f$ かつ $g(D^{k+1}) \subset \bar{B}_{c_1 R}(p)$ である．また，もし $x \in \bar{\sigma_j}$ ならば $d(g(x), p_{\sigma_j}) \leq 2c_1 R_{\sigma_j}$ であることに注意すれば，g が連続であることがしたがう．□

これで主補題 (A) の証明が終わった．(B) の証明も同様であるが省略する．

6.2. 次に，M が定理 6.1 の仮定をみたせば，M と単位球面 S_1^m の間のグロモフ・ハウスドルフ距離 $d_{GH}(M^m, S_1^m)$ は小さいというコールディングの結果（[Co 1]）について述べる．証明は L^2 版トポノゴフ比較定理，注意 3.13 と定理 6.1 による．なお，定理 6.5 は系 4.6 の逆になっている．

定理 6.5. 任意の $\epsilon > 0$ と整数 $m \geq 2$ に対して $\delta = \delta(m, \epsilon) > 0$ が存在して，$\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)$ であるコンパクト m 次元リーマン多様体 (M^m, g) の体積が $\mathrm{vol}\, M \geq \omega_m - \delta$ をみたせば，$d_{GH}(M, S_1^m) < \epsilon$ である．

仮定の下で, M から S_1^m への ϵ–ハウスドルフ近似を構成する．最初に幾つか準備をする．

(a) 関数 $f: M \to \boldsymbol{R}$ は距離関数の余弦の 1 次結合として表されるとき，すなわち，点 $x_j \in M$ と実数 $\alpha_j \in [-1,1]\,(j = 1, \ldots, N+1)$ を選んで，$f(x) = \sum_j \alpha_j \cos d(x_j, x)$ と書けるとき，初等的であると呼ぶ．

(b) 一般に (X, d) を距離空間とし，$B_\epsilon(x_j)$ が互いに交わらないような X の極大集合 $\{x_j\}$ を X の ϵ–充填と呼ぶ．このとき極大性から，$\{B_{2\epsilon}(x_j)\}$ は X の開被覆となる．特に，$\mathrm{Ric}_M \geq (m-1)$ をみたす完備リーマン多様体 M^m の場合は, 系 2.8 (1) によって，ϵ–充填の個数を上から $\frac{v_1^m(\pi)}{v_1^m(\epsilon)}$ で評価できる．

(c) 点対 $\{(p_i, q_i)\}_{i=1}^{k+1}$ で，$d(p_i, p_j) = \frac{\pi}{2}\,(i \neq j)$, $d(p_i, q_i) > \pi - \delta_1$ をみたすものが与えられたとする．

$$\Phi_k(x) := (\cos d(p_1, x), \ldots, \cos d(p_{k+1}, x)) \tag{6.4}$$

によって，リプシッツ定数 $\leq \sqrt{k+1}$ のリプシッツ写像 $\Phi_k : M \to \boldsymbol{R}^{k+1}$ が得られ，Φ_k は

$$\langle \Phi_k(x), \Phi_k(y) \rangle = \sum_{i=1}^{k+1} \cos d(p_i, x) \cos d(p_i, y) \tag{6.5}$$

をみたす（このような写像は [OtSYa] で最初に考察された).

(d) (c) の状況で，与えられた $\epsilon > 0$ に対して M の $\{p_i\}$ を含む $\frac{\epsilon}{4(m+1)}$–充填 $\{x_j\}_{j=1}^K$ を取り，$l_0 \in (0, \pi)$ を固定する．最短測地線 $\gamma : [0, l] \to M\,(0 < l \leq l_0)$ が ϵ–許容とは，任意の $t \in [0, l]$ と j に対

して

$$
(6.6) \qquad \begin{cases} |\cos d(x_j, \gamma(t)) - \langle \Phi_k(x_j), \Phi_k(\gamma(t)) \rangle| < \epsilon, \\ |\Phi_k(\gamma(t)) - h_{\Phi_k, l}(\dot\gamma(0), t)| < \epsilon \end{cases}
$$

が成り立つときをいう．ここで

$$
(6.7) \qquad \begin{cases} h_{\Phi_k, l}(v, t) := \frac{1}{\sin l}\{\sin(l-t)\Phi_k(\gamma_v(0)) + \sin t \Phi_k(\gamma_v(l))\} \\ \qquad\qquad\quad = (h_{\cos d_{p_i}, l})_{i=1}^{k+1} \end{cases}
$$

は (3.1) で考えたものと同様である．

(e) $j = 1, \ldots, K$ に対して

$$
(6.8) \qquad \begin{cases} f_j(x) := \cos d(x_j, x), \\ g_j(x) := \sum_{i=1}^{k+1} \cos d(x_j, p_i) \cos d(p_i, x) = \langle \Phi_k(x_j), \Phi_k(x) \rangle \end{cases}
$$

と置けばこれらは初等的で，特に $\cos d_{p_i}$ を含む．また，(6.6) の最初の式は $|f_j(\gamma(t)) - g_j(\gamma(t))| < \epsilon$ とも書けることを注意する．次の補題は L^2 版トポノゴフの定理（定理 3.1）に，注意 3.13 の考え方を適用したものである．

補題 6.6. 任意の $\epsilon > 0, l_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ と任意の整数 $K \geq 1$ に対して，$\mu(l_0, m)$ と $\delta(\epsilon, K, l_0, m) > 0$ が存在して次が成り立つ：$\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ である M^m に対して $\mathrm{vol}\, M \geq \omega_m - \delta$ が成り立つとする．p, q は $d(p,q) \leq l_0 - 2\epsilon$ をみたす M の 2 点とし，p, q で $|f_j(p) - g_j(p)|, |f_j(q) - g_j(q)| < \mu\epsilon \ (j = 1, \ldots, K)$ が成立するとせよ．このとき，$\bar p \in B_{\mu\epsilon}(p), \bar q \in B_{\mu\epsilon}(q), \gamma \in \min(\bar p, \bar q)$ で次をみたすものが選べる：すなわち，任意の $0 \leq t \leq d(p,q)$ に対して

$$
(6.9) \qquad |f_j(\gamma(t)) - h_{f_j, l}(\dot\gamma(0), t)| < \frac{\epsilon}{m+1}, \quad |f_j(\gamma(t) - g_j(\gamma(t))| < \epsilon.
$$

特に，測地線 γ は ϵ-許容である．

証明．$0 < \mu < 1$ は後で定めるものとし，$\nu = \mu\epsilon$ と置く．$p, q \in M$ と $s > 0$ に対して，$B_\nu(p)$ の点と $B_\nu(q)$ の点を結ぶ長さ s の最短測地線の始方向からなる UM の部分集合

$$
C_s = \{v \in UM \mid \pi(v) \in B_\nu(p), \exp sv \in B_\nu(q),\ d(\pi(v), \exp sv) = s\}
$$

を取る．このとき，ある $l \in (0, l_0)$ が存在して

$$
(6.10) \qquad \frac{\mathrm{vol}\, C_l}{\mathrm{vol}\, UM} \geq \frac{m}{2\pi^m} \frac{(v_1^m(\mu\epsilon))^2}{\omega_m \omega_{m-1}}
$$

をみたすことが分かる．実際

$$
\begin{aligned}
C &:= \{v \in TM \mid \pi(v) \in B_\nu(p), \exp v \in B_\nu(q), d(\exp v, \pi(v)) = \|v\|\} \\
C_x &:= \{v \in T_xM \mid d(\exp_x v, x) = \|v\|\} \quad (x \in M \text{ に対して})
\end{aligned}
$$

と置く．$x \in B_\nu(p)$ に対して $\exp_x$ はリッチ曲率の仮定から体積を減少させるので，ビショップ・グロモフの定理より

$$
\mathrm{vol}(T_xM \cap C) \geq \mathrm{vol}\, B_\nu(q) \geq \frac{\mathrm{vol}\, M}{v_1^m(\pi)} v_1^m(\nu).
$$

よって，$C=\bigcup_{s\in[0,\pi]} sC_s$, $\omega_m=v_1^m(\pi)$ に注意すると

$$\tfrac{\pi^m}{m}\max_{0\le s\le\pi}\operatorname{vol}C_s \ge \int_0^\pi s^{m-1}\operatorname{vol}C_s ds=\operatorname{vol}C$$
$$\ge \operatorname{vol}B_\nu(p)\tfrac{v_1^m(\nu)}{\omega_m}\operatorname{vol}M \ge (\tfrac{v_1^m(\nu)\operatorname{vol}M}{\omega_m})^2=\operatorname{vol}UM\tfrac{v_1^m(\nu)^2}{\omega_m\omega_{m-1}}\tfrac{\operatorname{vol}M}{\omega_m}.$$

仮定から $\operatorname{vol}M\ge\omega_m-\delta$ であり，$v\in C$ に対して $d(\exp v,\pi(v))\le l_0$ より $C_s=\emptyset(s>l_0)$ だから求める不等式 (6.10) を得る．

さて，初等的関数 $f_j, g_j\,(j=1,\dots,K)$ を代表して，証明の以下の部分で f と書く．いま，$\delta=\delta(\epsilon,\mu,K,m,l_0)$ を十分小に取り，系 2.9 (1) と L^2 版トポノゴフ比較定理 3.1 を用いれば，上の l に対して

$$\frac{1}{l\operatorname{vol}UM}\int_{UM}dv\int_0^l\left|(f\circ\gamma_v)'(t)-\frac{\partial h_f}{\partial t}(v,t)\right|^2dt<A \tag{6.11}$$

を得る．ただし，$A:=\frac{mv_m^1(\mu\epsilon)^2\mu^2\epsilon^2}{8\pi^m\omega_m\omega_{m-1}K}$ と置いた．よって

$$D_f:=\left\{v\in UM \mid \frac{1}{l}\int_0^l\left|(f\circ\gamma_v)'(t)-\frac{\partial h_f}{\partial t}(v,t)\right|^2dt<\mu^2\epsilon^2\right\}$$

に対して $\operatorname{vol}(UM\setminus D_f)\mu^2\epsilon^2/\operatorname{vol}UM\le A$ が容易に分かる．これを $f=f_j, g_j$ に適用して，(6.10) より

$$\tfrac{\operatorname{vol}(C_l\cap_j D_{f_j}\cap_j D_{g_j})}{\operatorname{vol}UM}=\tfrac{1}{\operatorname{vol}UM}(\operatorname{vol}C_l-\operatorname{vol}(UM\setminus\cap D_{f_j}\cap D_{g_j}))$$
$$\ge\tfrac{m(v_1^m(\mu\epsilon))^2}{2\pi^m\omega_m\omega_{m-1}}-2K\tfrac{A}{\mu^2\epsilon^2}>0$$

を得る．よって特に，$C_l\cap_j D_{f_j}\cap_j D_{g_j}\neq\emptyset$ である．すなわち，$v\in UM$ で $\bar p=\gamma_v(0)\in B_{\mu\epsilon}(p), \bar q=\gamma_v(l)\in B_{\mu\epsilon}(q)$ をみたすものがが存在して，任意の $f=f_j, g_j$ に対して

$$\frac{1}{l}\int_0^l\left|(f\circ\gamma_v)'(t)-\frac{\partial h_f}{\partial t}(v,t)\right|dt\le\left\{\frac{1}{l}\int_0^l|(f\circ\gamma_v)'-\frac{\partial h_f}{\partial t}|^2dt\right\}^{\frac12}dt<\mu\epsilon$$

が成り立つ．したがって

$$|f\circ\gamma_v(t)-h_{f,l}(v,t)|\le\int_0^t\left|(f\circ\gamma_v)'-\frac{\partial h_{f,l}}{\partial t}\right|dt\le l_0\mu\epsilon<\pi\mu\epsilon.$$

これより

$$|f_j\circ\gamma_v(t)-g_j\circ\gamma_v(t)|\le|f_j\circ\gamma_v(t)-h_{f_j,l}(v,t)|+$$
$$|h_{f_j,l}(v,t)-h_{g_j,l}(v,t)|+|h_{g_j,l}(v,t)-g_j\circ\gamma_v(t)|\le 2\pi\mu\epsilon+\tfrac{\mu\epsilon}{\cos\frac{l_0}{2}}.$$

よって，$\mu:=(\pi(m+1)+2\pi+(\cos l_0/2)^{-1})^{-1}$ と取れば，(6.9) が成り立つことが分かる． □

次に，帰納的に部分集合 $A_0\subset A_1\subset\cdots\subset A_k\subset M$ を

$$A_0:=\{p_i,q_i\mid i=1,\dots,k+1\},$$
$$A_{i+1}:=\{\gamma(t)\mid \gamma\text{ は }\bar a\in B_{\mu^{k+1-i}\epsilon}(a)\text{ と }\bar b\in B_{\mu^{k+1-i}\epsilon}(b)\ (a,b\in A_i)\text{ を結ぶ }\mu^{k-i}\epsilon\text{–許容な測地線分}\}$$

によって定める．ここで，μ は 前補題 6.6 で与えられたものである．次は補題6.6 より直ちにしたがう．

補題 6.7. ϵ, p_i, x_j, l_0 を上のとおりとする．
(1) 任意の $x_j, a \in A_k$ に対して $|\cos d(x_j, a) - \langle \Phi_k(x_j), \Phi_k(a)\rangle| < \epsilon$.
(2) $d(a,b) \le l_0 - 2\epsilon$ をみたす任意の $a, b \in A_k$ に対して，ϵ–許容な長さ $\le l_0$ の最短測地線が存在して，$\bar{a} \in B_{\mu\epsilon}(a)$ と $\bar{b} \in B_{\mu\epsilon}(b)$ を結ぶ．

補題 6.8. 上の状況で，準備 *(c)* の $\delta_1 > 0$ が十分小ならば $d_H(S^k_1, \Phi_k(A_k)) < \psi(\epsilon \mid m)$ が成り立つ．

証明. $S^k_1 \subset \boldsymbol{R}^{k+1}$ を単位球とし，$\{e_j\}$ を $\boldsymbol{R}^{k+1}$ の標準的な o.n.b. とする．そこで，先の A_i に対応して $B_i \subset S^k_1\,(i = 0, \dots, k)$ を帰納的に

$B_0 := \{e_j, -e_j; j = 1, \dots, k+1\}$,
$B_{i+1} := \{p \in S^k \mid p$ は B_i の２点を結ぶ長さ $\pi/2$ の測地線分上にある $\}$

で定義する．$B_k = S^k_1$ である．まず，$\Phi_k(A_k) \subset B_{2\epsilon}(S^k_1)$ を確かめよう．実際，$a \in A_k$ に対して (d) より $d(a, x_j) < \epsilon/2(m+1)$ をみたす x_j を選べば

$$|\langle \Phi_k(a) - \Phi_k(x_j), \Phi_k(a)\rangle| \le \|\Phi_k(a) - \Phi_k(x_j)\| \cdot \|\Phi_k(a)\| \le (k+1)d(a, x_j)$$

である．これに補題 6.7 (1) を適用して

$$\begin{aligned}&-(k+1)d(a,x_j) + \cos d(x_j, a) - \epsilon \le \|\Phi_k(a)\|^2\\ &\le (k+1)d(a,x_j) + \cos d(x_j,a) + \epsilon,\end{aligned}$$

すなわち，$|\|\Phi_k(a)\|^2 - 1| \le 2\epsilon$ となり，主張が示せた．

次に，$B_i \subset T_{\psi(\epsilon|i,k,m)}(\Phi_k(A_i))$ を $i = 0, \dots, k$ に対して帰納的に示せば，$S^k_1 \subset T_{\psi(\epsilon|k,m)}\Phi_k(A_k)$ を得る．$i = 0$ に対しては $\Phi_k(p_i) = e_i$ であり，δ_1 が小ならば，$\cos d(p_i, q_i)$ は殆ど -1 に等しい．よって，３角不等式と系 2.9 (2) に注意して $\Phi(q_i)$ は $-e_i$ に近いことが分かる．次に，B_i に対して主張 が成り立つとする．定義より，$z \in B_{i+1}$ は $\bar{x}, \bar{y} \in B_i$ を結ぶ長さ $\pi/2$ の S^k_1 の測地線分 $\bar{\gamma}$ 上にある．帰納法の仮定から，$d(x, y) \le l_0$ なる２点 $x, y \in A_i$ で

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}\|, \|\bar{y}_1 - \bar{y}\| < \psi(\epsilon \mid i, k, m)$$

をみたすものが取れる．ただし，$\bar{x}_1 := \Phi_k(x)/\|\Phi_k(x)\|, \bar{y} := \Phi_k(y)/\|\Phi_k(y)\|$ と置いた．このとき，$\bar{x}_1, \bar{y}_1$ を結ぶ S^k の測地線分 $\bar{\gamma}_1$ に対して

$$\bar{\gamma}_1 \subset T_{\psi(\epsilon|i,k,m)}(\Phi_k(A_{i+1}))$$

を示せばよい． 補題 6.7 から，上の $x, y \in A_i$ に対して

$$|\cos d(x,y) - \cos d_{S^k}(\bar{x}_1, \bar{y}_1)| < \psi_1(\epsilon \mid i, k) \tag{6.12}$$

が成り立つことに注意する．さて，$\bar{a} \in B_\epsilon(x)$ と $\bar{b} \in B_\epsilon(y)$ を結ぶ M の ϵ–許容な測地線分 $\gamma_{\bar{a},\bar{b}}$ を取り，$l := d(\bar{a}, \bar{b}), \tilde{l} := d_{S^k}(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ と置く．

(6.12) に注意すれば，$\frac{\bar{l}}{l} \approx 1$ である．すると，$t \in [0, l]$ に対して補題 6.6 から

$$\begin{aligned}&\left\|\Phi_k(\gamma_{\bar{a},\bar{b}}(t)) - \left(\cos(\tfrac{\bar{l}}{l}t)\bar{x}_1 + \sin(\tfrac{\bar{l}}{l}t)(\tfrac{\bar{y}_1 - \cos\bar{l}\,\bar{x}_1}{\sin\bar{l}}\right)\right\| \le \\ &\left\|\Phi_k(\gamma_{\bar{a},\bar{b}}(t)) - \cos t\,\Phi_k(\bar{a}) - \sin t\tfrac{\Phi_k(\bar{b}) - \Phi_k(\bar{a})\cos l}{\sin l}\right\| + \\ &\left\|\cos(\tfrac{\bar{l}}{l}t)\bar{x}_1 - \cos t\,\Phi_k(\bar{a})\right\| + \left\|\sin(\tfrac{\bar{l}}{l}t)\tfrac{\bar{y}_1 - \bar{x}_1\cos\bar{l}}{\sin\bar{l}} - \sin t\tfrac{\Phi_k(\bar{b}) - \Phi_k(\bar{a})\cos l}{\sin l}\right\| \\ &\le \psi_2(\epsilon \mid i, k, m)\end{aligned}$$

を得る．ここで，上の不等式の第 1 行の括弧の中の項は，$\bar{x}_1, \bar{y}_1$ を結ぶ定速度 $\bar{l}/l$ の測地線分上の点を表すことに注意する．これで主張が示された．□

以上の準備の下に，定理 6.5 の証明の本質的な部分を述べよう．ここで，ペレルマンの定理 6.1，補題6.4 が必要となる．

補題 6.9. 任意の $\delta_1 > 0$ に対して $\delta = \delta(\epsilon, n) > 0$ が存在し，もし $\mathrm{vol}\, M \ge \omega_m - \delta$ ならば，$m+1$ 個の点対 $\{p_i, q_i\}$, $i = 1, \ldots, m+1$ で

$$(6.13)\qquad \begin{cases} d(p_i, p_j) = \frac{\pi}{2}\ (i \ne j), \quad d(p_i, q_i) > \pi - \delta_1, \\ |d(p_i, q_j) - \frac{\pi}{2}| < \psi(\delta_1 \mid n) \end{cases}$$

をみたすものが存在する．

証明. 定理で, (6.13) をみたす (p_i, q_i) の組が j 個あったと仮定する．$j = 1$ に対しては主張は容易に示せる．以下，j に関する帰納法により示す．補題が $j = k < m$ に対しては成立するとし，(6.4) の $\Phi_k : M \to \boldsymbol{R}^{k+1}$ を考える．もし，$\mathrm{vol}\, M > \omega_m - \delta$ ならば、定理 6.1 より M は球面に同相で，任意の $\mu \in (0, \frac{\pi}{2})$ に対して，M の半径 μ の任意の距離球は半径 2μ の同心距離球の中で可縮であった．S_1^k の 3 角形分割で、その任意の面の直径が ν より小さいものを取る ($\nu = \nu(m) \ll \frac{\pi}{2}$ は後で決まる)．T をこの 3 角形分割のすべての頂点の集合とする．δ を十分小に取れば，帰納法の仮定と補題 6.8 より，$d_H(\Phi_k(A_k), S_1^k) < \nu$ とできる．すると，写像 $\Psi_k : T \to A_k \subset M$ を

$$(6.14)\qquad \begin{cases} \|\Phi_k \circ \Psi_k - \mathrm{id}_{S_1^k}\| < \psi_1(\nu \mid k), \\ |d(\Psi_k(x), \Psi_k(y)) - d_{S_1^k}(x, y)| < \psi_1(\nu \mid k) \end{cases}$$

をみたすように構成できる．$\nu > 0$ を十分小に選ぶことにより，先のペレルマンの結果 (補題 6.3) を帰納的に三角形分割の各スケルトンに適用して，Ψ_k を連続写像 $\Psi_k : S_1^k \to M$ に拡張できる．さて

$$(6.15)\qquad F(x, t) := t\,\Phi_k \circ \Psi_k(x) + (1 - t)x \in \boldsymbol{R}^{k+1} \setminus \{o\}$$

で定義されたホモトピー $F : S_1^k \times I \to \boldsymbol{R}^{k+1} \setminus \{o\}$ を考える．ここで，$\Phi_k \circ \Psi_k$ は (6.14) より $\pi_k(\boldsymbol{R}^{k+1} \setminus \{o\}) \cong \pi_k(S^k) \cong \boldsymbol{Z}$ の生成元である．M は m 次元球面に同相で $k < m$ だから，Ψ_k を $\tilde{\Psi}_k : D^{k+1} \to M$ に拡張できる．このとき，$o \in \Phi_k \circ \tilde{\Psi}_k(D^{k+1})$ である．実際そうでなければ，$\Phi_k \circ \Psi_k$ は零ホモトピックとなり，先の事実に矛盾する．よって，$p_{k+2} \in M$ で $\Phi_k(p_{k+2}) = o$, すなわち，$d(p_i, p_{k+2}) = \frac{\pi}{2}(i = 1, \ldots, k+1)$

をみたすものが選べる．すると，系 2.9 (1) より (6.13) をみたすように q_{k+2} を選ぶことができる． □

したがって，A_m と $\Phi_m : A_m \to S_1^m$ が定義される．定理 6.5 の証明の前に，単位球面 S_1^m に対する易しい事実をもう一つ用意する：任意の $\epsilon > 0$ に対して，十分小さな $\lambda_k(\epsilon, m) > 0\,(k = 1, 2)$ と，有限個の互いに交わらない S_1^m の距離球の族 $\{B_{r_i+\lambda_2}(y_i)\}$ で

$$\lambda_1 \le r_i, \;\; r_i + \lambda_2 < \frac{\epsilon}{2}, \;\; \omega_m - v_1^m(\frac{\epsilon}{2}) < \sum_i v_1^m(r_i)$$

をみたすものが取れる．

さて定理 6.5 の証明に戻り，λ_j, r_i, y_i は上のものとする．$\Phi : A_m \to S_1^m$ を $\Phi(x) := \Phi_m(x)/\|\Phi_m(x)\|$ で与える．補題 6.9, 6.8 から，$\Phi : A_m \to S_1^m$ は λ_2–ハウスドルフ近似である．よって，$x_i \in A_m$ で $d_{S_1^m}(\Phi(x_i), y_i) < \lambda_2$ をみたす点がある．特に，$B_{r_i}(x_i)$ は M で互いに交わらない．ビショップ・グロモフの定理から

$$\frac{\sum \mathrm{vol}\, B_{r_i}(x_i)}{\mathrm{vol}\, M} \ge \sum \frac{v_1^m(r_i)}{\omega_m} > 1 - \frac{v_1^m(\frac{\epsilon}{2})}{\omega_m}.$$

したがって

$$\frac{\mathrm{vol}(M \setminus \bigcup B_{r_i}(x_i))}{\mathrm{vol}\, M} \le \frac{v_1^m(\frac{\epsilon}{2})}{\omega_m}$$

であり，$\bigcup B_{r_i}(x_i)$ は M で $\frac{\epsilon}{2}$–稠密である．特に，$\{x_i\}$ は M で ϵ–稠密となる．よって，$d_{GH}(A_m, M) < \epsilon$ を得る．これより，$d_{GH}(M, S_1^m) < 3\lambda_2$ で，定理 6.5 の証明が完了した． □

逆に，$\mathrm{Ric}_M \ge (m-1)$ なる完備リーマン多様体 M^m に対して $d_{GH}(M, S_1^m)$ が小ならば，体積の連続性（系 4.6）から $\omega_m - \mathrm{vol}\, M$ も小で，したがって M は球面に同相である．

次に，半径球面定理について述べる．コンパクト距離空間 X に対して，その半径 rad_X は $\inf_{x\in X}\{r > 0 \mid M \subset \bar{B}_r(x)\} = \inf_{x\in X}\sup_{y\in X} d(x,y)$ によって与えられた．明らかに $d(X)/2 \le \mathrm{rad}_X \le d(X)$ で，半径はグロモフ・ハウスドルフ距離に関して連続である．また，M^m が $\mathrm{Ric}_M \ge m-1$ をみたす m 次元完備リーマン多様体ならば，マイヤースの定理（系 2.4）によって $\mathrm{rad}_M \le \pi$ である．半径の概念は塩浜・山口（[SYa]）によって導入され，断面曲率 $K_M \ge 1$ の仮定の下で，半径が π に十分近ければ球面 S^m に微分同相であることが示された．その後，グローブ・ペーターセン（[GroP]），A.M. ペトルニン（[Pet]）により，曲率 1 以上のアレキサンドロフ空間 X の場合に，半径が $\pi/2$ より大なら，球面 S^m に同相であることが示された（断面曲率 $K_M \ge 1$ の完備リーマン多様体 M の場合は，M の直径が $d(M) > \pi/2$ をみたせば M は S^m に同相である (GroS])．アレキサンドロフ空間で X の直径が $d(X) > \pi/2$ の場合はこの事実は一般に成り立たない．しかし，ペレルマンにより X は懸垂になることが分かっている)．

他方，リッチ曲率の仮定の下で，上に述べた手法でコールディングは次を示した ([Co 2])．

定理 6.10. M^m は $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ をみたす m 次元完備リーマン多様体とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(m, \epsilon) > 0$ が存在して，$\mathrm{rad}_M \geq \pi - \delta$ ならば $\mathrm{vol}\, M \geq \omega_m - \epsilon$ である．特に，M は球面に同相である．

定理の証明のためには次を示せばよい：$\mathrm{Ric}_{M_i} \geq m-1$ をみたす m 次元コンパクト・リーマン多様体の列 $\{M_i^m\}_{i=1}^{\infty}$ が $\mathrm{rad}_{M_i} \to \pi$ をみたせば，$d_H(M_i, S_1^m) \to 0$ である．実際，$\mathrm{rad}_{M_i} \to \pi$ のとき，この事実と体積の連続性（系 4.6）より $\mathrm{vol}\, M_i \to \omega_m$ で最初の主張がでる．すると，定理 6.1 より第 2 の主張がしたがう．

さて，グロモフのプレコンパクト性定理から，グロモフ・ハウスドルフ距離に関して $M_i \to X$ としてよい． ここで，X はハウスドルフ次元 $d \leq m$，$\mathrm{rad}_X = \pi$ のコンパクト弧長空間である． このとき，次が成り立つ．

補題 6.11. X は単位球面 S_1^d に等長的である．特に，$\dim X = d$ は整数である．

証明．$M = M_i$ とし，$\mathrm{rad}_M > \pi - \epsilon$ が十分小さな $\epsilon > 0$ に対して成り立つとする．このとき，任意の $p_1 \in M$ に対して $d(p_1, q_1) > \pi - \epsilon$ をみたす $q_1 \in M$，p_1 と q_1 を結ぶ測地線 γ を取り，$p_2 := \gamma(\frac{\pi}{2})$ と置く．半径に関する仮定から， $d(p_2, q_2) > \pi - \epsilon$ をみたす $q_2 \in M$ が存在し，3 角不等式と系 2.9 (2) から

$$\left\{ \begin{array}{l} |d(p_i, p_j) - \frac{\pi}{2}| < \psi(\epsilon \mid m), \quad |d(q_i, q_j) - \frac{\pi}{2}| < \psi(\epsilon \mid m), \\ |d(p_i, q_j) - \frac{\pi}{2}| < \psi(\epsilon \mid m),\ (i \neq j); \quad d(p_i, q_i) > \pi - \epsilon \end{array} \right. \tag{6.16}$$

が $\{i, j\} = \{1, 2\}$ に対して成り立つ．次に，写像 $\Phi_2 : M \to \boldsymbol{R}^2$ を

$$\Phi_2(x) := (\cos d(p_1, x), \cos d(p_2, x))$$

により定めれば，容易に

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_2(M) \subset B_{1+\psi(\epsilon|m)}(o), \\ S^1 (:= \{x \in \boldsymbol{R}^2 \mid \|x\| = 1\}) \subset T_{\psi(\epsilon|m)}(\Phi_2(M)) \end{array} \right. \tag{6.17}$$

が分かる．実際，γ と，q_1 と q_2，および q_2 と p_1 を結ぶ最短測地線分からなる閉曲線の，Φ_2 による像は距離 d_H に関して S^1 に近い．さて，まず $\Phi_2(M) \subset T_{\psi(\epsilon|m)}(S^1)$ と仮定する．このとき，$\mathrm{pr} : \boldsymbol{R}^2 \to S^1$ を直交射影とすれば，$\bar{\Phi}_2 := \mathrm{pr} \circ \Phi_2 : M \to S^1$ は $\psi(\epsilon \mid m)$–ハウスドルフ近似である．実際，上で述べたことから任意の $a, b \in S^1$ に対して，$x, y \in M$ で次をみたすものが取れる：

$$\left\{ \begin{array}{l} \|a - \Phi_2(x)\|, \|b - \Phi_2(y)\| < \psi(\epsilon \mid m), \\ |\angle(\Phi_2(x), \Phi_2(y)) - d(x, y)| < \psi(\epsilon \mid m). \end{array} \right. \tag{6.18}$$

さて，$x, y \in M$ に対して x と y を結ぶ弧長を径数とする最短測地線分 $\gamma_v : [0, l] \to M$ を取る．$g_{\Phi_2}(v, s) = \sin s\, D\Phi_2(v) + \cos s \Phi_2(x)$ に対し，L^2 版トポノゴフ比較定理 3.3 に対する（注意 3.13 の考え方による）補題 6.6 の対応物を考えれば，$0 \leq s \leq \pi$ に対して $\|\Phi_2(\gamma_v(s)) - g_{\Phi_2}(v, s)\|$ は十分小と考えてよい．$\Phi_2(\gamma_v(s)) \in T_{\psi(\epsilon|m)}(S^1)$ と仮定したので

$$||D\Phi_2(v)\| - 1|,\ |\langle D\Phi_2(v), \Phi_2(x)\rangle| < \psi(\epsilon \mid m) \tag{6.19}$$

が成り立ち，したがって $\bar{\Phi}_2$ は $\psi(\epsilon \mid m)$–ハウスドルフ近似である．

次に，$\Phi_2(M) \setminus T_{\psi(\epsilon|m)}(S^1) \neq \emptyset$ とする．このときは，$x, y \in M$ と $0 < t < 1 - \psi(\epsilon \mid m)$ で

$$(6.20) \qquad |\|\Phi_2(x)\| - 1| < \psi(\epsilon \mid m), \quad \|\Phi_2(y) - \Phi_2(x)\| > 1 - t$$

をみたすものを選ぶことができる．さて，

$$f_i := \cos d_{p_i}\ (i = 1, 2),\ f := \cos d_y,\ F := (f_1, f_2, f) = (\Phi_2, f)$$

と置く．再び，補題 6.6 の g_F に対する対応物を考えて，$p \in B_{\psi(\epsilon|m)}(x), v \in U_pM$ で，$\|v + \nabla d_y\| < \psi(\epsilon \mid m)$ でありかつ

$$\|F(\gamma_v(s)) - g_F(v, s)\| < \psi(\epsilon \mid m) \quad (0 \leq \forall s \leq \pi)$$

をみたすものが存在する．特に，$\|v + \nabla d_y\| < \psi(\epsilon \mid m)$ から

$$|g_f(v, d(x, y)) - 1| < \psi(\epsilon \mid m)$$

を得る．よって，$d(y, \gamma_v(d(x, y))) < \psi(\epsilon \mid m)$ である．同様に

$$\|g_{\Phi_2}(v, \gamma_v(d(x, y))) - \Phi_2(y)\| < \psi(\epsilon \mid m)$$

を得る．(6.20) と 3 角不等式から容易に $\|\Phi_2(y) - t\Phi_2(x)\| < \psi(\epsilon \mid m)$ が成立する．また，$d(x, y) \geq (1 - t)/\sqrt{2}$ に注意すれば

$$\|D\Phi_2(v) - a\Phi_2(x)\| < \psi(\epsilon \mid m) \quad (\text{ただし，}\ a = \frac{t - \cos d(x, y)}{\sin d(x, y)})$$

である．$\|g_{\Phi_2}(v, s))\| < 1 + \psi(\epsilon \mid m)$ だから，$|a| < \psi(\epsilon \mid m)$，すなわち，$\|D\Phi_2(v)\| < \psi(\epsilon \mid m)$ となる．よって，$\|\Phi_2(\gamma_v(\frac{\pi}{2}))\| < \psi(\epsilon \mid m)$ を得る．

したがって，$p_3 := \gamma_v(\frac{\pi}{2})$ と置いて，$d(p_3, q_3) > \pi - \epsilon$ をみたす q_3 を選べば，(6.16) をみたす $\{p_i, q_i\}_{i=1,2,3}$ を得る．

さて，(6.16) が $i, j \subset \{1, \ldots, k\}$，$3 \leq k < n$ に対して成立したと仮定して，$\Phi_k : M \to \boldsymbol{R}^k$ を

$$(6.21) \qquad \Phi_k(x) := (\cos d(p_1, x), \ldots, \cos d(p_k, x))$$

で定義すれば

$$(6.22) \qquad \Phi_k(M) \subset B_{1+\psi(\epsilon|m)}(o), \quad S^k \subset T_{\psi(\epsilon|m)}(\Phi_k(M))$$

を確かめることができる．もし，$\Phi_k(M) \subset T_{\psi(\epsilon|m)}(S_1^{k-1})$ であれば，上と同じ議論によって $\bar{\Phi}_k := \mathrm{pro} \circ \Phi_k$ と置くと，$\bar{\Phi}_k : M \to S_1^{k-1}$ は $\psi(\epsilon \mid m)$–ハウスドルフ近似であることが分かる．

もし，$\Phi_k(M) \setminus T_{\psi(\epsilon|m)}(S_1^{k-1}) \neq \emptyset$ ならば，p_{k+1}, q_{k+1} を上と同様に選んで (6.16) が $i, j \in \{1, \ldots, k+1\}$ に対して成り立つようにできる．よって，帰納法により，$M = M_i$ に対して，$d = k \leq m$ で $d_H(M, S^d) < \psi(\epsilon \mid m)$ をみたすものがが取れるので，補題の証明が完了した．□

したがって，$d = m$ を示すことができれば定理 6.10 の証明は終わるが，実際次が成り立つ．

補題 6.12. m に依存する正数 $C = C(m)$ が存在して，任意の整数 $0 \le d < m$ と m 次元 コンパクト・リーマン多様体 M^m で $\mathrm{Ric}_M \ge m-1$ をみたすものに対し $d_{GH}(M, S_1^d) \ge C$ である．

証明. まず，任意の整数 $0 \le d < m$ に対して

$$v_1^m(5C)/v_1^d(C/2) < v_1^m(\pi)/v_1^d(\pi)$$

をみたす小さな $(\pi/5 >)\ C = C(m) > 0$ を取れることを注意する．この C に対して, $d_{GH}(M, S_1^d) < C$ として矛盾を導く．背理法の仮定の下で, 任意の $p \in M$ に対して $\bar{p} \in S_1^d$ と $q \in M$ が存在して, $d(p, \bar{p}) < C$ および $d(q, -\bar{p}) < C$ をみたす．すると, 任意の $0 < \mu < \pi - 2C$ に対してビショップ・グロモフの定理から

$$\frac{\mathrm{vol}\, B_{\pi-2C-\mu}(q)}{\mathrm{vol}\, M} \ge \frac{v_1^m(\pi - 2C - \mu)}{v_1^m(\pi)}$$

である．よって，$B_{\pi-2C-\mu}(q) \cap B_\mu(p) = \emptyset$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{v_1^m(2C+\mu)}{v_1^m(\pi)} &= 1 - \frac{v_1^m(\pi-2C-\mu)}{v_1^m(\pi)} \ge \frac{\mathrm{vol}\, M - \mathrm{vol}\, B_{\pi-2C-\mu}(q)}{\mathrm{vol}\, M} \\ &\ge \frac{\mathrm{vol}\, B_\mu(p)}{\mathrm{vol}\, M} \left(\ge \frac{v_1^m(\mu)}{v_1^m(\pi)}\right).\end{aligned}$$

さて，S_1^d で半径 $C/2$ の互いに交わらない距離球の極大な族 $\{B_{C/2}(\bar{p}_i)\}_{i=1}^l$ を取り，対応して $p_i \in M$, $d(p_i, \bar{p}_i) < C$ を選べば

$$\bigcup_{i=1}^l B_C(\bar{p}_i) = S_1^d, \quad \bigcup_{i=1}^l B_{3C}(p_i) = M, \quad l \le \frac{v_1^d(\pi)}{v_1^d(C/2)}$$

である．そこで，$\mu = 3C$ と置けば

$$1 \le \frac{\sum_i \mathrm{vol}\, B_{3C}(p_i)}{\mathrm{vol}\, M} \le \frac{l\, v_1^m(2C+3C)}{v_1^m(\pi)} \le \frac{v_1^d(\pi)}{v_1^m(\pi)} \frac{v_1^m(5C)}{v_1^d(\frac{C}{2})} < 1$$

となり，矛盾を得る．これで，定理 6.10 の証明が完了した．　□

6.3.　次に，§§6.2 で扱った議論とラプラシアンの固有値との関係について見よう．コールディングの定理 3.1 の証明の第 2 段 1° の式 (3.6) とレイリー商を考えれば，$\mathrm{Ric}_M \ge m-1$ の条件の下で, M の直径 $d(M)$ が π に近ければラプラシアンの正の第 1 固有値 $\lambda_1(M)$ は m に近いことが分かる（[Che] も参照）．さて，逆にリッチ曲率に関して同じ仮定の下で，$\lambda_1(M)$ が π に近ければ直径は π に近いかという問題が, リヒネロビッツ・小畠の定理の摂動版と関連して, C. B. クローク等により考察された（[Cro 1]）．

定理 6.13. M は $\mathrm{Ric}_M \ge m-1$ をみたす m 次元完備リーマン多様体とする．$\epsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\epsilon, m) > 0$ が存在して, $m \le \lambda_1(M) \le m+\delta$ ならば $d(M) > \pi - \epsilon$ である（逆も成り立った）．

クロークによる証明はベラール・メイヤーの等周不等式（[BeMey]）を応用するが，コールディングの方法を応用して証明することもできる．他方，P. ペーターセンは固有値と半径 $r(M)$ との関係について, 次

を示した．いま，$m = \dim M$ に対して $\lambda_{m+1} = \lambda_{m+1}(M)$ でラプラシアンの第 $m+1$ 番目の固有値を表す．球面 S_1^m の場合には，第 1 固有値 m の重複度は $m+1$ であったから，$\lambda_{m+1}(S_1^m) = m$ であることに注意されたい．

定理 6.14. M は $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ をみたす m 次元完備リーマン多様体とする．$\epsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\epsilon, m) > 0$ が存在して，$m \leq \lambda_{m+1}(M) \leq m+\delta$ ならば $r(M) > \pi - \epsilon$ であり，逆も成り立つ．

M^m は $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ をみたし，f はラプラシアンの固有値 $m \leq \lambda \leq m+\delta$ に対する固有関数とする．ここでは，(3.6) を考慮に入れて L^2 ノルムに関して，$\int_M f^2 d\nu_g / \mathrm{vol}\, M = 1/(m+1)$ となるよう f を正規化する．このとき，$\|\nabla f\|^2 = \int_M \|\nabla f\|^2 d\nu_g / \mathrm{vol}\, M = \lambda/(m+1)$ である．

補題 6.15. $p \geq 1$ に対して，次が成り立つ：

$$\left\{\begin{array}{l} f^2 + \|\nabla f\|^2 \leq 1 + \psi(\delta|m), \\ \|f^2 + \|\nabla f\|^2 - 1\|_p \leq \psi(\delta|m, p). \end{array}\right. \tag{6.23}$$

証明. $\Delta f^2 = 2\lambda f^2 - 2\|\nabla f\|^2$ に注意して，リヒネロビッツ・小畠の証明と同様にボホナーの公式 (2.27) を用いれば

$$\Delta(f^2 + \|\nabla f\|^2) \leq -2\left\|D^2 f + \frac{\lambda f}{m} g\right\|^2 + 2(\lambda - m)\left\{\|\nabla f\|^2 - \frac{\lambda}{m} f^2\right\}.$$

ここで，$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{m+1}}$ だから，注意 2.28 (2) の勾配評価から ∇f は有界である．すると，$\int_M f d\nu_g = 0$ より $f(x) = 0$ となる点があるから，f も有界である．よって，λ に関する仮定から $\Delta(f^2 + \|\nabla f\|^2) \leq \psi(\delta|m)$ が成り立つ．これより，最大値原理 (注意 2.14 (1)) によって

$$f^2 + \|\nabla f\|^2 \leq \frac{1}{\mathrm{vol}\, M}\int_M (f^2 + \|\nabla f\|^2) d\nu_g + \psi(\delta|m) = 1 + \psi(\delta|m)$$

を得る．また，$\frac{1}{\mathrm{vol}\, M}\int_M (f^2 + \|\nabla f\|^2 - 1) d\nu_g = \frac{\lambda - m}{m+1}$ に注意すれば

$$\|f^2 + \|\nabla f\|^2 - 1\|_1 = \frac{1}{\mathrm{vol}\, M}\int_M \left|f^2 + \|\nabla f\|^2 - 1\right| d\nu_g \leq \psi(\delta|m)$$

となる．よって

$$\begin{aligned} \|f^2 + \|\nabla f\|^2 - 1\|_p \leq &\{\max_{x \in M} |f^2 + \|\nabla f\|^2 - 1|^{p-1}(x)\}^{\frac{1}{p}} \times \\ &(\|f^2 + \|\nabla f\|^2 - 1\|_1)^{\frac{1}{p}} \leq \psi(\delta|m, p) \end{aligned}$$

であり，証明が完了した． □

次に，$\lambda_i = \lambda_i(M)$ を M のラプラシアンの正の（重複度を込めた）第 i 番目の固有値とし，$\{f_i\}_{i=1}^k$ を固有値 $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ に対する固有関数の直交系で，$\|f_i\|_2^2 = \frac{1}{m+1}$ と正規化されたものとする．このとき，補題 6.15 に対応して次が成り立つ．

補題 6.16. $m \le \lambda_i \le m+\delta\,(i=1,\dots,k)$ とする．$\phi = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i$ と置くとき，$|\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 - 1| \le \psi(\delta|m)$ ならば，$p \ge 1$ に対して次が成り立つ：

$$(6.24)\qquad \begin{cases} \phi^2 + \|\nabla\phi\|^2 \le 1+\psi(\delta|m), \\ \|\phi^2 + \|\nabla\phi\|^2 - 1\|_p \le \psi(\delta|m,p). \end{cases}$$

実際，$\Delta\phi = m\phi + \psi(\delta|m)$, $\nabla\Delta\phi = m\nabla\phi + \psi(\delta|m)$ および

$$\int_M \phi d\nu_g = 0; \quad \left\|\phi^2 - \frac{1}{m+1}\right\|_2, \quad \left\|\|\nabla\phi\|^2 - \frac{m}{m+1}\right\|_2 \le \psi(\delta|m)$$

に注意して，前補題の場合と同様に，まず $\Delta(\phi^2 + \|\nabla\phi\|^2) \le \phi(\delta|m)$ を得る．後の議論も同様である．□

そこで，$\Phi_k : M \to \boldsymbol{R}^k$ を $\Phi_k(x) := (f_1(x),\dots,f_k(x))$ で，また $d\Phi_k : TM \to \boldsymbol{R}^k$ を $d\Phi_k(v) := (vf_1,\dots,vf_k)$ で定義する．このとき

$$(6.25)\qquad \|\Phi_k\|,\ \|d\Phi_k\| \le 1+\psi(\delta|m)$$

が成り立つ．

これを見るのに，$\|\Phi_k(x)\|^2 = \sum f_i^2(x)$ だから，$x_0 \in M$, $\Phi_k(x_0) \ne 0$ に対して $\alpha_i = f_i(x_0)/\sqrt{\sum f_i^2(x_0)}$ と置く．補題 6.16 を適用すれば，$\phi^2(x) \le 1+\psi(\delta|m)$ を得る．特に，$\|\Phi_k(x_0)\|^2 = \sum f_i^2(x_0) = \phi^2(x_0) \le 1+\psi(\delta|m)$ である．第２の不等式も $\|d\Phi_k\|^2 = \sum \|\nabla f_i^2\|$ を用いて同様に示せる．

補題 6.17. $\lambda_{m+1}(M) \le m+\delta$ とする．このとき，正規化された固有関数の直交系 $\{f_i\}_{i=1}^{m+1}$ を前のように選べば，$|\|\Phi_{m+1}\|^2 - 1| \le \psi(\delta|m)$ である．

証明．$\int_M \|\Phi_{m+1}\|^2 d\nu_g/\mathrm{vol}\,M = \sum_{i=1}^{m+1}\|f_i\|_2^2 = (m+1)/(m+1) = 1$ である．他方，(6.25) から $\|\Phi_{m+1}\|^2 \le 1+\psi(\delta|m)$ を得る．よって，補題 6.15 の証明と同様にして $\|\|\Phi_{m+1}\|-1\|_p \le \psi(\delta|m)$ である．さて，$\|\Phi_{m+1}\|^2 = \sum_{i=1}^{m+1} f_i^2$ のラプラシアンを計算して

$$\begin{aligned}&\Delta\|\Phi_{m+1}\|^2 = 2\sum(\lambda_i f_i^2 - \|\nabla f_i\|^2)\\ &= 2(m+1)(\textstyle\sum f_i^2 - \frac{1}{m+1}) + 2\sum(\lambda_i - m)f_i^2 - 2\sum(f_i^2 + \|\nabla f_i\|^2 - 1)\end{aligned}$$

を得るが，右辺の３つの項は $L^p(p \ge 1)$ の意味で小さい．よって，最大値原理 (注意 2.14 (1)) を $1-\|\Phi_{m+1}\|^2$ に適用して補題の証明は完了する．□

コールディングの定理 3.1 の証明の第２段 2° では，$\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を十分小に取るとき，$d(p,q) > \pi - \delta$ ならば $\lambda_1 \le m+\epsilon$ であることが示されていた．また，最初のちょうど k 個の固有値 $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ が $\lambda_i \le m+\epsilon$ をみたすと仮定する．対応して，固有関数の直交系 $\{f_i\}_{i=0}^\infty$ を $\|f_i\|_2^2 = \frac{1}{m+1}$ と取るとき，(ノルムの取り方は違うが) 以下のことも証明されていた：$f = \cos d_p$ の固有関数に関するフーリエ展開を

$f=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i f_i$ とすると

$$(6.26)\quad \begin{cases} \|\cos d_p-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_i\|_2\le\psi(\epsilon|m), \\ \|\nabla\cos d_p-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\nabla f_i\|_2\le\psi(\epsilon|m), \\ |\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2-1|\le\psi(\epsilon|m), \quad \left|\frac{1}{\operatorname{vol}M}\int_M\cos d_p d\nu_g\right|\le\psi(\epsilon|m). \end{cases}$$

このとき，さらに

$$(6.27)\qquad \left|\cos d_p-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_i\right|\le\psi(\epsilon|m)$$

が成り立つことを示そう．実際，補題 6.16 から $g:=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_i$ は $|g|\le 1+\psi(\epsilon|m)$ をみたす（$\cos d_p$ ももちろんこの不等式をみたす）．(6.26) の最初の式から，補題 6.15 の証明と同様にして，$p>2$ に対して $\|\cos d_p-g\|_p\le\psi(\epsilon|m,p)$ である．他方，$\cos d_p-g$ のラプラシアンは比較定理 2.12 を用いて

$$(6.28)\quad \begin{cases} \Delta(\cos d_p-g)\le m\cos d_p-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\lambda_i f_i=m(\cos d_p-g)- \\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\lambda_i-m)f_i=m(\cos d_p-g)+\psi(\epsilon|m)=:\kappa \end{cases}$$

と評価される．ここで，κ は $\|\kappa\|_p\le\psi(\epsilon|m,p)$ をみたす．よって，$p>m/2$ をひとつ固定して最大値原理（注意 2.14 (1)）を $\cos d_p-g$ に適用すれば，$\int_M g d\nu_g=0$ と (6.26) の最後の式に注意して，$\cos d_p-g\le\psi(\epsilon|m)$ を得る．

次に，$u:=g-\cos d_p$ と置く．(6.28) より $\Delta u\ge-\kappa$ で，上で述べたことから，$\|\kappa\|_p\le\psi(\epsilon|m)$ である．(6.26) の最初の式とコーシー・シュワルツの不等式から，u の L^1 ノルムはいくらでも小にでき，したがって u はいくらでも 0 に近い値を取れる．また ∇u が有界であることに注意する．今度は最大値原理（注意 2.20 (2)）を u に適用できて，$g-\cos d_p\le\psi(\epsilon|m)$ を得る．以上合わせて (6.27) が示された．□

以上の準備の下に，定理 6.14 の証明に移る．まず，$\operatorname{rad}M\ge\pi-\delta$ と仮定する．いま，閉区間 $[m,m+\epsilon]$ 内にちょうど最初の k 個の正の固有値が入ったとする．半径の仮定より $k\ge1$ で，任意の点 $p\in M$ に対して (6.26), (6.27) が成立する状況になっている．そこで，p に対して d_p のフーリエ級数の $i=1,\ldots,k$ に対応する値を $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ とし

$$\Psi_k(p):=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$$

と定義する．(6.26) の第３式より，$|\|\Psi_k\|^2-1|\le\psi(\delta|m)$ である．他方，(6.27) より，$g(p)=\sum\alpha_i f_i(p)$ は $\cos d_p(p)=1$ に近いから，(6.25) に注意して

$$\|\Psi_k(p)-\Phi_k(p)\|^2=\sum\alpha_i^2+\sum f_i^2(p)-2\sum\alpha_i f_i(p)\le\psi(\delta|m)$$

である．したがって，$|\|\Phi_k\|^2-1|\le\psi(\delta|m)$ も成り立つ．ところが

$$\frac{1}{\operatorname{vol}M}\int_M\|\Phi_k\|^2 d\nu_g=\frac{1}{\operatorname{vol}M}\int_M(\sum f_i^2)\,d\nu_g=\frac{k}{m+1}$$

であるから，$k=m+1$ でなければならない．

次に，$\lambda_{m+1}(M) \leq m+\delta$ と仮定する．補題 6.17 の $\{f_i\}_{i=1}^{m+1}$ を取る．さて，任意の $p \in M$ に対して $\beta_i = f_i(p)$ と置く．補題 6.16，補題 6.17 より，関数 $\phi = \sum \beta_i f_i$ は p で $\sum_{i=1}^{m+1} \beta_i^2$ に等しく，1 に殆ど等しい値 (殆ど最大値) を取る．この ϕ が殆ど $\cos d_p$ に等しいことを示そう．

これが言えれば，$\int_M \phi d\nu_g = 0$ より $\left|\int_M \cos d_p d\nu_g \mathrm{vol}\, M\right| \leq \psi(\delta|m)$ が成り立つ．よって，ビショップ・グロモフの比較定理から，d_p が殆ど π に等しくなる点が存在することになる．p は任意であったから，$\mathrm{rad}\, M \geq \pi - \psi(\delta|m)$ がしたがう．

さて ϕ に対して，必要なら β_i をすこし変えて，$\phi^2 + \|\nabla\phi\|^2 \leq 1$, $\phi(p) \geq 1-\psi(\delta|m)$ としてよい．これより，$\|\nabla(\cos^{-1}\phi)\| = \|\nabla\phi\|/\sqrt{1-\phi^2} \leq 1$ である．よって，任意の $x \in M$ に対して p と x を結ぶ最短測地線 γ を取れば

$$
\begin{aligned}
\cos^{-1}\phi(x) &= \int_0^{d_p(x)} \tfrac{d}{dt}\{\cos^{-1}\phi(\gamma(t))\}dt + \cos^{-1}\phi(p) \\
&\leq \cos^{-1}\phi(p) + d_p(x) \leq d_p(x) + \psi(\delta|m)
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\cos d_p(x) - \phi(x) \leq \psi(\delta|m) \tag{6.29}
$$

を得る．あとは (6.27) の証明と同様にして，今度は (6.29) を用いて $\Delta(\phi - \cos d_p) \geq -\psi(\delta|m)$ を示す．p では $\phi - \cos d_p$ をいくらでも小にできるから，再び最大値原理（注意 2.20 (2)）を適用して，目的の $|\phi - \cos d_p| \leq \psi(\delta|m)$ を得る．□

注意 6.18. (1)　以上をまとめると

$$
\begin{cases}
\lambda_{m+1}(M) \approx m \Longleftrightarrow \mathrm{rad}(M) \approx \pi \Longleftrightarrow \mathrm{vol}(M) \approx \omega_m \\
\Longleftrightarrow d_{GH}(M, S_1^m) \ll 1
\end{cases}
$$

が成立し，この状況の下で，ペレルマンの定理 *6.1* より M は S^m に同相になる．さらに，チーガー・コールディングは同相より強く微分同相になることまで示した．以下それについて §*6.4* で簡単に補足する．

(2)　同じリッチ曲率の仮定の下で，$d(M)$ が π に十分近ければ，M はある距離空間 X の距離懸垂 $\Sigma_1 X = (0,\pi) \times_{\sin r} X$ とグロモフ・ハウスドルフ距離が近いことは分かる．他方，M の直径 $d(M)$ が π に近くても，M は球面に同相であるとは限らない．アンダーソン（[An 1]）は，複素射影平面の連結和 $\boldsymbol{CP}^2 \sharp \boldsymbol{CP}^2$ 上のリーマン計量で，$\mathrm{Ric} \geq 3$, $\mathrm{vol} \geq v > 0$ をみたし，グロモフ・ハウスドルフ距離に関してあるベルジェ球面 S^3 の距離懸垂（S^4 に同相で 2 個の錐特異点を持ち，直径は π に等しい）に幾らでも近くできるものを構成した．また，大津（[Ot 2]）は $S^m \times S^n \, (m+n \geq 5, m, n \geq 2)$ 上で，同様の反例を構成した．

6.4 (補足). §3 – §6 で与えた考察は，より一般にリッチ曲率が下から押さえられたリーマン多様体の局所構造を調べるのにも有効である．実際，コールディングの定理 6.5 は，リッチ曲率の仮定 $\mathrm{Ric}_M \geq m-1$ の下に，もし M の体積が ω_m に近ければ，グロモフ・ハウスドルフ距離に関して M^m は単位球面 S_1^m に近いことを述べていて，体積のグロモフ・ハウスドルフ距離に関する連続性（系 4.6）の逆になっている．

定理 6.5 の証明では，距離関数（の余弦）を用いてハウスドルフ近似となるべきユークリッド空間への写像を構成し，ペレルマンの補題 6.3 を用いて実際それが球面 S_1^m との間の近似を与えることを示した．さて，体積の連続性は一般にリッチ曲率が下から押さえられている多様体に対して成立したが（定理 4.1，系 4.3），その逆も上の方法により次の形で成り立つ（[Co-3]）．

定理 6.19. 任意の $\epsilon > 0$ と整数 $m \geq 2$ に対して，$\delta = \delta(\epsilon, m) > 0$, $\rho = \rho(\epsilon, m) > 0$ が存在して次が成り立つ:m 次元完備リーマン多様体 M^m が $\mathrm{Ric}_M \geq -(m-1)$ をみたすとする．このとき，$0 < r \leq \rho$ と任意の距離球 $B_r(p; M)$ に対して，その体積が $\mathrm{vol}\, B_r(p; M) \geq (1-\delta)\mathrm{vol}\, B_r(o; \boldsymbol{R}^m)$ をみたせば $d_{GH}(B_r(p; M), B_r(o; \boldsymbol{R}^m)) \leq \epsilon r$ が成り立つ．

さらに，チーガー・コールディング は系 4.3，定理 6.19 を用いて，幾何学的測度論でのライフェンバーグの方法を今の内在的な場合に構成し直して，特に次の安定性定理を得た：

定理 6.20. コンパクト m 次元リーマン多様体の列 $\{M_i\}$ が $\mathrm{Ric}_{M_i} \geq -(m-1)$ をみたし，同じ m 次元のコンパクト・リーマン多様体 M にグロモフ・ハウスドルフ収束したとする．このとき，十分大きな i に対して M_i は M に微分同相である．

大雑把な説明をする：d_{GH} に関して $M_i^m \to M$ のとき $p_i \to p$ とすれば, 定理 4.1 から（M に依存する）$r_0 > 0$ が存在して，十分大きな i に対して

$$\mathrm{vol}\, B_{r_0}(p_i; M_i) \approx \mathrm{vol}\, B_{r_0}(p; M) \geq v_{-1}^m(r_0)\,(1 - Cr_0^2)$$

が成り立つ．すると，ビショップ・グロモフの比較定理から，任意の $0 < r \leq r_0$ に対して $\mathrm{vol}\, B_r(p_i; M_i) \geq v_{-1}^m(r)(1-\delta)$ が成立する．よって 定理 6.19 から，i が十分大ならば 任意の $0 < r \leq r_0$ に対して

$$d_{GH}(B_r(p_i; M_i), B_r(o; \boldsymbol{R}^m)) < \epsilon r$$

である．さて，チーガー・コールディング はこの状況で，ヘルダー双連続な写像 $\Phi : B_{r_0/2}(p_i; M_i) \to B_{r_0/2}(o; \boldsymbol{R}^m)$ で，そのヘルダー指数が $\epsilon \downarrow 0$ の時に 1 に収束するものを構成できることを示した．これら等を抽象的につなぎ合わせて, M_i と微分同相な多様体を構成し，M で同様の操作で得られたものと較べることにより，定理 6.20 が示される．

この定理より，定理 6.1 やその他の，或る滑らかなリーマン多様体とのグロモフ・ハウスドルフ距離が近い場合での同相の結論は「微分同相」に置きかえることができる．なお，上の定理で一般に $X = \lim_{GH} M_i$ が多様体にならず，特異点を持つ場合は上の安定性は成り立たない（先のアンダーソン・大津による反例がある）ことを注意しておこう．

最初はリッチ曲率が殆ど非負の場合のグロモフ予想の解決等についても述べたいと考えていたが，既に頁数も増え，また締め切りの時間となったので（報告者の非才が真の理由であるが），これで一応の終わりとしたい．ギャロの報告（[Ga 2]）には，この場合についてのもう少し詳しい説明がある．

深谷さんの話では，最近コンセヴィッチが非常に一般の特異空間で，「リッチ曲率が下から（零で）押さえられた」という性質の定義や、コンパクト性定理を試みているそうです．多分，非常に総合的（synthetic）な立場と思われます．他方，この報告で述べてきたことは，主に滑らかなリーマン多様体で近似して従来の手法を駆使して「リッチ曲率が下から有界な」特異空間を調べる（ブラゴ・グロモフ・ペレルマンやチーガー・コールディングのいう特異点解消の）立場でした．リッチ曲率の本質を知るには，これら両方の立場が必要と思えますが私には見当もつきません．２１世紀にはこれらがどのように関わり合って発展していくのでしょうか？

参考文献

[AbGr] U. Abresch and D. Gromoll, On complete manifolds with nonnegative Ricci curvature, J. Amer. Math. Soc. **3**(1990), 355–374.

