山辺の問題

小林　　治
芥川　和雄
井関　裕靖

まえがき

1960 年，山辺英彦は任意のコンパクト連結多様体のリーマン計量は共形変形を施してスカラー曲率一定計量にできると言う論文を発表した．（山辺英彦は同年 11 月 20 日アメリカにて急逝．享年 37 歳.）構想は大きく，ポアンカレ予想を解くための第一歩として考え出されたものだった．（ポアンカレ予想は結局，ペレルマンによってリッチ流の解析を用いて，より包括的なサーストン予想を解くという形で証明が与えられたが，多様体の標準計量に注目すると言う点で基本思想は共通している．）構想だけでなくその方法も画期的だった．すなわち多様体上で非線形偏微分方程式を解くと言う骨の折れる解析をやり遂げ，この事だけでも時代に先んじている．しかしよく知られているように山辺の証明に不備がある事がトルーディンガーにより指摘され，長く，「山辺の問題」と呼ばれる微分幾何学における難問となってしまった．

時代の様子を簡単に述べておく．1960 年代，1970 年代前半までの微分幾何はおそらく次の有名な教科書でその概観が掴めるのではないかと思われる：

S. Helgason, “Differential geometry and symmetric spaces,” 1962.

D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, “Riemannsche Geometrie im Großen,” 1968.

R. Osserman, “A survey of minimal surfaces,” 1969.

S. Kobayashi, “Transformation groups in differential geometry,” 1970.

M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, “Le Spectre d’une Variété Riemannienne,” 1971.

ここにはまだ多様体上で非線形方程式の解析をすると言う考えはない．調和写像，極小曲面，曲率方程式などの幾何解析は，1970 年代の準備期間をおいて 1980 年代に広まったと言える．中でも 1977 年にヤウがカラビ予想を解いてフィールズ賞を受賞 (1982 年) した事は大きな出来事であった．（ほぼ同時期にグロモフの数学が現れ，またゲージ理論の数学が本格化する．）山辺の問題はと言うと 1970 年代にオーバンによる大きな進展があったものの未解決のままであった．

筆者は大学院生の頃，山辺の問題は 20 世紀中には解けないだろうと予測し，解けない事を前提に解けた後の数学を目指そうと目論んだ．それはつまるところ多様体の山辺不変量についての研究であるが，緒に就いて程無く，ヤウの共同研究者であるシェーンによる山辺の問題の解決を表明するプレプリントが出回った（これは 1984 年に出版された)．つまり筆者の予測は外れてしまった事になる．しかしこの論文は正質量定理の証明に必要な極小超曲面の正則性についての議論が不十分で，それは（いまだ発表されていない）予告論文で明らかになると書いてある．怪しい，と高を括っていたが，1988 年にシェーンとヤウはクライン群に関する共著論文を発表し，山辺の問題について一言も触れずに，問題の未解決部分の別証明を与えた．つまり山辺の問題は本当に解けてしまった．しかしこの公表の仕方は，大きな問題の解決にしてはどことなく公明正大さに欠けるところがある．

さて問題は解決されたので終わりかと言うとそうではない．実際，1990 年代のルブランの研究，2000 年代のブレイ・ネヴェスの研究（その論文に，筆者がシェーンの講義に出席していたと言う，事実と異なる記述がある．これは山辺不変量の発案者はシェーンであって，その講義を聞いた筆者が影響を受けたと読者に印象付ける効果がある)，加えて本書執筆者の一人である芥川和雄氏による研究 (2010 年，幾何学賞)，その他注目すべき研究が脈々と続いている．今後も数学の進展とともに深められていくであろう．

本書は 1986 年に九州大学で行ったセミナーの記録がもとになっている．その後，1989 年の慶応義塾大学での集中講義の記録として若干内容を拡充し (つまりシェーン・ヤウの 1988 年論文の内容を加えた．なおこの時の講義録は井関裕靖氏が作成した), さらに 2005 年に行われた中央大学における集会 Encounter with Mathematics でのサーベイ講義であらためて見直しを行い，今回，芥川和雄氏，井関裕靖氏の協力を得て，ここに出版する事になった．

2013 年 5 月　　　　執筆者を代表して　小　林　　治

目次

1　はじめに

多様体 M にリーマン計量 g が与えられるといろいろな曲率が定義できる．本書で問題にするのはスカラー曲率 R_g である (英語での読みは「スカラー」でなく「スケイラー」が近い)．スカラー曲率は M 上の関数で，幾何学的には次のように解釈される．$B_r(x)$ で $x \in M$ を中心とする半径 r の測地球，すなわち点 x から長さ r 以下の曲線で到達できる領域を表す．その体積は r が小さいときユークリッド球体の体積 $\mathrm{Vol}(B_r)$ とほぼ同じになるが，空間 (M, g) が曲がっているときには一般にずれが生じる．この測地球の体積を r で展開すると $\mathrm{Vol}(B_r(x)) = \mathrm{Vol}(B_r)(1 + \lambda r^2 + o(r^2))$ のようになる．このときスカラー曲率は次のように表せる．

$$R_g(x) = -6(n+2)\lambda.$$

したがって例えばある点でスカラー曲率が正であれば，その点を中心とした小さな半径の測地球の体積はユークリッド空間と想定した場合より小さい．

本書の題名である「山辺の問題」は，スカラー曲率に関する問題である．普通次のように述べられる：与えられたリーマン計量を共形的に変形してスカラー曲率一定の計量が得られるか．2 次元の時その答えが肯定的であることは古典的な結果でよく知られている．問題は 3 次元以上，それもコンパクトで連結な多様体の場合である．山辺英彦はこの問題を次のような変分問題として捉えた．リーマン計量 g に対して

$$E(g) := \frac{\int_M R_g \, d\mu_g}{\left(\int_M \, d\mu_g\right)^{(n-2)/n}}$$

とおく．すると $n \geq 3$ のとき g が g を含む共形類に制限した汎関数 E の臨界点であるとき，g のスカラー曲率が一定である事が分かる．また汎関数 E は共形類に制限すると下から有界である．この事から，与えられた共形類で E を最小化する計量があればそれはスカラー曲率一定の計量となる．この最小化計量は**山辺計量**と呼ばれる．山辺計量の存在問題を**山辺の問題**と言う．

以下，本書の概要を述べる．第 2 章で基本用語，記号の約束をする．残念な事に微分幾何では一番大切な概念である曲率を表わす記号や符号，ラプラス作用素の符号はいろいろな流儀があって一定していない (実際本書の 3 人の著者もこの点で一致してない)．用語，記号の準備に続いて，後の章で必要となる多様体上の解析学の結果を証明無しに述べる．これもまた残念な事に，このような分野横断型の数学的事実を証明も含めて自己完結的に述べてある文献は極めて少ない．

第 3 章では 2 次元の場合に山辺の問題に対応する問題を解説する．内容は古典的であるが，本論の構成の基本がここにある．本書の基層と言ってもよいだろう．

第 4 章で根幹となる変分問題の汎関数を導入する．2 次元の場合と 3 次元以上の場合の「違い」が明確になるような説明になっているが，これは誤解を生むかもしれない．2 次元の問題と 3 次元以上の問題を繋げる論理がある．しかしこれに拘ると不毛な寄り道になりかねないので敢えて避けた．

第 5 章で，山辺の問題の本書における正式な定式化をする．結局，山辺の問題は肯定的に解けるのだが，それは単一の定理で述べきれない内容を持っている．その数学的内容を吟味した結果として，山辺の定理を，3 つの基本定理，定理 A, 定理 B, 定理 C に分解した (定理ＡＢＣならびに山辺の定理はすべて本書 19 ページにまとめられている)．

本書の第一の目的は山辺の定理の証明をできる限り完全に述べきる事にある．第 6 章はその第 1 段階として定理 A の証明を与える．内容的には山辺の原論文で修復可能な部分の完成図である．現代解析の威力が遺憾なく発揮されている．

第 7 章は定理 B の証明．ソボレフの不等式が幾何学における等周不等式と密接な関係にあることを巧みに利用したものである．結果として定曲率球面で山辺の問題が解ける事を証明している．定曲率球面の計量は当然スカラー曲率一定で，なぜこれが問題になるか疑問に思う読者もいると思う．よく読んで頂きたい．これは非自明な事実である．最後に小畠の定理が紹介される．この定理は共形変換群の研究の中で小畠守生が得た結果である．証明は短いがいわゆるテンソル解析における珠玉の定理である．

第 8 章では定理 C の証明のあらましを述べる．オーバンの方法とその限界を述べるのが前半の目標である．完全な証明を述べるためには相当量の計算を必要とする．要点を絞り，計算に埋没する事を避ける工夫をしたつもりである．6 次元を境に問題の質が変る．少しでも山辺の問題を取り組んだ人は，なぜ 6 次元なのか不思議に感ずるようである．種明かしは $n-2=4$. 何と言う事はない．この章の後半第 3 段から，シェーン [93] による，画期的な大転換が始まる．まず共形ラプラシアンのグリーン関数の導入．2 次元の場合の議論を思い起こせば，このアイデアで驚いてはいけない．真に偉大で創造的な発見は相対論における正質量定理に道を繋いだ事にある．

第 9 章は高次元の場合の証明．オーバンの結果から共形平坦空間のみ考察すれば良い事になっているので，その場合に正質量定理の証明を与える．シェーン・ヤウ [98] の結果である．続く章で見るように高次元の正質量定理は未完成であるため，別の方法で問題をねじ伏せてしまうというもので，シェーン・ヤウの圧倒的な数学力を見せつけられる．ただしこの論文 [98] はやや問題があって，山辺の問題との関係を意図的に言及していないと思われる．これは数学者の社会に不信，誤解，混乱を招いたように思われる．しかし今となっては時効であろう．山辺の問題をいっそう謎めいたものにするための逸話と見なせば良い．

第 10 章で正質量定理の証明を与える．極小部分多様体の第 2 変分公式は極小超曲面の場合にはその公式にスカラー曲率が現れる事も含め，もちろん古くから知られていたが，これを利用した本格的な数学の展開は 1970 年代のシェーン・ヤウに始まるのではないか．正質量定理はその頂点をなすものである．解析的に困難な部分は安定極小超曲面の構成にある．幾何学的測度論という強力な理論があるが万能ではない．次元の制約がついてしまう．しかし第 9 章で高次元の場合の別証明を与えているので，山辺の問題に対しては十分な結果が得られる．一般の次元で正質量定理が成り立つ事を示すのは今後に残された問題である (スピン構造を持つ空間に対しては次元の制約なしに，ウィッテンがディラック作用素を用いて明快な証明を与えている).

以上で山辺の問題がどのようにして解けたのかの解説が終わる．最も困難な部分は定理 C の証明であった．できてしまえばとやかく言う事もないのであろうが，それ以前の段階，すなわちオーバン予想 (定理 C) と呼ばれていた頃に，この予想が正しい事を確信する事は数学的に大きな賭けであったに違いない．確信のための根拠として，共形変換群に関する小畠の球面定理が果たした役割は大きい．第 11 章では定理 C を用いて，小畠の球面定理を逆に証明する．

第 12 章で多様体の山辺不変量を解説する．山辺の問題解決後の多様な研究成果を，手短に，公平にその全体を解説するのは不可能である．しかし山辺不変量の研究は中でも中心的位置を占めていると考えられる．基本的事項の解説と主要結果の紹介に留まっているが，事の成り行きの大局的な把握の一助になる事を願う．

ここで唐突ではあるが，カラビ予想との比較をしてみたい．カラビ予想はケーラー多様体での非線形偏微分方程式の問題で，カラビが 1957 年に提起し，ヤウが 1970 年代後半に解いた．その超人的な証明と代数幾何への華々しい応用で時代の脚光を浴びた．山辺の問題はその点地味である．単に地味なだけでなく数学社会の暗部まで引きずっている．しかし難易度の点からするとカラビ予想と互角ではないだろうか? さらに問題解決後の進展を見ると，サイバーグ・ウィッテン理論との関係，逆平均曲率流の理論との関係などからも分かるように，本物の数学としての格を備えていると言って良いのではないだろうか? その数学の本来の有り様をあらためて見直すのも良いのではないかと思う．

2 準備

はじめに記号の約束をしておく．ただしリーマン幾何の基礎は既知とする（例えば [36] などを参照）．

M で n 次元の滑らかな多様体を表す．$\mathfrak{M}(M)$ で M 上の滑らかなリーマン計量全体のなす空間を表す．$g \in \mathfrak{M}(M)$ は M の局所座標 $(x^1, ..., x^n)$ を用いて局所的には

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

と表せる．ここで総和記号はアインシュタインの規約で省略している．体積要素は

$$d\mu_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|$$

で与えられる．リーマン計量 g はリーマン接続を定めるが，その共変微分は次で与えられる．

$$\nabla_{\partial_j} \partial_i = \Gamma^k_{ij} \partial_k, \quad \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{jl,i} + g_{li,j} - g_{ij,l}),$$

ここで $\partial_i = \partial / \partial x^i$, $g_{ij,k} = \partial_k g_{ij}$ を表す．(g^{ij}) は (g_{ij}) の逆行列である．曲率テンソルは次で与えられる．

$$R(\partial_j, \partial_k) \partial_i = \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_k} \partial_i - \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i = R^l{}_{ijk} \partial_l.$$

したがって，その係数は次で与えられる．

$$R^l{}_{ijk} = -\Gamma^l_{ij,k} + \Gamma^l_{ik,j} - \Gamma^l_{km} \Gamma^m_{ij} + \Gamma^l_{jm} \Gamma^m_{ik}.$$

曲率テンソルが零であるような計量は**平坦**な計量と呼ばれ，このとき任意の点 $x \in M$ の近傍で $g_{ij} = \delta_{ij}$ となるような局所座標が取れる．リッチテンソルは

$$\mathrm{Ric}_g := R_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad R_{ij} := R^k{}_{ikj}$$

で定義される．ビアンキの恒等式からこれは対称テンソルである．**スカラー曲率**は

$$R_g := g^{ij} R_{ij}$$

で定義される．リッチテンソルのトレース無しの部分を次の記号で表す．

$$\mathrm{Ric}^{\circ}_g := \mathrm{Ric}_g - \frac{R_g}{n} g.$$

スカラー曲率 R_g が定数で，$\mathrm{Ric}^{\circ}_g = 0$ を満たすリーマン計量 g は**アインシュタイン計量**と呼ばれる．$n \geq 3$ のとき，ビアンキの恒等式から $\mathrm{Ric}^{\circ}_g = 0$ であればスカラー曲率はいつでも定数になる．$n = 2$ のとき g が平坦になるための必要十分条件は $R_g = 0$ であり，$n = 3$ のときは $\mathrm{Ric}_g = 0$ である． 2 次の対称テンソル S_g を

$$S_g := \mathrm{Ric}_g - \frac{R_g}{2(n-1)} g = \mathrm{Ric}^{\circ}_g - \frac{n-2}{2n(n-1)} R_g g$$

とおいて，$W_g = W^l{}_{ijk} \partial_l \otimes dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$ を

$$W^l{}_{ijk} := R^l{}_{ijk} - \frac{1}{n-2} (\delta^l_j S_{ik} + S^l_j g_{ik} - \delta^l_k S_{ij} + S^l_k g_{ij})$$

で定め，これをワイルの**共形曲率テンソル**と呼ぶ．任意の点 $x \in M$ に対して，vg が x の近傍で平坦となるような正値関数 v がとれるとき，リーマン計量 g は**共形平坦**であるという．$n \geq 4$ の時，g が共形平坦であるための必要十分条件は $W_g = 0$ となることである．

M 上の関数 $u \in C^\infty(M)$ に対して**ラプラシアン** $\Delta_g u$ を

$$\Delta_g u = \mathrm{div}_g \mathrm{grad}_g f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \partial_i (\sqrt{\det(g_{kl})} g^{ij} \partial_j u)$$

で定義する．次の等式が成り立つ

$$\Delta_g u = g^{ij} u_{;ij} := g^{ij}(u_{,ij} - \Gamma_{ij}^k u_{,k}).$$

$\nabla^2 u = u_{;ij} dx^i \otimes dx^j$ を u のヘシアンという．**共形ラプラシアン** L_g(2 次元の時は非斉次) を次で定義する．

$$L_g u = -\Delta_g u + R_g, \qquad n = 2 \text{ のとき},$$

$$L_g u = -4\frac{n-1}{n-2} \Delta_g u + R_g u, \qquad n \geq 3 \text{ のとき}.$$

以上の定義に従って計算をすると，少し大変であるが次の公式を得る．

公式 2.1. $\widetilde{g} = u^{-2} g$, $u > 0$, $u \in C^\infty(M)$ とするとき

$$2(n-1)u\Delta_g u - n(n-1)|du|^2 + R_g u^2 = R_{\widetilde{g}}.$$

特に

(i) $n = 2$ のときは $\widetilde{g} = e^u g$ に対して

$$L_g u = e^u R_{\widetilde{g}},$$

(ii) $n \geq 3$ のときは $\widetilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ に対して

$$L_g u = R_{\widetilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

が成り立つ．

系 2.2. (i) $n = 2$, $\widetilde{g} = e^u g$ のとき任意の $v \in C^\infty(M)$ に対して

$$L_g v = e^u L_{\widetilde{g}}(v - u).$$

(ii) $n \geq 3$, $\widetilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ のとき任意の $v \in C^\infty(M)$ に対して

$$L_g v = u^{\frac{n+2}{n-2}} L_{\widetilde{g}}(u^{-1} v).$$

証明. (i): $g' = e^v g$ とすると $R_{g'} = e^{-v} L_g v$．一方，$g' = e^{v-u} \widetilde{g}$ であるから $R_{g'} = e^{u-v} L_{\widetilde{g}}(v-u)$．よって求める等式が得られる．(ii): $v > 0$, $g' = v^{4/(n-2)} g$ とすると $R_{g'} = v^{-(n+2)/(n-2)} L_g v$．一方，$g' = (u^{-1}v)^{4/(n-2)} \widetilde{g}$ であるから $R_{g'} = (u^{-1}v)^{-(n+2)/(n-2)} L_{\widetilde{g}}(u^{-1}v)$．したがって任意の $v > 0$ に対して $L_g v = u^{(n+2)/(n-2)} L_{\widetilde{g}}(u^{-1}v)$ が示せた．よってすべての v に対してこの等式が成り立つ． □

定義 2.3. リーマン計量 $g_1 \in \mathfrak{M}(M)$ が $g_2 \in \mathfrak{M}(M)$ に**共形的**であるとは，$g_2 = v g_1$ を満たす正値関数 $v \in C^\infty(M)$ が取れるときを言う．この関係は同値関係になり，その同値類を**共形類**という．C を共形類とするとき，$g \in C$ であれば

$$C = \{vg \in \mathfrak{M}(M) | v \in C^\infty(M), v > 0\}$$

となる．この共形類は $[g]$ のように書く．

次に解析から若干の準備をする．参考文献としては [20], [23], [38], [57] などがあげられる．

定理 2.4. (M,g) をコンパクトで連結なリーマン多様体とする．$u \in C^\infty(M)$ に関する方程式

$$\Delta_g u = v$$

が解けるための必要十分条件は，$v \in C^\infty(M)$ で

$$\int_M v\, d\mu_g = 0$$

となることである．

積分の条件が必要条件であることは簡単にわかる．十分条件を厳密に示すのは，いろいろな準備を必要とし容易ではない．

定理 2.5 (最大値の原理)**.** (M,g) をコンパクトで連結なリーマン多様体とする．$a \geq 0$ は連続関数で $u \in C^2(M)$ が

$$-\Delta_g u + au \geq 0$$

を満たすならば，$u > 0$ または u は 0 以下の定数関数である．

定理 2.6 (優解劣解の方法)**.** (M,g) をコンパクトで連結なリーマン多様体とする．$F\colon M \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は滑らかな関数で $u_\pm \in C^\infty(M)$ は次の条件を満たしているとする．

$$\begin{aligned} -\Delta_g u_-(x) &\leq F(x, u_-(x)), \\ -\Delta_g u_+(x) &\geq F(x, u_+(x)), \\ u_- &\leq u_+. \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} -\Delta_g v(x) &= F(x, v(x)), \\ u_- &\leq v \leq u_+ \end{aligned}$$

を満たす $v \in C^\infty(M)$ が存在する．

優解劣解の方法の証明は，例えば [58, pp. 35–36] を見ると大体分かる．最大値の原理を上手に用いる．その解の構成の概略は以下の通りである．$\min_x u_- \leq a \leq b \leq \max_x u_+$ をみたす任意の a, b, および任意の $x \in M$ に対して，$F(x,a) - F(x,b) + c(a-b) \leq 0$ が成り立つように，$c > 0$ をとることができる．帰納的に，

$$(-\Delta_g + c) u_{j+1}(x) = F(x, u_j(x)) + c u_j(x)$$

と，u_{j+1} を定める．$-\Delta_g + c$ は可逆だから，このような u_{j+1} は必ず取れる．ここで最大値の原理を使えば，

$$u_- \leq \ldots \leq u_{j+1} \leq u_j \leq \ldots \leq u_0 = u_+.$$

すなわち $\{u_j\}$ は有界な減少関数列である．このとき $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ が求める解になっている．

定理 2.7. (M,g) をコンパクトで連結なリーマン多様体とする．$a \in C^\infty(M)$ とし

$$\lambda = \inf_u \frac{\int_M (|du|^2 + au^2) d\mu_g}{\int_M u^2 d\mu_g}$$

とおく．このとき，

$$-\Delta_g u + au = \lambda u$$

を満たす正値関数 $u \in C^\infty(M)$ が存在する．

この結果は，第 5 章でこれより難しい非線形版を扱うので，そこを読めば，その証明も理解されるであろう．

後で偏微分方程式の解析をするのに，いくつかの関数空間を用意する．M はコンパクト n 次元多様体で，リーマン計量 g をひとつ選んでおく．$L^p(M)$ は，L^p 関数 (ただし，ほとんど至るところ等しい関数は同一視する) の全体を表し，ノルムが次のように定義される．

$$||u||_{L^p} = \left(\int_M |u|^p d\mu_g\right)^{1/p}.$$

$p = \infty$ のときは

$$||u||_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x\in M} |u(x)|.$$

ヘルダーの不等式から $1 \le p \le q$ のとき $L^q(M) \subset L^p(M)$ で，この包含写像は連続である．$W^{k,p}(M)$ で k 階までの超関数の意味での微分係数が L^p 関数であるような関数の全体を表し，ノルムが次のように定義される．

$$||u||_{W^{k,p}} = \left(\sum_{i=0}^k \int_M |\nabla^i u|^p d\mu_g\right)^{1/p}.$$

$W^{k,p}(M)$ は**ソボレフ空間**と呼ばれ，バナッハ空間である．$W^{0,p}(M) = L^p(M)$ であり，$W^{k,2}(M)$ はヒルベルト空間になる．これらはいずれも $C^\infty(M)$ に上のようなノルムを入れ，完備化したものと考えてもよい．$C^k(M)$ は連続な k 階微分係数をもつ関数の全体で次のノルムでバナッハ空間となる．

$$||u||_{C^k} = \sum_{i=0}^k \sup |\nabla^i u|.$$

$0 < \alpha < 1$ とし，α 次のヘルダー連続関数に対し

$$|u|_\alpha = \sup \frac{|u(x) - u(y)|}{\mathrm{dist}_g(x,y)^\alpha}.$$

とする．$C^{k,\alpha}(M) \subset C^k(M)$ を k 階微分が α 次のヘルダー連続関数となるような関数の空間とする．次のノルムでバナッハ空間となる．

$$||u||_{C^{k,\alpha}} = |\nabla^k u|_\alpha + ||u||_{C^k}$$

ここで $|\nabla^k u|_\alpha$ の正確な定義は 煩雑になるので省略する．アスコリ・アルツェラの定理より，$k+\alpha < l+\beta$ のとき，埋め込み $C^{l,\beta}(M) \subset C^{k,\alpha}(M)$ はコンパクトである． すなわち，$C^{l,\beta}(M)$ の有界列は $C^{k,\alpha}(M)$ で収束する部分列を持つ．

これらの関数空間の定義の際，ノルムはリーマン計量 g をひとつ固定して定められる．M はコンパクトとしているのでリーマン計量を変えても，ノルムの定める位相は変わらない．ここで，リーマン計量を定数倍すると，これらのノルムの主要部がどうなるかを見ておこう．$\lambda > 0$ を定数とし，$\widetilde{g} = \lambda^{-2} g$ とする．

$$||\widetilde{\nabla}^k u||_{L^p} = \lambda^{k-\frac{n}{p}} ||\nabla^k u||_{L^p}, \quad ||\widetilde{\nabla}^k u||_{C^{0,\alpha}} = \lambda^{k+\alpha} ||\nabla^k u||_{C^{0,\alpha}}.$$

ここで左辺はいずれも $\widetilde{g}$ に関するもので，右辺は g に関するものである．

定理 2.8 (ソボレフの埋め込み定理およびコンドラコフのコンパクト性定理)**.** M をコンパクト多様体，$0 \leq k \leq l$ を整数とし，$u \in W^{l,q}(M)$ とする．

(i) $k - \frac{n}{p} \leq l - \frac{n}{q} < 0$ のとき，
$$||u||_{W^{k,p}} \leq c||u||_{W^{l,q}}$$
をみたす u によらない定数 c が存在する．したがって，連続な埋め込み $W^{l,q}(M) \subset W^{k,p}(M)$ が得られる．さらに，$k < l$ かつ $k - \frac{n}{p} < l - \frac{n}{q}$ のとき，この埋め込みはコンパクトである．

(ii) $k < l - \frac{n}{q} < k + 1$ のとき，$\alpha = (l - \frac{n}{q}) - k$ とおくと，
$$||u||_{C^{k,\alpha}} \leq c||u||_{W^{l,q}}$$
をみたす u によらない定数 c が存在する．したがって，連続な埋め込み $W^{l,q}(M) \subset C^{k,\alpha}(M)$ が得られる．

この不等式の中で山辺の問題と最も関係が深いのは，$n \geq 3$ のときの
$$W^{1,2}(M) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$$
である．また，$2q < n$ のときの $W^{2,q}(M) \subset L^{\frac{nq}{n-2q}}(M)$ も使う．さらに, $lq > n$ のとき $W^{l,q}(M) \subset C^0(M)$ にも注意する．

最後に正則性定理を述べる．

定理 2.9. (M, g) をコンパクトリーマン多様体とし，$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ は $\Delta_g u = f$ の弱解とする．このとき u によらない定数 C が存在して，次の (i), (ii) が成り立つ．

(i) $f \in W^{k,q}(M)$ ならば $u \in W^{k+2,q}(M)$ である．次の不等式が成り立つ．
$$||u||_{W^{k+2,q}} \leq C(||\Delta_g u||_{W^{k,q}} + ||u||_{L^q}).$$

(ii) $f \in C^{k,\alpha}(M)$ ならば $u \in C^{k+2,\alpha}(M)$ である．次の不等式が成り立つ．
$$||u||_{C^{k+2,\alpha}} \leq C(||\Delta_g u||_{C^{k,\alpha}} + ||u||_{C^{0,\alpha}}).$$

注意 2.10. この定理の (ii) で $C^{k,\alpha}$, $C^{k+2,\alpha}$ とあるところを C^k, C^{k+2} とすることはできない．

3　2 次元の場合

この章では，M は 2 次元コンパクト多様体を表すものとする．M が連結のとき，M の任意のリーマン計量が共形変形によってスカラー曲率一定にできることを示す．山辺の問題は 3 次元以上の場合の問題であるが，以下に示すような 2 次元の場合の議論を知っておくことは理解の助けになるであろう．

定理 3.1 (ガウス・ボンネ)**.** 次の等式が成り立つ：

$$\int_M R_g\, d\mu_g = 4\pi\chi(M).$$

ここで $\chi(M)$ は M のオイラー数である．

これはよく知られた定理であるが，次の章でその証明を与える．2 次元のときスカラー曲率はガウス曲率の 2 倍であることに注意する．

命題 3.2. M はコンパクトかつ連結であるとする．このとき，M の任意の共形類 C に対して，スカラー曲率 $R_{\widetilde{g}}$ が定符号であるようなリーマン計量 $\widetilde{g} \in C$ が存在する．

したがってこのリーマン計量のスカラー曲率の符号はオイラー数 $\chi(M)$ の符号と一致することに注意する．

証明. $g \in C$ を一つとり，$\rho = 4\pi\chi(M)/\int_M d\mu_g$ とおく．ガウス・ボンネから

$$\int_M (\rho - R_g) d\mu_g = 0.$$

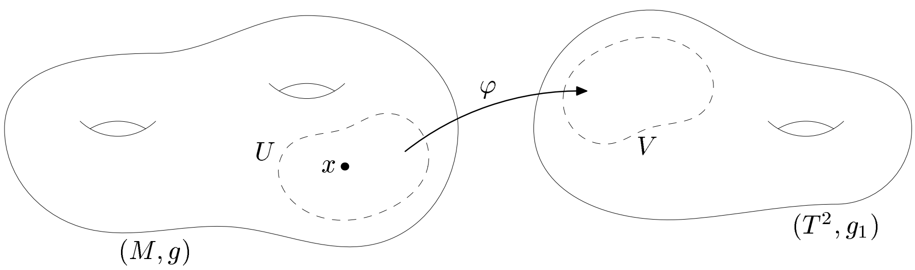
よって定理 2.4 より

$$-\Delta_g u = \rho - R_g$$

を満たす $u \in C^\infty(M)$ が取れる．公式 2.1(i) より，$\widetilde{g} = e^u g$ とおけば $R_{\widetilde{g}} = e^{-u}\rho$ であるから，これが求める計量である． □

系 3.3 (等温座標の存在)**.** 任意の $g \in \mathfrak{M}(M)$，任意の $x \in M$ に対して，x の近傍で $R_{e^u g} = 0$ となる $u \in C^\infty(M)$ が存在する．したがって x の近傍で $e^u g = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$ となる局所座標がとれる．

証明. x の近傍 U を小さくとる．すると適当な (T^2, g_1) をとれば，$(U, g|_U)$ と $(V, g_1|_V)$ が等長的になるようなトーラス T^2 の近傍 V がとれる．この等長写像を $\varphi\colon U \to V$ と書く．



$\chi(T^2) = 0$ であるから命題 3.2 より，$R_{e^v g_1} = 0$ となるような $v \in C^\infty(T^2)$ が存在する．そこで $u \in C^\infty(M)$ を

$$u = \begin{cases} v \circ \varphi & \cdots\ U \text{ より少し小さい近傍で} \\ \text{適当に} & \cdots\ \text{その他で} \end{cases}$$

のようにとれば求める条件が満たされている． □

この系はすべての 2 次元のリーマン多様体はすべて共形平坦であることを言っている．3 次元以上の多様体では共形平坦でない計量の方がたくさんある．そればかりか共形平坦な計量を一つも持たない多様体がある ([40], [67])．

次の定理がこの章の目標である．

定理 3.4. M はコンパクト連結な 2 次元多様体とする．任意の $g \in \mathfrak{M}(M)$ に対して，$R_{\widetilde{g}}$ が定数であるような $\widetilde{g} \in [g]$ が存在する．

証明. 3 つの場合に分けて証明する．
$\chi(M) = 0$ の場合：命題 3.2 ですでに証明済み．
$\chi(M) < 0$ の場合：$u \in C^\infty(M)$ を命題 3.2 の証明の中にあるようにとる．

$$u_+ = u - \min_x u(x), \qquad u_- = u - \max_x u(x)$$

とおくと，$u_- \leq 0 \leq u_+$ であり，$-\Delta_g u_+ = -\Delta_g u_- = \rho - R_g$ である．よって $\rho < 0$ であるから

$$-\Delta_g u_+ \geq e^{u_+}\rho - R_g, \qquad -\Delta_g u_- \leq e^{u_-}\rho - R_g.$$

よって定理 2.6 より

$$-\Delta_g v = e^v \rho - R_g,$$

を満たす $v \in C^\infty(M)$ がとれ，$\widetilde{g} = e^v g$ が求めるリーマン計量となる．
$\chi(M) > 0$ の場合：$p \in M$ をとる．系 3.3 より p のまわりで g は平坦であると仮定してよいのでそうする．$u \in C^\infty(M \setminus \{p\})$ を

$$u(x) = \begin{cases} -2\chi(M) \log \mathrm{dist}_g(p, x) & \cdots\ p \text{ のある近傍で,} \\ \text{適当に} & \cdots\ \text{その他,} \end{cases}$$

のようにとると

$$-\Delta_g u = 4\pi\chi(M)\delta_p$$

が p の近傍で成り立つ．ここで，δ_p はディラックのデルタ関数である．

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \cdots\ x = p, \\ \Delta_g u(x) & \cdots\ x \neq p, \end{cases}$$

と定めると $v \in C^\infty(M)$ で

$$\int_M v \, d\mu_g = 4\pi\chi(M)$$

すなわち $\int_M (R_g - v) d\mu_g = 0$ がなりたつ．したがって定理 2.4 より

$$\Delta_g w = R_g - v$$

を満たす $w \in C^\infty(M)$ が存在する．そこで，$G := u + w \in C^\infty(M \setminus \{p\})$ とおくと，G は共形ラプラシアン L_g のグリーン関数，すなわち

$$L_g G = 4\pi\chi(M)\delta_p$$

を満たしている．

$(\hat{M}, \hat{g}) := (M \setminus \{p\}, e^G g)$ とおくと，これは平坦で，p の近くで

$$e^G g = e^w \frac{1}{|x|^{2\chi(M)}}((dx^1)^2 + (dx^2)^2)$$

となるので，$\chi(M) > 0$ より $(\hat{M}, \hat{g})$ は完備である．平坦，完備，無限遠を一つ持つ曲面は次のいずれかと等長的である．

(1) $(\mathbf{R}^2,$ ユークリッド計量$)$.