[An 1] M. T. Anderson, Metrics of positive Ricci curvature with large diameter, Manuscripta Math. **68**(1990), 355–374.

[An 2] M. T. Anderson, On the topology of complete manifolds of nonnegative Ricci curvature, Topology **29**(1990), 41–55.

[An 3] M. T. Anderson, Short geodesics and gravitational instantons, J. Diff. Geom. **31**(1990), 265–275.

[An 4] M. T. Anderson, Convergence and rigidity of manifolds under Ricci curvature bounds, Invent. Math. **102**(1990), 429–445.

[An 5] M. T. Anderson, Hausdorff perturbations of Ricci flat manifolds and the splitting theorem, Duke. Math. J. **68**(1992), 67–82.

[AnC 1] M. T. Anderson and J. Cheeger, Diffeomorphism finiteness for manifolds with Ricci curvature and $L^{n/2}$-norm of curvature bounded, Geom. and Funct. Analysis **1**(1991), 231–252.

[AnC 2] M. T. Anderson and J. Cheeger, C^{α}-compactness for manifolds with Ricci curvature and injectivity radius bounded below, J. Differential Geom. **35**(1992), 265–281.

[Au] T. Aubin, Métriques riemanniennes et courbure, J. Differential Geom. **4**(1970), 383-424.

[Be 1] P. H. Bérard, *Spectral Geometry, Direct and Inverse Problems*, Lecture Notes in Math. **1207**, Springer-Verlag, New York, 1986.

[Be 2] P. H. Bérard, From vanishing theorems to estimating theorems: The Bochner technique revisted, Bull. Amer. Math. Soc. **19**(1988), 371–406.

[BeMey] P. H. Bérard and D. Meyer, Inègalités isopérimétriques et applications, Ann. Sci. École Norm. Sup. Paris (4) **15**(1982), 513–541.

[BeB] L. Berard-Bergery, Quelques exemples de varétés riemanniennes complétes non compactes à courbure de ricci positive, C. R. Acad. Sci. Paris série *A* **302**(1986), 155–161.

[B 1] M. Berger, *Riemannian manifolds whose Ricci curvature is bounded from below* (note by T.Tsujisita, in Japanese), Osaka Univ., 1982.

[B 2] M. Berger, Riemannian geometry during the second half of the twentieth century, Amer. Math. Soc. (University Lecture Ser.), 1999.

[BGauMa] M. Berger, P.Gauduchon, and E.Mazet, *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, Lect. Notes in Math. **194**, Springer-Verlag, New York, 1974.

[Bes] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[BiCr] R. L. Bishop and R. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, 1964.

[Bo] S. Bochner, Vector fields and Ricci curvatures, Bull. Amer. Math. Soc. **52**(1946), 776 797.

[BuGPe] Y. Burago, M. Gromov, and G. Perelman, A.D.Alexsandrov spaces with curvature bounded from below, Uspekhi Math. Nauk. **47**(1992), 3 51; English transl. in Russian Math. Survey **47**(1992).

[Cha 1] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1984.

[Cha 2] I. Chavel, *Riemannian Geometry - A Modern Introduction*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[C 1] J. Cheeger, Pinching theorems for a certain class of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. **91**(1969), 807 834.

[C 2] J. Cheeger, Finiteness theorems for Riemannian manifolds, Amer. J. Math. **92**(1970), 61 74.

[C 3] J. Cheeger, Some examples of manifolds of nonnegative curvature, J. Differential Geom. **8**(1973), 623 628.

[C 4] J. Cheeger, Critical points of distance functions and applications to geometry, in *Geometric Topology*, Lecture Notes in Math. **1504**(1991), Springer-Verlag, New York, 1 33.

[C 5] J. Cheeger, Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces, Geom. and Funct. Analysis **9**(1999), 428 517.

[CCo 1] J. Cheeger and T. H. Colding, Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped product, Ann. of Math. **144** (1996), 189 237.

[CCo 2] J. Cheeger and T. H. Colding, On the structure of spaces with ricci curvature bounded below I, J. Diff. Geom. **46**(1997), 406 480. II, **52**(1999), 13 35. III, **52**(1999), 37 74.

[CEb] J. Cheeger and D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[CGr] J. Cheeger and D. Gromoll, The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature, J. Differential Geom. **6**(1971), 119 129.

[CGTa] J. Cheeger, M. Gromov, and M. Taylor, Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds, J. Differential Geom. **17**(1982), 15 54.

[Che] S. Y. Cheng, Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications, Math. Z. **143**(1975), 289 297.

[CheY] S. Y. Cheng and S.-T. Yau, Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications, Comm. on pure and applied Math. **28**(1975), 333 354.

[Co 1] T. H. Colding, Shape of manifolds with positive Ricci curvature, Invent. Math. **124** (1996), 175 191.

[Co 2] T. H. Colding, Large manifolds with positive Ricci curvature, Invent. Math. **124** (1996), 193 214.

[Co 3] T. H. Colding, Ricci curvature and volume convergence, Ann. of Math. **145** (1997), 477 501.

[Co 4] T. H. Colding, Aspects of Ricci curvature, in *Comparison Geometry*, MSRI Publications **39**(1997), 83 98.

[Co 5] T. H. Colding, Spaces with Ricci curvature bound, in Documenta Mathematica · Extra Volume ICM 1998 · II Doc. Math. J. DMV (1999), 299 308.

[CoMin 1] T. H. Colding and W. Minnicozzi II, Harmonic functions on manifolds, Ann. of Math. **146**(1997), 725 747.

[CoMin 2] T. H. Colding and W. Minnicozzi II, Weyl type formulas for harmonic functions, Invent. Math. **131**(1998), 257 298.

[Cro 1] C. B. Croke, An eigenvalue pinching theorem, Invent. Math. **68**(1982), 253 256.

[Cro 2] C. B. Croke, An isoembolic pinching theorem, Invent. Math. **92**(1988), 385 387.

[Eh] P. E. Ehrlich, Metric deformations and curvature I ; Local convex deformations, Geom. Dedicata **5**(1976), 1 29.

[EscHe] J. H. Eschenburg and E. Heintze, An elementary proof of the Cheeger-Gromoll splitting theorem, Ann. Glob. Anal. and Geom. **2**(1984), 141 151.

[F 1] K. Fukaya, Collapsing Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operators, Invent. Math. **87**(1987), 517 547.

[F 2] K. Fukaya, Hausdorff convergence of Riemannian manifolds and its applications, in *Recent Topics in Differential and Analytic Geometry*, Adv. Stud. in Pure Math. **18**(1990), North-Holland, Kinokuniya, Amsterdam, Tokyo, 143 238.

[FYa] K. Fukaya and T. Yamaguchi, The fundamental groups of almost nonnegatively curved manifolds, Ann. of Math. (2) **136**(1993), 253 333.

[Ga 1] S. Gallot, A Sobolev inequality and some geometric applications, *Spectra of Riemannian manifolds*, 45-55, Kaigai Publ., Tokyo, 1983.

[Ga 2] S.Gallot, Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes, Astérisque, Math. Soc. France **163-164**(1988), 31 91.

[Ga 3] S. Gallot, Volumes, coubure de Ricci et convergence des variétés d'apr'es T.H.Colding et Cheeger-Colding, Séminaire BOURBAKI, 50'eme année, 1997-98 **835**, 1 33.

[GaHLa] S. Gallot, D. Hullin, and J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[Gr] D. Gromoll, Spaces of nonnegative curvature, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math. **54**(1993), Part 3, 337 356.

[G 1] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps, Publ. Math. I.H.E.S. **53**(1981), 53 73.

[G 2] M. Gromov, Curvature, diameter and Betti numbers, Comment. Math. Helv. **56**(1981), 179 195.

[G 3] M. Gromov, *Structure métriques pour les variétés riemanniennes*, rédgié par J.Lafontaine et P.Pansu, Cedic-Nathan, Paris, 1981.
Revised English version: *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Progress in Math. **152**, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, 1999.

[G 4] M. Gromov, Sign and geometric meaning of curvature, Rend. Sem. Math. Fis. Milano **61**(1991), 9 123.

[G 5] M. Gromov, Spaces and Questions, Geom. and Funct. Analysis, Special Volume GAFA2000, 118 161.

[GroP] K. Grove and P. Petersen, A radius sphere theorem, Invent. Math. **112**(1993), 577 583.

[GroPW] K. Grove, P. Petersen, and J. Y. Wu, Geometric finiteness theorems via controlled topology, Invent. Math. **99**(1990), 205 213.

[GroS] K. Grove and K. Shiohama. A generalized sphere theorem, Ann. of Math. (2) **106**(1977), 201 211.

[Ha] R. Hamilton, Three manifolds with positive Ricci curvature, J. Differential Geom. **17**(1982), 255 306.

[HeKa] E. Heintze and H. Karcher, A general comparison theorem with applications to volume estimate for submanifolds, Ann. Sci. École Norm. Sup. Paris (4)**11**(1978), 451–470.

[Hu] G. Huisken, Ricci deformation of the metric on a Riemannian manifold, J. Differential Geom. **21**(1985), 47–62.

[Ito] Y. Itokawa, The topology of certain riemannian manifolds with positive Ricci curvature, J. Differential Geom. **18**(1983), 151–155.

[ItoK] Y. Itokawa and R. Kobayashi, Minimizing currents on open manifolds and the $n-1$ homology of nonnegatively Ricci curved manifolds, Amer. J. Math. **121**(1999), 1253–1278.

[J] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, 2nd ed., Springer, 1998.

[Ka] H. Karcher, Riemannian comparison construction, in *Global Differential Geometry*, MAA-Studies in Math. **27**(1989), 170-222.

[Kas 1] A. Kasue, Applications of Laplacian and Hessian comparison theorems, in *Geometry of Geodesics and Related Topics*, Adv. Stud. in Pure Math. **3**(1984), North-Holland, Kinokuniya, Amsterdam, Tokyo, 333–386.

[Kas 2] 加須栄篤, Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces （この Surveys in Geometry 「リーマン多様体とその極限」報告集）

[K] W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, Walter de Gruyter, Berlin, 1982, 2nd ed., 1995.

[LiTr] P. Li and A. Treibergs, Applications of Eigenvalue Techniques to Geometry, Contemporary Geometry, J.-Q.Zhong Memorial Volume (ed. H-H Wu), Plenum Press, New York and London, 21–52.

[LiSc] P. Li and R. Schoen, L^p and mean value properties of subharmonic functions on Riemannian manifolds, Acta, Math. **153**(1983), 279–301.

[LiY] P. Li and S. T. Yau, Estimate of eigenvalues of a compact Riemannian manifold, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math. **36**(1980), 205–235.

[Lic] A. Lichnerowicz, *Géometrié des Groupes des Transformations*, Dunod, Paris, 1958.

[Lo] J. Lohkamp, Negatively Ricci curved manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. **27**(1992), 288-291, Ann. of Math. (2) **140**(1994), 655–683.

[Me 1] X. Menguy, Noncollapsing examples with positive Ricci curvature and infinite topological type, J. Differential Geom. **2**(2000), 1–7.

[Me 2] X. Menguy, Examples of nonpolar limit spaces, Amer. J. Math. **122**(2000), 927–937.

[Me 3] X. Menguy, Examples of strictly weakly regular points, Geom. and Funct. Analysis **11**(2001), 124–131.

[M] J. Milnor, A note on curvature and the fundamental group, J. Differential Geom. **2**(1978), 1–7.

[My] S. B. Myers, Riemannian manifolds with positive mean curvature, Duke Math. J. **8**(1941), 401–404.

[Ob] M. Obata, Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere, J. Math. Soc. Japan **14**(1962), 333–340.

[Ot 1] Y. Otsu, On manifolds of positive Ricci curvature with large diameter, Math. Z. **206**(1991), 255–264.

[Ot 2] 大津幸男, Alexandrov 空間入門, （この Surveys in Geometry 「リーマン多様体とその極限」報告集）

[OtSYa] Y. Otsu, K. Shiohama, and T. Yamaguchi, A new version of differentiable sphere theorem, Invent. Math. **98**(1989), 219–228.

[Pe 1] G. Perelman, Manifolds of positive Ricci curvature with almost maximal volume, J. Amer. Math. Soc. **7**(1994), 299 305.

[Pe 2] G. Perelman, Construction of manifolds of positive Ricci curvature with big volume and large Betti numbers, in *Comparison Geometry*, MSRI Publications **39**(1997), 157 163.

[Pe 3] G. Perelman, A complete Riemannian manifolds of positive Ricci curvature with Euclidean volume growth and nonunique asymptotic cone, in *Comparison Geometry*, MSRI Publications **39**(1997), 165 166.

[Pe 4] G. Perelman, Alexandrov's spaces with curvature bounded below II, preprint.

[P 1] P. Petersen, *Riemannian geometry*, GTM 171, Springer, New York (1997).

[P 2] P. Petersen, On eigenvalue pinching in positive Ricci curvature, Invent. Math. **138**(1999), 1 21. Erratum: **155**(2004), 223.

[PW] P. Petersen and G. Wei, Analysis and geometry on manifolds with integral Ricci curvature bound, Trans. Amer. Math. Soc. **353**(2000), 457 478.

[Pet] A. M. Petrunin, Applications of quasigeodesics and gradient curves, in *Comparison Geometry*, MSRI Publications **39**(1997), 203 219.

[Sa 1] T. Sakai, *Riemannian geometry*, Translations of Math. Monographs, **149** Amer. Math. Soc. (1996).

[Sa 2] T. Sakai, On Riemannian manifolds asmitting a function whose gradient is of constant norm, Kodai Math. J. **19**(1996), 39 51.

[Sa 3] T. Sakai, On Riemannian manifolds asmitting a function whose gradient is of constant norm II, Kodai Math. J. **21**(1998), 102 124.

[Sa 4] T. Sakai, Warped products and Riemannian manifolds asmitting a function wh se gradient is of constant norm, Math. J. Okayama Univ. **39**(1997), 39 51.(1999)

[SchY 1] R. Schoen and S.-T. Yau, Complete three dimensional manifolds with positive Ricci curvature and scalar curvature, in *Seminar on Differential Geometry*, Ann. of Math. Studies **102**(1982), Princeton Univ. Press, Princeton, 209 228.

[SchY 2] R. Schoen and S.-T. Yau, *Lectures on Differential Geometry* International Press 1994.

[ShaYa 1] J. P. Sha and D. G. Yang, Examples of positive Ricci curvature, J. Differential Geom. **29**(1989), 95 103.

[ShaYa 2] J. P. Sha and D. G. Yang, Positive Ricci curvature on connected sum of $S^n \times S^m$, J. Differential Geom. **33**(1991), 127 137.

[S 1] K. Shiohama, A sphere theorem for manifolds of positive Ricci curvature, Trans. Amer. Math. Soc. **275**(1983), 811 819.

[S 2] K. Shiohama, Sphere theorems, Handbook of Differential Geometry I, 865 903, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[SYa] K. Shiohama and T. Yamaguchi, Positively curved manifolds with restricted diameter, in *Geometry of Manifolds*(ed. K.Shiohama), Perspectives in Math. **8**(1989), Academic Press, 345 350.

[Sor 1] C. Sormani, Busemann functions on manifolds with lower bounds on Ricci curvature and minimal volume growth, J. Differential Geom. **48**(1998), 557 585.

[Sor 2] C. Sormani, Nonnegative Ricci curvature, small linear diameter growth and finite generation of fundamental groups, J. Differential Geom. **54**(2000), 547 559.

[SorW] C. Sormani and G. Wei, Hausdorff convergence and universal covers, Trans. Amer. Math. Soc. **353**(2001), 3585 3602.

[T] V. A. Toponogov, The metric structure of Riemannian spaces with nonnegative curvature which contain straight lines, Sibirisk Math. Z. **5**(1964), 1358-1369, Engl. translation, Transl. Amer. Math. Soc. **37**(1964), 287 290.

[Ya 1] T. Yamaguchi, Manifolds of almost nonnegative Ricci curvature, J. Differential Geom. **28**(1988), 157 167.

[Ya 2] T. Yamaguchi, Collapsing and pinching under a lower curvature bound, Ann. of Math. (2)**133**(1991), 317 357.

[YanoBo] K. Yano and S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*, Ann. of Math. Studies **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1953.

[Y 1] S.-T. Yau, Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold, Ann. Sci. École Norm. Sup. Paris (4)**8**(1975), 487 507.

[Y 2] S.-T. Yau, Some function theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry, Indiana Math. J. **25**(1976), 659 670.

[ZhYa] J. Q. Zhong and H. C. Yang, On the estimate of first eigenvalue of a compact Riemannian manifold, Sci. Sinnica Ser. A **27**(1984), 1252 1265.

[Z] S. Zhu, A finiteness theorem for Ricci curvature in dimension three, J. Differential Geom. **37**(1993), 717 727.

測度距離空間の幾何解析
—リプシッツ関数の微分を中心に—

加須栄 篤（金沢大学大学院自然科学研究科）

はじめに

１９８０年前後にM. グロモフによってリーマン多様体の収束，もっと一般に距離空間の収束という概念が導入されて以来，数多くの研究者によって，リーマン空間の収束に関する研究がなされ，現在も深化している．たとえばリーマン多様体の極限と収束列の関係，そしてその考察から得られるリーマン多様体自身の構造の解明が，曲率のピンチング条件，上からあるいは下からの有界条件，L^p ノルムに関する有界性，アインシュタイン計量などの性質の理解を大きく前進させた．

また，多様体という空間を含むより広い範疇での幾何学の必要性と可能性も，このリーマン空間の収束理論を通して明らかになりつつあるといえる．他の分野と関わりながら，新たな研究課題を提供している．たとえば，リーマン多様体はその自然な距離を備えた距離空間であると同時に，関数空間に自然なディリクレエネルギー汎関数を定め，典型的なディリクレ空間である．ディリクレ空間の理論は，確率過程の理論と深く関わりながら以前から研究されており，このような視点やスペクトル幾何の視点からの収束理論の展開は興味あるものと思われる．

さて，本論説の前半において，測度距離空間上のリプシッツ関数の微分に関するJ. チーガーの研究 [12] の主要結果を解説する．すなわち，ユークリッド空間のリプシッツ関数の微分に関する古典的な定理を測度距離空間へ拡張する．要求される条件は，距離球体の測度の増大度に関する性質–ダブリング条件–とディリクレ エネルギーに関する性質–ポアンカレの不等式–である．この一般化において，広義の余接束を構成し，それによるリプシッツ関数の微分の表現を解説する．また接錘を通してもリプシッツ関数の微分のひとつの表現を与える．

チーガーの研究の展開において，考察する測度距離空間やそれから得られる接錘は自然にディリクレ空間の構造を許容することが示される．

本論説の後半では，前半の結果との関連からディリクレ空間とその収束について考察する．リプシッツノルムによるエネルギー汎関数は２次形式とは限らず，関連する変分問題も非線形となる．たとえば，グロモフ-ハウスドルフ収束の下での，局所的にエネルギー最小性を満たす関数–調和関数–の収束は一般には成立しない．このような事実から，極限空間の解析や収束列と極限空間の関係の解明において，ディリクレ形式からのアプローチがひとつの有効な方法であると思われる．ただし，この論説では，調和関数，さらに調和写像の収束については触れない．

なお，前半で解説するチーガーの結果は，最近のチーガーと T. コールディングによる顕著な研究 [14] に応用され，リッチ曲率が一様に下から押さえられているリーマン多様体の列がある測度距離空間に収束するとき，それはエネルギー形式の収束を導き，その極限のディリクレ形式は極限のリプシッツノルムによるエネルギー汎関数と一致することが明らかにされた．すなわち，エネルギー汎関数のグロモフ - ハウスドルフ収束に関する連続性が，リッチ曲率の下からの有界性と深く関わっていることが示されたことになる．この研究は，リーマン空間の収束理論の展開において得られた深谷氏による重要な研究 [20] をひとつの動機として進められたものであるが，さらに収束理論の今後の大きな展開に繋がるものと期待される．

以下に各節の内容を簡単に説明する．

第 1 節では，この論説において考える測度距離空間の基本的な性質を次節以降に必要な範囲で説明する．

第 2 節において，ユークリッド空間 (したがってリーマン多様体) におけるリプシッツ関数の微分に関するラーデマハァの古典的結果の，チーガーによる測度距離空間への一般化 (定理 2.8 参照) を解説する．この節では，議論の見透しをよくするためにリプシッツ関数のディリクレ p–エネルギーの (L^p 収束に関する) 下半連続性を仮定する．

第 3 節では，測度距離空間上のソボレフ空間を定義し，そのいくつかの基本的な性質を説明するなかで，リプシッツ関数の微分に関するチーガーの定理の証明を完成する．

第 4 節の目的は，ダブリング条件とリプシッツ関数に関するポアンカレ不等式を満たす測度距離空間の接錘と，これによって表現されるリプシッツ関数の無限小の性質に関するチーガーの結果 (定理 4.7，定理 4.10 参照) を解説することである．

第 2 節におけるチーガーの定理の一つの帰結として，ダブリング条件とポアンカレ不等式を満たす測度距離空間は，いくつかの重要な性質を満たすディリクレ空間になることがわかる．第 5 節では，ディリクレ空間の定義とその基本的性質，そして内在的距離を簡単に説明し，ソボレフ不等式，ダブリング条件とポアンカレ不等式との関連から，いくつかの基本的結果を解説する．

第 5 節における一連の評価は，同じソボレフ不等式，ダブリング条件，ポアンカレ不等式などを満たすディリクレ空間すべてに一様に成り立つので, このような空間の列を考えるとき，その極限の存在を示唆してくれる．第 6 節において，測度距離空間の収束の問題との関連から，ディリクレ空間に対しても収束の問題について考察する．

目次

1. 測度距離空間

この論説において考える測度距離空間の基本的な性質を次節以降に必要な範囲で説明する．リーマン計量，フィンスラー計量，サブリーマン計量などが与えられている多様体が基本的な例であり，さらにリーマン多面体，アレクサンドロフ空間なども例に含まれる．

1.1. 距離，測度とダブリング条件．本論説では，断らない限り，距離空間 (X, d) は可分とし，その上の測度 μ として，次の性質を満たす外測度 $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ を考える．(1) μ はボレル正則である．すなわち，すべてのボレル集合は可測で，任意の部分集合 A に対して，あるボレル集合 B が存在して，$A \subset B$ かつ $\mu(A) = \mu(B)$ となる．(2) 任意の中心 x，半径 $r > 0$ の距離球体 $B(x, r)$ に対して，$0 < \mu(B(x, r)) < +\infty$ である．

さらに X が局所コンパクトであるとき，任意のコンパクト集合 K に対して $\mu(K) < +\infty$ より，μ はラドン測度である．ラドン測度 μ は，

台がコンパクトな連続関数全体のなすベクトル空間 $C_0(X)$ 上の線形汎関数 L_μ

$$L_\mu(f) = \int_X f \, d\mu, \quad f \in C_0(X)$$

を定めるが，これは任意のコンパクト集合に対して，明らかに

$$\sup\{L_\mu(f) \mid f \in C_0(X),\ \mathrm{supp}\ f \subset K\} < +\infty$$

を満たす．逆にこの条件を満たす X 上の線形汎関数 L に対して，X 上のあるラドン測度 μ が存在して，$L = L_\mu$ となることがリースの定理として知られている． 実際 μ は開集合 U に対して，

$$\mu(U) = \sup\{L(f) \mid f \in C_0(X),\ |f| \le 1,\ \mathrm{supp}\ f \subset U\}$$

とおいて得られる．それからラドン測度に関する弱 $*$ コンパクト性をあらわす定理として次のことが知られている： X 上のラドン測度からなる列 $\{\mu_k\}$ が，任意のコンパクト集合 K に対して $\sup_k \mu_k(K) < +\infty$ という性質を満たすとき，ある部分列 $\{\mu_{k'}\}$ とラドン測度 μ が存在して，$\mu_{k'}$ は μ に次の意味で収束する．

$$\lim_{k'\to\infty} \mu_{k'}(f) = \mu(f), \quad f \in C_0(X)$$

ここで $\nu(f) = \int_X f \, d\nu$ と表した．

次に被覆に関する補題を述べる．簡単のため，距離球体 $B = B(x,r)$ に対して，$B(x,\sigma r)$ の代わりに σB と表すことにする．

補題 1.1. 距離空間 (X,d) において，距離球体の族 $\mathcal{B} = \{B\}$ で，$R = \sup\{\mathrm{diam}\ B \mid B \in \mathcal{B}\} < +\infty$ を満たすものが与えられている．このとき，互いに交わることのない距離球体からなる部分族 $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ で，

$$\cup_{B\in\mathcal{B}} B \subset \cup_{B\in\mathcal{B}'} 5B$$

を満たすものが取れる．実際 $B \in \mathcal{B}$ ならば， $S \cup B \neq \emptyset, B \subset 5S$ を満たす $S \in \mathcal{B}'$ が存在するというより強い資質を満たすとしてよろしい．

さらに $\mathcal{B}$ は閉距離球体からなるとする．このとき，X の部分集合 A が，任意の $x \in A$ と正数 ε に対して，$x \in B$ かつ直径 $\mathrm{diam}\ B < \varepsilon$ となる $B \in \mathcal{B}$ が存在する，という性質を満たすならば，任意の有限個の部分族 $\{B_1, \ldots, B_N\} \subset \mathcal{B}'$ に対して，

$$A \setminus \cup_{j=1}^N B_j \subset \cup\{5B \mid B \in \mathcal{B}' \setminus \{B_1, \ldots, B_N\}\ \}$$

が成り立つ．

証明　各 $j = 1, 2, \ldots$ に対して，$\mathcal{B}_j = \{B \in \mathcal{B} \mid R/2^j < \mathrm{diam}\ B \le R/2^{j-1}\}$ とおく．このとき $\mathcal{B} = \cup_{j=1}^\infty \mathcal{B}_j$ である．$\mathcal{B}'_j \subset \mathcal{B}_j$ を次のように順次定める：

(i) $\mathcal{B}_1$ の，互いに交わることのない距離球体からなる部分族で極大であるものを $\mathcal{B}'_1$ とする．

(ii) $j \ge 2$ に対して，$\mathcal{B}'_1, \ldots \mathcal{B}'_{j-1}$ が定まっていて，任意の $B' \in \cup_{i=1}^{j-1} \mathcal{B}'_i$ に対して，$B \cap B' = \emptyset$ となる距離球体 $B \in \mathcal{B}_j$ すべてを集めてできる

族の，互いに交わることのない距離球体からなる部分族で極大であるものを $\mathcal{B}'_j$ と定める．

このとき，極大性に注意すると，$j \geq 1$ と $B \in \mathcal{B}_j$ に対して，$B' \in \cup_{i=1}^{j} \mathcal{B}'_i$ で $B \cap B' \neq \emptyset$ となるものが見つかる．さらにそのような B と B' の組に対して，$\mathrm{diam}B \leq R/2^{j-1} = 2R/2^j \leq 2\mathrm{diam}B'$ であるので，$B \subset 5B'$ が従う．そこで $\mathcal{B}' = \cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}'_i$ とすれば求めるものが得られる．

次に補題に述べた条件を満たす A を考える．また $\mathcal{B}$ を閉球体からなる族とする．このとき任意の $x \in A \setminus \cup_{j=1}^{N} B_j$ に対して，$\mathcal{B}$ の仮定と $A \setminus \cup_{j=1}^{N} B_j$ が開集合であることから，$B \cap (\cup_{j=1}^{N} B_j) = \emptyset$ かつ $x \in B$ となる $B \in \mathcal{B}$ を見つけることができる．したがって $S \in \mathcal{B}'$ で，$S \cap B \neq \emptyset$ かつ $B \subset 5S$ となるものを選ぶことができる．明らかに $S \neq B_j\ (j = 1, \ldots, N)$ であるから，$x \in \cup\{5B \mid B \in \mathcal{B}' \setminus \{B_1, \ldots, B_N\}\}$ となる．これで補題 1.1 の証明を終える．

測度 μ に対して，次の性質を満たすとき, X がヴィタリの被覆条件を満たすという：任意の距離閉球体からなる族 $\mathcal{B}$ とその中心点からなる集合 $A = \{x \mid B(x,r) \in \mathcal{B}\}$ に対して，$\mu(A) < +\infty$ かつ各 $x \in A$ に対して，$\inf\{r \mid B(x,r) \in \mathcal{B}\} = 0$ であるならば，可算個の互いに交わることのない距離閉球体からなる部分族 $\mathcal{B}' = \{B_j\} \subset \mathcal{B}$ で $\mu(A \setminus \cup_j B_j) = 0$ となるものが存在する．

また測度 μ に対して，測度距離空間 (X, d, μ) が次の性質を満たすとき，ダブリング条件を満たすという：ある数 $0 < \kappa < +\infty$ と $0 < R \leq +\infty$ が存在して，

$$\mu(B(x, 2r)) \leq 2^{\kappa} \mu(B(x, r)), \quad x \in X,\ 0 < r < R \qquad [\mathrm{D}]_{\kappa}$$

この条件の下で，次の評価式が成り立つことに注意する．

$$\mu(B(x, r')) \leq \left(\frac{2r'}{r}\right)^{\kappa} \mu(B(x, r)), \quad 0 < r < r' \leq R \tag{1}$$

このとき，補題 1.1 より次の命題が従う．

命題 1.2. (X, d, μ) がダブリング条件 $[\mathrm{D}]_{\kappa}$ を満たすならば，X はヴィタリの被覆条件を満たす．

さて，(X, μ, d) に対して．$(\overline{X}, \bar{d})$ をその完備化とする．このとき，任意の開集合 $U \subset \overline{X}$ に対して，$\bar{\mu}(U) = \mu(U \cap X)$ となるような $\overline{X}$ 上の測度 $\bar{\mu}$ が一意的に決まる．実際任意の $A \subset \overline{X}$ に対して，$\bar{\mu}(A) = \inf\{\mu(B \cap X) \mid B$ は A を含むボレル集合 $\}$ と定めればよい．さらに (X, μ, d) がダブリング条件を満たすならば，$(\overline{X}, \bar{\mu}, \bar{d})$ も同様の性質を持ち，これから，$\overline{X}$ は局所コンパクトであることが従う．実際，任意の正数 ε に対して，$B_{\bar{d}}(x, R/4)$ の極大 $\varepsilon/2$ - 離散集合，すなわち $a, b \in S$ に対して $a \neq b$ ならば $\bar{d}(a, b) > \varepsilon/2$ という性質を満たす離散集合 S で，極大なものに対して，$B_{\bar{d}}(x, R/4) \subset \cup\{B_{\bar{d}}(a, \varepsilon) \mid a \in S\}$ となり，

$a, b \in S$ に対して，$a \neq b$ ならば $B_{\bar{d}}(a, \varepsilon/4) \cup B(\bar{d}(b, \varepsilon/4) = \emptyset$ より，

$$\begin{aligned} \mu(B_{\bar{d}}(x, R) &\geq \bar{\mu}(\cup_{a\in S} B_{\bar{d}}(a, \varepsilon/4)) \\ &= \sum_{a\in S} \bar{\mu}(B_{\bar{d}}(a, \varepsilon/4)) \\ &\geq (\varepsilon/2R)^\kappa \sum_{a\in S} \bar{\mu}(B_{\bar{d}}(a, R) \\ &\geq (\varepsilon/2R)^\kappa \mu(B_{\bar{d}}(x, R/4)) \cdot \#S \end{aligned}$$

となって，S の個数は有限であることが従う．すなわち $B_{\bar{d}}(x, R/4)$ は全有界となり，したがって $\overline{X}$ は局所コンパクトであることが判る．

1.2. リプシッツ関数とポアンカレ不等式．局所可積分関数 $u \in L^1_{loc}(X, \mu)$ と有界 (可測) 集合 A に対して，

$$⨍_A u \, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_A u \, d\mu,$$

とおく．また $A = B(x, r)$ に対しては，簡単のため

$$u_{x,r} = ⨍_{B(x,r)} u \, d\mu$$

と記す．それから正数 R に対して，(ハーディ・リトルウッドの極大関数)

$$M_R u(x) = \sup_{0<r<R} ⨍_{B(x,r)} |u| \, d\mu, \quad x \in X$$

とおく．

まず基本的な結果を述べる．

定理 1.3. ダブリング条件 $[\mathrm{D}]_\kappa$ のもとに，任意の局所可積分関数 u に対して，ほとんどいたるところの点 x は u のルベーグ点である．すなわち

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| \, d\mu(y) = 0$$

を満たす．とくに

$$u(x) = \lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} u(y) \, d\mu(y)$$

が成り立つ．

$1 \leq p < +\infty$ を固定する．このとき $f \in L^p_{loc}(X, \mu)$ と $g \in L^p_{loc}(X, \mu)$ の組に対して，次の性質が成り立つとき，弱 p-ポアンカレ不等式が成り立つという：ある数 $0 < \tau < +\infty$ と $0 < R \leq \infty$ があって，$x \in X$, そして $0 < r < R$ に対して，

$$\left(⨍_{B(x,r)} |f - f_{x,r}| \, d\mu \right)^{1/p} \leq \tau r \left(⨍_{B(x,2r)} g^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad [\mathrm{P}]'_\tau$$

左辺の積分域が右辺とは異なっていることから，よく使われるポアンカレ不等式とは厳密な意味では異なった不等式であるので，弱ポアンカレ不等式ということにする．

次に本論説では重要な役割を果たす，$[\mathrm{P}]'_\tau$ とほぼ同等な評価式を述べる[1]．さらにこれを使って，リプシッツ連続性との関係を述べる．

定理 1.4. (X,d,μ) が条件 $[\mathrm{D}]_\kappa$ を満たすとする．このとき，$[\mathrm{P}]'_\tau$ を満たす関数の組 f, g に対して，

$$|f(x)-f(y)| \le Cd(x,y)\left((M_{4d(x,y)}g^p(x))^{1/p}+(M_{4d(x,y)}g^p(y))^{1/p}\right)$$

が $d(x,y)<R/4$ を満たすほとんどすべての $x,y\in X$ に対して成り立つ．ただし C は与えられた定数 κ と τ のみによる正数である．

証明　x, y を $d(x,y)<R/4$ を満たす f のルベーグ点とする．簡単のため $B_i(x)=B(x,r_i)=B(x,2^{-i}d(x,y))$ とおく．このとき，三角不等式，ダブリング条件 $[\mathrm{D}]_\kappa$，そして弱 p–ポアンカレ不等式 $[\mathrm{P}]'_\tau$ を使って，次の評価式を得る．

$$\begin{aligned}
|f(x)-f_{B_0(x)}| &\le \sum_{i=0}^{\infty}|f_{B_i(x)}-f_{B_{i+1}(x)}| \\
&\le \sum_{i=0}^{\infty}⨍_{B_{i+1}(x)}|f-f_{B_i(x)}|\,d\mu \\
&\le 4^{\kappa}\sum_{i=0}^{\infty}⨍_{B_i(x)}|f-f_{B_i(x)}|\,d\mu \\
&\le 4^{\kappa}\tau\sum_{i=0}^{\infty}r_i\left(⨍_{2B_i(x)}g^p\,d\mu\right)^{1/p} \\
&\le 4^{\kappa}\tau\sum_{i=0}^{\infty}r_i(M_{2d(x,y)}g^p(x))^{1/p} \\
&= 4^{\kappa}\tau d(x,y)(M_{2d(x,y)}g^p(x))^{1/p}
\end{aligned}$$

同様に

$$|f(y)-f_{B_0(y)}| \le 4^{\kappa}\tau d(x,y)(M_{2d(x,y)}g^p(y))^{1/p}$$

が成り立つ．さらに

$$\begin{aligned}
|f_{B_0(x)}-f_{B_0(y)}| &\le |f_{B_0(x)}-f_{2B_0(x)}|+|f_{B_0(y)}-f_{2B_0(x)}| \\
&\le 4^{2\kappa}⨍_{2B_0(x)}|f-f_{2B_0(x)}|\,d\mu \\
&\le 4^{2\kappa+1}\tau d(x,y)\left(⨍_{4B_0(x)}g^p\,d\mu\right)^{1/p} \\
&\le 4^{2\kappa+1}\tau d(x,y)(M_{4d(x,y)}g^p(x))^{1/p}
\end{aligned}$$

[1] ノート 1 参照

と評価される．したがって，これらをあわせて求める評価式を得る．以上で定理の証明を終える．

次のことが知られている[2].

定理 1.5. (X,d,μ) がダブリング条件 $[\mathrm{D}]_\kappa$ を満たすとする．このとき，関数 $f\in L^1_{loc}(X,\mu)$ と非負値関数 $g\in L^p_{loc}(X,\mu)$ に対して，ある正数 τ が存在して，

$$\fint_B |f-f_B|\ d\mu \le \tau r\left(\fint_{2B} g^p\ d\mu\right)^{1/p} \qquad [\mathrm{P}']_{1,p;\tau}$$

が任意の $B=B(x,r)\subset X$ に対して成り立つとする．このとき，次のことが成り立つ．

(1) $p<\kappa$ ならば，任意の $0<q<p^*$ $(p^*=\kappa p/(\kappa-p))$ に対して，

$$\left(\fint_B |f-f_{x,r}|^q\ d\mu\right)^{1/q} \le \tau' r\left(\fint_{10B} g^p\ d\mu\right)^{1/p}$$

が成り立つ．さらにこの f と g の組がトランケーション性を満たすならば，

$$\left(\fint_B |f-f_{x,r}|^{p^*}\ d\mu\right)^{1/p^*} \le \tau' r\left(\fint_{10B} g^p\ d\mu\right)^{1/p}$$

が成り立つ．

(2) $p=\kappa$ のとき，

$$\fint_B \exp\left(\frac{C_1\mu(B)^{1/\kappa}|f-f_{x,r}|}{r\|g\|_{L^\kappa(10B)}}\right)\ d\mu \le C_2$$

が成り立つ．

(3) $p>\kappa$ ならば，f は局所ヘルダー連続で，

$$|f(x)-f(y)|\le C_3 r^{\kappa/p} d(x,y)^{1-\kappa/p}\left(\fint_{10B} g^p\ d\mu\right)^{1/p}, \quad x,y\in B$$

が成り立つ．ただし C_i $(i=1,2,3)$ は与えられた定数 κ, τ, p, q のみによってきまるある正数である．

この定理の条件 $[\mathrm{P}']_{1,p;\tau}$(弱 (1,p)–ポアンカレ不等式) を満たす関数の組 f と g がトランケーション性を満たすとは，任意の $b\in\mathbf{R}$, $0<t_1<t_2<+\infty$ と $\varepsilon\in\{-1,1\}$ に対して，$v=\varepsilon(u-b)$, $v_{t_1}^{t_2}=\min\{\max\{0,v-t_1\},t_2-t_1\}$ とおいて，関数の組 $v_{t_1}^{t_2}$ と $g\chi_{\{t_1<v\le t_2\}}$ も条件 $[\mathrm{P}']_{1,p;\tau}$ を満たすときをいう．

---
[2] ノート 1 参照

さて，距離空間 (X,d) の局所リプシッツ関数全体のなすベクトル空間を $C^{0,1}_{loc}(X,d)$ と記す．各 $f \in C^{0,1}_{loc}(X,d)$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{Lip}f(x) &= \limsup_{r\to 0}\sup_{d(x,y)\le r}\frac{|f(x)-f(y)|}{r}\\ &= \limsup_{r\to 0}\sup_{d(x,y)=r}\frac{|f(x)-f(y)|}{r}\\ &= \lim\sup_{d(x,y)\to 0}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}\end{aligned}$$

$$Lipf(x) = \liminf_{r\to 0}\sup_{d(x,y)=r}\frac{|f(x)-f(y)|}{r}$$

$$\mathbf{Lip}(f) = \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} \mid x,y\in X, d(x,y)>0\right\} (\le +\infty)$$

$$\mathrm{dil}\, f(x) = \lim_{r\to 0}\mathbf{Lip}(f_{|B(x,r)})$$

とおく．定義から　$0 \le Lipf \le \mathrm{Lip}f \le \mathrm{dil}\, f \le \mathbf{Lip}(f)$ である．なお距離 d を明示する必要があるときには，$\mathrm{Lip}_d f$, $\mathrm{dil}_d\, f$ などと表す．

命題 1.6. (X,d,μ) が条件 $[\mathrm{D}]_\kappa$ を満たすとする．このとき，$f \in C^{0,1}_{loc}(X,d)$ と $g \in L^p_{loc}(X,\mu)$ が定理 1.4 の不等式を満たすならば，

$$\mathrm{Lip}f(x) \le 2Cg(x) \quad \mu - a.e.\ x\in X$$

が成り立つ．

証明　まず g^p のルベーグ点 q と十分小さな正の数 η, ξ をしばらく固定する．$x \in B(q,\xi)$ に対して，$R(x) = d(x, \partial B(q,\xi))$ とおき，

$$\Sigma = \{x\in B(q,\xi) \mid M_{R(x)}g^p(x) > g^p(q)+\eta\}.$$

とおく．このとき任意の $x\in\Sigma$ に対して，次のような数 $r(x)\in(0,R(x))$ を見つけることができる．

$$\int_{B(x,r(x))}(g^p - g^p(q))\,d\mu > \eta\mu(B(x,r)).$$

$\widetilde{\Sigma}$ でもって $B(x,r(x))$ $(x\in\Sigma)$ の和集合をあらわす．このとき被覆補題 1.1 より，Σ の部分集合 $\{x_i\}$ で $B(x_i,r(x_i))$ は互いに交わることは無く $\widetilde{\Sigma}\subset\cup_i B(x_i,5r(x_i))$ を満たすようなものを選ぶ．このとき

$$\begin{aligned}&\int_{B(q,\xi)}|g^p - g^p(q)|\,d\mu\\ &\quad\ge \sum_i\int_{B(x_i,r(x_i))}(g^p-g^p(q))\,d\mu \ge \eta\sum_i\mu_X(B(x_i,r(x_i)))\\ &\quad\ge \frac{\eta}{10^\kappa}\sum_i\mu(B(x_i,5r(x_i))) \ge \frac{\eta}{10^\kappa}\mu(\widetilde{\Sigma}).\end{aligned}$$

となる．ここで $\varepsilon(\xi)$ を次のような正の数とする．

$$\int_{B(q,\xi)} |g^p - g^p(q)|\, d\mu_X = \eta \left(\frac{\varepsilon(\xi)}{60}\right)^{\kappa} \mu_X(B(q,\xi)).$$

このとき q が g^p のルベーグ点であるから，$\xi \to 0$ のとき $\varepsilon(\xi) \to 0$ であることと，さらに任意の $x \in B(q,\xi)$ に対して，$B(x,\varepsilon(\xi)\xi) \setminus \widetilde{\Sigma}$ は空集合ではないことに注意する．実際空集合とすると，

$$\begin{aligned}
\int_{B(q,\xi)} |g^p - g^p(q)|\, d\mu &\geq \frac{\eta}{10^{\kappa}} \mu(\widetilde{\Sigma}) \geq \frac{\eta}{10^{\kappa}} \mu(B(x,\varepsilon(\xi)\xi)) \\
&\geq \eta \left(\frac{\varepsilon(\xi)}{40}\right)^{\kappa} \mu_X(B(x,2\xi)) \\
&\geq \eta \left(\frac{\varepsilon(\xi)}{40}\right)^{\kappa} \mu_X(B(q,\xi)).
\end{aligned}$$

となり矛盾する．このように任意の $x \in B(q,\xi)$ に対して，ある点 $y_x \in B(x,\varepsilon(\xi)\xi)$ で

$$M_{R(y_x)} g^p(y_x) \leq g^p(q) + \eta.$$

を満たすものが存在する．したがって $4d(y_x, y_q) \leq \min\{R(y_x), R(y_q)\}$ より，任意の $x \in B(q,\xi/5)$ に対して，

$$\begin{aligned}
M_{4d(y_x,y_q)} g^p(y_x) &< g^p(q) + \eta, \\
M_{4d(y_x,y_q)} g^p(y_q) &< g^p(q) + \eta
\end{aligned}$$

となる．よって仮定 (定理 1.4 の不等式) から

$$\begin{aligned}
|f(y_x) - f(y_q)| &\leq 2Cd(y_x, y_q)(g^p(q) + \eta)^{1/p} \\
&\leq 2C\left(2\varepsilon(\xi) + \frac{1}{5}\right) \xi (g^p(q) + \eta)^{1/p}
\end{aligned}$$

となる．ここで $|f(q) - f(y_q)| \leq \mathbf{Lip}(f_{|B(q,\xi)})\, \varepsilon(\xi)\xi$ かつ $|f(x) - f(y_x)| \leq \mathbf{Lip}(f_{|B(q,\xi)})\, \varepsilon(\xi)\xi$ であるので，

$$|f(q) - f(x)| \leq 10 \left(\mathbf{Lip}(f_{|B(q,\xi)})\, \varepsilon(\xi) + C\left(2\varepsilon(\xi) + \frac{1}{5}\right)(g^p(q) + \eta)^{1/p}\right) \frac{\xi}{5}$$

となり，

$$\sup_{d(x,q)=\xi/5} \frac{|f(x) - f(q)|}{d(x,q)} \leq$$
$$10 \left(\mathbf{Lip}(f_{|B(q,\xi)})\, \varepsilon(\xi) + C\left(2\varepsilon(\xi) + \frac{1}{5}\right)(g^p(q) + \eta)^{1/p}\right)$$

を得る．最後に $\xi \to 0$，そして $\eta \to 0$ として，すべてのルベーグ点 q において，

$$\mathrm{Lip}\, f\,(q) \leq 2Cg(q)$$

が示された．以上で命題の証明を終える．

次に連続な曲線 $\gamma : [a,b] \to X$ を考える．

$$L(\gamma) = \sup\{\sum_{i=0}^{N} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \mid a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N+1} = b\}$$

とおいて，$L(\gamma) < +\infty$ のとき，γ は求長可能であるとよび，γ は弧長 $L = L(\gamma)$ の曲線であるという．X の任意の２点 x, y が求長可能な曲線で結べるとき，それらのなす集合を $\Omega_{x,y}$ とすると，

$$d_I(x,y) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{x,y}\}$$

とおいて，X 上の距離 d_I が定まる．この定義より明らかに $d \le d_I$ である．$d = d_I$ のとき，d を弧長距離，(X,d) を弧長空間とよぶことにする．さらに $L(\gamma) = d(x,y)$ を満たす曲線 $\gamma \in \Omega_{x,y}$ が存在するならば，そのような曲線 γ を２点 x と y を結ぶ最短線とよぶ．任意の２点が最短線で結ぶことができるとき，距離 d は測地的であるといい，(X,d) を測地空間とよぶ．

ダブリング条件と弱ポアンカレ不等式を考える上で次の命題において述べる事実は示唆的である[3].

命題 1.7. 弧状連結で，固有である (すなわち，任意の閉距離球体はコンパクトである) 測度距離空間 (X,d,μ) に対して，ある正数 κ, τ, R があって，条件 $[\mathrm{D}]_\kappa$ と局所リプシッツ関数に対する弱 p–ポアンカレ不等式

$$\left(⨍_{B(x,r)} |f - f_{x,r}| \, d\mu\right)^{1/p} \le \tau r \left(⨍_{B(x,2r)} (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu\right)^{1/p} \qquad [\mathrm{P}]_\tau$$

が，任意の $f \in C^{0,1}_{loc}(X)$, $x \in X$ と $0 < r < R$ に対して満たされているとする．このとき X は，次の意味で擬凸である：任意の２点 x, y は長さ $C_1 d(x,y)$ 以下の求長可能な曲線で結ぶことができる．さらに $p \le \kappa$ とする．このとき任意の $x \in X$ に対して，

$$\limsup_{s \to 0} \frac{\mu(B(x,s))}{s^\kappa} < +\infty, \quad x \in X$$

を仮定する．このとき，任意の $x \in X$ および $y, z \in B(x,r) \setminus B(x,r/2)$ に対して，y と z を結ぶ求長可能な曲線 $\gamma : [a,b] \to B(x, C_2 r) \setminus B(x, r/C_2)$ が存在する．ただし C_1, C_2 は κ と τ のみによる定数である．

さて，局所リプシッツ関数に関する弱 p–ポアンカレ不等式を満たす空間の貼りあわせによる構成を紹介する．

まず距離空間 (X,d) のハウスドルフ測度の定義から説明する．$0 < \delta \le +\infty$, $q \ge 0$ と $A \subset X$ に対して，

$$\mathcal{H}^\delta_q(A) = \inf\{\sum_i (\mathrm{diam}\ B_i)^q \mid A \subset \cup_i B_i,\ \mathrm{diam} B_i \le \delta\} \in [0, +\infty]$$

[3] ノート 1 参照

とおき，

$$\mathcal{H}_q(A) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_q^\delta(A) \in [0,+\infty]$$

によって，ボレル正則測度 $\mathcal{H}_q : 2^X \to [0,;\infty]$ を定める．これを q 次元ハウスドルフ測度とよぶ．

距離空間 (X,d) は，ある $q \geq 0$ と $C > 1$ によって，条件

$$C^{-1}r^q \leq \mathcal{H}_q(B(x,r)) \leq Cr^q, \quad x \in X,\ 0 < r \leq \operatorname{diam}(X,d)$$

を満たすとき，(アールフォースの)q–正則空間であるという．

次に2つの距離空間 (X,d_X) と (Y,d_Y)，および X の閉部分空間 A と Y の閉部分空間 B の間の等長写像 $\phi : A \to B$ が与えられているとき，ϕ に沿って貼りあわせて距離空間 $X\cup_A Y = (X\cup Y, d)$ が次のように定義される．

$$\begin{aligned} x\in X,\ y\in Y &\implies d(x,y) = \inf_{a\in A}\{d_X(x,a) + d_Y(\phi(a),y)\} \\ x,y\in X &\implies d(x,y) = d_X(x,y) \\ x,y\in Y &\implies d(x,y) = d_Y(x,y) \end{aligned}$$

次の結果が知られている[4]．

定理 1.8. 弧長空間 (X,d_X) と (Y,d_Y) はともに q–正則空間とし，(局所リプシッツ関数に対して) 弱 p–ポアンカレ不等式を満たすとする．さらに X の閉部分空間 A と Y の閉部分空間 B の間の等長写像 $\phi : A \to B$ が与えられているとする．このとき，ある $q-p < s \leq q$ と $D > 1$ が存在して，A の任意の点 a と $0 < r \leq \min\{\operatorname{diam}(X,d_X), \operatorname{diam}(Y,d_Y)\}$ に対して，

$$\mathcal{H}_q^\infty(A\cup B_X(a,r)) \geq D^{-1}r^q,\ \mathcal{H}_q^\infty(B\cup B_Y(\phi(a),r)) \geq D^{-1}r^q$$

ならば，$X\cup_A Y$ も弱 p–ポアンカレ不等式を満たす．

1.3. 例. リーマン計量，フィンスラー計量，サブリーマン計量などの基本的な例を簡単に説明する．

まず n 次元ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^n, g_0 = \sum_{i=1}^n dx_i^2)$ にルベーグ測度 $\mu_0 = dx_1\cdots dx_n$ を考えると，よく知られているように等周不等式((n/(n-1),1) - ポアンカレ不等式)，したがって1–ポアンカレ不等式が成り立つ．

次に滑らかな連結 n 次元多様体 M を考える．まず M 上の C^∞ 級リーマン計量 g とリーマン測度 μ_g を考える．区分的に C^1 級の曲線 $\gamma : [a,b] \to M$ に対して，長さ $L(\gamma) = \int_a^b g(\gamma'(t),\gamma'(t))^{1/2}\,dt$ が定義され，これによってリーマン距離

$$d_g(x,y) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ は2点 } x,y \text{ を結ぶ区分的 } C^1 \text{ 級曲線}\}$$

が定まる．C^1 級関数 f に対して，勾配ベクトル ∇f が定まり，$|\nabla f| = g(\nabla f,\nabla f)^{1/2} = \operatorname{Lip} f$ である．局所リプシッツ関数 f は，ほとんどいたるところ微分可能で，そのような点 x で微分 $df_x : T_xM \to \mathbf{R}$ が定義され，$|df_x| = |\nabla f|$ である．また任意の点において，十分小さな半径の距離球体とその上の測地的正規座標系 $(x_1,\ldots,x_n)$ を考えると，リーマン

[4]ノート 1 参照

計量 g はユークリッド計量 $g_0=\sum_{i=1}^n dx_i^2$ によって十分よく近似される．したがって相対コンパクトな領域 M' において，適当な正数 κ, τ, R があって，ダブリング条件 $[\mathrm{D}]_\kappa$ および 1–ポアンカレ不等式 $[\mathrm{P}]_\tau$ が成立することがわかる．実際 M 上リッチ曲率が下から定数 $-K$, $K\ge 0$, で押さえられているとすると，ビショップ - グロモフの体積比較定理により，

$$\begin{aligned}\mu_g(B(x,2r)) \;&\le\; 2^{n-1}\exp(2(n-1)\sqrt{K}\,r)\mu_g(B(x,r)),\\ &\qquad x\in M',\ 0<r<R,\end{aligned}$$

および P. ビューザーの等周的不等式：

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)}|f-f_{x,r}|\,d\mu_g \;&\le\; C_n r\ \exp(\sqrt{K}r)\int_{B(x,r)}|\nabla f|\,d\mu_g,\\ &\qquad x\in M',\ 0<r<R\end{aligned}$$

が満たされる．なお d_g が完備ならば，すべての点で $R=+\infty$ として，これらの不等式が成り立つ[5]．

リーマン計量を一般化したものに，フィンスラー計量がある．TM 上で定義された連続実数値関数 F が次の条件 (i)〜(iii) を満たすとき，これを M のフィンスラー計量という．(i) $TM\setminus\{0\}$ において C^∞ 級である．(ii) 任意の正数 λ と接ベクトル v に対して，$F(\lambda v)=\lambda F(v)$ を満たす．(iii) 接空間方向の F^2 の２次微分から得られるヘッシアンは接空間において正定値である．フィンスラー計量が与えられているとき，リーマン計量の場合と同様に区分的に C^1 級曲線の長さが定まり，これによって M 上に距離が定義される．また相対コンパクトな領域 M' において，適当な正数 κ, τ, R があって，ダブリング条件 $[\mathrm{D}]_\kappa$ および 1–ポアンカレ不等式 $[\mathrm{P}]_\tau$ が成立することが，たとえば，次の注意に述べるように自然に決まるリーマン計量を考えることによって確かめられる．

注意 1.1. 一般に n 次元ベクトル空間 V にノルム $|\cdot|$ が与えられているとき, V の双対空間 V^* の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を次のように定義する．

$$\langle\omega,\eta\rangle=\frac{1}{\mu(I)}\int_{v\in I}\omega(v)\eta(v)\ d\mu_n(v),\quad \omega,\ \eta\in V^*$$

ただし $I=\{v\in V\mid |v|\le 1\}$ とし，μ_n は V 上のルベーグ測度である．このとき，$|\cdot|^*$ を V^* の双対ノルムとすると, V の次元 n から決まるある定数 C_n があって，

$$C_n|\omega|^*\le\sqrt{\langle\omega,\omega\rangle}\le|\omega|^*,\quad \omega\in V^*$$

と評価される．このことは，たとえば，V の基底 $\{e_1,\dots,e_n\}$ を適当にとって

$$\sup_{1\le i\le n}|x^i|\le|\sum_{i=1}^n x^ie_i|\le\sum_{i=1}^n|x^i|$$

となることに注意すると容易に確かめられる[6]．

---

[5] ノート 1 参照

[6] ノート 1 参照

今度は M 上のサブリーマン計量について簡単に説明する[7]. TM の部分ベクトル束 H とその上にリーマン計量 h が与えられているとし, H に属さないベクトル $v \neq 0$ に対して $h(v,v) = +\infty$ とする. このとき, リーマン計量やフィンスラー計量のときと同様に曲線の長さが定まり, 擬距離 d_h が定義される. D. ジェリソンの定理によれば, 局所的に H を生成するベクトル場の組がヘルマンダー条件を満たすならば, d_h は距離を定め, 相対コンパクトな開集合においてダブリング条件と 1–ポアンカレ不等式が成り立つ.