(2) $(S^1 \times \mathbf{R}/\pm 1,$ 直積計量$)$.

(1), (2) の無限遠における計量の挙動と，$(M \setminus \{p\}, \hat{g})$ の p のまわりの計量の挙動を比較すれば，$\chi(M) = 2$ のとき $(\hat{M}, \hat{g})$ は (1) と等長的，したがって (M, g) は (S^2, g_0) と共形的になる．そして $\chi(M) = 1$ のときは，$(\hat{M}, \hat{g})$ は (2) と等長的，したがって (M, g) は $(\mathbf{R}\mathrm{P}^2, g_0)$ と共形的になる．これで定理が示せたことになる． □

この定理は 2 次元多様体の幾何学において重要である．というのは 2 次元の場合，スカラー曲率が一定であれば定曲率となり，したがって，その普遍被覆は球面，平面，または双曲平面となる．すなわち 2 次元コンパクト多様体はこれら 3 種の面のいずれかをその合同変換群の離散部分群で割ったものとして得られる．この事実はリーマン面の理論では一意化定理と呼ばれている．

上の定理の証明で $\chi(M) > 0$ のとき共形ラプラシアンのグリーン関数が出てくる．リーマン面の理論の場合は，極をもつ有理型関数の存在がその証明の鍵となっていることを思い起こせば，グリーン関数が出てくるのもそれなりの自然さが理解されるであろう．

4　アインシュタイン・ヒルベルトの汎関数

この章では，M はコンパクトな滑らかな n 次元多様体とする．リーマン計量の空間で定義された汎関数

$$E\colon \mathfrak{M}(M) \to \mathbf{R};\ E(g) = \frac{\int_M R_g\, d\mu_g}{\left(\int_M d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

を考える．この汎関数は**アインシュタイン・ヒルベルトの汎関数**と呼ばれる．もともとアインシュタインの重力場の方程式を変分問題として記述するためにヒルベルトが与えたもので，それは $E(g)$ の定義式の分子であった．その後，アインシュタイン計量の意味が相対論ではなくリーマン幾何で，少し意味が変わって定着したため上のような形になっている．

分母がやや複雑な形をしているが，それは

$$E(cg) = E(g), \qquad c \in \mathbf{R},\ c > 0$$

が成り立つようにしているためである．

命題 4.1. リーマン計量の滑らかな族 $\{g_t\}$ を考える．g_t の体積要素，スカラー曲率などは，$d\mu_t$, R_t のように書く．このとき次の等式が成り立つ．

$$\frac{d}{dt}E(g_t) = \left(\int_M d\mu_t\right)^{-\frac{n-2}{n}} \int_M \langle \dot{g}_t, \frac{n-2}{2n}(R_t - r_t)g_t - \mathrm{Ric}_t^\circ \rangle_t\, d\mu_t,$$

ここで，$\dot{g}_t = (d/dt)g_t$, $\langle , \rangle_t$ は g_t による内積，

$$r_t = \frac{\int_M R_t\, d\mu_t}{\int_M d\mu_t}$$

である．

証明. 定義に戻って計算するしかないが，途中の要点を書いておく．まず，

$$\frac{d}{dt}d\mu_t = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_t\, \dot{g}_t = \frac{1}{2}\langle \dot{g}_t, g_t \rangle_t.$$

次に，

$$\frac{d}{dt}R_t = -\Delta_t \mathrm{tr}_t\, \dot{g}_t + \mathrm{div}_t \mathrm{div}_t\, \dot{g}_t - \langle \dot{g}_t, \mathrm{Ric}_t \rangle_t.$$

これらから，

$$\frac{d}{dt}\int_M R_t\, d\mu_t = \int_M \langle \dot{g}_t, \frac{R_t}{2}g_t - \mathrm{Ric}_t \rangle_t\, d\mu_t. \tag{4.1}$$

ここまでくればあと一息である．　□

系 4.2 (ガウス・ボンネ)**.** $n = \dim M = 2$ のとき，$\int_M R_g d\mu_g = 4\pi\chi(M)$.

証明. $n = 2$ のときビアンキの恒等式から $\mathrm{Ric}_g^\circ = 0$ である．したがって，$\frac{d}{dt}E(g_t) = 0$ が常に成り立つ．$\mathfrak{M}(M)$ は弧状連結であるから，したがって，E は定数であり，この定数は M にしかよらない．この定数を $Y(M)$ とおく．すなわち

$$Y(M) = \int_M R_g\, d\mu_g.$$

M が S^2, $\mathbf{R}\mathrm{P}^2$, T^2 のときは具体的な計算で，$Y(M) = 4\pi\chi(M)$ が確かめられる．それ以外については閉曲面の分類定理と連結和に関するオイラー数の公式

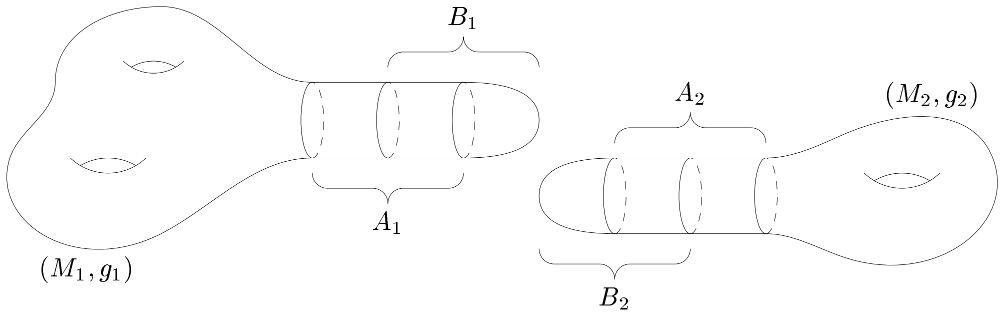
$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(S^2)$$

から

$$Y(M_1 \# M_2) = Y(M_1) + Y(M_2) - Y(S^2)$$

が示せれば証明は終わる．

$Y(M)$ は計量のとり方によらないので (M_1, g_1), (M_2, g_2) を下図のようにとる．



図で，$(A_1, g_1|A_1)$, $(A_2, g_2|A_2)$ は半径の等しい柱面である．$M_1 \setminus B_1$ と $M_2 \setminus B_2$ を境界で等長写像ではることにより $(M_1 \# M_2, g)$ を得る．B_1, B_2 を境界ではることにより (S^2, g') を得る．したがって，

$$\begin{aligned} Y(M_1 \# M_2) &= \int_{M_1 \setminus B_1} R_{g_1} d\mu_{g_1} + \int_{M_2 \setminus B_2} R_{g_2} d\mu_{g_2} \\ &= \int_{M_1} R_{g_1} d\mu_{g_1} + \int_{M_2} R_{g_2} d\mu_{g_2} - \int_{B_1 \cup B_2} R_{g'} d\mu_{g'} \\ &= Y(M_1) + Y(M_2) - Y(S^2). \end{aligned}$$

□

次の系は直ちに従う．

系 4.3. $n \geq 3$ のとき $g \in \mathfrak{M}(M)$ が E の臨界点であることと g がアインシュタイン計量であることは同値．

次元が 3 以上のときはさらに次のことがわかる．

系 4.4. $n \geq 3$ のとき $\inf\{E(g) | \, g \in \mathfrak{M}(M)\} = -\infty$.

証明. $g_0 = \delta_{ij} dx^i dx^j$ を $\mathbf{R}^n$ のユークリッド計量とする．$u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ を $\operatorname{supp} u \subset [0,1]^n$ かつ $u \not\equiv 0$ のようにとる．そこで

$$h = u(x)((dx^1)^2 - (dx^2)^2)$$

とおくと，g_0 に関して

$$\operatorname{tr} h = 0, \quad \frac{1}{2}|\nabla h|^2 = |du|^2, \quad |\operatorname{div} h|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x^2}\right)^2 \tag{4.2}$$

となっている．$g_t = g_0 + th$ は t が小さいとき $\mathbf{R}^n$ のリーマン計量を定め，g_0 が平坦だから，(4.1) より，

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \int_{\mathbf{R}^n} R_t \, d\mu_t = 0.$$

ここで，$\mathbf{R}^n$ はコンパクトでないが，$\dot{g}$ がコンパクトな台をもつので，公式 (4.1) が使えることに注意する．さらに (4.2) を用いて計算すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0} \int_{\mathbf{R}^n} R_t \, d\mu_t &= \frac{d}{dt}_{|t=0} \int_{\mathbf{R}^n} \langle \dot{g}_t, \frac{R_t}{2} g_t - \mathrm{Ric}_t \rangle_t \, d\mu_t \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} \left(-\frac{1}{2} |\nabla h|^2 + |\mathrm{div}\, h|^2 \right) d\mu_0 \\
&= -\sum_{i=3}^{n} \int_{\mathbf{R}^n} \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2 d\mu_0 < 0.
\end{aligned}
$$

最後の不等式は $n \geq 3$ から出る．したがって，$[0,1]^n$ の外ではユークリッド計量で，$\int_{[0,1]^n} R_g d\mu_g = -\varepsilon < 0$ となる $g \in \mathfrak{M}(\mathbf{R}^n)$ が存在する．この $g|_{[0,1]^n}$ を $[0,m]^n$, $m \in \mathbf{N}$, に，$[0,1]^n$ を単位にして周期的に拡張したものを g' とすると，$m \nearrow \infty$ で

$$
\frac{\int_{[0,m]^n} R_{g'} d\mu_{g'}}{\left(\int_{[0,m]^n} d\mu_{g'} \right)^{\frac{n-2}{n}}} = -\frac{\varepsilon m^2}{\left(\int_{[0,1]^n} d\mu_{g'} \right)^{\frac{n-2}{n}}} \searrow -\infty
$$

となる．$g_m \in \mathfrak{M}(\mathbf{R}^n)$ を

$$
g_m = \begin{cases} g' & \cdots \ [0,m]^n \ \text{で}, \\ g_0 & \cdots \ \text{その他のところで} \end{cases}
$$

と定める．

さて，M 上のリーマン計量 g で，$U \subset M$ で g は平坦であるようなものを考える．必要なら十分大きな N をとって $(M, N^2 g)$ を考えると，$[0,m]^n \subset U$ とすることができる．そこで $N^2 g|_U$ を g_m に取り替え，これを $\widetilde{g}_m \in \mathfrak{M}(M)$ とすると，$\lim_{m\to\infty} E(\widetilde{g}_m) = -\infty$ となる． □

まったく同様にして次も分かる．

系 4.5. $n \geq 3$ のとき $\sup\{E(g) |\, g \in \mathfrak{M}(M)\} = \infty$.

しかし，この系は次の章の考察でもっと簡単にわかる．系 4.4 の証明の要点は，$\mathbf{R}^n$ の計量でコンパクト集合を除いたところでユークリッド計量，かつスカラー曲率の積分が負になるものを見つけることにあった．実際にはもっと強いことが言える．スカラー曲率が非正で実際負になるところがあり，コンパクト集合を除いたところでユークリッド計量となるものがある ([63, pp. 259–260])．さらに強いことが言え，リッチ曲率で同様なことが成り立つ ([79, p. 675])．一方，$\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合を除いたところでユークリッド計量，スカラー曲率は非負かつ正になるところがある，このような計量は存在しない ([95],[43])．

5　山辺の問題と山辺の定理

この章では山辺の問題の定式化をする．M はコンパクト n 次元多様体を表し，C は共形類を表す．アインシュタイン・ヒルベルト汎関数を共形類 C に制限したものを**山辺汎関数**という．すなわち

$$E\colon C \to \mathbf{R};\ E(g) = \frac{\int_M R_g\, d\mu_g}{\left(\int_M d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

である．アインシュタイン・ヒルベルト汎関数と同じ記号を用いる．スカラー曲率 R_g が定数のときは,

$$E(g) = R_g \mathrm{Vol}(M, g)^{2/n} \tag{5.1}$$

であることに注意しておく．命題 4.1 から

第１変分公式． C 内のリーマン計量の滑らかな族 $\{g_t \in C\}$ に対して

$$\frac{d}{dt}E(g_t) = \frac{n-2}{2n}\mathrm{Vol}(M, g_t)^{-\frac{n-2}{n}} \int_M (\mathrm{tr}_t\, \dot{g}_t)(R_t - r_t) d\mu_t.$$

ここで

$$r_t = \frac{\int_M R_t\, d\mu_t}{\int_M d\mu_t}$$

である.

系 5.1. $n \geq 3$ のとき，$g \in C$ が山辺汎関数の臨界点であることと R_g が定数であることは同値.

第２変分公式． $R_0 = R_{g_0} =$ 定数 のとき

$$\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0} E(g_t) = \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}\mathrm{Vol}(M, g_0)^{\frac{2-n}{n}} \int_M \varphi \left(-\Delta_{g_0} - \frac{R_0}{n-1}\right) \varphi\, d\mu_0.$$

ここで

$$\varphi = \mathrm{tr}_0\, \dot{g}_0 - \frac{\int_M \mathrm{tr}_0\, \dot{g}_0\, d\mu_0}{\int_M d\mu_0}$$

である.

系 5.2. $n \geq 3$ のとき，$g \in C$ が山辺汎関数の安定な臨界点であることと，R_g が定数かつ

$$\lambda_1(-\Delta_g) \geq \frac{R_g}{n-1}$$

であることは同値．ここで $\lambda_1(-\Delta_g)$ は $-\Delta_g$ の第 1 固有値，すなわち正の最小固有値を表す.

$n \geq 3$ のとき，$g \in C$ を 1 つとると,

$$C = \{u^{\frac{4}{n-2}} g |\, u \in C^\infty(M),\ u > 0\}$$

と書ける．すると

$$\begin{aligned}
E(u^{\frac{4}{n-2}}g) &= \frac{\int_M \left(u^{-\frac{n+2}{n-2}}L_g u\right) u^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\
&= \frac{\int_M uL_g u\, d\mu_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\
&= \frac{4\frac{n-1}{n-2}\int_M |du|^2 d\mu_g + \int_M R_g u^2\, d\mu_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

この形から，$n \geq 3$ のとき

$$\sup_{g\in C} E(g) = \infty$$

がわかる．したがって系 4.5 が示せたことになる．

定義 5.3. $Y(M,C) = \inf_{g\in C} E(g)$ を**山辺の共形不変量**または**山辺定数**と呼ぶ．

(5.2) から，$n \geq 3$ のとき，$g \in C$ を 1 つ選べば

$$Y(M,C) = \inf_{u>0, u\in C^\infty(M)} \frac{4\frac{n-1}{n-2}\int_M |du|^2 d\mu_g + \int_M R_g u^2\, d\mu_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} \tag{5.3}$$

と書ける．したがって，任意の $g \in C$ に対して

$$Y(M,C) \leq (\max_{x\in M} R_g(x))\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} \tag{5.4}$$

が成り立つ．以上の準備により，山辺の問題を述べることができる．

山辺の問題． 任意のコンパクト連結な滑らかな多様体 M と，M の共形類 C に対して，

$$E(g) = Y(M,C)$$

を満たす $g \in C$ の存在を示せ．このようなリーマン計量 g を**山辺計量**という．

注意 5.4. 連結性の仮定は必要である (注意 12.12)．また問題をこのように述べると，$n = 2$ のときは，山辺汎関数は定数写像になるので自明な問題になる．

注意 5.5. $n \geq 3$ の時山辺計量は定数のスカラー曲率を持つ．しかしこの逆は正しくない．例えば，$(M, g_r) = S^1(r) \times S^{n-1}(1)$ とする．ここで $S^k(r)$ は半径 r の k 次元ユークリッド球面を表す．このとき，$R_{g_r} = (n-1)(n-2)$ は定数であるが，$\lambda_1(-\Delta_{g_r}) = \min\{1/r^2, n-2\}$ なので，$r > 1/\sqrt{n-2}$ のとき，$\lambda_1(-\Delta_{g_r}) < \frac{R_{g_r}}{n-1}$．これは系 5.2 に反する．

注意 5.6. $n \geq 3$ のとき $g \in C$ が山辺計量であることと，

$$Y(M,C) = R_g \mathrm{Vol}(M,g)^{2/n}$$

であることは同値である．

次の補題は，山辺の問題とソボレフ不等式とのつながりにおいて重要である．

補題 5.7. $n=2$，または $Y(M,C)\leq 0$ のとき，任意の $g\in C$ に対して，

$$(\min_{x\in M} R_g(x))\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} \leq Y(M,C).$$

注意 5.8. これは (5.4) と似ている．しかし，$n\geq 3$ で $Y(M,C)>0$ のとき，(上記) 不等式の左辺がいくらでも大きな値をもつ $g\in C$ の存在が知られている ([63]).

証明. $n=2$ のときはガウス・ボンネより明らか．$n\geq 3$ とする．(5.3) より，

$$\begin{aligned} Y(M,C) &= \inf_{u>0, u\in C^\infty(M)} \frac{4\frac{n-1}{n-2}\int_M |du|^2 d\mu_g + \int_M R_g u^2\, d\mu_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\ &\geq \inf_{u>0, u\in C^\infty(M)} \frac{4\frac{n-1}{n-2}\int_M |du|^2 d\mu_g + (\min_x R_g(x))\int_M u^2\, d\mu_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}. \end{aligned}$$

よって，もし $\min\limits_x R_g(x)>0$ ならば $Y(M,C)\geq 0$. さらにソボレフの不等式 (定理 2.8) より，このとき最後の式の分母は分子の定数倍で押さえられることに気をつけると，$Y(M,C)>0$ でならないといけないことがわかる．したがって仮定より，$\min\limits_x R_g(x)\leq 0$ でなくてはいけない．すると

$$\begin{aligned} Y(M,C) &\geq \inf_{u>0, u\in C^\infty(M)} \frac{(\min_x R_g(x))\int_M u^2\, d\mu_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\ &= \min_x R_g(x) \sup_{u>0, u\in C^\infty(M)} \frac{\int_M u^2\, d\mu_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}. \end{aligned}$$

したがってヘルダー不等式を用いれば $Y(M,C)\geq (\min_x R_g(x))\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}$ が得られる． □

系 5.9. $Y(M,C)>-\infty$.

証明. $Y(M,C)\geq 0$ なら問題ない．$Y(M,C)<0$ の時は上の補題の不等式から． □

系 5.10. $R_g=$ 定数 ≤ 0 ならば g は山辺計量.

証明. $C=[g]$ とする．$E(g)\leq 0$ であるから $Y(M,C)\leq 0$. 上の補題と (5.1) より, $E(g)\leq Y(M,C)$. したがって, $E(g)=Y(M,C)$. □

系 5.11. $R_g>0$ ($R_g=0$, $R_g<0$) となる，$g\in C$ が存在すれば，$Y(M,C)>0$ ($Y(M,C)=0$, $Y(M,C)<0$) である．

証明. $R_g<0$ のときは (5.4) から．$R_g=0$ のときは系 5.10 から．$R_g>0$ のときは補題 5.7 から直ちに分かる． □

M が連結であれば，この系の逆が成り立つ．

命題 5.12. M はコンパクト連結とする．M の共形類 C に対して, $Y(M,C)>0$ ($Y(M,C)=0$, $Y(M,C)<0$) であれば，$R_g>0$ ($R_g=0$, $R_g<0$) となる $g\in C$ が存在する．

証明. $n=2$ の場合は命題 3.2 ですんでいるので，$n \geq 3$ とする．$\widetilde{g} \in C$ をひとつ選び

$$\lambda = \inf_u \frac{\int_M uL_{\widetilde{g}}u\, d\mu_{\widetilde{g}}}{\int_M u^2 d\mu_{\widetilde{g}}}$$

とおく．すると定理 2.7 より，$L_{\widetilde{g}}u = \lambda u$ を満たす正値関数 u が存在する．この u に対して，$g = u^{\frac{4}{n-2}}\widetilde{g}$ とおくと

$$R_g = u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_{\widetilde{g}}u = \lambda u^{-\frac{4}{n-2}}$$

となり，R_g は定符号である．上の系より，この符号は $Y(M, C)$ の符号と一致する．したがって，g が求める計量である． □

系 5.13. $n \geq 3$ のとき，$R_g < 0$ となる $g \in \mathfrak{M}(M)$ が存在する．

証明. 系 4.4 より，$E(\widetilde{g}) < 0$ となる $\widetilde{g}$ が存在する．すると，$Y(M, [\widetilde{g}]) < 0$. よって上の命題から，$R_g < 0$ となる $g \in [\widetilde{g}]$ が存在する． □

2 次元のときはガウス・ボンネの定理より，負のスカラー曲率を持つ計量があればオイラー数が負でなければいけない．3 次元以上のときは負のリッチ曲率を持つ計量の存在することも知られている ([79])．しかし，負の断面曲率に関しては位相的な制約がある ([80], [81]).

系 5.14. $Y(M, C) = 0$ のとき山辺の問題は解ける．

ここまで第 3 章で見てきたことといくつかの類似があることに 気がつくと思う．定理 3.4 の $\chi(M) < 0$ の場合と同様にして次の定理が得られる．

定理 5.15. M はコンパクト連結とする．$Y(M, C) \leq 0$ のとき山辺の問題は解ける．

証明. $n \geq 3$ とする．$\widetilde{g} \in C$ をひとつ選び, λ, u を命題 5.12 の証明の中に出てくるものとする．$Y(M, C) \leq 0$ なので $\lambda \leq 0$ となる．

$$u_+ = \frac{u}{\min_x u(x)}, \quad u_- = \frac{u}{\max_x u(x)}$$

とおくと，$0 < u_- \leq 1 \leq u_+$ で, $u_\pm$ は u の定数倍なので,

$$L_{\widetilde{g}}u_- \leq \lambda {u_-}^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad L_{\widetilde{g}}u_+ \geq \lambda {u_+}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} -\Delta_{\widetilde{g}}u_- &\leq \frac{n-2}{4(n-1)}(\lambda {u_-}^{\frac{n+2}{n-2}} - R_{\widetilde{g}}u_-), \\ -\Delta_{\widetilde{g}}u_+ &\geq \frac{n-2}{4(n-1)}(\lambda {u_+}^{\frac{n+2}{n-2}} - R_{\widetilde{g}}u_+). \end{aligned}$$

定理 2.6 を使うと,

$$L_{\widetilde{g}}v = \lambda v^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad v > 0$$

を満たす関数 v が得られる．したがって，$g = v^{\frac{4}{n-2}}\widetilde{g}$ とおくと，$R_g = \lambda$ は非正な定数であるから，系 5.10 より，これは山辺の問題の解である． □

この定理と，補題 5.7，系 5.10 より

系 5.16. $Y(M,C) \le 0$ のとき，$Y(M,C) = \sup_{g \in C}(\min_{x \in M} R_g(x))\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}$.

このように，$Y(M,C) \le 0$ の場合は，最大値の原理を用いた議論により，比較的容易に証明される．このことは次の一意性と関連がある．

命題 5.17. g_1, $g_2 \in C$, $\mathrm{Vol}(M,g_1) = \mathrm{Vol}(M,g_2)$ かつ $R_{g_1} = R_{g_2} =$ 定数 ≤ 0 ならば $g_1 = g_2$.

証明は最大値の原理を用いて容易にできるので省略する．

$Y(M,C) > 0$ の場合を含む一般の場合の証明は複雑である．それを次章から見ていくが，一般の場合の山辺の問題の解は次の 3 つの定理からの帰結になっている．M はコンパクト連結な n 次元多様体とする．C は M の共形類とする．C_0 で球面 S^n の標準計量 g_0 を含む共形類を表す．

定理 A(山辺・トルーディンガー・オーバン). $Y(M,C) < Y(S^n,C_0)$ のとき，$\mathrm{Vol}(M,g_i) = 1$, $E(g_i) \searrow Y(M,C)$ なる計量の列 $\{g_i \in C\}$ は収束する部分列を持ち，その極限 $g \in C$ は山辺計量である．

定理 B(オーバン). $Y(S^n,C_0) = n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{2/n}$. すなわち，$g_0 \in C_0$ は山辺計量.

定理 C(オーバン・シェーン). $Y(M,C) \ge n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{2/n}$ のとき，$(M,C) = (S^n,C_0)$.

定理 A，定理 C，定理 B の順に見れば，これで山辺の問題が解けていることがわかる．この結果の一部をまとめれば，次のようになる．

山辺の定理． M をコンパクト連結な n 次元多様体, C を共形類とするとき, $E(g) = Y(M,C)$ をみたす $g \in C$ が存在する．$n \ge 3$ のとき，この計量 g は次の性質を持つ：

(i) $R_g =$ 定数.

(ii) $\lambda_1(-\Delta_g) \ge \dfrac{R_g}{n-1}$.

(iii) $R_g \mathrm{Vol}(M,g)^{2/n} \le n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{2/n}$.

注意 5.18. $\mathrm{Ric}_g \ge \dfrac{r}{n} g$ のとき

$$\lambda_1(-\Delta_g) \ge \frac{r}{n-1},$$
$$r\mathrm{Vol}(M,g)^{2/n} \le n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{2/n}$$

であることはよく知られている (前者はリシュネロヴィッツの不等式，後者はビショップの不等式)．これらと性質 (ii), (iii) を比較してみれば，山辺計量は単にスカラー曲率が一定であるという以上に，普通ならリッチ曲率を用いて導かれる性質のいくつかを備えていることがわかる．

6　定理 A の証明

この章では，M をコンパクト連結な n 次元多様体 $(n \geq 3)$ とする．ソボレフ空間 $W^{1,2}(M)$, L^p 空間 $L^p(M)$ は第 2 章で与えられているものとする．C を M の共形類とし，リーマン計量 $g \in C$ を 1 つ選ぶ．$Q_g\colon W^{1,2}(M) \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ を

$$Q_g(u) = \frac{4\frac{n-1}{n-2}\int_M |du|^2 d\mu_g + \int_M R_g u^2\, d\mu_g}{\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

とおく．(5.3) より，

$$Y(M,C) = \inf_u Q_g(u)$$

であることに注意する．

定理 A の証明で最も重要なのは，次のオーバンの結果である．

定理 6.1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，次の不等式をみたす，$u \in W^{1,2}(M)$ によらない定数 $A = A(M,g,\varepsilon)$ が存在する．

$$(Y(S^n, C_0) - \varepsilon)\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq 4\frac{n-1}{n-2}\int_M |du|^2 d\mu_g + A\int_M u^2\, d\mu_g \tag{6.1}$$

証明. S^n の標準計量 g_0 に対しては，$Y(S^n, C_0)$ の定義から，$\varepsilon = 0$, $A = n(n-1)$ で (6.1) は成立している．

一般の (M,g) において，各点の近傍で正規座標で計量 g を書いてみれば，1 階微分までは，この近傍で，g は g_0 を近似している．不等式 (6.1) に計量の微分が入っていないことに注意すれば，このことは，与えられた $\varepsilon > 0$ に対し十分小さな近傍 $U \subset M$ をとれば，U 内に台をもつ $u \in W^{1,2}(M)$ に対しては $A = n(n-1)$ で，不等式 (6.1) が成立していることを意味する．

このような小さな近傍からなる M の有限開被覆 $\{U_i\}$ と，それに従属した 1 の分解 $\{\varphi_i\}$ をとる．すると任意の $u \in W^{1,2}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}
&(Y(S^n, C_0) - \varepsilon)\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \\
&= (Y(S^n, C_0) - \varepsilon)\left(\int_M \left(\sum \varphi_i |u|^2\right)^{\frac{n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \\
&\leq (Y(S^n, C_0) - \varepsilon)\sum\left(\int_M (\sqrt{\varphi_i}\,|u|)^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \\
&\leq \sum\left(4\frac{n-1}{n-2}\int_M |d(\sqrt{\varphi_i}\,u)|^2 d\mu_g + n(n-1)\int_M (\sqrt{\varphi_i}\,u)^2\, d\mu_g\right) \\
&= 4\frac{n-1}{n-2}\int_M |du|^2 d\mu_g + n(n-1)\int_M u^2\, d\mu_g + 4\frac{n-1}{n-2}\sum\int_M |d\sqrt{\varphi_i}|^2 u^2 d\mu_g
\end{aligned}$$

最後の式の第 2 項と第 3 項は，まとめて $\int_M u^2 d\mu_g$ の定数倍でおさえられるので，求める不等式が得られた．　□

注意 6.2. これはソボレフ不等式 (定理 2.8(i) で，$k = 0$, $l = 1$, $p = \frac{2n}{n-2}$, $q = 2$ の場合) の精密化である．またこの定理の証明を使えば，補題 5.7 から逆にソボレフ不等式が得られることがわかる．というのは，補

題 5.7 より，正のスカラー曲率をもつ (M,g) に対して，$Y(M,[g])>0$. 上の証明で，$Y(S^n,C_0)$ とある部分を $Y(M,[g])$ で置き換えて読めばよい.