リーマン多様体を一般化したものにリーマン多面体やアレクサンドロフ空間がある. これらについてもダブリング条件および 2–ポアンカレ不等式が成立すること知られている[8].

ノート 1 この節の主な参考文献は, Hajlasz-Koskela [30] である. 補題 1.1 と命題 1.2 については, Simon [70], 定理 1.3, 定理 1.4, 定理 1.5 と 命題 1.7 については, [30], 定理 1.8 については, Heinonen-Koskela [27], 命題 1.6 については, [37] にそれぞれよっている.

ダブリング条件とポアンカレ不等式を満たす空間の例については, [30] とその参考文献を参照. たとえば, 定理 1.8 と類似の結果を可算個の空間に適用して, ダブリング条件とポアンカレ不等式を満たす興味深い例の構成が示されている. 詳細は Hanson-Heinonen [31] 参照. Bourdon-Pajot [7], Laakso [50] なども参考文献にある. そこでは 1–ポアンカレ不等式を満たす非整数 q の q-正則空間が構成されている. ほかにダブリング条件とポアンカレ不等式を満たす空間について, [46] も関連した問題を論じている.

またダブリング条件に関連して, 参考までに [10], [74] をあげる.

ビショップ - グロモフの比較定理やビューザーの等周不等式については, Buser [9], Chavel [13], 酒井 [66] など参照. フィンスラー計量については, たとえば Bao-Chern-Shen [2], リーマン多面体については, Eells-Fuglede [19], アレクサンドロフ空間については, Kuwae-Machigashira-Shioya [47], Kuwae-Shioya [48], 塩谷 [68] およびその中の文献参照.

注意 1.1 で述べた事実については, たとえば Pisier [62] に証明されている. その他関連して [11] も参照.

2. リプシッツ関数の微分

ユークリッド空間 (したがってリーマン多様体) におけるリプシッツ関数の微分に関するラーデマハァの古典的結果は, チーガーによってダブリング条件とポアンカレ不等式を満たす測度距離空間へ一般化された. これを説明することが, この節の目標である.

この節を通して, 正数 κ, τ に対してダブリング条件 $[\mathrm{D}]_\kappa$ と弱 p–ポアンカレ不等式 $[\mathrm{P}]_\tau$ $(1 < p < +\infty)$[9]を満たす測度距離空間 (X, μ, d) を考える. ただし X は弧状連結とする.

---

[7] ノート 1 参照

[8] ノート 1 参照

[9] $p \neq 1$ としていることに注意

まず次に述べる定理を認めて，議論に入ることにする．

定理 2.1. L^p 可積な局所リプシッツ関数の列 f_n が L^p 可積分な局所リプシッツ関数 f に L^p 収束するならば，

$$\int_X (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (\mathrm{Lip} f_n)^p d\mu$$

2.1. 漸近的広義線形性と逆ポアンカレ不等式. 次の定理を証明することから始める．

定理 2.2. 局所リプシッツ関数 f は，ほとんど至る所の点 $x \in X$ において，次の意味において，漸近的に広義線形関数である：点 x は $(\mathrm{Lip} f)^p$ のルベーグ点で，さらに

$$\lim_{r\to 0}\left(⨍_{B(x,r)} (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu - \inf_{k\in C_0^{0,1}(B(x,r))} ⨍_{B(x,r)} (\mathrm{Lip}(f+k))^p \, d\mu \right) = 0$$

となる．

証明　まず便宜上

$$\Phi_r(f)(x) := ⨍_{B(x,r)} (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu - \inf_{k\in C_0^{0,1}(B(x,r))} ⨍_{B(x,r)} (\mathrm{Lip}(f+k))^p \, d\mu$$

とおく．次に $(\mathrm{Lip} f)^p$ のルベーグ点全体を X_1 とおき，ほとんどすべての点 $x \in X_1$ に対して，$\lim_{r\to 0}\Phi_r(f)(x) = 0$ を背理法を使って示す．すなわち，$\varepsilon > 0$ に対して，$A = \{x \in X_1 \mid \limsup_{r\to 0}\Phi_r(f)(x) > \varepsilon\}$ とおいて，ある ε に対して $\mu(A) > 0$ を仮定して矛盾を導こう．

まず各 $x \in A$ に対して，数列 $r_i = r_i(x) \to 0$ と関数列 $k_i \in C_0^{0,1}(B(x, r_i))$ が存在して

$$⨍_{B(x,r_i)} (\mathrm{Lip}(f+k_i))^p \, d\mu \le ⨍_{B(x,r_i)} (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu - \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．

ここで次の性質に注意する．局所リプシッツ関数 f と定数 c に対して，$F = \max\{f, c\}$, $G = \min\{f, c\}$ とおくと，

$$\int_U (\mathrm{Lip}\, F)^p \, d\mu \le \int_U (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu, \quad \int_U (\mathrm{Lip}\, G)^p \, d\mu \le \int_U (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu$$

この性質より，$f + K_i = \min\{f + k_i, \max_{B(x,r_i)} f\}$ とおくと，

$$⨍_{B(x,r_i)} (\mathrm{Lip}(f+K_i))^p \, d\mu \le ⨍_{B(x,r_i)} (\mathrm{Lip}(f+k_i))^p \, d\mu$$

となり，さらに $f + K_i' = \max\{f + K_i, \min_{B(x,r_i)} f\}$ とおくと，

$$⨍_{B(x,r_i)} (\mathrm{Lip}(f+K_i'))^p \, d\mu \le ⨍_{B(x,r_i)} (\mathrm{Lip}(f+k_i))^p \, d\mu$$

となる．以上から

$$\min_{B(x,r_i)} f \le \min_{B(x,r_i)} (f+k_i) \le \max_{B(x,r_i)} (f+k_i) \le \max_{B(x,r_i)} f$$

としてよろしい．したがって

$$\max_{B(x,r_i)} f - \min_{B(x,r_i)} f \le 2r_i \mathbf{Lip}(f)$$

より $i \to \infty$ のとき $k_i \to 0$ に注意しておく．

次に A の被覆 $\{B(x, r_i(x)) \mid x \in A\}$ に対して, 命題 1.2 を適用すると, A の点列 x_i と正数 $r_{i,n} = r_{i(n)}(x_i) < 1/n$ で, $B(x_i, r_{i,n})$ は互いに素であり, $\mu(A \setminus \cup_i B(x_i, 5r_i)) = 0$ を満たすものが取れる．そこで

$$f_n = \begin{cases} f + k_{i(n)} & \text{in} \quad B(x_i, r_{i,n}) \\ f & \text{in} \quad X \setminus \cup_i B(x_i, r_{i,n}) \end{cases}$$

とおくと, f_n は f に一様に収束し, さらに

$$\begin{aligned}
&\int_X (\mathrm{Lip} f_n)^p \, d\mu \\
&\quad = \sum_i \int_{B(x_i, r_{i,n})} (\mathrm{Lip}(f + k_{i(n)}))^p \, d\mu + \int_{X \setminus \cup_i B(x_i, r_{i,n})} (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu \\
&\quad \le \sum_i \int_{B(x_i, r_{i,n})} (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu - \sum_i \frac{\varepsilon}{2} \mu(B(x_i, r_{i,n})) + \\
&\qquad + \int_{X \setminus \cup_i B(x_i, r_{i,n})} (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu \\
&\quad = \int_X (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu - \frac{\varepsilon}{2} \mu(\cup_i B(x_i, r_{i,n})) \\
&\quad \le \int_X (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu - \frac{\varepsilon}{2} 10^{-\kappa} \sum_i \mu(B(x_i, 5r_{i,n})) \\
&\quad \le \int_X (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu - \frac{\varepsilon}{2} 10^{-\kappa} \mu(\cup_i B(x_i, 5r_{i,n})) \\
&\quad \le \int_X (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu - \frac{\varepsilon}{2} 10^{-\kappa} \mu(A)
\end{aligned}$$

となる．したがって, (仮定している) 定理 2.1 より

$$\int_X (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu \le \liminf_{n \to \infty} \int_X (\mathrm{Lip} f_n)^p \, d\mu \le \int_X (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu - \frac{\varepsilon}{2} 10^{-\kappa} \mu(A)$$

となり, 矛盾が導かれた．すなわちほとんどすべての $x \in X_1$ において $\limsup_{r \to 0} \Phi_r(f)(x) = 0$ でなければならない．以上で定理 2.2 の証明が完了した．

定理 2.3. 局所リプシッツ関数 f が 点 x において, 漸近的に広義線形関数であるとする．このとき $\mathrm{Lip} f(x) > 0$ ならば, 十分小さい正数 r

とすべての実数 α に対して，次の評価が成り立つ：

$$r\left(\int_{B(x,r)}(\mathrm{Lip}f)^p\,d\mu\right)^{1/p}\le C(\kappa,p)\left(\int_{B(x,2r/3)}|f-\alpha|^p\,d\mu\right)^{1/p}\quad [RP]$$

ただし $C(\kappa,p)$ は κ と p のみによる定数である．

証明 まず $\mathrm{Lip}f(x)>0$ より，十分小さいすべての $r>0$ に対して

$$\int_{B_{r/3}(x)}(\mathrm{Lip}f)^p\,d\mu\le(1-C_1(\kappa,p))^p\int_{B(x,r)}(\mathrm{Lip}f)^p\,d\mu$$

となることを示す．ただし $C_1(\kappa,p)=1-\frac{1}{2}(1+6^{-\kappa})^{-1/p}$．そのために

$$(\mathrm{Lip}f)^p(x)=\lim_{r\to0}⨍_{B(x,r)}(\mathrm{Lip}f)^p\,d\mu$$

より，十分小さいすべての $r>0$ に対して

$$\frac{\mu(B(x,r/3))}{\mu(B(x,r))}\le(1+6^{-\kappa})^{-1} \tag{2}$$

を示せばよい． そこで $d(w,x)=2r/3$ となる点 w を選ぶ．このとき，ダブリング条件を使って

$$\begin{aligned}\mu(B(x,r)) &\ge \mu(B(x,r/3)+\mu(B(w,r/3)\\ &\ge \mu(B(x,r/3)+6^{-\kappa}\mu(B(w,r)\\ &\ge (1+6^{-\kappa})\mu(B(x,r/3))\end{aligned}$$

となる．これから (2) が従う．

次に十分小さいすべての $r>0$ に対して

$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{2}C_1(\kappa,p))^p\int_{B(x,r)}(\mathrm{Lip}f)^p\,d\mu &\le \int_{B(x,r)}(\mathrm{Lip}(f+k))^p\,d\mu,\\ &\qquad k\in C_0^{0,1}(B(x,r))\end{aligned} \tag{3}$$

が成り立つ． 実際，任意の $\varepsilon>0$ に対して，十分小さいすべての $r>0$ と $k\in C_0^{0,1}(B(x,r))$ に対して，

$$\int_{B(x,r)}(\mathrm{Lip}f)^p\,d\mu\le\varepsilon\mu(B(x,r))+\int_{B(x,r)}(\mathrm{Lip}(f+k))^p\,d\mu,$$

より，$\varepsilon\mu(B(x,r))=\hat{\varepsilon}\int_{B(x,r)}(\mathrm{Lip}f)^p\,d\mu$ とおいて，

$$(1-\hat{\varepsilon})\int_{B(x,r)}(\mathrm{Lip}f)^p\,d\mu\le\int_{B(x,r)}(\mathrm{Lip}(f+k))^p\,d\mu$$

となる．そこで $\varepsilon=\frac{1}{2}C_1(\kappa,p)(\mathrm{Lip}f)^p(x)$ とおくことによって (3) が従う．

最後に次に述べる補題の η,δ,ψ として，$\eta=r/3$, $\delta=1-C_1(\kappa,p)$, $\psi=1-C_1(\kappa,p)/2$ とおいて，定理 2.3 の証明が完成する．

補題 2.4. 領域 U 上の局所リプシッツ関数 f と正数 $\eta, \delta, \psi, \delta < \psi \leq 1$, に対して，以下の２つの条件が成り立つとする．

$$\left(\int_{U \setminus U_{2\eta}} (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \delta \left(\int_U (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu\right)^{1/p} \tag{4}$$

(5)

$$\psi \left(\int_U (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_U (\mathrm{Lip}(f+k))^p \, d\mu\right)^{1/p}, \quad k \in C_0^{0,1}(U)$$

ただし正数 η に対して，$U_\eta = \{x \in U \mid d(x, X \setminus U) > \eta\}$ とおく．このとき，

$$\left(\int_U (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \frac{1}{\eta(\psi - \delta)} \left(\int_{U_\eta \setminus U_{2\eta}} |f - \alpha|^p \, d\mu\right)^{1/p}, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

証明　まずリプシッツ関数 ϕ で，

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{in } U_{2\eta} \\ 0 & \text{in } U \setminus U_\eta \end{cases}$$

かつ $\mathrm{Lip}\,\phi \leq \eta^{-1}$ を満たすものをとる．このとき

$$\mathrm{Lip}((1-\phi)f) \leq \mathrm{Lip}(1-\phi) \cdot |f| + |1-\phi| \cdot \mathrm{Lip} f$$

より，

$$\begin{aligned}
&\left(\int_U (\mathrm{Lip}((1-\phi)f))^p \, d\mu\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_U (\mathrm{Lip}\,\phi \cdot |f| + (1-\phi) \cdot \mathrm{Lip} f)^p \, d\mu\right)^{1/p} \\
&\leq \eta^{-1} \left(\int_{U_\eta \setminus U_{2\eta}} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_{U \setminus U_{2\eta}} (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

ここで条件 (5) より

$$\int_U (\mathrm{Lip}((1-\phi)f))^p \, d\mu = \int_U (\mathrm{Lip}(f - \phi f))^p \, d\mu \geq \psi^p \int_U (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu$$

である．したがってこれらの評価式より仮定 (8) を使って

$$\psi \left(\int_U (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \eta^{-1} \left(\int_{U_\eta \setminus U_{2\eta}} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \delta \left(\int_U (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

すなわち

$$\left(\int_U (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \frac{1}{\eta(\psi - \delta)} \left(\int_{U_\eta \setminus U_{2\eta}} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

が導かれ，f を $f-\alpha$ に置き換えて求める評価式を得る．以上で補題の証明を終える．

さて，X の開集合 U と正数 η に対して，$U_\eta=\{x\in U \mid \rho(x,\partial U)>\eta\}$ とおく．$\operatorname{diam} U\le R$ とする．$0<s\le\eta/2$ に対して，$U_\eta\subset\cup_{x\in U_\eta}B(x,s)$ より，被覆補題 1.1 を適用して，$\{x_i \mid i=1,2,\ldots,N_1\}\subset U_\eta$ を適当に取ると，$B(x_i,s/5)$ 達は互いに交わることはなく，$U_\eta\subset\cup B(x_i,s)\subset U$ となる．従って

$$\sum_i \mu(B(x_i,s/5))=\mu(\cup_i B(x_i,s/5))\le\mu(U)$$

となり，一方，$U\subset B(x_i,R)$ より，

$$\mu(U)\le\mu(B(x_i,R))\le\left(\frac{2R}{s}\right)^\kappa\mu(B(x_i,s))\le\left(\frac{20R}{s}\right)^\kappa\mu(B(x_i,s/5))$$

であるから，$N_1\le(20R/s)^\kappa$ が導かれる．

次に 任意の点 $x\in U$ に対して，$B(x,2s)$ が N_2 個の点 $\{x_{i_j}\ j=1,\ldots,N_2\}$ を含むとすると，

$$\sum_{j=1}^{N_2}\mu(B(x_{i_j},s/5))\le\mu(B(x,3s)\le\mu(B(x_{i_j},5s))\le 50^\kappa\mu(B(x_{i_j},s/5))$$

である．したがって $N_2\le 50^\kappa$ となる．このように $x\in B(x_i,2s)$ となる x_i の個数は高々 50^κ である．

以上の考察の下に，$f\in L^p(U)$ に対して，

$$\phi(f)=(\mu(B(x_1,s))^{1/p}\,f_{x_1,s},\ldots,\mu(B(x_{N_1},s))^{1/p}\,f_{x_{N_1},s})$$

とおくことによって，線形写像 $\phi: L^p(U)\to\mathbf{R}^{N_1}$ を定める．ただし $N_1\le(20R/s)^\kappa$ であり，$\mathbf{R}^{N_1}$ のノルムは，$|(a)|_p^p=|a_1|^p+\cdots+|a_{N_1}|^p$ とする．このとき，次のことが成り立つ．

定理 2.5. リプシッツ関数 $f: U\to\mathbf{R}$ が，

$$\eta^p\int_U(\mathrm{Lip}f)^p\,d\mu\le K^p\int_{U_\eta}|f|^p\,d\mu \qquad [RP]$$

$$0<s\le\lambda\eta,\quad \lambda=\min\{1,(50^{1+\kappa/p}\tau K)^{-1}\}$$

を満たすならば，

$$\int_{U_\eta}|f|^p\,d\mu\le 2^{p+1}\sum_{i=1}^{N_1}\mu(B(x_i,s))|f_{x_i,s}|^p=2^{p+1}|\phi(f)|_p^p$$

が成り立つ．とくに，リプシッツ関数からなるベクトル空間 $\mathcal{V}$ で，$\mathcal{V}$ の元 f すべてに対して一様に条件 [RP] が成り立つとき，

$$\dim\mathcal{V}\le N_1\le(20R/s)^\kappa$$

である．

証明　弱 p–ポアンカレ不等式と $N_2 \le 50^\kappa$ を用いて,

$$\begin{aligned}
&\int_{U_\eta} |f|^p \, d\mu \\
&\le 2^p \sum_i \int_{B(x_i,s)} |f - f_{x_i,s}|^p \, d\mu + 2^p \sum_i |f_{x_i,s}|^p \mu(B(x_i,s)) \\
&\le 2^p \sum_i s^p \tau^p \int_{B(x_i,2s)} (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu + 2^p |\phi(f)|_p^p \\
&\le 2^p 50^\kappa s^p \tau^p \int_U (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu + 2^p |\phi(f)|_p^p \\
&\le \frac{1}{2^p} \int_{U_\eta} |f|^p \, d\mu + 2^p |\phi(f)|_p^p
\end{aligned}$$

以上から

$$\int_{U_\eta} |f|^p \, d\mu \le 2^{p+1} |\phi(f)|_p^p$$

が導かれた.

2.2. 補助的結果. L^∞-束 T^*X を構成し，リプシッツ関数の微分を定義することが第２節の目標であるが，ここではその準備となる考察をする.

以下，k 個の リプシッツ関数 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ を考える．$\mathbf{Lip}(f_i) \le L$ とする．各 $(a) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbf{R}^k$ に対して,

$$f_{(a)} = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_k f_k$$

とおく．このとき，次のことが成り立つ.

補題 2.6. (1) $|\mathrm{Lip} f_{(a')} - \mathrm{Lip} f_{(a'')}| \le L(|a_1' - a_1''| + \cdots + |a_k' - a_k''|)$

(2) $\mathbf{R}^k$ の点列 $(a)_j$ に対して，各 $f_{(a)_j}$ は点 x で漸近的に広義線形とする．$(a)_j \to (a)$ $(j \to \infty)$ ならば，$f_{(a)}$ も点 x で漸近的に広義線形である.

(3) 次のような点 x 全体のなす集合を X_1 とおく：すべての (a) に対して，$f_{(a)}$ は x において漸近的に広義線形である．このとき，$\mu(X \backslash X_1) = 0$ である.

(4) $x \in X_1$ に対して，$\mathrm{Lip} f_{(a)}(x) > 0$ $((a) \ne (0))$ とする．このとき，ある正数 r_0 があって，次のことが成り立つ：任意の $(a) \ne (0)$, および $0 < r \le r_0$ に対して,

$$r^p \int_{B(x,r)} (\mathrm{Lip} f_{(a)})^p \, d\mu \le C(\kappa, p) \int_{B(x,2r/3)} |f_{(a)}|^p \, d\mu.$$

ただし $C(\kappa, p)$ は κ と p のみによって決まる定数である.

(5) $x \in X_1$ に対して，$\mathrm{Lip} f_{(a)}(x) > 0$ $((a) \ne (0))$ とする．このとき，$k \le N(\kappa, \tau, p)$ でなければならない．ただし $N(\kappa, \tau, p)$ は κ と τ および p のみによる定数である.

(3) と (4) の証明に定理 2.2 と定理 2.3 が使われる．定理 2.5 において，$U = B(x,r)$, $\eta = r/3$, $s = \lambda r/3$, $K = C(\kappa,p)$ として (5) を得る．(5) の結論は，次の 2.3 項の議論で本質的である．

補題 2.6 の証明 まず $\mathrm{Lip} f_{(a)} \leq L|(a)|_1$ ($|(a)|_1 = \sum_{i=1}^k |a_i|$) と $|\mathrm{Lip} f_{(a')} - \mathrm{Lip} f_{(a")}| \leq \mathrm{Lip} f_{(a')-(a")}$ より補題の (1) は明らかである．

次に，

$$\begin{aligned}\fint_{B(x,r)} |\mathrm{Lip} f_{(a)} - \mathrm{Lip} f_{(a)}(x)|\, d\mu \;\leq\; & \fint_{B(x,r)} |\mathrm{Lip} f_{(a)} - \mathrm{Lip} f_{(a)_j}|\, d\mu + \\ & \fint_{B(x,r)} |\mathrm{Lip} f_{(a)_j} - \mathrm{Lip} f_{(a)_j}(x)|\, d\mu + \\ & \fint_{B(x,r)} |\mathrm{Lip} f_{(a)_j}(x) - \mathrm{Lip} f_{(a)}(x)|\, d\mu\end{aligned}$$

と評価しておくと, $(a)_j \to (a)$ のとき, 点 x が各 $\mathrm{Lip} f_{(a)_j}$ のルベーグ点ならば，$\mathrm{Lip} f_{(a)}$ のルベーグ点であることが容易に確かめられる． さらに

$$|\mathrm{Lip}(f_{(a)} + k) - \mathrm{Lip}(f_{(a')} + k)| \leq L|(a) - (a')|_1$$

より，

$$\left| \inf_{k \in C_0^{0,1}(B(x,r))} \fint_{B(x,r)} (\mathrm{Lip}(f_{(a)} + k))^p\, d\mu - \inf_{k \in C_0^{0,1}(B(x,r))} \fint_{B(x,r)} (\mathrm{Lip}(f_{(a')} + k))^p\, d\mu \right| \leq L|(a) - (a')|_1$$

であることに注意すると, $\Phi_r((a)) = \Phi_r(f_{(a)})(x)$ とおいて，

$$|\Phi_r((a)) - \Phi_r((a'))| \leq L|(a) - (a')|_1$$

となる．さらに各 $(a)_j$ に対して $r \to 0$ のとき，$\Phi_r((a)_j) \to 0$ ならば $\Phi_r((a)_j) \to 0$ であることも従う．これで補題の (2) が示された．

次に $f_{(a)}$ の漸近的に広義線形である点全体を $X_1(f_{(a)})$ と記すと，$\mathbf{R}^k$ の有理点全体 $\mathbf{Q}^k$ は $\mathbf{R}^k$ で稠密であり，上の (2) より

$$\cap_{(a)\in\mathbf{R}^k} X_1(f_{(a)}) = \cap_{(a)\in\mathbf{Q}^k} X_1(f_{(a)})$$

となる．したがって $X_1 = \cap_{(a)\in\mathbf{R}^k} X_1(f_{(a)})$ に対して, $\mu(X \setminus X_1) = 0$ である．以上で補題の (3) が示された．

最後に補題の (4) を証明する． まず次のことに注意する．

$$\left| \left(\fint_{B(x,r)} (\mathrm{Lip} f_{(a)})^p\, d\mu \right)^{1/p} - \left(\fint_{B(x,r)} (\mathrm{Lip} f_{(a')})^p\, d\mu \right)^{1/p} \right| \leq L|(a) - (a')|_1$$

したがって，$\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$(6)\quad r \left(\fint_{B(x,r)} (\mathrm{Lip} f_{(a)})^p\, d\mu \right)^{1/p} \leq C(\kappa,p) \left(\fint_{B(x,r)} |f_{(a)} - \alpha|^p\, d\mu \right)^{1/p}$$

ならば,

$$r\left(\fint_{B(x,r)}(\mathrm{Lip} f_{(a')})^p\, d\mu\right)^{1/p}$$

(7) $$\leq C(\kappa,p)\left(\fint_{B(x,r)}|f_{(a)}-\alpha|^p\, d\mu\right)^{1/p}+rL|(a)-(a')|_1$$

となる．ここで $\beta=f_{(a)-(a')}(x)$, $\alpha'=\alpha-\beta$ とおくと，$B(x,r)$ において，$|f_{(a)-(a')}-\beta|\leq rL|(a)-(a')|_1$ より，

$$\left|\left(\fint_{B(x,r)}|f_{(a)}-\alpha|^p\, d\mu\right)^{1/p} - \left(\fint_{B(x,r)}|f_{(a')}-\alpha'|^p\, d\mu\right)^{1/p}\right| \leq rL|(a)-(a')|_1$$

となり，これを不等式 (7) に代入して，

$$r\left(\fint_{B(x,r)}(\mathrm{Lip} f_{(a')})^p\, d\mu\right)^{1/p} \leq C(\kappa,p)\left(\fint_{B(x,r)}|f_{(a')}-\alpha'|^p\, d\mu\right)^{1/p}+(1+C(\kappa,p))rL|(a)-(a')|_1$$

を得る．したがって (6) かつ

$$(1+C(\kappa,p))L|(a)-(a')|_1\leq\frac{1}{4}\left(\fint_{B(x,r)}(\mathrm{Lip} f_{(a)})^p\, d\mu\right)^{1/p}$$

ならば，$\alpha'\in\mathbf{R}$ に対して，

(8)
$$r\left(\fint_{B(x,r)}(\mathrm{Lip} f_{(a')})^p\, d\mu\right)^{1/p}\leq 2C(\kappa,p)\left(\fint_{B(x,r)}|f_{(a')}-\alpha'|^p\, d\mu\right)^{1/p}$$

が成り立つことになる．

さて，点 x に対して，x は任意の $(a)\neq 0$ に対して, $\mathrm{Lip} f_{(a)}$ のルベーグ点であり，かつ $\mathrm{Lip} f_{(a)}(x)>0$ とする．このとき，ある正数 M が存在して， 任意の (a), $|(a)|_1=1$, と任意の r, $0<r\leq 1$, に対して,

$$\left(\fint_{B(x,r)}(\mathrm{Lip} f_{(a)})^p\, d\mu\right)^{1/p}\geq M$$

が成り立つ． したがって (a), $|(a)|_1=1$, に対して, (6) が成り立ち, かつ $2C(\kappa,p)L|(a')-(a)|\leq M$ ならば，(7) が成り立つことになる．

ここで，各 (a), $|(a)|_1=1$, に対して，$r\leq r(a)$ である任意の r に対して (6) が成り立つように正数 $r(a)$ を選ぶ．$\varepsilon=4^{-1}C(\kappa,p)^{-1}L^{-1}M$ とおいて，$|(a)_j|_1=1$ を満たす有限個の点の集合 $S=\{(a)_1,\ldots,(a)_n\}$ で，任意の (a), $|(a)|_1=1$, に対して, $\min\{|(a)-(a)_j|_1\mid j=i,\ldots,n\}\leq\varepsilon$ となるものを選ぶ．このとき，すべてのベクトル (a) において，任意の

正数 $r \leq \min\{r((a)_j) \mid j = 1, \ldots, n\}$ に対して，(8) が成り立つことがわかる．以上で補題が示された．

2.3. 余接束とリプシッツ関数の微分．補題 2.6 に基づいて，L^∞-束 T^*X を構成し，リプシッツ関数の微分を定義しよう．

まず，1 次独立な k 個の リプシッツ関数の組 $\alpha = \{f_1, \ldots, f_k\}$ を考える．補題 2.6 (3) と同様に，次のような点 x 全体のなす集合を $X_1(\alpha)$ とおく– すべての (a) に対して，$f_{(a)}$ は x において漸近的に広義線形である–．このとき $\mu(X \setminus X_1(\alpha)) = 0$ である．さらに

$$U(\alpha) := \{X \in X_1(\alpha) \mid \text{すべての}\ (a) \neq 0\ \text{に対して}\ \mathrm{Lip} f_{(a)}(x) > 0\}$$

とおく．

次に $\mu(A) > 0$ となる $A \subset X$ を一つ固定して，次の条件

$$\mu(A \cap U(\alpha)) > 0 \qquad [\#]$$

を考える．次のことに注意する．

(i) 補題 2.6 (5) より，条件 [#] を満たす $\alpha = \{f_1, \ldots, f_k\}$ に対して，$k \leq N(\kappa, \tau)$ でなければならない．

(ii) 条件 [#] を満たす $\alpha = \{f_1, \ldots, f_k\}$ は存在する．(たとえば，点 x からの距離 $\rho_x = d_I(x, *)$ をとるとよい[10].)

以下 $\alpha = \{f_1, \ldots, f_k\}$ は，条件 [#] を満たし，そのようなものの中で次元に関して極大であるとして議論する．

α と 1 次独立な リプシッツ関数 f に対して

$$f_{(s,a)} = sf + f_{(a)} = sf + a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k$$

とおき，任意の (s, a) に対して $f_{(s,a)}$ が漸近的に広義線形となる点 x 全体を $X_1(f, \alpha)(\subset X_1(\alpha))$ と表す．このとき $\mu(A \setminus X_1(f, \alpha)) = 0$ となり，さらに，

$$U(f, \alpha) := \{x \in X_1(f, \alpha) \mid \text{任意の}\ (s, a) \neq 0\ \text{に対して}\ \mathrm{Lip} f_{(s,a)}(x) > 0\}$$

とおくと，次元の極大性により，

$$\mu(A \cap U(f, \alpha)) = 0$$

である．そこで　$V(f, \alpha) := U(\alpha) \setminus U(f, \alpha)$ とおくと，

$$\mu(A \cap V(f, \alpha)) = \mu(A \cap U(\alpha)) > 0$$

となり，

$$\begin{aligned} x \in V(f, \alpha) \cap A \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \cap U(\alpha), \quad \mathrm{Lip} f_{(s,a)}(x) = 0 \quad (\exists (s, a) \neq (0)) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \cap U(\alpha), \quad \mathrm{Lip} f_{(-1,a)}(x) = 0 \quad (\exists (a) \neq (0)) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \cap U(\alpha), \quad \mathrm{Lip}(-f + f_{(a)})(x) = 0\ (\exists (a) \neq 0) \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathrm{Lip} f_{(a)-(a')}(x) \quad &= \quad \mathrm{Lip}\{(-f + f_{(a)}) - (-f + f_{(a)})\}(x) \\ &\leq \quad \mathrm{Lip}(-f + f_{(a)})(x) + \mathrm{Lip}(-f + f_{(a')})(x) \end{aligned}$$

[10]命題 1.7 参照

より，

$$\begin{aligned} \mathrm{Lip}(-f+f_{(a)})(x) = \mathrm{Lip}(-f+f_{(a')})(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Lip} f_{(a)-(a')}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (a) = (a') \end{aligned}$$

このように各 $x \in V(f,\alpha)$ に対して，

$$\mathrm{Lip} f_{(-1,a)}(x) = \mathrm{Lip}(-f+f_{(a)})(x) = 0$$

となる $(a) \in \mathbf{R}^k$ が一意的に存在することが判る．これを $(a(f;x))$ と表すことにする．

$$\mathrm{Lip} f(x) \le \mathrm{Lip}\left(f - f_{(a(f;x))}\right)(x) + \mathrm{Lip} f_{(a(f;x))}(x) = \mathrm{Lip} f_{(a(f;x))}(x)$$

$$\mathrm{Lip} f_{(a(f;x))}(x) \le \mathrm{Lip}(f_{(a(f;x))} - f)(x) + \mathrm{Lip} f(x) = \mathrm{Lip} f(x)$$

より，

$$\mathrm{Lip} f(x) = \mathrm{Lip} f_{(a(f;x))}(x)$$

が成り立つ．(“ $a(f;x)_i = \partial f / \partial f_i(x)$ ” という感じである．)

なお，$f = f_{(a)}$ の場合は，$(a(f;x)) = (a)$, $V(f,\alpha) = U(\alpha)$ である．

さて，

$$\begin{aligned} |(a(f;x))|_2 \min_{|(a)|_2=1} \mathrm{Lip} f_{(a)}(x) &\le |(a(f;x))|_2 \mathrm{Lip}\Big(\frac{1}{|(a(f;x))|_2} f_{(a(f;x))}\Big)(x) \\ &= \mathrm{Lip} f_{(a(f;x))}(x) \\ &\le \mathrm{Lip}(f_{(a(f;x))} - f)(x) + \mathrm{Lip} f(x) \\ &= \mathrm{Lip} f(x) \end{aligned}$$

より，次のことが成り立つ．

$$|(a(f;x))|_2 \min_{|(a)|_2=1} \mathrm{Lip} f_{(a)}(x) \le \mathrm{Lip} f(x)$$

したがって，正数 b に対して，

$$U(\alpha, b) := \{x \in U(\alpha) \mid \min_{|(a)|_2=1} \mathrm{Lip} f_{(a)}(x) \ge b\}$$

とおくと，

$$|(a(f;x))|_2 \le \frac{1}{b} \mathrm{Lip} f(x) \le \frac{1}{b} \mathbf{Lip}(f), \quad x \in U(\alpha, b)$$

となる．次のことに注意する．

$$\lim_{b \to 0} \mu(A \cap U(\alpha, b)) = \mu(A \cap U(\alpha)) > 0$$

補題 2.7. (1) $x \in V(f,\alpha) \cap V(h,\alpha)$ ならば，

$$(a(\eta f + \lambda h; x)) = \eta(a(f;x)) + \lambda((a(h;x)), \quad \eta, \lambda \in \mathbf{R}$$

(2) 条件 [#] を満たし，次元に関する極大性を持つ組 $\alpha = \{f_1^\alpha, \dots, f_k^\alpha\}$ と $\beta = \{f_1^\beta, \dots, f_{k'}^\beta\}$ に対して，$\mu(A \cap U(\alpha) \cap U(\beta)) > 0$ ならば，$k = k'$ となり，

$$\sum_{j=1}^{k} a^\beta(f_i^\alpha; x)_j a^\alpha(f_j^\beta; x)_\ell = \delta_{i,\ell}, \quad x \in \cap_{i,j} V(f_i^\alpha, \beta) \cap V(f_j^\beta, \alpha)$$

さらに $\mu(A \cap (\cap_{i,j} V(f_i^\alpha, \beta) \cap V(f_j^\beta, \alpha))) = \mu(A \cap U(\alpha) \cap U(\beta)) > 0$.

(3) 条件 [#] を満たし，次元に関する極大性を持つ 3 つの組 $\alpha = \{f_1^\alpha, \dots, f_k^\alpha\}$, $\beta = \{f_1^\beta, \dots, f_k^\beta\}$, $\gamma = \{f_1^\gamma, \dots, f_k^\gamma\}$ が $\mu(A \cap U(\alpha) \cap U(\beta) \cap U(\gamma)) > 0$ を満たすならば，

$$\sum_{j=1}^{k} a^\beta(f_i^\gamma; x)_j a^\alpha(f_j^\beta; x)_\ell = a^\alpha(f_i^\gamma; x)_\ell,$$

$$x \in \cap_{*=i,j,\ell;**,***=\alpha,\beta,\gamma} V(f_*^{**}, ***))$$

さらに $\mu(A \cap (\cap_{*=i,j,\ell;**,***=\alpha,\beta,\gamma} V(f_*^{**}, ***))) = \mu(A \cap U(\alpha) \cap U(\beta) \cap U(\gamma)) > 0$ である．

以上の考察に基づいて，余接束 T^*X が構成される．以下簡単のため $\mu(X) < +\infty$ として議論する．

まず $A = X$ として，上に述べたような $\mu(U(\alpha)) > 0$ を満たすリプシッツ関数と可測集合の組 $\alpha = (\{f_1^\alpha, \dots, f_{k(\alpha)}^\alpha\}, U(\alpha))$ 全体に中から，$\frac{1}{4}\sup_\alpha \mu(U(\alpha)) \le \mu(U(\alpha_1))$ を満たす α_1 を取り，十分小さい δ_1 をとって，$\frac{1}{4}\sup_\alpha \mu(U(\alpha)) \le \mu(U(\alpha_1, \delta_1))$ とする．次に $A = X \backslash U(\alpha_1, \delta_1)$ とおく．$\mu(A) = 0$ ならば，これで終了．$\mu(A) > 0$ のとき，$\mu(A \cap U(\beta)) > 0$ を満たす組 $\beta = (\{f_1^\beta, \dots, f_{k(\beta)}^\beta\}, U(\beta))$ すべてを考え，$\frac{1}{4}\sup_\beta \mu(A \cap U(\beta)) \le \mu(A \cap U(\alpha_2, \delta_2))$ を満たす α_2 と正数 δ_2 を選ぶ．これを繰り返して，

$$\{\alpha_n = (\{f_1^{\alpha_n}, \dots, f_{k(\alpha_n)}^{\alpha_n}\}, U(\alpha_n, \delta_n)) \mid n = 1, 2, \dots N(\le +\infty)\}$$

を構成する．作り方より，

$$\mu(X \setminus \cup_{n=1}^N U(\alpha_n, \delta_n)) = 0$$

となる．$\hat{U}(\alpha_n) = U(\alpha_n, \delta_n)$ とおくと，$\mu(\hat{U}(\alpha_n) \cap \hat{U}(\alpha_m)) > 0$ ならば，$\hat{U}(\alpha_n) \cap \hat{U}(\alpha_m)$ 上の有界な可測関数を成分とする行列値関数 $(a^{\alpha_n}(f_i^{\alpha_m}; x)_j)$ が定まり，これらを変換関数とする，X 上ほとんど至るところ定義された L^∞ 束 が定義できる．これを T^*X と表し，X の余接束という．ただし T^*X のファイバーは一定の次元であるとは主張していないことに注意する．

任意のリプシッツ関数 f は，$\hat{U}(\alpha_n)$ のほとんど至る所，成分 $(a^{\alpha_n}(f; x))$ をもつ T^*X の可測断面を与える．これを df と表して，f の微分とよぶ．このときライプニッツ則が成り立つ．

$$d(f_1 \cdot f_2) = df_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot df_2$$

以上まとめて，次の定理を得る．

定理 2.8. 測度距離空間 (X, d, μ) は，正数 κ, τ と $1 < p < +\infty$ に対してダブリング条件 $[\mathrm{D}]_\kappa$ と弱 p–ポアンカレ不等式 $[\mathrm{P}]_\tau$ を満たすとする．ただし X は弧状連結とする．このとき $\mu(U_i) > 0$ および $\mu(Z) = 0$ を満たすボレル集合 U_i $(i = 1, 2, \ldots)$ と Z によって X は

$$X = \cup_i U_i \cup Z$$

と分解され，さらに各 $i = 1, 2, \ldots$ に対して，U_i 上のリプシッツ関数の組 $\{f_1^{(i)}, \ldots, f_{n(i)}^{(i)}\}$ が存在して，つぎの性質を満たす．

(1) κ と τ および p のみによって決まる正の整数 $N(\kappa, \tau, p)$ があって，各 $i = 1, 2, \ldots$ につき $n(i) \leq N(\kappa, \tau, p)$ である．

(2) $\{f_1^{(i)}, \ldots, f_{n(i)}^{(i)}\}$ は一次独立である．

(3) 任意の $i = 1, 2, \ldots$ と $(a) \in \mathbf{R}^{n(i)}$, $(a) \neq 0$, に対して，$f_{(a)}$ は U_i 上の各点 x で漸近的広義線形かつ $\mathrm{Lip} f_{(a)}(x) > 0$ である．さらに任意の $f \in C_{loc}^{0,1}(X, d)$ に対して，$\mathbf{R}^{n(i)}$ 値可測関数 $a(f, x)$ $(x \in U_i)$ があって，ほとんどいたるところ

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - \sum_{j=1}^{n(i)} a_j(f, x)(f_j^{(i)}(y) - f_j^{(i)}(x))}{d(y, x)} = 0$$

が成り立つ．

ノート 2 定理 2.8 に関して，カルノー群さらにより一般のサブリーマン計量の場合については，Pansu [61] と Monti-Cassano [56] を参照．またチーガーの定理 2.8 に関するノート Tyson [73] がある．

なお T^*X のファイバーのランクが一定ではないような例は知られてないようである．

3. ソボレフ空間

前節に述べたチーガーによるリプシッツ関数の微分に関する定理 2.8 の証明を完成するためには定理 2.1 において述べた，リプシッツ関数のディリクレ p–エネルギーの (L^p 収束に関する) 下半連続性が本質的である．この定理の完全な証明を与える代わりに，この節では定理 2.1 とほぼ同じ内容の結果を証明する．これは定理 2.8 の証明には十分である．そのために測度距離空間上のソボレフ空間を定義し，そのいくつかの基本的な性質を説明する．とくにダブリング条件とポアンカレ不等式の成立の下に，ソボレフ空間の回帰性が示される．

3.1. ソボレフ空間の定義. 第 1 節で述べたように，ボレル正則測度を備えた距離空間 $X = (X, d, \mu)$ を考え，正の半径を持つ距離球体 B に対して，$0 < \mu(B) < +\infty$ と仮定する．

さて，各関数 $u \in L_{loc}^1(X)$ に対して，可測関数 $g : X \to [0, +\infty]$ の集合 $D[u]$ が指定されていて，対応 $u \to D[u]$ は以下に述べる性質 D – 1 〜D – 5 を満たすとする．

D − 1 非負値リプシッツ関数 u に対して, $\mathbf{Lip}(u) \leq k$ ならば, $g = k\,\mathrm{sgn}(u)$ は $D[u]$ に属する.

D − 2 $g_1 \in D[u_1]$, $g_2 \in D[u_2]$, かつ $g \geq |\alpha|g_1 + |\beta|g_2$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ ならば, ほとんどいたるところ $g \in D[\alpha u_1 + \beta u_2]$ である.

D − 3 $u \in L^1_{loc}(X)$, $g \in D[u]$, 有界なリプシッツ関数 ϕ に対して, 関数 $h(x) = (\sup|\phi|\ g(x) + \mathbf{Lip}(\phi)|u(x)|) \in D[\phi u]$ である.

D − 4 $u_1, u_2 \in L^1_{loc}(X)$ に対して, $u = \max\{u_1, u_2\}$, $v = \min\{u_1, u_2\}$ とおくと, $g_1 \in D[u_1]$, $g_2 \in D[u_2]$ ならば, $g = \max\{g_1, g_2\} \in D[u] \cap D[v]$

D − 1 により, 定数 c に対して, $0 \in D[c]$ であり, またD − 2より, $D[u]$ は凸集合となる. さらに $D[\alpha u] = |\alpha|D[u]$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ となることが容易に確かめられる. $D[u]$ の元 g を u の擬グラディエントとよぶ.

ここで $1 \leq p < +\infty$ を固定する.

D − 5 関数列 $\{u_i\}$ と $g_i \in D[u_i]$ を満たす関数列 $\{g_i\}$ に対して, $L^p_{loc}(X)$ において $u_i \to u$ かつ $L^p(X)$ において $g_i \to g$ ならば, $g \in D[u]$ である.

これによりほとんどいたるところ一致する関数の擬グラディエントの集合は一致する. 以下において, ほとんどいたるところ一致する関数は同じものとみなす.

以上D − 1〜D − 5の下に, 次の定義を述べる.

定義 3.1. 関数 $u \in L^1_{loc}(X)$ に対して,

$$E_p(u) = \inf\{\int_X g^p d\mu :\ g \in D[u]\}$$

とおいて, u のディリクレ p–エネルギーという. また

$$\mathcal{L}^{1,p}(X) = \{u \in L^p_{loc}(X) : E_p(u) < +\infty\}$$

とおいて, これを p–ディリクレ空間という. さらに

$$W^{1,p}(X) = W^{1,p}(X, d, \mu, D) = \mathcal{L}^{1,p}(X) \cap L^p(X)$$

とおいて, これを p–ソボレフ空間とよび, $u \in W^{1,p}(X)$ に対して,

$$\|u\|_{W^{1,p}(X)} = \left(\int_X |u|^p d\mu + E_p(u)\right)^{1/p}$$

とおく.

定理 3.1. $W^{1,p}(X)$ はバナッハ空間である.

証明 まずD－1から，$0 \in W^{1,p}(X)$ である．D－2から $W^{1,p}(X)$ が線形空間であることが従う．

次に $\|\cdot\|_{W^{1,p}(X)}$ がノルムであることを確かめる．まず $\|u\|_{W^{1,p}(X)} = 0 \Rightarrow u = 0$ $(a.e)$ は明らかである．D－2より $g \in D[u] \Leftrightarrow |\alpha|g \in D[\alpha u]$ $(\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$ となり，したがって $E_p(\alpha u) = |\alpha|^p E_p(u)$，そして $\|\alpha u\|_{W^{1,p}(X)} = |\alpha|\|u\|_{W^{1,p}(X)}$ が従う．またD－2により $g_i \in D[u_i] (i = 1,2) \Rightarrow (g_1+g_2) \in D[u_1+u_2]$ であるから，三角不等式 $\|u_1+u_2\|_{W^{1,p}(X)} \leq \|u_1\|_{W^{1,p}(X)} + \|u_2\|_{W^{1,p}(X)}$ が従う．

最後に $W^{1,p}(X)$ が完備であることを示そう．$\{u_i\}$ をコーシー列とする．必要ならば，部分列を取ることによって，$\|(u_i - u_{i+1})\|_{W^{1,p}(X)} \leq 2^{-i}$ と仮定して，ある $u \in W^{1,p}(X)$ に u_i が収束することを示せばよい．そこで $v_i = u_i - u_{i+1}$ とおく．このとき，上の仮定より $\|h_i\|_{L^p(X)} \leq 2^{-i}$ となる $h_i \in D[v_i] \cap L^p(X)$ が存在する．次に $D[u_1]$ の元 g_1 を任意に選び，$g_k = g_1 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i$ $(k \geq 2)$ とおく．このとき，$u_k = u_1 - \sum_{i=1}^{k-1} v_i$ に注意すると，D－2から $g_k \in D[u_k]$ $(k = 1,2,\ldots)$ が従う．$\{g_k\}, \{u_k\}$ はともに $L^p(X)$ においてコーシー列であるので，$L^p(X)$ における極限 $g = \lim g_k$, $u = \lim u_k$ が存在する．D－5より $g \in D[u]$ である．とくに $u \in W^{1,p}(X)$ である．よって $W^{1,p}(X)$ において u_k が u に収束することを示せばよい．すなわち，$\|u_k - u\|_{L^p(X)} \to 0$ より，$\|f_k\|_{L^p(X)} \to 0$ となる $f_k \in D[u_k - u]$ を見つければよい．

そのために k を任意に固定して，$v_{k,m} = (u_k - u_m)$ $(m \geq k)$ とおく．$v_{k,m} - v_{k,n} = u_n - u_m$ より，$\{v_{k,m}\}_m$ は $W^{1,p}(X)$ においてコーシー列をなす．さらに

$$\|v_{k,m}\|_{W^{1,p}(X)} \leq \sum_{s=k}^{m-1} \|u_s - u_{s+1}\|_{W^{1,p}(X)} \leq \sum_{s=k}^{m-1} 2^{-s} \leq 2^{-(k-1)}$$

と評価される．その構成により $m \to \infty$ のとき $v_{k,m}$ は $(u_k - u)$ に収束し，$v_{k,m} = \sum_{s=k}^{m-1} v_s$ より，D－2から $g_{k,m} = \sum_{s=k}^{m-1} h_s \in D[v_{k,m}]$ が従う．このように $\{g_{k,m}\}$ は $L^p(X)$ においてコーシー列であり，

$$\|g_{k,m}\|_{L^p(X)} \leq \sum_{s=k}^{m-1} \|h_s\|_{L^p(X)} \leq 2^{-(k-1)}$$

となる．したがってD－5より関数 $g_k = \lim_{m\to\infty} g_{k,m}$ は $D[u_k - u]$ に属し，

$$\|g_k\|_{L^p(X)} = \lim_{m\to\infty} \|g_{k,m}\|_{L^p(X)} \leq 2^{-(k-1)}$$

となる．これで定理の証明が完了した．

命題 3.2. $1 < p < +\infty$ とする．このとき，任意の $u \in \mathcal{L}^{1,p}(X)$ に対して，

$$\int_X g_u d\mu = E_p(u)$$

を満たす関数 $g_u \in D[u]$ がただ一つ存在する．

証明　まずD－2とD－5より，$D[u]\cap L^p(X)$ は $L^p(X)$ において凸閉集合である．$L^p(X)$ は一様凸空間であることに注意すると，$D[u]\cap L^p(X)$ の中でノルム最小な元 g_u がただひとつ存在する．

一般にバナッハ空間 $(E,\|\cdot\|)$ が，任意の正数 ε に対して，$\delta\in(0,1)$，が存在して，$\|x\|\le 1$, $\|y\|\le 1$, $\|x-y\|>\varepsilon \Longrightarrow \|(x+y)/2\|\le 1-\delta$ という性質を満たすとき，E は一様凸であるという．なお，ミルマンの定理によると，バナッハ空間 E が一様凸であるならば，E は回帰的である．

命題3.2の g_u を，u の最小擬グラディエントとよぶ．D－2〜D－4から，対応 $u\to g_u$ は次の性質をみたす．

$$\text{(i)}\quad \int_X {g_{u+v}}^p\, d\mu \le \int_X {g_u}^p\, d\mu + \int_X {g_u}^p\, d\mu$$

$$\text{(ii)}\quad \left|\int_X {g_u}^p\, d\mu - \int_X {g_v}^p\, d\mu\right| \le \int_X {g_{u-v}}^p\, d\mu$$

$$\text{(iii)}\quad \int_X {g_{\phi u}}^p\, d\mu \le \int_X (\sup|\phi|\; g_u + \mathbf{Lip}(\phi)|u|)^p\, d\mu$$

$$\text{(iv)}\quad \int_X {g_{\max\{u,v\}}}^p\, d\mu \le \int_X \max\{g_u, g_v\}^p\, d\mu$$

$$\text{(v)}\quad \int_X {g_{\min\{u,v\}}}^p\, d\mu \le \int_X \max\{g_u, g_v\}^p\, d\mu$$

定理 3.3. $1<p<+\infty$ とする．このとき関数列 $\{u_i\}\subset L^p(X)$ が u に L^p 収束するならば，

$$E_p(u)\le \liminf_{i\to\infty} E_p(u_i)$$

が成り立つ．

証明　$u_i\in W^{1,p}(X)$ で $\sup E_p(u_i)<\infty$ としてよろしい．u_i の最小擬グラディエントを g_i とする．このとき $\{g_i\}$ は $L^p(X)$ において有界で，$L^p(X)$ は回帰的であるから，必要ならば部分列を取って，ある $g\in L^p(X)$ に弱収束するとしてよろしい．このとき $\|g\|_{L^p(X)}\le \liminf_{i\to\infty}\|g_i\|_{L^p(X)}$ なので，$g\in D[u]$ を示せばよい．

まずマツールの定理より，各 k につき，$\{g_i\}_{i\ge k}$ の $L^p(X)$ における凸胞の閉包に g は含まれる．したがって，$h_k=\sum_{i=k}^m a_{i,k}g_i$, $\sum_{i=k}^m a_{i,k}=1, a_{i,k}\ge 0$, のように表される関数の列 $\{h_k\}$ で $\|h_k-g\|_{L^p(X)}\to 0$ となるものが取れる．$v_k=\sum_{i=k}^m a_{i,k}u_i$ とおく．このとき，$\|v_k-u\|_{L^p(X)}\to 0$，さらにD－2より，$h_k\in D[v_k]$ である．よってD－5より $g\in D[u]$ である．

ここでマツールの定理の内容を確認しておこう：ノルム空間 $(E,\|\cdot\|)$ において，x_n が x に弱収束するならば，任意の $\varepsilon>0$ に対して，あ

る凸結合 $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i$ ($\sum_{i=1}^{N} a_i = 1, a_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, N$) が存在して，$\|x - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i\| < \varepsilon$ とできる．

定理 3.3 の証明と同様にして，次の命題を示すことができる．

命題 3.4. $1 < p < +\infty$ とする．関数列 $\{u_i\} \subset L^p(X)$ が u に L^p 収束するとき，次の条件はすべて同値である．

(1) $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \int_X {g_{u_i}}^p \, d\mu = \int_X {g_u}^p \, d\mu$

(2) $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \int_X |g_{u_i} - g_u|^p \, d\mu = 0$

(3) ある $g_i \in D[u_i]$ が存在して，$\displaystyle\lim_{i\to\infty} \int_X {g_i}^p \, d\mu = \int_X {g_u}^p \, d\mu$

(4) ある $g_i \in D[u_i]$ が存在して，$\displaystyle\lim_{i\to\infty} \int_X |g_i - g_u|^p \, d\mu = 0$

次に D - 1〜D - 5 に加えて，次の性質を考える．

D − 6 関数列 $\{u_i\} \subset \mathcal{L}^{1,p}(X)$ が $E_p(u) \to 0$ を満たすならば，任意の距離球体 B に対して，$\|u_i - a_i\|_{L^p(B)} \to 0$ となる定数 a_i が存在する．

命題 3.5. 条件 D - 1〜D - 5 のもとに次のことが成り立つ．

(1) $u, v \in W^{1,p}(X)$ に対して，$\max\{u, v\}, \min\{u, v\} \in W^{1,p}(X)$ である．

(2) $u \in W^{1,p}(X)$ と台がコンパクトなリプシッツ関数 ϕ に対して $\phi u \in W^{1,p}(X)$ である．

(3) $u \in W^{1,p}(X)$ と定数 c に対して，$E_p(\max\{u, c\}) \leq E_p(u)$.

(4) 台がコンパクトなリプシッツ関数 ϕ は $W^{1,p}(X)$ の元である．

さらに *D - 6* を仮定する．

(5) $u \in \mathcal{L}^{1,p}(X)$ に対して，$E_p(u) = 0$ ならば u は定数である．

証明　これらの性質は定義からすぐ示される．

以下に条件 D - 1〜D - 6 から得られるいくつかの命題を証明なしで述べる[11].

命題 3.6. 条件 D - 1〜D - 6 の下に，$\{u_i\} \subset \mathcal{L}^{1,p}(X)$ が $E_p(u_i) \to 0$ を満たすならば，ある数列 $\{c_i\}$ が存在して，任意のコンパクト集合 A に対して，$\|u_i - c_i\|_{L^p(A)} \to 0$ となる．

命題 3.7. 条件 D - 1〜D - 6 の下に，任意の有界可測集合 $Q \subset A \subset X$ で，$\mu(Q) > 0$ を満たすものに対して，次のことが成り立つ．任意の $u \in \mathcal{L}^{1,p}(X)$ と $g \in D[u]$ に対して，

$$\|u - u_Q\|_{L^p(A)} \leq C_{A,Q} \|g\|_{L^p(X)}$$

[11] ノート 3 参照

が成り立つ．ただし $C_{A,Q}$ は p と A そして Q にのみ依存する定数で，

$$u_Q := \fint_Q u d\mu := \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q u d\mu$$

系 3.8. 任意の可測集合 $A, Q \in \mathcal{K}$ で，$\mu(Q) > 0$ を満たすものに対して，次のことが成り立つ．任意の $u \in \mathcal{L}^{1,p}(X)$ と $g \in D[u]$ に対して，Q において $u = 0$ ならば，

$$\|u\|_{L^p(A)} \leq C_{A,Q} \|g\|_{L^p(X)}$$

ただし $C_{A,Q}$ は p と A そして Q にのみ依存する定数である．

定義 3.2. ディリクレ p–エネルギー E_p が局所的であるとは，$A \in \mathcal{K}$ において u が定数ならば，$E_p(u|A) = 0$ となることである．ただし

$$E_p(u|A) = \inf\{\int_A g^p d\mu \mid g \in D[u]\}$$

これを u の局所ディリクレ p–エネルギーという．

3.2. 完備化によるソボレフ空間の構成と例．測度距離空間 $X = (X, d, \mu)$ と関数族 $\mathcal{F}$ が与えら，$\mathcal{F}$ は以下の条件を満たすとする．

F - 1 $\mathcal{F}$ はベクトル空間でかつ，$u, v \in \mathcal{F}$ ならば $\max\{u, v\}, \min\{u, v\} \in \mathcal{F}$ という性質を満たす．

F - 2 $\mathcal{F}$ はすべてのリプシッツ関数を含む．

F - 3 $u \in \mathcal{F}$ と有界なリプシッツ関数 ϕ に対して，$\phi u \in \mathcal{F}$.