定理 A の証明を始める．$u_j \in C^\infty(M)$ を次のようにとる.

- $u_j > 0, \quad \int_M u_j^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g = 1.$
- $Q_g(u_j) \searrow Y(M,C).$

すると $\{u_j\}$ は $W^{1,2}(M)$ で有界である．$W^{1,2}(M)$ の有界閉集合が弱コンパクトであることと，ソボレフの埋め込み定理 (定理 2.8) より埋め込み $W^{1,2}(M) \subset L^2(M)$ がコンパクトであることから，$\{u_j\}$ の部分列 $\{u_k\}$ を，次のように，ある $u \in W^{1,2}(M)$ に収束するようにとれる.

- $u_k \to u \qquad W^{1,2}(M)$ で弱収束.
- $u_k \to u \qquad L^2(M)$ で強収束.

したがって，必要ならさらに部分列をとれば

- $u_k \to u \qquad$ ほとんど至るところで.

よって $u \geq 0$ である．$u_k > 0$ とファトウの補題から

$$\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g = \int_M \liminf_k u_k{}^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g \leq \liminf_k \int_M u_k{}^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g = 1.$$

もし u_k が上からも有界ならば $\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g = 1$ が言える．これは注意すべきことである.

われわれの最初の目標は，次を示すことである.

主張． $Y(M,C) < Y(S^n,C_0)$ の仮定のもとに $\{u_k \in C^\infty(M)\}$ が $u \in W^{1,2}(M)$ に強収束する

これを 3 段階に分けて示す.

第 1 段． $k \to \infty$ で 0 に収束する量を，まとめて ε_k と書くことにする.

$$\begin{aligned} Y(M,C) &= 4\frac{n-1}{n-2}\int_M |du_k|^2\, d\mu_g + \int_M R_g u_k{}^2\, d\mu_g + \varepsilon_k \\ &= 4\frac{n-1}{n-2}\int_M |d(u_k-u)+du|^2\, d\mu_g + \int_M R_g u^2\, d\mu_g + \varepsilon_k \\ &= 4\frac{n-1}{n-2}\int_M |du|^2\, d\mu_g + \int_M R_g u^2\, d\mu_g + 4\frac{n-1}{n-2}\int_M |d(u_k-u)|^2\, d\mu_g \\ &\quad + 8\frac{n-1}{n-2}\int_M \langle d(u_k-u), du\rangle\, d\mu_g + \varepsilon_k. \end{aligned}$$

得られた式の 第 1 項 + 第 2 項 $\geq Y(M,C)(\int_M u^{2n/(n-2)} d\mu_g)^{(n-2)/n}$ である．また $W^{1,2}(M)$ での弱収束 $u_k \to u$ から第 4 項は ε_k に吸収され,

$$Y(M,C) \geq Y(M,C)\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}} + 4\frac{n-1}{n-2}\int_M |d(u_k-u)|^2\, d\mu_g + \varepsilon_k.$$

したがって,

$$Y(M,C)\left(1-\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}\right) \geq 4\frac{n-1}{n-2}\int_M |d(u_k-u)|^2\, d\mu_g + \varepsilon_k. \tag{6.2}$$

$Y(M,C) \le 0$ のときは，これで主張が示されたことになる．

第 2 段． $a \ge 0, b \ge 0, p \ge 1, \varepsilon > 0$ のとき，$(a+b)^p \le (1+\varepsilon)^{p-1}a^p + (1+1/\varepsilon)^{p-1}b^p$ なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$u_k{}^{\frac{2n}{n-2}} \le (u + |u_k - u|)^{\frac{2n}{n-2}} \le (1+\varepsilon)^{\frac{n+2}{n-2}}|u_k - u|^{\frac{2n}{n-2}} + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n+2}{n-2}} u^{\frac{2n}{n-2}}$$

だから

$$u_k{}^{\frac{2n}{n-2}} - (1+\varepsilon)^{\frac{n+2}{n-2}}|u_k - u|^{\frac{2n}{n-2}} \le \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n+2}{n-2}} u^{\frac{2n}{n-2}}.$$

左辺はほとんど至る所 $u^{\frac{2n}{n-2}}$ に収束する．$u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$ だから，ファトウの補題を使って，

$$\limsup_{k\to\infty} \int_M \left(u_k{}^{\frac{2n}{n-2}} - (1+\varepsilon)^{\frac{n+2}{n-2}}|u_k - u|^{\frac{2n}{n-2}}\right) d\mu_g \le \int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g.$$

$\varepsilon \to 0$ とすれば

$$1 - \int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g \le \liminf_{k\to\infty} \int_M |u_k - u|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g.$$

よって

$$1 - \left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \le \liminf_{k\to\infty} \left(\int_M |u_k - u|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}.$$

$Y(M,C) > 0$ のとき (6.2) と合わせて

$$Y(M,C)\left(\int_M |u_k - u|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \ge 4\frac{n-1}{n-2}\int_M |d(u_k - u)|^2\, d\mu_g + \varepsilon_k \tag{6.3}$$

を得る．

第 3 段． (6.1) より

$$(Y(S^n, C_0) - \varepsilon)\left(\int_M |u_k - u|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \le 4\frac{n-1}{n-2}\int_M |d(u_k - u)|^2 d\mu_g + \varepsilon_k. \tag{6.4}$$

(6.3), (6.4) から $Y(M,C) > 0$ のとき

$$\left(\frac{1}{Y(M,C)} - \frac{1}{Y(S^n, C_0) - \varepsilon}\right)\int_M |d(u_k - u)|^2 d\mu_g \le \varepsilon_k.$$

仮定 $Y(M,C) < Y(S^n, C_0)$ から，ε を小さくとって $k \to \infty$ とすると

$$\int_M |d(u_k - u)|^2 d\mu_g \to 0.$$

よって $\{u_k\}$ は u に $W^{1,2}(M)$ で強収束することが言えた．以上で主張が示された．

上の主張と (6.4) より，$\{u_k\}$ は u に $L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$ で収束している．$u \ge 0$ だったので

$$\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g = \int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g = 1$$

および

$$Q_g(u) = \lim_{k\to\infty} Q_g(u_k) = Y(M,C)$$

がわかる．そこでオイラー・ラグランジュ方程式を計算すると，$u \in W^{1,2}(M)$ は

$$L_g u = Y(M,C) u^{\frac{n+2}{n-2}}, \qquad u \geq 0 \tag{6.5}$$

の弱解になっていることがわかる．

後半の目標は，この u が C^∞ 級であることを示すことである．その鍵となるのは次のトルーディンガーの定理 ([104]) である．

定理 6.3. $P, Q \in C^\infty(M)$ とする．$u \in W^{1,2}(M)$ は

$$-\Delta_g u(x) + P(x)u(x) = Q(x)|u(x)|^{\frac{4}{n-2}} u(x)$$

の弱解とする．このとき，ある $q > 1$ に対して $u \in L^{\frac{2n}{n-2}q}(M)$ である．

証明. $u \in W^{1,2}(M)$ より $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$ であることに注意する．$l > 0$ をひとつとり，関数 F を次のようにおく

$$F(u) = \begin{cases} |u|^q & \cdots\ |u| \leq l \text{ のとき}, \\ ql^{q-1}(|u| - l) + l^q & \cdots\ |u| > l \text{ のとき}. \end{cases}$$

すると $F(u) \in W^{1,2}(M) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$ である．$\widetilde{F}$ を

$$u\widetilde{F}(u) = \begin{cases} |u|^{2q} & \cdots\ |u| \leq l \text{ のとき}, \\ l^{q-1}|u|F(u) & \cdots\ |u| > l \text{ のとき}, \end{cases}$$

とおくと，これも $\widetilde{F}(u) \in W^{1,2}(M)$ であるので，仮定より，任意の $\eta \in C^\infty(M), \eta \geq 0$ に対して

$$\int_M \langle du, d(\eta^2 \widetilde{F}(u))\rangle d\mu_g \leq \int_M (A\eta^2 u\widetilde{F}(u) + B|u|^{\frac{4}{n-2}}\eta^2 u\widetilde{F}(u)) d\mu_g.$$

ここで $A = -\min_x P(x)$, $B = \max_x Q(x)$ である．

$$\begin{aligned} \langle du, d(\eta^2 \widetilde{F}(u))\rangle &= 2\eta\widetilde{F}(u)\langle du, d\eta\rangle + \eta^2 \widetilde{F}'(u)|du|^2 \\ &\geq -\frac{\widetilde{F}(u)}{2u}\eta^2|du|^2 - 2u\widetilde{F}(u)|d\eta|^2 + \eta^2\widetilde{F}'(u)|du|^2. \end{aligned}$$

これと，$\widetilde{F}(u)/u \leq \widetilde{F}'(u)$ から

$$\frac{1}{2}\int_M \eta^2 \widetilde{F}'(u)|du|^2 d\mu_g \leq \int_M ((A\eta^2 + 2|d\eta|^2)u\widetilde{F}(u) + B|u|^{\frac{4}{n-2}}\eta^2 u\widetilde{F}(u)) d\mu_g.$$

$(F'(u))^2 \leq q\widetilde{F}'(u)$, $u\widetilde{F}(u) \leq F(u)^2$ から

$$\frac{1}{2q}\int_M \eta^2 |dF(u)|^2 d\mu_g \leq \int_M ((A\eta^2 + 2|d\eta|^2)F(u)^2 + B|u|^{\frac{4}{n-2}}(\eta F(u))^2) d\mu_g.$$

$|d(\eta F)|^2 \leq 2\eta^2|dF|^2 + 2F^2|d\eta|^2$ から

$$\frac{1}{4q}\int_M |d(\eta F(u))|^2 d\mu_g \leq \int_M ((A\eta^2 + (2 + \frac{1}{2q})|d\eta|^2)F(u)^2 + B|u|^{\frac{4}{n-2}}(\eta F(u))^2) d\mu_g.$$

ソボレフ不等式 $\int_M(|d(\eta F)|^2+(\eta F)^2)d\mu_g \geq C(\int_M(\eta F)^{2n/(n-2)}d\mu_g)^{(n-2)/n}$ を左辺に，また右辺最後の項にヘルダー不等式を使って

$$\left(\frac{C}{4q}-B\left(\int_{\operatorname{supp}\eta}|u|^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_g\right)^{\frac{2}{n}}\right)\left(\int_M(\eta F(u))^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}$$
$$\leq \int_M\left((A+\frac{1}{4q})\eta^2+(2+\frac{1}{2q})|d\eta|^2\right)F(u)^2d\mu_g.$$

$l\to\infty$ として

$$\left(\frac{C}{4q}-B\left(\int_{\operatorname{supp}\eta}|u|^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_g\right)^{\frac{2}{n}}\right)\left(\int_M\eta^{\frac{2n}{n-2}}|u|^{\frac{2n}{n-2}q}d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}$$
$$\leq \int_M\left((A+\frac{1}{4q})\eta^2+(2+\frac{1}{2q})|d\eta|^2\right)|u|^{2q}d\mu_g.$$

$\operatorname{supp}\eta$ を十分小さくとれば，左辺のはじめのカッコ内は正にとれる．$1<q\leq n/(n-2)$ にとれば，右辺は有限値．よって，$\int_M|u|^{\frac{2n}{n-2}q}d\mu_g<\infty$ が示せた． $\square$

注意 6.4. 定理 A の証明に戻る前に，この証明内で用いられている手法，すなわち**モーザーの反復法** (正確にはこの手法の一部) についてコメントしておこう．この手法は，下記の (A) に代表される 2 階楕円型の線形方程式または山辺の方程式 (B) に代表される 2 階楕円型の非線形方程式の解 $u\in W^{1,2}(M)$ の L^∞ ノルムの評価に関するものである．すなわち，埋め込み $W^{1,2}(M)\hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$ に関するソボレフ不等式に $|u|^q$ $(q>1)$ を適用して，そのソボレフ定数および u の L^p ノルム $(p>1)$ ((A) の場合) または $L^{\frac{2n}{n-2}}$ ノルム ((B) の場合) とを用いて u の L^∞ ノルムを評価するときによく使われる．ここで $|u|^q$ は，解 u と凸関数 $f(t)=|t|^q$ による合成関数 $f(u)=|u|^q$ で与えられ，ある種の劣解の役割を果たしていることがソボレフ不等式を利用するときの要点である．

(A) $\qquad -\Delta_g u+\varphi(x)u=\psi(x),$

(B) $\qquad -4\frac{n-1}{n-2}\Delta_g u+R_g u=\lambda\, u^{\frac{n+2}{n-2}}.$

ここで解 u の滑らかさがすでに得られている場合でも，モーザーの反復法は解 u の L^∞ ノルムの一様評価を得るための重要な方法であることに注意しておく．この定理 6.3 の様に，解 u の滑らかさ (または有界性，高次の L^p 正則性) が仮定されていないときには，$|u|^q$ を例えば定理 6.3 の証明内の関数 $F(u)$ の様に修正して適用するのが通常である．ここで $F(t)$ は，$|t|>l$ の範囲では，$|t|=l$ における凸関数 $f(t)=|t|^q$ の接線 (一次関数) に一致し，修正された $F(t)$ 自身もまた凸関数である．上にも述べた様に，ソボレフ不等式を利用と言う観点からは，解と凸関数との合成が要点で，それにより $F(u)$ も $|u|^q$ と同様にある種の劣解の役割を果たす．その上で，$F(t)$ は $t>l$ の範囲で一次関数なので，$F(u)$ は $|u|^q$ よりも高い L^p 正則性が得られ，最終的に u 自身の高い L^p 正則性が (具体的な評価を伴って) 得られるのである．

定理 A の証明に戻る．$u\in W^{1,2}(M)$ は (6.5) の弱解であったから，すなわち

$$-4\frac{n-1}{n-2}\Delta_g u=-R_g u+Y(M,C)u^{\frac{n+2}{n-2}},\qquad u\geq 0 \tag{6.6}$$

の弱解である．これに上の定理を適用すると，$u\in L^{\frac{2n}{n-2}q}(M)$．ここで $q>1$ である．よって (6.6) より，$\Delta_g u\in L^{\frac{2n}{n+2}q}$ である．よって定理 2.9(i) より，$u\in W^{2,\frac{2n}{n+2}q}(M)$ である．もし $n+2-4q>0$ ならば

$$q_1=\frac{(n-2)q}{n+2-4q}$$

とおくとソボレフの埋め込み定理から，$u \in L^{\frac{2n}{n-2}q_1}(M)$．したがって同様な議論で $u \in W^{2,\frac{2n}{n+2}q_1}(M)$．ふたたび $n+2-4q_1 > 0$ ならば,

$$q_2 = \frac{(n-2)q_1}{n+2-4q_1}$$

とおいて $u \in W^{2,\frac{2n}{n+2}q_2}(M)$ を得る．これを続けると, $q > 1$ と q_j の定め方から, ある有限の j で $n+2-4q_j < 0$ となり $u \in W^{2,\frac{2n}{n+2}q_j}(M)$．すると $k+\alpha = 4q_j - n - 2$, $k \in \mathbf{Z}$, $0 < \alpha < 1$, とおいて，$u \in C^{k,\alpha}(M)$, 特に, $u \in C^{0,\alpha}(M)$ である．このとき，(6.6) より，$\Delta_g u \in C^{0,\alpha}(M)$ であるから，定理 2.9(ii) より，$u \in C^{2,\alpha}(M)$．ここで M が連結であることと $\int_M u^{2n/(n-2)} d\mu_g = 1$ に注意して，最大値の原理 (定理 2.5) を使えば，$u > 0$ が言える．後は，定理 2.9(ii) を繰り返し使うことにより，$u \in C^\infty(M)$ が言える．

$g_i = u_i^{\frac{4}{n-2}} g$ で u_i が定義されているものと思えば，これで定理 A の証明ができたことになる．

注意 6.5. 定理 A は，$Y(M,C) < Y(S^n, C_0)$ のとき (M,C) の体積 1 の山辺計量の全体はコンパクトであることも言っている．

注意 6.6. 定理 A は，山辺の原論文 [107] にある誤りを，修復できる部分は修復して得られた結果である．しかし，ここで示した証明は山辺の原論文の証明の方針に忠実に沿っているわけではない．リーとパーカーによる解説論文 [74] の証明の方が山辺の原論文に近いので，興味をもたれる方は [74] も参照していただくとよいと思う．

7　定理 B の証明

この節の主要部はオーバンによるソボレフ不等式の証明である．対称化の議論により 1 変数の問題に帰着させるのだが，その 1 変数の議論から始める．

関数 $f\colon [-1,1) \to [0,\infty)$ を

$$f(x) = \frac{n-2}{n}(1-x^2)^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \xi^{n+1} \left(\frac{2}{1+\xi^2}\right)^n d\xi \tag{7.1}$$

で定義する．$\xi = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\eta$ と変数変換すると，

$$f(x) = \frac{n-2}{n}(1+x)^2 \int_0^1 \eta^{n+1} \left(\frac{2}{1+\eta^2-(1-\eta^2)x}\right)^n d\eta.$$

これより，$-1 < x < 1$ で $f'(x) > 0$, $f(-1) = 0$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ がわかり，したがって f は逆関数を持つ．また $\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{1+x} = 0$ も明らかである．積分の等式

$$\int \frac{\xi^{n+1}}{(1+\xi^2)^n} d\xi = -\frac{\xi^n}{(n-2)(1+\xi^2)^{n-1}} + \frac{n}{n-2}\int \frac{\xi^{n-1}}{(1+\xi^2)^n} d\xi$$

を使えば，(7.1) から，

$$\frac{f(x)}{1-x^2} + \frac{2}{n(1-x)} = (1-x^2)^{-\frac{n}{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \xi^{n-1} \left(\frac{2}{1+\xi^2}\right)^n d\xi \tag{7.2}$$

が得られる．やや面倒であるが，微分を計算すると

$$d\left(\frac{f(x)}{1-x^2} + \frac{2}{n(1-x)}\right) = \frac{n}{n-2} \cdot \frac{df}{1-x^2}$$

が確かめられる．

さて，$S^n(1) \setminus \{1\text{ 点}\}$ は，立体射影を通して，$(\mathbf{R}^n, \left(\frac{2}{1+|y|^2}\right)^2 \delta_{ij} dy^i dy^j)$ と等長的なので，その体積要素は

$$d\mu_{S^n(1)} = \left(\frac{2}{1+|y|^2}\right)^n dy^1 \cdots dy^n = \xi^{n-1} \left(\frac{2}{1+\xi^2}\right)^n d\xi\, d\mu_{S^{n-1}(1)}$$

で与えられる．ここで $\xi = |y|$ である．よって，

$$\mathrm{Vol}(S^n(1)) = \int_{S^{n-1}(1)} \int_0^\infty \xi^{n-1} \left(\frac{2}{1+\xi^2}\right)^n d\xi d\mu_{S^{n-1}(1)} = \mathrm{Vol}(S^{n-1}(1)) \int_0^\infty \xi^{n-1} \left(\frac{2}{1+\xi^2}\right)^n d\xi.$$

これと，(7.2) から，

$$\lim_{x\to 1}(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} f(x) = \frac{\mathrm{Vol}(S^n(1))}{\mathrm{Vol}(S^{n-1}(1))} \tag{7.3}$$

が分かる．

命題 7.1 ([47], [24])**.** $u\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ はリプシッツ関数で，$u > 0$, $\lim_{r\to\infty} u(r) = 0$ とする．このとき

$$\frac{4}{n(n-2)} \int_0^\infty \dot{u}^2 r^{n-1} dr \geq \left(\frac{\mathrm{Vol}(S^n(1))}{\mathrm{Vol}(S^{n-1}(1))}\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_0^\infty u^{\frac{2n}{n-2}} r^{n-1} dr\right)^{\frac{n-2}{n}}$$

が成り立つ．

証明. 関数 $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
A(r) &= \frac{4}{n(n-2)}\int_0^r \dot{u}^2 r^{n-1}dr,\\
A(r) &= f(B(r))u(r)^2 r^{n-2},\\
C(r) &= \left(\frac{f(B(r))}{1-B(r)^2}+\frac{2}{n(1-B(r))}\right)u^{\frac{2n}{n-2}}r^n.
\end{aligned}$$

計算により

$$\frac{dC}{dr} = \left(1+\frac{1}{1-B^2}\left(\frac{2}{n-2}\cdot\frac{\dot{u}}{u}r+(1+B)\right)^2\right)u^{\frac{2n}{n-2}}r^{n-1} \geq u^{\frac{2n}{n-2}}r^{n-1}.$$

よって

$$\int_0^\infty u^{\frac{2n}{n-2}}r^{n-1}dr \leq \lim_{r\to\infty}C(r)-\lim_{r\to 0}C(r). \tag{7.4}$$

一方，シュヴァルツの不等式から

$$u(r) = -\int_r^\infty \dot{u}\,dr \leq r^{-\frac{n-2}{2}}\sqrt{\frac{1}{n-2}\int_r^\infty \dot{u}^2 r^{n-1}dr}.$$

よって

$$u^2 r^{n-2} \leq \frac{1}{n-2}\int_0^\infty \dot{u}^2 r^{n-1}dr.$$

$\lim_{r\to\infty}A(r)<\infty$ の場合を考えればよいから，$\lim_{r\to\infty}u^2r^{n-2}=0$. よって $\lim_{r\to\infty}B(r)=1$ である．

$$C(r) = \left((1-B^2)^{\frac{n-2}{2}}f(B)\right)^{-\frac{2}{n-2}}\left(1+\frac{2(1+B)}{nf(B)}\right)A^{\frac{n}{n-2}}$$

となることに注意すると (7.3) から

$$\lim_{r\to\infty}C(r) = \left(\frac{\mathrm{Vol}(S^{n-1}(1))}{\mathrm{Vol}(S^n(1))}\right)^{\frac{2}{n-2}}\left(\lim_{r\to\infty}A(r)\right)^{\frac{n}{n-2}}$$

となる．$\lim_{r\to 0}C(r)=0$ も容易に分かる．(7.4) とこれらを合わせて求める不等式を得る． □

命題 7.2. $u\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $u>0$, $\lim_{|x|\to\infty}u(x)=0$ とするとき

$$\frac{4}{n(n-2)}\int_{\mathbf{R}^n}|du|^2 d\mu_{\mathbf{R}^n} \geq (\mathrm{Vol}(S^n(1)))^{\frac{2}{n}}\left(\int_{\mathbf{R}^n}u^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_{\mathbf{R}^n}\right)^{\frac{n-2}{n}}$$

が成り立つ．

証明. u の臨界点は孤立していることを仮定する．このような関数で，任意の関数は上の積分量に関して十分近似されるので，この仮定で一般性は失われない．証明は対称化をして等周不等式にもちこむことによって行う．

$\overline{u}\colon[0,\infty)\to\mathbf{R}$ を

$$\mathrm{Vol}(\{x\in\mathbf{R}^n|\,\overline{u}(|x|)\geq t\}) = V(t)$$

で定義する．ここで $V(t)=\mathrm{Vol}(\{x\in\mathbf{R}^n|\,u(x)\geq t\})$ である．すると $\overline{u}$ は命題 7.1 の仮定をみたし，また明らかに，

$$\int_{\mathbf{R}^n}u(x)^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_{\mathbf{R}^n} = \int_{\mathbf{R}^n}\overline{u}(|x|)^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_{\mathbf{R}^n} = \mathrm{Vol}(S^{n-1}(1))\int_0^\infty \overline{u}(r)^{\frac{2n}{n-2}}r^{n-1}dr$$

であるから，次の不等式

$$\int_{\mathbf{R}^n} |du(x)|^2 d\mu_{\mathbf{R}^n} \geq \int_{\mathbf{R}^n} |d\overline{u}(|x|)|^2 d\mu_{\mathbf{R}^n} = \mathrm{Vol}(S^{n-1}(1)) \int_0^\infty \dot{\overline{u}}(r)^2 r^{n-1} dr \tag{7.5}$$

を示せば，命題 7.1 を用いて求める不等式が得られる．

$d\sigma_t$ で超曲面 $\{x \in \mathbf{R}^n | \, u(x) = t\}$ の面積要素を表すと，

$$V(t) = \int_{u \geq t} d\mu_{\mathbf{R}^n} = \int_t^\infty \left(\int_{u=t} \frac{d\sigma_t}{|du|} \right) dt.$$

よって，

$$V'(t) = -\int_{u=t} \frac{d\sigma_t}{|du|}.$$

同様にして，$d\overline{\sigma}_t$ で球面 $\{x \in \mathbf{R}^n | \, \overline{u}(|x|) = t\}$ の面積要素を表すと，

$$V'(t) = -\int_{\overline{u}=t} \frac{d\overline{\sigma}_t}{|d\overline{u}|}.$$

が得られる．シュヴァルツの不等式を用いて，

$$\int_{\mathbf{R}^n} |du(x)|^2 d\mu_{\mathbf{R}^n} = \int_0^\infty \left(\int_{u=t} |du| \, d\sigma_t \right) dt \geq \int_0^\infty \left(\frac{(\int_{u=t} d\sigma_t)^2}{-V'(t)} \right) dt. \tag{7.6}$$

$\overline{u}$ に関しては，明らかに，

$$\int_{\mathbf{R}^n} |d\overline{u}(|x|)|^2 d\mu_{\mathbf{R}^n} = \int_0^\infty \left(\frac{(\int_{\overline{u}=t} d\overline{\sigma}_t)^2}{-V'(t)} \right) dt. \tag{7.7}$$

$\mathrm{Vol}(\{x \in \mathbf{R}^n | \, u(x) \geq t\}) = \mathrm{Vol}(\{x \in \mathbf{R}^n | \, \overline{u}(x) \geq t\})$ で $\{x \in \mathbf{R}^n | \, \overline{u}(x) = t\}$ はユークリッド球だから，等周不等式より，$\int_{u=t} d\sigma_t \geq \int_{\overline{u}=t} d\overline{\sigma}_t$．これと，(7.6), (7.7) を合わせて，不等式 (7.5) を得る．これで命題 7.2 が示された． □

以上の準備のもと，定理 B の証明を始める．$g_0 \in C_0$ を S^n の標準計量とする．立体射影を通して，$S^n \setminus \{1 \text{点}\}$ と $\mathbf{R}^n$ を同一視すると，$g_0 = \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j$, $x \in \mathbf{R}^n$．したがって任意の $u \in C^\infty(S^n)$ に対して，$\widetilde{u} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ を

$$\widetilde{u}(x) = \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n-2}{n}} u(x)$$

とすると，

$$E(u^{\frac{4}{n-2}} g_0) = E(\widetilde{u}^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathbf{R}^n}) = \frac{4\frac{n-1}{n-2} \int_{\mathbf{R}^n} |d\widetilde{u}|^2 d\mu_{\mathbf{R}^n}}{\left(\int_{\mathbf{R}^n} \widetilde{u}^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_{\mathbf{R}^n} \right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

したがって，命題 7.2 を $\widetilde{u}$ に適用すれば，

$$E(u^{\frac{4}{n-2}} g_0) \geq n(n-1) \mathrm{Vol}(S^n(1))^{\frac{2}{n}}.$$

一方，明らかに，$E(g_0) = n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{\frac{2}{n}}$ なので，$Y(S^n, C_0) = \inf_{g \in C} E(g) = n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{\frac{2}{n}}$ となり，定理 B の証明を終わる．

このようにして，(S^n, C_0) で山辺の問題が解けることが示された．この場合，山辺計量は，$g = \varphi^* g_0$, $\varphi \in \mathrm{Conf}(S^n, C_0) = (S^n, C_0)$ の共形変換群，の形であることも，上の証明の等号条件を追っていけばわかる (命題 7.1 の等号条件は，$u(r) = \left(\frac{r^2+\lambda^2}{2\rho\lambda}\right)^{-\frac{n-2}{2}}$, ρ, $\lambda \in \mathbf{R}^+$ である)．これはまた次の定理からも分かる．

定理 7.3 (小畠 [86])**.** M を n 次元コンパクト連結多様体．$n \geq 3$．C を M の共形類とする．$\widetilde{g} \in C$ はアインシュタイン計量，$g \in C$ は $\mathrm{Vol}(M, g) = \mathrm{Vol}(M, \widetilde{g})$, $R_g =$ 定数 であるような計量とする．このとき

(i) $(M, C) = (S^n, C_0)$ ならば，$g = \varphi^* \widetilde{g}$ となるような $\varphi \in \mathrm{Conf}(S^n, C_0)$ が存在する．

(ii) $(M, C) \neq (S^n, C_0)$ ならば，$g = \widetilde{g}$．さらに，$\lambda_1(-\Delta_g) > \dfrac{R_g}{n-1}$ が成り立つ．

証明. $\widetilde{g} = u^{-2} g$, $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ となっているとする．$(\nabla^2 u)^\circ = \nabla^2 u - \frac{\Delta_g u}{n} g$ とおく．このとき，

$$(\nabla^2 u)^\circ = \frac{u}{2-n}(\mathrm{Ric}_g^\circ - \mathrm{Ric}_{\widetilde{g}}^\circ)$$

となる．ビアンキの恒等式と，この公式を使って，

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_g((\frac{R_g}{2} g - \mathrm{Ric}_g) \cdot du) &= \langle \frac{R_g}{2} g - \mathrm{Ric}_g, \nabla^2 u \rangle \\
&= \frac{n-2}{2n} R_g \Delta_g u - \langle \mathrm{Ric}_g^\circ, (\nabla^2 u)^\circ \rangle \\
&= \frac{n-2}{2n} R_g \Delta_g u + \frac{u}{n-2} \langle \mathrm{Ric}_g^\circ, \mathrm{Ric}_g^\circ - \mathrm{Ric}_{\widetilde{g}}^\circ \rangle.
\end{aligned}$$

仮定より，R_g は定数で，$\mathrm{Ric}_{\widetilde{g}}^\circ = 0$ であることに注意して，上の式を M 上で積分すれば，$\mathrm{Ric}_g^\circ = 0$，すなわち g もアインシュタイン計量であることがわかる．

したがって，$(M, C) = (S^n, C_0)$ のときは，g は定曲率計量になるので (i) が示された．$(M, C) \neq (S^n, C_0)$ のとき，$(\nabla^2 u)^\circ = 0$ の解 u は定数のみ ([68, p. 133]) なので，$\mathrm{Vol}(M, g) = \mathrm{Vol}(M, \widetilde{g})$ の条件から，$g = \widetilde{g}$．最後のラプラシアンの固有値に関する結果 (強安定性) は，[85] から分かる． □