例えば

$$\mathcal{F} = C^{0,1}_{loc}(X) = \{X \text{ 上の局所リプシッツ関数全体}\}$$

はこれらの条件を満たす．

さて，$f \in \mathcal{F} \to D[f]$ が定まっていて，D – 1〜D – 4 が満たされているとする．

定義 3.3. $u \in L^1_{loc}(X)$ と可測関数 $g : X \to [0, +\infty]$ に対して，$g \in \bar{D}[u]$ とは，$g = +\infty$ あるいは $\{f_i\} \subset \mathcal{F}$ と $g_i \in D[f_i]$ があって，$L^p_{loc}(X)$ において $f_i \to u$，$L^p(X)$ において $g_i \to g$ となる．（このような g が含まれない場合は $\bar{D}[u]$ は $+\infty$ のみから成る.）$g \in \bar{D}[u]$ を擬グラディエントという．

命題 3.9. 対応 $u \to \bar{D}[u]$ は D – 1〜D – 5 を満たす．さらに対応 $f \in \mathcal{F} \to D[f]$ が D – 6 を満たせば，対応 $u \to \bar{D}[u]$ も D – 6 を満たす

証明　F – 2 から D – 1 は明らかである．D –2 を示す．$u, v \in L^p_{loc}$, $g \in \bar{D}[u]$, $h \in \bar{D}[v]$ と $f \geq |\alpha| g + |\beta| h$ が与えられている．定義から関数列 $\{u_i\}, \{v_i\} \subset \mathcal{F}$ と $g_i \in \bar{[D]}[u_i]$, $h_i \in \bar{D}[v_i]$ となる関数列 $\{g_i\}$, $\{h_i\}$ で，$L^p_{loc}(X)$ において $u_i \to u$, $v_i \to v$, そして $L^p(X)$ において $g_i \to g$, $h_i \to h$ を満たすものがとれる．$f_i = |\alpha| g_i + |\beta| h_i + (f - |\alpha| g - |\beta| h)$ とおく．$f_i \geq |\alpha| g_i + |\beta| h_i$ より，$f_i \in D[\alpha u_i + \beta v_i]$ である．$L^p(X)$ に

おいて $f - f_i = |\alpha|(g - g_i) + |\beta|(h - h_i) \to 0$ より，$f \in \bar{D}[\alpha u + \beta v]$ が従う．同様に D − 3, D − 4 も従う．

次に D − 5 を示す．$\{u_i\}$，$g_i \in \bar{D}[u_i]$, $L^p_{loc}(X)$ において $u_i \to u$, $L^p(X)$ において $g_i \to g$ を満たすものをとる．ある部分列で $g_{i_j} = +\infty$ と成るものがあるとすると，$g = +\infty$ となり，$g = \infty \in \bar{D}[u]$. その他の場合は，各 i に対して，$\{u_{ij}\} \subset \mathcal{F}$，$g_{ij} \in D[u_{ij}]$, かつ $j \to \infty$ のとき $L^p_{loc}(X)$ において $u_{ij} \to u_i$, $L^p(X)$ において $g_{ij} \to g_i$ を満たすものをとる．このとき，対角線論法を用いて，$\{v_i\} \subset \mathcal{F}$，$h_i \in D[v_i]$, $L^p_{loc}(X)$ において $v_i \to u$, $L^p(X)$ において $h_i \to g$ を満たすものを選ぶことができる．したがって $g \in \bar{D}[u]$ である．

最後に対応 $f \in \mathcal{F} \to D[f]$ が D − 6 を満たすとする．$u_i \in L^p_{loc}(X)$, $g_i \in \bar{D}[u_i] \cap L^p(X)$，そして $\|g_i\|_{L^p(X)} \to 0$ を満たすものを考える．距離球体 B をひとつ固定する．このとき，上と同様な対角線論法によって $\{v_i\} \subset \mathcal{F}$，$h_i \in D[v_i]$, $\|v_i - u\|_{L^p(B)} \to 0$, $\|h_i - g\|_{L^p(X)} \to 0$ を満たすものを選ぶことができる．したがって $\|f_i\|_{L^p(X)} \to 0$ で，D − 6 が v_i に対して成り立つので，ある数列 c_i があって，$\|v_i - c_i\|_{L^p(B)} \to 0$ である．したがって $\|u_i - c_i\|_{L^p(B)} \le \|u_i - v_i\|_{L^p(B)} + \|v_i - c_i\|_{L^p(B)} \to 0$ となり，D − 6 が示された．

次にソボレフ空間の例をいくつか述べよう[12].

例 1 リーマン多様体 (M, g) を考える．測度として，リーマン測度 μ_g を考える．関数 $u \in L^1_{loc}(M, \mu_g)$ に対して，$D[u]$ を次のように定める：可測関数 h が $D[u]$ に含まれるとは，$h = +\infty$ または，任意のコンパクトな台をもつベクトル場 ξ に対して，

$$\left| \int_M u \operatorname{div} \xi \, d\mu_g \right| \le \int_M h|\xi| \, d\mu_g$$

が成り立つことである．このとき，対応 $u \to D[u]$ は D − 1〜D − 6 を満たす．さらに超関数の意味での微分 ∇u が $L^p_{loc}(X)$ に含まれるならば，$h \in D[u]$ である条件は，$h \ge |\nabla u|$ *a.e.* である．

例 2 リーマン多様体 (M, g) を考える．ここでは測度として，ウエイト $w \in L^1_{loc}(M, \mu_g)$, $w \ge 0$, の測度 $w\mu_g$ を考え，ある定数 $C_{w,p}$ が存在して，任意の距離球体 B に対して

$$\left(\int_B w \, d\mu_g \right) \left(\int_B w^{1/(p-1)} \, d\mu_g \right)^{p-1} \le C_{w,p}$$

を仮定する．このとき，例 1 と同じ対応 $u \to D[u]$ は，D − 1〜D − 6 を満たし，さらに対応するソボレフ空間 $W^{1,p}(M, w\mu_g)$ において滑らかな関数全体は稠密である．

例 3 (X, μ, d) を測度距離空間とする．関数 $g : X \to [0, +\infty]$ が関数 $u : X \to \mathbf{R}$ のハイウォシュ擬グラディエントであるとは，

$$|u(x) - u(y)| \le d(x, y)(g(x) + g(y)), \quad x, y \in X \setminus F$$

[12] ノート 3 参照

が成り立つときをいう．ただし F は測度 $\mu(F)=0$ のある集合である．関数 u のハイウォシュ擬グラディエント全体を $HD[u]$ とすれば，この対応 $u \to HD[u]$ はD－1 ～ D－6 を満たす．これから決まるソボレフ空間 $HW^{1,p}(X)$ において，$C^{0,1}(X,d) \cap HW^{1,p}(X)$ は稠密である．ただしこのソボレフ空間は局所的ではないので注意する．

例4 測度距離空間 $X=(X,d,\mu)$ を考える．局所リプシッツ関数 $f: X \to \mathbf{R}$ に対して，

$$SD[f]=\{g \mid \mathrm{Lip}f(x) \le g(x) \quad a.a.\ x \in X\}$$

とおく．このときD－1～D－4が満たされることを見るのは易しい．したがって完備化によって関数 $u \in L^1_{loc}(X)$ に対しても $S\bar{D}[u]$ が定まり，これから定まるソボレフ空間を $SW^{1,p}(X)$ と記す．これは局所的である．

注意 3.1. D－6については，一般には成り立たないので注意する．たとえば，$X=(\mathbf{R},d_\alpha,dx)$ $(0<\alpha<1)$, $d_\alpha(x,y)=|x-y|^\alpha$ とすると，すべての滑らかな関数 f に対して，$0 \in SD[f]$, したがって $E_p(f)=0$ である．

例5 測度距離空間 $X=(X,d,\mu)$ を考える．ただし任意の2点は求長可能な曲線で結ぶことができるとする．

定義 3.4. 局所リプシッツ関数 f に対して，ボレル可測関数 g が f の優グラディエントであるとは，すべての弧長をパラメータとするリプシッツ連続な曲線 $c:[0,L] \to X$ に対して，

$$|f(c(L))-f(c(0))| \le \int_0^L g(c(t))dt$$

が成り立つことである．

命題 3.10. $f \in C^{0,1}_{loc}(X)$ に対して，$Lipf$ （したがって $\mathrm{Lip}f$）は f の優グラディエントである．

証明　弧長をパラメータとするリプシッツ連続な曲線 $c:[0,L] \to X$ に対して，$f_c(s)=f(c(s))$ はリプシッツ関数より，絶対連続となり，ほとんどすべての s に対して微分可能である．さらに

$$|f_c(L)-f_c(0)| \le \int_0^L |f_c'(s)|\,ds$$

がなりたつ．したがって $f_c'(s)$ が存在する s に対して，$|f_c'(s)| \le Lipf(c(s))$ を示せばよい．

このような s_* を一つとり，十分 s_* に近い s に対して，$d(c(s),c(s_*)) \neq 0$ として示せばよい．このとき，十分小さな $r>0$ に対して，$d(c(s(r)),c(s_*)) = r \le |s(r)-s_*|$ を満たす最小の $s(r)$ を取る．$r \to 0$ のとき，$s(r) \to s_*$ である．したがって

$$\frac{|f_c(s(r))-f_c(s_*)|}{|s(r)-s_*|} \le \sup\left\{\frac{|f(z)-f_c(s_*)|}{r} \mid z \in X, d(z,c(s_*))=r\right\}$$

がなりたつ. $f_c'(s_*)$ が存在するので,

$$\begin{aligned} |f_c'(s_*)| &= \liminf_{r\to 0} \frac{|f_c(s(r)) - f_c(s_*)|}{|s(r) - s_*|} \\ &\leq \liminf_{r\to 0} \sup \left\{ \frac{|f(z) - f_c(s_*)|}{r} \mid z \in X, d(z, c(s_*)) = r \right\} \\ &= Lip f(c(s_*)) \end{aligned}$$

以上で命題の証明は完了である.

さて, $f \in C^{0,1}_{loc}(X)$ に対して, その優グラディエント全体を $UD[f]$ と表す. 完備化の手続きにより, $u \in L^p_{loc}(X)$ に対しても, $U\bar{D}[u]$ が定まる. 対応 $u \to U\bar{D}[u]$ は D－1 〜 D－5 を満たすことが容易に確かめられる. 対応するソボレフ空間を $UW^{1,p}(X)$ と表す. 定義から局所的である.

さらに連結開集合 $V \subset X$ に対しても, V 上の局所リプシッツ関数 f に対して, $UD[f]$ が定まる. そして $v \in L^1_{loc}(V)$ に対して, $U\bar{D}[v]$ と $UW^{1,p}(V)$ が定義できる. $u \in L^1_{loc}(X)$ に対して, $g \in U\bar{D}[u]$ ならば, $g_{|V} \in U\bar{D}[u_{|V}]$ である. これは, 例 4 でも同様である. 命題 3.10 から $u \in L^1_{loc}(X)$ に対して, $S\bar{D}[u] \subset U\bar{D}[u]$ となり, さらに, $SW^{1,p}(X)$ は $UW^{1,p}(X)$ において閉じていることが確かめられる.

注意 3.2. D－6 は必ずしも成り立たない. たとえば,「カントールの櫛」をみてみよう. まず $K \subset [0,1]$ をハウスドルフ次元 $\alpha \in (0,1)$ で α 次のハウスドルフ測度が有限かつ正であるカントール集合とし, $X = (K \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \subset \mathbf{R}^2$ とおく. これは $(1+\alpha)$ 次元ハウスドルフ測度 μ を持つ弧長空間である. ここで $f(x,y) = x$ によって定義される関数 f と部分空間 $[0,1] \times \{0\} \subset X$ の特性関数を g とする. このとき, f は各垂直区間において定数であるから $g \in UD[f]$ が従う. 一方 $\int_X g^p d\mu = \mu([0,1] \times \{0\}) = 0$ である. よって f のディリクレ p-エネルギーは 0 ということになる. このように D－6 は成り立たない.

3.3. ソボレフ空間 $SW^{1,p}$ と $UW^{1,p}$ について. この分節 3.3 および分節 3.4 では $1 < p < +\infty$ と仮定して, ソボレフ空間 $SW^{1,p}(X)$ と $UW^{1,p}(X)$ についてより詳しく議論する.

$D[f]$ は $SD[f]$(または $UD[f]$), $\bar{D}[u]$ は $S\bar{D}[u]$(または $U\bar{D}[u]$), $W^{1,p}(X)$ は $SW^{1,p}(X)$(または $UW^{1,p}(X)$) をそれぞれ表す. ただし X はその任意の２点を求長可能な曲線で結ぶことができる空間とする (命題 1.7 参照).

まず, 次のような D－3 より精密なライプニッツ則が成り立つことに注意しておく：

(9) $\quad g_i \in D[f_i],\ f_i \in C^{0,1}_{loc}(X)\ (i=1,2) \Longrightarrow g_1|f_2| + |f_1|g_2 \in D[f_1 f_2]$

定理 3.11. 測度距離空間 $X = (X, d, \mu)$ を考える. $g \in \bar{D}[u]$ に対して,

$$g_u \leq g \quad \mu - a.e.$$

が成り立つ．とくに $f \in C^{0,1}_{loc}(X) \cap W^{1,p}(X)$ に対して，

$$g_f \leq \mathrm{Lip} f \quad \mu - a.e$$

が成り立つ．

これを示すために２つの補題を用意する．まず次の補題は，SD あるいは UD の定義から明らかであろう．

補題 3.12. ２つの開集合 V_1，V_2 と $V = V_1 \cup V_2$ 上の局所リプシッツ関数 f が与えられている．$g_i \in D[f_{|V_i}]$ $(i = 1, 2)$ に対して，$\max\{\tilde{g}_1, \tilde{g}_2\} \in D[f]$ である．ただし

$$\tilde{g}_1 = \begin{cases} g_1 & in \quad V_1 \\ 0 & in \quad V \setminus V_1 \end{cases}, \qquad \tilde{g}_2 = \begin{cases} 0 & in \quad V \setminus V_2 \\ g_2 & in \quad V_2 \end{cases}$$

とおいた．

補題 3.13. $W \subset V$ を満たす２つの開集合 V, W と関数 $u \in W^{1,p}(V)$ が与えられている．関数 $g_V \in \bar{D}[u]$ と $g_W \in \bar{D}[u_{|W}]$ に対して，

$$g = \begin{cases} g_V & in \quad V \setminus W \\ g_W & in \quad W \end{cases}$$

とおく．このとき，$g \in \bar{D}[u]$ である．

証明　$g_V \not\equiv 0, g_W \not\equiv 0$ とする．関数列 $f_{V,i} \in C^{0,1}_{loc}(V)$ と $g_{V_i} \in D[f_{V,i}]$ は $L^p(V)$ において，$f_{V,i} \to u$, $g_{V,i} \to g_V$ を満たすとする．同様に関数列 $f_{W,i} \in C^{0,1}_{loc}(W)$ と $g_{W,i} \in D[f_{W,i}]$ は $L^p(W)$ において $f_{W,i} \to u_{|W}$, $g_{W,i} \to g_W$ を満たすとする．十分小さい正数 η に対して，$W_\eta = \{y \in W \mid d(y, X \setminus W) > \eta\}$ とおく．さらに ϕ_η を，$\phi_\eta(y) = 1$ $(y \in W_\eta)$, $\mathrm{supp}\, \phi_\eta \subset W$, $0 \leq \phi_\eta \leq 1$ をみたすリプシッツ関数とする．関数 $f_i \in C^{0,1}_{loc}(V)$ を

$$f_i = (1 - \phi_\eta) f_{V,i} + \phi_\eta f_{W,i} = (1 - \phi_\eta)(f_{V,i} - f_{W,i}) + f_{W,i}$$

によって定めると，$V \setminus \mathrm{supp}\, \phi_\eta$ において $f_i = f_{V,i}$ より，$g_{V,i} \in D[f_{i|V \setminus \mathrm{supp}\, \phi_\eta}]$ となる．また

$$g_i = \mathrm{Lip}(1 - \phi_\eta)|f_{V,i} - f_{W,i}| + (1 - \phi_\eta)(g_{V,i} + g_{W,i}) + g_{W,i}$$

とおくと，(9) より $g_i \in D[f_{i|W}]$ である．したがって，$\tilde{g}_{V,i}$ を $V \setminus \mathrm{supp}\, \phi_\eta$ において $g_{V,i}$，$\mathrm{supp}\, \phi_\eta$ において 0 と定め，$\tilde{g}_i$ を W において g_i，$V \setminus W$ において 0 と定めることによって補題 3.12 から $\max\{\tilde{g}_{V,i}, \tilde{g}_i\} \in \bar{D}[f_i]$ が従う．$i \to \infty$ の時，$L^p(V)$ において $f_i \to u$ かつ $\max\{\tilde{g}_{V,i}, \tilde{g}_i\} \to g_\eta$ である．ただし $g_\eta(y) = g_V(y)$ $(y \in V \setminus W)$, $g_\eta(y) = (1 - \phi_\eta(y))(g_V(y) + g_W(y)) + g_W(y)$ $(y \in W)$ とおいた．$g_\eta \in \bar{D}[u]$ で，$\eta \to 0$ とすると g_η は g に L^p 収束するので，$g \in \bar{D}[u]$ が確かめられた．

定理 3.11 の証明　背理法を使って示そう．すなわちある正数 ε と $\mu(A) > 0$ をみたす集合があって，$g^p(x) \leq g^p_u(x) - \varepsilon$ $(a.a.\ x \in A)$ として矛盾を導こう．

開集合の列 $\{W_i\}$ で $A \subset W_i$, $\lim_{i\to\infty} \mu(W_i \setminus A) = 0$ となるものを選ぶ.

$$g_i = \begin{cases} g_u & \text{in} \quad X \setminus W_i \\ g & \text{in} \quad W_i \end{cases}$$

とおくと，補題 3.13 から $g_i \in \bar{D}[u]$ である．一方,

$$\int_X g_i^p \, d\mu \le \int_X g_u^p \, d\mu - \varepsilon\mu(W_i)$$

となることと，$i \to \infty$ のとき，右辺は $\int_X g_u^p \, d\mu - \varepsilon\mu(A)$ に収束することから，十分大きいに対して，$\int_X g_i^p \, d\mu < \int_X g_u^p \, d\mu - \frac{\varepsilon}{2}\mu(A)$ となる．これは g_u が u の最小擬グラディエントであることに反する.

系 3.14. $u \in W^{1,p}(V)$ と開集合 $W \subset V$ に対して，$g_{u_{|W}}(x) = (g_u)_{|W}(x)$ $(a.a.\ x \in W)$ が成り立つ.

このことから局所ディリクレ p-エネルギー有限な関数が定義され，それらのなす空間を $W^{1,p}_{loc}(X)$ と記す.

補題 3.15. $u \in W^{1,p}(V)$, $g \in \bar{D}[u]$ と定数 c に対して,

$$g_*(x) = \begin{cases} g(x), & x \in V \setminus u^{-1}(c) \\ 0, & x \in u^{-1}(c) \end{cases}$$

とおく．このとき，$g_* \in \bar{D}[u]$.

証明　V は有界として仮定してよい．まず関数列 $f_i \in C^{0,1}_{loc}(V) \cap W^{1,p}(V)$ と $g_i \in D[f_i]$ で，$L^p(V)$ において $f_i \to u$, $g_i \to g$ となるものを取る．$A = u^{-1}(c)$ とおき，また正数 ε に対して，$A_{\varepsilon,i} = \{x \in V \mid c-\varepsilon \le f_i(x) \le c+\varepsilon\}$ とおく．さらに，A を含む開集合 U_ε で $\varepsilon \to 0$ のとき $\mu(U_\varepsilon \setminus A) \to 0$ となるものを選ぶ．ここで関数 $f_{\varepsilon,i} \in C^{0,1}_{loc}(V)$ と $g_{\varepsilon,i}$ を次のように定義する.

$$f_{\varepsilon,i}(x) = \begin{cases} f_i(x) + \varepsilon, & f_i(x) \le c - \varepsilon \\ c, & x \in A_{\varepsilon,i} \\ f_i(x) - \varepsilon, & f_i(x) \ge c + \varepsilon \end{cases}$$

$$g_{\varepsilon,i}(x) = \begin{cases} g_i(x), & x \in V \setminus (A_{\varepsilon,i} \cap U_\varepsilon) \\ 0, & x \in A_{\varepsilon,i} \cap U_\varepsilon \end{cases}$$

このとき，$g_{\varepsilon,i} \in D[f_{\varepsilon,i}]$ であり，0 に収束する数列 ε_i を適当に選ぶと，$f_{\varepsilon_i,i}$ は u に，$g_{\varepsilon_i,i}$ は g_* にそれぞれ L^p 収束することがわかる．したがって，$g_* \in \bar{D}[u]$ である.

系 3.16. 与えられた 2 つの関数 $u_1, u_2 \in W^{1,p}(V)$ に対して，次のことが成り立つ.

(1) ボレル集合 $A \subset V$ において，u_1 と u_2 が一致しているならば，g_{u_1} と g_{u_2} も A において一致している.

(2) $u_1(x) \le u_2(x)$ となるほとんどすべての $x \in V$ において,

$$g_{\min\{u_1,u_2\}}(x) = g_{u_1}(x), \quad g_{\max\{u_1,u_2\}}(x) = g_{u_2}(x)$$

が成り立つ.

証明　まず $g_{u_1} = g_{(u_1-u_2)+u_2} \le g_{u_1-u_2} + g_{u_2}$ に注意すると，$u_{1|A} = u_{2|A}$ ならば，補題 3.15 から $g_{u_1-u_2|A} = 0$ より，$g_{u_1|A} \le g_{u_2|A}$ となり，同様に $g_{u_1|A} \le g_{u_2|A}$ が従い，$g_{u_1|A} = g_{u_2|A}$ となる．つぎに $u_1(x) \le u_2(x)$ となるほとんどすべての $x \in V$ において，$\min\{u_1(x), u_2(x)\} = u_1(x)$ および $\max\{u_1(x), u_2(x)\} = u_1(x)$ より，(1) から (2) が従う．

命題 3.17. 任意の $u \in W^{1,p}(V)$ と $g \in \bar{D}[u] \cap L^p(V)$ に対して，台が有界なリプシッツ関数 f_i と $g_i \in D[f_i] \cap L^p(V)$ の列で，$\|f_i - u\|_{L^p(V)} \to 0$, $\|g_i - g\|_{L^p(V)} \to 0$ を満たすものが存在する．さらに $g_u \in D[u]$ に対しては，$\|g_{f_i} - g_u\|_{L^p(V)} \to 0$ を満たすものが存在する．

証明　定義から，$v_i \in C^{0,1}_{loc}(V)$ と $h_i \in D[v_i]$ で，$L^p_{loc}(V)$ において $v_i \to u$，$L^p(V)$ において，$h_i \to g$ となるものを選ぶ．点 x_o をひとつ固定して，

$$\phi_k(x) = \min\{1, k^{-1}\, d(x, V \setminus B(x_o, 2k))\}$$

とおく．このとき ϕ_k は，$B(x_o, k)$ において $\phi_k = 1$，したがって $\mathrm{Lip}\,\phi = 0$，$x \in V \setminus \overline{B(x_o, 2k)}$ において $\phi_k = 0$，したがって $\mathrm{Lip}\,\phi = 0$，そして $\mathbf{Lip}(\phi) \le 1/k$ を満たす．そこで $v_{k,i} = \phi_k v_i$，$h_{k,i} = \chi_{B(x_o,2k)}(g_i + (1/k)|u_i|)$ とおく．このとき，$h_{k,i} \in D[v_{k,i}]$ となる．
$\lim_{i\to\infty} \|v_i - u\|_{L^p(B(x_o,2k))} = 0$ より，$i(k)$ を十分大きく取ると，$\|v_{k,i(k)} - u\|_{L^p(B(x_o,2k))} < 1/2^k$ とできる．したがって，$f_k = v_{k,i(k)}$, $g_k = h_{k,i(k)}$ とおいて求める関数列が得られる．

ここで定理 3.3 を改めて述べよう．

定理 3.18. 関数列 $\{f_i\} \subset L^p(X)$ が $f \in L^p(X)$ に L^p 収束するとき，

$$\int_X g_f \, d\mu \le \liminf_{i\to\infty} \int_X g_{f_i} \, d\mu$$

が成り立つ．

さらに $W^{1,p}(X)$ の定義と定理 3.11 および命題 1.6 の帰結として，次の定理が導かれる．

定理 3.19. ある正数 κ, τ と $0 < R \le \infty$ が存在して，ダブリング条件

$$\mu(B(x, 2r) \le 2^\kappa \mu(B(x, r)), \quad x \in X,\ 0 < r < R \qquad [\mathrm{D}]_\kappa$$

と局所リプシッツ関数に対する弱 p-ポアンカレ不等式

$$\left(\fint_{B(x,r)} |f - f_{x,r}|^p \, d\mu \right)^{1/p} \le \tau r \left(\fint_{B(x,2r)} (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad [\mathrm{P}]_\tau$$

$$x \in X,\ 0 < r < R,\ f \in C^{0,1}_{loc}(X)$$

を仮定する．このとき，最小擬グラディエントに対する弱 p-ポアンカレ不等式

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u - u_{x,r}|^p \, d\mu \right)^{1/p} \le \tau r \left(\fint_{B(x,2r)} {g_u}^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

$$x \in X,\ 0 < r < R,\ u \in W^{1,p}_{loc}(X)$$

が成りたつ.

さらに $f \in C^{0,1}_{loc}(X)$ に対して,

$$\mathrm{Lip} f(x) \le C g_f(x), \quad a.a.\ x \in X$$

が成り立つ. ただし C は κ と τ のみによって決まる定数である. とくに, ほとんどすべての点 $x \in X$ に対して,

$$g_f(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Lip} f(x) = 0$$

となる.

上の定理の仮定 $[\mathrm{D}]_\kappa$, $[\mathrm{P}]_\tau$ の下に, $\mathrm{Lip} f$ を g_f に代えて第2節での議論を行うことができ, 定理 2.8 が導かれる. とくに, ほとんどいたるところの点 $x \in X$ の $T^*_x X$ において, ノルム $|\cdot|$ が, $g_f(x)$ $(f \in C^{0,1}_{loc}(X) \cap W^{1,p}(X))$ によってひとつ定まる. $\mathrm{Lip} f(x)$ から決まるノルム $|\cdot|'$ も考えられる. 定理 3.19 より, ある定数 $C(\kappa, \tau)$ があって,

$$|v| \le |v|' \le C(\kappa, \tau)\ |v|, \quad v \in T^*_x X,\ \mu - a.e.\ x \in X$$

という意味において, これら二つのノルム $|\cdot|$ と $|\cdot|'$ は一様同値である.

ここで注意 1.1 を思い起こそう. そこに述べた方法でノルム $|\cdot|'$ から $T_* X$ 上に自然に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が導入できる. この内積によってきまるノルム $\sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ も $\dim T^*_x X \le N(\kappa, \tau, p)$ より, $|\cdot|$ あるいは $|\cdot|'$ に一様同値である. このノルムを使って, $W^{1,p}(X)$ のソボレフノルム $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ が次のように定まる.

$$\|f\|_{W^{1,p}(X)} = \left(\int_X |f|^p\ d\mu + \int_X \langle df, df \rangle^{p/2}\ d\mu \right)^{1/p}, \quad f \in C^{0,1}_{loc}(X) \cap W^{1,p}_{loc}(X).$$

このとき, $1 < p < +\infty$ に対して, $\|\cdot\|_{W^{1,p}(X)}$ は一様凸である. このように $W^{1,p}(X)$ 上に $\|\cdot\|_{W^{1,p}(X)}$ と同値な一様凸ノルムが存在することになり, 一様凸なバナッハ空間は回帰的であるので, 次の定理が導かれる.

定理 3.20. 定理 3.19 と同じ仮定の下で, $W^{1,p}(X)$ $(1 < p < +\infty)$ のノルムは一様凸なノルムと同値である. とくに回帰的である.

以下この定理から得られる4つの結果を述べる.

まず定理 3.20 とマツールの定理の帰結として, 次の結果が従う.

系 3.21. 定理 3.19 と同じ仮定のもとに, $W^{1,p}(V)$ の有界な関数列 $\{u_i\}$ に対して, $\{u_i\}$ の適当な有限凸結合 $\hat{u}_i = \sum_{j=i}^n a_{i,j} u_j$ $(\sum_{j=i}^n a_{i,j} = 1,\ 0 \le a_{i,j} \le 1)$ で, $W^{1,p}(X)$ において収束するものが存在する.

台が有界なリプシッツ関数全体を $C^{0,1}_b(V)$ と表す. このとき, 定理 3.20 と命題 3.17 を使って次の定理が得られる.

定理 3.22. 定理 3.19 と同じ仮定のもとに, $C^{0,1}_b(V) \cap W^{1,p}(V)$ は $W^{1,p}(V)$ において (そのノルムに関して) 稠密である.

系 3.23. 定理 3.19 と同じ仮定とさらに X のすべての有界集合は相対コンパクトであるとする．このとき，$C_0^{0,1}(X) \cap W^{1,p}(X)$ は $W^{1,p}(X)$ において (そのノルムに関して) 稠密である．

有界開集合 V に対して，$\mathcal{A}_V = \{u \in W^{1,p}(V) \mid d(\operatorname{supp} u, X \setminus V) > 0\}$ とおき，この閉包を $W_0^{1,p}(V)$ と表す．このとき，次のことが成り立つ．

定理 3.24. 系 3.23 と同じ仮定のもとに，$W_0^{1,p}(V)$ と $C_0^{0,1}(V)$ の閉包は一致する．

次の定理を証明なしで述べて[13]，次の分節に移る．

定理 3.25. 定理 3.19 と同じ条件の下に，$f \in C^{0,1}(X) \cap L^p(X)$ に対して，ほとんどいたるところ

$$g_f = Lip f = \mathrm{Lip} f$$

が成り立つ．

定理 3.25 で述べたように，ダブリング条件と弱 p–ポアンカレ不等式が成り立つときには，$SW^{1,p}(X)$ と $UW^{1,p}(X)$ は一致する．

3.4. p-調和関数とディリクレ問題. 前項と同様に，$1 < p < +\infty$ とし，$W^{1,p}(X) = SW^{1,p}(X)$ または $W^{1,p}(X) = UW^{1,p}(X)$ について議論する．

まず定義から始める．

定義 3.5. X の開集合 U 上の関数 $b : U \to \mathbf{R}$ が p-調和であるとは，任意の有界開集合 $V \subset U$ に対して，$b_{|V} \in W^{1,p}(V)$ かつ任意の $k \in \overset{W^{1,p}}{o}(V)$ に対して，$b_{|V}$ は

$$\int_V {g_b}^p \, d\mu \le \int_V {g_{b+k}}^p \, d\mu$$

を満たすときをいう．

ソボレフ空間 $W^{1,p}(U)$ の部分集合 A に対して, $[A]^{\sim}$ によって，命題 3.4 の条件のいずれか (したがってすべて) を満たす，A の関数列 $\{u_i\}$ の L^p 極限となっている関数 u 全体をあらわす．$W^{1,p}(U)$ のノルム収束は命題 3.4 に述べられた収束より強いので，$[A]^{\sim}$ は $W^{1,p}(U)$ の閉集合であり，また $W^{1,p}(U)$ における A の閉包を $\overline{A}$ と表すと，$\overline{A} \subset [A]^{\sim}$ である．すなわち

$$A \subset \overline{A} \subset [A]^{\sim} = \overline{[A]^{\sim}}$$

さらに $[A]^{\wedge}$ によって，A の関数列 $\{u_i\}$ の L^p 極限 u で，ある $g_i \in \bar{D}[u_i]$ がある $g \in \bar{D}[u]$ に L^p 収束するという条件を満たす関数 u 全体をあらわす．命題 3.4 より $[A]^{\sim} \subset [A]^{\wedge}$ である．

補題 3.26. $X \setminus U \neq \emptyset$ かつ U は有界とする．このとき，次のことが成り立つ．

(1) $[\mathcal{A}_U]^{\sim} = [\mathcal{A}_U]^{\wedge}$

さらに $f \in W^{1,p}(U)$ に対して，次のことが成り立つ．

---

[13] ノート 3 参照

(2) $[f+\mathcal{A}_U]^{\sim}=[f+\mathcal{A}_U]^{\wedge}$
(3) $[f+\mathcal{A}_U]^{\wedge}=f+[\mathcal{A}_U]^{\wedge}$

証明　(1) と (2) を同時に示す．(3) はその定義から明らかであるから証明は省略する．

まず $A=f+\mathcal{A}_U$ または $A=\mathcal{A}_U$ とする．$u\in[A]^{\wedge}$ に対して, $g\in\bar{D}[u]$ と，関数列 $u_i\in A$，$g_i\in\bar{D}[u_i]$ をとって，u_i, g_i はそれぞれ u，g に L^p 収束するとする．また $u\in W^{1,p}(U)$ より関数列 $f_j\in W^{1,p}(U)\cap C^{0,1}_{loc}(U)$ と $h_j\in D[f_j]$ で，$L^p(U)$ において $f_j\to u$ および $h_j\to g_u$ となるものを選んでおく．

次に正数 η に対して, $U_\eta=\{x\in U\mid d(x,\partial U)>\eta\}$ とおき，$0\le\phi_\eta\le 1$，$\phi_\eta(x)=1$ $(x\in U_\eta)$, $\phi_\eta(x)=0$ $(x\in X\setminus U)$ そして $\mathbf{Lip}(\phi_\eta)\le\eta^{-1}$ を満たすリプシッツ関数 ϕ_η を選び,

$$u_{\eta,i}=\phi_\eta f_i+(1-\phi_\eta)u_i=(1-\phi_\eta)(u_i-f_i)+f_i$$

とおく．このとき，$u_{\eta,i}\in A$ であり，$i\to+\infty$ のとき，$u_{\eta,i}$ は u に L^p 収束する．さらに (9) に注意すると,

$$g_{\eta,i}:=\mathrm{Lip}(1-\phi_\eta)|u_i-f_i|+(1-\phi_\eta)(g_{u_i}+h_i)+h_i\in\bar{D}[u_{\eta,i}]$$

が従い, $i\to+\infty$ のとき $g_{\eta,i}$ は $g_\eta:=(1-\phi_\eta)(g+g_u)+g_u\in\bar{D}[u]$ に L^p 収束する．さらに $\eta\to 0$ のとき，g_η は g_u に L^p 収束する．以上から，適当に $i(\eta)$ を選ぶことによって，$u\in\widetilde{A}$ が従う．これで補題の証明を終える．

さて，$A=f+\mathcal{A}_U\subset W^{1,p}(U)$ を考える．ただし U は有界開集合，f は $W^{1,p}(U)\cap L^\infty$ の関数である．このとき，A の列 $\{f+k_i\}$ で，$E_p(f+k_i)\to\inf_{u\in A}E_p(u)$ となるもので，$f+k_i$ が命題 3.4 にのべた位相で $b\in[A]^{\sim}$ に収束するならば，$E_p(b)=\inf_{u\in A}E_p(u)$ となり，かつ b が“境界値 f をもつ p–調和関数に関するディィリクレ問題の (緩やかな位相の意味での) 解”と理解できるであろう．

実際 p–調和関数のディリクレ問題に対して，次の定理が成り立つ．

定理 3.27. $1<p<+\infty$ とする．有界開集合 U 上の関数 $f\in W^{1,p}(U)\cap L^\infty$ に対して，p–調和関数 $b:U\to\mathbf{R}$ で，$b\in f+[\mathcal{A}_U]^{\sim}$，かつ

$$\text{ess inf } f\le\text{ess inf } b\le\text{ess supp } b\le\text{ess supp } f$$

を満たすものが存在する．

証明　$m=\inf_{k\in\mathcal{A}_U}E_p(f+k)$ とおき，$E_p(f+k_i)\to m$ となる $\mathcal{A}_U$ の関数列 $\{k_i\}$ をひとつ選ぶ．$\min\{f+k_i,\text{ess supp } f\}\in f+\mathcal{A}_U$ で $g_{f+k_i}\in D[\min\{f+k_i,\text{ess supp } f\}]$ より

$$g_{\min\{f+k_i,\text{ess supp } f\}}\le g_{f+k_i}\quad \mu-a.e$$

となり，したがって必要ならば $f+k_i$ を $\min\{f+k_i,\text{ess supp } f\}$ に置き換えることによって，ess supp $(f+k_i)\le$ ess supp f と仮定してよろしい．同様に ess inf $(f+k_i)\ge$ ess inf f としてよろしい．

次に $L^p(U)$ は一様凸であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，十分大きい i,j に対して $\|g_{f+k_i}-g_{f+k_j}\|_{L^p(U)}\ge\varepsilon$ なら

ば，$\|(g_{f+k_i}+g_{f+k_j})/2\|_{L^p(U)} \le m(1-\delta) < m$ となり，一方 $(g_{f+k_i}+g_{f+k_j})/2 \in D[f+(k_i+k_j)/2]$ となって，$\{k_i\}$ の取り方に反する．すなわち，$\{g_{f+k_i}\}$ は L^p コーシー列である．その極限を $g \in L^p(U)$ とする．

ここで必要ならば，部分列を取ることによって

$$\|g_{f+k_i}-g\|_{L^p(U)} \le 2^{-i} \tag{10}$$

と仮定する．

さて，$i \le j$ に対して，$f_{i,j} = \max\{f+k_i, \ldots, f+k_j\}$ とおくと，j に関して一様有界な単調非減少関数列 $\{f_{i,j}\}$ は，$\mu(U) < +\infty$ より，ある $f_{i,\infty} \in L^p(U)$ に収束する．同様に単調非増加関数列 $\{f_{i,\infty}\}_i$ は，$i \to \infty$ のときある $b \in L^p(U)$ に収束する．したがって適当に $j(i)$ をとれば，$f_{i,j(i)}$ は b に収束する．一方 $g_{i,j} = \max\{g_{f+k_i}, \ldots, g_{f+k_j}\}$ とおくと，$g_{i,j} \in D[f_{i,j}]$ であり，(10) によって $g_{i,j(i)}$ は g に収束する．以上から $b \in [f+\mathcal{A}_U]^\wedge$ となり，補題 3.26 より $b \in f+[\mathcal{A}_U]^\sim$ である．これで定理の証明が完了した．

p–調和関数の一意性に関して次の定理が成り立つ．

定理 3.28. 有界開集合 U 上の 2 つの p-調和関数 b_1, b_2 に対して，$b_1 - b_2 \in [\mathcal{A}_U]^\sim$ ならば，$g_{b_1-b_2} = 0$ であり，$b_1(x) \ne b_2(x)$ となるほとんどすべての点 $x \in U$ において，$g_{b_1}(x) = g_{b_2}(x) = 0$ である．とくに U に対して，ある定数 C が存在してディリクレ–ポアンカレ不等式

$$\int_U |k|^p \, d\mu \le C \int_U {g_k}^p \, d\mu, \quad k \in [\mathcal{A}_U]^\sim$$

が成立するならば，$b_1 = b_2$ である．

証明　まず $L^p(U)$ の一様凸性から，$tb_1 + (1-t)b_2$ $(0 \le t \le 1)$ もすべて p–調和で，$g_{tb_1+(1-t)b_2}$ がすべて一致することがわかる．とくに $g_{b_1} = g_{b_2}$ である．　そこで $g = g_{b_1} = g_{b_2}$ とおく．さらに $b^+ = \max\{b_1, b_2\}$，$b^- = \min\{b_1, b_2\}$ とおくと，$g = \max\{g_{b_1}, g_{b_2}\} \in \bar{D}[b^+] \cap \bar{D}[b^-]$ であり，とくに

$$\int_U {g_{b^+}}^p \le \int_U g^p \, d\mu = \int_U {g_{b_1}}^p \, d\mu$$

であるが，$b^+ - b_1 \in [\mathcal{A}_U]^\sim$ より，$g_{b^+} = g$，したがって b^+ も p-調和関数である．同様に $g_{b^-} = g$ で b^- も p-調和関数である．

次に定数 $c \in \mathbf{R}$ に対して，$A_c = \{x \in U \mid b^-(x) < c < b^+(x)\}$ とおく．$\mu(A_c) > 0$ として，関数 $b_c \in W^{1,p}(U)$ と $g_c \in L^p(U)$ を次のように定める．

$$b_c(x) = \begin{cases} b^+(x), & b^+(x) \le c \\ c, & x \in A_c \\ b^-(x), & b^-(x) \ge c \end{cases} \qquad g_c(x) = \begin{cases} g(x), & b^+(x) \le c \\ 0, & x \in A_c \\ g(x), & b^-(x) \ge c \end{cases}$$

このとき，$g_c \in \bar{D}[b_c]$ で $b_c - b_1 \in [\mathcal{A}_U]^\sim$ であることが判る．したがって

$$\int_U g_c^p \, d\mu \ge \int_U g^p \, d\mu$$

となる．これは，$g(x)=0$ ($\mu$$-a.e.\, x\in A_c$) を意味する．$\mu(A_c)>0$ を満たす定数 c すべてについてこれが成り立つので，結局 $b^+(x)-b^-(x)>0$ となるほとんどすべての点 $x\in U$ に対して，$g(x)=0$ であることが判る．したがって $g_{b^+-b^-}=0$ となり，これから $g_{b_1-b_2}=0$ を見るのは易しい．さらに $b_1(x)\neq b_2(x)$ となるほとんどすべての点 $x\in U$ に対して，$g_{b_1}(x)=g_{b_2}(x)=0$ である．以上で定理の証明を終える．

次の最大値の原理が成り立つ．

定理 3.29. 有界開集合 U 上の２つの関数 $u_i\in W^{1,p}(U)$ $(i=1,2)$ に対して，b_i は p-調和関数かつ $b_i\in u_i+[\mathcal{A}_U]^\sim$ とする．$u_1\geq u_2$ ならば，$b_1\geq b_2$ となるか，あるいは次のことが成り立つ：$b^+=\max\{b_1,b_2\}$ は p-調和かつ $b^+\in u_1+[\mathcal{A}_U]^\sim$ となり，$b^-=\min\{b_1,b_2\}$ も p-調和かつ $b^-\in u_2+[\mathcal{A}_U]^\sim$ となり，さらに $b_2(x)>b_1(x)$ となるほとんどすべての点 $x\in U$ において，$g_{b_1}(x)=g_{b_2}(x)=0$ である．とくに U において，ある定数 C が存在してディリクレ-ポアンカレ不等式

$$\int_U |k|^p\, d\mu\leq C\int_U {g_k}^p\, d\mu,\quad k\in[\mathcal{A}_U]^\sim$$

が成立するならば，$b_1\geq b_2$ がなりたつ．

証明　必要ならば，u_1 を $u_1+\varepsilon$ (ただし ε は正の数) に代えることによって，$u_1-u_2\geq\varepsilon>0$ と仮定して示せばよい．

$A=\{x\in U\ |b_2(x)-b_1(x)>0\}$ とおき，$\mu(A)>0$ と仮定すると，$g_{b^+}(x)=g_{b_1}(x)$ $(x\in U\setminus A)$, $g_{b^+}(x)=g_{b_2}(x)$ $(x\in A)$ となる．また $b^+-b_1\in[\mathcal{A}_U]^\sim$ より，

$$\int_U {g_{b^+}}^p\, d\mu\geq\int_U {g_{b_1}}^p\, d\mu$$

となり，よって

$$\int_A {g_{b_2}}^p\, d\mu\geq\int_A {g_{b_1}}^p\, d\mu$$

が従う．同様に $b^--b_2\in[\mathcal{A}_U]^\sim$ より，

$$\int_A {g_{b_1}}^p\, d\mu\geq\int_A {g_{b_2}}^p\, d\mu$$

となる．以上から $\int_A {g_{b_1}}^p\, d\mu=\int_A {g_{b_2}}^p\, d\mu$ となり，したがって

$$\int_U {g_{b^+}}^p\, d\mu=\int_U {g_{b_1}}^p\, d\mu,\quad \int_U {g_{b^-}}^p\, d\mu=\int_U {g_{b_2}}^p\, d\mu$$

となる．これから，b^+ と b^- がともに p-調和であることがわかる．したがって定理 3.28 より，ほとんどすべての $x\in A$ において，$g_{b_1}(x)=g_{b_2}(x)=0$ となる．

ノート 3 3.1, 3.2 分節の記述は，Gol'dshtein-Troyanov [26] によっている．ただし命題 3.6 〜 系 3.8 のように，本論説では直接必要としない事柄は証明なしで述べるにとどめている．そのほか，[26] では，容量

(capacity) に関して論じている．また例 1，例 2，例 3 については，[26] に引用されているように，それぞれ [76], [44], [29] を参照．

3.3, 3.4 分節の結果は，おおむね Cheeger [12] による．ただし [12] におけるソボレフ空間の定義は，ここで述べているものとは少し異なる．本論説では，議論と結果をよりわかりやすくする目的で [26] の一般的視点からの定義にしたがって記述している．

定理 3.28 と定理 3.29 はそれぞれ [12] の Theorem 7.14, Theorem 7.15 に対応しているが，少し改良した内容になっている．定理 3.25 の証明については，[12] の section 5 と section 6 を参照されたい．

それから関連した研究の最近の展開については，[58], [59], [69] とその文献を参照されたい．

4. 測度距離空間の収束

この節の目的は，ダブリング条件とリプシッツ関数に関する弱 p–ポアンカレ不等式を満たす測度距離空間の接錘と，これによって表現されるリプシッツ関数の無限小の性質に関するチーガーの結果を解説することである．

4.1. 測度的グロモフ - ハウスドルフ収束．

ここでは測度距離空間からなる列と関数列の収束について説明する．

まず古典的なハウスドルフ距離について復習しよう．$K=(K,d)$ を距離空間とする．K の２つの閉集合 A, B に対して，A の ε-近傍 A_ε が B を含み，B の ε-近傍 B_ε が A を含むような正数 ε が存在するならば，そのような ε の下限を，A と B のハウスドルフ距離という．K がコンパクトならば，これによって K の閉集合全体はコンパクト距離空間になる．また閉集合 A に対して，K の距離 d から得られる距離 (誘導距離) を d_A と記すと，A と B のハウスドルフ距離が ε 以下であれば，A の各点 a に $d(a,\phi(a))\leq\varepsilon$ となる B の点 $\phi(a)$ を対応させ，B の各点 b に $d(b,\psi(b))\leq\varepsilon$ となる A の点 $\psi(b)$ を対応させることによって，写像の組 $\phi:A\to B$, $\psi:B\to A$ が得られる．これらは次の性質を満たす．

$$|d_A(a,a')-d_B(\phi(a),\phi(b'))|\leq 2\varepsilon,\quad a,a'\in A; \tag{11}$$

$$B\subset\phi(A)_{2\varepsilon} \tag{12}$$

$$|d_B(b,b')-d_A(\psi(a),\psi(b'))|\leq 2\varepsilon,\quad b,b'\in B;$$

$$A\subset\psi(B)_{2\varepsilon}$$

$$d_A(a,\psi(\phi(a)))<2\varepsilon,\ a\in A;\quad d_B(b,\phi(\psi(b)))<2\varepsilon,\ b\in B$$

一般に２つの距離空間 (A,d_A) と (B,d_B) の間に，性質 (11), (12) を満たす写像 $\phi:A\to B$ が存在するならば，それを 2ε–ハウスドルフ近似写像とよぶ．このような写像 $\phi:(A,d_A)\to(B,d_B)$ が存在すれば，B から A への 2ε–ハウスドルフ近似写像 $\psi:B\to A$ が存在して，これらの２つの写像は，上に述べたような性質を満たすことを見るのは易しい．2ε–ハウスドルフ近似写像が存在する正数 ε の下限を距離空間 A と B のグロモフ - ハウスドルフ距離とよび，$HD(A,B)$ と記す．コンパクト距離空間の (等長類からなる) 族には，これによって一様位相が

入る．なお，ここで述べたグロモフ - ハウスドルフ距離は，グロモフによって定義された距離とは厳密には異なるが，これらが定める一様位相は同値である．(実際 $HD(A,B) \leq 2(HD(A,C)+HD(C,B))$ となり，HD は三角不等式を満たさない[14].)

ここでグロモフによる基本的な結果[15]を２つ述べよう．

定理 4.1. コンパクト距離空間から成る族 $\mathcal{F}$ が次の性質を満たしているとする：任意の正数 ε に対して，ある正数 $N(\varepsilon)$ によって，任意の $X \in \mathcal{F}$ の ε - 離散集合の個数が $N(\varepsilon)$ によって上から押さえられる．このとき，$\mathcal{F}$ はグロモフ - ハウスドルフ距離に関して全有界である．

なお，距離空間 X の離散部分集合 S が，正数 ε に対して，$d(a,b) > \varepsilon$ $(a, b \in S,\ a \neq b)$ を満たすとき，S は ε - 離散であるという．

定理 4.2. 距離空間の列 $\{X_n\}$ が距離空間 X にグロモフ - ハウスドルフ収束するとき，各 X_n が弧長空間ならば，X も弧長空間である．

さて，有界な距離空間の間にはグロモフ - ハウスドルフ距離が定まり，それに関する収束を定義することができる． しかし有界ではない場合には，この点に関して明らかではない．そこで次に点付距離空間とその有界集合に制限したグロモフ - ハウスドルフ距離を用いて，点付距離空間の列の収束を定義しよう．

点付距離空間の列 $X_n = (X_n, o_n, d_n)$ と点付距離空間 $X = (X, o, d)$ を考える．ある発散する数列 R_n と 0 に収束する正数列 ε_n，そして $d(o, f_n(o_n)) < \varepsilon_n$ を満たす ε_n-ハウスドルフ近似写像 $f_n : B(o_n, R_n) \to B(o, R_n + \varepsilon_n)$ が存在するとき，$X_n = (X_n, o_n, d_n)$ は $X = (X, o, d)$ に (広義) グロモフ - ハウスドルフ収束するという．さらにこの近似写像を通して，関数列や部分集合の列の収束が次のように定義できる：関数列 $\{u_n\}$ が有界集合 $U \subset X$ 上の関数 u に一様に収束するとは，$n \to \infty$ のとき，$\sup_{x \in f_n^{-1}(U)} |u_n(x) - u(f_n(x))|$ が 0 に収束することを意味し，部分集合の列 $\{U_n \subset X_n\}$ が部分集合 U に収束するとは，f_n が U_n と U の間の ε_n - ハウスドルフ近似写像を与えることである．

なお近似写像はボレル可測と考えてよい．さらに以下考える測度距離空間は，局所コンパクトとし，その測度はラドン測度と仮定する．このとき測度も込めた収束を次のように定義する．

点付測度距離空間の列 $X_n = (X_n, o_n, d_n, \mu_n)$ が点付測度距離空間 $X = (X, o, d, \mu)$ に ε_n–ハウスドルフ近似写像 $f_n : B(o_n, R_n) \to B(o, R_n + \varepsilon_n)$ によって (広義) グロモフ - ハウスドルフ収束し，かつ像測度 $\phi_{n*}\mu_n$ が μ に漠収束するとき，点付測度距離空間 $X_n = (X_n, o_n, d_n, \mu)$ は $X = (X, o, d, \mu)$ に測度付 (広義) グロモフ - ハウスドルフ収束するという．

まず基本的な次の補題を用意しておく．

補題 4.3. ある正数 κ_n, R_n に対して，ダブリング条件 $[D]_{\kappa_n}$ を満たす点付測度距離空間 $X_n = (X_n, o_n, d_n, \mu_n)$ が，$X = (X, o, d, \mu)$ に測度付グロモフ - ハウスドルフ収束するとき，X の相対コンパクト開集合 U

[14] ノート 4 参照

[15] ノート 4 参照

上のリプシッツ関数 f に対して，U に収束する X_n の相対コンパクト開集合 U_n 上の リプシッツ関数からなる列 $\{f_n\}$ で次のようなものが存在する: f_n は f に一様収束し，さらに

$$\int_{U_n} (\mathrm{Lip} f_n)^p \, d\mu_n \to \int_U (\mathrm{Lip} f)^p \, d\mu.$$

が成り立つ．

注意 4.1. この補題のような状況において，リプシッツ関数列 $\{\xi_n : U_n \to \mathbf{R}$ がリプシッツ関数 $\xi : U \to \mathbf{R}$ に一様収束するとしても，多くの場合，ディリクレ p–エネルギーの下半連続性，

$$\int_U (\mathrm{Lip}\, \xi)^p \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_{U_n} (\mathrm{Lip}\, \xi_n)^p \, d\mu_n$$

を期待することはできない．これについては第 6 節を参照．

さて，補題 4.3 から次の命題が従う．

命題 4.4. 点付測度距離空間 $X_n = (X_n, o_n, d_n, \mu_n)$ が $X = (X, o, d, \mu)$ に測度付グロモフ - ハウスドルフ収束しているとする．ダブリング条件 $[D]_\kappa$ が X_n に対して (n に依らずに) 一様に成りたつならば，X に対しても成り立つ．さらに一様に (局所リプシッツ関数に関する) 弱 p–ポアンカレ不等式 $[P]_\tau$ が成りたつならば，X に対しても成り立つ．

また，定理 4.1 の帰結として次の命題が成り立つ．

命題 4.5. 点付測度弧長空間の列 $\{X_n = (X_n, o_n, d_n, \mu_n)\}$ が，次の性質を満たしているとする．

(1) 任意の r に対して，n を十分大きく取ると，$B(o_n, r)$ は相対コンパクトである．

(2) ある正値関数 $v(t)$ $(t > 0)$ が存在して，任意の r と (十分大きな)n に対して，

$$\mu_n(B(o_n, r)) \le v(r)$$

(3) 任意の r と ε に対して，ある正数 b が存在して，n が十分大きければ，

$$\mu_n(B(x, \varepsilon)) \ge b, \quad x \in B(o_n, r)$$

このとき，$\{X_n\}$ の部分列で，ある点付測度測地空間に測度付グロモフ - ハウスドルフ収束するものが存在する．

証明　まず十分大きな n に対して，$B(o_n, r)$ において，ε - 離散集合を考え，(2) と (3) を適用して，その個数が n によらずに一様に上から押さえられていることを見れば，定理 4.1 を適用できる (1.1 分節, 2.1 分節参照)．つぎに発散列 $\{r_i\}$ を取り，各 r_i に上の考察を適用し，適当な部分列を取ることによって，極限空間の存在がわかる．また必要ならば部分列を取って，与えられたラドン測度の収束も仮定できる (1.1 分節参照)．

次節に移るまえに，補題をひとつ述べる．

補題 4.6. 測度測地空間 $X=(X,d,\mu)$ の開集合 U において，ダブリング $[D]_\kappa$ と弱 p-ポアンカレ不等式 $[P]_\tau$ が成り立つとする．このとき，任意のリプシッツ関数 $f:U\to\mathbf{R}$ に対して，次の性質を満たす部分集合 W が存在する：

(1) $\mu(U\setminus W)=0$

(2) 任意の点 $w\in W$ に対して，w は $\mathrm{Lip}f$ 及び $Lipf$ のルベーグ点で，$\mathrm{Lip}f(w)=Lipf(w)$ が成り立ち，さらに，任意の正数 ξ と χ に対して，ある正数 $r(w,\xi,\chi)$ があって，次のことが成り立つ．

(i) 任意の $t\in(0,r(w,\xi,\chi))$ と $x,y\in B(w,r(w,\xi,\chi))$ に対して，$d(x,y)>\xi t$ ならば

$$|f(x)-f(y)|\le((1+\chi)\mathrm{Lip}f(w)+\chi)d(x,y)$$

が成り立つ．

(ii) 任意の $t\in(0,r(w,\xi,\chi))$ と $x\in B(w,r(w,\xi,\chi))$ に対して，ある $y_x\in B(x,2t)$ があって，$d(x,y_x)>\xi\, t$ かつ

$$|f(x)-f(y_x)|\ge((1-\chi)\mathrm{Lip}f(w)-\chi)d(x,y_x)$$

となる．

4.2. 接錘とリプシッツ関数の無限小広義線形性．測度距離空間 $X=(X,d,\mu)$ を考える．X は局所コンパクトとし，測度 μ はラドン測度である．つぎに一つの点 $o\in X$ を任意に固定する．このとき，各正数 t に対して，

$$d_t=td,\quad \bar\mu_t=\frac{1}{\mu(B(o,1/t))}\,\mu$$

によって，点付測度距離空間 $tX=(X,o,d_t,\bar\mu_t)$ を定める．以下，d_t に関する半径 r の距離球体を $B^{(t)}(x,r)(=B(x,r/t))$ と表す．ここで $\bar\mu(B^{(t)}(o,1))=1$ と正規化されていることに注意する．

定義 4.1. 点 $o\in X$ に対して，無限に発散する数列 $\{t_n\}$ があって，$\{X_n=t_nX=(X,o,d_{t_n},\bar\mu_{t_n})\}$ が測度付グロモフ - ハウスドルフ収束するとき，その極限を点 o における接錘とよび，$X_o=(X_o,o',d_o,\bar\mu_o)$ と記す．

以下，十分小さい r に対して，$B(o,r)$ はダブリング条件 $[D]_\kappa$ と弱 p-ポアンカレ不等式 $[P]_\tau$ を満たしているとする．このとき，命題 4.5 を適用して，任意の $\{t_n\mid t_n\to\infty\}$ に対して，$\{X_n=t_nX\}$ は収束する部分列を含む．ここでは $\{X_n\}$ 自身が $X_o=(X_o,o',d_o,\bar\mu_o)$ に測度付グロモフ - ハウスドルフ収束しているとする．X_o は非コンパクト局所コンパクト測地空間で，命題 4.4 から，距離球体の大きさによらずに，すなわち $R=+\infty$ として条件 $[D]_\kappa$ と条件 $[P]_\tau$ を満たしていることが判る．

次にリプシッツ関数 f を考え，無限小の意味で f のある線形性を表す結果を証明する．点 o の近傍で定義されたリプシッツ関数でよい．正数 t に対して，

$$f_{t,o}(x)=\frac{f(x)-f(o)}{t}$$

とおく．$\mathbf{Lip}_{d_t}(f_{t,o}) = \mathbf{Lip}_d(f)$ に注意すると，X_n 上の リプシッツ関数 $f_{t_n,o}$ からなる列は，X_o 上のリプシッツ関数に任意のコンパクト集合上で一様収束する部分列を含む．以下簡単のため $\{f_{t_n,o}\}$ 自身収束するとして，その極限を f_o と記す．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 4.7. リプシッツ関数 f に対して，f は点 o で漸近的に広義線形とし，さらに点 o に対して，補題 4.6 の性質 (1) と (2) が満たされているとする．このとき次のことが成り立つ．

(1) f_o が定数でなければ，$f_o(X_o) = \mathbf{R}$ である．

(2) $\mathrm{Lip}_{d_o} f_o$ は定数で，$\mathrm{Lip}_{d_o} f_o = \mathbf{Lip}_{d_o}(f_o) = \mathrm{Lip} f(o)$ である．

(3) f_o は p-調和である，すなわち

$$\begin{aligned} ⨍_{B(o',r)} |\mathrm{Lip}_{d_o} f_o|^p \, d\bar{\mu}_o \ &\leq \ ⨍_{B(o',r)} |\mathrm{Lip}_{d_o}(f_o + k)|^p \, d\bar{\mu}_o, \\ & \qquad k \in C_0^{0,1}(B(o',r)) \end{aligned}$$

が成り立つ．

証明　後の定理 4.10 において，(1) は (2) と (3) から導かれることを示すので，ここでは証明しない．そこでまず (2) を証明する．

正数 $r > 0$ を任意に固定して，$\psi_n : B(o',r) \to B^{(t_n)}(o,r)$ を ε_n - ハウスドルフ近似写像とする．$x \in B(o',r)$ に対して，簡単のため $x_n = \psi_n(x)$ と表す．先に述べたように $\sup_{x \in B(o',r)} |f_{t_n,o}(x_n) - f_o(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$ を仮定している．