注意 7.4. この定理を用いて，定理 B を証明する方法が，[74] にある．

系 7.5. アインシュタイン計量は山辺計量である．

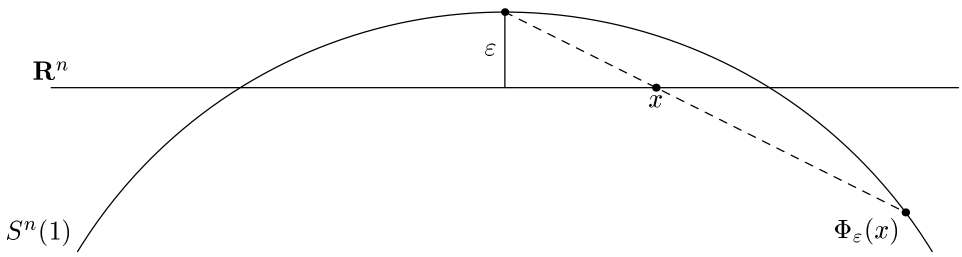
証明. g をアインシュタイン計量とする．定理 B より，$(M, g) \neq (S^n, g_0)$ のときを考えればよい．このときビショップの不等式から，$E(g) < n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{2/n}$．よって定理 B より，$Y(M, [g]) \leq E(g) < Y(S^n, C_0)$．よって定理 A より，共形類 $[g]$ は山辺計量を持つ．定理 7.3 より，この山辺計量は g の定数倍でなければならない．すなわち g 自身が山辺計量である． □

注意 7.6. $R_g =$ 定数 ≤ 0 な計量は山辺計量であることはすでに述べた (系 5.10)．上の系はスカラー曲率が正の場合にも使える点が大切である．

8　定理 C の証明 (1)

定理 C を 4 段階に分けて，細かな計算は省き証明の概略だけを見ることにする．第 1 段，第 2 段はオーバン [19]，第 3 段，第 4 段はシェーン [93] による．

第 1 段． $\varepsilon > 0$ とし $\Phi_\varepsilon\colon \mathbf{R}^n \to S^n(1)$ を次の図のように定める．



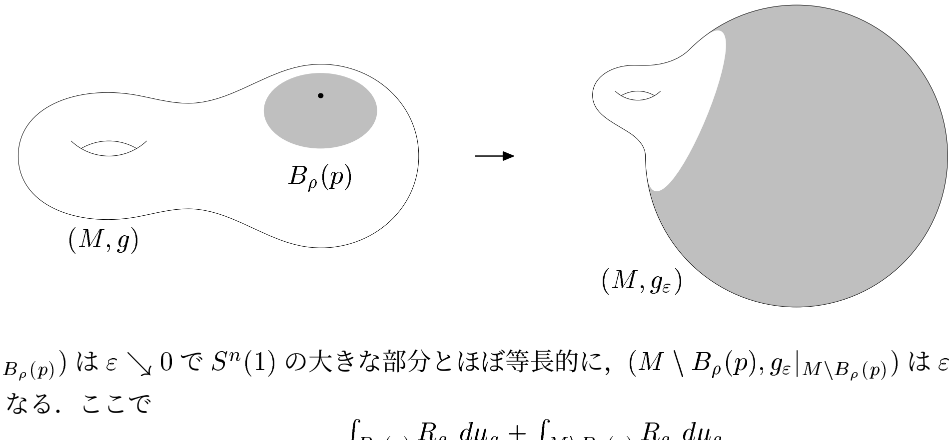
すると，

$$\Phi_\varepsilon^* g_0 = \left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+|x|^2}\right)^2 \delta_{ij}dx^i dx^j = \left(\left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+|x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)^{\frac{4}{n-2}} \delta_{ij}dx^i dx^j$$

となることに注意する．小さな $\rho > 0$ を 1 つ決めておき，$B_\rho = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, |x| < \rho\}$ とする．ε を十分小さくとれば，B_ρ は Φ_ε で $S^n(1)$ の大きな部分にうつる．この観察をもとに，似たような操作をコンパクトリーマン多様体 (M, g) で行う．$n = \dim M \geq 3$ とする．g を含む共形類を C と書く．$p \in M$ をひとつとめて，$x \in M$ に対して，$|x| = \mathrm{dist}_g(p, x)$ とする．$B_\rho(p) = \{x \in M \,|\, |x| < \rho\}$ とする．$\varphi_\varepsilon \in C^\infty(M)$ を

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+|x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} & \cdots\ x \in B_\rho(p) \\ \left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\rho^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} & \cdots\ x \notin B_\rho(p) \end{cases}$$

のようにとる．このままでは φ_ε は $B_\rho(p)$ の境界で滑らかにならないので，境界付近では適当になめらかにまるめたものとする．$g_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^{4/(n-2)} g \in C$ とすると，(M, g_ε) は下図のようになる．



$(B_\rho(p), g_\varepsilon|_{B_\rho(p)})$ は $\varepsilon \searrow 0$ で $S^n(1)$ の大きな部分とほぼ等長的に，$(M \setminus B_\rho(p), g_\varepsilon|_{M\setminus B_\rho(p)})$ は $\varepsilon \searrow 0$ でどんどん小さくなる．ここで

$$E(g_\varepsilon) = \frac{\int_{B_\rho(p)} R_{g_\varepsilon} d\mu_g + \int_{M\setminus B_\rho(p)} R_{g_\varepsilon} d\mu_g}{\left(\int_M d\mu_{g_\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{n}}} \tag{8.1}$$

を計算すると，$\varepsilon \searrow 0$ で，

(1) 分子第 1 項 $\to n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))$,
(2) 分子第 2 項 $\to \left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\rho^2}\right)^{n-2} = O(\varepsilon^{n-2})$,
(3) 分母 $\to \mathrm{Vol}(S^n(1))^{(n-2)/n}$,

となる．$n \geq 3$ より，分子第 2 項が 0 に収束することに注意すると，

$$Y(M,C) \leq E(g_\varepsilon) = n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{\frac{2}{n}} + O(\varepsilon) \tag{8.2}$$

となり，$\varepsilon \searrow 0$ として次の結果を得る．

命題 8.1． $n \geq 3$ のとき，任意の (M,C) に対して，$Y(M,C) \leq n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{\frac{2}{n}}$.

したがって，$Y(M,C) \geq n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{\frac{2}{n}}$ ならば，$Y(M,C) = n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{\frac{2}{n}}$ である．

第 2 段． 式 (8.2) の誤差項，すなわち $O(\varepsilon)$ の項，を詳しく見るとその成分は次のようになっている．

(1) 分子第 1 項から来るものは，$(B_\rho(p), g)$ とユークリッド球との違いである．$p \in M$ における曲率が，ε^2, ε^4,... の次数で出てくる．
(2) 分子第 2 項は，p から離れた部分の積分で，ε^{n-2} の次数で出てくる．
(3) 分母から生じる誤差は ε^n.

点 p で $\mathrm{Ric}_g = 0$ になるよう，あらかじめ $g \in C$ を選べば，(1) は ε^4 からはじまり，したがって，$4 < n-2$ では，誤差項の主要項から曲率の情報が得られることが期待できる．実際にはもっと強いことが分かり，オーバンは次の結果を得た．

定理 8.2 ([19])**．** $p \in M$ を任意にとり，$g \in C$ を，p で $\mathrm{Ric}_g = 0$ となるようにとる．このとき，

$$\text{誤差項} = \begin{cases} -c_n|W(p)|^2\varepsilon^4 + \cdots & (c_n > 0)\ n > 6 \text{ のとき}, \\ -c|W(p)|^2\varepsilon^4 \log\frac{1}{\varepsilon} + \cdots & (c > 0)\ n = 6 \text{ のとき}. \end{cases}$$

ここで，W はワイルの共形曲率テンソル．

したがって，$Y(M,C) \geq n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{\frac{2}{n}}$, $n \geq 6$ ならば (M,C) は共形平坦であることが示された．以上のことから，定理 C を示すには

$$\begin{cases} Y(M,C) = n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{\frac{2}{n}} \\ n = 3,4,5 \text{ または } n \geq 6 \text{ かつ } (M,C) \text{ は共形平坦} \end{cases} \tag{8.3}$$

の仮定のもとで，$(M,C) = (S^n, C_0)$ がいえればよいことになる．

第 3 段． 系 2.2，命題 5.12，および最大値の原理を使えば，次が分かる．

命題 8.3． $Y(M,C) > 0$ ならば，任意の $p \in M$ と $g \in C$ に対して，L_g のグリーン関数 $G_p \in C^\infty(M \setminus \{p\})$，すなわち，$L_g G_p = \delta_p$ を満たす関数で，$G_p > 0$ なものがとれる．

議論を進めるために，リー・パーカーが導入した，**共形的正規座標**について述べる．

定理 8.4 ([74], [30], [45])**．** $p \in M$ に対して，p のまわりの正規座標で，$\det(g_{ij}) = 1$ をみたすような，$g \in C$ が存在する．

この定理における計量 g に関する正規座標を共形的正規座標という．このとき，点 p において，$\mathrm{Ric}_g = 0$ となることに注意する．第 2 段における，オーバンの計算は，この共形的正規座標を用いると大変楽になる．その詳細は [74] にゆずる．共形的正規座標を用いると，L_g のグリーン関数は仮定 (8.3) のもとで，

$$G_p(x) = c_n(|x|^{2-n} + A + O''(|x|))$$

のように展開できる．ここで，$O''(|x|^p)$ は，$O(|x|^p)$ かつ 1 階微分が $O(|x|^{p-1})$, かつ 2 階微分が $O(|x|^{p-2})$ であることを表す．あとの都合上，グリーン関数は適当に定数倍をして

$$G_p(x) = |x|^{2-n} + A + O''(|x|)$$

となるようにしておく．関数 $\psi_\varepsilon \in C^\infty(M)$ を

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi_\varepsilon(x) & \cdots \ x \in B_\rho(p) \\ G_p(x) \text{ の定数倍} & \cdots \ x \notin B_\rho(p) \end{cases}$$

のようにとる．φ_ε のときと同様に，このままでは滑らかでないので，適当になめらかにまるめる．あらためて $g_\varepsilon = \psi_\varepsilon^{4/(n-2)} g \in C$ とおき，第 2 段と同様な計算をする．仮定 (8.3) のもとで，誤差項の主要部は ε^{n-2} の項から始まることがわかるが，実際，次が成り立つ．

定理 8.5 ([93])**.** 仮定 (8.3) のもとで，誤差項 $= -c(A + O(\rho))\varepsilon^{n-2} + \cdots$.

したがって，はじめに ρ を小さくとり，$\varepsilon \searrow 0$ とすれば，仮定 (8.3) のもとで，$A \le 0$ が言える．

第 4 段． (M, g), G_p は第 3 段のものとする．$(\hat{M}, \hat{g}) = (M \setminus \{p\}, {G_p}^{4/(n-2)} g)$ とする．このとき，

$$\hat{g} = (|x|^{2-n} + A + O''(|x|))^{\frac{4}{n-2}} (\delta_{ij} + O''(|x|^2)) dx^i dx^j$$

であるが，$y^i = x^i/|x|^2$ と変数変換して書くと，

$$\hat{g} = (1 + A|y|^{2-n} + O''(|y|^{1-n}))^{\frac{4}{n-2}} (\delta_{ij} + O''(|y|^{-2})) dy^i dy^j$$

となる．この形の計量は**漸近的平坦**であると呼ばれる．$n = 3$ または点 p の近傍で共形平坦 (上式の $O''(|y|^{-2})$ は 0 である) のとき，この展開に現れる定数 A は**全質量**と呼ばれるものに一致する．漸近的平坦なリーマン多様体に関して次の定理がある ($n > 7$ の場合の高次元の証明は未完成．第 10 章参照)．

定理 8.6 (正質量定理)**.** $(\hat{M}, \hat{g})$ を漸近的平坦なリーマン多様体で，$n = 3$ または無限遠の近傍で共形平坦とする．このとき，全質量 A に関して次が成立する．

(i) $R_{\hat{g}} \ge 0$ ならば $A \ge 0$.

(ii) $R_{\hat{g}} \ge 0$，$A = 0$ ならば，$(\hat{M}, \hat{g})$ はユークリッド空間.

この定理を認めてしまえば，$n \ne 4, 5$ の場合，定理 C の証明は次のように完結する．第 3 段と (i) から，$A = 0$ ($R_{\hat{g}} = 0$ に注意)．よって (ii) より，$(\hat{M}, \hat{g})$ はユークリッド空間．よって，$(M, C) = (S^n, C_0)$．次元 $n = 4, 5$ の場合，シェーンの原論文 [93] では，詰めの議論としてデリケートな摂動論を行っている．以下，$n = 4, 5$ の場合の証明を与える．ここでは，リー・パーカー [74] によるものに従う．

上記のテスト関数 $\psi_\varepsilon(x)$ を $\hat{M}$ 上の区分的に C^∞ 級な関数

$$\widetilde{\psi}_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi_\varepsilon(x)|x|^{n-2} G_p(x) & \cdots \ x \in B_\rho(p) \\ \left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + \rho^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \rho^{n-2} G_p(x) & \cdots \ x \notin B_\rho(p) \end{cases}$$

にとりかえる[*1]．ここで $\rho > 0$ は，$B_\rho(p)$ が p のまわりの共形的正規座標近傍に含まれるように十分小さく選んでいる．この $\widetilde{\psi}_\varepsilon(x)$ は，$(\hat{M}, \hat{g})$ 上でその漸近的平坦座標 $y = (y^1, \ldots, y^n) = (\frac{x^1}{|x|^2}, \ldots, \frac{x^n}{|x|^2})$ を使うと，

$$u_\varepsilon(y) = \begin{cases} \left(\frac{2/\varepsilon}{(1/\varepsilon)^2 + |y|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} & \cdots\ |y| \geq \frac{1}{\rho} \\ \left(\frac{2/\varepsilon}{(1/\varepsilon)^2 + (1/\rho)^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} & \cdots\ |y| \leq \frac{1}{\rho} \end{cases}$$

を考えていることと同値である．すなわち，$\hat{M}$ 上

$$\widetilde{\psi}_\varepsilon^{4/(n-2)} g = (u_\varepsilon G_p)^{4/(n-2)} g = u_\varepsilon^{4/(n-2)} \hat{g}$$

となる．このとき，次が成り立つ．

定理 8.7 ([74] の Proposition 7.1 と Lemma 9.7)**.** $n = 4, 5$ とする．このとき，

$$E(\widetilde{\psi}_\varepsilon^{4/(n-2)} g) = E(u_\varepsilon^{4/(n-2)} \hat{g}) \leq n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{\frac{2}{n}} - c\big(\mathfrak{m}(\hat{g}) + O(\varepsilon)\big)\varepsilon^{n-2}$$

となる．ここで $\mathfrak{m}(\hat{g})$ は，第 10 章の定義 10.2 で与えられる $(\hat{M}, \hat{g})$ の全質量を表す．

上記の議論と同様に，$\varepsilon \searrow 0$ とすれば，仮定 $Y(M, C) \geq n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{\frac{2}{n}}$ のもとで，$\mathfrak{m}(\hat{g}) \leq 0$ が言える．これと第 10 章で与えられる正質量定理（定理 10.6-(i)）をあわせると，$\mathfrak{m}(\hat{g}) = 0$ が導かれる．さらに定理 10.6-(ii) より，$(\hat{M}, \hat{g})$ はユークリッド空間になることが導かれ，$(M, C) = (S^n, C_0)$ となる．

[*1] $\widetilde{\psi}_\varepsilon$ は区分的に C^∞ 級な関数で，$\widetilde{\psi}_\varepsilon^{4/(n-2)} g$ も単に区分的に C^∞ 級な計量であるが，汎関数 E に自然な拡張として代入することができ，その値を考えることは意味をもつ．

9　定理 C の証明 (2)

この節では次を示し, $n \geq 6$ の場合の定理 C の証明を完結させる. n はこれまで通り多様体 M の次元を表す.

定理 9.1. (M, C) はコンパクトで共形平坦かつ $n \geq 6$ を満たすとする. このとき, 次が成立する.
(i) $Y(M, C) > 0$ なら $A \geq 0$. ただし, A は $g \in C$ に対する共形ラプラシアン L_g のグリーン関数 G_p の展開 $G_p(x) = |x|^{2-n} + A + O''(|x|)$ に現れる定数 A である.
(ii) $Y(M, C) > 0$, $A = 0$ なら (M, C) は標準的な共形類を持つ球面 (S^n, C_0) と共形的である.

注意 9.2. 命題 8.3 から, $Y(M, C) > 0$ のとき, 任意の $g \in C$ の共形ラプラシアン L_g に対するグリーン関数 G_p の存在がわかっている. $Y(M, C) > 0$ を満たす共形平坦な (M, C) をとり, $g \in C$ から $(\hat{M}, \hat{g}) = (M \setminus \{p\}, G_p^{\frac{4}{n-2}} g)$ として得られる漸近的平坦なリーマン多様体を $(\hat{M}, \hat{g})$ とする ($R_{\hat{g}} \equiv 0$ である). 上の定理から, このようにして得られた $(\hat{M}, \hat{g})$ に対し, 定理 8.6 が成り立っていることが分かる.

n 次元共形平坦多様体 (M, C) は, 局所的に n 次元ユークリッド空間, あるいは標準的計量 g_0 の共形類 C_0 を持つ球面 (S^n, C_0) と共形的である. すなわち, 任意の点に対し, その点のある近傍とその近傍から (S^n, C_0) の開集合への共形的な微分同相写像が存在する. もし, M が単連結で $n \geq 3$ なら, この局所微分同相写像を貼り合わせることにより, M 全体で定義された写像が得られる:

定理 9.3 (カイパー [67])**.** $n \geq 3$ とする. 単連結な n 次元共形平坦多様体 (M, C) に対し, 共形的な局所微分同相写像 $\Psi\colon M \to (S^n, C_0)$ が存在する. さらに, この Ψ は (S^n, C_0) の共形変換との合成を除いて一意的である.

この共形写像 Ψ は (M, C) の**展開写像**と呼ばれる.

例 9.4. $(\mathbf{R}^n, g_{\mathbb{E}})$, $S^{n-1}(1) \times \mathbf{R}$ $(n \geq 3)$, $S^p(1) \times H^q(-1)$ $(p, q \geq 2)$, $H^n(-1)$ は, いずれも共形平坦な単連結リーマン多様体である. ここで, $g_{\mathbb{E}}$ は $\mathbf{R}^n$ のユークリッド計量, $H^m(-1)$ は定曲率 -1 の m 次元双曲空間を表す. それぞれの多様体の展開写像の像は

$$\begin{aligned}
&\Phi(\mathbf{R}^n) = S^n \setminus \{1\text{ 点}\},\\
&\Phi(S^{n-1}(1) \times \mathbf{R}) = S^n \setminus \{2\text{ 点}\},\\
&\Phi(S^p(1) \times H^q(-1)) = S^n \setminus S_0^{q-1},\\
&\Phi(H^n(-1)) = S^n \text{ の半球}
\end{aligned}$$

となる. ただし, S_0^{q-1} は $S^n(1) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ と $\mathbf{R}^{n+1}$ の q 次元線形部分空間の交わりとして得られる $(q-1)$ 次元球面を表している.

コンパクトな多様体からコンパクトな多様体への局所微分同相写像が被覆写像になることに注意すれば, 定理 9.3 から直ちに次の系を得る.

系 9.5. コンパクトで単連結な共形平坦多様体は (S^n, C_0) に限る.

定理 9.1(ii) は, 仮定の下で M が単連結であることを示し, 系 9.5 を用いることによって証明される. M の基本群と定数 A の関係は, 普遍被覆空間のグリーン関数と被覆される多様体のグリーン関数を比較することに

より捉えられる．リーマン多様体 (M,g) と $p \in M$ に対し，$G_p \in C^\infty(M \setminus \{p\})$ が次の三つの条件を満たすとき，G_p は p を極に持つ**極小正値グリーン関数**であるという．

(1) G_p は L_g のグリーン関数．ただし，$G_p(x) = |x|^{2-n} + A + O''(|x|)$ となるように定数倍されているとする．

(2) $G_p > 0$.

(3) (1), (2) を満たす任意の G'_p に対し $G'_p \geq G_p$.

系 2.2 とデルタ関数 δ_p の測度への依存性に注意すれば，次は容易に示される．

補題 9.6. (M,g) をリーマン多様体，$u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ とする．G_p が L_g のグリーン関数であるとき，$u^{-1}(p)u^{-1}(x)G_p(x)$ は $L_{u^{\frac{4}{n-2}}g}$ のグリーン関数である．

この補題から極小正値グリーン関数の存在は，共形不変な性質である，すなわち (M,g) が極小正値グリーン関数を持つなら，$(M, u^{\frac{4}{n-2}}g)$ も極小正値グリーン関数を持つ，ということが分かる．また，命題 8.3 と上の補題とを合わせると次がしたがう．

命題 9.7. *M がコンパクトで $Y(M,C) > 0$ ならば，任意の p と任意の $g \in C$ に対して極小正値グリーン関数 G_p が一意に存在する．*

証明．命題 5.12 および補題 9.6 から，存在・一意性ともに $R_g > 0$ なる $g \in C$ について示せば十分である．命題 8.3 から正値グリーン関数 G_p は存在する．任意に正値グリーン関数 G'_p をとり，極の周りでのグリーン関数の挙動に注意すると，$v = G_p - G'_p$ は有界で $L_g v = 0$ を満たす関数であることが分かる．$R_g > 0$ としているので，このような関数は $v \equiv 0$ に限る．G_p は一意な正値グリーン関数であり，とくに，極小である． □

命題 9.8. *$(\overline{N}, \overline{g})$ を $R_{\overline{g}} > 0$ を満たすコンパクトな多様体とする．必ずしもコンパクトとは限らないリーマン多様体 (N,g) が，共形的な局所微分同相写像 $\Phi \colon N \to \overline{N}$ を持つならば，(N,g) には極小正値グリーン関数が存在する．*

証明．極小正値グリーン関数の存在の共形不変性から，$g = \Phi^*\overline{g}$ として考えてよい．$R_g > 0$ となるので，任意のプレコンパクトな開集合 $U \subset N$ における L_g のディリクレ最小固有値は正．したがって，$\{U_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ をプレコンパクトな開集合の列で $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} U_i = N$, かつ $p \in U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_i \subset \ldots$ を満たすものとすると

$$\begin{cases} L_g G_p^{(i)} = c\delta_p & \cdots\ U_i \text{ 上で}, \\ G_p^{(i)} = 0 & \cdots\ \partial U_i \text{ で}, \end{cases}$$

を満たす $G_p^{(i)}$ が一意に存在する．さらに $R_g > 0$ と最大値の原理により，$G_p^{(i)} > 0$ である．$G_p^{(i)}$ の定め方に注意して最大値の原理を適用することにより $0 < G_p^{(1)} \leq G_p^{(2)} \leq \cdots \leq G_p^{(i)} \leq \ldots$ が成り立つことも分かる．

一方，仮定から $(\overline{N}, \overline{g})$ には $\Phi(p)$ に極を持つ極小正値グリーン関数 $\overline{G}_{\Phi(p)}$ が存在している．$g = \Phi^*\overline{g}$ としているので，$\Phi^*\overline{G}_{\Phi(p)}$ は $\Phi^{-1}(\Phi(p))$(一点とは限らない) に極を持つ正値グリーン関数である．したがって，再び最大値原理から任意の $i \in \mathbf{N}$ に対し $\Phi^* G_{\Phi(p)} \geq G_p^{(i)}$ が成り立つ．これにより，$G_p = \lim_{i\to\infty} G_p^{(i)}$ が存在することが分かる．作り方から G_p は極小正値グリーン関数である． □

この命題と定理 9.3 から，単連結な共形平坦多様体は極小正値グリーン関数を持つことが分かる．また，$R_g > 0$ を満たすコンパクトリーマン多様体 (M,g) のリーマン普遍被覆空間もまた極小正値グリーン関数を持つ．

命題 9.9. (M,g) をコンパクトなリーマン多様体で $R_g>0$ を満たしているとする．$\varphi\colon(\widetilde{M},\widetilde{g})\to(M,g)$ をリーマン普遍被覆写像，$G_{\varphi(p)}$ を L_g の $\varphi(p)$ に極を持つ極小正値グリーン関数とする．このとき，

$$\varphi^*G_{\varphi(p)}=\sum_{\gamma\in\pi_1(M)}\gamma_*\widetilde{G}_p$$

が成立する[*2]．ここで，$\widetilde{G}_p$ は $L_{\widetilde{g}}$ の $p\in\widetilde{M}$ に極を持つ極小正値グリーン関数であり，基本群 $\pi_1(M)$ の元は被覆変換として $\widetilde{M}$ に作用している．

証明. 命題 9.8 の証明から $\widetilde{G}_p\le\varphi^*G_{\varphi(p)}$ である．任意の有限部分集合 $P\subset\pi_1(M)$ をとり，最大値の原理を用いると，$\sum_{\gamma\in P}\gamma_*\widetilde{G}_p\le\varphi^*G_{\varphi(p)}$ が成り立つことが分かる．$P\subset\pi_1(M)$ は任意なので，結局，$\sum_{\gamma\in\pi_1(M)}\gamma_*\widetilde{G}_p\le\varphi^*G_{\varphi(p)}$ が成り立つ．

一方，$\sum_{\gamma\in\pi_1(M)}\gamma_*\widetilde{G}_p$ は $\pi_1(M)$ の作用で不変な関数なので，M 上の正値グリーン関数 $G'_{\varphi(p)}$ を定める．命題 9.7 の証明からわかるように，M 上の正値グリーン関数は一意なので，$G'_{\varphi(p)}=G_{\varphi(p)}$ でなくてはならない．以上から $\sum_{\gamma\in\pi_1(M)}\gamma_*\widetilde{G}_p=\varphi^*G_{\varphi(p)}$ が導かれる． □

命題 9.10. (N,g) は命題 9.8 の条件を満たしているとする．このとき L_g の極小正値グリーン関数 G_p に対し，

$$\int_N G_p d\mu_g<\infty$$

が成立する．

証明. $\{U_i\}$, $G_p^{(i)}$ を命題 9.8 の証明にあるものとし，$G_p^{(i)}$ の構成法を思い出す．$R_g>0$ としてよかったので，各 U_i で

$$\begin{cases} L_gv_i=-4\frac{n-1}{n-2}\Delta_gv_i+R_gv_i=1 & \cdots\ U_i\ \text{上で}, \\ v_i=0 & \cdots\ \partial U_i\ \text{で}, \end{cases}$$

を満たす v_i をとることができる．$x_i\in U_i$ で v_i が最大値をとるとすると，$-\Delta v_i(x_i)\ge 0$ なので，$R_g(x_i)\max v_i\le 1$．$\overline{N}$ はコンパクトで $g=\Phi^*\overline{g}$ としていたので，$\min R_g=\min R_{\overline{g}}=c'$ が存在し $c'>0$ である．$L_gG_p^{(i)}=c\delta_p$ だったので，

$$\begin{aligned}\frac{1}{c'}&\ge\max v_i\ge v_i(p)\\ &=\int_N\delta_pv_id\mu_g\\ &=\int_{U_i}\frac{1}{c}(L_gG_p^{(i)})v_id\mu_g\\ &=\int_{U_i}\frac{1}{c}G_p^{(i)}(L_gv_i)d\mu_g\\ &=\int_{U_i}\frac{1}{c}G_p^{(i)}d\mu_g\end{aligned}$$

が任意の $i\in\mathbf{N}$ に対して成り立つ．$i\to\infty$ とすれば

$$\int_N G_pd\mu_g\le\frac{c}{c'}$$

を得る． □

[*2] この重ね合わせの原理は，$(\widetilde{M},\widetilde{g})$ 上の幾何解析に様々な形で適用可能である [4], [6], [11].

例 9.11. 標準的球面 $S^n(1) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ は, 命題 9.7 より, 極小正値グリーン関数 H_p を持つ. 具体的な表示は $H_p(x) = c|x-p|^{2-n}_{\mathbf{R}^{n+1}}$ で与えられる. ここで $|x-p|_{\mathbf{R}^{n+1}}$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ における x と p の距離である. また, ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^n, g_{\mathbb{E}})$ も $S^n(1)$ への展開写像 Φ を持つこと, および命題 9.8 から, 極小正値グリーン関数を持つ. Φ は $S^n(1) \setminus$ 北極点 からの立体射影の逆写像になっている. $u^{\frac{4}{n-2}}\Phi^* g_0 = g_{\mathbb{E}}$ により $\mathbf{R}^n$ 上の関数 u を定めると, 補題 9.6 より, $u^{-1}(q)u^{-1}(x)\Phi^* H_{\Phi(q)}(x)$ は $L_{g_{\mathbb{E}}} = -4\frac{n-1}{n-2}\Delta_{g_{\mathbb{E}}}$ のグリーン関数になるはずである. 実際, $u^{-1}(x)\Phi^* H_{\Phi(q)}(x) = c|x-q|^{2-n}$ となることは計算により容易に確かめられる (これが $(\mathbf{R}^n, g_{\mathbb{E}})$ の極小正値グリーン関数になっている).

定義 9.12 (シェーン・ヤウ [98]). (N, g) は極小正値グリーン関数 G_p を持つとする. このとき,

$$d(N,g) = \inf\left\{ d \geq 0 \,\middle|\, \int_{N\setminus U} G_p^{\frac{2d}{n-2}} d\mu_g < \infty \text{ が } p \text{ の任意の近傍 } U \text{ で成り立つ} \right\}$$

と定める.

例 9.13. $S^{n-1}(1) \times \mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$, $S^p(1) \times H^q(-1)$ $(p, q \geq 2)$, $H^n(-1)$ はそれぞれ $S^n(1)$ の開集合と共形的に微分同相であった (例 9.4). したがって, 命題 9.8 より, いずれの多様体も極小正値グリーン関数を持つ. それぞれについて $d(N, g)$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
&d(S^n(1)) = d(S^{n-1}(1) \times \mathbf{R}) = 0, \\
&d(\mathbf{R}^n) = \frac{n}{2}, \\
&d(S^p(1) \times H^q(-1)) = q - 1 \ (p, q \geq 2), \\
&d(H^n(-1)) = \frac{(n-2)(n-1)}{n}
\end{aligned}$$

となる.

$d(N, g)$ は, グリーン関数の減衰の様子を通して (N, g) の広がり具合を捉えている不変量であり, $d(N, g)$ が大きいほど広がり具合 (無限遠の大きさ) は大きいことになる. (上の例においては, $\mathbf{R}^n$ と H^{n-1} 以外は $d(N, g)$ と Φ の像の補集合の次元が一致している.) 実際, シェーン・ヤウは次を示している.

命題 9.14 ([98, Proposition 2.5]). (N, g) が $S^n(1)$ の連結開集合と共形的な完備リーマン多様体で, $\partial N \subset S^n(1)$ のニュートン容量が 0 ならば, ∂N のハウスドルフ次元は $d(N, g)$ 以下である*3.

しかしながら, $d(N, g)$ は共形不変量ではない. 無限遠の様子は互いに共形的な計量同士であっても大きく異なるからである. しかし, コンパクト多様体のリーマン被覆空間については, 次が成立する.

命題 9.15. M をコンパクト多様体, g_1, g_2 を M 上の互いに共形的なリーマン計量で $R_{g_1} > 0$ とする. このとき, 任意の被覆 $\varphi\colon \widetilde{M} \to M$ に対し, $d(\widetilde{M}, \varphi^* g_1) = d(\widetilde{M}, \varphi^* g_2)$ が成立する.

証明. 命題 9.8 から存在が保証される $\varphi^* g_i$ に対応する極小正値グリーン関数を $\widetilde{G}_i$ とする. 補題 9.6 から, $\widetilde{G}_1/\widetilde{G}_2$ および $\widetilde{G}_2/\widetilde{G}_1$ は有界な正値関数である. □

次のシェーン・ヤウによる定理は, $d(N, g)$ で測った無限遠の大きさが小さいときには, 展開写像 Φ は単射である (Φ の像は球面を何重にも巻くほど大きくはなれない) ことを主張している. この定理から $n \geq 6$ の場合の定理 C が導かれる. 定理の主張を述べるために幾つか記号の準備をしておく.

---

*3 $d(N, g)$ と Φ の像の補集合のハウスドルフ次元との関係については [98, Theorem 4.7] も参照のこと.

(N,g) が $S^n(1)=(S^n,g_0)$ への共形的な局所微分同相写像 Φ を持つとき, もちろん g は Φ^*g_0 と共形的であり, $g=u^{\frac{4}{n-2}}\Phi^*g_0$ と表せる. L_g のグリーン関数を G_p とする. N 上には $\overline{G}_p=u^{-1}(p)u^{-1}\Phi^*H_{\Phi(p)}$ により定義されるグリーン関数も存在する. ここで, $H_{\Phi(p)}$ は $\Phi(p)$ に極を持つ L_{g_0} のグリーン関数である. $\overline{G}_p$ は $\Phi^{-1}(\Phi(p))$ に極を持つ (極は複数あるかもしれない) グリーン関数で, 最大値の原理により $\overline{G}_p\geq G_p$ となることに注意する. Φ が単射であることと, 任意の $p\in N$ に対し $\overline{G}_p$ の極が 1 つだけであることとは同値である.

定理 9.16 (シェーン・ヤウ [98])**.** (N,g) を完備な n 次元共形平坦多様体で, $n\geq 5$, R_g は下に有界とする. また, $S^n(1)$ への共形的局所微分同相写像 Φ を持つとする. $d(N,g)<\frac{(n-2)^2}{n}$ ならば, 任意の $p\in N$ に対し $\overline{G}_p=G_p$ である. とくに, Φ は単射である[*4].

この定理をひとまず認めて, さきに $n\geq 6$ の場合の定理 C の証明 (すなわち定理 9.1 の証明) を完結させておこう.

定理 9.1 の証明. (M,C) は共形平坦なので, $g\in C$ として $p\in M$ のまわりで平坦な計量をとる. このとき, p のまわりで

$$G_p(x)=|x|^{2-n}+A+O(|x|),\ |x|=\mathrm{dist}(p,x)$$

と表せる. $\varphi\colon(\widetilde{M},\widetilde{g})\to(M,g)$ をリーマン普遍被覆写像とする. $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ はもちろん共形平坦で, 完備, かつ $R_{\widetilde{g}}$ は下に有界である. $\widetilde{p}\in\varphi^{-1}(p)\subset\widetilde{M}$ をとり, $L_{\widetilde{g}}$ の $\widetilde{p}$ に極を持つ極小正値グリーン関数を $\widetilde{G}_{\widetilde{p}}$ とする. また, $\widetilde{M}$ は $S^n(1)$ への展開写像 Φ を持つので, 定理 9.16 にあるような $\overline{G}_{\widetilde{p}}$ をとることができる. $Y(M,C)>0$ を仮定しているので, 命題 5.12 より $g'\in C$ を $R_{g'}\geq c>0$ を満たすようにとることができる. 命題 9.10 と命題 9.15 から, $d(\widetilde{M},\widetilde{g})=d(\widetilde{M},\widetilde{g}')\leq\frac{n-2}{2}$. $n\geq 5$ より, $\frac{(n-2)^2}{n}=\frac{n-2}{n}(n-2)>\frac{n-2}{2}$ なので, 定理 9.16 から $\overline{G}_{\widetilde{p}}=\widetilde{G}_{\widetilde{p}}$ である. さらに, $\widetilde{g}$ は $\widetilde{p}$ のまわりで平坦なので局所的に例 9.11 の状況になっており, $\widetilde{p}$ の近くで $\widetilde{G}_{\widetilde{p}}=|x|^{2-n}$ と表せる. 一方, 命題 9.9 より

$$\varphi^*G_p=\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma_*\widetilde{G}_{\widetilde{p}}=\frac{1}{|x|^{n-2}}+\sum_{\gamma\neq\mathrm{id}}\gamma_*\widetilde{G}_{\widetilde{p}}$$

である. よって, $A=\sum_{\gamma\neq\mathrm{id}}(\gamma_*\widetilde{G}_{\widetilde{p}})(\widetilde{p})$. $\widetilde{G}_{\widetilde{p}}>0$ だから $A\geq 0$ である. これで (i) が示された.

$A=0$ のとき, $\pi_1(M)\neq\{\mathrm{id}\}$ とすると矛盾が生じる. よって, M は単連結. 定理 9.3 から (M,C) は (S^n,C_0) と共形同値である. □

以下, この節は定理 9.16 の証明に充てられる. その証明は 3 つのステップからなる技巧的なもので, 必ずしも見通しは良くない. そこで, 都合の良い仮定の下では, G_p の可積分性に対する適当な仮定から $G_p=\overline{G}_p$ が比較的容易にしたがうことを先に見ておくことにしよう.

命題 9.17. (N,g) はコンパクトな共形平坦多様体のリーマン被覆空間で, $S^n(1)$ への共形的局所微分同相写像 Φ を持つとする. また, ある $p\in N$ に対し, $P=\Phi^{-1}(\Phi(p))$ は N の離散部分集合だとする. さらに, ある $\varepsilon_0>0$ と正の実数の発散列 $\{r_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ が存在し, $\mathbf{B}_{\varepsilon_0}(P)\cap\partial\mathbf{B}_{r_i}(p)=\emptyset$ かつ $\partial\mathbf{B}_{r_i}(0)$ は滑らかになっているとする. ここで, $\mathbf{B}_r(A)$ は集合 A から g に関する距離が r 以下の点の集合である. このとき, $d(N,g)<n-4$ なら $\overline{G}_p=G_p$ である.

---

*4 この展開写像 Φ の単射性は, コンパクトで $Y(M,C)>0$ なる共形平坦な (M,C) の普遍被覆多様体 $(\widetilde{M},\widetilde{C})$ に対しては, $n\geq 3$ で成立する [98], [1].

証明. $\overline{g}=\overline{G}_p^{\frac{4}{n-2}}g$ とおく. $g=u^{\frac{4}{n-2}}\Phi^*g_0$ と表していることに注意すると,

$$\begin{aligned}\overline{g}&=(u^{-1}(p)u^{-1}(x)\Phi^*H_{\Phi(p)}(x))^{\frac{4}{n-2}}g\\&=(u^{-1}(p)\Phi^*H_{\Phi(p)}(x))^{\frac{4}{n-2}}u^{-\frac{4}{n-2}}g\\&=u^{-1}(p)\Phi^*(H_{\Phi(p)}(\Phi(x))^{\frac{4}{n-2}}g_0)\\&=u^{-1}(p)\Phi^*g_{\mathbb{E}}\end{aligned}$$

となるので, $\overline{g}$ は平坦な計量である. ただし, 完備とは限らない. G_p は極小正値グリーン関数なので, $v=G_p/\overline{G}_p$ としたとき,

$$\begin{cases}v=0 & \cdots\ P\setminus\{p\}\text{ で}\\ v=1 & \cdots\ p\text{ で}\\ 0\le v\le 1 & \cdots N\text{ 上で}\end{cases}$$

となっていることが分かる. ただし, P は $\overline{G}_p$ の極の集合を表す. さらに, $N\setminus P$ 上で $R_{\overline{g}}=0$ が成り立っているので,

$$-4\frac{n-1}{n-2}\Delta_{\overline{g}}v=L_{\overline{g}}v=v^{\frac{n+2}{n-2}}R_{v^{\frac{4}{n-2}}\overline{g}}=v^{\frac{n+2}{n-2}}R_{G_p^{\frac{4}{n-2}}g}=\overline{G}_p^{-\frac{n+2}{n-2}}L_gG_p=0.$$

これより, $\Delta_{\overline{g}}dv=0$ がしたがう. すなわち, dv は $\overline{g}$ に関する調和 1 形式である. 以下で, dv は $\overline{g}$ に関して平行であることを示し, $v\equiv 1$ を導く.

以下, $\overline{\nabla}$, ∇ はそれぞれ $\overline{g}$, g に関する共変微分を表すとし, $\Delta_{\overline{g}}=\overline{\Delta}$ とする. $\mathrm{Ric}_{\overline{g}}=0$, $\overline{\Delta}dv=0$ に注意してボホナーの公式を適用すると

$$\frac{1}{2}\overline{\Delta}|dv|^2_{\overline{g}}=|\overline{\nabla}dv|^2_{\overline{g}}+\mathrm{Ric}_{\overline{g}}(\overline{\nabla}v,\overline{\nabla}v)+\overline{g}(\Delta_{\overline{g}}dv,dv)=|\overline{\nabla}dv|^2_{\overline{g}}.$$

したがって, $N\setminus P$ の任意のプレコンパクトな開集合 U において

$$\int_U\overline{\Delta}|dv|^2_{\overline{g}}d\mu_{\overline{g}}=2\int_U|\overline{\nabla}dv|^2_{\overline{g}}d\mu_{\overline{g}}$$

が成り立つ. ここで, U を ∂U が滑らかな開集合にとって, 左辺にグリーンの公式を適用すると,

$$\begin{aligned}2\int_U|\overline{\nabla}dv|^2_{\overline{g}}d\mu_{\overline{g}}&=\int_{\partial U}\overline{g}(\nu,\overline{\nabla}|dv|^2_{\overline{g}})dS_{\overline{g}}\\&\le\int_{\partial U}|\overline{\nabla}|dv|^2_{\overline{g}}|_{\overline{g}}dS_{\overline{g}}=\int_{\partial U}\overline{G}_p^{\frac{-2}{n-2}}\left|\nabla\overline{G}_p^{\frac{-4}{n-2}}|dv|^2_g\right|_g\overline{G}_p^{\frac{2n-2}{n-2}}dS_g\\&=\int_{\partial U}\overline{G}_p^2\left|\nabla\overline{G}_p^{\frac{-4}{n-2}}|dv|^2_g\right|_g dS_g\end{aligned}$$

を得る. ただし, ν は ∂U の単位外法線ベクトル, dS_g, $dS_{\overline{g}}$ は, それぞれ g, $\overline{g}$ が ∂U に定める測度を表す. ここで, $U=\mathbf{B}_{r_i}(p)\setminus\overline{\mathbf{B}_\varepsilon(P)}$ とし, $U\cap P$ が有限集合になることと, G_p, $\overline{G}_p$ がそれぞれの極の周りで極からの g に関する距離 r に対して $r^{2-n}+$ (有界関数) という挙動をすることに注意すると, $\varepsilon\searrow 0$ で,

$$\int_{\partial\mathbf{B}_\varepsilon(P)\cap\mathbf{B}_{r_i}(p)}\overline{G}_p^2\left|\nabla\overline{G}_p^{\frac{-4}{n-2}}|dv|^2_g\right|_g dS_g\to 0$$

となることが分かる (p の周りでは $v\sim 1+cr^{n-2}$ である). よって,

$$2\int_{\mathbf{B}_{r_i}(p)}|\overline{\nabla}dv|^2_{\overline{g}}d\mu_{\overline{g}}\le\int_{\partial\mathbf{B}_{r_i}(p)}\overline{G}_p^2\left|\nabla\overline{G}_p^{\frac{-4}{n-2}}|dv|^2_g\right|_g dS_g$$

が成立する． ここで, (N,g) がコンパクトな共形平坦多様体のリーマン被覆空間であること, $N\setminus P$ で $L_g\overline{G}_p=0$ であること, および $N\setminus\{p\}$ で $L_gG_p=0$ であることに注意すれば, シャウダー評価 (定理 2.9 の類似) と勾配評価 ([31, Theorem 6]) を用いることにより, 固定した $\varepsilon>0$ に対して, ある $c>0$ が存在し,

$$\begin{cases}|\nabla\overline{G}_p|_g,\ |\nabla\nabla\overline{G}_p|_g\le c\overline{G}_p & \cdots N\setminus\mathbf{B}_\varepsilon(P)\text{ で},\\ |\nabla G_p|_g,\ |\nabla\nabla G_p|_g\le cG_p & \cdots N\setminus\mathbf{B}_\varepsilon(P)\text{ で},\end{cases}$$

が成立することが分かる．したがって, $N\setminus\mathbf{B}_{\varepsilon_0}(P)$ において, ある定数 $c'>0$ が存在し

$$|\nabla G_p^\alpha\overline{G}_p^\beta|=|\alpha G_p^{\alpha-1}\nabla G_p\overline{G}_p^\beta+\beta G_p^\alpha\overline{G}_p^{\beta-1}\nabla\overline{G}_p|\le c'G_p^\alpha\overline{G}_p^\beta$$

が成り立つことになる (2 階微分についても同様である)．今, $\partial\mathbf{B}_{r_i}(p)\cap\mathbf{B}_{\varepsilon_0}(P)=\emptyset$ を仮定しているので, 適当な定数 c'' に対し

$$|dv|^2,\ |\nabla|dv|^2|\le c''G_p^2\overline{G}_p^{-2}$$

が成り立つことに注意して, $G_p\le\overline{G}_p$ を思い出すと, 適当に c をとれば

$$\int_{\mathbf{B}_{r_i}(p)}|\overline{\nabla}dv|_{\overline{g}}^2d\mu_{\overline{g}}\le c\int_{\partial\mathbf{B}_{r_i}(p)}G_p^2\overline{G}_p^{-\frac{4}{n-2}}dS_g\le c\int_{\partial\mathbf{B}_{r_i}(p)}G_p^{\frac{2n-8}{n-2}}dS_g$$

となることが分かる．ここで, $d(N,g)$ に関する仮定から

$$\int_N G_p^{\frac{2}{n-2}(n-4)}d\mu_g=\int_0^\infty\left(\int_{\partial\mathbf{B}_r(p)}G_p^{\frac{2n-8}{n-2}}dS_g\right)dr<\infty$$

であるから,

$$\int_{\mathbf{B}_{r_i}(p)}|\overline{\nabla}dv|_{\overline{g}}^2d\mu_{\overline{g}}\le c\int_{\partial\mathbf{B}_{r_i}(p)}G_p^{\frac{2n-8}{n-2}}dS_g\to0\ (i\to\infty).$$

よって, dv は平坦計量 $\overline{g}$ に関して平行である．したがって, v は $\overline{g}$ に関するユークリッド座標に関して一次関数である．とくに, p の周りに入るユークリッド座標は, p の近傍をユークリッド空間からコンパクト集合を除いたものと同一視して得られるものであることに注意し, $0\le v\le1$ で $v(p)=1$ であることを思い出せば, $v\equiv1$ がしたがう． □

注意 9.18. 一般の (N,g) は「P が離散集合」あるいは「ある ε_0 と正の実数の発散列 $\{r_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ が存在し, $\mathbf{B}_{\varepsilon_0}(P)\cap\partial\mathbf{B}_{r_i}(p)=\emptyset$ が成り立つ」を満たさないし, 命題中の $d(N,g)$ に関する仮定は定理 9.16 より強いことを注意しておく．上の命題の証明のポイントは U 上での $|\overline{\nabla}dv|_{\overline{g}}^2$ の積分値が ∂U における G_p のべき乗の積分値で抑えられるという点にある．一般には, 極の周りの v の挙動の一様なコントロールができないため, 定理 9.16 は, 上の議論より遥かに複雑な手順を踏んで証明されるが, $|\overline{\nabla}dv|$ に関する積分量が 0 になることを G_p の可積分性の仮定から導くことには変わりない．

定理 9.16 の証明．第 1 段． 以下, $\overline{\nabla}$, ∇ はそれぞれ $\overline{g}$, g に関する共変微分を表すとし, $|\overline{\nabla}v|^2=\overline{g}(\overline{\nabla}v,\overline{\nabla}v)$, $|\nabla v|^2=g(\nabla v,\nabla v)$ とする．また, $\overline{\Delta}=\Delta_{\overline{g}}$ と表す．$\mathrm{Ric}_{\overline{g}}=0$, $\overline{\Delta}dv=0$(命題 9.17 の証明参照) に注意してボホナーの公式を適用すると

$$\begin{aligned}\frac12\overline{\Delta}|\overline{\nabla}v|^2&=|\overline{\nabla}\overline{\nabla}v|^2+\mathrm{Ric}_{\overline{g}}(\overline{\nabla}v,\overline{\nabla}v)+\overline{g}(\overline{\Delta}dv,dv)\\&=|\overline{\nabla}\overline{\nabla}v|^2\\&\ge\frac{n}{n-1}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla}v||^2\end{aligned}$$

を得る (最後の不等号については [31], [83] を参照). この不等式に注意して $\overline{\Delta}|\overline{\nabla}v|^{\alpha}$ を計算すると,

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}|\overline{\nabla}v|^{\alpha} &= \alpha(\alpha-1)\left|\overline{\nabla}v\right|^{\alpha-2}\left|\overline{\nabla}\left|\overline{\nabla}v\right|\right|^{2}+\alpha\left|\overline{\nabla}v\right|^{\alpha-1}\overline{\Delta}\left|\overline{\nabla}v\right| \\ &= \left|\overline{\nabla}v\right|^{\alpha-2}\left\{(\alpha^{2}-\alpha)\left|\overline{\nabla}\left|\overline{\nabla}v\right|\right|^{2}+\frac{\alpha}{2}\overline{\Delta}\left|\overline{\nabla}v\right|^{2}-\alpha\left|\overline{\nabla}\left|\overline{\nabla}v\right|\right|^{2}\right\} \\ &\geq \alpha\left(\alpha-\frac{n-2}{n-1}\right)|\overline{\nabla}v|^{\alpha-2}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla}v||^{2}\end{aligned}$$

を得る. $\alpha > \frac{n-2}{n-1}$ にとる. $\varphi \in C^{\infty}(N)$ を $\operatorname{supp}\varphi$ がコンパクトで P とは交わりを持たないようにとり, 部分積分をすると,

$$\begin{aligned}\int \varphi^{2}|\overline{\nabla}v|^{\alpha-2}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla}v||^{2}d\mu_{\overline{g}} &\leq c\int \varphi^{2}\overline{\Delta}|\overline{\nabla}v|^{\alpha}d\mu_{\overline{g}} \\ &= -2c\int \overline{g}(\varphi\overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla}|\overline{\nabla}v|^{\alpha})d\mu_{\overline{g}} \\ &\leq 2c\alpha\int |\varphi||\overline{\nabla}v|^{\alpha-1}|\overline{\nabla}\varphi||\overline{\nabla}|\overline{\nabla}v||d\mu_{\overline{g}}\end{aligned}$$

が成り立つ. 右辺の被積分関数を $a = |\overline{\nabla}v|^{\frac{\alpha}{2}}|\overline{\nabla}\varphi|$, $b = |\varphi||\overline{\nabla}v|^{\frac{\alpha-2}{2}}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla}v||$ と分け, $ab \leq \frac{1}{2\varepsilon}a^{2}+\frac{\varepsilon}{2}b^{2}$ を用いて b を左辺に吸収させ, 定数 c を適当にとり替えれば,

$$\int \varphi^{2}|\overline{\nabla}v|^{\alpha-2}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla}v||^{2}d\mu_{\overline{g}} \leq c\int |\overline{\nabla}\varphi|^{2}|\overline{\nabla}v|^{\alpha}d\mu_{\overline{g}} \tag{9.1}$$

を得る. $d\mu_{\overline{g}} = \overline{G}_{p}^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_{g}$ と書き換え, $\alpha = \frac{2(n-2)}{n}$ とする. $n \geq 3$ なら $\alpha > \frac{n-2}{n-1}$ なので, (9.1) が成り立っており,

$$(9.1)\text{ の左辺} \leq c\int_{N}|\nabla\varphi|^{2}\overline{G}_{p}^{\alpha}|\nabla v|^{\alpha}d\mu_{g} \tag{9.2}$$

と書き換えられる. ここまで $\operatorname{supp}\varphi$ が P と交わりを持たないことを仮定してきたが, 実はこの仮定は不要であることを見よう. コンパクトな台をもつ φ を $0 \leq \varphi \leq 1$ を満たすようにとり, $P' = \operatorname{supp}\varphi \cap P$ とする. P' は有限集合である. カットオフ関数 $\xi\colon N \to \mathbf{R}$ を, $0 \leq \xi \leq 1$ で

$$\xi(x) = \begin{cases} 0 & \cdots x \in \mathbf{B}_{\frac{\eta}{2}}(P') \text{ のとき}, \\ 1 & \cdots x \notin \mathbf{B}_{\eta}(P') \text{ のとき}, \end{cases}$$

かつ, ある定数 c が存在し $|\nabla\xi| \leq c\eta^{-1}$ を満たしているようにとる. $\operatorname{supp}(\xi\varphi) \cap P = \emptyset$ なので (9.2) から

$$\begin{aligned}\int \xi^{2}\varphi^{2}|\overline{\nabla}v|^{\alpha-2}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla}v||^{2}d\mu_{\overline{g}} &\leq c\int_{N}|\nabla(\xi\varphi)|^{2}\overline{G}_{p}^{\alpha}|\nabla v|^{\alpha}d\mu_{g} \\ &\leq c\int_{\mathbf{B}_{\eta}(P')}|\nabla\xi|^{2}\overline{G}_{p}^{\alpha}|\nabla v|^{\alpha}d\mu_{g}+c\int_{N}|\nabla\varphi|^{2}\overline{G}_{p}^{\alpha}|\nabla v|^{\alpha}d\mu_{g}\end{aligned}$$

が成り立っている. $p' \in P$ からの g に関する距離を r で表すと, p' の近くでは $\overline{G}_{p}^{\alpha}|\nabla v|^{\alpha} = O(r^{-\alpha})$ である. したがって, 最後の辺の第 1 項は, 適当な定数 c', c'', c''' に対し

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{B}_{\eta}(P')}|\nabla\varphi|^{2}\overline{G}_{p}^{\alpha}|\nabla v|^{\alpha}d\mu_{g} &\leq \int_{0}^{\eta}\left(\int_{\partial\mathbf{B}_{r}(p')}c'\eta^{-2}r^{-\alpha}dS_{r}\right)dr \\ &\leq \int_{0}^{\eta}c''\eta^{-2}r^{n-1-\alpha}dr \\ &\leq c'''\eta^{n-2-\alpha}\end{aligned}$$

となる. ただし, dS_r は $\partial\mathbf{B}_r(p')$ に g から定まる測度である. $n \geq 3$ より $\alpha < n-2$ なので, $\eta \searrow 0$ でこの積分は 0 に収束する. また, $\overline{G}_p^{\alpha}|\nabla v|^{\alpha} = O(r^{-\alpha})$ から, 第 2 項の積分が収束することも分かる. したがって, $\operatorname{supp}\varphi$ と P が交わりをもっても (9.2) の右辺は意味を持つ. さらに, $\eta \searrow 0$ で左辺の積分も収束し,

$$\int \xi^2\varphi^2|\overline{\nabla} v|^{\alpha-2}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla} v||^2 d\mu_{\overline{g}} \to \int \varphi^2|\overline{\nabla} v|^{\alpha-2}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla} v||^2 d\mu_{\overline{g}}$$

となるので, $\operatorname{supp}\varphi$ と P が交わりをもっても, (9.2) の不等式が成立することが分かる. そこで, $\varphi\colon N \to \mathbf{R}$ を, $0 \leq \varphi \leq 1$ で,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \cdots x \in \mathbf{B}_{\frac{\sigma}{2}}(p) \text{ のとき}, \\ 0 & \cdots x \in N \setminus \mathbf{B}_{\sigma}(P) \text{ のとき}, \end{cases}$$

かつ, $|\nabla\varphi| \leq c\sigma^{-1}$ となるようにとる. 定数 c を適当にとり直すことにより,

$$(9.1) \text{ の左辺} \leq c\sigma^{-2}\int_{\mathbf{B}_{\sigma}(p)\setminus\mathbf{B}_{\frac{\sigma}{2}}(P)} \overline{G}_p^{\alpha}|\nabla v|^{\alpha} d\mu_g.$$

さらに, $\alpha < 2$ から

$$|\overline{G}_p\nabla v|^{\alpha} = |G_p(\nabla\log G_p - \nabla\log\overline{G}_p)|^{\alpha} \leq G_p^{\alpha}(1 + |\nabla\log G_p - \nabla\log\overline{G}_p|^2)$$

となるので, 再び c を適当にとり替えれば

$$(9.1) \text{ の左辺} \leq c\sigma^{-2}\int_{\mathbf{B}_{\sigma}(p)\setminus\mathbf{B}_{\frac{\sigma}{2}}(P)} \left(G_p^{\alpha} + G_p^{\alpha}|\nabla\log G_p|^2 + G_p^{\alpha}|\nabla\log\overline{G}_p|^2\right) d\mu_g$$

を得る.

第 2 段. $N \setminus P$ で $R_{\overline{G}_p^{\frac{4}{n-2}}g} = R_{G_p^{\frac{4}{n-2}}g} = 0$ だから, $\frac{L_g G_p}{G_p}$ と $\frac{L_g\overline{G}_p}{\overline{G}_p}$ の両辺を比較することにより, $N \setminus P$ では $\overline{G}_p^{-1}\Delta_g\overline{G}_p = G_p^{-1}\Delta_g G_p$ が成り立っていることが分かる. ψ を $\operatorname{supp}\psi$ がコンパクトで P と交わりを持たないようにとり, 部分積分をすると,

$$\begin{aligned}\int \psi^2\overline{G}_p^{-1}\Delta\overline{G}_p d\mu_g &= -\int g(2\psi\overline{G}_p^{-1}\nabla\psi, \nabla\overline{G}_p)d\mu_g - \int g(-\psi^2\overline{G}_p^{-2}\nabla\overline{G}_p, \nabla\overline{G}_p)d\mu_g \\ &= \int g(\psi\overline{G}_p^{-1}\nabla\overline{G}_p, \psi\overline{G}_p^{-1}\nabla\overline{G}_p)d\mu_g - \int 2g(\nabla\psi, \psi\overline{G}_p^{-1}\nabla\overline{G}_p)d\mu_g \\ &= \int g(\psi\nabla\log\overline{G}_p - \nabla\psi, \psi\nabla\log\overline{G}_p - \nabla\psi)d\mu_g - \int g(\nabla\psi, \nabla\psi)d\mu_g\end{aligned}$$

となるので, $\overline{G}_p^{-1}\Delta_g\overline{G}_p = G_p^{-1}\Delta_g G_p$ から

$$\int |\psi\nabla\log\overline{G}_p - \nabla\psi|^2 d\mu_g = \int |\psi\nabla\log G_p - \nabla\psi|^2 d\mu_g$$

を得る. よって,

$$\int |\psi\nabla\log\overline{G}_p|^2 d\mu_g \leq c\int \left(|\psi\nabla\log G_p|^2 + |\nabla\psi|^2\right) d\mu_g.$$

ここで, $\nabla\log\overline{G}_p$, $\nabla\log G_p$ がそれぞれの極の周りで $O(r^{-1})$ という挙動をすることと $n \geq 3$ に注意すれば, $\operatorname{supp}\psi$ が P と交わるときにも両辺の積分は意味を持つことが分かる. そこでコンパクトな台を持つ $\widetilde{\psi}\colon N \to \mathbf{R}$ を

$$\widetilde{\psi}(x) = \begin{cases} 0 & \cdots x \in \mathbf{B}_{\frac{\sigma}{3}}(p) \text{ または } x \in N \setminus \mathbf{B}_{2\sigma}(p) \text{ のとき}, \\ 1 & \cdots x \in \mathbf{B}_{\sigma}(p) \setminus \mathbf{B}_{\frac{\sigma}{3}} \text{ のとき}, \end{cases}$$

とし, $\psi = G_p^{\frac{\alpha}{2}} \widetilde{\psi}$ とすると,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{B}_\sigma(p)\setminus \mathbf{B}_{\frac{\sigma}{2}}(p)} G_p^\alpha |\nabla \log \overline{G}_p|^2 d\mu_g &\leq \int \psi^2 |\nabla \log \overline{G}_p|^2 d\mu_g \\
&\leq c \int \left(|\psi \nabla \log G_p|^2 + |\nabla \psi|^2 \right) d\mu_g \\
&\leq c \int \left(|\psi \nabla \log G_p|^2 + 2\widetilde{\psi}^2 |\nabla G_p^{\frac{\alpha}{2}}|^2 + 2G_p^\alpha |\nabla \widetilde{\psi}|^2 \right) d\mu_g \\
&\leq c' \int_{\mathbf{B}_{2\sigma}(p)\setminus \mathbf{B}_{\frac{\sigma}{3}}(p)} \left(G_p^\alpha |\nabla \log G_p|^2 + G_p^\alpha \right) d\mu_g
\end{aligned}$$

となる. 最後の不等式は

$$|\nabla G_p^{\frac{\alpha}{2}}|^2 = \left(\frac{\alpha}{2} G_p^{\frac{\alpha-2}{2}} \right)^2 |\nabla G_p|^2 = \frac{\alpha^2}{4} G_p^\alpha |\nabla \log G_p|$$

に注意して定数 c' をうまくとることにより得られる. 第 1 段の結果とこれを合わせて

$$(9.1) \text{ の左辺} \leq c\sigma^{-2} \int_{\mathbf{B}_{2\sigma}(p)\setminus \mathbf{B}_{\frac{\sigma}{3}}(p)} \left(G_p^\alpha |\nabla \log G_p|^2 + G_p^\alpha \right) d\mu_g$$

を得る.