さて，$y \in B(o',r)$, $B(y,2s) \subset B(o',r)$, $d_o(y,z) < s$ を満たす s,y,z に対して，十分小さい $\xi > 0$ をとり，$0 < \xi s < d_o(y,z)$, $\xi s < d_n(y_n,z_n) < s$ としてよい．さらに十分小さい $\chi > 0$ を任意に与えておく．このとき，補題 4.6 (2) (i) より，

$$\begin{aligned} |f_{t_n,o}(y_n) - f_{t_n,o}(z_n)| \ &= \ \frac{1}{t_n}|f(y_n) - f(z_n)| \\ &\leq \ ((1+\chi)\mathrm{Lip} f(o) + \chi) d_n(y_n, z_n) \end{aligned}$$

となり，したがって，$n \to \infty$ として，

$$|f_o(y) - f_o(z)| \leq ((1+\chi)\mathrm{Lip} f(o) + \chi) d_o(y,z) \tag{13}$$

を得る．次に補題 4.6 (2) (ii) により，各 y_n に対して，ある $w_n \in B(y_n, s)$ で，$d_n(y_n, w_n) > \xi s$ かつ

$$|f_{t_n,o}(y_n) - f_{t_n,o}(w_n)| \geq ((1-\chi)\mathrm{Lip} f(o) - \chi) d_n(y_n, w_n)$$

を満たすものを取る．ここで，必要ならば部分列を取り，ある点 $w \in B(y,s)$ に w_n が収束しているとしてよろしい．このとき，$n \to \infty$ として，

$$d_o(y,w) \geq \xi s, \quad |f_o(y) - f_o(w)| \geq ((1-\chi)\mathrm{Lip} f(o) - \chi) d_o(y,w) \tag{14}$$

となる．(13) より，$\xi, \chi \to 0$ として，

$$|f_o(y) - f_o(z)| \leq \mathrm{Lip} f(o) d_o(y,z)$$

従って

$$\mathrm{Lip} f_o(y) \le \mathrm{Lip} f(o), \quad y \in B(o', r)$$

が得られる．一方 (14) において，$\chi \to 0$ として，ある w で，

$$\xi s \le d(y, w) \le s, \quad |f_o(y) - f_o(w)| \ge \mathrm{Lip} f(o) d_o(y, w)$$

となる．以上から

$$\mathrm{Lip}_{d_o} f_o \equiv \mathbf{Lip}_{d_o}(f_o) = \mathrm{Lip} f(o)$$

が示された．

次に f_o が p–調和であることを示す．すなわち任意の $k \in C_0^{0,1}(B(o', r))$ に対して，

$$\fint_{B(o',r)} (\mathrm{Lip} f_o)^p \, d\bar{\mu}_o \le \fint_{B(o',r)} (\mathrm{Lip}(f_o + k))^p \, d\bar{\mu}_o$$

を示す．まず左辺は点 o が $(\mathrm{Lip} f)^p$ のルベーグ点であることから，

$$\begin{aligned} \fint_{B(o',r)} (\mathrm{Lip} f_o)^p \, d\bar{\mu}_o &= (\mathrm{Lip} f)^p(o) \\ &= \lim_{t_n \to 0} \fint_{B^{(t_n)}(o,r)} (\mathrm{Lip} f)^p \, d\bar{\mu}_n \\ &= \lim_{t_n \to 0} \fint_{B^{(t_n)}(o,r)} (\mathrm{Lip}_{d_n} f_{t_n,o})^p \, d\bar{\mu}_n \end{aligned}$$

となり，したがって任意の $k \in C_0^{0,1}(B(o', r))$ に対して，

$$\lim_{t_n \to 0} \fint_{B^{(t_n)}(o,r)} (\mathrm{Lip}_{d_n} f_{t_n,o})^p \, d\bar{\mu}_n \le \fint_{B(o,r)} (\mathrm{Lip}_{d_o}(f_o + k))^p \, d\bar{\mu}_o$$

を示したい．そこで，$F_o = f_o + k$ とおいて，補題 4.3 を適用すると，F_o に一様収束するリプシッツ関数 $F_n : B^{(t_n)}(o, r) \to \mathbf{R}$ の列で，

$$\int_{B^{(t_n)}(o,r)} (\mathrm{Lip}_{d_n} F_n)^p \, d\bar{\mu}_n \longrightarrow \int_{B(o',r)} (\mathrm{Lip}_{d_o} F_o)^p \, d\bar{\mu}_o$$

を満たすものが取れる．ある正数 δ があって，$B(o', r) \setminus B(o', r - \delta)$ 上 $k = 0$，すなわち $F_o = f_o$ と仮定してよろしい．したがって $\delta_n \to \delta$ となる正数列 $\{\delta_n\}$ をとって，$\varepsilon_n^2 = \sup_{B^{(t_n)}(o,r) \setminus B^{(t_n)}(o,r-\delta_n)} |F_n - f_{t_n,o}| \to 0$ としてよい．そこで，

$$\chi_n(y) = \begin{cases} 1, & y \in B^{(t_n)}(o, r - \delta_n) \\ \frac{1}{\varepsilon_i} d_n(*, \partial B^{(t_n)}(o, r)), & y \in B^{(t_n)}(o, r) \setminus B^{(t_n)}(o, r - \delta_n) \end{cases}$$

さらに

$$\widetilde{F}_n = \chi_n(F_n - f_{t_n,o}) + f_{t_n,o}$$

と定めると，$F_n - \widetilde{F}_n = (1 - \chi_n)(F_n - f_{t_n,o})$ より，

$$\mathrm{Lip}_{d_n}(F_n - \widetilde{F_n}) \le \mathrm{Lip}_{d_n} \chi_n \cdot |F_n - f_{t_n,o}| + |1 - \chi_n| \mathrm{Lip}_{d_n}(F_n - f_{t_n,o})$$

となり，よって $\mathrm{Lip}_{d_n}\chi\cdot\ |F_n - f_{t_n,o}| \le \varepsilon_n$ かつ $\mathrm{Lip}_{d_n}(F_n - f_{t_n,o}) \le L$ (L はある定数) から，

$$\lim_{t_n\to 0} \fint_{B^{(t_n)}(o,r)} (\mathrm{Lip}_{d_n}(F_n - \widetilde{F}_n))^p \, d\bar{\mu}_n = 0$$

を得る．一方 f は点 o で漸近的に広義線形より，$\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$ である適当な正数列があって，

$$\fint_{B^{(t_n)}(o,r)} (\mathrm{Lip}_{t_n} f_{t_n,o})^p \, d\bar{\mu}_n \le s_n + \fint_{B^{(t_n)}(o,r)} (\mathrm{Lip}_{d_n}\widetilde{F}_n)^p \, d\bar{\mu}_n$$

を満たす．以上より，

$$\lim_{t_n\to 0} \fint_{B^{(t_n)}(o,r)} (\mathrm{Lip}_{d_n} f_{t_n,o})^p \, d\bar{\mu}_n \le \fint_{B(o',r)} (\mathrm{Lip}_{d_o} F_o)^p \, d\bar{\mu}_o$$

となる．以上で定理 4.7 の証明を終了する．

注意 4.2. 測度距離空間 $X = (X, o, d, \mu)$ に対して，0 に収束する数列 $\{s_n\}$ が存在して，s_nX が測度付グロモフ - ハウスドルフ収束するとき，その極限を無限遠点における接錘という．それを $X_\infty = (X_\infty, o'', d_\infty, \mu_\infty)$ とすれば，X が距離球体の大きさによらずに条件 $[\mathrm{D}]_\kappa$ を満たすとき，X_∞ も同じ条件 $[D]_\kappa$ を満たし，さらに X が $[P]_\tau$ を満たせば，X_∞ も同様である．

X がすべての距離球体に対して条件 $[\mathrm{D}]_\kappa$ を満たすとき，命題 4.1 が適用できるので，無限遠点における接錘は存在する．しかし接錘あるいは無限遠点における接錘の存在に関して，一意性が成り立つとは限らない．また“錘”と呼んでいるが，実際文字通りの意味の“錘”の構造に成っているということではない．

$R = +\infty$ として条件 $[\mathrm{D}]_\kappa$ と $[P]_\tau$ を満たす重要な例として，非負リッチ曲率の完備非コンパクトリーマン多様体やコンパクトリーマン多様体のアーベル被覆がある[16]．

4.3. 広義線形関数．測度測地空間 $X = (X, d, \mu)$ を考察する．まず定義から始める．

定義 4.2. X の開集合 U 上のリプシッツ関数 $\ell : U \to \mathbf{R}$ が次の条件を満たすとき，広義線形であるという．

(1) $\ell(X) \equiv 0$ 又は $\ell(X) = \mathbf{R}$ である．

(2) ℓ は p-調和である．

(3) $\mathrm{Lip}\,\ell$ は定数 c である．

注意 4.3. (1) 広義線形関数の線形結合が広義線形関数とは限らない．

(2) 条件 $[D]_\kappa$ と $[P]_\tau$ の下では，広義線形関数からなるベクトル空間は，(存在するとしても) その次元は κ と τ および p のみで決まるある定数を超えることはない (定理 2.5 参照)．

---

[16] ノート 4 参照

さて，閉部分集合 $A \subset X$ 上のリプシッツ関数 $f : A \to \mathbf{R}$ に対して，X 上の リプシッツ関数 f^* および f_* を次のように定義する[17].

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \inf_{a\in A}\{f(a) + \mathbf{Lip} f \cdot d(a,x)\} \\ f_*(x) &= \sup_{a\in A}\{f(a) - \mathbf{Lip} f \cdot d(a,x)\} \end{aligned}$$

このとき，$f^*{}_{|A} = f$, $\mathbf{Lip} f^* = \mathbf{Lip} f$, $f_{*|A} = f$, $\mathbf{Lip} f_* = \mathbf{Lip} f$ がなりたつ．また $\widetilde{f}_{|A} = f$，$\mathbf{Lip}\widetilde{f} = \mathbf{Lip} f$ を満たす リプシッツ関数 $\widetilde{f}$ に対して，

$$f_* \le \widetilde{f} \le f^*$$

となる．

さらに考察を続けよう．$x \in X$ に対して，ある $x^* \in A$ があって，

$$f^*(x) = f(x^*) + \mathbf{Lip} f \cdot d(x, x^*)$$

とする．このとき，x と x^* を結ぶ最短線 $\gamma^* : [0, d(x, x^*)] \to X$ をひとつ選ぶと，$|f^*(\gamma^*(s)) - f^*(x)| \le (\mathbf{Lip} f)\ s$ より

$$f^*(\gamma^*(s)) - f^*(x) \ge -(\mathbf{Lip} f)\ s$$

となる．一方

$$\begin{aligned} f^*(\gamma^*(s)) &= \inf_{a\in A}\{f(a) + \mathbf{Lip}(f) \cdot d(a, \gamma^*(s))\} \\ &\le f(x^*) + \mathbf{Lip}(f) \cdot d(x^*, \gamma^*(s)) \\ &= f(x^*) + \mathbf{Lip}(f) \cdot (d(x^*, x) - s) \\ &= f^*(x) - \mathbf{Lip}(f)\ \cdot s \end{aligned}$$

となって，したがって

$$f^*(\gamma^*(s)) - f^*(x) \le -\mathbf{Lip}(f) \cdot s$$

を得る．以上から

$$f^*(\gamma^*(s)) = f^*(x) - \mathbf{Lip}(f) \cdot s, \quad 0 \le s \le d(x, x^*)$$

が従う． 同様に $x \in X$ に対して，ある $x_* \in A$ があって，

$$f_*(x) = f(x_*) - \mathbf{Lip}(f) \cdot d(x, x_*)$$

とする．このとき， x と x_* を結ぶ最短線 $\gamma_* : [0, d(x, x_*)] \to X$ をひとつ選ぶと，

$$f_*(\gamma_*(t)) = f_*(x) + \mathbf{Lip}(f) \cdot t, \quad 0 \le t \le \rho(x, x_*)$$

が導かれる．特に $\mathrm{Lip} f^*{}_{|X\setminus A} = \mathbf{Lip} f$，および $\mathrm{Lip} f_{*|X\setminus A} = \mathbf{Lip} f$ である．

定理 4.8. 有界開集合 U 上のリプシッツ関数 ℓ が定義 4.2 の (2), (3) を満たしているとする．$A = \partial U$ とおいて，ℓ^*，ℓ_* を定義すると，U において $\ell = \ell^* = \ell_*$ が成り立つ．

---

[17] ノート 4 参照

証明　$\mathrm{Lip}\,\ell^* = \mathrm{Lip}\,\ell_* \equiv \mathbf{Lip}(\ell_{|A}) = \mathbf{Lip}(\ell) = \mathrm{Lip}\,\ell$ により，ℓ, ℓ^*, ℓ_* すべて p–調和であり，境界上で一致しているので，最大値の原理 (定理 3.29) から U において一致していなければならない．

以上の考察から，次の定理が従う．

定理 4.9. $X \setminus B(o,s) \neq \emptyset$ とする．リプシッツ関数 $\ell : B(o,s) \to \mathbf{R}$ が定義 4.2 の (2), (3) を満たしているとする．$A = \partial B(o,s)$ とおいて，ℓ^*, ℓ_* を定義すると，$\ell = \ell^* = \ell_*$ となり，任意の $x \in B(o,s)$ に対して，x^*，$x_* \in \partial B(o,s)$ があって，

$$\begin{aligned} \ell(x^*) &= \ell(x) - \mathbf{Lip}\,\ell \cdot d(x, x^*) \\ \ell(x_*) &= \ell(x) + \mathbf{Lip}\,\ell \cdot d(x, x_*) \end{aligned}$$

を満たす．さらに $\gamma(\ell(x^*) - \ell(x)) = x^*$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(\ell(x_*) - \ell(x)) = x_*$ を満たす最短線 $\gamma : [\ell(x^*) - \ell(x), \ell(x_*) - \ell(x)] \to \overline{B(o,s)}$ があって，

$$\ell(\gamma(s)) = \ell(x) + (\mathbf{Lip}\,\ell)\, s$$

を満たす．

リプシッツ関数 f に対して，$f(c(t))' = (\mathrm{Lip} f)^2(c(t))$ を満たしているリプシッツ曲線 $c : (a,b) \to X$ を $\mathrm{Lip} f$ に対する積分曲線ということにする．

定理 4.10. X は非コンパクトとする．定義 4.2 の (2), (3) を満たすリプシッツ関数 $\ell : X \to \mathbf{R}$ は，定数でなければ $\ell(X) = \mathbf{R}$ を満たし，ℓ は 広義線形関数である．さらに任意の $x \in X$ に対して，$\gamma(0) = x$，および $d(\gamma(t), \gamma(s)) = \mathbf{Lip}\,\ell \cdot |t - s|$ $(-\infty < s, t < +\infty)$ を満たす，$\mathrm{Lip}(\ell)$ に対する積分曲線 $\gamma : \mathbf{R} \to X$ が存在する．

証明 $\mathbf{Lip}(\ell) = 1$ として示せばよい．まず点 o を固定し，定理 4.9 を各 $B(o,s)$ に適用する．このとき，定理 4.9 に述べられた最短線 γ_s に対して，適当に発散列 $\{s_j\}$ をとると，γ_{s_j} はリプシッツ曲線 γ に収束する．各 s_j に対して，

$$\ell(\gamma_{s_j}(t)) = \ell(x) + t, \quad -d(x^*_{s_j}, x) \le t \le d(x, x_{s_j,*})$$

より，

$$\ell(\gamma(t)) = \ell(x) + t, \quad -\infty < t < \infty$$

がなりたつ．これが求めるものである．

さて，ビューズマン関数と広義線形関数の関係を述べよう．
$d(\gamma(s), \gamma(0)) = s$ $(s > 0)$ を満たす曲線–レイ (ray) という–$\gamma : [0, +\infty) \to X$ と正数 s に対して，

$$B_{\gamma,s}(x) = d(x, \gamma(s)) - s$$

とおいて，X 上のリプシッツ関数 $B_{\gamma,s}$ を定義する．このとき三角不等式から

$$-d(x, \gamma(0)) \le B_{\gamma,s}(x) \le d(x, \gamma(0)),$$

さらに,

$$s_1 \leq s_2 \Longrightarrow B_{\gamma,s_2}(x) \leq B_{\gamma,s_1}(x)$$

が従う．そこで

$$B_\gamma(x) = \lim_{s\to\infty} B_{\gamma,s}(x)$$

によって リプシッツ関数 $B_\gamma : X \to \mathbf{R}$ を定め，これをレイ γ が定めるビューズマン関数という．γ が必ずしも弧長パラメーターで表示されていないときは，弧長表示しなおしてビューズマン関数を定めることにする．また $d(\gamma(t),\gamma(s)) = \mathbf{Lip}(\ell)\cdot|t-s|$ $(-\infty < s,t < +\infty)$ を満たす $\gamma : \mathbf{R} \to X$ に対しては，$\underline{\gamma}(t) = \gamma_{|[0,+\infty)}$, $-\underline{\gamma}(s) = \gamma(-s)$ とおいて，2つのビューズマン関数 $B_{\underline{\gamma}}$, $B_{-\underline{\gamma}}$ が定まる．

定理 4.11. 定理 4.10 と同じ仮定の下,

$$\ell(x) - \mathbf{Lip}(\ell)\cdot\ B_{\underline{\gamma}} \leq \ell \leq \ell(x) + \mathbf{Lip}(\ell)\cdot B_{-\underline{\gamma}}$$

が成り立つ．特にユークリッド空間 $X = \mathbf{R}^n$ の場合,

$$\ell(x) - \mathbf{Lip}(\ell)\cdot B_{\underline{\gamma}} = \ell = \ell(x) + \mathbf{Lip}(\ell)\cdot B_{-\underline{\gamma}}$$

が成り立つ．

証明　$\mathbf{Lip}(\ell) = 1$ として示せばよい．まず

$$\begin{aligned}\ell(x)+t &= \ell(\underline{\gamma}(t)) = \ell^*(\underline{\gamma}(t)) = \inf_{w\in B(\underline{\gamma}(t),s)}(\ell(w)+d(w,\underline{\gamma}(t)))\\ &\leq \ell(y)+d(\underline{\gamma}(t),y)\end{aligned}$$

より,

$$\ell(x) - \ell(y) \leq d(\underline{\gamma}(t),y) - t$$

を得る．そこで $t\to\infty$ として,

$$\ell(x) - \ell(x) \leq B_{\underline{\gamma}}(x)$$

となる．同様に

$$\begin{aligned}\ell(x)-t &= \ell(-\underline{\gamma}(t)) = \ell_*(-\underline{\gamma}(t)) = \sup_{w\in B(-\underline{\gamma}(t),s)}(\ell(w)-d(w,-\underline{\gamma}(t)))\\ &\geq \ell(y)-d(y,-\underline{\gamma}(t))\end{aligned}$$

となり，したがって

$$\ell(x) - t \geq \ell(y) - d(y,-\underline{\gamma}(t))$$

を得る．そこで $t\to\infty$ として,

$$B_{-\underline{\gamma}}(x) \geq \ell(y) - \ell(x)$$

となる．以上より,

$$\ell(x) - B_{\underline{\gamma}}(y) \leq \ell(y) \leq \ell(x) + B_{-\underline{\gamma}}(y)$$

が示された．

一般に三角不等式より

$$B_{\underline{\gamma}} + B_{-\underline{\gamma}} \geq 0$$

が成り立つが,

$$B_{\underline{\gamma}} + B_{-\underline{\gamma}} \equiv 0 \tag{15}$$

ならば,

$$\ell(x) - B_{\underline{\gamma}} = \ell = \ell(x) + B_{-\underline{\gamma}}$$

となる.

以上で定理の証明を終える.

平面上の1点 o からでる3本の半直線を考えればわかるように, 恒等式 (15) は一般には成立しないので注意する. ただし γ 上では等号が成り立つ.

完備リーマン多様体 M の場合, リッチ曲率がいたるところ非負であるならば, ビューズマン関数は優調和関数と成ることが知られており, したがって最大値の原理から, 恒等式 (15) が成り立ち, さらに $M = \gamma(\mathbf{R}) \times M'$ とリーマン直積に分解する. これがチーガー - グロモルの分裂定理である.

さて, 条件 $[D]_\kappa$, $[P]_\tau$ を満たす, 局所コンパクト測度距離空間 X の接錘と余接束の関係について少し述べて, 4.3 を終える. $T_oX = (T_o^*X)^*$ とおき, X の点 o での接空間とよぶ. ほとんどすべての点で接空間が定まる. 一方 X_o を接錘とするとき, (縮小) 写像 $e : X_o \to T_oX$ が, $< e(\xi), f >= f_o(\xi)$ によって自然に定まる. 2.3 における記号を使うと, 次のことが成り立つ: $U(\alpha)$ に対して, $V(\alpha)$ が存在して, $\mu(U(\alpha) \setminus V(\alpha)) = 0$, かつすべての $o \in V(\alpha)$, すべての接錘 X_o および距離球体 $B(w,r) \subset X_o$ に対して,

$$\mathcal{H}^{k(\alpha)}(B(w,r)) \geq c(k(\alpha))\mathrm{Vol}(\mathbf{B}(r))$$

となる. ただし $\mathbf{B}(r)$ はユークリッド空間 $\mathbf{R}^{k(\alpha)}$ の半径 r の球体を表す. さらに $e : X_o \to T_oX$ は全射であり, $\mathcal{H} - \dim X_o \geq k(\alpha)$ である.

たとえば, サブリーマン計量の場合には, 接錘はカルノー群と呼ばれるある冪零リー群になり, ハウスドルフ次元は多様体の次元を超える[18].

4.4. 補助的結果について. 補題 4.3 と補題 4.6 の完全な証明は与えず, ここではその証明のための補助的結果を順次述べることによって証明に代える[19].

以下, ダブリング条件 $[D]_\kappa$ を満たす測度弧長空間 $X = (X, d, \mu)$ を考える. $1 \leq p < +\infty$ を固定する.

補題 4.12. 与えられたリプシッツ関数 $f : B(o,r) \to \mathbf{R}$ に対して, ほとんどいたるところの点 w において, $\mathrm{Lip} f(w) = Lip f(w)$ と仮定する. このとき, 任意の $0 < \eta, \psi, \xi, \chi < 1$ に対して, 次の性質を満たす正数 r_f と部分集合 $Z_f \subset B(o,r)$ が存在する.

(1) $\mu(Z_f) \geq (1-\eta)\mu(B(o,r))$

---

[18] ノート 4 参照

[19] ノート 4 参照

(2) 任意の $w \in Z_f$ と $0 < s \leq r_f$ および $x, y \in B(w, s)$ に対して，$d(x, y) \geq \xi s$ ならば

$$|f(x) - f(y)| < ((1+\chi)\mathrm{Lip}f(w) + \chi)d(x, y)$$

が成り立つ．さらに任意の $x \in B(w, s)$ に対して，ある $y_x \in B(w, 2s)$ で

$$d(x, y_x) \geq \xi s, \ |f(x) - f(y_x)| > ((1-\chi)\mathrm{Lip}f(w) - \chi)d(x, y_x)$$

を満たすものが存在する．

(3) 任意の $w \in Z_f$ と $0 < s \leq r_f$ に対して，

$$\fint_{B(w,3s)} |\mathrm{Lip}f(x) - \mathrm{Lip}f(w)|^p \ d\mu(x) \leq \psi^p$$

が成り立つ．

補題 4.13. 与えられたリプシッツ関数 $f : B(o, r) \to \mathbf{R}$ と任意の $0 < \eta, \psi, \xi, \chi < 1$ に対して，互いに交わることのない有限個の距離球体 $\{B_j = B(z_j, r_j) \mid z_j \in B(o, r), j = 1, 2, \ldots, N\}$ で，次の性質を満たすものが存在する．

(4) $d(B_j, B_k) \geq (r_j + r_k)/2 \ (j \neq k)$

(5) $\mu(B(o, r) \setminus \cup_{j=1}^N B_j) < c(\kappa)\eta\mu(B(o, r))$

(6) $c(\kappa, \eta)r_f \leq r_j \leq r_f$

(7) $\fint_{3B_j} |\mathrm{Lip}f(x) - \mathrm{Lip}f(z_j)|^p \ d\mu(x) < \psi^p$

(8) 任意の j と $x, y \in B_j$ に対して，$d(x, y) \geq \xi r_j$ ならば

$$|f(x) - f(y)| < ((1+\chi)\mathrm{Lip}f(z_j) + \chi)d(x, y)$$

が成り立つ．

(9) 任意の $x \in B_j$ に対して，

$$|f(x) - f(z_j)| < \left(\mathrm{Lip}f(z_j) + \frac{\chi}{4}\right) d(x, z_j)$$

が成り立つ．ただし $c(\kappa)$, $c(\kappa, \eta)$ は，括弧内の数のみによって決まる正の定数を表し，r_f は補題 4.12 における正数を表す．

補題 4.14. 与えられたリプシッツ関数 $f : B(o, r) \to \mathbf{R}$ と任意の $0 < \eta, \psi, \xi, \chi < 1$ に対して，次の性質を満たすリプシッツ関数 $f_* : B(o, r) \to \mathbf{R}$ と，部分集合とその点および正の数からなる有限個の組 $\{A_{j,k}, w_{j,k}, L_{j,k}\}$ が存在する．

(10) $f_*(w) = f(w_{j,k}) - L_{j,k}d(w, w_{j,k})$, $w \in A_{j,k}$.

(11) $0 < L_{j,k} \leq (1+\chi)\mathrm{Lip}\, f(w_{j,k}) + \chi$.

(12) $\mu(B(o, r) \setminus \cup_{j,k}A_{j,k}) \leq c(\kappa)\eta\mu(B(o, r))$

(13) $\|f - f_*\|_{L^\infty} \leq \varepsilon_1(\kappa, r, \mathbf{Lip}(f); \xi, \eta)$

(14) $\mathbf{Lip}(f_*) = \mathbf{Lip}(f) + \varepsilon_2(\mathbf{Lip}(f); \xi)$

(15) $\int_{B(o,r)} |\mathrm{Lip}f - \mathrm{Lip}f_*|^p \ d\mu \leq \varepsilon_3(\kappa, p, \mathbf{Lip}(f); \chi, \xi, \eta, \psi)$

ただし$\varepsilon_*(a,b,\ldots;s,t,\ldots)$は，$a,b,\ldots$，および$s,t,\ldots$のみによって決まる正数で，$a,b,\ldots$を固定して，$s,t\cdots\to 0$のとき，0に収束するものを表す．

(10)に示されている形のリプシッツ関数によって，与えられたリプシッツ関数を一様にかつディリクレp-エネルギーに関しても近似できるということが判る．このことから，補題4.3で要求されているグロモフ-ハウスドルフ距離の近い距離空間上のリプシッツ関数による近似が，適当に有限個の点列を選ぶことによって与えられるのである．

ノート 4 グロモフによって導入された距離–グロモフ-ハウスドルフ距離– の定義や定理4.1および定理4.2を含む基本的な性質については，Gromov [23] とその拡張版 [24] を参照．そこでは，リーマン多様体のみならず距離空間に関する大域的な幾何とトポロジーの問題について理論が展開されている．また [21]，[8] も参照．

接錘あるいは無限遠点での接錘に関して，上述の文献の他に，たとえば [55], [61], [3], [36], [45], [15], [54] など参照．

この節で解説した測度距離空間に関するいくつかの結果の証明において，リプシッツ関数の拡張に関する古典的なMcShane [53] の方法が基本的役割を果たしているが，補題4.3と補題4.6の証明の詳細については，[12] の Lemma 10.7 と Lemma 10.3 を参照．

5. ディリクレ空間

前節まで考察したソボレフ空間$W^{1,p}(X)$は，必ずしも2次形式と結びついたものではない．実際$p=2$であるとしても，一般にはヒルベルト空間ではない．しかしダブリング条件とポアンカレ不等式が満たされている場合は，3.3において示したように，自然にヒルベルト空間と一様同値になり，重要な結果が導かれた．このヒルベルト空間は，いくつかの重要な性質を満たすディリクレ空間になる．

この節の目的は，ディリクレ空間の定義とその基本的性質，そして内在的距離を簡単に説明し，ソボレフ不等式，ダブリング条件とポアンカレ不等式との関連から，いくつかの基本的結果を解説することである．

5.1. ディリクレ形式と内在的距離． $X=(X,d,\mu)$をダブリング条件$[\mathrm{D}]_\kappa$と弱2–ポアンカレ不等式$[\mathrm{P}]_\tau$を満たす測度距離空間とする．このとき，ディリクレ2-エネルギー$\int(\mathrm{Lip}f)^2d\mu$は一般に2次形式とは限らない．そこで余接束$T^*X$上には，$L^\infty$リーマン計量$g^*=\langle\ ,\ \rangle$で，ある定数$\lambda,\Lambda$があって，

$$\lambda\ \mathrm{Lip}f\le\sqrt{\langle df,df\rangle}\le\Lambda\ \mathrm{Lip}f,\quad f\in C^{0,1}_{loc}(X,d)$$

を満たすものが与えられているとし，

$$\mathcal{E}(u,v)=\int_X\langle du,dv\rangle\ d\mu,\quad u,v\in W^{1,2}(X)\cap C^{0,1}_{loc}(X,d)$$

とおく (3.3 参照). このとき, $\mathcal{E}$ は $W^{1,2}(X)$ 上の非負値対称２次形式に一意的に拡張できる (定理 3.22 参照). これも同じく $\mathcal{E}$ によって表し, $H = L^2(X,\mu)$, $\mathcal{D} = W^{1,2}(X)$ とおくと, $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ は以下の条件を満たす.

E - 1 $\mathcal{D}$ は H において稠密である.

E - 2 $\mathcal{D}$ は, 内積

$$\mathcal{E}_1(u,v) = \langle u,v\rangle_H + \mathcal{E}(u,v)$$

に関して完備である. したがって $(\mathcal{D},\mathcal{E}_1)$ はヒルベルト空間である.

E - 3 $u \in \mathcal{D}$ に対して, $v = \max\{\min\{u,1\},0\}$ とおくと, $v \in \mathcal{D}$ であり,

$$\mathcal{E}(v,v) \le \mathcal{E}(u,u)$$

が成り立つ.

さて, ヒルベルト空間上の２次形式に関する一般論から, いくつかの定義や事実を述べることにする[20].

まず可分ヒルベルト空間 $H = (H, \langle\,,\,\rangle_H)$ を考える. その部分空間 $\mathcal{D}$ で定義された非負定値対称双線形形式 $\mathcal{E}$ が与えられているとする, このとき, E - 2 が満たされるならば, $\mathcal{E}$ を, 部分空間 $\mathcal{D}$ を定義域とする閉形式とよぶ. $\mathcal{E}$ の定義域を明確にするために, $\mathcal{D}$ を $D[\mathcal{E}]$ と表すことにする.

ここで非負定値対称双線形形式 $\mathcal{E}$ から定まる２次形式 $\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}(u,u)$ を, $u \in H \setminus D[\mathcal{E}]$ に対して, $\mathcal{E}(u) = +\infty$ とおいて H 全体に拡張しておく. このとき, 次のことが成り立つ.

条件 E - 2 $\Leftrightarrow$ ２次形式 $\mathcal{E} : L^2(X,\mu) \to [0,+\infty]$ が下半連続である

このことは, これまでの節でもまたこれからの議論でも重要な視点であるので, ここで検証しておこう (定理 2.1, 定理 3.3 参照). $F(u) = \mathcal{E}(u,u)$ とおく.

($\Rightarrow$) $u_n \to u \in H$ かつ $\liminf_{n\to\infty} F(u_n) < +\infty$ ならば, $u_n \in D[\mathcal{E}]$, そしてヒルベルト空間 $(D[\mathcal{E}],\mathcal{E}_1)$ の回帰性から, $D[\mathcal{E}]$ において弱収束する $\{u_n\}$ の部分列が存在する. このことから $u \in D[\mathcal{E}]$ かつ $F(u) \le \liminf_{n\to\infty} F(u_n)$ が判る.

($\Leftarrow$) $\mathcal{E}_1$-コーシー列 $\{u_n\} \subset D[\mathcal{E}]$, すなわち $\langle u_n - u_m, u_n - u_m\rangle_{L^2} + \mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$ $(m,n\to\infty)$ に対して, u_n はある $u \in H$ に収束し, F は下半連続より, m を固定すると, $F(u - u_m) \le \liminf_{m\to\infty} F(u_n - u_m)$, したがって

$$\begin{aligned}0 &\le \limsup_{m\to\infty} F(u-u_m) \le \limsup_{m\to\infty}\liminf_{n\to\infty} F(u_n - u_m)\\ &\le \limsup_{m\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\{\langle u_n - u_m, u_n - u_m\rangle_{L^2} + \mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m)\} = 0\end{aligned}$$

となる. とくに $F(u - u_m) < +\infty$, そして $F(u) \le 2[F(u-u_m) + F(u_m)] < +\infty$ となり, $u \in D[\mathcal{E}]$ が従う. さらに $u - u_m \in D[\mathcal{E}]$ で,

[20] ノート 5 参照

$m \to \infty$ のとき，$\mathcal{E}(u-u_m, u-u_m) = F(u-u_m) \to 0$ となる．以上から $m \to \infty$ のとき，$\langle u-u_m, u-u_m\rangle_{L^2} + \mathcal{E}(u-u_m, u-u_m) \to 0$ が得られた．このようにE-2が示された．

注意 5.1. H 上の2次形式 $(\mathcal{E}, D[\mathcal{E}])$ に対して，

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{E}}(u,u) &= \min\{\liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n,u_n) \ : \ u_n \to u \in H,\ n \to \infty\} \\ D[\underline{\mathcal{E}}] &= \{u \in H \ : \ \underline{\mathcal{E}}(u,u) < +\infty\}\end{aligned}$$

と定義すると，$\underline{\mathcal{E}}(u,u) \le \mathcal{E}(u,u)$ を満たす H 上の閉形式 $\underline{\mathcal{E}}$ が得られる．$\underline{\mathcal{E}}$ は，このような条件を満たす最大の閉形式で，$\mathcal{E}$ の緩和形式という．もちろん $\mathcal{E}$ が閉形式ならば，$\mathcal{E} = \underline{\mathcal{E}}$ である．

2次形式 $\mathcal{E}$ が局所的であるとは，$u, v \in D[\mathcal{E}]$ に対して，それぞれの台 $\operatorname{supp} u$ と $\operatorname{supp} v$ がともにコンパクトでその交わりが空集合ならば，$\mathcal{E}(u,v) = 0$ であるときをいう．また $\operatorname{supp} u$ において v が定数ならば，$\mathcal{E}(u,v) = 0$ であるとき，$\mathcal{E}$ は強局所的であるという．

さて，稠密な定義域をもつ閉形式 $\mathcal{E}$ を考える．この生成作用素 $\mathcal{L}$ が次のように与えられる．

> $u \in D[\mathcal{E}]$ に対して，ある $w \in H$ があって，任意の $v \in D[\mathcal{E}]$ に対して，$\mathcal{E}(u,v) = \langle v, w\rangle_H$ が成り立つとき，w を $\mathcal{L}u$ と表す．

このような関数 u 全体のなす部分空間を $D[\mathcal{L}]$ と表すとき，$\mathcal{L}$ は H 上の $D[\mathcal{L}]$ を定義域とする非負自己共役作用素を定め，$\mathcal{E}(u,v) = \langle\sqrt{\mathcal{L}}u, \sqrt{\mathcal{L}}v\rangle$ と表される．$\mathcal{L}$ の定める，H 上の強連続半群 $\exp(-t\mathcal{L})$ $(t > 0)$ を以後 $P_t = \exp(-t\mathcal{L})$ と表す．このとき，次のことが成り立つ．

$$\mathcal{E}(P_tu, P_tu) \le \frac{1}{2t}(\langle u,u\rangle_H - \langle P_tu, P_tu\rangle_H) \le \mathcal{E}(u,u), \quad u \in D[\mathcal{E}] \tag{16}$$

$$\lim_{t\to 0} \mathcal{E}_1(u - P_tu, u - P_tu) = 0, \quad u \in D[\mathcal{E}] \tag{17}$$

さらにレゾルベント $\{G_\zeta\}_{\zeta>0}$ が

$$G_\zeta = \int_0^\infty e^{-\zeta t} P_t\, dt, \quad \zeta > 0$$

によって定義される．これは次の性質を満たす．

$$\zeta|G_\zeta u|_H \le |u|_H, \quad u \in H$$

また，$u = G_\zeta f$ は次のように特徴付けられることに注意する．

$$\mathcal{E}(u,v) + \zeta\langle u,v\rangle_H = \langle f, v\rangle_H, \quad v \in D[\mathcal{E}]$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(u,u) + \zeta\langle u,u\rangle_H - 2\langle f,u\rangle_H \\ &\quad = \min_{v\in H} \mathcal{E}(v,v) + \zeta\langle v,v\rangle_H - 2\langle f,v\rangle_H\end{aligned} \tag{18}$$

なお $\zeta = 0$ の場合も，$G = \int_0^\infty P_t\, dt$ が存在すれば，これらは成り立つ．

ここで$\mathcal{L}$のスペクトル測度をEによって表すとき,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u,v) &= \int_0^\infty \lambda\, d(E_\lambda(u),v),\\ \mathcal{L}u &= \int_0^\infty \lambda^2\, dE_\lambda(u)\\ P_t u &= \int_0^\infty e^{-t\lambda}\, dE_\lambda(u)\\ G_\zeta u &= \int_0^\infty \frac{1}{\zeta+\lambda}\, dE_\lambda(u)\end{aligned}$$

と表されることに注意する.

以下,局所コンパクト可分ハウスドルフ空間XとX上の正値ラドン測度μ,すなわち任意の開集合Vに対して$\mu(V)>0$となるようなラドン測度の組を考える.

$L^2(X,\mu)$上の閉形式$\mathcal{E}$がE - 3を満たすとき,$\mathcal{E}$をディリクレ形式とよぶ.さらに$C_0(X)\cap D[\mathcal{E}]$の部分空間$\mathcal{C}$が,$D[\mathcal{E}]$において($\mathcal{E}_1$-ノルムに関して)稠密かつ,$C_0(X)$において($L^\infty$-ノルムに関して)稠密であるとき,$\mathcal{E}$のコア(芯)という.コアが存在するとき,$\mathcal{E}$は正則であるという.

以下正則ディリクレ形式$\mathcal{E}$を考える.まず$\mathcal{E}$は次のように表現される事が知られている.

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(u,v)=\mathcal{E}^{(c)}(u,v)+\\ &\qquad\int_{X\times X\setminus\Delta(X\times X)}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))J(dx,dy)+\\ &\qquad\qquad\int_X u(x)v(x)\ k(dx),\quad u,\ v\in D[\mathcal{E}]\cap C_0(X)\end{aligned}$$

ここで$\mathcal{E}^{(c)}$は$D[\mathcal{E}^{(c)}]=D[\mathcal{E}]\cap C_0(X)$を定義域とする,強局所性とE - 3を満たす対称形式であり,Jは$X\times X$から対角線集合$\Delta(X\times X)=\{(x,x)\in X\times X\}$を除いたところで定義された対称非負値ラドン測度で,kはX上の非負値ラドン測度である.このような分解は一意的で,J,kはそれぞれ$\mathcal{E}$の飛躍測度,消滅測度とよばれる.次に$u\in D[\mathcal{E}]\cap L^\infty$に対して,対応

$$\phi\in D[\mathcal{E}]\cap C_0(X)\longrightarrow\mathcal{E}(u,\phi u)-\frac{1}{2}\mathcal{E}(u^2,\phi)$$

はX上の非負値ラドン測度に拡張されることが知られている.この測度を$\mu_{\langle u,u\rangle}$と表すと,

$$\int_X\phi\ \mu_{\langle u,u\rangle}=\mathcal{E}(u,\phi u)-\frac{1}{2}\mathcal{E}(u^2,\phi),\quad \phi\in D[\mathcal{E}]\cap C_0(X)$$

ということになる．$\mu_{\langle u,u\rangle}$ を u のエネルギー測度と呼ぶ．2つの関数 $u,v\in D[\mathcal{E}]\cap L^\infty$ に対して，

$$\mu_{\langle u,v\rangle}=\frac{1}{2}(\mu_{\langle u+v,u+v\rangle}-\mu_{\langle u,u\rangle}-\mu_{\langle v,v\rangle})$$

とおくと，$\mu_{\langle u,v\rangle}$ は符号付きラドン測度を与える．$\mathcal{E}^{(c)}$ によっても，$u\in D[\mathcal{E}]\cap L^\infty$ に対して，非負値ラドン測度 $\mu^{(c)}_{\langle u,u\rangle}$ が，

$$\int_X\phi\,\mu^{(c)}_{\langle u,u\rangle}=\mathcal{E}^{(c)}(u,\phi u)-\frac{1}{2}\mathcal{E}^{(c)}(u^2,\phi),\quad \phi\in D[\mathcal{E}]\cap C_0(X)$$

によって定まる．これは，$\mu^{(c)}_{\langle u,u\rangle}\le\mu_{\langle u,u\rangle}$ を満たし，エネルギー測度 $\mu_{\langle u,u\rangle}$ の局所部分と呼ばれる．$\mu^{(c)}$ は次に述べるトランケーション性 (i)，ライプニッツ則 (ii)，そして連鎖律 (iii) を満たす．

(i) $u,v,w\in D[\mathcal{E}]\cap C_0(X)$ に対して，

$$\mu^{(c)}_{\langle\min\{u,v\},w\rangle}=\chi_{\{u<v\}}\mu^{(c)}_{\langle u,w\rangle}+\chi_{\{u\ge v\}}\mu^{(c)}_{\langle v,w\rangle}$$

が成り立つ．

(ii) $u,v,w\in D[\mathcal{E}]\cap C_0(X)$ に対して，

$$\mu^{(c)}_{\langle uv,w\rangle}=u\mu^{(c)}_{\langle v,w\rangle}+v\mu^{(c)}_{\langle u,w\rangle}$$

が成り立つ．

(iii) $\Phi(0)=0$ を満たす任意の C^1 級関数 $\Phi:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ と $u_1,\dots,u_m,v\in D[\mathcal{E}]\cap C_0(X)$ に対して，$\Phi(u_1,\dots,u_m)\in D[\mathcal{E}]\cap C_0(X)$ となり，

$$\mu^{(c)}_{\langle\Phi(u_1,\dots,u_m),v\rangle}=\sum_{i=1}^m\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(u_1,\dots,u_m)\mu^{(c)}_{\langle u_i,v\rangle}$$

が成り立つ．

(実際には，これらの性質は，$D[\mathcal{E}]\cap L^\infty$ の関数に対して成り立つが，この場合は，準連続な代表元を選ぶ必要があり，ここでは説明しない.)

以下，強局所的正則ディリクレ形式 $\mathcal{E}$ (すなわち $\mathcal{E}=\mathcal{E}^{(c)}$ となる場合) を考える．

開集合 A において $u\in D[\mathcal{E}]$ が定数ならば，A において $\mu_{\langle u,u\rangle}=0$ が成り立つ．したがって $\mu_{\langle u,v\rangle}$ を開集合 A に制限したものは $u_{|A}$ と $v_{|A}$ にのみ依存して決まる．これによって，局所 L^2 可積分関数 u で，任意の相対コンパクト開集合 A に対して，$v\in D[\mathcal{E}]$ が存在して，A において $u_{|A}=v_{|A}$ となるもの全体のなす空間 $D_{loc}[\mathcal{E}]$ を定義することができる．$u\in D_{loc}[\mathcal{E}]$ に対して，エネルギー測度 $\mu_{\langle u,u\rangle}$ が定まる．

次に $\mu_{\langle u,u\rangle}$ が μ に関して絶対連続となる関数 $u\in D_{loc}[\mathcal{E}]$ のなす部分空間

$$\mathcal{A}[\mathcal{E}]=\{u\in D[\mathcal{E}]\mid\mu_{\langle u,u\rangle}=\Gamma(u,u)\mu,\ \Gamma(u,u)\in L^1_{loc}(X)\}$$

を考える．さらに内在的 (擬) 距離 (カラテオドリ (擬) 距離と呼ばれることも多い) $d_{\mathcal{E}}: X \times X \to [0, +\infty]$ を次のように定義する．

$$d_{\mathcal{E}}(x, y) = \sup\{u(x) - u(y) \mid u \in \mathcal{A}[\mathcal{E}] \cap C(X),\ \Gamma(u, u) \leq 1 \quad \mu - a.e.\}$$

次の定理が知られている[21]．

定理 5.1. 強局所的正則ディリクレ形式 $X = (X, \mu, \mathcal{E})$ が次の条件を満たすとする．

[C] 内在的距離 $d_{\mathcal{E}}$ は X 上の距離を与え，それが定める位相は X の元のものと一致する．

このとき，次のことが成り立つ．

(1) $(X, d_{\mathcal{E}})$ は弧長空間である．さらに完備であることとすべての距離球体 $B(x, r)$ が相対コンパクトであることとは同値である．また完備であるとき，$(X, d_{\mathcal{E}})$ は測地空間である *(ホップ－リノーの定理)*.

(2) 相対コンパクト集合 $Y \subset X$ に対して，$\rho_Y(x) = \inf\{d_{\mathcal{E}}(x, y) \mid y \in Y\}$ とおくと，

$$\rho_Y \in \mathcal{A}[\mathcal{E}] \cap C(X), \quad \Gamma(\rho_Y, \rho_Y) \leq 1$$

が成り立つ．

K.T. スツルムによるこの結果は，[72] においても，本論説のこれからの議論の展開においても基本である．なお，多様体上のリーマン計量の場合は，$\Gamma(\rho_Y, \rho_Y) = 1$ であるが，たとえば，計量の係数を可測関数まで広げると一般に等号は成り立たない ([71] 参照)．

5.2. **ソボレフ不等式とスペクトル評価.** 稠密な定義域をもつ正則ディリクレ空間 $(X, \mu, \mathcal{E})$ で以下の性質を満たすものを考える．

[I] ある正の定数 ν と A に対して，生成作用素 $\mathcal{L}$ の半群 P_t は

$$\|P_t u\|_{L^\infty} \leq \frac{A}{t^{\nu/2}} \|u\|_{L^1}, \quad u \in L^1(X, \mu),\ 0 < t \leq 1$$

を満たす．

これは，次に述べるナッシュ不等式と同値である[22]．

[I'] ある正の定数 ν と A_* に対して，

$$\|u\|_{L^2}^{2+4/\nu} \leq A_*(\mathcal{E}(u, u) + \|u\|_{L^2}^2)\|u\|_{L^1}^{4/\nu}$$

が成り立つ．

さらに $\nu > 2$ のとき，次に述べるソボレフ不等式とも同値である．

[I"] ある正の定数 $\nu > 2$ と A_{**} に対して，

$$\|u\|_{L^{2\nu/(\nu-2)}}^2 \leq A_{**}(\mathcal{E}(u, u) + \|u\|_{L^2}^2)$$

条件 [I] から，P_t の核関数 $p(t, x, y)$ は，

$$p(t, x, y) \leq \frac{A}{t^{\nu/2}} \quad \mu - a.e.\ x, y \in X \tag{19}$$

[21] ノート 5 参照

[22] ノート 5 参照

を満たすので，もし $\mu(X) < +\infty$ ならば，$p(t,x,y)$ は二乗可積分となり，したがって $\mathcal{L}$ のスペクトルは固有値 $\{\lambda_i \mid 0 \le \lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \nearrow +\infty\}$ だけからなることが判る．さらに $\Psi = \{\psi_i\}$ を固有値 λ_i の固有関数 ψ_i からなる $L^2(X,\mu)$ の正規直交完全系とすると，次の固有関数展開が成り立つ．

$$p(t,x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i}\psi_i(x)\psi_i(y)$$

補題 5.2. $\mu(X)$ は有限とする．このとき以下の評価が成り立つ．

(1) $\lambda_i \ge 1$ ならば，$\lambda_i \ge C_1\mu(X)^{-1}(i+1)^{2/\nu}$，$\lambda_i \le 1$ ならば，$i+1 \le C_1$．ただし C_1 は ν と A にのみによって決まる定数である．

(2) $\|\psi_i\|_{L^\infty} \le Ae\max\{\lambda_i^{\nu/4}, 1\}$

(3) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^{\alpha}e^{-\lambda_i t}\psi_i(x)^2 \le C_2(\alpha)(t^{-\alpha-\nu/2} + t^{-\alpha})$ $(0 < t,\ x \in X, \alpha \ge 0)$，ただし $C_2(\alpha)$ は α, ν と A のみによってきまる定数である．

(4) $\displaystyle e^{-(t+1/t)}\sum_{T<\lambda_i} \lambda_i^{\alpha}e^{-t\lambda_i}\psi_i(x)^2 \le 2Ae\int_T^{\infty} \lambda^{\alpha+\nu/2}e^{-2\sqrt{\lambda}}d\lambda$ $(1 \le T,$ $0 < t,\ x \in X,\ \alpha \ge 0)$．

証明　任意の正数 λ と点 $x \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda_i \le \lambda} \psi_i(x)^2 &\le e\sum_{\lambda_i \le \lambda} e^{-\lambda_i/\lambda}\psi_i(x)^2 \le e\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i/\lambda}\psi_i(x)^2 \\ &\le ep(1/\lambda, x, x) \le Ae\max\{\lambda^{\nu/2}, 1\}\end{aligned}$$

より，

$$\sum_{\lambda_i \le \lambda} \psi_i(x)^2 \le Ae\max\{\lambda^{\nu/2}, 1\}$$

が成り立つ．これを X 上積分して，

$$\#\{\lambda_i \mid \lambda_i \le \lambda\} \le Ae\max\{\lambda^{\nu/2}, 1\}\mu(X)$$

となる．このように (1), (2) が得られる．

次に各点 $x \in X$ に対して，$\mathbf{R}$ 上の測度 η_x を

$$\eta_x = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x)^2\delta_\lambda$$

によって定義する．ただし δ_λ は $\lambda \in \mathbf{R}$ でのディラックのデルタ測度である．ここで $\eta_x((-\infty,\lambda]] = \eta_x([0,\lambda]) \le Ae\max\{\lambda^{\nu/2},1\}$ より，

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i^{\alpha}e^{-t\lambda_i}\psi_i(x)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{\alpha}e^{-t\lambda}d\eta_x(\lambda)\\ &= \int_0^{\infty}(t\lambda^{\alpha}-\tau\lambda^{\alpha-1})e^{-\lambda}\eta_x((-\infty,\lambda])d\lambda\\ &\le Ae\int_0^{\infty}t\lambda^{\alpha}e^{-t\lambda}\max\{\lambda^{\nu/2},1\}d\lambda\\ &\le Ae(\Gamma(\alpha+\nu/2+1)+\Gamma(\alpha+1))(t^{-\alpha-\nu/2}+t^{-\alpha})\end{aligned}$$

と評価され，(3) を得る．ただし $\Gamma(x)$ はガンマ関数を表す．

最後に $te^{-(t+1/t)-t\lambda} < 2e^{-\sqrt{\lambda}}$ ($t>0$, $\lambda>0$) に注意すると，

$$\begin{aligned}e^{-(t+1/t)}\sum_{T\le\lambda_i}\lambda_i^{\alpha}e^{-t\lambda_i}\psi_i(x)^2 &= e^{-(t+1/t)}\int_T^{\infty}\lambda^{\alpha}e^{t\lambda}d\eta_x(\lambda)\\ &< e^{-(t+1/t)}\int_T^{\infty}t\lambda^{\alpha}e^{-t\lambda}\eta_x((-\infty,\lambda])d\lambda\\ &< 2Ae\int_T^{\infty}te^{-(t+1/t)-t\lambda}\lambda^{\alpha+\nu/2}d\lambda\\ &< 2Ae\int_T^{\infty}\lambda^{\alpha+\nu/2}e^{-2\sqrt{\lambda}}d\lambda\end{aligned}$$

となって，(4) を得る． 以上で補題の証明を終える．

条件 [I](したがって [I'], あるいは $\nu>2$ のときは [I"]) を満たす正則ディリクレ空間 $(X,\mu,\mathcal{E})$ の考察を続けよう．ただし以下

$\mu(X)<+\infty$ かつ $\mathcal{E}$ は強局所的で，条件 [C] も満たしている

と仮定する．これらの仮定の下で内在的距離 $d_{\mathcal{E}}$ とスペクトルの関係について述べたい．

[I'] の応用として次の補題を示す．

命題 5.3. (1) 点 $x\in X$ に対して，

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\log\mu(B(x,\varepsilon))}{\log\varepsilon} < +\infty$$

ならば，半径 r の距離球体 $B(x,r)$ の測度は次のように下から評価される．

$$\mu(B(x,r)) \ge \frac{C_3(\nu)}{A_*^{\nu/2}}r^{\nu},\quad 0<r\le 1$$

(2) 直径 $\mathrm{diam}(X,d_{\mathcal{E}})$ は次のように上から評価される．

$$\mathrm{diam}(X,d_{\mathcal{E}}) \le C_4(\nu)\max\{1,A_*^{\nu/2}\}\mu(X),$$

(3) 第 i 番目の固有値 λ_i は, $i \geq 4^{-1}\mathrm{diam}(X, d_{\mathcal{E}})$ ならば,

$$\lambda_i \leq \frac{C_5(\nu)A_*^{\nu/2}}{\mathrm{diam}(X, d_{\mathcal{E}})^{2+\nu}} i^{2+\nu}$$

と評価される. ただし $C_j(\nu)$ $(j = 3, 4, 5)$ は ν のみに依存してきまるある正の定数を表す.

証明 任意に $x \in X$ を固定して, $\rho = d_{\mathcal{E}}(x, *)$ とおく. 試験関数 $\zeta_{x,r}$ を次のように定義する.

$$\zeta_{x,r}(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \rho(y) \leq \frac{r}{2} \\ 2 - \frac{2}{r}\rho(y), & \frac{r}{2} \leq \rho(y) \leq r \\ 0, & r \leq \rho(y) \end{cases}$$

このとき, $\zeta_{x,r}$ は

$$\Gamma(\zeta_{x,r}, \zeta_{x,r})^{1/2} \leq \frac{2}{r}, \quad \mathrm{supp}\, \Gamma(\zeta_{x,r}, \zeta_{x,r})^{1/2} \subset B(x, r) \setminus B(x, r/2)$$

を満たす. よってナッシュ不等式 [I'] を $\zeta_{x,r}$ に適用して,

$$\begin{aligned} &\mu(B(x, r/2))^{1+2/\nu} \\ &\quad \leq A_*\{4r^{-2}(\mu(B(x, r)) - \mu(B(x, r/2))) + \mu(B(x, r))\}\mu(B(x, r))^{4/\nu} \end{aligned}$$

となり, これから

$$\mu(B(x, r/2))^{1+2/\nu} \leq 5A_*^{-2}\mu(B(x, r))^{1+4/\nu}$$

を得る. ここで $V(t) = \mu(B(x, t))$, $\alpha = \nu/(\nu + 4)$, $\beta = (\nu + 2)/(\nu + 4)$, $r_m = r/2^{m-1}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ とおくと,

$$V(r_m) \geq (5A_*)^{-\alpha} r_m^{2\alpha} V(r_{m+1})^{\beta}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

となり, したがって

$$\begin{aligned} \mu(B(x, r)) &\geq (5A_*)^{-\alpha} r_1^{2\alpha} V(r_2)^{\beta} \geq \cdots \\ &\geq (5A_*)^{-\alpha(1-\beta^m)(1-\beta)} r^{2\alpha(1-\beta^m)(1-\beta)} \prod_{j=1}^{m} 2^{-2\alpha(j-1)\beta^{j-1}} V(r_{m+1})^{\beta^m} \end{aligned}$$

を得る.

ここで条件 $\limsup_{\varepsilon \to 0} \log \mu(B(x, \varepsilon))/\log \varepsilon < +\infty$ から, $m \to \infty$ のとき, $V(r_{m+1})^{\beta^m} \to 1$ であることに注意すると,

$$\mu(B(x, r)) \geq C(\nu)A_*^{-\nu/2} r^{\nu}$$

が従う. これで (1) が示された.