第 3 段. R_g は下に有界なので, $-4\frac{n-1}{n-2}\Delta G_p = -R_g G_p$ に注意すると, ある定数 c が存在し $cG_p \geq -\Delta G_p$ が成り立っている. コンパクトな台を持つ $\varphi\colon N \to \mathbf{R}$ を $\operatorname{supp}\varphi \not\ni p$ となるようにとり, $\varphi^2 G_p^{\alpha-1}$ を両辺にかけて積分し, 右辺を変形すると,

$$\begin{aligned}
c\int \varphi^2 G_p^\alpha d\mu_g &\geq \int -\varphi^2 G_p^{\alpha-1} \Delta G_p d\mu_g \\
&= \int g(\nabla(\varphi^2 G_p^{\alpha-1})), \nabla G_p) d\mu_g \\
&= \int \left((\alpha-1) G_p^{\alpha-2} \varphi^2 |\nabla G_p|^2 + 2G_p^{\alpha-1} \varphi g(\nabla\varphi, \nabla G_p) \right) d\mu_g \\
&= \int \left((\alpha-1) \varphi^2 G_p^\alpha |\nabla \log G_p|^2 + 2\varphi G_p^\alpha g(\nabla\varphi, \nabla \log G_p) \right) d\mu_g
\end{aligned}$$

を得る. ここで

$$2g(\nabla\varphi, \varphi\nabla \log G_p) \geq -\left(\frac{1}{\varepsilon}|\nabla\varphi|^2 + \varepsilon|\varphi \nabla \log G_p|^2 \right)$$

に注意すれば,

$$\begin{aligned}
&\int \left((\alpha-1) \varphi^2 G_p^\alpha |\nabla \log G_p|^2 + 2\varphi G_p^\alpha g(\nabla\varphi, \nabla \log G_p) \right) d\mu_g \\
\geq &\int \left((\alpha-1) \varphi^2 G_p^\alpha |\nabla \log G_p|^2 - G_p^\alpha \varepsilon |\varphi \nabla \log G_p|^2 - G_p^\alpha \frac{1}{\varepsilon} |\nabla\varphi|^2 \right) d\mu_g.
\end{aligned}$$

$n \geq 5$ より $\alpha > 1$ となっていることに注意して $\varepsilon < \alpha - 1$ にとれば, 適当な定数 c', c'' に対し

$$\int \left((\alpha-1) \varphi^2 G_p^\alpha |\nabla \log G_p|^2 + 2\varphi G_p^\alpha g(\nabla\varphi, \nabla \log G_p) \right) d\mu_g \geq \int \left(c' G_p^\alpha \varphi^2 |\nabla \log G_p|^2 - c'' G_p^\alpha |\nabla\varphi|^2 \right) d\mu_g$$

が成り立つ. 以上から, c を適当にとれば,

$$\int G_p^\alpha \varphi^2 |\nabla \log G_p|^2 d\mu_g \leq c \int G_p^\alpha (\varphi^2 + |\nabla\varphi|^2) d\mu_g$$

となっていることが分かった．ここで，$\varphi\colon N \to \mathbf{R}$ を，$0 \le \varphi \le 1$ で，

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \cdots x \in \mathbf{B}_{\frac{\sigma}{4}}(p) \text{ または } x \in N \setminus \mathbf{B}_{3\sigma}(p) \text{ のとき}, \\ 1 & \cdots x \in \mathbf{B}_{2\sigma}(p) \setminus \mathbf{B}_{\frac{\sigma}{3}}(p) \text{ のとき}, \end{cases}$$

を満たすようにとる．以下では σ を大きくとることを考えるので，$|\nabla\varphi|$ も一様に抑えられているとしてよい．さきほどの不等式から，c を適当にとり替えれば，

$$\int_{\mathbf{B}_{2\sigma}(p)\setminus\mathbf{B}_{\frac{\sigma}{3}}(p)} G_p^{\alpha}|\nabla \log G_p|^2 d\mu_g \le c\int_{\mathbf{B}_{3\sigma}(p)\setminus\mathbf{B}_{\frac{\sigma}{4}}(p)} G_p^{\alpha} d\mu_g$$

が得られる．$\sigma \ge 4$ として第 2 段の結果と合わせれば

$$(9.1) \text{ の左辺} \le c'\sigma^{-2}\int_{N\setminus\mathbf{B}_1(p)} G_p^{\alpha} d\mu_g.$$

$d(N,g) < \frac{(n-2)^2}{n}$, $\alpha = \frac{2}{n-2}\frac{(n-2)^2}{n}$ より，適当な定数 c により

$$(9.1) \text{ の左辺} = \int \varphi^2|\overline{\nabla}v|^{\alpha-2}|\overline{\nabla}|\overline{\nabla}v||^2 d\mu_{\overline{g}} \le c\sigma^{-2}$$

が成り立つことになる．(N,g) の完備性から $\sigma \to \infty$ とすることができるので，(9.1) の左辺は 0 である．よって，$|\overline{\nabla}v|$ は定数．v が有界な関数であることに注意し，p の近傍で $\overline{g}$ が p を無限遠にもつ完備な計量であることを思い出せば (命題 9.17 の証明の最後の部分を参照)，$\overline{\nabla}v = 0$ である．$v(p) = 1$ から $v \equiv 1$ がしたがい，$\overline{G}_p = G_p$ が導かれる． □

10　定理 C の証明 (3)

この 10 節では，第 8 節で導入された**漸近的平坦**な多様体の**全質量**の概念等のより一般的な解説，および第 8 節の定理 8.6 を含むより一般的な形の**正質量定理** (定理 10.6) の証明を与える*5．以下，多様体の次元 n は $n \geq 3$ と仮定する．

定義 10.1 ([21], [74])**.** 下記の条件を満たす完備な n 次元リーマン多様体 (X, h) は，オーダー $\tau > 0$ の**漸近的平坦**な多様体と呼ばれる (以後 AF 多様体と略記) *6．あるコンパクトな部分集合 $K \subset X$ および微分同相写像

$$\varphi : X \setminus K \ \to \ \{x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n \mid |x| > \rho_0\} \quad (\ \exists \rho_0 > 0 \ )$$

が存在して，φ より誘導された座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ を用いて計量 $h = (h_{ij})$ が

$$h_{ij} = \delta_{ij} + O(|x|^{-\tau}), \quad \partial_k h_{ij} := \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} = O(|x|^{-1-\tau}), \quad \partial_k \partial_l h_{ij} := \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} = O(|x|^{-2-\tau}) \quad \text{as} \quad |x| \nearrow \infty$$

を満たす $(i, j, k, l = 1, \ldots, n)$．この条件を，以下

$$h_{ij} = \delta_{ij} + O''(|x|^{-\tau}) \quad \text{as} \quad |x| \nearrow \infty$$

と略記する．またこのとき，h は **AF 計量**，座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ は **AF 座標**と呼ばれる．

定義 10.2 ([16])**.** AF 座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ を持つ n 次元 AF 多様体 (X, h) に対して，その**全質量** $\mathfrak{m}(h; (x^1, \ldots, x^n))$ を以下で定義する*7．

$$\mathfrak{m}(h; (x^1, \ldots, x^n)) := \frac{1}{4(n-1)\sigma_{n-1}} \lim_{\rho \nearrow \infty} \int_{\{|x| = \rho\}} \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ii}}{\partial x^j} \Big) dS^j.$$

ここで，

$$\sigma_{n-1} := \mathrm{Vol}(S^{n-1}(1)), \quad dS^j := (-1)^{j+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

である．

定理 10.3 ([21], cf. [74])**.** (X, h) をオーダー $\tau > 0$ の n 次元 AF 多様体とする．いま，

$$(*) \qquad \tau > \frac{n-2}{2}, \qquad R_h \in L^1(X; h)$$

と仮定する．このとき，全質量は有限確定である．さらにその値は，AF 座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ の選び方によらず，AF 計量 h のみに依存し一意的である．

以後，現れる AF 多様体はすべて断りなしに条件 $(*)$ を仮定し，その全質量を $\mathfrak{m}(h)$ と表すことにする．また，$|x| \nearrow \infty$ のとき, $R_h = O(|x|^{-\tau-2})$ であることにも注意しておく．

注意 10.4. $\tau > n-2$ であるとすると，$\mathfrak{m}(h) = 0$ となることが容易に分かる．

*5 ここで紹介する (正質量定理以外の) 結果に関して，それらのいくつかは証明無しで使う．代わりに適宜文献を挙げる．
*6 ここで定義したのは，正確には エンド が 1 つの AF 多様体である．
*7 Arnowitt, Deser, Misner 達によって定義され，**ADM 質量** とも呼ばれる．ここで与えた定義は，オリジナルなものと定数倍だけ異なっている．

例 10.5. オーダー $(n-2)$ の n 次元 AF 多様体 (X,h) で AF 計量の挙動が以下のように与えられているものを考える*8.

$$h_{ij} = \left(1 + A|x|^{-(n-2)}\right)^{\frac{4}{n-2}} \delta_{ij} dx^i dx^j + O''(|x|^{-(n-1)}) \quad \cdots \text{ 無限遠の近傍で.}$$

このとき，$\mathfrak{m}(h) = A$ である.

シェーン・ヤウによって証明された正質量定理は以下のものである*9 ([96], [97], [94], cf. [74]).

定理 10.6 (正質量定理)**.** (X,h) を n 次元 *AF* 多様体とし，次の 2 条件を満たすものとする.

$$(1) \quad R_h \geq 0 \quad \cdots \ X \text{ 上}, \qquad\qquad (2) \quad n \leq 7.$$

このとき，次が成立する.
(i) $\mathfrak{m}(h) \geq 0$.
(ii) $\mathfrak{m}(h) = 0$ ならば，$(X,h) = (\mathbf{R}^n, g_{\mathbb{E}})$ である*10.
ここで，$g_{\mathbb{E}}$ はユークリッド計量を表す.

注意 10.7. オーダー $(n-2)$ の n 次元 AF 多様体 (X,h) を以下のように定義する.

$$h_{ij} = u(x)^{\frac{4}{n-2}} \delta_{ij} dx^i dx^j \quad \cdots \ X = \mathbf{R}^n \text{上}, \qquad u(x) = 1 + A|x|^{-(n-2)} + O''(|x|^{-(n-1)}) \quad \cdots \text{ 無限遠の近傍で.}$$

このとき，

$$R_h = -4\frac{n-1}{n-2} u^{-\frac{n+2}{n-2}} \ \Delta u$$

となり，$R_h \geq 0$ と $\Delta u \leq 0$ (u の優調和性) は同値な条件となる．よって条件 $R_h \geq 0$ と最大値原理より，

$$\inf_{\mathbf{R}^n} u = \lim_{r \nearrow \infty} \min_{\mathbf{B}_r(0)} u = \lim_{r \nearrow \infty} \min_{\partial \mathbf{B}_r(0)} u = 1$$

となり, $\mathfrak{m}(h) = A \geq 0$ が導かれる*11．ここで, Δ はユークリッド計量 $g_{\mathbb{E}}$ に関するラプラシアン $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$，$\mathbf{B}_r(0) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| < r\}$ である.

注意 10.8. シェーン・ヤウによる正質量定理 (i) の証明は，(X,h) の全質量を負であると仮定して矛盾を導く，と言う背理法によるものである．(X,h) 内の漸近的平坦な極小超曲面を構成することによって，全質量の負値性をその極小超曲面に移し，同様の議論により帰納的に次元を下げて行き，最終的に 2 次元リーマン多様体の問題に還元し矛盾を導く，と言うものである．$n > 7$ の場合に極小超曲面は一般に特異点をもつので (cf. [82])，彼らの議論はそのままでは通用せず何らかの修正が必要である．いくつかの試みが成されているが，現時点では完成された証明は無いようである.

以下いくつかの命題・補題の準備の後，正質量定理 10.6 の証明を与える.

---

*8 スカラー曲率に関しては，$R_h = O(|x|^{-(n+1)})$ となり，$R_h \in L^1(X;h)$ である.
*9 X がスピン多様体であれば，次元に関する条件は必要ないことが示されている [106], [87], [21].
*10 逆に，$(X,h) = (\mathbf{R}^n, g_{\mathbb{E}})$ ならば，$\mathfrak{m}(h) = 0$ である.
*11 このように計量に関して，AF であること以外に何の条件も課さなければ，A は任意定数で良いので，正質量定理は明らかに成立しない．条件 $R_h \geq 0$ の物理的・幾何的意味については，例えば [84] を参照のこと.

命題 10.9 ([94]). 定理 10.6 と同じ仮定の下，正数 $\kappa > 0$ を，$\kappa = 1$ $(n \geq 4)$ とおく．$n = 3$ の場合は，$\frac{n-2}{2} < \kappa < \tau$ かつ $\kappa \leq 1$ なる κ を任意に選び固定する．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，X 上のある AF 計量 $\overline{h}$ が存在して，次が成立する．

$$\text{(1)} \quad \overline{h} = u^{4/(n-2)} \cdot g_{\mathbb{E}} \quad \cdots \text{ 無限遠の近傍で,} \qquad u(x) := 1 + A|x|^{-(n-2)} + O''(|x|^{-(n-2)-\kappa}) \tag{10.1}$$

(2) $R_{\overline{h}} = 0 \quad \cdots$ X 上 (よって特に，無限遠の近傍で $\Delta u = 0$ である)

(3) $A = \mathfrak{m}(\overline{h}) \leq \mathfrak{m}(h) + \varepsilon$

この命題により，正質量定理の主張 (i) は，上記の (1), (2) を満たす AF 多様体 $(X, \overline{h})$ に対してのみ示せばよいことがわかる．また，このような AF 多様体のオーダーは $(n-2)$ 以上であることもわかる．

命題 10.9 **の証明．第 1 段．** 先ず，X 上で $R_h = 0$ と仮定しても良いことを示す．方程式

$$L_h u = -4\frac{n-1}{n-2}\Delta_h u + R_h u = 0, \quad u > 0, \quad u \sim 1 \quad \cdots \text{ 無限遠の近傍で}$$

の解 u を考える．

解 u の存在について： $u = 1 + v$ と置くと，方程式 $L_h u = 0$ は，方程式 $L_h v = -R_h$ と同値になることに注意する．$-\min\{\tau, n-2\} < -\delta < 0$ を満たす正数 $\delta > 0$ を任意に選び固定する．オーダー τ の AF 多様体 (X, h) 上では

$$-\Delta_h : W^{2,p}_{-\delta}(X) \;\to\; L^p_{-\delta-2}(X) \quad (\forall p > 1)$$

は同型であることが，[21, Proposition 2.2] より導かれる．ここで $W^{2,p}_{-\delta}(X)$ および $L^p_{-\delta-2}(X)$ は，[21, Sections 1, 3] で導入されている (X, h) 上の**重み付きソボレフ空間**である (cf. [74, Section 9])．また，$R_h = O(|x|^{-\tau-2})$ より $R_h \in L^p_{-\delta-2}(X)$ $(\forall p > 1)$ となる．さらに，ある十分小さい正数 $\varepsilon = \varepsilon(h, n) > 0$ が存在して，R_h の負部分 $(R_h)_- = \frac{1}{2}(|R_h| - R_h)$ が

$$\int_X |(R_h)_-|^{n/2} d\mu_h \leq \varepsilon$$

を満たせば，スカラー曲率を付け加えた共形ラプラシアン L_h に対しても，

$$L_h : W^{2,2}_{-\delta}(X) \;\to\; L^2_{-\delta-2}(X)$$

は同型であることが導かれる (cf. [96, Lemmas 3.2, 3.3] *12)．今の場合，$R_h \geq 0$ なので，$(R_h)_- = 0$ である．したがって，方程式 $L_h v = -R_h$ の解 $v \in W^{2,2}_{-\delta}(X)$ の存在が示せる．さらに，$v \in W^{2,p}_{-\delta}(X)$ $(\forall p > 1)$ が言える ([21, Theorem 1.10])．また，$R_h \in C^\infty(X)$ より，$v \in C^\infty(X)$ が導かれる．

解 u の正値性とその展開について：ソボレフの埋め込み $W^{2,p}_{-\delta}(X) \hookrightarrow L^\infty_{-\delta}(X)$ $(\forall p > \frac{n}{2})$ より，$|x| \nearrow \infty$ のとき，

$$|v(x)| = O(|x|^{-\delta})$$

が導かれる ([21, Theorem 1.2])．よって，$L_h u = 0$ の解 $u = 1 + v$ に対して，無限遠の近傍で $u \sim 1$ となる．最大値原理 ([38, Corollary 3.2]) より，X 内の境界が滑らかな任意の相対コンパクトな領域 Ω に対して，

$$\sup_\Omega |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|$$

*12 これらの補題では考えている AF 多様体 (X, h) の全質量がゼロという条件が仮定されているが，L_h が同型であるという主張の証明にはこの仮定は必要ない．

となることがわかる．これらを合わせると，X 上 $0 < u < 1$ がわかる．

解 u の無限遠における展開に関しては，[21, Theorem 1.7](およびその証明内の議論) より，

$$v(x) = \widetilde{A}|x|^{-(n-2)} + O''(|x|^{-(n-2)-\kappa}), \quad \widetilde{A} \equiv \mathrm{const}$$

が示せる．最大値原理により，X 上 $0 < u < 1$ が得られていたので，特に

$$\widetilde{A} \leq 0$$

となる．

以上により，$u^{4/(n-2)} \cdot h$ はスカラー曲率がゼロであるオーダー $\min\{\tau, n-2\}$ の AF 計量で，その全質量は

$$\mathfrak{m}(u^{4/(n-2)} \cdot h) = \mathfrak{m}(h) + \widetilde{A} \leq \mathfrak{m}(h)$$

を満たし，h は $u^{4/(n-2)} \cdot h$ に置き換えてもよいことがわかる．

第 2 段． 以後，$R_h = 0$ とする．また $\min\{\tau, n-2\}$ を，改めて記号 τ で表す．先ず h を無限遠近くでユークリッド計量に適切に変形する．そのため，各 $t \gg 1$ に対して，カットオフ関数 $\phi_t \in C^\infty(X)$ を K 上 $\phi_t = 1$ および $X \setminus K$ 上では

$$\phi_t(x) = \begin{cases} 1 & \ldots \quad |x| \leq t, \\ 0 & \ldots \quad |x| \geq 2t, \end{cases}$$

で $t|\phi_t'| + t^2|\phi_t''| \leq c$ (c は t に依存しない) を満たすよう選ぶ．このとき計量族 $\{h_t\}$

$$h_t := \phi_t \cdot h + (1 - \phi_t) \cdot g_{\mathbb{E}}$$

を考える．このとき，t に関して一様に $h_t = g_{\mathbb{E}} + O''(|x|^{-\tau})$ であり，かつ $\{t \leq |x| \leq 2t\}$ 上 t に関して一様に $R_{h_t} = O(|x|^{-\tau-2})$ である．特に，

$$\int_X |R_{h_t}|^{n/2} d\mu_{h_t} = O(t^{-n\tau/2})$$

である．十分大きい任意の $t \gg 1$ に対して，第 1 段と同様の議論を行うと，方程式

$$L_{h_t} u = 0 \quad u > 0, \ \ u \sim 1 \quad \cdots \text{ 無限遠の近傍で}$$

は，一意的に解 u_t を持つ．各共形計量 $\overline{h}_t := u_t^{4/(n-2)} \cdot h_t$ は，スカラー曲率がゼロでかつ無限遠のまわりで共形的にユークリッド的な計量である．特に各 $(X, \overline{h}_t)$ は，命題 10.9 の主張 (1), (2) を満たしている．

第 3 段． 最後に，

$$\lim_{t \to \infty} \mathfrak{m}(\overline{h}_t) = \mathfrak{m}(h)$$

であることを示す．これにより，十分大きな t を取ったときの $\overline{h}_t$ が求める計量である．実際，第 1 段の最後の箇所の全質量に関する不等式と上記のことより，命題 10.9 の主張 (3) が得られる．先ず，計量 h_t および解 u_t の t に関する一様減衰性により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，(t に無関係に) ある十分大きい t_0 が存在して，

$$\left| \mathfrak{m}(\overline{h}_t) - \frac{1}{4(n-1)\sigma_{n-1}} \int_{\{|x|=t_0\}} \sum_{i,j=1}^n \big(\partial_i (\overline{h}_t)_{ij} - \partial_j (\overline{h}_t)_{ii}\big) dS^j \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

が成立する．また，

$$\left| \mathfrak{m}(h) - \frac{1}{4(n-1)\sigma_{n-1}} \int_{\{|x|=t_0\}} \sum_{i,j=1}^n \big(\partial_i h_{ij} - \partial_j h_{ii}\big) dS^j \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

は，全質量の定義より十分大きい t_0 を取れば成立する．一方，$t \geq t_0$ に対しては，$\{|x| = t_0\}$ 上で $\overline{h}_t = u_t^{4/(n-2)} \cdot h$ であり，かつ X の各コンパクト部分集合上で (特に $\{|x| = t_0\}$ 上で) $\lim_{t\to\infty} u_t = 1$ かつ $\lim_{t\to\infty} |\partial u_t| = 0 = \lim_{t\to\infty} |\partial\partial u_t|$ であることより，十分大きい t に対して，

$$\Big| \int_{\{|x|=t_0\}} \sum_{i,j=1}^{n} \big(\partial_i(\overline{h}_t)_{ij} - \partial_j(\overline{h}_t)_{ii}\big) dS^j - \int_{\{|x|=t_0\}} \sum_{i,j=1}^{n} \big(\partial_i h_{ij} - \partial_j h_{ii}\big) dS^j \Big| < \frac{4(n-1)\sigma_{n-1}}{3}\, \varepsilon$$

が成立する．これら 3 つの不等式より，十分大きい任意の t に対して，$|\mathfrak{m}(\overline{h}_t) - \mathfrak{m}(h)| < \varepsilon$ が示せた．以上により，命題 10.9 が示せた． □

正質量定理 10.6 の主張 (i) の証明に入る前に，次を注意しておく．正質量定理は，先ず $n = 3$ の場合にシェーン・ヤウ [96] により示された．正質量定理 10.6 の主張 (ii) に関して，彼らの議論は一般の n でも通用する．一方主張 (i) に関して，極小超曲面の正則性が示されている $n \leq 7$ の場合までは，極小超曲面の存在により次元を下げていく議論は通用する．ただし $n \geq 4$ の場合は，$n = 3$ の場合とは異なる極小超曲面の構成が必要となる [97, 94]．この修正した構成では，$n = 3$ も含め $3 \leq n \leq 7$ で同時に議論が出来る．しかしながら，$n = 3$ の場合の議論の下，彼らがどの様に $n \geq 4$ の場合を克服して行ったかを追うことも興味深いと思われる．以下 2 度手間ではあるが，証明の第 2 段以降は $n = 3$ と $4 \leq n \leq 7$ の場合に分けて証明する．

定理 10.6 **の主張** (i) **の証明.** 先ず命題 10.9 より，(X, h) は主張 (1)，(2) を満たしているとよい．以下 $\mathfrak{m}(h) = A < 0$ を仮定して，最終的に矛盾を導く．
第 1 段. 先ず h を別の AF 計量 $\widetilde{h}$ に取り換えて，X 上 $R_{\widetilde{h}} > 0$ と出来ることを示す．$u \in C^\infty(X)$ を取り，$u = 1 + v$ とおき，方程式

$$L_h v = f, \quad f > 0$$

を考える．$R_h \equiv 0$ なので，命題 10.9 の証明内の第 1 段の議論と同様に，$|x| \nearrow \infty$ のとき $f = O'(|x|^{-\gamma})$ $(-n < \gamma < -(n-1))$ ならば，$v = O''(|x|^{-\gamma})$ を満たす解 v の存在と一意性が保証される ([74, Theorem 9.2-(d)])．さらに，$f > 0$，$u \sim 1$ および最大値原理 ([38, Corollary 3.2] より，X 上で $u > 0$ であることが示せる．命題 10.9 と同様に，この場合も

$$u = 1 + \delta|x|^{-(n-2)} + O''(|x|^{-(n-2)-\kappa}) \quad \cdots \text{ 無限遠の近傍で}$$

と展開されるが，($f \leq 0$ ではないので) $\delta \leq 0$ は導けない．その代り，f の C^1 ノルムを十分小さくとることにより，δ をいくらでも小さくとることができる ([74, Theorem 9.2-(c)])．以上により，$\widetilde{h} = u^{4/(n-2)} \cdot h$ とおくと，

$$R_{\widetilde{h}} = f \cdot u^{-\frac{n+2}{n-2}} > 0 \quad \cdots \ X \text{ 上}$$

が得られる．必要ならば δ を十分小さくとることにより，

$$\mathfrak{m}(\widetilde{h}) = \delta + \mathfrak{m}(h) = \delta + A < 0$$

となり，全質量が負という条件も保たれる．以後改めて，$\widetilde{h}$ を h と表す．このとき，AF 計量 h は，命題 10.9 の主張 (1)，$\mathfrak{m}(h) = A < 0$ および $R_h > 0$ を満たしている．
$n = 3$ **の場合**　**第 2 段.** 次に，仮定 $\mathfrak{m}(h) = A < 0$ より，ある面積最小完備極小曲面 Σ で平行な 2 つの平面に挟まれているものの存在を示す．

以下 AF 座標により，しばしば同一視 $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\mathbf{B}_{\rho_0}(0)} \cong X \setminus K$ を行う．十分大きい正数 ρ $(\geq 2\rho_0 > 0)$ に対して，円周 Γ_ρ を

$$\Gamma_\rho = \{x = (x', 0) = (x^1, x^2, 0) \in \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\mathbf{B}_{\rho_0}(0)} \mid |x| = \rho\}$$

と定める．また各 ρ に対して，Σ_ρ を X 内の，境界曲線が Γ_ρ となる，面積最小の (向き付られた埋め込み) 曲面とする．$n = 3 \leq 7$ より，各 Σ_ρ は滑らかである (cf. [39], [101])．

任意の $t > 0$ に対して，

$$E_t = \{x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 \mid |x^3| \leq t\}$$

とおく．このとき，ある $t_0 > \rho_0$ が存在して，任意の $\rho \geq 2\rho_0$ に対して，

$$\Sigma_\rho \cap (X \setminus K) \subset E_{t_0} \tag{10.2}$$

となることを示そう．先ず漸近挙動 (10.1) より，座標関数 x^3 の 2 回共変微分に関して

$$\overline{\nabla}_{\partial_i} \overline{\nabla}_{\partial_j} x^3 = \frac{2Ax^j}{|x|^3}\delta_{i3} + \frac{2Ax^i}{|x|^3}\delta_{j3} - \frac{2Ax^3}{|x|^3}\delta_{ij} + O(|x|^{-3}), \quad i, j = 1, 2 \tag{10.3}$$

であることがわかる．ここで $\overline{\nabla}$ は，AF 計量 h のレビ・チビタ接続を表す．いま，$\bar{t} > 0$ を $\Sigma_\rho \cap (X \setminus K)$ 上での座標関数 x^3 の最大値とし，それを与える点を $x_0 \in \Sigma_\rho$ とする．$\Sigma_\rho \cap (X \setminus K) = \emptyset$ ならば，評価式 (10.2) の半分は得られたことになる．以下 $\bar{t} > \rho_0$ と仮定して，議論を続ける．このとき，$x_0 \in \Sigma_\rho$ における接平面 $T_{x_0}\Sigma_\rho$ は，$\frac{\partial}{\partial x^1}|_{x=x_0}, \frac{\partial}{\partial x^2}|_{x=x_0}$ によって張られる．v_1, v_2 を x_0 のまわりの Σ_ρ の接ベクトル場で，$v_1(x_0) = \frac{\partial}{\partial x^1}|_{x=x_0}, v_2(x_0) = \frac{\partial}{\partial x^2}|_{x=x_0}$ を満たすものとする．また，ν で x_0 のまわりの Σ_ρ の単位法ベクトル場を表す．いま，$g = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ を h の Σ_ρ への制限とし，∇ を g のレビ・チビタ接続とすると，$x = x_0$ において

$$g^{ij} \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} x^3 = \quad g^{ij} \overline{\nabla}_{\partial_i} \overline{\nabla}_{\partial_j} x^3 + g^{ij} \mathcal{A}_{ij} \nu(x^3)$$

となる．ここで，$\mathcal{A}_{ij} = g(\overline{\nabla}_{v_i} v_j, \nu)(x_0)$ は，$x = x_0$ における Σ_ρ の第 2 基本形式を表す．Σ_ρ は極小曲面なので，$g^{ij}\mathcal{A}_{ij} = 0$ となり，さらに (10.3) より，

$$g^{ij} \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} x^3 = -\frac{4A\bar{t}}{|x|^3} + O(|x|^{-3})$$

が導かれる．ここで仮定 $A < 0$ を使うと，十分大きい $\bar{t}$ に対して，x_0 で $g^{ij} \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} x^3 > 0$ となる．これは，座標関数 x^3 が $x = x_0$ において最大値をとると言うことに矛盾する．よって十分大きい $t > \rho_0$ と任意の $\rho \geq 2\rho_0$ に対して，

$$\Sigma_\rho \cap (X - K) \subset \{x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 \mid x^3 \leq t\}$$

が示せた．同様の議論により，下からの評価も得られ，(10.2) が示せる．

$x \in X, r > 0$ に対して，$B_r(x; h)$ で (X, h) 内の中心 x，半径 $r > 0$ の測地開球体を表す．このとき，ある $r_0 > 0$ が存在して，任意の $x \in \Sigma_\rho$ で $B_{r_0}(x; h) \cap \Gamma_\rho = \emptyset$ を満たす点に対して，$\Sigma_\rho \cap B_{r_0}(x; h)$ は接平面 $T_x\Sigma_\rho$ 上の滑らかな関数 f_ρ のグラフとなる．さらに f_ρ の C^3 ノルムは，ρ に無関係に一様に評価される (cf. [100])．$\Sigma_\rho \cap \{(x^1)^2 + (x^2)^2 \leq j\}$ に高さ評価 (10.2) とこの正則性評価を用いると，収束列 $\{\rho_{ij}\}_i$ が存在するので，$\{\rho_{ij}\}_{i,j}$ に対角線論法を用いる．このときある滑らかな完備埋め込み曲面 Σ と数列 $\{\rho_j\}_j$ で $\rho_j \nearrow \infty$ なるも

のが存在し，Σ_{ρ_j} は C^2 ノルムに関して Σ に広義一様収束する．構成法より，Σ は固有に埋め込まれた面積最小極小曲面でかつ高さ評価

$$\Sigma \cap (X \setminus K) \subset \{x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 \mid x^3 \leq t_0\}$$

を満たしている．

第 3 段． 第 2 段で構成した曲面 Σ は存在しないことを示すため，(Σ, g) のスカラー曲率 R_g の積分に関する 2 つの評価式 (i.e., (10.10), (10.11)) を導く．

任意の $\rho \geq 2\rho_0$ に対して，

$$\Sigma_{(\rho)} = [\Sigma \cap K] \cup [\Sigma \cap (\overline{\mathbf{B}_\rho(0)} \setminus \mathbf{B}_{\rho_0}(0))]$$

とおくと，$\{\Sigma_{(\rho)}\}$ は Σ に対する増大列となる．さらに，任意の $\rho \geq 2\rho_0$ に対して，

$$\mathrm{Area}(\Sigma_{(\rho)}) \leq C_1 \rho^2 \tag{10.4}$$

を満たす．ここで，C_1 は ρ に無関係な正定数である．評価式 (10.4) を示すため，先ず次のことに注意する．もし Σ が $\partial\mathbf{B}_\rho(0)$ に横断的に交わると仮定すると，その交わりは $\partial\mathbf{B}_\rho(0)$ 上の有限個の向き付られたジョルダン曲線の和で，かつ $\Sigma_{(\rho)}$ の境界となっている．これらの曲線は，$\partial\mathbf{B}_\rho(0)$ 内のある領域 $\Omega(\subset \partial\mathbf{B}_\rho(0))$ の境界となっている．そして，$\partial\Omega = \partial\Sigma_{(\rho)}$ となっている．ここで Σ の面積最小性より，

$$\mathrm{Area}(\Sigma_{(\rho)}) \leq \mathrm{Area}(\Omega) \leq \mathrm{Area}(\partial\mathbf{B}_\rho(0))$$