次に正の整数を $n_0 = [D/2] + 1$ $(D = \mathrm{diam}(X, d_{\mathcal{E}}))$ によって定め ($[a]$ は $n \leq a$ を満たす最大の整数を表す), $D_j = d_{\mathcal{E}}(p_j, q_j) \to D$ を満たす点列 $\{p_j\}$ と $\{q_j\}$ の組とこれらを結ぶ弧長にパラメーターをもつ曲線 $\gamma_j : [0, D_j] \to X$ を取る. $D > 1$ と仮定してよろしい. そこで

$p_{j,k} = \gamma_j(2k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1)$ とおくと，$\{B(p_{j,k}, 1)\}$ は互いに交わることのない距離球体を与え，よって

$$\mu(X) \geq \sum_{k=0}^{n_0-1} \mu(B(p_{j,k}, 1)) \geq n_0 C_2(\nu) A_*^{-\nu/2}$$

となり，$D_j \leq 2n_0$ より，

$$\operatorname{diam}(X, d_{\mathcal{E}}) = \lim_{j\to\infty} D_j \leq 2C(\nu)^{-1} A_*^{\nu/2} \mu(X)$$

を得る．これで (2) が示された．

最後に固有値の評価を行う．これをミニマックス原理を使って示そう．$i \geq D_j/4$ を満たす i に対して，$x_{j,k} = \gamma_j(2Rk)$, $(k = 0, 1, \ldots, i)$, $R_j = D_j/(2i)$ とおき，$i+1$ 個の互いに交わることのない距離球体 $B(x_{j,k}, R_j)$ を考える．各 $x_{j,k}$ に対する試験関数 $\zeta_{x_{j,k},R_j}$ 達は 1 次独立で，λ_i の変分的特徴づけから，ある $a = (a_0, a_1, \ldots, a_i) \in \mathbf{R}^{i+1} \setminus \{0\}$ があって，

$$\lambda_i \leq \frac{\mathcal{E}(u, u)}{|u|_{L^2}^2}, \quad u = \sum_{k=0}^{i} a_k \zeta_{x_{j,k}, R_j}$$

となることが判る．したがって

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{E}(u,u)}{|u|_{L^2}^2} &\leq \frac{4\sum_{k=0}^{i} a_j^2 \mu(B(x_{j,k}, R_j))}{R_j^2 \sum_{k=0}^{i} a_k^2 \mu(B(x_k, R_j/2))} \\
&\leq \frac{4}{R_j^2 C(\nu) A_*^{-\nu/2} (R_j/2)^{\nu}} \\
&= C_4 A_*^{\nu/2} D_j^{-2-\nu} i^{2+\nu}
\end{aligned}$$

ただし C_4 は ν のみに依って決まる定数である．$j \to \infty$ として，(3) が得られる．これで，補題 5.3 の証明を終える．

強局所的正則ディリクレ形式の半群が核関数によって表されるとき，それを熱核と呼ぶことにする．熱核 $p(t, x, y)$ の (19) より精密な評価式を述べる．

$$p(t, x, y) \leq \frac{A(\alpha)}{t^{\nu/2}} \exp\left(-\frac{d_{\mathcal{E}}(x, y)^2}{(4+\alpha)t}\right), \quad 0 < t \leq 1,\ x, y \in X \tag{20}$$

ただし α は任意の正の定数で，$A(\alpha)$ は A と α にのみによって決まる正の定数である[23]．

さて，X の開集合 V に対して，

$$D_0[\mathcal{E}, V] = \overline{\{u \in C_0(X) \cap D[\mathcal{E}] \mid \operatorname{supp} u \subset V\}}^{\mathcal{E}_1}, \ \mathcal{E}_V = \mathcal{E}_{|D_0[\mathcal{E},V]}$$

とおく．V 上の正則ディリクレ形式 $\mathcal{E}_V$ の熱核 $p_V(t, x, y)$ は，$p_V(t, x, y) \leq p(t, x, y)$ $(x, y \in V)$ より，条件 [I] の下，$p_V(t, x, y)$ も同じ条件を満たす．とくに $\mu(V) < +\infty$ ならば，$\mathcal{E}_V$ の生成作用素 $\mathcal{L}_V$ の固有値を

[23] ノート 5 参照

$\{\lambda_{D;n} : \lambda_{D;1} \le \lambda_{D;2} \le \cdots \nearrow +\infty\}$ とし，$\{\psi_n\}$ を $\{\lambda_{D;n}\}$ に対応する固有関数からなる $L^2(V)$ の正規直交完全系とするとき，

$$p_V(t,x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\lambda_n}\psi_n(x)\psi_n(y)$$

と展開され，さらに補題 5.2 と 5.3 の評価が成り立つ．ただし，補題 5.3 の (1) については，$0 < r \le 1$ を $0 < r \le \min\{d(x,\partial V),1\}$ に置き換え，(2) と (3) については，ある数 $a > 0$ と弧長にパラメーターをもつ曲線 $\gamma : [0,D] \to V$ で，$d(\gamma(s),\partial V) \ge a$ $(0 \le s \le D)$ を満たすものが存在すると仮定し，$C_4(\nu)$ と $C_5(\nu)$ を ν と a のみに依存する定数 $C_4(\nu,a)$, $C_5(\nu,a)$ にそれぞれ置き換える．

5.3. ダブリング条件，ポアンカレ不等式と放物型ハルナック不等式．以下，定理 5.1 の性質 [C] を満たす強局所的正則ディリクレ空間 $X = (X,\mu,\mathcal{E},d_{\mathcal{E}})$ を考える．さらに X の開集合 Y を一つ固定し，以下の 3 つの性質を考える．

[II] 任意の距離球体 $B(x,2r) \subset Y$ に対して，閉球体 $\overline{B(x,r)}$ は完備，したがってコンパクトである．

[III] ある正の数 κ が存在して，任意の距離球体 $B(x,2r) \subset Y$ に対してダブリング条件が成り立つ．すなわち，

$$\mu(B(x,2r)) \le 2^{\kappa}\mu(B(x,r)) \qquad [D]_{\mathcal{E}}$$

[IV] ある正の数 τ があって，任意の距離球体 $B(x,2r) \subset Y$ において弱 2–ポアンカレ不等式が成り立つ．すなわち，$u \in D_{loc}[\mathcal{E}]$ に対して，

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u - u_{x,r}|^2\, d\mu\right)^{1/2} \le \tau r \left(\fint_{B(x,2r)} d\mu_{\langle u,u\rangle}\right)^{1/2} \qquad [P]_{\mathcal{E}}$$

が成り立つ．

このような性質に関わるいくつかの結果を説明することがこの項の目的である．

まず，次のソボレフ不等式を述べることから始める．

定理 5.4. [II], [III], [IV] を仮定する．このとき，任意の距離球体 $B(x,2r) \subset Y$ と任意の $u \in D_{loc}[\mathcal{E}] \cap C_0(B(x,r))$ に対して，

$$\left(\int_{B(x,r)} |u|^{2\kappa^*/(\kappa^*-2)}\, d\mu\right)^{(\kappa^*-2)/2\kappa^*} \le$$

$$\frac{C\tau r}{\mu(B(x,r))^{1/\kappa*}} \left(\int_{B(x,r)} d\mu_{\langle u,u\rangle} + r^{-2}u^2\, d\mu\right)^{1/2}$$

ただし $\kappa^* = \max\{2,\kappa\}$ とおいた．それから C は κ のみに依存して決まる定数である．

次に放物型ハルナック不等式について述べる．

ある正数 η が存在して，$B(x,2r) \subset Y$ と $T \in \mathbf{R}$ に対して，$Q = (T-4r^2, T) \times B(x,2r)$ 上の放物型方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}\right) u = 0 \tag{21}$$

の任意の非負値解 u が，

$$\sup_{(t,y)\in Q^-} u(t,y) \le \eta \inf_{(t,y)\in Q^+} u(t,y) \qquad [\mathrm{H}]_{\mathcal{E}}$$

を満たすとき，放物型ハルナック不等式が成り立つという．ただし，$Q^- = (T-3r^2, T-2r^2) \times B(x,r)$, $Q^+ = (T-r^2, T) \times B(x,r)$ である．

定理 5.5. 上述の条件 [II] のもとに，以下の２つの条件は同値である．

(1) ダブリング条件 $[\mathrm{D}]_{\mathcal{E}}$ と弱 2–ポアンカレ不等式 $[\mathrm{P}]_{\mathcal{E}}$ が成り立つ．

(2) 放物型ハルナック不等式 $[\mathrm{H}]_{\mathcal{E}}$ が成り立つ．

さらに定数 η は κ と τ のみによって，定数 κ と τ は η のみによってそれぞれ決まる．

放物型ハルナック不等式 $[\mathrm{H}]_{\mathcal{E}}$ の重要な応用として，放物型方程式の解のヘルダー連続性に関するアプリオリ評価が導かれる．

定理 5.6. 放物型ハルナック不等式 $[\mathrm{H}]_{\mathcal{E}}$ を仮定する．このとき，η のみによるある正数 C と $\alpha \in (0,1)$ が存在して，$Q = (T-4r^2, T) \times B(x,2r)$ 上の放物型方程式 (21) の任意の解 u に対して，

$$|u(s,y) - u(t,z)| \le C \sup_Q |u| \left(\frac{|s-t|^{1/2} + d(y,z)}{r}\right)^{\alpha}, \quad (s,y),\ (t,z) \in (T-r^2, T) \times B(x,r) \tag{22}$$

が成り立つ．

系 5.7. Y を相対コンパクトとし，ψ を固有値 λ の $\mathcal{E}_Y$ の固有関数とする．このとき，

$$|\psi(y) - \psi(z)| \le C_1 \min\{C_2 \lambda^{\kappa/2}, e^{\lambda r^2} r^{-\kappa}\} \|\psi\|_{L^2} \mu(Y)^{1/2} \left(\frac{d(y,z)}{r}\right)^{\alpha}, \quad y, z \in B(x,r) \subset B(x,2r) \subset Y$$

がなりたつ．ただし $\kappa > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $\alpha \in (0,1)$ は η のみによって決まる定数である．

次に熱核に関する精密なガウス型の評価を述べる．

定理 5.8. 性質 [II], [III], [IV] を仮定する．このとき，$\mathcal{E}$ の熱核は次のような上からの評価式を満たす．

$$\begin{aligned} p(t,x,y) \le\ & C_1 \mu(B(x,\sqrt{t}))^{-1/2} \mu(B(y,\sqrt{t}))^{-1/2} \times \\ & \exp\left(-\frac{d_{\mathcal{E}}(x,y)^2}{4t}\right)\left(1 + \frac{d_{\mathcal{E}}(x,y)^2}{t}\right)^{\kappa/2} \\ & x, y \in Y, 0 < t \le \min\{d_{\mathcal{E}}(x, X\setminus Y), d_{\mathcal{E}}(y, X \setminus Y)\}^2 \end{aligned}$$

ただし C_1 は与えられた定数 κ, τ のみによって決まる正数である．

さらに $x, y \in Y$ に対して，これらを結ぶ長さ $d_{\mathcal{E}}(x,y)$ の Y 内の曲線 $\gamma(s)$ $(0 \le s \le 1)$ が存在するとき，

$$\begin{aligned} p(t,x,y) \quad \geq \quad & C_2 \mu(B(x,\sqrt{t}))^{-1/2} \mu(B(y,\sqrt{t}))^{-1/2} \times \\ & \exp\left(-C_3 \frac{d_{\mathcal{E}}(x,y)^2}{t}\right) \exp\left(-\frac{C_4}{R^2} t\right) \\ & x, y \in Y, 0 < t \le R^2 := \min\{d_{\mathcal{E}}(\gamma(s), X \setminus Y) \mid 0 \le s \le 1\}^2 \end{aligned}$$

ただし C_2, C_3, C_4 は与えられた定数 κ, τ のみによって決まる正数である．

これと関連して，次に述べる事実も後の議論で重要である．

補題 5.9. [III], [IV] のもとに，κ と τ のみによって決まるある正数 C, C' が存在して，$B(x,2r) \subset Y$ ならば

$$1 - \int_{B(x,r)} p(t,x,y)\ d\mu(y) \le C \exp\left(-C' \frac{r^2}{t}\right), \quad 0 < t \le r^2$$

が成り立つ．

次に放物型ハルナック不等式から体積の評価を与える．

定理 5.10. X の開集合 A に対して，ある正数 η と ρ が存在して，任意の $x \in A$ と $Q = (T - 4\rho^2) \times B(x, 2\rho)$ 上の放物型方程式 (21) の任意の非負値解が正数 η に対して放物型ハルナック不等式 $[\mathrm{H}]_{\mathcal{E}}$ を満たすとする．さらにある正数 R と点 $o \in A$ が存在して，任意の点 $x \in A$ は o とその長さが R を超えない，A の中の曲線で結ぶことができるとする．このとき，次の体積評価が成り立つ．

$$\mu(A) \le \mu(B(o,\rho)) \exp C(1 + R/\rho)$$

が成り立つ．ただし C は η のみによってきまる正の数である．

証明　$p_A(t,x,y)$ を $\mathcal{E}_A$ の熱核とし，まず

$$u(t,x) = \int_A p_A(t,x,y) \chi_{B(o,\rho)}(y)\ d\mu(y)$$

とおく．次に

$$v(t,x) = \int_A p_A(T-t,x,y)\ d\mu(y),\ 0 < t < T$$

とおく．ただし T は後で適当なものをとる．このとき，

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_A u(t,x) v(t,x)\ d\mu(x) \\ & \quad = \int_A -\mathcal{L}_A u(t,x) v(t,x) + u(t,x) \mathcal{L}_A v(t,x)\ d\mu(x) \\ & \quad = \int_A -\mu_{\langle u,v \rangle} + \mu_{\langle u,v \rangle} = 0 \end{aligned}$$

となり，したがって，

$$\text{(23)} \qquad \int_A u(0,x)v(0,x)\ d\mu(x) = \int_A u(T,x)v(T,x)\ d\mu(x)$$

が成り立つ．ここで左辺を評価すると，

$$\begin{aligned}\int_{B(o,\rho)} v(0,x)\ d\mu(x) &\le \mu(B(o,\rho))^{1/2}\left(\int_A v(0,x)^2\ d\mu(x)\right)^{1/2}\\ &\le \mu(B(o,\rho))^{1/2}\mu(A)^{1/2}\end{aligned}$$

となる．一方，$T > ([2R/\rho]+1)\rho^2$ として，点 o と点 $x \in A$ を結ぶ長さ $L \le R$ の曲線 $\gamma : [0,L] \to A$ を取り，$x_n = \gamma(n\rho/2)$, $t_n = T - ([2L/\rho] + 1 - n)\rho^2/2$ $(n = 0,1,2,\ldots,[2L/\rho])$ とおく．このとき，放物型ハルナック不等式 $[\mathrm{H}]_{\mathcal{E}}$ を各 $B(x_n, 2\rho)$ において適用して，

$$u(T-([2L/\rho]+1)\rho^2/2, o) = u(t_0,x_0) \le \eta u(t_1,x_1) \le \cdots \le \eta^{[2L/\rho]+1}u(T,x)$$

を得る．同様に

$$u(T-([2R/\rho]+1)\rho^2, o) \le \eta^{[2R/\rho]-[2L/\rho]}u(T-([2L/\rho]+1)\rho^2/2, o)$$

が成り立ち，これらから

$$u(T-([2R/\rho]+1)\rho^2/2, o) \le \eta^{[2R/\rho]+1}u(T,x), \quad x \in A$$

が従う．ここで $T = [2R/\rho]\rho^2/2 + \alpha\rho^2$ とおくと，補題 5.9 より

$$u(\alpha\rho^2, o) = \int_{B(o,\rho)} p_A(\alpha\rho^2, o, x)\ d\mu(x) \ge 1 - C\exp(-C'/\alpha)$$

となる．したがって，$C\exp(-C'/\alpha) \le 1/2$ となるように α を選ぶと，

$$u(T,x) \ge \frac{1}{2}\eta^{-[2R/\rho]-1}, \quad x \in A$$

となり，結局 (23) の右辺の評価

$$\begin{aligned}&\int_A u(T,x)v(T,x)\ d\mu(x) \ge \\ &\qquad \frac{1}{2}\eta^{-[2R/\rho]-1}\int_A v(T,x)\ d\mu(x) = \frac{1}{2}\eta^{-[2R/\rho]-1}\mu(A)\end{aligned}$$

を得る．このようにして，$\mu(A)$ の評価が得られる．これで定理 5.10 の証明を終える．

定理 5.11. 条件 [C] を満たす強局所的正則ディリクレ形式 $X = (X, \mu, \mathcal{E}, d_{\mathcal{E}})$ が，(正数 κ と R に対して) ダブリング条件 $[\mathrm{D}]_{\mathcal{E}}$ を満たすとする．このとき，$C^{0,1}_{loc}(X, d_{\mathcal{E}}) \subset \mathcal{A}[\mathcal{E}]$ となり，

$$\Gamma(f,f)^{1/2} \le \mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} f \quad \mu - a.e.,\ f \in C^{0,1}_{loc}(X, d_{\mathcal{E}})$$

が成り立つ．さらに (正数 τ と R に対して) 弱 2–ポアンカレ不等式 $[P]_{\mathcal{E}}$ を満たすとき，κ と τ のみに依るある定数 C が存在して，

$$C\mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} f \le \Gamma(f,f)^{1/2} \quad \mu - a.e.,\ f \in C^{0,1}_{loc}(X, d_{\mathcal{E}})$$

が成り立つ．

証明　まず $f \in C^{0,1}_{loc}(X, d_{\mathcal{E}})$ と距離球体 $B(o,r)$ $(r < R)$ を任意に固定する．このとき，$d_{\mathcal{E}}$ は弧長距離で条件 $[D]_{\mathcal{E}}$ を仮定しているので，補題 4.14 が適用できる．実際，この補題における f の近似関数 f_* は，定理 5.1 (2) により

$$\begin{cases} \Gamma(f_*, f_*)^{1/2}(x) & \leq & \mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} f_*(x) & \mu - a.e.\ x \in K_* \\ \Gamma(f_*, f_*)^{1/2}(x) & \leq & L & \mu - a.e.\ x \in B(o,r) \setminus K_* \end{cases}$$

を満たすことが確かめられる．ここで補題 4.14 の和集合 $\cup_j B(x_j, r_j)$ を K_* と表し，$L = \mathbf{Lip}(f_{|B(o,r)})$ である．さらに補題 4.14 の正数 η, ψ, ξ, χ として 0 に収束する数列 η_i, ψ_i, ξ_i, χ_i をとり，これらに対応する u_* を u_i とおき，K_* を K_i とおく．このとき，

$$\lim_{i\to\infty} |f_i - f|_{L^\infty} = 0$$

$$\lim_{i\to\infty} \int_{B(o,r)} |\mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} f_i - \mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} f|^2 \, d\mu = 0$$

$$\lim_{i\to\infty} \mu(B(o,r) \setminus K_i) = 0$$

が従う．よって，

$$\begin{aligned} &\int_{B(o,r)} \Gamma(f_i, f_i)\, d\mu \\ &\quad = \int_{B(o,r)\setminus K_i} \Gamma(f_i, f_i)\, d\mu + \int_{K_i} \Gamma(f_i, f_i)\, d\mu \\ &\quad \leq L\mu(B(o,r) \setminus K_i) + \int_{K_i} (\mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} f_i)^2\, d\mu \\ &\quad \leq L\mu(B(o,r) \setminus K_i) + \int_{B(o,r)} (\mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} f_i)^2\, d\mu \end{aligned}$$

とあわせて，

$$\begin{aligned} \int_{B(o,r)} d\mu_{\langle f,f\rangle} &\leq \liminf_{i\to\infty} \int_{B(o,r)} \Gamma(f_i, f_i)\, d\mu \\ &\leq \liminf_{i\to\infty} \int_{B(o,r)} (\mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} f_i)^2\, d\mu \\ &= \int_{B(o,r)} (\mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} f)^2\, d\mu \end{aligned}$$

が成り立つ．これが任意の $B(o,r)$ で成り立つので，$f \in \mathcal{A}[\mathcal{E}]$ となり，$\Gamma(f,f)$ と $\mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}}$ のルベーグ点 o において

$$\Gamma(f,f)^{1/2}(o) \leq \mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} f(o)$$

が成り立つ．

後半の主張は，命題 1.6 より従う．これで定理 5.11 の証明を終える．

この定理より，条件 $[D]_{\mathcal{E}}$ のもとに，$\mu_{\langle f,f\rangle}$ に対して弱 2–ポアンカレ不等式が成り立てば，$(\mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} f)^2$ に対しても成り立つことが判る．した

がって余接束 T^*X が定まり，$\Gamma(f,f)$ ($f \in C^{0,1}_{loc}(X,d_{\mathcal{E}})$) は T^*X 上の L^∞ リーマン計量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を定める．すなわち，

$$\langle df, dg\rangle(x) = \Gamma(f,g)(x) =$$
$$\frac{1}{2}(\Gamma(f+g,f+g)(x) - \Gamma(f,f)(x) - \Gamma(g,g)(x)), \quad \mu - a.e.\ x \in X$$

さらに，$(U_i, \{f_1^{(i)}, \ldots, f_{n(i)}^{(i)}\})$ を定理 2.8 のボレル集合とリプシッツ関数の組とする．このとき，任意の $f \in C^{0,1}_{loc}(X,d_{\mathcal{E}})$ に対して，U_i 上の有界可測関数の組 $(a(f,x)) = (a_1(f,x), \ldots, a_{n(i)}(f,x))$ が存在して，$\mathrm{Lip}(f - \sum_{j=1}^{n(i)} a_j(f,x) f_j^{(i)})(x) = 0$ ($\mu - a.a.x \in U_i$) となる．したがって，定理 5.11 より，

$$\Gamma(f,f)(x) = \sum_{j,k=1}^{n(i)} a_j(f,x)a_k(f,x)\Gamma(f_j^{(i)}, f_k^{(i)})(x),\ \mu - a.a.\ x \in U_1$$

と表される．

ノート 5 Fukushima-Oshima-Takeda [22] と Mosco [57] を主に参考にして，ディリクレ空間に関する基本的な事柄を説明している．

性質 [I], [II], [III] が互いに同値であることの証明や関連した結果については，たとえば，Davies [16]，Saloff-Coste [65] を参照．補題 5.2, 補題 5.3 を示すにあたり，[41] を参考にしている．定理 5.11 は [37] から引用している．

定理 5.1, 定理 5.4, 定理 5.5, 定理 5.6, および 定理 5.8 は，K.-T. Sturm [72] によっている．これらは，リーマン多様体の場合に証明されていた結を，この節で扱っているディリクレ空間へ一般化したものである．[25]，[64] 参照．補題 5.9 は，たとえば定理 5.8 を用いて証明されるが，[72] の Lemma 4.6 を言い換えたものである．$\mathcal{A}[\mathcal{E}] = D[\mathcal{E}]$ の場合，熱核の下からの評価は改良され，Ramirez [63] において，

$$\lim_{t\to 0} 4t \log p(t,x,y) = -d_{\mathcal{E}}(x,y)^2$$

が示されている．[33] も参照．なお，リーマン多様体の場合，[51] が重要な文献である．

ダブリング条件，ポアンカレ不等式，定理 5.4 の形のソボレフ不等式と弱解 $\mathcal{L}u = q$ のヘルダー連続性については，たとえば，[6]，[52] も参照．

定理 5.10 において放物型ハルナック不等式から体積の評価を導くにあたって，Ishige-Murata [35] を参考にしている．ただし，補題 5.9 を用いることによって，[35] の Theorem 5.6 の評価より改良されている．実際，定理 5.10 の評価は，完備リーマン多様体の場合のリッチ曲率の下限から得られるビショップの体積評価に (定数の最良性を除き増大度のみに関して) 対応したものになっている (1.3 分節参照)．

この節で考察されているディリクレ空間における連鎖律 (5.1 分節 (iii) 参照) に関しては，この論説では応用されていない．しかし，たとえば

関数だけではなく写像を考察の対象とするときには重要な役割を果たす．これについては [37], II を参照．

6. ディリクレ空間の収束

前節における一連の評価は，同じソボレフ不等式，ダブリング条件，ポアンカレ不等式などを満たすディリクレ空間すべてに一様に成り立つので，このような空間の列を考えるとき，その極限の存在を示唆してくれる．この節において，測度距離空間の収束の問題との関連から，ディリクレ空間に対しても収束の問題について考察する．

6.1. ディリクレ形式の収束の例． 区間上の正値可測関数の定めるディリクレ形式の収束について，簡単な場合に考察することから始める．

まず，正の数 α, β, γ に対して，区間 $I = (-\alpha, \alpha)$ 上の可測関数 $a(x)$ で，

$$\beta \le a(x) \le \gamma, \quad a.e.\ x \in I$$

を満たすもの全体を $\mathcal{C}(\beta, \gamma)$ と記し，$\mathcal{C}(\beta) = \cup_{\beta<\gamma}\mathcal{C}(\beta,\gamma), \mathcal{C} = \cup_{\beta>0}\mathcal{C}(\beta)$ とおく．各 $a \in \mathcal{C}$ は2次形式

$$\mathcal{E}^{(a)}(u,u) = \int_{-\alpha}^{\alpha} a(x)u'(x)^2 dx, \quad u \in C_0^1(I)$$

を定める．これはソボレフ空間 $W_0^{1,2}(I)$ を定義域とする正則ディリクレ形式に拡張されるが，これも同じく $\mathcal{E}^{(a)}$ と表す．このとき，$\mathcal{E}^{(a)}$ の無限小生成作用素 $\mathcal{L}^{(a)}$ に対して，その逆作用素 $G^{(a)} = {\mathcal{L}_a}^{-1}$ の積分核 (グリーン関数) $g^{(a)}(x,y)$ は次で与えられる．

$$g^{(a)}(x,y) = \begin{cases} k\phi(x)\psi(y), & x \le y \\ k\psi(x)\phi(y), & x \ge y \end{cases}$$

ただし

$$\phi(x) = \int_{-\alpha}^{x} a(t)^{-1}\ dt,\ \psi(x) = \int_{x}^{\alpha} a(t)^{-1}\ dt,$$

$$k^{-1} = \phi(x) + \psi(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} a^{-1}(t)\ dt$$

である．

ここで

$$Ja(x) = \int_0^x a(t)^{-1}\ dt$$

とおくと，Ja は $\mathcal{L}^{(a)}Ja = 0$ の弱解であることに注意しておく．また，$\mathcal{E}^{(a)}$ の内在的距離 $d^{(a)}$ は

$$d^{(a)}(x,y) = \left| \int_x^y a(t)^{-1/2}\ dt \right|$$

である．

さて，$\mathcal{C}$ の列 $\{a_n\}$ に対して，$\mathcal{E}^{(a_n)}$, $\mathcal{L}^{(a_n)}$ の固有値・固有関数，グリーン関数 $g^{(a_n)}$，内在的距離 $d^{(a_n)}$ などの収束を考察したい．

はじめに次の命題を示す．

命題 6.1. C における関数列 $\{a_n\}$ と関数 a に対して，$G^{(a_n)}$ は $G^{(a)}$ に弱収束する，すなわち

任意の弱収束列 $f_n \to f \in L^2(I)$ に対して，$G^{(a_n)} f_n$ は $G^{(a)} f_n$ に弱収束する

と仮定する．このとき，$\mathcal{E}^{(a_n)}$ は $\mathcal{E}^{(a)}$ にモスコ 収束する．すなわち次の (1), (2) が成り立つ．

(1) L^2 関数列 u_n が u に弱収束するならば，

$$\mathcal{E}_a(u,u) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_{a_n}(u_n,u_n)(\le +\infty)$$

(2) 任意の $u \in L^2(I)$ に対して，u に強収束する関数列 u_n で，

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}^{a_n}(u_n,u_n) \le \mathcal{E}^{(a)}(u,u)(\le +\infty)$$

を満たすものが存在する．

逆に $\mathcal{L}^{(a_n)}$ の第一固有値が一様に正数 δ で下から押さえられているとき，$\mathcal{E}^{(a_n)}$ は $\mathcal{E}^{(a)}$ にモスコ 収束するならば，$G^{(a_n)}$ は $G^{(a)}$ に弱収束する．

証明　$G^{(a_n)}$ は $G^{(a)}$ に弱収束すると仮定して，まず (1) を検証する．$L^2(I)$ の関数列 $\{u_n\}$ が u に弱収束するとする．任意の $v \in D[\mathcal{L}^a]$ に対し，$f = \mathcal{L}^a v$，$v_n = G^{(a_n)}$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}^{(a_n)}(u_n,v_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_I u_n \mathcal{L}^{(a_n)} v_n \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_I u_n f \, dx \\ &= \int_I uf \, dx = \int_I u\mathcal{L}^{(a)} v \, dx = \mathcal{E}^{(a)}(u,v)\end{aligned}$$

となる．一方，

$$\mathcal{E}^{(a_n)}(v_n,v_n) = \int_I v_n f \, dx = \int_I G^{(a_n)} f \cdot f \, dx$$

であり，仮定より $G^{(a_n)} f$ は $G^{(a)} f$ に弱収束することから，

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}^{(a_n)}(v_n,v_n) = \int_I Gf \cdot f \, dx = \mathcal{E}^{(a)}(v,v)$$

が従う．以上より

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(a)}(u,v)^2 &= \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}^{(a_n)}(u_n,v_n)^2 \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}^{(a_n)}(u_n,u_n)\mathcal{E}^{(a_n)}(v_n,v_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}^{(a_n)}(u_n,u_n) \cdot \mathcal{E}^{(a)}(v,v)\end{aligned}$$

これから，$D[\mathcal{L}^{(a)}]$ は $D[\mathcal{E}^{(a)}]$ で稠密であること ((17) 参照) に注意すると，

$$\mathcal{E}^{(a)}(u,u) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}^{(a_n)}(u_n,u_n)$$

が導かれる．

つぎに (2) を示す．まず $u \in D[\mathcal{L}^{(a)}]$ とする．このとき，$f = \mathcal{L}^{(a)}u$ とおく．すなわち $u = G^{(a)}f$．そこで $u_n = G^{(a_n)}f$ とおくと，u_n は u に弱収束することから，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}^{(a_n)}(u_n,u_n) &= \lim_{n\to\infty}\int_I fG^{(a_n)}f\,dx = \int_I fG^{(a)}f\,dx\\ &= \int_I u\mathcal{L}^{(a)}u\,dx = \mathcal{E}^{(a)}(u,u)\end{aligned}$$

となる．さらに

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\langle u_n,u_n\rangle_{L^2} &= \lim_{n\to\infty}\int fG^{(a_n)}u_n\,dx = \int fG^{(a)}u\,dx\\ &= \langle u,u\rangle_{L^2}\end{aligned}$$

したがって，u_n は u に強収束する．このように u_n が求めるものであることが示された．それから $u \in D[\mathcal{E}^{(a)}]$ の場合には，任意の正数 ε に対して，

$$\|u-u_\varepsilon\|_{L^2} + \mathcal{E}^{(a)}(u-u_\varepsilon, u-u_\varepsilon) \le \varepsilon$$

をみたす $u_\varepsilon \in D[\mathcal{L}^{(a)}]$ が取れることに注意して，各 u_ε に上に述べた関数列 $u_{\varepsilon,n}$ を取り，0 に収束する適当な正数列 $\varepsilon(n)$ をとって，求める $u_{\varepsilon(n),n}$ を得る．

次に $\mathcal{L}^{(a_n)}$ の第一固有値が一様に正数 δ で下から押さえられ，$\mathcal{E}^{(a_n)}$ は $\mathcal{E}^{(a)}$ にモスコ 収束するとする．このとき，任意の弱収束列 $f_n \to f \in L^2(I)$ に対して，$G^{(a_n)}f_n$ が $G^{(a)}f$ に弱収束することを見たい．まず

$$\begin{aligned}\|G^{(a_n)}f_n\|_{L^2}^2 &\le \delta^{-1}\mathcal{E}^{(a_n)}(G^{(a_n)}f_n, G^{(a_n)}f_n) = \delta^{-1}\int f_nG^{(a_n)}f_n\,dx\\ &\le \delta^{-1}\|f_n\|_{L^2}\|G^{(a_n)}f_n\|_{L^2}\end{aligned}$$

より，

$$\|G^{(a_n)}f_n\|_{L^2} \le \delta^{-1}\|f_n\|_{L^2} \le \delta^{-1}\sup_n\|f_n\|_{L^2} < +\infty$$

が従う．よって弱収束する部分列 $G^{(a_m)}f_m \to \hat{u}$ が存在する．ここで任意の $v \in D[\mathcal{E}^{(a)}]$ に対して，v に強収束する $v_n \in D[\mathcal{E}^{(a_n)}]$ で，$\mathcal{E}^{(a_n)}(v_n,v_n) \to \mathcal{E}^{(a)}(v,v)$ となるものを選ぶ．このとき，(18) より

$$\mathcal{E}^{(a_n)}(u_n,u_n) - 2\langle f,u_n\rangle_{L^2} \le \mathcal{E}^{(a)}(v_n,v_v) - 2\langle f,v_n\rangle_{L^2}$$

となり，$m \to \infty$ として，

$$\mathcal{E}^{(a)}(\hat{u},\hat{u}\rangle_{L^2} - 2\langle f,\hat{u}\rangle_{L^2} \le \mathcal{E}^{(a)}(v,v) - 2\langle f,v\rangle_{L^2}$$

となって，$\hat{u} = G^{(a)}f$ であることが判る． 以上で $u_n = G^{(a_n)}f_n$ が $u = G^{(a)}f$ に弱収束することが確かめられた．

注意 6.1. $G^{(a_n)}$ は $G^{(a)}$ に弱収束することと，強収束すること，すなわち

任意の強収束列 $f_n \to f \in L^2(I)$ に対して，$G^{(a_n)}f_n$ は $G^{(a)}f_n$ に強収束する

ということとは，グリーン作用素が対称であることより同値である．それから命題 6.1 における $a \in \mathcal{C}$ の役割，すなわち極限の形式が $\mathcal{E}^{(a)}$ であるということは，どこにも使われていない (モスコ収束によってディリクレ形式が定まる)．さらに $G = \mathcal{L}^{-1}$ の代わりに $G_\zeta = (\mathcal{L} + \zeta)^{-1}$ を用いれば，$G_\zeta^{(a_n)}$ の弱収束，強収束，そして $\mathcal{E}^{(a_n)}$ のモスコ収束は互いに同値であることがわかる．実際これはより一般のディリクレ形式に関して成り立つことである．次節でスペクトルに関する収束も含めて，より一般的状況で考察する．

さて，$\mathcal{E}^{(a)}$ $(a \in \mathcal{C})$ の考察を続ける．与えられた関数列 $\{a_n\} \subset \mathcal{C}$ に対して，必要ならば部分列を取ることによって，上の命題 6.1 が成り立つような $\{a_n\}$ を見つけることができるとは限らない．すなわち $\mathcal{C}$ の元から決まるディリクレ形式の族が命題 6.1 に述べた収束に関する位相で閉じているわけではない．また，内在的距離に関するグロモフ - ハウスドルフ収束との関係も明らかではない．そこで，$\mathcal{C}(\beta)$ あるいは $\mathcal{C}(\beta, \gamma)$ の中の族に制限して考えてみる．

まず $a \in \mathcal{C}(\beta)$ に対して，グリーン関数 $g^{(a)}$ は一様リプシッツ連続である．すなわち

$$|g^{(a)}(x,y) - g^{(a)}(x',y')| \le \beta(|x - x'| + |y - y'|), \quad x, x', y, y' \in I \tag{24}$$

が成り立つことに注意する．実際，

$$g^{(a)}(x,y) - g^{(a)}(x',y') = g^{(a)}(x,y) - g^{(a)}(x,y') + g^{(a)}(x,y') - g^{(a)}(x',y')$$

より

$$|g^{(a)}(x,y) - g^{(a)}(x',y)| \le \beta|x - x'|$$

を示すことになるが，これは $-\alpha \le x \le x' \le y \le \alpha$ のとき，

$$\begin{aligned} |g^{(a)}(x,y) - g^{(a)}(x',y)| &= |k\phi(x)\psi(y) - k\phi(x')\psi(y)| \\ &= k\psi(y)|\phi(x) - \phi(x')| \le \beta|x - x'| \end{aligned}$$

と確かめられ，$-\alpha \le y \le x \le x' \le \alpha$ のときも同様である．また $-\alpha \le x \le y \le x' \le \alpha$ のときには，

$$\begin{aligned} &|g^{(a)}(x,y) - g^{(a)}(x',y)| \\ &\quad \le |g^{(a)}(x,y) - g^{(a)}(y,y)| + |g^{(a)}(y,y) - g^{(a)}(x',y)| \\ &\quad \le \beta|x - y| + \beta|y - x'| = \beta|x - x'| \end{aligned}$$

このように (24) が確かめられた．

(24) から $\mathcal{C}(\beta)$ の任意の関数列 $\{a_n\}$ に対し，$\{g^{(a_n)}\}$ は $I \times I$ 上の同等連続一様有界な関数列となり，したがって $\{g^{(a_m)}\}$ が (24) を満たすある関数 g に一様収束するような部分列 $\{a_m\}$ を含むことが判る．

それから $a \in \mathcal{C}(\beta)$ に対して，$\mathcal{E}^{(a)}$ の内在的距離 $d^{(a)}$ は

$$d^{(a)}(x,y) \le \beta^{-1/2}|x - y|, \quad x, y \in I \tag{25}$$

を満たすので，$\{d^{(a_n)}\}$ も $I \times I$ 上の同等連続一様有界な関数列となり，$d^{(a_m)}$ が (25) を満たすある関数 d に一様収束するような部分列 $\{a_m\}$ を含むことになる．

しかし $\mathcal{C}(\beta)$ が命題 6.1 で述べた収束に関する位相や内在的距離に関するグロモフ - ハウスドルフ収束位相で閉じてはいない．

そこでさらに $\mathcal{C}(\beta,\gamma)$ に制限すると状況がより明確になる．実際 $a_1, a_2 \in \mathcal{C}(\beta,\gamma)$ に対して，$x \leq y$ として，

$$
\begin{aligned}
&|g^{(a_1)}(x,y) - g^{a_2}(x,y)| \\
&\quad = |k_1\phi_1(x)\psi_1(y) - k_2\phi_2(x)\psi_2(y)| \\
&\quad \leq |k_1^{-1} - k_2^{-1}|k_1k_2\phi_1(x)\psi_1(y) + k_2|\phi_1(x) - \phi_2(x)|\psi_1(y) \\
&\qquad +k_2\phi_2(x)|\psi_1(y) - \psi_2(y)| \\
&\quad \leq \beta\gamma|k_1^{-1} - k_2^{-1}| + \beta\gamma|\phi_1(x) - \phi_2(x)||k_1^{-1} - k_2^{-1}| + |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \\
&\quad \leq C_1|Ja_1 - Ja_2|_{L^\infty} \ (C_1 = 2(1+\beta\gamma))
\end{aligned}
$$

同様に β, γ できまるある定数 C_2 があって，

$$C_2\|Ja_1 - Ja_2\|_{L^\infty} \leq \|g^{(a_1)} - g^{(a_2)}\|_{L^\infty}$$

を示すことができる．以上を次の命題にまとめる[24]．

命題 6.2. $a_1, a_2 \in \mathcal{C}(\beta,\gamma)$ に対して，

$$C_1\|Ja_1 - Ja_2\|_{L^\infty} \leq \|g^{(a_1)} - g^{(a_2)}\|_{L^\infty} \leq C_2\|Ja_1 - Ja_2\|_{L^\infty}$$

が成り立つ．ただし C_1, C_2 は β と γ のみによる定数である．

最後に命題 6.1 の意味で収束する典型的な例を述べてこの節を終える．

例 6.1. $a \in \mathcal{C}(\beta,\gamma)$ に対して，$a_n(x) = a(nx)$ によって関数列 $\{a_n\} \subset \mathcal{C}(\beta,\gamma)$ を定める．このとき，

$$\bar{a}^{-1} = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} a(t)^{-1}\, dt$$

とすると，Ja_n は $J\bar{a}$ に一様収束し，命題 6.2 より $g^{(a_n)}$ は $g^{(\bar{a})}$ に一様収束する．したがって $\mathcal{E}^{(a_n)}$ は $\mathcal{E}^{(\bar{a})}$ にモスコ収束する．一方内在的距離 $d^{(a_n)}$ は

$$d_\infty(x,y) = \hat{a}^{-1/2}|x-y|, \quad \hat{a}^{-1/2} = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} a(t)^{-1/2}\, dt$$

に一様収束する．このように a が定数であるときそのときに限り $d^{(\bar{a})} = d_\infty$ となることが判る．

---

[24] ノート 6 参照

6.2. ディリクレ空間の収束 – その１–. ここではディリクレ空間の収束を定義し，コンパクト性定理をひとつ与えたい．そのためにまず一般的視点から２次形式の収束の定義を与え，いくつか基本的な結果を述べる[25].

可分ヒルベルト空間 H_n，および可分ヒルベルト空間 H とその稠密な部分空間 $\mathcal{C}$ の組 $(H, \mathcal{C})$ を考える．各 n に対して，線形写像 $\Phi_n : \mathcal{C} \to H_n$ が与えられ，次の条件を満たしているとする．

$$\lim_{n\to\infty} |\Phi_n(u)|_{H_n} = |u|_H, \quad u \in \mathcal{C} \tag{26}$$

この仮定の下に H_n の元の列や作用素列の収束の定義を述べる．

定義 6.1. (1) 列 $u_n \in H_n$ が $u \in H$ に強収束するとは，u に強収束する $\mathcal{C}$ の中の列 $\tilde{u}_k$ が存在して，

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} |\Phi_n(\tilde{u}_k) - u_n|_{H_n} = 0$$

となるときをいう．(とくに $u \in \mathcal{C}$ に対しては，$\Phi_n(u)$ 自身が u に強収束する.)

(2) 列 $u_n \in H_n$ が $u \in H$ に弱収束するとは，任意の $v \in H$ とそれに強収束する列 $v_n \in H_n$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n \rangle_{H_n} = \langle u, v \rangle_H$$

となるときをいう．

定義 6.2. (1) H_n の有界線形作用素 B_n が H の有界線形作用素 B に強収束するとは，任意の強収束列 $u_n \in H_n \to u \in H$ に対して，$B_n(u_n)$ が $B(u)$ に強収束するときをいう．強収束を弱収束に代えてこれが成り立つとき，B_n は B に弱収束するという．

(2) H_n 上の２次形式 $\mathcal{E}_n$ が，H 上の２次形式 $\mathcal{E}$ にガンマ (Γ)-収束するとは，次の２つの条件を満たすときをいう．

(i) 列 $u_n \in H_n$ が $u \in H$ に強収束するならば，

$$\mathcal{E}(u, u) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(u_n, u_n) (\le +\infty)$$

(ii) 任意の $u \in H$ に対して，それに強収束する列 $u_n \in H_n$ が存在して，

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(u_n, u_n) \le \mathcal{E}(u, u) (\le +\infty)$$

(3) H_n 上の２次形式 $\mathcal{E}_n$ が，H 上の２次形式 $\mathcal{E}$ にモスコ収束するとは，次の２つの条件を満たすときをいう．

(i) 列 $u_n \in H_n$ が $u \in H$ に弱収束するならば，

$$\mathcal{E}(u, u) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(u_n, u_n) (\le +\infty)$$

(ii) 任意の $u \in H$ に対して，それに強収束する列 $u_n \in H_n$ が存在して，

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(u_n, u_n) \le \mathcal{E}(u, u) (\le +\infty)$$

---

[25] ノート 6 参照

注意 6.2. (1) において，B_n および B が対称作用素のとき，強収束と弱収束は一致する．また，(2) と (3) において，2次形式を $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$ に値をもつ関数 $F_n : H_n \to \overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$，$F : H \to \overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$ に代えて，関数列の２つの収束が定義される．モスコ収束は ガンマ収束を意味し，いずれも極限の関数 F は下半連続になる．さらに各 F_n が２次形式の場合，ガンマ収束極限 F が閉形式となることを見るのは易しい．

次にガンマ収束に関するコンパクト性を示す定理と，モスコ収束に関する基本的な定理を紹介する．

定理 6.3. 任意の関数列 $F_n : H_n \to \overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$ は，ある下半連続関数 $F : H \to \overline{\mathbf{R}}$ にガンマ収束する部分列を含む．

証明　H の開集合からなる可算基底 $\mathcal{B} = \{U\}$ と正の整数 k に対して，

$$\hat{U}_k = \cup_n \{z \in H_n \mid |\Phi_n(y) - z|_{H_n} < k^{-1},\ y \in U \cap \mathcal{C}\}$$

とおく．各 $\hat{U}_k$ を固定すると，数列 $\{\inf\{F_n(z) \mid z \in \hat{U}_k \cap H_n\}\}_{n=1,2,3,\ldots}$ が収束するような部分列が取れる．$\mathcal{B}$ は可算個からなるので，適当な部分列 $\{m\}$ を取って，すべての $\hat{U}_k$ に対して，$\inf\{F_m(z) \mid z \in \hat{U}_k \cap H_m\}$ が収束するとしてよい．このとき，$x \in H$ に対して，$\mathcal{B}(x) = \{\hat{U}_k \mid x \in U,\ k = 1, 2, 3, \ldots\}$ とおいて，

$$F(x) = \sup_{V \in \mathcal{B}(x)} \lim_{m \to \infty} \inf\{F_m(z) \mid z \in V \cap H_m\}$$

と定義する．このとき，F_m は F にガンマ収束することがわかる．

定理 6.4. H_n および H 上の稠密な定義域を持つ閉形式 $\mathcal{E}_n$ と $\mathcal{E}$ がそれぞれ与えられている．$\mathcal{E}_n$ と $\mathcal{E}$ のレゾルベント，半群，無限小生成作用素，スペクトル測度をそれぞれ $\{G_\zeta^{(n)}, P_t^{(n)}, \mathcal{L}^{(n)}, E^{(n)}\}$ および $\{G_\zeta, P_t, \mathcal{L}, E\}$ と表す．このとき，以下の命題はすべて同値である．

(1) $\mathcal{E}_n$ は $\mathcal{E}$ に モスコ収束する．

(2) ある $\zeta > 0$ に対して，$G_\zeta^{(n)}$ は G_ζ に強収束する．

(3) ある $t > 0$ に対して，$P_t^{(n)}$ は P_t に強収束する．

(4) $\lim_{x\to\infty} \psi_n(x) = 0$ を満たす連続関数 $\psi_n : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ が $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$ を満たす連続関数 $\psi : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ に一様収束するならば，$\psi_n(\mathcal{L}^{(n)})$ は $\psi(\mathcal{L})$ に強収束する．

(5) $\mathcal{L}$ の点スペクトルに含まれない任意の α と β $(\alpha < \beta)$ に対して，$E^{(n)}((\alpha, \beta])$ は $E((\alpha, \beta])$ に強収束する．

(6) 任意の強収束列 $u_n \in H_n \to u \in H$ と任意の弱収束列 $v_n \in H_n \to v \in H$ に対して，$\langle E_\lambda^{(n)} u_n, v_n \rangle_{H_n}$ が $\langle E_\lambda u, v \rangle_H$ に ($\mathbf{R}$ 上の測度として) 漠収束する．

(1) と (2) の同値性については命題 6.1 の証明が適用できる． 残りについてはここでは証明しない[26]．

[26] ノート 6 参照

定義 6.3. 2次形式の列 $\{\mathcal{E}_n\}$ に対して，$\sup_n |u_n|^2_{H_n} + \mathcal{E}_n(u_n, u_n) < +\infty$ を満たす H_n の元の任意の列 $\{u_n\}$ が強収束部分列を含むならば，$\{\mathcal{E}_n\}$ は漸近コンパクト性を満たすという．

補題 6.5. H_n の2次形式 $\mathcal{E}_n$ が漸近コンパクト性を満たすとする．このとき，$\mathcal{E}_n$ が H 上の閉形式 $\mathcal{E}$ にガンマ収束するならば，モスコ収束する．

証明 $\sup_n |u_n|^2_{H_n} + \mathcal{E}_n(u_n, u_n) < +\infty$ を満たす弱収束列 $u_n \in H_n \to u \in H$ に対して，漸近コンパクト性より，$\{u_n\}$ の任意の部分列は u に強収束する部分列 $\{u_m\}$ を含む．このとき，$\mathcal{E}(u,u) \le \liminf_{m\to\infty} \mathcal{E}_m(u_m, u_m)$ となる．このことから $\mathcal{E}(u,u) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(u_n, u_n)$ が従う．

スペクトルの収束について，次の結果がある[27]．

定理 6.6. $\mathcal{L}^{(n)}$, $\mathcal{L}$ のスペクトルをそれぞれ $\sigma(\mathcal{L}^{(n)})$，$\sigma(\mathcal{L})$ によって表す．このとき定理 6.2 の6つの命題のいずれか (したがってすべて) が成り立つならば，

$$\sigma(\mathcal{L}) \subset \lim_{n\to\infty} \sigma(\mathcal{L}^{(n)})$$

すなわち，任意の $\lambda \in \sigma(\mathcal{L})$ に対して，$\lambda_n \to \lambda$ となる $\lambda_n \in \sigma(\mathcal{L}^{(n)})$ が存在する．

次に $\{\mathcal{E}_n\}$ が漸近コンパクト性を満たすとする．このとき，レゾルベント $G^{(n)}_\zeta$，半群 $P^{(n)}_t$ はすべてコンパクト作用素となり，とくにスペクトル $\sigma(\mathcal{L}^{(n)})$ は離散的である．さらに任意の $a, b \in \mathbf{R} \setminus \sigma(\mathcal{L})$, $(a < b)$ に対して，十分大きな n を考えると，$\dim E_n((a,b])H_n = \dim E((a,b])H$ が成り立つ．とくに $\sigma(\mathcal{L}^{(n)})$ は $\sigma(\mathcal{L})$ に収束する．

さて，以下において，ディリクレ空間の列のモスコ収束，したがって定理 6.4 の意味でのスペクトル構造の収束 (簡単にスペクトル収束ということにする) に関する結果をひとつ述べたい．

以下，稠密な定義域をもつ正則ディリクレ空間 $(X, \mu, \mathcal{E})$ で次の3つの性質を満たすものを考える．

[I] ある正数 ν と A に対して，X の生成作用素 $\mathcal{L}$ の半群 P_t は

$$\|P_t u\|_{L^\infty} \le \frac{A}{t^{\nu/2}} \|u\|_{L^2}, \quad u \in L^2(X, \mu), \quad 0 < t \le 1$$

を満たす．

[V] $\mu(X) = 1$

[VI] $P_t 1 = 1$

次の定理を示そう．

定理 6.7. 正数 ν と A に対して性質 [I] を満たし，さらに [V], [VI] を満たす正則ディリクレ空間の列 $\{(X_n, \mu_n, \mathcal{E}_n)\}$ が与えられている．このとき，ある部分列 $\{X_m\}$ と，同じ条件 [I], [V], [VI] を満たす正則ディリクレ空間 $(X, \mu, \mathcal{E})$，ディリクレ形式 $\mathcal{E}$ のコア $\mathcal{C}$ および条件 (26) をみたす線形写像 $\Phi_m : \mathcal{C} \to L^2(X_m, \mu_m)$ が存在して，これによって $\mathcal{E}_m$ は $\mathcal{E}$ にスペクトル収束する．さらに $\{\mathcal{E}_m\}$ は漸近コンパクト性を満たす．

---

[27] ノート 6 参照

証明　3つのステップに分けて示す．

ステップ1 スペクトル埋め込みの方法を使う．そのためにバナッハ空間を用意したい．まず2つのヒルベルト空間

$$\ell^2 = \{(a) = (a_i)_{i=0,1,2,\dots} \mid |a|_{\ell^2} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < +\infty\}$$

$$\ell^{1,2} = \{(a) = (a_i)_{i=0,1,2,\dots} \mid |(a)|_{\ell^{1,2}} = \sum_{i=0}^{\infty} (1+i^2) a_i^2 < +\infty\}$$

を考え，連続写像 $\gamma : [0, +\infty] \to \ell^2$ で $\gamma(+\infty) = 0$ を満たすもの全体を B とおく．$\gamma \in B$ に対して，$|\gamma|_B = \sup_t |\gamma(t)|_{\ell^2}$ によってノルムを定め，$d_B(\gamma, \sigma) = |\gamma - \sigma|_B$ によって距離を定める．さらに正の数 c と $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0$ を満たす正値連続関数 $\eta(t)$ に対して，

$$K(c, \eta) := \{\gamma \in B \mid |\gamma(t)|_{\ell^{1,2}} \le \eta(t),\ |\gamma(t) - \gamma(s)|_{\ell^2} \le c|t - s|,\ 0 < t, s < +\infty\}$$

とおく．これは，B のコンパクト部分集合である．

$(X, \mu, \mathcal{E})$ を上の条件 [I], [V], [VI] を満たすディリクレ空間とする．$\{\lambda_i\}$ を固有値とし，ψ_i を λ_i に属する固有関数で，$\Psi = \{\psi_i\}$ が $L^2(X, \mu)$ の正規直交完全系をなすものとする．このとき，X から B への可測写像 $F_\Psi : X \to B$ を

$$F_\Psi[x](t) = (e^{-(t+1/t)/2} e^{-\lambda_i t/2} \psi_i(x))_{i=0,1,2,\dots}, \quad 0 \le t \le +\infty$$

によって定義する．このとき，A, ν にのみによって決まる正の数 c と $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0$ を満たす正値連続関数 $\eta(t)$ があって，

$$F_\Psi[X] \subset K(c, \eta)$$

となる．これは補題 5.2 で述べた評価式より従う．

ステップ 2 条件 [I], [V], [VI] を満たす列 $X_n = (X_n, \mu_n, \mathcal{E}_n)$ を考える．各 X_n の固有値を $\{\lambda_i^{(n)}\}$ と表し，固有関数からなる正規直交完全系 $\Psi^{(n)} = \{\psi_i^{(n)}\}$ を選ぶ．簡単のため，像測度 $F_{\Psi^{(n)}*}\mu_n$ を $\bar{\mu}_n$ と表し，Y_n をその台とする．Y_n はコンパクト部分空間 $K(c, \eta)$ に含まれるので，$\{Y_n\}$ は $K(c, \eta)$ のあるコンパクト部分集合 Y に収束する部分列を含む．ここで収束は，距離空間 B におけるコンパクト部分集合列のハウスドルフ収束を意味する．以下 $\{Y_n\}$ 自身 Y に収束するとする．

このとき，0 に収束する正数の列 $\{\varepsilon_n\}$ と，Y_n から Y への写像 $f_n : Y_n \to Y$ および Y から Y_n への写像 $h_n : Y \to Y_n$ の組で，

$$\begin{aligned} & d_B(a, f_n(a)) \le \varepsilon_n \quad a \in Y_n \\ (27) \qquad & d_B(x, h_n(x)) \le \varepsilon_n \quad x \in Y \end{aligned}$$

を満たし，したがって

$$\begin{aligned}|d_B(a,b)-d_B(f_n(a),f_n(b))| &\le 2\varepsilon_n, \quad a,b\in Y_n\\ Y\subset f_n(Y_n)_{2\varepsilon_n}&\\ |d_B(x,y)-d_B(h_n(x),h_n(y))| &\le 2\varepsilon_n\\ Y_n\subset h_n(Y)_{2\varepsilon_n}&\end{aligned}$$

$$d_B(a,h_n\circ f_n(a))\le 2\varepsilon_n,\quad a\in Y_n\ ;\ d_B(x,f_n\circ h_n(x))\le 2\varepsilon_n,\quad x\in Y$$

を満たすものが存在する．ここで f_n, h_n はボレル可測としてよろしい．さらに必要ならば，部分列を取ることによって，像測度 $f_{n*}\bar{\mu}_n$ は，Y 上のある非負値ラドン測度 $\bar{\mu}$ に漠収束すると仮定する．

ここで Y_n 上の連続関数列 $\{\bar{\psi}_i^{(n)}\}$ によって，

$$\gamma(t)=(e^{-(t+1/t)/2}e^{-\lambda_i^{(n)}t/2}\bar{\psi}_i^{(n)}(\gamma)),\quad \gamma\in Y_n$$

と表されることに注意する． この $\{\bar{\psi}_i^{(n)}\}$ は，$L^2(Y_n,\bar{\mu}_n)$ の完全正規直交系である．したがって，(27) は次のように表される．

$$\text{(28)}\qquad \sup_{t>0}\sum_{i=0}^{\infty}|\sigma_i(t)-e^{-(t+1/t)/2}e^{-\lambda_i^{(n)}t/2}\bar{\psi}_i^{(n)}(h_n(\sigma))|^2 \le \varepsilon_n^2,$$

$$\sigma=(\sigma_i(t)) \in Y$$

次に簡単のため，すべての $i=0,1,2,\ldots$ に対して，$\limsup_{n\to\infty}\lambda_i^{(n)}<+\infty$ と仮定する．このとき，必要ならば部分列を取って，

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_i^{(n)}=\lambda_i,\quad i=0,1,2,\ldots$$

としてよろしい．補題 5.2 から判るように，$\{\lambda_i\}$ は発散する増大列で，$0=\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_k$ となる k は，ν と A のみによる数で上から押さえられている．さらに (28) において十分大きな n を考えることによって，Y 上の連続関数列 $\{\bar{\psi}_i\}$ があって，

$$\sigma(t)=(e^{-(t+1/t)/2}e^{-\lambda_i^{(n)}t/2}\bar{\psi}_i(\sigma)),\quad \sigma\in Y$$

と表されることが判る．各 i について，関数列 $\{\bar{\psi}_i^{(n)}\}_n$ は $\bar{\psi}_i$ に f_n と h_n を通して一様に収束している．すなわち

$$\text{(29)}\qquad |\bar{\psi}_i^{(n)}(a)-\bar{\psi}_i(f_n(a))| \le \varepsilon_{i,n},\quad a\in Y_n$$

$$\text{(30)}\qquad |\bar{\psi}_i^{(n)}(h_n(x))-\bar{\psi}_i(x)| \le \varepsilon_{i,n},\quad x\in Y$$

が成り立つ．ここで $\varepsilon_{i,n}$ は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する正数の列である．とくに $\{\bar{\psi}_i\}$ は $L^2(Y,\bar{\mu})$ における正規直交系であることがわかる．

次に $(0,+\infty)\times Y\times Y$ 上の関数 $p(t,x,y)$ を

$$p(t,x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{-\lambda_i t/2}\bar{\psi}_i(x)\bar{\psi}_i(y),\quad t>0,\ x,y\in Y$$

によって定義し，そして

$$P_tu(x)=\int_Y p(t,x,y)u(y)\,d\bar{\mu}(y),\quad t>0,\ u\in L^2(Y,\bar{\mu})$$

と定める．このとき，(28) から，$\bar{f}_n = f_n \circ F_{\Psi_n} : X_n \to Y$ とおいて，

$$\sup_t e^{-(t+1/t)} |p_n(t,a,b) - p(t, \bar{f}_n(a), \bar{f}_n(b))| \le \varepsilon_n, \quad a,b \in X_n \tag{31}$$

が従う．

ここで $\bar{\mu}$ の台を X とおく．このとき，$\{P_t\}$ は $L^2(X,\bar{\mu})$ の対称作用素からなる半群で，マルコフ性，すなわち

$$0 \le P_t u \le 1, \quad 0 \le u \le 1$$

をみたし，[VI] より保存的，すなわち $P_t 1 = 1$ を満たす．その定義から，各 $\bar{\psi}_i$ は固有値 $e^{-\lambda_i t}$ の P_t の固有関数である．言い換えると次のように定義される閉形式 $\mathcal{E}$ の固有値 λ_i の固有関数である．

$$D[\mathcal{E}] = \{u \in L^2(X,\bar{\mu}) \mid \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \langle u - P_t u, u\rangle_{L^2} < +\infty\}$$

$$\mathcal{E}(u,v) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \langle u - P_t u, v\rangle_{L^2}, \quad u,v \in D[\mathcal{E}]$$

P_t のマルコフ性に対応して，$\mathcal{E}$ は E - 3 を満たす．

残る問題は，P_t の $L^2(X,\bar{\mu})$ における強連続性である．これは次のように確かめられる．

$\{\bar{\psi}_i\}$ で生成される代数を $\mathcal{C}$ とすると，これは，$\bar{\psi}_0 = 1$ を含み，その作り方から Y の点を分離することがわかる．したがってストーン - ワイエルシュトラスの定理より $C(X)$ において稠密であり，とくに $L^2(X,\bar{\mu})$ においても稠密である．さらに $\mathcal{C} \subset D[\mathcal{E}]$ より，$\mathcal{C}$ は $\mathcal{E}$ のコアになる．このように $(X,\bar{\mu},\mathcal{E})$ は，正則ディリクレ空間であることがわかった．

最後に線形写像 $\Phi_n : \mathcal{C} \to L^2(X_n, \mu_n)$ を次のように定義する．

$$\Phi_n(u) = u \circ \bar{f}_n, \quad u \in \mathcal{C}$$

ただし $\bar{f}_n = f_n \circ F_{\Psi(n)} : X_n \to Y$ とおいた．このとき，(26) が満たされることは明らかで，さらに (31) から $\mathcal{E}_n$ は $\mathcal{E}$ にスペクトル収束することが従う．

ステップ 3 関数列 $u_n \in L^2(X_n,\mu_n)$ が，ある定数 b があって，$\langle u_n, u_n\rangle_{L^2} + \mathcal{E}_n(u_n,u_n) \le b$ を満たしているとき，適当な部分列がある関数 $u \in L^2(X,\bar{\mu})$ に強収束することを確かめたい．そこで $\Psi^{(n)} = \{\psi_i^{(n)}\}$ をステップ 2 のものとし，$(X,\mu,\mathcal{E})$ の固有関数からなる正規直交完全系 $\bar{\Psi} = \{\bar{\psi}_i\}$ に $\Psi^{(n)}$ は (29), (30) の意味で一様に収束すると仮定してよい．

u_n の仮定から，

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1+\lambda_i^{(n)}) \langle u_n, \psi_i^{(n)}\rangle_{L^2}^2 \le b, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

であるので，必要ならばさらに部分列を選ぶことによって，ℓ^2 の点列 $a_n = (\langle u_n, \psi_i^{(n)}\rangle_{L^2})$ はある元 $a = (a_i) \in \ell^2$ に (ℓ^2 において) 収束するとしてよい．この a から関数 $u \in L^2(X,\mu)$ を $u = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \bar{\psi}_i$ によって定める．$\sum_{i=0}^{\infty} (1+\lambda_i) a_i^2 \le b$ より，$u \in D[\mathcal{E}]$ となり，$\|u_n\|_{L^2}$ は $\|u\|_{L^2}$ に収束する．

以下，u_n は u に強収束することを確かめよう．各 $k=1,2,3,\ldots$ に対して，

$$v_{n,k}=\sum_{i=0}^{k}\langle u_n,\psi_i^{(n)}\rangle_{L^2}\psi_i^{(n)},\quad v_k=\sum_{i=0}^{k}\langle u,\psi_i\rangle_{L^2}\psi_i$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned}\|u_n-v_{n,k}\|_{L^2}^2 &= \sum_{i=k+1}^{\infty}\langle u_n,\psi_i^{(n)}\rangle_{L^2}^2\le\frac{1}{\lambda_{k+1}^{(n)}}\sum_{i=k+1}^{\infty}\lambda_i^{(n)}\langle u_n,\psi_i^{(n)}\rangle_{L^2}^2\\ &\le \frac{1}{\lambda_{k+1}^{(n)}}\mathcal{E}_n(u_n,u_n)\le\frac{b}{C_1(k+2)^{2/\nu}}\end{aligned}$$

と補題 5.2 (1) を使って評価され，さらに

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|v_{n,k}-f_n^*v_k\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2}\|\sum_{i=0}^{k}\langle u_n,\psi_i^{(n)}\rangle_{L^2}\psi_i^{(n)}-\langle u,\psi_i\rangle_{L^2}f_n^*\psi_i\|_{L^2}^2\\ &\le \sum_{i=0}^{k}\langle u_n,\psi_i^{(n)}\rangle_{L^2}^2\|\psi_i^{(n)}-f_n^*\psi_i\|_{L^2}^2+\\ &\quad \|\langle u_n,\psi_i^{(n)}\rangle_{L^2}-\langle u,\psi_i\rangle_{L^2}\|^2\|f_n^*\psi_i\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

と評価されるので，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_n-f_n^*v_k\|_{L^2}^2 &\le \|u_n-v_{n,k}\|_{L^2}^2+\|v_{n,k}-f_n^*v_k\|_{L^2}^2\\ &\le \frac{b}{C_1(k+2)^{2/\nu}}+\sum_{i=0}^{k}\langle u_n,\psi_i^{(n)}\rangle_{L^2}^2\|\psi_i^{(n)}-f_n^*\psi_i\|_{L^2}^2\\ &\quad +|\langle u_n,\psi_i^{(n)}\rangle_{L^2}-\langle u,\psi_i\rangle_{L^2}|^2\|f_n^*\psi_i\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

となる．ここで $\lim_{n\to\infty}\|\psi_i^{(n)}-f_n^*\psi_i\|_{L^\infty}=0$, $\lim_{n\to\infty}\langle u_n,\psi_i^{(n)}\rangle_{L^2}=\langle u,\psi_i\rangle_{L^2}$, $\lim_{n\to\infty}\|f_n^*\psi_i\|_{L^2}=1$ より，

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|u_n-f_n^*v_k\|_{L^2}=0$$

となり，以上から u_n が u に強収束することが確かめられた．

注意 6.3. (1) ステップ 3 においては，$\mathcal{C}$ が $C(X)$ において稠密であるということは使っていない．また各 X_n が連結であるとしても，($\bar{\mu}$ の台である)X が連結であるとは限らない．後に述べる例 6.2，例 6.3 などが典型的な例である．

(2) 上の証明では簡単のため，すべての $i=0,1,2,\ldots$ に対して，$\lambda_i^{(n)}$ は有界であると仮定したが，$i>0$ で $\limsup_{n\to+\infty}\lambda_i^{(n)}<+\infty$ かつ $\limsup_{n\to+\infty}\lambda_{i+1}^{(n)}=+\infty$ となる場合もある．実際この場合極限のディリクレ空間は有限個の点からなる有限グラフと理解できる (例 6.2 参照).

6.3. ディリクレ空間の収束ーその２ー．条件 [I], [V], [VI] を満たす正則ディリクレ空間 $(X,\mu,\mathcal{E})$ に対して，固有関数 ψ_i からなる完全正規直交系 Ψ を取る．埋め込み $F_\Psi : X \to B$ を考えることにより，$\bar{\mu} = F_{\Psi *}\mu$, $\bar{X} = \operatorname{supp}\bar{\mu}$ とおいて，(X,μ) と $(\bar{X},\bar{\mu})$ を (容量 0 の集合を除いて) 同一視することができる．したがって，X はコンパクトで，固有関数 ψ_i や核関数 $p(t,x,y)$ は X 上すべて連続であると仮定してよいことが判る．さらに，

$$d_X^{spec}(x,y)^2 = \sup_{t>0} e^{-(t+1/t)}(p(t,x,x)+p(t,y,y)-2p(t,x,y)),\ x,y\in X$$

とおくと，d_X^{spec} は X 上の距離を与える．このように F_Ψ は距離空間 (X,d_X^{spec}) から (B,d_B) への等長埋め込みとなっている．

定理 6.7 の証明において，この埋め込みが重要な役割を果たしている．さらにその証明に現れる正則ディリクレ空間 $(X,\mu,\mathcal{E})$ を含む距離空間 (Y,d_Y^{spec}) が収束列の性質を反映していると思われる．その意味を考えるために，ここではディリクレ空間の集合上に距離を導入する．

まず性質 [I], [V], [VI] を満たす正則ディリクレ空間 $(X,\mu_X,\mathcal{E}_X)$ からなる集合 $\mathcal{F}$ を考える．先に注意したように X はコンパクトで，核関数 $p_X(t,x,y)$ は連続であり，さらに d_X^{spec} が X 上の距離を与えていると仮定する．このようなディリクレ空間 X と X' に対して，ボレル可測写像 $f : X \to X'$ が正数 ε に対して，

$$\sup_{t>0,\ x,y\in X} e^{-(t+1/t)}|p_X(t,x,y)-p_{X'}(t,f(x),f(y))| < \varepsilon$$

を満たすとき，ε-スペクトル近似写像とよぶ．ε-スペクトル近似写像 $f : X \to X'$ と $h : X' \to X$ が存在する正数 ε の下限を $SD(X,X')$ と表し，X と X' のスペクトル距離とよぶ．実際，$SD(X,X')=0$ のとき，核関数を保つ写像，すなわち $p_X(t,x,y) = p_{X'}(t,f(x),f(y))$ $(x,y\in X)$ をみたす写像 $f : X \to X'$ が存在する．このような写像は d_X^{spec} と $d_{X'}^{spec}$ に関する等長写像であり，さらに測度も保つ，すなわち $\int \xi\ df_*\mu_X (= \int \xi\circ f\ d\mu_X) = \int \xi\ d\mu_{X'}$ $(\xi \in C(X'))$ を満たす．したがってこれら 2 つのディリクレ空間は同一視できる．このように SD は上の同一視のもとで $\mathcal{F}$ 上の距離を与える．

さて，スペクトル距離を使って，定理 6.7 とその証明の内容を次のように述べることができる．

定理 6.8. 正数 ν と A に対し性質 [I] を満たし，さらに [V], [VI] を満たす正則ディリクレ空間からなる集合はスペクトル距離に関してプレコンパクトである．さらにこのような正則ディリクレ空間からなる SD ーコーシー列 $\{X_n\}$ に対して，コンパクト距離空間 (Y,d^{spec})，Y 上の非負値ラドン測度 $\bar{\mu}$，非負値連続関数 $p(t,x,y)$，ボレル可測写像 $f_n : X_n \to Y$ および $h_n : Y \to X_n$，さらに 0 に収束する正数列 $\{\varepsilon_n\}$ が存在して，次のことが成り立つ．

(1) 測度 $\bar{\mu}$ の台を X と表すとき，$p(t,x,y)$ は $L^2(X,\bar{\mu})$ 上の正則ディリクレ形式 $\mathcal{E}$ の生成作用素 $\mathcal{L}$ から得られる強連続半群 $P_t = \exp -t\mathcal{L}$ の核関数である．

(2) $(X,\bar{\mu},\mathcal{E})$ も同じ性質 [I], [V], [VI] を満たす．

(3) 距離 d^{spec} は,

$$d^{spec}(x,y)^2 = \sup_{t>0}(p(t,x,x)+p(t,y,y)-2p(t,x,y)), \quad x,y \in Y$$

によって与えられる.

(4) 像測度 $f_{n;*}\mu_{X_n}$ は $\bar{\mu}$ に漠収束する.

(5) f_n と h_n は ε_n ースペクトル近似写像，すなわち

$$\sup_{t>0} e^{-(t+1/t)}|p_{X_n}(t,x,y)-p(t,f_n(x),f_n(y))| < \varepsilon_n, \quad x,y \in X_n$$

$$\sup_{t>0} e^{-(t+1/t)}|p_{X_n}(t,h_n(x),h_n(y))-p(t,x,y)| < \varepsilon_n, \quad x,y \in Y$$

を満たし，さらに

$$d^{spec}(f_n \circ h_n(x),x) < \varepsilon_n, \quad x \in Y$$

も満たす. (このように距離空間 $(X_n, d^{spec}_{X_n})$ は (Y, d^{spec}) にグロモフーハウスドルフ距離収束する.)

(6) 各 $i=0,1,2,\ldots$ に対して，X_n の i 番目の固有値 $\lambda_i^{(n)}$ は X の i 番目の固有値 $\lambda_i(\leq +\infty)$ に収束し，さらに $\lambda_i < +\infty$ のとき，$\|u\|_{L^2}=1$ を満たす X_n の固有値 $\lambda_i^{(n)}$ をもつ固有関数 u に対して，X の固有値 λ_i をもつ固有関数を与える Y 上の連続関数 v が存在して,

$$\sup_{x\in X_n}|u(x)-v(f_n(x))| < \varepsilon_{i;n}, \ \sup_{x\in Y}|u(h_n(x))-v(x)| < \varepsilon_{i;n}$$

が成り立つ. ここで $\{\varepsilon_{i;n}\}$ は $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_{i;n}=0$ をみたす正数の列である.

定理 6.8 において，X_n は X にモスコ収束するのであるが，ステップ 3 で用いられた議論を適用して，与えられた状況からより詳しい収束の性質を知ることができる. 以下においてこれを説明したい.

まず，$f_n : X_n \to Y$, $h_n : Y \to X_n$ を定理 6.8 で述べた近似写像とする. 次に X_n の固有関数からなる正規直交完全系 $\Psi_n = \{\psi_i^{(n)}\}$ と X のそのような系 $\Psi = \{\psi_i\}$ を選び, 次の仮定の下で議論する.

(32) $$|\psi_i^{(n)}(a)-\psi_i(f_n(a))| < \varepsilon_{i,n}, \quad |\psi_i^{(n)}(h_n(x))-\psi_i(x)| < \varepsilon_{i,n}$$

$(a \in X_n,\ x \in Y)$. ただし $n\to\infty$ のとき，$\varepsilon_{i,n}$ は 0 に収束する正数の列である. (以下に述べる結果は，このような正規直交完全系の取り方に関係なく成立するものである. したがってこのような仮定のもとで議論しても差し支えない.)

さて，関数列 $u_n \in L^2(X_n,\mu_n)$ が 関数 $u \in L^2(X,\mu)$ に弱収束しているとする. $\Psi_n = \{\psi_i^{(n)}\}$ に関して u_n を展開すると,

$$u_n \sim \sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(n)}(u_n)\psi_i^{(n)} \quad \left(c_i^{(n)}(u_n) = \int_{X_n} u_n\psi_i^{(n)}d\mu_n\right)$$

となる. このとき，u_n の L^2-ノルムとエネルギーはそれぞれ

$$\|u_n\|_{L^2}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(n)}(u_n)^2, \quad \mathcal{E}_n(u_n,u_n) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{(n)}c_i^{(n)}(u_n)^2(\leq +\infty)$$

で与えられる．各 N に対して，$\sum_{i=0}^{N} c_i(u)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{N} c_i^{(n)}(u_n)^2$ $(c_i(u)=\int_X u\phi_i\, d\mu)$ より，$N\to\infty$ とし，

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(u)^2 \le \liminf_{n\to\infty}\|u_n\|_{L^2}^2$$

を得る．さらに $\sup_n \mathcal{E}_n(u_n,u_n) < +\infty$ のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{i=N+1}^{\infty} c_i^{(n)}(u_n)^2 &\le \frac{1}{(\lambda_{N+1}^{(n)})^{1/2}}\|u_n\|_{L^2}\mathcal{E}_n(u_n,u_n)^{1/2}\\ &\le \frac{1}{C_4^{1/2}(N+2)^{1/\nu}}\|u_n\|_{L^2}\mathcal{E}_n(u_n,u_n)^{1/2}\end{aligned}$$

より，$N\to\infty$ のとき，n に一様に $\sum_{i=N+1}^{\infty} c_i^{(n)}(u_n)^2$ が 0 に収束する．これから $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{L^2}=\|u\|_{L^2}$，そして各 N に対して，$\sum_{i=0}^{N}\lambda_i c_i^{(n)}(u_n)^2$ が $\sum_{i=0}^{N}\lambda_i c_i(u)^2$ に収束し，　よって $\mathcal{E}(u,u)\le\liminf_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n)$ が得られる．同様に $\sup_n\|\mathcal{L}^{(n)}u_n\|_{L^2}<+\infty$ のとき，$\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_n(u_n,u_n)=\mathcal{E}(u,u)$ が従う．

この議論から，$\mathcal{E}_n(u_n,u_n)\to\mathcal{E}(u,u)$ のとき，$\sum_{i=N+1}^{\infty}\lambda_i^{(n)}c_i^{(n)}(u_n)^2$ が，$N\to\infty$ のとき，n に関して一様に 0 に収束することが判り，$v\in L^2(X,\mu)$ に弱収束する関数列 $v_n\in L^2(X_n)$ で，$\mathcal{E}_n(v_n,v_v)$ が有界なものに対して，

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_n(u_n,v_n)=\mathcal{E}(u,v)$$

が成り立つことを見るのは易しい．

次に関数 $u\in D[\mathcal{E}_X]\cap C(X)$ を考える．$u_t=P_tu$ とおく．さらに $u_n=f_n^*u$，$u_{n;t}=P_{n;t}u_n$ と定める．このとき u_n は u に L^2 強収束し，そして $t>0$ を固定すると，$n\to\infty$ のとき，$u_{n;t}$ および $\mathcal{L}_nu_{n;t}$ はそれぞれ u_t と $\mathcal{L}u_t$ に一様に収束する．すなわち

(33)

$$\lim_{n\to\infty}\|{\mathcal{L}_n}^{\ell}u_{n;t}-f_n^*(\mathcal{L}^{\ell}u_t)\|_{L^\infty}=0;\ \lim_{n\to\infty}\|h_n^*({\mathcal{L}_n}^{\ell}u_{n;t})-\mathcal{L}^{\ell}u_t\|_{L^\infty}=0$$

$(\ell=0,1)$ となる．実際，補題 5.2 (3) によって，任意の N に対して，A, ν, t にのみよる正数 θ_N で，$N\to\infty$ のとき 0 に収束し，さらに

$$\begin{aligned}\|\sum_{i>N}(\lambda_i^{(n)})^2e^{-2\lambda_i^{(n)}t}(\psi_i^{(n)})^2\|_{L^\infty} &\le {\theta_N}^2,\\ \|\sum_{i>N}(\lambda_i)^2e^{-2\lambda_it}{\psi_i}^2\|_{L^\infty} &\le {\theta_N}^2\end{aligned}$$

を満たすものを取ることができる．したがって

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{L}_n u_{n;t} - f_n^*(\mathcal{L}u_t)| \\
&\leq \ |\sum_{i=0}^{N} \lambda_i^{(n)} e^{-\lambda_i^{(n)} t} c_i^{(n)}(u_n)\psi_i^{(n)} - \lambda_i e^{-\lambda_i t} c_i(u) f_n^* \psi_i| \\
&\quad +|\sum_{i>N} \lambda_i^{(n)} e^{-\lambda_i^{(n)} t} c_i^{(n)}(u_n)\psi_i^{(n)}| \\
&\quad +|\sum_{i>N} \lambda_i e^{-\lambda_i t} c_i(u) f_n^* \psi_i| \\
&\leq \ |\sum_{i=0}^{N} \lambda_i^{(n)} e^{-\lambda_i^{(n)} t} c_i^{(n)}(u_n)\psi_i^{(n)} - \lambda_i e^{-\lambda_i t} c_i(u) f_n^* \psi_i| \\
&\quad +(\sum_{i>N} (\lambda_i^{(n)})^2 e^{-2\lambda_i^{(n)} t} (\psi_i^{(n)})^2)^{1/2} (\sum_{i>N} c_i^{(n)}(u_n)^2)^{1/2} \\
&\quad +(\sum_{i>N} \lambda_i{}^2 e^{-2\lambda_i t} (\psi_i)^2)^{1/2} (\sum_{i>N} c_i(u)^2)^{1/2} \\
&\leq \ |\sum_{i=0}^{N} \lambda_i^{(n)} e^{-\lambda_i^{(n)} t} c_i^{(n)}(u_n)\psi_i^{(n)} - \lambda_i e^{-\lambda_i t} c_i(u) f_n^* \psi_i| \\
&\quad +\theta_N(\|u_n\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})
\end{aligned}
$$

となり，(32) から，(33) が従う．とくに

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}_n(u_{n;t}, u_{n;t}) = \mathcal{E}(u_t, u_t)$$

となる．ここで

$$\lim_{t\to 0}(\|u_t - u\|_{L^2} + \mathcal{E}(u_t - u, u_t - u)) = 0$$

に注意すると，任意の $k = 1, 2, \ldots$ に対して，適当な $t(k)$ で

$$\|u_{t(k)} - u\|_{L^2} + \mathcal{E}(u_{t(k)} - u, u_{t(k)} - u) < \frac{1}{k}.$$

と成るものを見つけることができる．このとき，十分大きい $N(k)$ を取ることによって，

$$|\mathcal{E}_n(u_{n;t(k)}, u_{n;t(k)}) - \mathcal{E}(u_{t(k)}, u_{t(k)})| < \frac{1}{k}, \quad n \geq N(k)$$

となる．そこで n に対して，$N(k) \leq n < N(k+1)$ となる k を決め，$v_n = u_{n;t(k(n))}$ と定める．このとき v_n は u に強収束し，したがって

$$\mathcal{E}_X(u, u) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_{M_n}(v_n, v_n)$$

となる．ところが一方，

$$\mathcal{E}_n(v_n, v_n) \leq \mathcal{E}(u_{t(k(n))}, u_{t(k(n))}) + \frac{1}{k(n)} \leq \mathcal{E}(u, u) + \frac{1}{k(n)}$$

より，

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(v_n, v_n) \le \mathcal{E}(u, u)$$

となり，結局

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(v_n, v_n) = \mathcal{E}(u, u)$$

を得る．

ここで $\lim_{t\to 0} \|P_t u - u\|_{L^\infty} = 0$ ならば，u_n は u に一様に収束することに注意しておく．

以上まとめると次の命題となる．

命題 6.9. (1) 関数列 $u_n \in L^2(X_n, \mu_n)$ が $u \in L^2(X, \mu)$ に弱収束しているとする．$\sup_n \mathcal{E}_n(u_n, u_n) < +\infty$ ならば，$u \in D[\mathcal{E}]$, $\|u\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^2}$ かつ

$$\mathcal{E}(u, u) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(u_n, u_n)$$

がなりたつ．さらに $\sup_n \|\mathcal{L}_n u_n\|_{L^2} < +\infty$ ならば，$u \in D[\mathcal{L}]$, $\|u\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^2}$, $\mathcal{E}(u, u) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_{M_n}(u_n, u_n)$ そして

$$\|\mathcal{L}u\|_{L^2} \le \liminf_{n\to\infty} \|\mathcal{L}_n u_n\|_{L^2}$$

が成り立つ．

(2) 任意の $u \in D[\mathcal{E}] \cap C(Y)$ に対して，関数列 $v_n \in D[\mathcal{E}_n] \cap C(X_n)$ で，v_n は u に強収束し，

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - f_n^* u\|_{L^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|h_n^* v_n - u\|_{L^2} = 0,$$

かつ

$$\mathcal{E}(u, u) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(v_n, v_n)$$

を満たすものが存在する．

(3) 関数列 $u_n, v_n \in L^2(M_n)$ がそれぞれ $u, v \in L^2(X, \mu)$ に弱収束しているとする．$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(u_n, u_n) = \mathcal{E}(u, u) < +\infty$, $\sup_n \mathcal{E}_n(v_n, v_n) < +\infty$ とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(u_n, v_n) = \mathcal{E}(u, v)$$

が成り立つ．

注意 6.4. 命題 6.9 (2) において，もしある集合 $A \subset Y$ 上 $P_t u$ が u に $t \to 0$ のとき一様に収束するならば，v_n は u に A 上一様に収束するとしてよい．すなわち $A_n \subset X_n$ が A に収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{a\in A_n} |v_n(a) - u(f_n(a))| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |v_n(h_n(x)) - u(x)| = 0$$

と仮定してよろしい．

次の命題に移ろう．

命題 6.10. 各 $X_n = (X_n, \mu_n, \mathcal{E}_n)$ は強局所的であるとし，関数 $u \in D[\mathcal{E}] \cap C(Y)$ に対して，$t \to 0$ のとき $P_t u$ が u に一様収束すると仮定する．

(1) 関数列 $v_n \in D[\mathcal{E}_n] \cap C(X)$ が u に一様収束するならば，

$$\int_X \phi \, d\mu_{\langle u,u \rangle} \leq \liminf_{n \to \infty} \int_{X_n} f_n^* \phi \, d\mu_{\langle v_n, v_n \rangle}$$

がなりたつ．ただし ϕ は $D[\mathcal{E}] \cap C(Y)$ の非負値関数で，$t \to 0$ のとき，$P_{X;t}\phi$ は ϕ に一様収束する．

さらに $v_n \in \mathcal{A}[\mathcal{E}_n]$ で，ある $p \in [2, \infty)$ があって，$\Gamma(v_n, v_n)$ の L^p-ノルム，$(\int_X \Gamma(v_n, v_n)^p \, d\mu)^{1/p}$ が一様に有界であるとする．このとき，$\mu_{\langle u,u \rangle}$ は μ に関して絶対連続で，$\mu_{\langle u,u \rangle} = \Gamma(u,u)\mu$ と表すと，$\Gamma(u,u) \in L^p(X, \mu)$ となり，そして任意の開集合 $\Omega \subset X$ に対して，

$$\int_\Omega \Gamma(u,u)^p \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_{f_n^{-1}(\Omega)} |dv_n|^{2p} \, d\mu_n$$

が成り立つ．

(2) 関数列 $w_n \in D[\mathcal{E}_n] \cap C(X_n)$ が u に弱収束し，さらに $\mathcal{E}_{X_n}(w_n, w_n)$ は $\mathcal{E}(u,u)$ に収束するとする． このとき，

$$\int_X \phi \, d\mu_{\langle u,u \rangle} = \lim_{n \to \infty} \int_{M_n} f_n^* \phi \, d\mu_{\langle w_n, w_n \rangle}$$

が成り立つ．ただし $\phi \in C(Y)$ で，$t \to 0$ のとき $P_t \phi$ は ϕ に一様収束する．

証明　命題 6.9 (2) より，まず関数列 $u_n \in D[\mathcal{E}_n] \cap C(X_n)$ で $n \to \infty$ のとき，u_n は一様に u に収束し，$\mathcal{E}_n(u_n, u_n)$ が $\mathcal{E}(u,u)$ に収束しているものを取ることができる．同様に，$t \to \infty$ のとき $P_t \phi$ は一様に ϕ に収束している任意の関数 $\phi \in D[\mathcal{E}] \cap C(Y)$ に対して，関数列 $\phi_n \in D[\mathcal{E}_n] \cap C_0(X_n)$ で，ϕ_n は ϕ に一様に収束し，$\mathcal{E}_n(\phi_n, \phi_n)$ は $\mathcal{E}(\phi, \phi)$ に収束するものをとる．このとき，命題 6.8 (3) を適用すると，

$$\begin{aligned}
\int_X \phi \, d\mu_{\langle u,u \rangle} &= \mathcal{E}(u\phi, u) - \frac{1}{2}\mathcal{E}(u^2, \phi) \\
&= \lim_{n \to \infty} \mathcal{E}_n(u_n \phi_n, u_n) - \frac{1}{2}\mathcal{E}_n(u_n^2, \phi_n) \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_{X_n} \phi_n \, d\mu_{\langle u_n, u_n \rangle} \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_{X_n} (\phi_n - f_n^* \phi) d\mu_{\langle u_n, u_n \rangle} + \int_{X_n} f_n^* \phi \, d\mu_{\langle u_n, u_n \rangle} \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_{X_n} f_n^* \phi \, d\mu_{\langle u_n, u_n \rangle}
\end{aligned}$$

となる．

さて，u に一様収束する関数列 $v_n \in D[\mathcal{E}] \cap C(X_n)$ に対して，強局所性からライプニッツ則を適用することによって，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} \phi_n \, d\mu_{\langle u_n, v_n\rangle} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} d\mu_{\langle u_n, \phi_n v_n\rangle} - (v_n - u_n) d\mu_{\langle u_n, \phi_n\rangle} - \frac{1}{2} d\mu_{\langle u_n^2, \phi_n\rangle} \\
&= \mathcal{E}(u, \phi u) - \frac{1}{2}\mathcal{E}(u^2, \phi) \\
&= \int_X \phi \, d\mu_{\langle u,u\rangle}
\end{aligned}$$

を得る．一方 $\phi \geq 0$ かつ $\phi_n \geq 0$ とすると，

$$\int_{X_n} \phi_n d\mu_{\langle u_n, v_n\rangle} \leq \left(\int_{X_n} \phi_n \, d\mu_{\langle u_n, u_n\rangle}\right)^{1/2} \left(\int_{X_n} \phi_n \, d\mu_{\langle v_n, v_n\rangle}\right)^{1/2}$$

より，

$$\begin{aligned}
\int_X \phi \, d\mu_{\langle u,u\rangle} &\leq \left(\int_{X_n} \phi \, d\mu_{\langle u,u\rangle}\right)^{1/2} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{X_n} \phi_n \, d\mu_{\langle v_n, v_n\rangle}\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_X \phi \, d\mu_{\langle u,u\rangle}\right)^{1/2} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{X_n} f_n^* \phi \, d\mu_{\langle v_n, v_n\rangle}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

となり，これから

$$\int_X \phi \, d\mu_{\langle u,u\rangle} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{X_n} f_n^* \phi \, d\mu_{\langle v_n, v_n\rangle}$$

を得る．

次に $\Gamma(v_n, v_n)$ の L^p-ノルムが有界とする．このとき $q = p/(p-1)$ とおいて，

$$\begin{aligned}
\left|\int_X \phi \, d\mu_{\langle u,u\rangle}\right| &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{X_n} |\phi_n| \, d\mu_{\langle v_n, v_n\rangle} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_{X_n} |\phi_n - f_n^*\phi| d\mu_{\langle v_n, v_n\rangle} + \int |f_n^*\phi| \, d\mu_{\langle v_n, v_n\rangle} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} (\|\phi_n - f_n^*\phi\|_{L^q} \|\Gamma(v_n, v_n)\|_{L^p} + \\
&\quad + \|f_n^*\phi\|_{L^q} \left(\int_{f_n^{-1}(\mathrm{supp}\,\phi)} \Gamma(v_n, v_n)^p \, d\mu_n\right)^{1/p} \\
&\leq \|\phi\|_{L^q} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{f_n^{-1}(\mathrm{supp}\,\phi)} \Gamma(v_n, v_n)^p \, d\mu_n\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

ただしここでは，ϕ_n は ϕ に必ずしも一様に収束する必要はない．実際，$\lim_{n\to\infty} \|\phi_n - f_n^*\phi\|_{L^2} = 0$ で十分であることに注意する．したがって，

任意の $\phi \in D[\mathcal{E}] \cap C_0(X)$ に対して，

$$\left| \int_X \phi \, d\mu_{\langle u,\rangle} \right| \le \|\phi\|_{L^q} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{f_n^{-1}(\mathrm{supp}\,\phi)} \Gamma(v_n, v_n)^p \, d\mu_n \right)^{1/p}$$

がなりたつ．$D[\mathcal{E}] \cap C_0(X)$ は $L^q(X,\mu)$ で稠密より，$\mu_{\langle u,u\rangle} = \Gamma(u,u)\mu$ かつ

$$\int_\Omega \Gamma(u,u)^p \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_{f_n^{-1}(\Omega)} \Gamma(v_n,v_n)^p \, d\mu_n$$

が導かれる．これで命題の証明を終了する．

6.4. ディリクレ空間の収束 –その３–. ここでは，[I], [V], [VI] を満たす正則ディリクレ空間 $(X,\mu,\mathcal{E})$ で，強局所的かつ定理 5.1 の条件 [C] を満たすものを考察する．

はじめに次のような評価が成り立つことに注意する．

$$\begin{aligned} &(34) & d_{\mathcal{E}}(x,y) &\le \theta(d_X^{spec}(x,y)) \\ &(35) & |d_{\mathcal{E}}(x,y) - d_{\mathcal{E}}(x',y')| &\le \theta(d_X^{spec}(x,x')) + \theta(d_X^{spec}(y,y')), \\ &&& \quad x,x',y,y' \in X \end{aligned}$$

ここで $\theta(t)$ は A と ν にのみによって決まる，$\theta(0)=0$ を満たす単調増加連続関数である．

実際，$p(t,x,x) \ge 1$ に注意すると，(31) より，

$$\begin{aligned} 2 &\le p(t,x,x) + p(t,y,y) \\ &\le 2p(t,x,y) + e^{(t+1/t)} d_X^{spec}(x,y)^2 \\ &\le 2\frac{A(1)}{t^{\nu/2}} \exp\left(-\frac{d_{\mathcal{E}}(x,y)^2}{5t} \right) + e^{(t+1/t)} d_X^{spec}(x,y)^2 \end{aligned}$$

となり (注意 6.3 参照)，したがって $e^{(t+1/t)} d_X^{spec}(x,y)^2 \le 1$ を満たす $t \in (0,1]$ について，

$$d_{\mathcal{E}}(x,y)^2 \le 5t \left(\log 2A(1) - \frac{\nu}{2} \log t \right)$$

となる．これから (34) が従うことを見るのは易しい． さらに三角不等式を使って，

$$\begin{aligned} |d_{\mathcal{E}}(x,y) - d_{\mathcal{E}}(x',y')| &\le |d_{\mathcal{E}}(x,y) - d_{\mathcal{E}}(y,x')| + |d_{\mathcal{E}}(y,x') - d_{\mathcal{E}}(x',y')| \\ &\le d_{\mathcal{E}}(x,x') + d_{\mathcal{E}}(y,y') \\ &\le \theta(d_X^{spec}(x,x')) + \theta(d_X^{spec}(y,y')) \end{aligned}$$

以上で (35) が確かめられた．

これらの評価式 (34) と (35) を用いて，次の定理を示そう．

定理 6.11. $(X_n,\mu_n,\mathcal{E}_n)$ と $(X,\mu,\mathcal{E})$ を定理 6.8 にあるものとし，X_n は X にボレル可測写像 $f_n : X_n \to X$ によってスペクトル収束しているとする．さらに X_n は強局所的で条件 [C] を満たすとする．このとき，次のことが成り立つ．

(1) 適当な部分列–これも同じく $\{X_n\}$ と記す–を取ることによって，X 上に連続な擬距離 $\delta : X \times X \to [0,+\infty)$ が存在して，$f_n : (X_n, d_{\mathcal{E}_n}) \to$

(X,δ) は ε_n-ハウスドルフ近似を与える．ただし $\{\varepsilon_n\}$ は 0 に収束する正の数列である．とくに P_t の核関数 $p(t,x,y)$ は，次のような上からの評価を満たす．

$$p(t,x,y) \le \frac{A(\alpha)}{t^{\nu/2}} \exp\left(-\frac{\delta(x,y)^2}{4+\alpha}\right), \quad x,y\in X,\ \alpha>0,\ 0<t\le 1$$

さらに各 X_n はある正数 κ_n と R_n に対して，ダブリング条件 $[\mathrm{D}]_{\kappa_n}$ を満たしているとする．(1) で得られた連続擬距離 δ のひとつを任意に固定する．このとき，以下のことが成り立つ．

(2) $C^{0,1}(X,\delta)\subset D[\mathcal{E}]$ となり，$u\in C^{0,1}(X,\delta)$ に対して，そのエネルギー測度 $\mu_{\langle u,u\rangle}$ は μ に関して絶対連続で，$\mu_{\langle u,u\rangle}=\Gamma(u,u)\mu$ とおくと，

$$\Gamma(u,u)^{1/2}\le \mathrm{dil}_\delta u \quad \mu-a.e.$$

が成り立つ．

(3) $u\in C^{0,1}(X,\delta)$ に対して，$P_t u$ は u に $t\to 0$ のとき一様に収束し，さらに $v\in D[\mathcal{E}]$ に対して，$\mathrm{supp}\ u\cap \mathrm{supp}\ v=\emptyset$ ならば $\mathcal{E}(u,v)=0$ である．

(4) ある開集合 $V\subset X$ において $\delta>0$ とする．このとき，$\mathcal{E}_V$ は強局所的である．

証明　$f_n: X_n\to X$ と $h_n: X\to X_n$ を ε_n-スペクトル近似の組とする (注意 6.3 参照)．ボレル可測関数 $\delta_n: X\times X\to[0,\infty)$ を次のように定義する．

$$\delta_n(x,y)=d_{\mathcal{E}_n}(h_n(x),h_n(y)), \quad x,y\in X$$

このとき (34) と (35) より

$$\begin{aligned}
&(36) & \delta_n(x,y) &\le \theta(d_X^{spec}(x,y)+\varepsilon_n)\\
& & |\delta_n(x,y)-\delta_n(x',y')| &\le \theta(d_X^{spec}(x,y)+\varepsilon_n)+\theta(d_X^{spec}(x',y')+\varepsilon_n)\\
&(37) & & x,x',y,y'\in X
\end{aligned}$$

が成り立つ．

次に X の有限集合の増大列 S_k で，$S=\cup_k S_k$ が X で稠密になっているものを選ぶ．必要ならば部分列を取ることによって，δ_n は $S\times S$ 上において関数 δ に各点収束するとしてよろしい．このとき，(36) と (37) において $n\to\infty$ とすると，

$$\begin{aligned}
&(38) & \delta(x,y) &\le \theta(d_X^{spec}(x,y))\\
&(39) & |\delta(x,y)-\delta(x',y')| &\le \theta(d_X^{spec}(x,y))+\theta(d_X^{spec}(x',y'))\\
& & & x,x',y,y'\in S
\end{aligned}$$

となる．これは δ が $S\times S$ 上一様連続関数であることを示しており，したがって δ は $X\times X$ 上の連続関数に一意的に拡張される．これも同じく δ と表せば，(38) と (39) は X において成り立ち，さらに δ_n が δ に一様に収束することを見るのは難しくない．すなわち，0 に収束する正の数の列 $\{\varepsilon_n\}$ があって，

$$|d_{\mathcal{E}_n}(h_n(x),h_n(y))-\delta(x,y)|\le\varepsilon_n, \quad x,y\in X$$

$$X_n \subset h_n(X)_{\varepsilon_n}$$
$$|d_{\mathcal{E}_n}(a,b) - \delta(f_n(a), f_n(b))| \le \varepsilon_n, \quad a, b \in X_n$$
$$X \subset f_n(X_n)_{\varepsilon_n}$$
$$\delta(x, f_n \circ h_n(x)) \le \varepsilon_n, \quad d_{\mathcal{E}_n}(a, h_n \circ f_n(a)) \le \varepsilon_n, \quad x \in X, a \in X_n$$

このように f_n と h_n は ε_n - ハウスドルフ近似の組を与える．とくに $p(t,x,y)$ も (20) を満たすことが判る．以上で (1) が示された．

残りの主張を示そう．局所リプシッツ関数 $u \in C^{0,1}_{loc}(X, \delta)$ と開集合 $V \subset X$ に対して，$L_V = \mathbf{Lip}_\delta(u_{|V})$ とおき，さらに X 上の (δ に関する) リプシッツ関数 u_V を

$$u_V(x) = \inf\{L_V\delta(x,y) + u(y) \mid y \in V\} \quad (x \in X)$$

によって定義する．このとき V において $u_V = u$ となり，$\mathbf{Lip}_\delta(u_V) = L_V$ である．

ここでリプシッツ関数 $v_n \in C^{0,1}(X_n, d_n)$ ($d_n = d_{\mathcal{E}_n}$) を $\mathrm{dil}_{d_n} v_n \equiv L_V$ かつ $n \to \infty$ のとき，v_n は一様に u_V に収束するように構成したい．そのためにまず V の有限集合の増加列 A_k で $\delta(x, A_k) \le \eta_k$ ($x \in V$) かつ $\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$ となるものを取る．次に

$$u_{V,k}(x) = \min\{L_V d(x,y) + u_V(y) \mid y \in A_k\}, \quad x \in X$$

によって リプシッツ関数の列 $\{u_{V,k}\}$ を定義すると，

$$-2\eta_k L_V \le u_V(x) - u_{V,k}(x) \le 0, \quad x \in X$$

となることが容易に確かめられる．ここで X_n 上の リプシッツ関数 v_n を

$$v_n(a) = \min\{L_V d_n(a,b) + u_V(f_n(b)) \mid b \in h_n(A_n)\}, \quad a \in X_n$$

によって定める．このとき，v_n は $\mathrm{dil}_{d_n} v_n \equiv L_V$ を満たし，

$$\|v_n - f_n^* u_V\|_{L^\infty} \le (6\varepsilon_n + 2\eta_n) L_V$$

となる．よって v_n は u_V に一様に収束する．したがって命題 6.9 (1) より $u_V \in D[\mathcal{E}]$ で，命題 6.9 (1) により

$$\mu_{\langle u_V, u_V \rangle} = \Gamma(u_V, u_V)\mu, \quad \Gamma(u_V, u_V)^{1/2} \le L_V = \mathbf{Lip}_\delta(u_{|V})$$

を満たす．とくに $V = X$ の場合を考えると，$u \in D[\mathcal{E}]$ で $\Gamma(u,u)^{1/2} \le L_X = \mathbf{Lip}_\delta(u)$ となることが判る．

さて，任意の正数 ε に対して，

$$\begin{aligned}
&|P_t u(x) - u(x)| \\
&\le \int p(t,x,y)|u(x) - u(y)\ d\mu(y) \\
&\le \varepsilon \mathbf{Lip}_\delta(u) \int_{\delta(x,y)\le\varepsilon} p(t,x,y)\mu(y) \\
&\quad +2\sup|u| \int_{\delta(x,y)\ge\varepsilon} A(1)t^{-\nu/2}e^{-\varepsilon^2/5t}\ d\mu(y) \\
&\le \varepsilon \mathbf{Lip}_\delta(u) + 2\sup|u| A(1)t^{-\nu/2}e^{-\varepsilon^2/5t}
\end{aligned}$$

となる．よって $t \to 0$ のとき，$P_t u$ は一様に u に収束することが確かめられる．次に $v \in D[\mathcal{E}]$ に対して，$\mathrm{supp}\ u \cap \mathrm{supp}\ v = \emptyset$ のとき，$u \in C^{0,1}(X, \delta)$ より $\varepsilon = \inf\{\delta(x,y) \mid x \in \mathrm{supp}\ u,\ y \in \mathrm{supp}\ v\} > 0$ であるので，

$$\lim_{t \to 0} \int_{\delta(x,y) \geq \varepsilon} \frac{p(t,x,y)}{2t} \mu(dx)\mu(dy) = 0$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(u,v) \\
&\quad = \lim_{t \to 0} \int_{X \times X} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) \frac{1}{2t} p(t,x,y)\ \mu(dx)\mu(dy) \\
&\quad = 2 \lim_{t \to 0} \int_{\mathrm{supp}\, u \times \mathrm{supp}\, v} -u(x)v(y) \frac{p(t,x,y)}{2t} \mu(dx)\mu(dy) = 0
\end{aligned}$$

が従う．以上で (3) が示された．

次に (2) の証明を完成する．開集合 V において $u = u_V$ より，任意の $\phi \in D[\mathcal{E}_X] \cap C_0(V)$ に対して，(3) より $\mathcal{E}(\phi u, u) = \mathcal{E}(\phi u_V, u_V)$, $\mathcal{E}(u^2, \phi) = \mathcal{E}({u_\Omega}^2, \phi)$ を得る．したがって任意の $\phi \in D[\mathcal{E}] \cap C_0(V)$ に対して $\int \phi \mu_{\langle u,u \rangle} = \int \phi \mu_{\langle u_V, u_V \rangle}$ となり，V において $\Gamma(u,u) = \Gamma(u_V, u_V)$ が従い，

$$\Gamma(u,u)(x) \leq {L_V}^2, \quad \mu - a.e.\ x \in V$$

が得られる．これは任意の開集合 V に対して成り立つので，結局

$$\langle u,u \rangle = \Gamma(u,u)(x) \leq \mathrm{dil}_\delta u(x)^2, \quad \mu - a.e.\ x \in X$$

が証明された．

残りの (4) を示そう．ある開集合 V において $\delta > 0$ とする．このとき，$u, v \in D[\mathcal{E}] \cap C_0(V)$ に対して，$\mathrm{supp}\ v$ 上 u は定数 c であるならば $\mathcal{E}(u,v) = 0$ を示したい．まず $v \geq 0$ としてよろしい．次に十分小さな正数 ε に対して，$v_\varepsilon = \max\{v, \varepsilon\} - \varepsilon$ とおくと，$\inf\{\delta(y,z) \mid u(y) = c,\ v_\varepsilon(z) \neq 0\} > 0$ となり，

$$\mathcal{E}(u, v_\varepsilon) = \lim_{t \to 0} \int (u(x) - u(y))(v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)) \frac{p(t,x,y)}{2t} \mu(dx)\mu(dy) = 0$$

を得る．したがって $\varepsilon \to 0$ として，$\mathcal{E}(u,v) = 0$ となる．以上で定理の証明を終える．

さて，$X_n = (X_n, \mu_n, \mathcal{E}_n, d_n)$ $(d_n = d_{\mathcal{E}_n})$ と $X = (X, \mu, \mathcal{E}, \delta)$ を定理 6.10 のものとし，考察を続けよう．

まず，$\delta(x,y) = 0$ を満たす点を同一視することによって得られる距離空間を X_δ とし，X から X_δ への自然な射影から誘導される距離と測度をそれぞれ $\bar{\delta}$, μ_δ とすると，測度距離空間 (X_n, μ_n, d_n) は，$(X_\delta, \mu_\delta, \bar{\delta})$ に測度的グロモフ - ハウスドルフ収束する．

次に擬距離 δ が退化しないための十分条件を，δ と d_X^{spec} を比較することによって求める．

X_n の開集合 V_n が X の開集合 V に収束するとする．さらにある正数 κ, τ に対して，各 V_n が 5.3 における条件 [III] のダブリング条件 $[\mathrm{D}]_\mathcal{E}$

と条件 [IV] の弱 2–ポアンカレ不等式 $[\mathrm{P}]_{\mathcal{E}}$ を満たしているとする．十分小さな正数 r に対して，$V_{n,r} = \{x \in V_n \mid d_n(x, \partial V_n) \geq 2r\}$, $V_r = \{x \in V \mid \delta(x, \partial V) \geq 2r\}$ とおく．このとき，定理 5.6 を使うと，$\mathcal{E}_n$ の核関数 $p_n(t,x,y)$ は $V_{n,r}$ において，次のように評価されることが判る: 任意の $x \in V_{n,r}$ と $y, z \in B(x,r)$ に対して，

$$\sup_{t>0} e^{-(t+1/t)} |p_n(t,y,z) - p_n(t,y,y)| \leq C_r d_n(y,z)^\alpha$$

ここで C_r は与えられた正数 κ, τ と r のみによって決まる正数で，$\alpha \in (0,1)$ は κ, τ のみによって決まる正数である．したがって注意 6.3 (2) で述べた距離 $d_{X_n}^{(spec)}$ に関して

$$d_{X_n}^{spec}(y,z)^2 \leq 2C_r d_n(y,z)^\alpha, \quad x \in V_{n,r}, y, z \in B(x,r)$$

が成り立つことがわかる．$n \to \infty$ のとき，$d_{X_n}^{spec}$ と d_n はそれぞれ d_X^{spec} と δ に一様収束するので

$$d_X^{spec}(y,z)^2 \leq 2C_r \delta(y,z)^\alpha, \quad x \in V_r, y, z \in B_\delta(x,r)$$

が従う．とくに $B(x,r)$ において $\delta > 0$ である．$r \to 0$ として，V において $\delta > 0$ であることが判る．とくに定理 6.10 より，$\mathcal{E}_V$ は強局所的正則ディリクレ形式であることが従う．また V において条件 $[\mathrm{D}]_{\mathcal{E}}$ が満たされることは明らか．そこで条件 $[\mathrm{P}]_{\mathcal{E}}$ が満たされることを示そう．

与えられた関数 $u \in D[\mathcal{E}] \cap C_0(V)$ に対して，関数列 $u_n \in D[\mathcal{E}_{X_n}] \cap C(X_n)$ で $n \to \infty$ のとき，u_n は一様に u に収束し，さらに $\mathcal{E}_{X_n}(u_n, u_n)$ が $\mathcal{E}_X(u,u)$ に収束するものを取る．$B(x, 4r) \subset V$ を固定する．次に十分小さな正数 ε と $v_\varepsilon \in C^{0,1}(X, \delta)$ で $0 \leq v_\varepsilon \leq 1$, $v_\varepsilon(y) = 1$ $(y \in B_\delta(x, 2r+\varepsilon))$ かつ $v_\varepsilon(y) = 0$ $(y \in X \setminus B_\delta(x, 2r+2\varepsilon)$ となるものを取る．ここで十分大きな n に対して，$B_{d_n}(h_n(x), 2r) \subset f_n^{-1}(B_\delta(x, 2r+\varepsilon))$ より，命題 6.9 (2) を使って，

$$\begin{aligned}
\int_A v_\varepsilon \, d\mu_{\langle u,u \rangle} &= \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f_n^* v_\varepsilon \, d\mu_{\langle u_n, u_n \rangle} \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \int_{B(h_n(x), 2r)} d\mu_{\langle u_n, u_n \rangle} \\
&\geq \tau^{-2} r^{-2} \limsup_{n\to\infty} \int_{B(h_n(x), r)} |u_n - (u_n)_{B(h_n(x), r)}|^2 d\mu_n \\
&\geq \tau^{-2} r^{-2} \int_{B_\delta(x,r)} |u - u_{B_\delta(x,r)}|^2 d\mu,
\end{aligned}$$

となり，したがって $\varepsilon \to 0$ として，

$$\int_{B_\delta(x,2r)} d\mu_{\langle u,u \rangle} \geq \tau^{-2} r^{-2} \int_{B_d(x,r)} |u - u_{B_\delta(x,r)}|^2 d\mu$$

が得られる．$D[\mathcal{E}] \cap C_0(V)$ は $D[\mathcal{E}_V]$ において $\mathcal{E}_1$-ノルムに関して稠密であるから，これは $u \in D[\mathcal{E}_V]$ に対して，したがって $u \in D_{loc}[\mathcal{E}_V]$ に対しても成り立つ．

以上まとめて次の定理が得られた.

定理 6.12. $X_n = (X_n, \mu_n, \mathcal{E}_n, d_n)$ $(d_n = d_{\mathcal{E}_n})$ と $X = (X, \mu, \mathcal{E}, \delta)$ を定理 6.10 のものとする. X_n の開集合 V_n が X の開集合 V に収束すると仮定し, さらにある正数 κ, τ に対して, 各 V_n が (5.3 における) 条件 [III] のダブリング条件 $[\mathrm{D}]_{\mathcal{E}}$ と条件 [IV] の弱 2–ポアンカレ不等式 $[\mathrm{P}]_{\mathcal{E}}$ を満たしているとする. このとき, δ は V において距離を与え, V も δ に関して (同じ正数 κ と τ に対して) ダブリング条件 $[\mathrm{D}]_{\mathcal{E}}$ と弱 2–ポアンカレ不等式 $[\mathrm{P}]_{\mathcal{E}}$ を満たす.

6.5. **スペクトル収束の例.** この節では, まず 1 次元リーマン多面体 (測地グラフ) を考察し, 次にリーマン多様体のスペクトル収束の例をいくつか述べる.

6.5.1 コンパクト 1 次元リーマン多面体 (測地グラフ)$|G|$ を考える. すなわち有限個の頂点 V と辺 E からなる 1 次元単体的複体 $G = (V, E)$ の表す多面体において, 各辺 $\{q, q'\} \in E$ に長さ $\ell(\{q, q'\})$ が与えられているとする. $|G|$ 上のリーマン距離 (測地距離) を $d^R_{|G|}$ と表し, リーマン測度を $s_{|G|}$ と記す. $|G|$ 上のリプシッツ関数 u に対してそのエネルギーを

$$\mathcal{E}_{|G|}(u, u) = \int_{|G|} \left|\frac{du}{ds}\right|^2 \, ds_G \left(= \sum_{e \in E} \int_0^{\ell(e)} \left|\frac{du}{ds}\right|^2 ds\right)$$

によって定める. このとき, 次の評価式がこれからの議論の基本である.

$$|u(x) - u(y)|^2 \le d^R_{|G|}(x, y)\mathcal{E}_{|G|}(u, u), \quad x, y \in |G| \tag{40}$$

これを示すために, 点 x と y を結ぶ弧長を変数とする最短線 $\gamma : [0, \ell] \to |G|$ $(\ell = d^R_{|G|}(x, y))$ を取ると,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \left|\int_0^{\ell} \frac{d}{ds} u(\gamma(s)) \, ds\right| \\ &\le \int_0^{\ell} \left|\frac{d}{ds} u(\gamma(s))\right| \, ds \\ &\le \ell^{1/2} \left(\int_{\gamma} |u'|^2 \, ds_G\right)^{1/2} \\ &\le d^R_{|G|}(x, y)^{1/2} \mathcal{E}_{|G|}(u, u). \end{aligned}$$

次に正値有界可測関数 w を密度関数とする $|G|$ 上の正値ラドン測度 $wds_{|G|}$ を μ_w とおき, それに関する自乗可積分関数のなすヒルベルト空間を $L^2(|G|, \mu_w)$ と表す. $\mathcal{E}_{|G|}$ を $L^2(|G|, \mu_w)$ 上のディリクレ形式として拡張したものも同じく $\mathcal{E}_{|G|}$ と表す. このとき, $u \in D[\mathcal{E}_{|G|}]$ に対しても同様に評価式 (40) がなりたつ.