が成り立つ．h が AF 計量であることに注意すると，上記の評価より，Σ が $\partial\mathbf{B}_\rho(0)$ に横断的に交わるような任意の $\rho \geq 2\rho_0$ に対して，評価式 (10.4) が成り立つ．ρ に関する横断性は，測度ゼロの集合を除いて成立するので，結局任意の $\rho \geq 2\rho_0$ に対して評価式 (10.4) が成り立つ．

評価式 (10.4) を使って，$r = |x|$ に係るある関数の Σ 上の積分の評価を導く．AF 計量 h の Σ への制限を，$g = h|_\Sigma$ とおく．正数 $a > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \frac{1}{1+r^a} d\mu_g &= \int_{\Sigma_{(\rho_0)}} \frac{1}{1+r^a} d\mu_g + \int_{\rho_0}^\infty \Big(\frac{d}{dt}\int_{\Sigma_{(t)}} \frac{1}{1+r^a} d\mu_g\Big) dt \\ &\leq \mathrm{Area}(\Sigma_{(\rho_0)}) + \int_{\rho_0}^\infty \frac{1}{1+t^a}\Big(\frac{d}{dt}\mathrm{Area}(\Sigma_{(t)})\Big) dt\end{aligned}$$

が成り立つ．$a > 2$ に対して，部分積分と評価式 (10.4) を上の不等式で使うと，ある定数 $C_1' > 0$ が存在して，

$$\int_\Sigma \frac{1}{1+r^a} d\mu_g \leq C_1'\rho_0^2 + a\int_{\rho_0}^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t^a)^2}\mathrm{Area}(\Sigma_{(t)}) dt \leq C_1'\rho_0^2 + C_1' a \int_{\rho_0}^\infty \frac{t^{a+1}}{(1+t^a)^2} dt$$

となり，任意の $a > 2$ に対して，

$$\int_\Sigma \frac{1}{1+r^a} d\mu_g < \infty \tag{10.5}$$

が得られる．さらに同様の議論を行うと，ある定数 $C_2 > 0$ が存在して，任意の $\rho_2 > \rho_1 \geq 2\rho_0$ に対して，

$$\int_{\Sigma_{(\rho_2)} \setminus \Sigma_{(\rho_1)}} \frac{1}{r^2} d\mu_g < 2C_2 \log(\rho_2/\rho_1) \tag{10.6}$$

を得る．

Σ の第 2 基本形式を $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_{ij})$ で表し，$|\mathcal{A}|^2$ をその 2 乗ノルムとする．Σ は面積最小曲面なので，特に安定な極小曲面となり，面積汎関数の**第 2 変分公式** (cf. [32]) より，Σ 上のコンパクト台を持つ任意の C^2 級関数 f に対して，

$$\int_\Sigma [\Delta_g f + (\mathrm{Ric}_h(\nu,\nu)+|\mathcal{A}|^2)f]f d\mu_g \leq 0$$

が得られる．ただし，ν は Σ 上の単位法ベクトル場を表す．ここで部分積分を行うと，

$$\int_\Sigma (\mathrm{Ric}_h(\nu,\nu)+|\mathcal{A}|^2)f^2 d\mu_g \leq \int_\Sigma |\nabla f|^2 d\mu_g \tag{10.7}$$

が得られる．このとき，不等式 (10.7) での f は，コンパクト台を持つ任意のリプシッツ連続な関数としてよいことがわかる．ここで曲面 Σ ($\subset (X,h)$) に関する**ガウスの方程式**より，

$$\mathrm{Ric}_h(\nu,\nu)+|\mathcal{A}|^2 = \frac{1}{2}R_h - \frac{1}{2}R_g + \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^2$$

となる．不等式 (10.7) と合わせると，

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma (R_h - R_g + |\mathcal{A}|^2)f^2 d\mu_g \leq \int_\Sigma |\nabla f|^2 d\mu_g \tag{10.8}$$

が導かれる．

今，不等式 (10.7) において適切なカットオフ関数 f を選ぶことにより，

$$\int_\Sigma |\mathcal{A}|^2 d\mu_g < \infty \tag{10.9}$$

が得られることを示す．任意の $\rho \geq 2\rho_0$ に対して，関数 $\varphi = \varphi_\rho$ を

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \cdots\ \Sigma_{(\rho)}, \\ 2-\frac{\log r}{\log\rho} & \cdots\ \Sigma_{(\rho^2)}\setminus\Sigma_{(\rho)}, \\ 0 & \cdots\ \Sigma\setminus\Sigma_{(\rho^2)} \end{cases}$$

とおく．不等式 (10.7) において，関数 $f=\varphi$ を代入すると，

$$\int_\Sigma (\mathrm{Ric}_h(\nu,\nu)+|\mathcal{A}|^2)\varphi^2 d\mu_g \leq \int_\Sigma |\nabla\varphi|^2 d\mu_g \leq \frac{1}{(\log\rho)^2}\int_{\Sigma_{(\rho^2)}\setminus\Sigma_{(\rho)}} \frac{|\nabla r|^2}{r^2} d\mu_g$$

が得られる．$x=(x^1,x^2,x^3)$ が AF 座標であることに注意すると，ある定数 $C_3>0$ が存在して $|\nabla r|^2 \leq C_3$ となり，上の不等式と合わせて，

$$\int_\Sigma |\mathcal{A}|^2\psi^2 d\mu_g \leq \frac{C_3}{(\log\rho)^2}\int_{\Sigma_{(\rho^2)}\setminus\Sigma_{(\rho)}} \frac{1}{r^2} d\mu_g + \int_\Sigma |\mathrm{Ric}_h(\nu,\nu)| d\mu_g$$

を得る．ここで評価式 (10.6) を使うと，

$$\int_\Sigma |\mathcal{A}|^2 d\mu_g \leq \frac{2C_2C_3}{\log\rho} + \int_\Sigma |\mathrm{Ric}_h(\nu,\nu)| d\mu_g$$

が得られ，$\rho \nearrow \infty$ とすることで，

$$\int_\Sigma |\mathcal{A}|^2 d\mu_g \leq \int_\Sigma |\mathrm{Ric}_h(\nu,\nu)| d\mu_g$$

が導かれる．$\mathrm{Ric}_h = O(r^{-2-\tau})$ であることに注意すると，ある定数 $C_4 > 0$ が存在して，

$$\int_\Sigma |\mathcal{A}|^2 d\mu_g \le C_4 \int_\Sigma \frac{1}{1+r^{2+\tau}} d\mu_g < \infty$$

が成り立つ．2 番目の不等式では，評価式 (10.5) を使っている．ここで $|\mathcal{R}_h| = O(r^{-2-\tau})$ に注意し，再びガウスの方程式を使うと，

$$\int_\Sigma |R_g| d\mu_g \le \int_\Sigma (2|\mathcal{R}_h| + |\mathcal{A}|^2) d\mu_g < \infty \tag{10.10}$$

が導かれる．ただし，$\mathcal{R}_h$ は AF 計量 h の曲率テンソルを表す．不等式 (10.8) において，上記と同様に関数 $f = \varphi$ を代入し，$\rho \nearrow \infty$ とすると，

$$\int_\Sigma (R_h - R_g + |\mathcal{A}|^2) d\mu_g \le 0$$

が得られる．ここで，X 上で $R_h > 0$ であることを使うと，

$$\int_\Sigma R_g d\mu_g \ge \int_\Sigma (R_h + |\mathcal{A}|^2) d\mu_g > 0 \tag{10.11}$$

が導かれる．

第 4 段． 最後に，第 2 段で構成した曲面 Σ は存在しないことを示し，矛盾を導く．具体的には，不等式

$$\int_\Sigma R_g d\mu_g \le 0$$

を示し，不等式 (10.11) と矛盾することを導く．これより，AF 多様体 (X, h) の全質量 $\mathfrak{m}(h) = A \ge 0$ が証明されることになる．

先ず不等式 (10.10) に注意して，**コーン・フォッセンの不等式の拡張版** (cf. [50]) を Σ に適用して，

$$\int_\Sigma R_g d\mu_g \le 4\pi\chi(\Sigma)$$

を得る．ただし，$\chi(\Sigma)$ は Σ の**オイラー標数**を表す．この不等式より，特に Σ は有限位相型である．このことと不等式 (10.10) に再び注意すると，フーバーの定理 [50] より，ある閉リーマン面 $\widehat{\Sigma}$ と有限個の点 $p_1, \dots, p_l \in \widehat{\Sigma}$ が存在して，$(\Sigma, [g])$ は $\widehat{\Sigma} \setminus \{p_1, \dots, p_l\}$ と共形同値となる．(10.11) と上記の不等式より $\chi(\Sigma) > 0$ となるので，$\widehat{\Sigma} = S^2, l = 1$ で，$(\Sigma, [g])$ は複素平面 $\mathbf{C}$ と共形同値となる．特に，Σ は単連結である．

今，その共形同値写像を $F : \mathbf{C} \to (\Sigma, [g])$ で表すことにする．$\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_i < \cdots \nearrow \infty$ に対して，

$$D_i = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < \sigma_i\}, \qquad C_i = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = \sigma_i\}$$

とし，

$$L_i = \mathrm{Length}(F(C_i)), \qquad A_i = \mathrm{Area}(F(D_i))$$

とおく．このとき，フィン・フーバーの定理 [35], [51] を Σ に適用すると，

$$\int_\Sigma R_g d\mu_g = 4\pi - \lim_{i\to\infty} \frac{L_i^2}{A_i}$$

を得る．よって，$\int_\Sigma R_g d\mu_g \le 0$ を示すことは,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{L_i^2}{4\pi A_i} \ge 1 \tag{10.12}$$

を示すことと同値になる．Σ は X 内に固有に埋め込まれているので，X の任意のコンパクト集合に対して，十分大きい i をとれば，$F(C_i)$ はその外側にある．$\widetilde{L}_i$ を $F(C_i)$ $(\subset \mathbf{R}^3 \setminus \mathbf{B}_{\rho_0}(0) \cong X \setminus K)$ のユークリッド計量に関する長さとすると，$i \to \infty$ のとき，

$$\widetilde{L}_i^2 \leq (1+o(1))L_i^2 \tag{10.13}$$

を得る．$F(C_i)$ $(\subset \mathbf{R}^3)$ を境界とする，ユークリッド計量に関する面積最小はめ込み円板を $\mathcal{D}_i$ で表す．このとき，$\mathbf{R}^3$ 内のはめ込み円板に関する等周不等式 (cf. [49]) より，

$$\widetilde{A}(\mathcal{D}_i) \leq \frac{\widetilde{L}_i^2}{4\pi}$$

が成り立つ．ただし，$\widetilde{A}(\cdot)$ はユークリッド計量に関する面積を表す．さらに，$F(C_i)$ $(\subset \mathbf{R}^3)$ を境界とする，ユークリッド計量に関する面積最小向き付け曲面を $\mathcal{S}_i$ で表すと，$\widetilde{A}(\mathcal{S}_i) \leq \widetilde{A}(\mathcal{D}_i)$ が得られるので

$$\widetilde{A}(\mathcal{S}_i) \leq \frac{\widetilde{L}_i^2}{4\pi} \tag{10.14}$$

が得られる．ここで十分大きい i に対して，$\mathcal{S}_i \cap \mathbf{B}_{\rho_i}(0) \subset \mathcal{S}_i \setminus F(C_i)$ となる増大列 $\rho_i \nearrow \infty$ を選ぶことが出来ることに注意する．第 2 段より，$F(C_i) \subset E_{t_0} = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid |x^3| \leq t_0\}$ が示されているので，$\mathbf{R}^3$ の極小曲面の凸包性より，$i \gg 1$ に対して，

$$\mathcal{S}_i \subset E_{t_0}$$

が示せる．このとき, 境界曲線 $F(C_i)$ は $\mathcal{S}_i$ のレトラクトではないので, 点 $x_i \in \mathcal{S}_i \cap \{(0,0,x^3) \in \mathbf{R}^3 \mid x^3 \in \mathbf{R}\}$ が存在する．このことと $\mathbf{R}^3$ 内の面積最小曲面に関する不等式 [12] より，$\widetilde{A}(\mathcal{S}_i \cap \mathbf{B}_r(x_i)) \geq \pi r^2$ が示せ，$i \to \infty$ のとき，

$$\widetilde{A}(\mathcal{S}_i \cap \mathbf{B}_{\rho_i}(0)) \geq (1+o(1))\pi\rho_i^2 \tag{10.15}$$

が得られる．

次に，$\mathcal{S}_i$ の AF 計量 h に関する面積 $A(\cdot) = \mathrm{Area}(\cdot)$ とユークリッド計量に関する面積 $\widetilde{A}(\cdot)$ を比較する．ただし，$\mathcal{S}_i \cap \mathbf{B}_{\rho_0}(0)$ は空集合ではないかもしれないし，また h は $\mathbf{B}_{\rho_0}(0)$ 上では定義されていない．我々はこの問題を，$\mathbf{B}_{\rho_0}(0)$ の近傍で $\mathcal{S}_i$ を修正することにより遂行する．先ず，$\partial\mathbf{B}_{r_i}(0)$ と $\mathcal{S}_i$ が横断的に (または空に) 交わるような $r_i \in [\rho_0, \rho_0+1]$ を一つ選ぶ．このとき，$\partial\mathbf{B}_{r_i}(0)$ の領域 Ω_i で $\partial\Omega_i = \mathcal{S}_i \cap \partial\mathbf{B}_{r_i}(0)$ となるものを見つけることが出来る．そこで新しい曲面 $\mathcal{S}_i'$ を

$$\mathcal{S}_i' = (\mathcal{S}_i \setminus \mathbf{B}_{r_i}(0)) \cup \overline{\Omega}_i$$

で与える．評価式 (10.15) より，$\widetilde{A}(\mathcal{S}_i) \to \infty$ $(i \to \infty)$ が言え, さらに評価式 (10.14) と併せることにより，$i \to \infty$ のとき，

$$\widetilde{A}(\mathcal{S}_i') \leq (1+o(1))\widetilde{A}(\mathcal{S}_i) \leq (1+o(1))\frac{\widetilde{L}_i^2}{4\pi} \tag{10.16}$$

が得られる．また $\mathcal{S}_i$ の面積最小性より，$\widetilde{A}(\mathcal{S}_i) \leq \widetilde{A}(\mathcal{S}_i')$ となり，$\widetilde{A}(\mathcal{S}_i') \to \infty$ $(i \to \infty)$ も得られる．必要ならば上記の各 ρ_i を小さく選び直し，$i \to \infty$ のとき，

$$A(\mathcal{S}_i' \cap \mathbf{B}_{\rho_i}(0)) \leq \sqrt{\widetilde{A}(\mathcal{S}_i')}, \qquad A(\mathcal{S}_i' \cap \mathbf{B}_{\rho_i}(0)) \to \infty \tag{10.17}$$

となるようにする．これは，h が AF 計量であることと評価式 (10.15) より可能である．ここで取り直した ρ_i は，必然的に $\rho_i \nearrow \infty$ $(i \to \infty)$ となることに注意しておく．再び，h が AF 計量であることより，

$$A(\mathcal{S}_i' \setminus \mathbf{B}_{\rho_i}(0)) \leq (1+o(1))\widetilde{A}(\mathcal{S}_i')$$

が示せ，評価式 (10.17) と併せると，$i \to \infty$ のとき，

$$A(\mathcal{S}_i') \leq (1+o(1))\widetilde{A}(\mathcal{S}_i') \tag{10.18}$$

が得られる．

上記で得られた評価式 (10.13), (10.16), (10.18) と曲面 Σ の面積最小性より，$i \to \infty$ のとき，

$$A_i \leq A(\mathcal{S}_i') \leq (1+o(1))\widetilde{A}(\mathcal{S}_i') \leq (1+o(1))\frac{\widetilde{L}_i^2}{4\pi} \leq (1+o(1))\frac{L_i^2}{4\pi}$$

が得られ，最終的に評価式 (10.12) が導かれる．以上で，$n=3$ の場合には，定理 10.6 の主張 (i) の証明が完了した． □

注意 10.10. $n=3$ の場合の第 3 段の不等式 (10.7) において，コンパクトな台を持つテスト関数として $f=\varphi_\rho$ を選んだ．そして $\rho \nearrow \infty$ とすることで，結果的には (10.7) におけるテスト関数として $f \equiv 1$ を選んでも良いことが示せる．$4 \leq n \leq 7$ の場合にも，同様の議論を行って極小超曲面 $\Sigma \subset (X^n, h)$ を構成し，かつ (10.7) に対応する不等式が得られるが，同じテスト関数 φ_ρ を代入しても $\int_\Sigma |\nabla\varphi_\rho|^2 d\mu_g = o(1)$ $(\rho \to \infty)$ が得られないことが容易にわかる．また，φ_ρ の代わりとなる適切なテスト関数も構成出来ない．そこで $4 \leq n \leq 7$ の場合には，極小超曲面 $\Sigma \subset (X^n,h)$ の構成法を変更することにより，Σ の無限遠の近傍で定数である様な関数をテスト関数として許容するようにするのである．また $n=3$ の場合もそのようにして極小曲面 Σ を再構成すると，実は上記の第 4 段の証明も簡略化できる [94].

定理 10.6 **の主張** (i) **の証明の続き．** <u>$4 \leq n \leq 7$ **の場合**</u>　主張 (i) の証明内の第 1 段と同じく，AF 多様体 (X^n, h) は，命題 10.9 の主張 (1)，$\mathfrak{m}(h) = A < 0$ および X 上で $R_h > 0$ を満たしているとして，矛盾を導く．

第 2 段． $n=3$ の場合と同様に，仮定 $\mathfrak{m}(h) = A < 0$ より，ある面積最小完備極小超曲面 $\Sigma = \Sigma^{n-1}$ で平行な 2 つの超平面に挟まれているものの存在を示す．ただし $4 \leq n \leq 7$ の場合は，先ず**自由境界値問題の解**として面積最小なコンパクト超曲面族を構成し，その極限として Σ を構成する．($n=3$ の場合は，ディリクレ境界値問題の解として面積最小なコンパクト曲面族を構成したことに注意しておく．) さらに，Σ の無限遠での減衰オーダーも求める．

$4 \leq n \leq 7$ の場合も，AF 座標により，以下しばしば同一視 $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\mathbf{B}_{\rho_0}(0)} \cong X \setminus K$ を行う．仮定より，AF 多様体 (X^n, h) は，

- $\overline{h} = u^{4/(n-2)} \cdot g_{\mathbb{E}}$　$\cdots$ 無限遠の近傍で，　$u(x) := 1 + A|x|^{-(n-2)} + O''(|x|^{-(n-1)})$
- $A < 0$
- $R_h > 0$　$\cdots$ X 上

を満たしている．よって，X 内のコンパクト集合 K(および定数 $\rho_0 > 0$) を十分大きく取り直して，

$$\overline{h} = u^{4/(n-2)} \cdot g_{\mathbb{E}} \quad \cdots\ X \setminus K \cong \mathbf{R}^n \setminus \overline{\mathbf{B}_{\rho_0}(0)}\ \text{上}, \quad u(x) := 1 + A|x|^{-(n-2)} + O''(|x|^{-(n-1)})$$

として良い．$X \setminus K$ 上の (AF 計量 h に関する) 単位ベクトル場 $\eta = u^{-2/(n-2)}\frac{\partial}{\partial x^n}$ の発散 $\mathrm{div}_h(\eta)$ を計算す

ると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_h(\eta) &= u^{-2n/(n-2)}\frac{\partial}{\partial x^n}(u^{2n/(n-2)}u^{-2/(n-2)}) \\
&= \frac{2(n-1)}{n-2}A\frac{\partial}{\partial x^n}(|x|^{-(n-2)}) + O(|x|^{-n}) \\
&= -2(n-1)A\frac{x^n}{|x|^n} + O(|x|^{-n})
\end{aligned}$$

となる．特に，$A<0$ であるから，ある十分大きい正定数 $a_0>0$ が存在して，

$$\mathrm{div}_h(\eta)>0 \quad \cdots\ x^n \geq a_0, \qquad \mathrm{div}_h(-\eta)>0 \quad \cdots\ x^n \leq -a_0$$

が成り立つ．

任意の正定数 $\rho\ (>a_0>0)$ に対して，$(n-2)$ 次元球面 $\Gamma_{\rho,a}$，$(n-1)$ 次元シリンダー C_ρ およびその内部領域 Ω_ρ を

$$\Gamma_{\rho,a} = \{x=(x',x^n)\in \mathbf{R}^n \setminus \overline{\mathbf{B}_{\rho_0}(0)} \mid |x'|=\rho, x^n=a\},$$

$$C_\rho = \{x=(x',x^n)\in \mathbf{R}^n \setminus \overline{\mathbf{B}_{\rho_0}(0)} \mid |x'|=\rho\},$$

$$\Omega_\rho = K\cup\{x=(x',x^n)\in \mathbf{R}^n \setminus \overline{\mathbf{B}_{\rho_0}(0)} \subset X \mid |x'|<\rho\}$$

と定める．さらに，$\Gamma_{\rho,a}$ を C_ρ 内の $\Gamma_{\rho,a}$ 以下の部分の境界とみなし，それによって $\Gamma_{\rho,a}$ に向きを与える．今，$\Sigma_{\rho,a}$ を X^n 内の，$\partial\Sigma_{\rho,a}=\Gamma_{\rho,a}$ となる，面積最小の (向き付られた埋め込み) 超曲面とする．$n=3$ の場合と同様に，$n\leq 7$ より，各 $\Sigma_{\rho,a}$ は滑らかである (cf. [39], [101])．また，$\tau=|x'|$ とおき，$X\setminus\overline{\Omega}_{\rho_0}$ 上の単位ベクトル場 $\widetilde{\eta}=u^{-2/(n-2)}\frac{\partial}{\partial\tau}$ に関して，$\mathrm{div}_h(\widetilde{\eta})>0\ (\forall\tau\geq a_0)$ となることが，$\mathrm{div}_h(\eta)$ の計算と同様にわかる．このとき，極小超曲面に対する最大値原理より，$\Sigma_{\rho,a}\subset\overline{\Omega}_\rho\ (\forall\rho\geq a_0)$ となることもわかる．任意の $\rho\geq a_0$ に対して，

$$V(\rho)=\min\{\mathrm{Vol}(\Sigma_{\rho,a}) \big| \ a\in[-a_0,a_0]\}$$

とおく．ここで，関数 $[-a_0,a_0]\to\mathbf{R}$，$a\mapsto \mathrm{Vol}(\Sigma_{\rho,a})$ は連続であることに注意しておく．このとき，各 $\rho\geq a_0$ に対して，ある $a(\rho)\in[-a_0,a_0]$ が存在して，$\mathrm{Vol}(\Sigma_{\rho,a})=V(\rho)$ となる．

以下，$-a_0<a(\rho)<a_0\ (\forall\rho\geq a_0)$ であることを示そう．$\Omega_{\rho,a}$ を Ω_ρ 内の $\Sigma_{\rho,a}$ 以下の部分の領域とする．このとき，$\Sigma_{\rho,a}=\partial\Omega_{\rho,a}\cap\Omega_a$ である．$\mathrm{div}_h(\eta)>0$ for $x^n>a_0-\delta$ となるような十分小さい $\delta>0$ を選び，

$$U_{\rho,a}=\{(x',x^n)\in\Omega_{\rho,a}\mid x^n>a_0-\delta\}$$

とおく．このとき，$U_{\rho,a}=\emptyset$ であることを示そう．今，$U_{\rho,a}\neq\emptyset$ と仮定する．η は C_ρ に接していることに注意して，$U_{\rho,a}$ 内で発散定理を適用すると，

$$\int_{\Sigma_{\rho,a}\cap\{x^n\geq a_0-\delta\}}\langle\eta,\nu\rangle_h d\mu_{g_{\rho,a}} - \mathrm{Vol}(\Omega_{\rho,a}\cap\{x^n=a_0-\delta\})>0$$

が得られる．ここで，ν は $\Sigma_{\rho,a}$ 上の単位法ベクトル場，および $g_{\rho,a}=h|_{\Sigma_{\rho,a}}$ である．上記に，シュワルツの不等式を適用すると，

$$\mathrm{Vol}(\Omega_{\rho,a}\cap\{x^n=a_0-\delta\})<\mathrm{Vol}(\Sigma_{\rho,a}\cap\{x^n\geq a_0-\delta\})$$

となる．よって以下に定義される超曲面 $\widetilde{\Sigma}$,

$$\widetilde{\Sigma}=\partial(\Omega_{\rho,a}\cap\{x^n<a_0-\delta\})\cap\Omega_\rho$$

に関して，

$$\mathrm{Vol}(\widetilde{\Sigma}) < \mathrm{Vol}(\Sigma_{\rho,a})$$

かつ $\partial\widetilde{\Sigma} = \Gamma_{\rho,a_1}$ $(a_1 = \min\{a, a_0 - \delta\})$ となる．これは $\Sigma_{\rho,a}$ の取り方に矛盾する．以上より，$U_{\rho,a} = \emptyset$ となり，$a(\rho) \le a_0 - \delta$ が得られた．同様の議論により，$a(\rho) \ge -a_0 + \delta$ も導ける．

$\Sigma_\rho = \Sigma_{\rho,a(\rho)}$ とおくと，Σ_ρ は最小面積 $V(\rho)$ を実現する超曲面である．X 上のベクトル場 Y_1 は，$X \setminus K$ 上では，$\frac{\partial}{\partial x^n}$ に一致するものとする．またコンパクト台を持つ X 上のベクトル場 Y_0 を任意にとる．$\alpha \in \mathbf{R}$ に対して，$Y = Y_0 + \alpha Y_1$ とおき，$\{F_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ をベクトル場 Y から生成される 1 パラメター変換群とする．ρ を十分大きく選ぶことで，Y_0 の台は Ω_ρ に含まれているとする．このとき超曲面族 $\{F_t(\Sigma_\rho)\}_t$ は，Σ_ρ の有効な変分となり，

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Vol}(F_t(\Sigma_\rho)) = 0, \qquad \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathrm{Vol}(F_t(\Sigma_\rho)) \ge 0$$

が得られる．Σ_ρ 上の関数 $F_{Y,\rho}$ を

$$F_{Y,\rho}(p) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}|d(F_t)_p(T_p\Sigma_\rho)|_h, \quad p \in \Sigma_\rho$$

と置けば，上記の第 2 変分は関数 $F_{Y,\rho}$ の Σ_ρ 上の積分として表せる．このとき，$|x| \nearrow \infty$ のとき ρ に関して一様に，

$$F_{Y,\rho}(x) = O(|x|^{-n})$$

である．また極小超曲面の正則性の議論より，あるコンパクト集合 $\widetilde{K}$ $(\supset K)$ の外側では，Σ_ρ はある関数 $f_\rho(x'), x' = (x^1, \dots, x^{n-1})$ のグラフとして表せる．このとき，f_ρ の勾配ベクトルの大きさは一様に有界である．対角線論法により，適切な発散列 $\rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_i < \cdots \nearrow \infty$ を選ぶことによって，面積最小超曲面族 $\{\Sigma_{\rho_i}\}$ は，ある面積最小超曲面 Σ $(\subset X^n)$ に C^2 ノルムに関して広義一様収束する．構成法より，Σ は

$$\Sigma \subset K \cup \{x = (x', x^n) \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{\mathbf{B}_{\rho_0}(0)} \mid |x^n| \le a_0\}$$

を満たしている．i に関する一様減衰 $F_{Y,\rho_i}(x) = O(|x|^{-n})$ により，

$$\int_{\Sigma_\rho} F_Y \, d\mu_g \ge 0, \quad \text{ただし} \;\; F_Y(p) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}|d(F_t)_p(T_p\Sigma)|_h, \quad p \in \Sigma \tag{10.19}$$

が導かれる．ここで，$g = h|_\Sigma$ である．さらに，あるコンパクト集合 $\hat{K}$ $(\supset \widetilde{K})$ の外側では，Σ はある関数 $f(x'), x' = (x^1, \dots, x^{n-1})$ のグラフとして表せ，$|f| \le a_0$，$|\partial f| = O(|x'|^{-1})$ が成り立つ．

さらに，f は $X \setminus \hat{K}$ 上で極小超曲面の方程式を満たしている．

$$\sum_{i,j=1}^{n-1}\Big(\delta_{ij} - \frac{\partial_i f \partial_j f}{1 + |\partial f|^2}\Big) + \frac{2(n-1)}{n-2}\sqrt{1 + |\partial f|^2}\frac{\partial}{\partial \nu_0}\log u = 0.$$

ただし，$u(x) = 1 + A|x|^{-(n-2)} + O''(|x|^{-(n-1)})$ および $\nu_0 = (1 + |\partial f|^2)^{-1/2}(-\partial f, 1)$ はユークリッド計量に関する Σ の単位法ベクトルである．楕円型線形偏微分方程式の理論 (cf. [38]) に上記の方程式を適用すると，ある $a \in [-a_0, a_0]$ が存在して，$|x'| \nearrow \infty$ のとき，

$$f(x') = a + O'''(|x'|^{-(n-3)})$$

が導かれる．

第 3 段． 次に，ある定数 $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在して $\varphi - \alpha$ がコンパクト台を持つような任意の $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ に対して，(Σ, g) は

$$\int_\Sigma |\nabla\varphi|^2 d\mu_g \geq \int_\Sigma (\mathrm{Ric}_h(\nu,\nu) + |\mathcal{A}|^2)\varphi^2 d\mu_g \tag{10.20}$$

を満たすことを示す．ここで，ν は Σ 上の単位法ベクトル場，および $\mathcal{A}$ は Σ の第 2 基本形式を表す．

さて第 2 段で与えた関数 F_Y は，

$$F_Y = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \mathcal{R}_h(Y,e_i)Y, e_i\rangle + \mathrm{div}_X Z + (\mathrm{div}_X Y)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |(\overline{\nabla}_{e_i} Y)^\perp|^2 - \sum_{i,j=1}^{n-1} \langle e_i, \overline{\nabla}_{e_j} Y\rangle\ \langle e_j, \overline{\nabla}_{e_i} Y\rangle$$

と幾何学的に表現される (cf. [101])．ここで，$\overline{\nabla}$ は h のレビ・チビタ接続，$Z = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F_t}{\partial t}$ は変形の加速度ベクトル，$\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ は Σ 上の向き付けられた正規直交枠を表し，さらに (必ずしも Σ に接しているとは限らない)Σ に沿うベクトル場 V に対して，

$$\mathrm{div}_X V = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \overline{\nabla}_{e_i} V, e_i\rangle$$