以下 μ_w は確率測度であること, すなわち

$$\mu_w(|G|) = \int_{|G|} w ds_G = 1$$

を仮定する．このとき，(40) から

$$|u(x)|^2 \leq 2\int_{|G|} d^R_{|G|}(x,y)\ d\mu_w\ \mathcal{E}_{|G|}(u,u) + 2\int_{|G|} |u(y)|^2\ d\mu_w, \quad x \in |G|$$

が従う．よって直径 $\mathrm{diam}(|G|, d^R_{|G|})$ が正数 D を超えないならば，

$$\|u\|^2_{L^\infty} \leq 2D\mathcal{E}_{|G|}(u,u) + 2\|u\|^2_{L^2}$$

となり，したがって

$$\begin{aligned}\|u\|^4_{L^2} &\leq \|u\|^2_{L^\infty}\|u\|^2_{L^1}\\ &\leq (2D\mathcal{E}_{|G|}(u,u) + 2\|u\|^2_{L^2})\|u\|^2_{L^1},\end{aligned}$$

すなわちナッシュ不等式 [I'] $(\nu = 2)$ がなりたつ．言い換えると，$L^2(|G|, \mu_w)$ における正則ディリクレ形式 $\mathcal{E}_{|G|}$ の生成作用素を $\mathcal{L}_{|G|,w}$，その半群の核関数を $p_{|G|,w}(t,x,y)$ と表すとき，$p_{|G|,w}$ は次の不等式を満たす．

$$p_{|G|,w}(t,x,y) \leq \frac{C_0 D}{t}, \quad 0 < t \leq D,\ x,y \in |G|.$$

ただし，C_0 はある正の定数である．

以上から，次の命題が示された．

命題 6.13. 正数 D に対して，$\mathrm{diam}(|G|, d^R_{|G|}) \leq D$ を満たす測地グラフ $|G|$ と確率測度 μ_w の定める正則ディリクレ空間 $(|G|, \mu_w, \mathcal{E}_{|G|})$ のなす集合 $\mathcal{S}_D$ は，スペクトル距離 SD に関してプレコンパクトである．

注意 6.5. グロモフ－ハウスドルフ距離 HD に関して，$\mathcal{S}_D$ はプレコンパクトではない．また列 $(|G_n|, \mu_n, \mathcal{E}_{G_n})$ の確率測度 μ_n が $L(|G_n|)^{-1} ds_{|G_n|}$ によって与えられているとする．ただし $L(|G_n|)$ は $|G_n|$ の全長 $s_{|G_n|}(|G_n|)$ を表す．このとき，$L(|G_n|)$ が無限大に発散するとき，$(|G_n|, \mu_n, \mathcal{E}_{|G_n|})$ の内在的距離の直径は 0 に収束する．

$\mathcal{S}_D$ の元 $(|G|, \mu_w, \mathcal{E}_{|G|})$ の考察を続ける．まず核関数が定める $|G|$ 上の距離 $d^{spec}_{|G|,w}$ とリーマン距離 $d^R_{|G|}$ は次のように関係している．

$$d^{spec}_{|G|,w}(x,y) \leq C_0' D^{1/4} d^R_{|G|}(x,y)^{1/4}, \quad x,y \in |G| \tag{41}$$

ただし，C_0' はある正の定数である．実際，補題 5.2(3) に注意して，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{|G|}(p_{|G|,w}(t,x,*), p_{|G|,w}(t,x,*)) &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \left(\int_{|G|} p_{|G|,w}(t,x,y)\psi_i(y)\ d\mu_w(y)\right)^2\\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-2\lambda_i t}\psi_i(x)^2\\ &\leq C_0 D\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{Dt}\right), \quad 0 < t,\ x \in |G|\end{aligned}$$

となるので，評価式 (40) より，

$$|p_{|G|,w}(t,x,y) - p_{|G|,w}(t,x,z)|^2 \leq \frac{C_0' D}{t^2} d^R_{|G|}(y,z), \quad 0 < t \leq D,\ x,y,z \in |G|$$

が従う．よって $d^{spec}_{|G|,w}$ の定義を思い出すと，

$$\begin{aligned} d^{spec}_{|G|,w}(x,y)^2 &= \sup_{t>0} e^{-(t+1/t)}(p_{|G|,w}(t,x,x)+p_{|G|,w}(t,y,y)-2p_{|G|,w}(t,x,y)) \\ &\le 2{C'_0}^{1/2} D^{1/2} \sup_{t>0} e^{-(t+1/t)} t^{-1}\ d^R_{|G|}(x,y)^{1/2} \\ &\le C'_0 D^{1/2} d^R_G(x,y)^{1/2} \end{aligned}$$

となり，評価式 (41) を得る．この評価から定理 6.10 と同様の議論を用いて次のことが従う．

$\mathcal{S}_D$ の元 $(|G_n|,\mu_{w_n},\mathcal{E}_{|G_n|})$ の列に対して，測地空間 $(|G_n|,d^R_{|G_n|})$ がコンパクト距離空間 (Z,δ^R_∞) にグロモフーハウスドルフ距離に関して収束するとする．このとき，部分列 $\{m\}$ と Z 上の連続な擬距離 d^{spec}_∞ が存在して，距離空間 $(|G_m|,d^{spec}_{|G_m|,w_m})$ は (Z,d^{spec}_∞) に近似写像 $F_m:(|G_m|,d^R_{|G_m|})\to(Z,\delta^R_\infty)$ によってグロモフーハウスドルフ距離に関して収束する．

以下，このような列 $(|G_m|,\mu_{w_m},\mathcal{E}_{|G_m|})$，コンパクト距離空間 (Z,δ^R_∞)，近似写像 $F_m:(|G_m|,d^R_{|G_m|})\to(Z,\delta^R_\infty)$ および Z 上の連続な擬距離 d^{spec}_∞ を考える．さらに必要ならば部分列を取ることによって像測度 $F_{m*}\mu_{w_m}$ の列は Z 上の非負値ラドン測度 μ_∞ に獏収束すると仮定する．このとき，Z 上の連続関数の空間 $\mathcal{C}=C(Z)$ から $L^2(|G_m|,\mu_{w_m})$ への線形写像 Φ_m を

$$\Phi_m(u)=u\circ F_m,\quad u\in\mathcal{C}$$

と定めると，評価式 (40) から，ディリクレ形式 $\mathcal{E}_{|G_m|}$ の列は Φ_m を通して漸近的にコンパクトであることが容易に確かめられる．したがって，必要ならば部分列をとることによって，ディリクレ形式 $\mathcal{E}_{|G_m|}$ の列は $L^2(Z,\mu_\infty)$ 上のあるディリクレ形式 $\mathcal{E}_\infty$ にモスコ収束することがわかる．ここで極限のディリクレ形式について，（E－1）すなわち定義域が稠密であることは主張していないので注意する．

さて，$\mathcal{E}_\infty$ の性質をまとめておこう．

(1) $u\in D[\mathcal{E}_\infty]$ に対して，

$$|u(x)-u(y)|^2\le\mathcal{E}_\infty(u,u)\delta^R_\infty(x,y),\quad x,y\in Z$$

が成り立つ．とくに $D[\mathcal{E}_\infty]\subset C(Z)$ である．

(2) $u\in D[\mathcal{E}_\infty]$ に対して，ナッシュ不等式

$$\|u\|^4_{L^2}\le 2(D\mathcal{E}_\infty(u,u)+\|u\|^2_{L^2})\|u\|^2_{L^1}$$

が成り立つ．

(3) $(0,\infty)\times Z\times Z$ 上の非負値連続関数 $p_\infty(t,x,y)$ が存在して，$p_{|G_m|.w_m}$ はこれに次のように収束する．

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{t>0,x,y\in|G_m|} e^{-(t+1/t)}|p_{|G_m|,w_m}(t,x,y)-p_\infty(t,F_m(x),F_m(y))|=0$$

また，d^{spec}_∞ は

$$d^{spec}_\infty(x,y)^2=\sup_{t>0} e^{-(t+1/t)}(p_\infty(t,x,x)+p_\infty(t.y.y)-2p_\infty(t,x,y))$$

によって与えられ，

$$d_\infty^{spec}(x,y) \leq C_0 D^{1/4} \delta_\infty^R(x,y)^{1/4}, \quad x,y \in Z$$

がなりたつ．

(4) $\mathcal{E}_\infty$ に対応する $L^2(Z,\mu_\infty)$ 上の半群 $P_{\infty;t}$ は，

$$P_{\infty;t}u(x) = \int_Z p_\infty(t,x,y)u(y)\, d\mu_\infty(y), \quad u \in L^2(Z,\mu_\infty)$$

と表現される．$\mathcal{E}_\infty$ の固有値とそれに対応する固有関数からなる $D[\mathcal{E}_\infty]$ の閉包における完全正規直交系をそれぞれ $\{\lambda_i : i = 0,1,2,\ldots,N\}$ および $\{\psi_i\}$ と表すと，

$$p_\infty(t,x,y) = \sum_{i=0}^{N} e^{-\lambda_i t}\psi_i(x)\psi_i(y), \quad t>0,\ x,y \in Z$$

となる．ここで $N = \dim D[\mathcal{E}_\infty] (\leq +\infty)$ とおいた．

なお，$(|G_m|, \mu_{w_m}, \mathcal{E}_{|G_m|})$ の第 i 番目の固有値 $\lambda_i^{(m)}$ は $\mathcal{E}_\infty$ の第 i 番目の固有値 λ_i に収束し，$N < +\infty$ のとき，$i > N$ に対して $\lambda_i^{(m)}$ は発散する．

以上のことから $(|G_m|, \mu_{w_m}, \mathcal{E}_{|G_m|})$ のスペクトル収束極限を次のように述べることができる．

まず $d_\infty^{spec}(x,y) = 0$ という関係によって Z を分割し，その商空間を Y と表す．Y 上には自然に距離 d_∞^{spec} が定まる．次に Z から Y への自然な射影を π と表し，像測度 $\pi_*\mu_\infty$ とその台をそれぞれ $\bar{\mu}$ および X とおく．さらに $D[\mathcal{E}_\infty] \subset \pi^* C(Y)$ に注意すると，$L^2(X,\bar{\mu})$ 上に自然にディリクレ形式 $\mathcal{E}_\infty$ が誘導され，$(X,\bar{\mu},\mathcal{E}_\infty)$ が求める $(|G_m|, \mu_{w_m}, \mathcal{E}_{|G_m|})$ のスペクトル収束極限である．

例 6.2. コンパクト測地グラフ $|G|$ に対して，$|G|$ 上の確率測度の列 μ_{w_n} で，頂点集合 V 上の測度 $\mu = \sum_{q\in V} a_q\delta_q$ に漠収束するものを取る．ただし，$\sum_{q\in V} a_q = 1$，$a_q > 0$ とし，δ_q は点 q でのディラックの点測度を表す．このとき，$(|G|, \mu_{w_n}, \mathcal{E}_{|G|})$ は，$L^2(V,\mu)$ 上のエネルギー形式

$$\mathcal{E}_G(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{\{q,q'\}\in E} \frac{1}{\ell(\{q,q'\})}(u(q')-u(q))(v(q')-v(q))$$

にスペクトル収束する．

6.5.2 コンパクトリーマン多様体のスペクトル収束の例をいくつか述べよう．断らない限り，測度は正規化されたリーマン測度を考える[28]．

例 6.3. $S^1 \times S^1 = \{(e^{\sqrt{-1}x}, e^{\sqrt{-1}y}) \mid x,y \in \mathbf{R}\}$ 上の次のようなリーマン計量

$$g_F = dx^2 + F(x)^2 dy^2, \quad 0 < F \in C^\infty(S^1)$$

からなる族 $\mathcal{F}$ を考える．k 個の点 $\{p_i = e^{\sqrt{-1}x_i} \mid 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < 2\pi\}$ と $2k$ 個の区間 $I_i^- = [x_i - a_i, x_i]$, $I_i^+ = [x_i, x_i + a_i]$ $(0 < a_i <$

[28] ノート 6 参照

$(1/2)\min\{x_{j+1}-x_j|\ j=0,1,\dots,k\}, x_0=0, x_{k+1}=2\pi)$ に対して，すべての $g_F\in\mathcal{F}$ は以下の条件を満たしているとする．

$$F'(x)\le 0 \quad (x\in I_i^-),\ F'(x)\ge 0 \quad (x\in I_i^+),$$

$$b_i\left|\int_{x_i}^{x}F(t)dt\right|^{1/c_i}\le F(x) \quad (x\in I_i^-\cup I_i^+),$$

$$d_i^-\le F(x)\le d_i^+ \quad (x\in S^1\setminus\cup_{i=1}^{k}I_i^+\cup I_i^-),$$

ただし b_i, c_i, d_i^+，d_i^- は正の定数で $c_i>1\ (i=1,2,\dots,k)$ とする．このとき，すべての $g_F\in\mathcal{F}$ に対して一様に，5.2 における性質 [I] が満たされる．実際 [I] の定数 ν と A として，与えられた定数 $a_i, b_i, c_i\ d_i^+$，d_i^- $(i=1,\dots,k)$ のみによるものが取れる．たとえば $\nu=\max\{2, c_1/(c_1-1),\dots,c_k/(c_k-1)\}$ とおける．

さて，$g_n=g_{F_n}\subset\mathcal{F}$ で正則ディリクレ空間 $(X,\mu,\mathcal{E})$ にスペクトル収束すると仮定し，さらに $n\to\infty$ のとき，関数 F_n は一様に S^1 上の連続関数 F に収束しているとする．ただし F は $F(x)>0\ (x\neq x_i)$, $F(x_i)=0$，$F(x)\le e_iF_n(x)\ (x\in I_i^-\cup I_i^+), (i=1,\dots,k)$ を満たしているとする．ここに e_i は正の定数である．

この条件のもとに極限に現れるディリクレ空間 $(X,\mathcal{E}_X)$ を説明しよう．次の 3 つの場合 [i], [ii], [iii] に分けて述べる．

$$[i] \qquad \int_{x_i-a_i}^{x_i}\frac{1}{F(x)}dx=\int_{x_i}^{x_i+a_i}\frac{1}{F(x)}dx=+\infty \quad (i=1,\dots,k)$$

この場合, X は k 個の連結成分 $X_i\ (i=1,\dots,k)$ に分かれ, 各 $(X_{0;i},\mathcal{E}_{X_i})$ は特異リーマン多様体 $([x_i,x_{i+1}]\times S^1, g_F)$ でエネルギー形式として $\mathcal{E}_{g_F}$ を持ったものとなる．ここで 2 つの円周 $\{x_i\}\times S^1$ と $\{x_{i+1}\}\times S^1$ は各々点 z_i^- と z_i^+ に縮退し, $\mathcal{E}_{g_F}$ は $C_0^\infty((x_i,x_{i+1})\times S^1)$ 上のエネルギー形式の最小の閉拡大である．すなわち 2 点 z_i^- と z_i^+ で特異性のあるリーマン計量の与えられた球面と考えられる．

$$[ii] \qquad \int_{x_i-a_i}^{x_i}\frac{1}{F(x)}dx<+\infty;\ \int_{x_i}^{x_i+a_i}\frac{1}{F(x)}dx<+\infty \quad (i=1,\dots,k)$$

この場合，X は連結で，$(X,\mathcal{E})$ はエネルギー形式 $\mathcal{E}_{g_F}$ を備えた特異リーマン多様体 $(S^1\times S^1, g_F)$ と同一視できる．定義域 $D[\mathcal{E}_{g_F}]$ は，ソボレフ空間 $W^{1,2}((S^1\setminus\{p_1,\dots,p_k\})\times S^1, g_F)$ の関数でその $\{p_i\}\times S^1$ への両側からのトレースが一致するものから成り立つ．$C^\infty(S^1\times S^1)$ は定義域に稠密に含まれている．ここで g_n のリーマン距離は擬距離 δ に収束するが，明らかに δ は k 個の円周に沿って縮退していることに注意する．

$$[iii] \qquad \int_{x_i-a_i}^{x_i}\frac{1}{F(x)}dx=+\infty;\ \int_{x_i}^{x_i+a_i}\frac{1}{F(x)}dx<+\infty \quad (i=1,\dots,k)$$

この場合, X は k 個の連結成分 $X_{0;i}$ $(i=1,\ldots,k)$ からなり, 各 $(X_{0;i},\mathcal{E}_{X_{0;i}})$ は, 次のような非局所的ディリクレ形式 $\mathcal{E}_i$ を備えた境界 $S_i^-=\{x_{i+1}\}\times S^1$ をもつ特異リーマン多様体 $M_i=([x_i,x_{i+1}]\times S^1,g_F)$ と同一視できる.

$$\mathcal{E}_i(u,u)=\mathcal{E}_{g_F}(u,u)+\frac{1}{\pi\mathrm{Vol}(M_i,g_F)}\mathcal{C}(u_{|S_i^-},u_{|S_i^-}),$$

$$u\in D[\mathcal{E}_i]=H^1(M_i,g_F)$$

ただし

$$\mathcal{C}(\phi,\phi)=\frac{1}{16\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\phi(y)-\phi(y'))^2\sin^{-2}\left(\frac{y-y'}{2}\right)dydy',$$

$$D[\mathcal{C}]=\{\phi\in S_i^-(=S^1)|\ \mathcal{C}(\phi,\phi)<+\infty\}.$$

円周 $\{x_i\}\times S^1$ は 1 点 z_i^- に縮退している.

k 毎に, [i], [ii], [iii] それぞれの場合が混ざったものも考えられる.

例 6.4. $M=(M,g_M)$ を 2 次元コンパクトリーマン多様体とする. M と単位円周 $S^1=\{e^{\sqrt{-1}x}|\ x\in\mathbf{R}\}$ との直積多様体 $M\times S^1$ 上の次のようなリーマン計量の族 $\mathcal{F}$ を考える.

$$g_\omega=g_M+(dx+\omega)^2,$$

ただし ω は M 上の 1 次微分形式である. ここで (M,g_M) は 5.2 における性質 [I] を正数 ν, A に対して満たすとする. このとき $\mathcal{F}$ の各計量も同じ性質を定数 $(\nu+1)$ と A のみに依存してきまる定数 A' に対して満たすことが判る.

次に M の k 個の点 $\{p_1,\ldots,p_k\}$ とそれらの座標近傍 $(U_i,(x_i,y_i))$ で互いに交わることの無いものを選んでおく.

さて, $\{(M\times S^1,g_n=g_{\omega_n})\}$ が正則ディリクレ空間 $(X,\mu_X,\mathcal{E})$ に収束するとして, ω_n は連続 1 次微分形式 ω に一様に収束する. さらにある正の定数 a があって 2 次微分形式 $\Omega_n=d\omega_n$ が

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\left|\int_{B(p_i,\varepsilon)}\Omega_n\right|\geq a\quad(i=1,\ldots,k)$$

を満たしているとする. このとき, $(X,\mu,\mathcal{E})$ は $(M\times S^1,g_\omega)$ と同一視できる. 実際 g_n の熱核は g_ω の熱核に一様に収束するからである. 一方, g_n のリーマン距離 d_n は各円周 $\{p_i\}\times S^1$ $(i=1,\ldots,k)$ に沿って 0 に縮退していく. なぜならば, 各 i に対して, p_i と測地線として円周 $\partial B(p_i,\varepsilon)$ 上の点 $q_{i;\varepsilon}$ を結び, この円周に沿って点 $r_{i;\varepsilon}$ まで進み, そして p_i に測地線として戻る, 単位の速さの閉曲線 $\gamma_{i;\varepsilon}(t)$ $(0\leq t\leq\ell)$ を考える. そして $(p_i,1)\in M\times S^1$ を出発点とする $\gamma_{i;\varepsilon}$ の水平リフト $\overline{\gamma}_{i;\varepsilon}^{(n)}(t)$ $(0\leq t\leq\ell)$, すなわち

$$\theta_{i;\varepsilon}^{(n)}(t)=-\int_0^t\omega_n(\gamma_{i;\varepsilon}'(s))ds$$

によって与えられる $M\times S^1$ 上の曲線 $\overline{\gamma}^{(n)}_{i;\varepsilon}(t)=(\gamma_{i;\varepsilon}(t),\theta^{(n)}_{i;\varepsilon}(t))$ を考えると，$\gamma_{i;\varepsilon}$ の長さ ℓ は $4\pi\varepsilon$ を超えることはないので

$$d_n(\overline{\gamma}^{(n)}_{i;\varepsilon}(0),\overline{\gamma}^{(n)}_{i;\varepsilon}(\ell))\le 4\pi\varepsilon$$

と評価される．一方，$A_{i;\varepsilon}$ によって $\gamma_{i;\varepsilon}$ に囲まれる領域を表すと，

$$\theta^{(n)}_{i,\varepsilon}(\ell)=-\int_{A_{i;\varepsilon}}\Omega_n$$

となり，したがってもし $\left|\int_{B(p_i,\varepsilon)}\Omega_n\right|\ge a$ ならば，区間 $[0,a]$ は，$q_{i;\varepsilon}$ と $r_{i;\varepsilon}$ を動かすときの $\theta^{(n)}_{i;\varepsilon}(\ell)$ の値域に含まれる．したがって円周 $\{p_i\}\times S^1$ は $b\varepsilon$ 以下の半径の $(p_i,1)$ を中心とした測地球体に含まれる．ここで b は a にのみ依存する正の数である．このようにリーマン距離 d_n は円周 $\{p_i\}\times S^1$ $(i=1,\ldots,k)$ に沿って縮退していく．

次に

$$g_n=a(n)g_M+(dx+\omega_n)^2\quad(a>0).$$

によって与えられるリーマン計量を考え，0 に収束する正の数の列 $a(n)$ を適当に選ぶ．このとき，$\{(M\times S^1,g'_n)\}$ は $(X,\mathcal{E})=S^1$ にスペクトル収束するが，距離空間としては 1 点に完全に縮退することがわかる．

例 6.5. (N,h) をコンパクトリーマン多様体とする．

$$g_n=dx^2+\frac{1}{1+f_n(x)}h$$

によって与えられる直積 $M=S^1\times N$ 上のリーマン計量 g_n の列を考える．f_n は単位円周 $S^1=\{e^{\sqrt{-1}}x\mid x\in\mathbf{R}\}$ 上の滑らかな非負値関数で，区間 $[-1/n,1/n]$ に台を持ち，さらに $f_n(x)dx$ は点 0 でのデルタ関数 δ_0 に弱収束しているとする．$\mathcal{E}_n$ を $L^2(M,\mu)$ $(\mu=dx/(2\pi)\times\mu_N)$ 上のディリクレ形式で

$$\mathcal{E}_n(u,v)=\int_M\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+(1+f_n(x))\langle du_{|\{x\}\times N},dv_{|\{x\}\times N}\rangle_h\,\frac{dx}{2\pi}\times d\mu_N$$

によって定義されているとする．$n\to\infty$ のとき，$(M,dx/(2\pi)\times d\mu_N,\mathcal{E}_n)$ は正則ディリクレ空間 $(M,dx/(2\pi)\times d\mu_N,\mathcal{E}_\infty)$ にスペクトル収束する．ただし

$$\mathcal{E}_\infty(u,v)=\int_M\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+(1+\delta_0(x))\langle du_{|\{x\}\times N},dv_{|\{x\}\times N}\rangle_h\,\frac{dx}{2\pi}\times d\mu_N.$$

である．$\mathcal{E}_\infty$ のエネルギー測度は超曲面 $\{0\}\times N$ に沿って特異であり，さらにリーマン距離 d_{g_n} の極限の擬距離はこの超曲面に沿って退化している．

ここでは，$f_n(x)dx$ が 1 点のデルタ関数に弱収束するものを考えたが，$\mathcal{E}_n$ は n に依らずに性質 [I] を満たすので，可算個の点 $\{x_i\}$ で超曲面 $\{x_i\}$ に沿って特異なディリクレ形式に収束するものも構成できる．

例 6.6. $S^1 \times S^1$ 上のリーマン計量の列

$$g_n = dx^2 + F(nx)^2 dy^2$$

を考える．ただし F は S^1 上の滑らかな正値関数である．このとき，$n \to \infty$ とすると，$(S^1 \times S^1, g_n)$ は $(S^1 \times S^1, g_\infty)$ にスペクトル収束する．ここで g_∞ は次のように与えられる．

$$g_\infty = ab\, dx^2 + \frac{b}{a}\, dy^2, \quad a = \int_0^{2\pi} \frac{1}{F(x)} dx, \quad b = \int_0^{2\pi} F(x) dx.$$

特に $u(x,y) = \min\{|x|, |2\pi - x|\}$ とおくと，$\mathcal{E}_{g_n}(u,u) = 1$ および $\mathcal{E}_{g_\infty}(u,u) = 1/ab \leq 1$ が成り立つ．等号は F が定数のときそのときに限り成り立つ (例 6.1 参照)．

例 6.7. この例において，1.3 項で述べたサブリーマン計量が，あるリーマン計量の列のグロモフ-ハウスドルフ距離に関する極限であり，スペクトル収束の極限でもあることを見る．

コンパクトリーマン多様体 (M, g_0) の接束 TM の部分束 H を考える．H 上にリーマン計量 h が与えられているとする．ここで H に属さないベクトル v に対して，$h(v,v) = +\infty$ と約束する．このとき H に接する区分的 C^1 曲線 $\gamma(t)$ $(a \leq t \leq b)$ に対して，その長さを $\int_a^b h(\gamma'(t), \gamma'(t))^{1/2} dt$ によって定義し，2 点 $x, y \in M$ に対して，$\rho_h(x,y)$ によってこれら 2 点を結ぶ曲線の長さの下限を表す．一方計量 h は余接束上の退化計量

$$h^*(\xi, \xi) = 2 \sup_{v \in T_x M} \{\langle \xi, v \rangle - \frac{1}{2} h(v,v)\}, \quad \xi \in T_x^* M,\ x \in M$$

を定める．これから自然に $L^2(M, \mu_{g_0})$ 上のエネルギー形式

$$\mathcal{E}_h(u,u) = \int_M h^*(du, du)\ d\mu \quad u \in C^\infty(M)$$

が定まる．

ここで ρ_h は実際 M 上の距離となり，M の位相を定めると仮定する．さらに 5.3 における条件，ダブリング条件 $[D]_\mathcal{E}$ と弱 2–ポアンカレ不等式 $[P]_\mathcal{E}$ を満たすとする．このとき，固定しておいたリーマン計量 g_0 に関する H の直交補空間からなる部分束を V とし，リーマン計量の列 $\{g_n\}$ で，H と V は 各 g_n に関して直交し，V 上 $g_n \geq {\varepsilon_n}^{-1} g_0$ かつ H 上 $|g_n - h| \leq \varepsilon_n$ を満たすものを考える．ただし ε_n は $n \to \infty$ のとき，0 に収束する正数列である．このようなリーマン計量の列 $\{g_n\}$ に対して，リーマン距離 d_n は ρ_h にグロモフ - ハウスドルフ収束し，ディリクレ形式の列

$$\mathcal{E}_n(u,u) = \int_M \langle du, du \rangle_{g_n}\ d\mu$$

は $\mathcal{E}_h$ にモスコ収束する．

例 6.8. 次のような $S^1 \times S^1 = \{(e^{\sqrt{-1}x}, e^{\sqrt{-1}y}) |\ x, y \in \mathbf{R}\}$ 上のリーマン計量の列 $\{g_n\}$ を考える．

$$g_n = E(x,y)^2 dx^2 + \varepsilon_n F(x,y)^2 dy^2$$

ただし E と F は $S^1 \times S^1$ 上の滑らかな正値関数で，$\{\varepsilon_n\}$ は 0 に収束する正数の列である．g_n の正規化されたリーマン測度は n に依らず，

$$\overline{\mu} = \frac{EF(x,y)dxdy}{\int\int_{S^1\times S^1} EF(x,y)dxdy}$$

となることに注意する．$\pi_1 : S^1 \times S^1 \to S^1$ を第一番目の S^1 への射影を表し，この円周 $S^1 = \{e^{\sqrt{-1}x} | \, x \in \mathbf{R}\}$ 上の測度として

$$\mu = \pi_{1*}\overline{\mu} = \frac{\int_{S^1} EF(x,y)dy}{\int\int_{S^1\times S^1} EF(x,y)dxdy} dx$$

を考える． さらにこの S^1 に 2つの計量

$$h = \frac{\int_{S^1} EF(x,y)dy}{\int_{S^1} F/E(x,y)dy} dx^2; \;\; h^* = E^*(x)^2 dx^2,$$

を定義する．ただし $E_*(x) = \min\{E(x,y) | \, y \in \mathbf{R}\}$．このとき，$(S^1 \times S^1, g_n)$ は $(S^1, \mu, \mathcal{E}_h)$ にスペクトル収束し，(S^1, h^*) にグロモフ - ハウスドルフ収束する．h^* に関する距離 δ は，$\delta(x_1,x_2) = \left|\int_{x_1}^{x_2} E_*(x)dx\right|$ となり，したがって 1 点 x_1 を固定して $\rho(x) = \delta(x_1, x)$ とおけば，

$$\mathcal{E}_h(\rho,\rho) = \frac{\int_{S^1}\left(\int_{S^1} F/E(x,y)dy\right) E_*(x)dx}{\int\int_{S^1\times S^1} EF(x,y)dxdy} \leq 1,$$

となる．等号は $E(x,y) = E^*(x)$，すなわち，$E(x,y)$ が第 2変数 y に依存しないときかつそのときに限り成り立つ．

次節に入る前に条件 [I] を満たすリーマン多様体のいくつかの族を紹介する[29]．

以下 (M,g) を次元 d のコンパクトリーマン多様体とする．

(i) $\mathcal{Y}(M,[g])$ を計量 g の定める共形類 $[g]$ の山辺の定数とし，Scal_g をスカラー曲率とする．このとき正数 α, β, $\gamma > d/2 (> 3/2)$ に対して，$\mathrm{Vol}(M,g) \leq \alpha$, $\mathcal{Y}(M,[g]) \geq \beta$，および $\int_M (\mathrm{Scal}_g)_+{}^\gamma dv_g \leq \eta$ が満たされるならば，(M,g) は定数 $\nu = d$ と $A = A(d,\alpha,\beta,\gamma,\eta)$ に対して条件 [I] を満たす．

(ii) 断面曲率が上から定数 K で押さえられ，かつ単射半径が下から定数 I で押さえられる完備リーマン多様体のリーマン部分多様体 (M,g) を考える．ある正数 α, $\beta > d$ と γ に対して，$\mathrm{Vol}(M) \leq \alpha$ かつ平均曲率 H_M が $\int_M |H_M|^\beta dv_g \leq \gamma$ を満たすならば，$((M,g)$ は正数 $\nu = d$ と $A = A(d,\kappa,\iota,\alpha,\beta,\gamma)$ に対して，条件 [I] を満たす．

(iii) コンパクトリーマン多様体 B を底空間とするリーマンサブマージョンの全空間 (M,g) を考え，すべてのファイバーは連結で全測地的であるとする．このとき各ファイバーはひとつのコンパクトリーマン多様体 F に等長である．B が正数 ν' と A' に対して条件 [I] を満たし，F が正数 ν'' と A'' に対して条件 [I] を満たすならば，全空間 M は正数 $\nu = \nu' + \nu''$ と $A = A' + A''$ に対して条件 [I] を満たす．

---

[29] ノート 6 参照

6.6. ディリクレ空間の収束–その4–. 点付き強正則ディリクレ空間 $X = (X, o, \mu, \mathcal{E}, d_{\mathcal{E}})$ からなる族 $\mathcal{F}$ で，次の性質を満たすものを考える.

[VII] $X \in \mathcal{F}$ は定理 5.1 の条件 [C] をみたし，その内在的距離 $d_{\mathcal{E}}$ は完備である.（したがって，$(X, d_{\mathcal{E}})$ は測地空間である.)

[VIII] ある定数 κ, τ と正値非増加関数 $\rho(r)$ $(0 \leq r < +\infty)$ が存在して，$X \in \mathcal{F}$ の距離球体 $B(x, \rho(d_{\mathcal{E}}(o,x)))$ において，κ に対してダブリング条件 $[\mathrm{D}]_{\mathcal{E}}$ と τ に対して弱 2–ポアンカレ不等式 $[\mathrm{P}]_{\mathcal{E}}$ が成り立つ.

[IX] $X \in \mathcal{F}$ は正規化条件 $\mu(B(o,1)) = 1$ を満たす.

このような $\mathcal{F}$ の元 $X = (X, o, \mu, \mathcal{E}, d_{\mathcal{E}})$ に対して，いくつかの考察をする.

まず $R \geq 1$ と $0 < r \leq \rho(R)$ に対して，κ と τ のみに依って決まる定数 C_1 が存在して，

$$\mu((B(o,R)) \leq \max\{1, (2\rho(0))^{\kappa}\} e^{C_1(1+R/\rho(R))} \tag{42}$$

$$\mu(B(x,r)) \geq \left(\frac{2r}{\rho(R)}\right)^{\kappa} e^{-C_1(1+2R/\rho(R))}, \quad B(x,r) \subset B(o,R) \tag{43}$$

が成り立つ. なお以下において，C_i $(i = 1, 2, \ldots)$ は κ と τ のみに依って決まる定数，$C_i(a, b, \ldots)$ は κ, τ と $a, b \ldots$ のみによって決まる定数を表すことにする.

さて，上の評価式 (42), (43) を検証しよう. 定理 5.10 と [IX] によって，

$$\begin{aligned} \mu(B(o,R)) &\leq \mu(B(o,\rho(R))) \exp C_1(1 + R/\rho(R)) \\ &\leq \mu(B(o,\rho(0)) \exp C_1(1 + R/\rho(R)) \end{aligned}$$

となるので，$\rho(0) \geq 1$ ならば，$\mu(B(o,\rho(0)) \leq (2\rho(0))^{\kappa}\mu(B(o,1))$ に注意すれば，(42) が得られる. 次に $B(x,r) \subset B(o,R)$ に対して，(o を x, B を $B(o,1)$ として) 定理 5.10 を適用して，

$$1 = \mu(B(o,1)) \leq \mu(B(x,\rho(R)) \exp C_1(1 + 2R/\rho(R))$$

を得る. $\mu(B(x,r)) \geq (2r/\rho(R))^{\kappa}\mu(B(x,\rho(R))$ より求める評価 (43) を得る.

次に X のディリクレ形式 $\mathcal{E}$ を $D_0[\mathcal{E}, B(o,R)]$ に制限して得られる $B(o,R)$ 上のディリクレ形式を $\mathcal{E}_R$ とする. これの熱核を $p_R(t,x,y)$ と表し，その固有関数からなる正規直交完全系を一組選び，それを $\{\psi_{R;i} \mid i = 1, 2, 3, \ldots\}$ とする. 任意の $R' < R$ に対して，$B(o,R') \times B(o,R')$ 上での $p_R(t,*,*)$ と，$B(o,R')$ 上での $\psi_{R,i}$ の (X に依らない) 一様なヘルダー連続性の評価と固有値 λ_i の上からの評価が得られる (定理 5.6, 系 5.7, 補題 5.2, 補題 5.3 参照). さらに定理 5.8 より，p_R は次のように評価される.

$$\begin{aligned} p_R(t,x,y) &\leq \frac{C_2(R,\rho(R),\alpha)}{t^{\kappa/2}} \exp\left(-\frac{d_{\mathcal{E}}(x,y)^2}{t+\alpha}\right) \\ &\qquad x, y \in B(o,R),\ 0 < t \leq 1,\ \alpha > 0 \end{aligned} \tag{44}$$

また，補題 5.9 より

$$(45) 1-\int_{B(x,r)} p_R(t,x,y)\, d\mu(y) \leq C_3 \exp\left(-C_4\frac{r^2}{t}\right), \quad 0<t\leq 1,\ B(x,2r)\subset B(o,R)$$

これらの考察から，次の定理を証明することができる．

定理 6.14. $\mathcal{F}$ の任意の列 $\{X_n = (X_n, o_n, \mu_n, \mathcal{E}_n, d_n)\ (d_n = d_{\mathcal{E}_n})\}$ は，次のような部分列–これも同く $\{X_n\}$ と記す–を含む．

(1) (X_n, o_n, μ_n, d_n) はある点付き測度測地空間 (X, o, μ, δ) に，ε_n - ハウスドルフ近似 $f_n : B_{d_n}(o_n, R_n) \to X$，$h_n : B_\delta(o, R_n) \to X_n$ の組によって測度的グロモフ - ハウスドルフ収束する．

(2) X 上の強局所的正則ディィリクレ形式 $\mathcal{E}$ が存在して，$\mathcal{E}_n$ は f_n によって $\mathcal{E}$ にモスコ収束する．

(3) X も性質 [VII] と [IX] を満たし，さらに次の評価が成り立つ．

$$\begin{aligned} C_5 d_{\mathcal{E}} &\leq \delta \leq d_{\mathcal{E}} \\ \mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} u &\leq \mathrm{Lip}_\delta u \leq \frac{1}{C_5}\mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} u, \quad u \in C^{0,1}_{loc}(X,\delta) \\ \mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} u &\leq \Gamma(u,u) \leq \frac{1}{C_5}\mathrm{Lip}_{d_{\mathcal{E}}} u, \quad u \in C^{0,1}_{loc}(X,\delta) \end{aligned}$$

(4) 距離 δ に関して，X は性質 [VIII] を満たす．

証明

ステップ 1 体積の一様な評価 (42) と (43) によって，定理 4.1 が適用できる．したがって必要ならば部分列を取ることによって，(X_n, o_n, μ, d_n) はある点付測度距離空間 $X = (X, o, \mu, \delta)$ に測度グロモフ-ハウスドルフ収束する．近似写像を $f_n : B_{d_n}(o_n, R_n) \to X$，$h_n : B_\delta(o, R_n) \to X_n$ とする．また定理 4.2 より δ は測地距離を定める．

次に正数 R を一つ固定する．このとき $B_{d_n}(o_n, R)$ 上のディィリクレ形式 $\mathcal{E}_{n;R}$ の熱核 $p_{n;R}(t,x,y)$ とその固有関数からなる正規直交完全系の一組 $\{\psi^{(n)}_{R;i} \mid i = 1,2,3,\ldots\}$ に対して，先に注意したように n に依らない一様な連続性の評価と，固有値の上からの評価を考慮すると，必要ならば部分列を選ぶことによって，$n \to \infty$ のとき，$p^{(n)}_R(t,*,*)$ および $\psi^{(n)}_{R,i}$ はそれぞれ $B_\delta(o,R)\times B_\delta(o,R)$ 上の (局所ヘルダー) 連続関数 $\bar{p}_R(t,*,*)$ および $B_\delta(o,R)$ 上の (局所ヘルダー) 連続関数 $\bar{\psi}_{R,i}$ に広義一様収束し，$\lambda^{(n)}_{R,i}$ は $\bar{\lambda}_{R,i}$ に収束すると仮定してよろしい．このとき

$$\bar{p}_R(t,x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\bar{\lambda}_{R,i}}\bar{\psi}_{R,i}(x)\bar{\psi}_{R,i}(y)$$

と表せ，$u \in L^2(B(o,R))$ に対して，

$$\bar{P}_{R;t}u(x) = \int_{B_\delta(o,R)} \bar{p}_R(t,x,y)u(y)\, d\mu(y)$$

と定めることによって $L^2(B_\delta(o,R))$ 上の半群が得られる．$\bar{p}_R$ は δ に関して (44), (45) を満たす．これに注意すると，$\bar{P}_{R;t}$ の $L^2(B_\delta(o,R)$ における

連続性を示すことができる．実際，任意の $u \in C_0(B(o,R))$ と正数 ε に対して，正数 r を適当に選んで，$\delta(x,y) < r$ ならば，$|u(x)-u(y)| \le \varepsilon$，そして $u(x) \neq 0$ ならば，$B_\delta(x,2r) \subset B_\delta(o,R)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
&|\bar{P}_{R;t}u(x) - u(x)| \\
&\quad \le \int_{y \in B_\delta(x,r)} \bar{p}_R(t,x,y)|u(y)-u(x)|\,d\mu(y) + \\
&\quad\quad + \int_{y \in B_\delta(o,R)\setminus B_\delta(x,r)} \bar{p}_R(t,x,y)|u(y)-u(x)|\,d\mu(y) + \\
&\quad\quad + |u(x)|(1 - \int_{B(x,r)} \bar{p}_R(t,x,y)\,d\mu(y) \\
&\quad \le \varepsilon + 2\sup|u| C_2(R,\rho(R)) t^{-\kappa/2} e^{-r^2/5t} + |u(x)| C_3 e^{-C_4 r^2/t}
\end{aligned}$$

と評価される．したがって $t \to 0$ のとき $\bar{P}_{R;t}u$ は u に一様に収束することが確かめられる．次に $u \in L^2(B_\delta(o,R))$ に対しては，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，まず $\|u-v\|_{L^2} < \varepsilon$ となる $v \in C_0(B_\delta(o,R))$ をとり，$\|\bar{P}_{R;t}(u-v)\|_{L^2} \le \|u-v\|_{L^2}$ に注意すると，十分小さな t に対して，$\|\bar{P}_{R;t}u - u\|_{L^2} \le 2\|u-v\|_{L^2} + \|\bar{P}_{R,t}v - v\|_{L^2} \le 3\varepsilon$ が従う．すなわち $\lim_{t\to 0}\|\bar{P}_{R;t}u - u\|_{L^2} = 0$ が示され，$\bar{P}_{R;t}$ の $L^2(B_\delta(o,R))$ における連続性が得られた．とくに $\{\bar{\psi}_{R,i} \mid i = 1,2,\ldots\}$ は正規直交完全系である．

さて，$P_{R;t}$ に対応する $L^2(B_\delta(o,R))$ 上の閉形式を $\bar{\mathcal{E}}_R$ と表すと，$\mathcal{E}_{n;R}$ が $\bar{\mathcal{E}}_R$ にモスコ収束すること，および $\mathcal{E}_{n;R}$ が漸近コンパクト性を満たすことが定理 6.7 と同様の議論からわかる．これから $\bar{\mathcal{E}}_R$ が E-3 をみたすことも明らかであり，実際このことは $0 \le P_{R,t}u \le 1$ $(0 \le u \le 1)$ を検証することからも従う．すなわち $\bar{\mathcal{E}}_R$ は $L^2(B_\delta(o,R))$ 上のディリクレ形式である．定理 6.10 と同様に，これは強局所的であることもわかる．

ステップ 2 次に $R_1 < R_2$ となる正数 R_1，R_2 を任意にとる．このとき，ステップ 1 より，必要ならば部分列を取ることによって，$n \to \infty$ のとき，$\mathcal{E}_{n;R_1}$ および $\mathcal{E}_{n;R_2}$ はそれぞれ $\bar{\mathcal{E}}_{R_1}$ および $\bar{\mathcal{E}}_{R_2}$ にモスコ収束するとしてよろしい．$L^2(B_\delta(o,R_1))$ の元を $B_\delta(0,R_1)$ の外で 0 とおくことによって，$L^2(B_\delta(o,R_1)) \subset L^2(B_\delta(o,R_2))$ と考える．このとき，$\bar{\mathcal{E}}_{R_2}$ は $\bar{\mathcal{E}}_{R_1}$ の拡張であること，すなわち $D[\bar{\mathcal{E}}_{R_1}] \subset D[\bar{\mathcal{E}}_{R_2}] (\subset L^2(B_\delta(o,R_2)))$ かつ $u \in D[\bar{\mathcal{E}}_{R_1}]$ に対して，$\bar{\mathcal{E}}_{R_1}(u,u) = \bar{\mathcal{E}}_{R_2}(u,u)$ であることを以下において検証しよう．

任意の $u \in D[\bar{\mathcal{E}}_{R_1}]$ に対して，関数列 $u_n \in D[\mathcal{E}_{n;R_1}]$ で，u_n は u に (L^2) 強収束し，かつ $\mathcal{E}_{n;R_1}(u_n,u_n)$ が $\bar{\mathcal{E}}_{R_1}(u,u)$ に収束するものを取る．このとき，$u_n \in D[\mathcal{E}_{n;R_2}]$ より，

$$\bar{\mathcal{E}}_{R_2}(u,u) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_{n;R_2}(u_n,u_n) = \bar{\mathcal{E}}_{R_1}(u,u)$$

となる．一方，$p_{n;R_1}(t,x,y) \le p_{n;R_2}(t,x,y)$ より，$n \to \infty$ として，

$$\bar{p}_{R_1}(t,x,y) \le \bar{p}_{R_2}(t,x,y)$$

が成り立つ．したがって

$$
\begin{aligned}
&\bar{\mathcal{E}}_{R_1}(u,u)\\
&\quad = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\int_{B_\delta(o,R_1)\times B_\delta(o,R_1)} \bar{p}_{R_1}(t,x,y)(u(x)-u(y))^2\, d\mu\times d\mu\\
&\quad \le \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\int_{B_\delta(o,R_2)\times B_\delta(o,R_2)} \bar{p}_{R_2}(t,x,y)(u(x)-u(y))^2\, d\mu\times d\mu\\
&\quad = \bar{\mathcal{E}}_{R_2}(u,u)
\end{aligned}
$$

となる．以上から $\bar{\mathcal{E}}_{R_1}(u,u)=\bar{\mathcal{E}}_{R_2}(u,u)$ となり，$\bar{\mathcal{E}}_{R_2}$ は $\bar{\mathcal{E}}_{R_1}$ の拡張であることが確かめられた．

ステップ3 ステップ2より，適当な発散列 $\{R_j\}$ と部分列を取ることによって，各 j に対して，$n\to\infty$ のとき，$\mathcal{E}_{n;R_j}$ は $L^2(B_\delta(o,R_j))$ 上の局所ディリクレ形式 $\bar{\mathcal{E}}_{R_j}$ にモスコ収束し，$\mathcal{E}_{n;R_j}$ は漸近コンパクト性を満たす．さらに $j<k$ のとき，$\bar{\mathcal{E}}_{R_k}$ は $\bar{\mathcal{E}}_{R_j}$ の拡張であるとしてよろしい．したがって $\{\bar{\mathcal{E}}_{R_j}\mid j=1,2,\ldots\}$ は，$\cup_{j=1,2,\ldots}D[\bar{\mathcal{E}}_{R_j}]\subset L^2(X,\mu)$ の2次形式を定めるが，その緩和形式を $\mathcal{E}$ とする (注意 5.1 参照)．すなわち，$u\in L^2(X,\mu)$ に対して，

$$
\mathcal{E}(u,u)=\inf_{\{u_j\}}\liminf_{j\to\infty}\bar{\mathcal{E}}_{R_j}(u_j,u_j),
$$

ここで下限は $\lim_{j\to\infty}\|u_j-u\|_{L^2}=0$ を満たす $\{u_j\}$ すべてに渡って得られるものである．定義から $\mathcal{E}$ は $L^2(X,\mu)$ 上のディリクレ形式を定め，$\cup_{j=1,2,\ldots}D[\bar{\mathcal{E}}_{R_j}]$ は $D[\mathcal{E}]$ の ($\mathcal{E}_1$-ノルムに関して) 稠密な部分空間である．さらに，$j\to\infty$ のときの p_{R_j} の極限を p とすると，その定義から，p は $\mathcal{E}$ の半群 P_t の核関数となり，また (44) と同様の評価を満たす．これから，$C_0(X)\cap D[\mathcal{E}]$ は $C_0(X)$ において L^∞ - ノルムに関して稠密であることが判る．実際 $R>0$ に対して，$\xi_R\in C^{0,1}(X,\delta)$ を，$0\le\xi\le 1$, $\xi(x)=0$ $(x\in X\setminus B_\delta(o,2R))$, $\xi(x)=1$ $(x\in B_\delta(o,R)$, $\mathrm{Lip}\,\xi\le 2/R$ を満たすように選んでおく．任意の $u\in C_0(X)$ に対して，$\mathrm{supp}\,u\subset B_\delta(o,R)$ となる十分大きな R に対して，$\xi_R P_t u\in D[\mathcal{E}]\cap C_0(X)$ で，$\lim_{t\to 0}\|u-\xi_R P_t u\|_{L^\infty}=0$ が確かめられる．また $u\in D[\mathcal{E}]$ に対しても，$\xi_R P_t u$ は, $R\to\infty$ そして $t\to 0$ のとき，u に $\mathcal{E}_1$ - ノルムで収束することが確かめられる．このように $\mathcal{E}$ は正則である．

$\mathcal{E}$ が性質 [VII], [VIII], [IX] を満たすことも定理 6.11 と同様にして確かめられる．

それから $\delta(x,y)$ が十分小さいならば，$d_{\mathcal{E}}(x,y)\le C_5\delta(x,y)$ が従う．任意の $x,y\in X$ に対しては，x と y を結びその距離 $\delta(x,y)$ を実現する曲線 $\gamma:[0,\ell]\to X$ $(\ell=\delta(x,y))$ を取り，$[0,\ell]$ の分割 $\{t_i:\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_k=\ell\}$ で，$\delta(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}))$ が十分小さくなるものを選ぶ．このとき，$d_{\mathcal{E}}(x,y)\le\sum_{i=0}^{k-1}d_{\mathcal{E}}(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1})\le C_5\sum_{i=0}^{k-1}\delta(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}))=C_5\delta(x,y)$ となり，結局

$$
d_{\mathcal{E}}(x,y)\le C_5\delta(x,y),\quad x,y\in X
$$

が示された．残る主張も，定理 5.11 から確かめられる．以上で定理 6.14 の証明は完了した．

ノート 6 この節の主な参考文献は，Bérard-Besson-Gallot [4], Davies [17], Dal Masso [18], Kasue-Kumura [41], Kasue [37], Kasue [38], Kuwae-Shioya [49], Mosco [57] などである．塩谷 [68] も参照．

命題 6.2 は，[17] の中の結果である．定理 6.4, 補題 6.5, 定理 6.6 の詳細は [49] を参照．定理 6.7 の証明は，[41] の議論をここで考察されているディリクレ空間に拡張したものである．命題 6.8，命題 6.9，定理 6.10 および定理 6.11 は [37] において示されたものである．

例 6.2，例 6.3，例 6.4，例 6.7 の詳細については，それぞれ [5], [43], [37], [32], [34] 参照．また 6.3 分節の終わりで述べた事柄 (i), (ii), (iii) については，[1], [41], [42], [75], [5] 参照．

定理 6.12 は [37] において示された．適当な条件の下で，調和関数，1 次調和形式や調和写像や，リーマンベクトル束のエネルギー形式などの収束も議論することができる．これらについては，[37], [38], [39], [40] を参照．

またこの節の内容に関連して，拡散過程の収束については Ogura [60] 参照．それからスペクトル収束の異なった視点からの研究のひとつとして，Seriu [67] をあげる．

参考文献

[1] K. Akutagawa, Convergence for Yamabe metrics of positive scalar curvature with integral bound on curvature, Pacific J. Math. **175** (1996), pp. 239 258.

[2] D. Bao, S.-S. Chern and Z. Shen, An introduction to Riemann-Finsler Geometry, GTM 200, Springer, 2000.

[3] A. Bellaiche, The tangent space in sub-Riemannian geometry, in *Sub-Riemannina Geometry* (ed. A. Bellaïche and J.-J. Risler), Progress in Mathematics **144**, Birkhäuser, Boston, pp. 1 78.

[4] P. Bérard, G. Besson and S. Gallot, On embedding Riemannian manifolds in a Hilbert space using their heat kernels, Prépublication de l'Institut Fourier, 109, 1988; Embedding Riemannian manifolds by their heat kernels, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), pp. 373 398.

[5] G. Besson, A Kato type inequality for Riemannian submersion with totally geodesic fibers, Ann. Glob. Analysis and Geometry **4** (1986), pp. 273 289.

[6] M. Biroli and U. Mosco, A Saint-Venaut principle for Dirichlet forms on discontinuous media, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **169** (1995), pp. 125 181.

[7] M. Bourdon and H. Pajot, Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings, Proc. Amer. Math. Soc., **127** (1999), pp. 2315 2324.

[8] D. Burago, Y. Burago and S. Ivanov, A Course in Metric Geometry, GSM **33**, Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 2001.

[9] P. Buser, A note on the isoperimetric constant, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. **15** (1982), pp. 213 230.

[10] P. Bylund and J. Gudayol, On the existence of doubling measures with certain regularity properties, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), pp. 3317 3327.

[11] P. Centore, Finsler Laplacians and minimal-energy maps, International J. Math. **11** (2000), pp. 1 13.

[12] J. Cheeger, Differentiability of Lipschitz functions on metric spaces, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), pp. 428 517.

[13] I. Chavel, Riemannian Geometry: A Modern Introduction, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[14] J. Cheeger and T.H. Colding, On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, III, J. Differential Geom. **54** (2000), pp. 37 74.

[15] T. Coulhon and L. Saloff-Coste, Variétés riemanniennes isométriques à l'infini, Rev. Mat. Iberoamer. **11** (1995), pp. 687 726.

[16] E.B. Davies, Heat Kernels and Spectral Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[17] E.B. Davies, Heat kernels in one dimension, Quart. J. Math. Oxford (2) **44** (1993), pp. 283 299.

[18] G. Dal Maso, An Introduction to Γ Convergence, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **8**, Birkäuser, Boston 1993.

[19] J. Eells and B. Fuglede, Harmonic Maps between Riemannian Polyhedra, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[20] K. Fukaya, Collapsing Riemannian manifolds and eigenvalues of the Laplace operator, Invent. math. **87** (1987), pp. 517 547

[21] K. Fukaya, Hausdorff convergence of Riemannian manifolds and its applications, in *Recent Topics in Differential and Analytic Geometry*, Adv. Stud. in Pure Math. **18** (1990), North-Holland, Kinokuniya, Amsterdam, Tokyo, pp. 143 238.

[22] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1994.

[23] M. Gromov, Structures métriques pour les variétés riemanniennes, rédigé par J. LaFontaine et P. Pansu, Cedic Fernand-Nathan, Paris 1981.

[24] M. Gromov, Metric Structures for Riemannian and non-Riemannian spaces, (with appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes, ed. by J. LaFontaine and P. Pansu, English translation by S.M. Bates), Progress in Mathematics **152**, Birkhäuser, Boston, 1999.

[25] A. Grigor'yan, Heat kernel of a noncompact Riemannian manifold, Stochastic Analysis (Ithaca, NY, 1993), Proc. Symposia in Pure Math. **57**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1995, pp. 239 263.

[26] V. Gol'dshtein and M. Troyanov, Axomatic theory of Sobolev space and p capacity on metric spaces, Expositiones Math. **19** (2001), pp. 289 336.

[27] J. Heinonen and P. Koskela, Quasiconformal maps on metric spaces with controlled geometry, Acta Math. **181** (1998), pp. 1 61.

[28] J. Heinonen, Lectures on Analysis on Metric Spaces, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001

[29] P. Hajlasz, Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces, Potential Anal. **5** (1996), pp. 403 415.

[30] P. Hajlasz and P. Koskela, Sobolev met Poincaré, Memoirs of the Amer. Math. Soc., **688**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2000.

[31] B. Hanson and J. Heinonen, An n-dimensional space that admits a Poincaré inequality but has no manifold points, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), pp. 3379 3390.

[32] Y. Hashimoto, S. Manabe and Y. Ogura, Short time asymptotics and an approximation for the heat kernel of a singular diffusion, in *Itô's Stochastic Calculus and Probability Theory* (ed. N. Ikeda et al.), Springer-Verlag Tokyo, 1996, pp. 129 140.

[33] M. Hino and J. Ramirez, Small-time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups, Ann. of Probability **31** (2003), 1254 1295.

[34] N. Ikeda and Y. Ogura, Degenerating sequences of Riemannian metrics on a manifold and their Brownian motions, in *Diffusions in Analysis and Geometry* (ed. M. Pinsky), Birkhäuser, Boston-Bassel-Berlin, 1990, pp. 293 312.

[35] K. Ishige and M. Murata, Uniqueness of nonnegative solutions of the Cauchy problem for parabolic equations on manifolds or domains, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **30** (2001), pp. 171 223.
[36] S. Ishiwata, A central limit theorem on a covering graph with a transformation group of polynomial growth, J. Math. Soc. Japan, **55** (2003), 837 853.
[37] A. Kasue, Convergence of Riemannian manifolds and Laplace operators, I, Ann. Institut Fourier (Grenoble), **52** (2002), pp. 1219 1257; , II, to appear.
[38] A. Kasue, Convergence of Riemannian manifolds, Laplace operators and energy forms, in *Proceedings of the Fifth Pacific Rim Geometry Conference* (ed. S. Nishikawa), Tohoku Math. Publ. **20** (2001), pp. 75 97.
[39] 加須栄篤, リーマンベクトル束のスペクトル収束, 竹内勝先生メモリアル研究会 (小林亮一編), 大阪大学数学講義録 **17** (2002), pp. 69 92.
[40] 加須栄篤, 測度距離空間の収束とエネルギー形式, 数学 **55** (2003), 日本数学会編集, 岩波書店, pp. 20 36.
[41] A. Kasue and H. Kumura, Spectral convergence of Riemannian manifolds, Tōhoku Math. J. **46** (1994), pp. 147 179; , II, Tōhoku Math. J. **48** (1996), pp. 71 120.
[42] A. Kasue and H. Kumura, Spectral convergence of conformally immersed surfaces with bounded mean curvature, J. Geom. Anal. **12** (2002), pp. 663 681.
[43] A. Kasue, H. Kumura and Y. Ogura, Convergence of heat kernels on a compact manifold, Kyuushu J. Math. **51** (1997), pp. 453 524.
[44] T. Kilperäinen, Weighted Sobolev spaces and capacity, Ann. Acad. Sc. Fenn. Ser. A I Math. **19** (1994), pp. 95 113.
[45] M. Kotani and T. Sunada, Albanese maps and off-diagonal long time asymptotics for the heat kernel, Comm. Math. Phys. **209** (2000), pp. 633 670.
[46] H. Kumura, Nash inequalities for compact manifolds with boundary, Kodai Math. J. **24** (2001), pp. 352 378.
[47] K. Kuwae, Y. Machigashira and T. Shioya, Sobolev spaces, Laplacian and heat kernel on Alexandrov spaces, to appear in Math. Z.
[48] K. Kuwae and T. Shioya, On generalized measure contraction property and energy functionals over Lipschitz maps, Potential Anal. **15** (2001), pp. 105 121.
[49] K. Kuwae and T. Shioya, Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its appications to spectral geometry, preprint, 2000.
[50] T. Laakso, Ahlfors Q-regular spaces with arbitrary Q admitting weak Poincaré inequality, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), pp. 111 123.
[51] P. Li and S. T. Yau, On the parabolic kernel of the Schrödinger operator, Acta Math. **156** (1986), pp. 153-201.
[52] P. Li, Lecture Notes on Geometric Analysis, G.A.R.C. Lecture Notes Series **6**, Seoul Nat. Univ., Seoul, Korea,1993.
[53] E.J. McShane, Extension of range of functions, Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), pp. 837 842.
[54] X. Menguy, Noncollapsing examples with positive Ricci curvature and infinite topological type, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), pp. 600 627.
[55] J. Mitchell, On Carnot-Cararthéodory metrics, J. Differential Geom. **21** (1985), pp. 35 45.
[56] R. Monti and F.S. Cassano, Surface measures in Carnot-Carathéodory spaces, Calc. Var. Partial Differential Equations **13** (2001), pp. 339 376.
[57] U. Mosco, Composite media and asymptotic Dirichlet forms, J. Funct. Anal. **123** (1994), pp. 368 421.

[58] S. Ohta, Cheeger type Sobolev spaces for metric space targets, Potential Anal. **20** (2004), 149 175.
[59] S. Ohta, Regularity of harmonic functions in Cheeger-type Sobolev spaces, preprint, 2004.
[60] Y. Ogura, Weak convergence of laws of stochastic processes on Riemannian manifolds, Probab. Theory Relat. Fields **119** (2001), pp. 529 557.
[61] P. Pansu, Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un, Ann. of Math. **129** (1989), pp. 1 60.
[62] G. Pisier, The Volume of Convex Bodies in Banach Space Geometry, Cambridge Tracts in Mathematics **94**, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
[63] J.A. Ramírez, Short-time asymptotics in Dirichlet spaces, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), pp. 259 293.
[64] L. Saloff-Coste, A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequality, Duke Math. J. Int. Math. Res. Notices **2** (1992), pp. 27 38.
[65] L. Saloff-Coste, Aspects of Sobolev-Type Inequalities, London Math. Soc. Lec. Note Ser. **289**, Cambridge Univ. Press, 2002.
[66] 酒井隆, リッチ曲率が下に有界な多様体族とその極限 (本書の論説)
[67] M. Seriu, Space of spaces as a metric space, Comm. Math. Phys. **209** (2000), pp. 393 405.
[68] 塩谷隆, Alexandrov 空間上の解析について (本書の論説)
[69] 塩谷隆, 測度距離空間上の解析と曲率, “第 50 回幾何学シンポジウム” (宮岡礼子他編集), 日本評論社, 近刊.
[70] L. Simon, Lecture on Geometric Measure Theory, Proc. of Centre for Math. Anal. Austral. Nat. Univ. **3**, 1983.
[71] K. T. Sturm, On the geometry defined by Dirichlet forms, Seminar on Stochastic Processes, Random Fields and Applications, Ascona, E. Bolthausen et al. ed., Progr. Probab., **36**, Birkhäuser, 1995.
[72] K. T. Sturm, Analysis on local Dirichlet spaces III. The parabolic Harnack inequality, J. Math. Pures Appl. **75** (1996), pp. 273 297
[73] J. Tyson, Notes on a theorem of Jeff Cheeger, Lecture notes from a course given by Juha Heinonen at the University of Michigan in the Spring of 1999 available at http://www.math.sunysb.edu/tyson/papers.html
[74] A.L. Vol'berg and S.V. Konyagin, On measure with the doubling condition, Math. USSR Izvestiya **30** (1988), pp. 629 638.
[75] K. Yoshikawa, Degeneration of algebraic manifolds and the continuity of the spectrum of the Laplacian, Nagoya Math. J. **146** (1997), pp. 83 129.
[76] W.P. Ziemer, Weakly Differentiable Functions, GTM **120**, Springer-Verlarg, New York, 1989.

大津 幸男（おおつ ゆきお）
九州大学大学院数理学研究院
〒 812-8581
福岡市東区箱崎 6-10-1

山口 孝男（やまぐち たかお）
筑波大学数学系
〒 305-8571
つくば市天王台 1-1-1

塩谷 隆（しおや たかし）
東北大学大学院理学研究科
〒 980-8578
仙台市青葉区荒巻字青葉

酒井 隆（さかい たかし）
岡山大学理学部数学教室
〒 700-8530
岡山市津島中 3-1-1

加須栄 篤（かすえ あつし）
金沢大学理学部数学科
〒 920-1192
金沢市角間町

深谷 賢治（ふかや けんじ）
京都大学大学院理学研究科数学教室
〒 606-8502
京都市左京区北白川追分町

日本数学会 数学メモアール 第 3 巻

リーマン多様体とその極限

2004 年 8 月 15 日 発 行　　　定 価 4900 円（税込価格）

著 者 大津 幸男・山口 孝男・塩谷 隆・酒井 隆・加須栄 篤・深谷 賢治
発行者 〒 110-0016 東京都台東区台東 1-34-8　　　社団法人 日本数学会
電 話 03-3835-3483

 ISBN4-931469-29-9 Printed in Japan

数学メモアール　既刊案内　　日本数学会

第1巻	3次元接触構造のトポロジー	三松 佳彦	著	2001年	2100円
第2巻	作用素環と幾何学	夏目 利一 森吉 仁志	著	2001年	4095円
第3巻	リーマン多様体とその極限	大津 幸男 山口 孝男 塩谷 隆 酒井 隆 加須栄 篤 深谷 賢治	著	2004年	4900円

＊上記金額には消費税を含んでおります.

数学メモアールは，数学の新しい流れを専門外の研究者にも読みやすい形で紹介し，これから研究を始めようとする大学院生には研究テーマを見つけるためのヒントを，意欲のある学部学生にはセミナーの題材を提供することをめざしています.