と定義している．$Y = \hat{Y} + \varphi\nu, Z = \hat{Z} + \psi\nu$ と分解する．ここで，$\hat{Y}, \hat{Z}$ はそれぞれ Σ に接するベクトル場でを表す．Σ は極小超曲面なので，任意の関数 $\chi \in C^\infty(\Sigma)$ に対して，$\mathrm{div}_X(\chi\nu) = 0$ となることに注意すると，

$$F_Y = -\varphi^2 \mathrm{Ric}_h(\nu,\nu) - \varphi^2|\mathcal{A}|^2 + |\nabla\varphi|^2 + G$$

を得る．ただし，G は

$$\begin{aligned} G \quad &= 2\sum_{i=1}^{n-1} \varphi\langle \mathcal{R}_h(\hat{Y}, e_i)\nu, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n-1} \langle \mathcal{R}_h(\hat{Y}, e_i)\hat{Y}, e_i\rangle \\ &+\ \mathrm{div}_X \hat{Z} + (\mathrm{div}_X \hat{Y})^2 - 2\mathcal{A}(\nabla\varphi, \hat{Y}) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{A}(e_i, \hat{Y})^2 \\ &- 2\varphi \sum_{i,j=1}^{n-1} \mathcal{A}_{ij} \langle \nabla_{e_j} \hat{Y}, e_i\rangle - 2\sum_{i,j=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_j}\hat{Y}, e_i\rangle \langle \nabla_{e_i}\hat{Y}, e_j\rangle \end{aligned}$$

で与えられる．ここで，$\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j)$ である．今，$D \subset X$ を滑らかな境界を持つ有界領域とすると，超曲面に関するガウス・コダッチの方程式およびリッチの公式から，

$$\begin{aligned} \int_D G d\mu_g = \int_{\partial D} \Big\{ &(\mathrm{div}_g(\hat{Y})\langle \hat{Y}, \xi\rangle - \sum_{i,j=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_j}\hat{Y}, e_i\rangle \langle \hat{Y}, e_j\rangle \langle \xi, e_i\rangle \\ &-2\varphi \sum_{i,j=1}^{n-1} \mathcal{A}_{ij} \langle \hat{Y}, e_i\rangle \langle \xi, e_j\rangle + \langle \hat{Z}, \xi\rangle \Big\} i_\xi(d\mu_g) \end{aligned}$$

が導かれる．ただし，ξ は Σ における ∂D の外向き単位法ベクトル，および i_ξ は ξ による内部積作用素をそれぞれ表す．十分大きい $\rho > 0$ に対して，$D_\rho = \Omega_\rho \cap \Sigma$ として，上記で $D = D_\rho$ とおく．AF 計量 h および f の減衰オーダーより，右辺の境界積分は $\int_{\partial D_\rho}\{\cdots\} = O(\rho^{-(n-1)}) \cdot O(\rho^{n-2}) = O(\rho^{-1})$ となり，$\rho \nearrow \infty$ の

ときゼロに収束する．このことと不等式 (10.19) より，$\varphi = \langle Y, \nu\rangle$ $(Y = Y_0 + \alpha Y_1)$ に対して，不等式 (10.20) が導かれる．十分大きいコンパクト集合の外では $Y = \alpha\frac{\partial}{\partial x^n}$ なので,

$$\varphi = \alpha\langle \frac{\partial}{\partial x^n}, \nu\rangle = \alpha u^{2/(n-2)}(1+|\partial f|^2)^{-1/2}$$

となる．よって，$\varphi - \alpha = O''(|x'|^{-(n-2)})$ でかつそのエネルギーも有限となる．これより，$\varphi - \alpha$ がコンパクト台を持つような任意の C^∞ 級関数に対しても，不等式 (10.20) は成立することが容易に分かる．

第 4 段． 最後に，g に共形的な計量 $\widetilde{g}$ が存在して，$(\Sigma, \widetilde{g})$ はオーダー $(n-3)$ の $(n-1)$ 次元の AF 多様体で，$R_{\widetilde{g}} \equiv 0$, $\mathfrak{m}(\widetilde{g}) < 0$ となることを示す．この議論を繰り返すことにより，次元を 1 次元ずつ帰納的に $n = 3$ まで下げて行くことが出来，最終的に矛盾が導けることになる．このようにして，$4 \le n \le 7$ の場合の主張 (i) の証明が終わる．

Σ への誘導計量 $g = h|_\Sigma$ は，十分大きいコンパクト集合の外では,

$$g_{ij} = u(x', f(x'))^{4/(n-2)}(\delta_{ij} + \partial_i f \partial_j f) = \delta_{ij} + O''(|x'|^{-(n-2)})$$

と表される．これより，(Σ, g) は AF 座標 $x' = (x^1, \dots, x^{n-1})$ によりオーダー $(n-2)$ の $(n-1)$ 次元 AF 多様体になっていることがわかり，特に $\mathfrak{m}(g) = 0$ である．再び超曲面に関するガウスの方程式より,

$$\mathrm{Ric}_h(\nu,\nu) + |\mathcal{A}|^2 = \frac{1}{2}R_h - \frac{1}{2}R_g + \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^2$$

が得られ，$R_h > 0$ と不等式 (10.20) より,

$$\int_\Sigma (|\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2}R_g\varphi^2)d\mu_g \ge 0$$

が導ける．さらに $4\frac{n-2}{n-3} > 2$ $(n \ge 4)$ なので，$\varphi - \alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ がコンパクト台を持つ任意の $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ に対して,

$$\int_\Sigma \bigl(4\frac{n-2}{n-3}|\nabla\varphi|^2 + R_g\varphi^2\bigr)d\mu_g \ge 0 \tag{10.21}$$

が得られる．特に，$\varphi \not\equiv 0$ であれば，不等号 “ $\ge$ ” は “ $>$ ” に置き換えることが出来る．これより，Σ 上 $L_g\varphi = 0$ かつ $\varphi = O''(|x'|^{-(n-3)})$ ならば，$\varphi \equiv 0$ が導ける．このとき，命題 10.9 の証明の第 1 段と同様の議論を行うことにより，方程式

$$L_g u = -4\frac{n-2}{n-3}\Delta_g u + R_g u = 0, \quad u > 0, \quad u \sim 1 \quad \cdots \text{ 無限遠の近傍で}$$

の解 u が一意的に存在する．さらに，$|x'| \nearrow \infty$ のとき,

$$u(x') = 1 + A_0|x'|^{-(n-3)} + O''(|x'|^{-(n-2)}), \qquad A_0 \equiv \mathrm{const}$$

と展開される．またそのエネルギーについて，$\int_\Sigma |\nabla u|^2 d\mu_g < \infty$ となることも分かる．今，不等式 (10.21) において $\varphi = u$ とおくと,

$$\int_\Sigma \bigl(4\frac{n-2}{n-3}|\nabla u|^2 + R_g u^2\bigr)d\mu_g > 0$$

が得られる．また,

$$\begin{aligned}4\frac{n-2}{n-3}\int_\Sigma |\nabla u|^2 d\mu_g &= \lim_{\rho\nearrow\infty} 4\frac{n-2}{n-3}\int_{D_\rho}|\nabla u|^2 d\mu_g = -\lim_{\rho\nearrow\infty}\int_{D_\rho} R_g u^2 d\mu_g + 4\frac{n-2}{n-3}\lim_{\rho\nearrow\infty}\int_{\partial D_\rho} u\frac{\partial u}{\partial\xi} i_\xi(d\mu_g)\\ &= -\int_\Sigma R_g u^2 d\mu_g - 4(n-2)\lim_{\rho\nearrow\infty}\int_{\partial D_\rho}\bigl\{A_0|x'|^{-(n-2)} + O'(|x'|^{-(n-1)})\bigr\}d\mu_g\\ &= -\int_\Sigma R_g u^2 d\mu_g - 4(n-2)\sigma_{n-2}A_0\end{aligned}$$

である．これらを併せると，$A_0 < 0$ が導ける．今，Σ 上で $\widetilde{g} = u^{4/(n-3)}g$ とおくと，$(\Sigma, \widetilde{g})$ は，$R_{\widetilde{g}} \equiv 0$ であるオーダー $(n-3)$ の $(n-1)$ 次元 AF 多様体となる．さらに，$\mathfrak{m}(\widetilde{g}) = A_0 < 0$ である．以上により，主張 (i) の証明が終了した． □

以後再び，(X, h) は定理 10.3 の条件 $(*)$ を満たしている n 次元 AF 多様体とする．定理 10.6 の主張 (ii) の証明のため，先ず以下の 2 つの命題を示す[*13]．

命題 10.11． *n 次元 AF 多様体 (X, h) は下記の条件を満たしているとする．*

(1) $\mathrm{Ric}_h \geq 0$

(2) $\mathfrak{m}(h) = 0$

このとき，(X, h) は n 次元ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^n, g_{\mathbb{E}})$ に等長的である．

証明. $(x^1, \ldots, x^n)$ を (X, h) のひとつの AF 座標とする．このとき，[21, Theorem 3.1] および [74, Theorem 9.3] より，X 上の関数の組 $y = (y^1, \ldots, y^n)$ で，$x = (x^1, \ldots, x^n)$ に漸近する**調和的 AF 座標**となるもの, すなわち $|x^i - y^i| = o''(|x|^{-(\tau-1)})$，$X$ 上全体で $\Delta_h y^i = -d^* dy^i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たす AF 座標 $y = (y^1, \ldots, y^n)$ が存在する．ここで，d^* は余微分作用素を表す．このとき 1 次微分形式 $\omega^i = dy^i$ は，$d\omega^i = d^*\omega^i = 0$ を満たす．よって，1 次微分形式に関する**ボホナーの公式**より，

$$0 = (dd^* + d^*d)\omega^i = (\nabla^*\nabla + \mathrm{Ric}_h)\omega^i \tag{10.22}$$

を得る．ここで，∇^* は ∇ の随伴作用素を表す．十分大きい $\rho \geq \rho_0 > 0$ に対して，

$$X_\rho = K \cup \{y \in \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{B}_{\rho_0}(0) \bigm| |y| \leq \rho\}$$

とおく．式 (10.22) の両辺に ω^i をかけ，i に関して和を取り，X_ρ 上で積分すると，

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{X_\rho} \big(|\nabla\omega^i|^2 + \mathrm{Ric}_h(\omega^i, \omega^i)\big) d\mu_h = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\{|y|=\rho\}} h^{jk} \langle \omega^i, \nabla_{\partial_j}\omega^i \rangle i_{\partial_k}(d\mu_h) \tag{10.23}$$

を得る．一方，調和的 AF 座標 $y = (y^1, \ldots, y^n)$ において，$\nabla_{\partial_j}\omega^i = \nabla_{\partial_j} dy^i = -\Gamma^i_{jk} dy^k$ および $0 = \Delta_h y^i = h^{jk}\Gamma^i_{jk}$ である．それゆえ，

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \big(\partial_i h_{ij} - \partial_j h_{ii}\big)\partial_j &= \sum_{i,j=1}^{n} \big(\Gamma^j_{ii} - \Gamma^i_{ij}\big)\partial_j + O'(|y|^{-(2\tau-1)}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \omega^i, \nabla_{\partial_j}\omega^i \rangle \partial_j + O'(|y|^{-(2\tau-1)})\end{aligned}$$

が導かれる．これを上記の (10.23) で使い，$\rho \nearrow \infty$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(h) &= \frac{1}{4(n-1)\sigma_{n-1}} \lim_{\rho \nearrow \infty} \int_{\{|y|=\rho\}} \sum_{i,j=1}^{n} \big(\partial_i h_{ij} - \partial_j h_{ii}\big) i_{\partial_j}(d\mu_h) \\ &= \frac{1}{4(n-1)\sigma_{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \int_X \big(|\nabla\omega^i|^2 + \mathrm{Ric}_h(\omega^i, \omega^i)\big) d\mu_h \geq 0\end{aligned}$$

[*13] この 2 つの命題においては，次元 n (≥ 3) に関する制限はない．

最後の不等式では，条件 $\mathrm{Ric}_h \geq 0$ を使っている．

全質量に関して $\mathfrak{m}(h) = 0$ であったので，上式より $\nabla \omega^i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ が導かれる．一方，

$$\nabla \langle \omega^i, \omega^j \rangle = \langle \nabla \omega^i, \omega^j \rangle + \langle \omega^i, \nabla \omega^j \rangle \equiv 0$$

が成り立ち，かつ X 上全体で定義された余標構 $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ は無限遠において正規直交系になっているので，それは X 上全体で正規直交系となる．このことは，写像 $y = (y^1, \ldots, y^n) : (X, h) \to (\mathbf{R}^n, g_{\mathbb{E}})$ が局所的等長写像になっていることを意味している．さらにその上，写像 y は固有な局所的微分同相写像になっているので，y はリーマン的被覆写像になっている．$\mathbf{R}^n$ は単連結であるので，写像 $y : (X, h) \to (\mathbf{R}^n, g_{\mathbb{E}})$ は (大域的) 等長写像となり，(X, h) は $(\mathbf{R}^n, g_{\mathbb{E}})$ に等長的となる． □

命題 10.12. (X, h) を n 次元 AF 多様体，$\{h(t)\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ を AF 計量の滑らかな族で $h(0) = h$ とする．このとき，全質量関数 $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \mathfrak{m}(h(t))$ は C^1 級で，かつ

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big\{ \int_X R_{h(t)} d\mu_h - 4(n-1)\sigma_{n-1} \mathfrak{m}(h(t)) \Big\} = -\int_X \langle G(h), b \rangle d\mu_h \tag{10.24}$$

が成り立つ．ただし，$G(h) = \mathrm{Ric}_h - \frac{1}{2} R_h \cdot h$, $b = (b_{ij}) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} h(t)$ である．

証明. 全質量関数 $\mathfrak{m}(h(t))$ が t に関して C^1 級で，かつ

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathfrak{m}(h(t)) = \frac{1}{4(n-1)\sigma_{n-1}} \lim_{\rho \nearrow \infty} \int_{\{|y|=\rho\}} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\partial_i b_{ij} - \partial_j b_{ii}\right) i_{\partial_j}(d\mu_h)$$

となることは，例えば [74, Lemma 8.1, Lemma 9.4] に証明があり，ここでは省略する．

十分大きい $\rho \geq \rho_0 > 0$ に対して，

$$X_\rho = K \cup \{ y \in \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{B}_{\rho_0}(0) \bigm| |y| \leq \rho \}$$

とおく．閉多様体上の全スカラー曲率汎関数の変分の計算と同様に，

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{X_\rho} R_{h(t))} d\mu_{h(t)} = -\int_{X_\rho} \langle G(h), b \rangle d\mu_h + \int_{\{|y|=\rho\}} \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} \left(\partial_i b_{ij} - \partial_j b_{ii}\right) + O'(\rho^{-2\tau-1}) \Big\} i_{\partial_j}(d\mu_h)$$

が容易に導かれる．以上を併せ，上記の変分公式で $\rho \nearrow \infty$ とすることで，変分公式 (10.24) が得られる． □

定理 10.6 の主張 (ii) の証明. X 上で $R_h \geq 0$ および $\mathfrak{m}(h) = 0$ の条件の下，変分公式 (10.24) を使い，$\mathrm{Ric}_h \equiv 0$ を導く．これが示されれば，命題 10.11 より，主張 (ii) の証明は終了する．

$b = (b_{ij})$ をコンパクト台を持つ X 上の任意の滑らかな対称 $(0, 2)$ 型テンソル場とする．$h(t) = h + tb$ とおくと，十分小さい t $(|t| << 1)$ に対して，$h(t)$ はリーマン計量となる．しかしながら，もはや一般にそれらのスカラー曲率は非負とはならない．そこでパラメーター t に依存した，共形変形 $\widetilde{h}(t) = u_t^{4/(n-2)} h(t)$ を考え，それらのスカラー曲率を非負となるようにする．実際，線形方程式 $L_{h(t)} u_t = R_h u_t$ を考え，それらは $u_t = 1 + v_t$ とおくことで，線形方程式

$$\widetilde{L}_t v_t := -4\frac{n-1}{n-2} \Delta_{h(t)} v_t + S_t v_t = -S_t, \quad S_t := R_{h(t)} - R_h$$

と同値となる．ここで S_t はコンパクト台を持ち，かつ任意の自然数 k に対して，$t \to 0$ のとき，C^k ノルムに関して一様に $R_{h(t)} \to R_h$ なので，$R_h \geq 0$ と併せて，$t \to 0$ のとき，

$$\int_X |(R_{h(t)})_-|^{n/2} g\mu_{h(t)} = o(1)$$

を得る．したがって命題 10.9 の証明内の第 1 段と同様の議論が行え，十分小さい t に対して，線形作用素

$$\widetilde{L}_t : W^{2,2}_{-\delta}(X) \to L^2_{-\delta-2}(X)$$

は同型である．(さらに，$\widetilde{L}_t : C^{2,\alpha}_{-\tau}(X) \to C^{0,\alpha}_{-\tau-2}(X)$ も同型である [74, Theorem 9.2]．ここで，$C^{k,\alpha}_{\beta}(X)$ は [74, Section 9] で導入されている**重み付きヘルダー空間**である．) 以上により，十分小さい t に対して $L_{h(t)}u_t = R_h u_t$ の解 $u_t = 1 + v_t$ が一意的に存在する．また，$t \to 0$ のとき，C^2 ノルムに関して一様に $v_t \to 0$ であることも導かれる [74, Theorem 9.2]．$v_0 \equiv 0$，すなわち $u_0 \equiv 1$ であるので，十分小さい t に対しては X 上至る所 $u_t > 0$ となる．したがって，十分小さい t に関しては共形計量 $\widetilde{h}(t) = u_t^{4/(n-2)} h(t)$ で，それらのスカラー曲率が

$$R_{\widetilde{h}(t)} = u_t^{-(n+2)/(n-2)} L_{h(t)} u_t = u_t^{-4/(n-2)} R_h \geq 0$$

を満たすものが構成できた．

$R_{\widetilde{h}(t)} \geq 0$ と定理 10.6 の主張 (i) より，$\mathfrak{m}(\widetilde{h}(t)) \geq 0$ が導ける．また仮定より $\mathfrak{m}(h) = 0$ なので，AF 計量 $h = h(0)$ は全質量関数 $t \to \mathfrak{m}(\widetilde{h}(t))$ の最小値を与える．線形作用素 $\widetilde{L}_t$ は同型写像であるのでその逆作用素 $\widetilde{L}_t^{-1}$ を考えることが出来，それは明らかに t に滑らかに依存している．よって，正値解の族 $\{u_t\}$ は (そして共形計量の族 $\{\widetilde{h}(t)\}$ も) t に関して滑らかに依存する．共形計量の族 $\{\widetilde{h}(t)\}$ の変分ベクトルは，

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \widetilde{h}(t) = \frac{4}{n-2}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} u_t\Big) h + b$$

となる．また $R_h \equiv 0$ より，

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big(R_{\widetilde{h}(t)} d\mu_{\widetilde{h}(t)}\Big) = 0$$

が得られる．恒等式 $\langle G(h), h \rangle = 0$ および $G(h) = \mathrm{Ric}_h$ であることに注意し，上記を公式 (10.24) に代入すると，

$$\begin{aligned} 0 = 4(n-1)\sigma_{n-1}\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathfrak{m}(\widetilde{h}(t))\Big) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_X R_{\widetilde{h}(t)} d\mu_{\widetilde{h}(t)} + \int_X \langle G(h), b \rangle d\mu_h \\ &= \int_X \langle \mathrm{Ric}_h, b \rangle d\mu_h \end{aligned}$$

が示せる．$b = (b_{ij})$ はコンパクト台を持つ X 上の任意の対称 $(0,2)$ 型テンソル場であったので，上記の式より，X 上で恒等的に $\mathrm{Ric}_h \equiv 0$ であることが導かれる．以上により，主張 (ii) の証明が終了した． □

11　共形変換と山辺の問題

まずはじめにトルーディンガーの定理 6.3 を少し改変したものを示す．証明は本質的に同じである．

定理 11.1. $P, Q \in C^\infty(M)$ とする．$u_j, u \in C^\infty(M)$, $u_j > 0$, $u > 0$ は

$$\begin{aligned}
&-\Delta_g u_j(x) + P(x)u_j(x) = Q(x)u_j(x)^{\frac{n+2}{n-2}},\\
&-\Delta_g u(x) + P(x)u(x) = Q(x)u(x)^{\frac{n+2}{n-2}}
\end{aligned}$$

を満たすものとする．さらに，$W^{1,2}$ 位相で，$u_j \to u$ とすると，実は，C^∞ 位相で $u_j \to u$ である．

証明. $v_j = u_j - u$ とおくと，

$$-\Delta_g v_j + (P - \frac{n+2}{n-2}u^{\frac{4}{n-2}}Q)v_j = (u_j^{\frac{n+2}{n-2}} - u^{\frac{n+2}{n-2}} - \frac{n+2}{n-2}u^{\frac{4}{n-2}}(u_j - u))Q.$$

$A = \max(\frac{n+2}{n-2}u^{\frac{4}{n-2}}Q - P)$, $B = \max|Q|$ とする．F, $\widetilde{F}$ は定理 6.3 の証明の中にあるものとする．すると，

$$\int_M \langle dv_j, d\widetilde{F}(v_j)\rangle d\mu_g \le \int_M (Av_j\widetilde{F}(v_j) + B|(u_j^{\frac{n+2}{n-2}} - u^{\frac{n+2}{n-2}} - \frac{n+2}{n-2}u^{\frac{4}{n-2}}(u_j - u))\widetilde{F}(v_j)|)d\mu_g.$$

よって

$$\frac{1}{q}\int_M |dF(v_j)|^2 d\mu_g \le \int_M \left(AF(v_j)^2 + B\left|\frac{u_j^{\frac{n+2}{n-2}} - u^{\frac{n+2}{n-2}}}{u_j - u} - \frac{n+2}{n-2}u^{\frac{4}{n-2}}\right|F(v_j)^2\right)d\mu_g.$$

$0 < \delta < 1$, $\delta < \frac{4}{n-2}$ なる δ を任意にとると，次の不等式をみたす C_δ がとれる．

$$\left|\frac{u_j^{\frac{n+2}{n-2}} - u^{\frac{n+2}{n-2}}}{u_j - u} - \frac{n+2}{n-2}u^{\frac{4}{n-2}}\right| \le C_\delta |v_j|^\delta (u_j + u)^{\frac{4}{n-2}-\delta}.$$

ヘルダー不等式より，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q}\int_M |dF(v_j)|^2 d\mu_g \le A\int_M F(v_j)^2 d\mu_g\\
&\quad + BC_\delta\left(\int_M |v_j|^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{2n}\delta}\left(\int_M (u_j+u)^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_g\right)^{\frac{4-(n-2)\delta}{2n}}\left(\int_M F(v_j)^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}.
\end{aligned}$$

さらにソボレフ不等式 $\int_M(|dF|^2 + F^2)d\mu_g \ge C(\int_M F^{2n/(n-2)}d\mu_g)^{(n-2)/n}$ を使い，$l \to \infty$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{C}{q} - BC_\delta\left(\int_M |v_j|^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{2n}\delta}\left(\int_M (u_j+u)^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_g\right)^{\frac{4-(n-2)\delta}{2n}}\right)\left(\int_M |v_j|^{\frac{2n}{n-2}q}d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}\\
&\le (A + \frac{1}{q})\int_M |v_j|^{2q}d\mu_g.
\end{aligned}$$

仮定と，ソボレフ埋め込みから，$L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$ で $v_j \to 0$．したがって十分大きな j について，左辺の最初のカッコ内は正．$1 < q \le n/(n-2)$ にとれば，右辺 $\to 0$．よって，$L^{\frac{2n}{n-2}q}(M)$, $(q > 1)$ での収束 $v_j \to 0$ が示せた．あとは定理 A の証明 (定理 6.3 の証明の後の部分) にある議論と同様にして，$C^\infty(M)$ での収束 $v_j \to 0$ がわかる．　□

さて (M,C) での山辺の問題の話に戻る．M はコンパクト連結で，$n=\dim M\geq 3$ とする．

$$Z(M,C)=\{g\in C|\,E(g)=Y(M,C),\mathrm{Vol}(M,g)=1\} \tag{11.1}$$

とおく．すなわち，これは山辺計量の集合である．$\mathrm{Conf}(M,C)$ で (M,C) の共形変換群を表す．これは C^∞ 位相でリー群である．$\varphi\in\mathrm{Conf}(M,C)$, $g\in Z(M,C)$ に対して，$\varphi^*g\in Z(M,C)$ なので，$\mathrm{Conf}(M,C)$ は $Z(M,C)$ に自然に作用する．

今，$(M,C)\neq(S^n,C_0)$ を仮定すると，定理 C より，$Y(M,C)<n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{2/n}$．よって，定理 B より，$Y(M,C)<Y(S^n,C_0)$ である．$g\in Z(M,C)$ をひとつとめて，$\{\varphi_j\}$ を $\mathrm{Conf}(M,C)$ の任意の列とする．明らかに，$\{\varphi_j^*g\}$ は $E\colon C\to\mathbf{R}$ の最小化列なので，定理 A より，適当な部分列をとれば，$W^{1,2}(M)$ での収束 $\varphi_j^*g\to g_\infty$ が得られる．$\varphi_j^*g=u_j^{\frac{4}{n-2}}g$, $g_\infty=u^{\frac{4}{n-2}}g$ とおけば，

$$\begin{aligned}-4\frac{n-1}{n-2}\Delta_g u_j+R_g u_j&=Y(M,C)u_j^{\frac{n+2}{n-2}},\\ -4\frac{n-1}{n-2}\Delta_g u+R_g u&=Y(M,C)u^{\frac{n+2}{n-2}}\end{aligned}$$

であるから定理 11.1 より，$C^\infty(M)$ で $u_j\to u$ となる．M はコンパクトなので，1 点 $x\in M$ をとめたとき，適当な部分列をとって，ある $y\in M$ に対して，$\varphi_j(x)\to y$ とすることができる．$e_1,\ldots,e_n\in T_xM$ を g_∞ に関する正規直交枠とし，これをひとつとめる．一様位相で $\varphi_j^*g\to g_\infty$ なので，必要ならさらに部分列をとることにより，$d\varphi_j(e_i)\to\widetilde{e}_i$ とすることができる．ここで，$\widetilde{e}_1,\ldots,\widetilde{e}_n\in T_yM$ は，g に関する正規直交枠．φ を，$\varphi(x)=y$, $d\varphi(e_i)=\widetilde{e}_i$, $\varphi(\exp_{g_\infty}X)=\exp_g(d\varphi(X))$ として，x の近傍から y の近傍への写像を定義すると，φ_j^*g の接続の係数が，g_∞ の接続の係数に収束することから，φ の定義されている範囲で，C^∞ 位相で，$\varphi_j\to\varphi$ である．この議論のはり合わせで，M の微分同相写像 φ が，C^∞ 位相で $\varphi_j\to\varphi$ かつ $\varphi^*g=g_\infty$ となるようにとれる ([33, pp. 29–30])．よって，はじめの $\{\varphi_j\}$ は C^∞ 位相で収束部分列を持つことになり，$\mathrm{Conf}(M,C)$ はリー群としてコンパクトであることがわかった．したがって，次の定理が成り立つ ([86], [75], [69])．

定理 11.2 (小畠, ルロン・フェラン). M をコンパクト連結な n 次元多様体とする．共形変換群 $\mathrm{Conf}(M,C)$ がコンパクトでなければ，$(M,C)=(S^n,C_0)$ である．

この定理は，定理 C が，まだその証明が完成していないとき，成り立つであろうと考える一つの根拠となったことは疑いない．共形変換の結果として興味深いばかりでなく，山辺の問題とも上に述べたように深い関係がある．

共形変換群の種々の結果は，このように山辺の問題を通して理解しなおされるものが多い．例えば，江尻 ([34]) は，スカラー曲率一定のコンパクトリーマン多様体 (M,g) で，球面と等長的ではなく，かつ，等長変換群 $\mathrm{Isom}(M,g)$ が共形変換群 $\mathrm{Conf}(M,[g])$ の真部分集合であるような例を示した．これは次のように説明できる．注意 5.5 にあるように，$(M,g_r)=S^1(r)\times S^{n-1}(1)$ とする．このとき，$r>1/\sqrt{n-2}$ であれば，$g\in Z(M,[g_r])$ が求める性質を持っている ([53], [66])．

ここで大切なのは，$g\in Z(M,C)$ に対して，自然な包含写像

$$\mathrm{Conf}(M,C)/\mathrm{Isom}(M,g)\hookrightarrow Z(M,C) \tag{11.2}$$

があることである．

問題 11.3. 包含写像 (11.2) は全単射か?

12　山辺不変量

コンパクト n 次元 C^∞ 多様体 M と，その共形類 C に対して，山辺定数 $Y(M,C)$ が定義された (定義 5.3)．この量を，C を動かしてみると，$n \geq 3$ のとき，系 4.4 より，

$$\inf_C Y(M,C) = -\infty. \tag{12.1}$$

また命題 8.1 より，

$$Y(M,C) \leq n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{\frac{2}{n}} \tag{12.2}$$

がわかっている．そこで次のようにコンパクト C^∞ 多様体の不変量を定義する．

定義 12.1 ([61], [63], [94])**.** M の**山辺不変量** $Y(M)$ を

$$Y(M) = \sup_C Y(M,C)$$

で定義する．

この章では，山辺定数ならびに山辺不変量に関するいくつかの結果を紹介する．まず，$n=2$ のときは，ガウス・ボンネから，

$$Y(M) = 4\pi\chi(M) \tag{12.3}$$

である．定理 B と，(12.2) から，

$$Y(S^n, C_0) = n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{\frac{2}{n}} = Y(S^n). \tag{12.4}$$

また，命題 5.12 から，

$$Y(M) > 0 \iff \exists g \in \mathfrak{M}(M);\, R_g > 0. \tag{12.5}$$

正のスカラー曲率計量の存在に関しては，位相的制限がつくことが知られているが，ここではあまり深入りしない．(1980 年代までの結果については，[77], [48], [95], [43], [70] などがある.) ごく一部をひろいだすと例えば，$Y(T^n) = 0$, $Y(K3) = 0$ がわかる．ここで $K3$ は $K3$ 曲面 (実 4 次元単連結複素多様体のひとつ) である．また 9 次元の異種球面で山辺不変量が 0 以下 (実際には 0) となるものがある．

系 5.16 から直ちに，

補題 12.2. $Y(M) \leq 0$ のとき，$Y(M) = \sup_g(\min R_g)\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}$.

$Y(M) > 0$ のときには，このような等式は成り立たない．このことと関連して，次の問題は未解決である．

問題 12.3 ([63], [64])**.** $\dim M \geq 3$, $Y(M) > 0$ のとき，任意の関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して，$R_g = f$, $\mathrm{Vol}(M,g) = 1$ となる計量 g が存在するか？

上の補題は，山辺不変量の評価に役立つ．例えば次のようなことが分かる．

系 12.4. $Y(M_1) \geq 0$, $Y(M_2) \geq 0$ ならば $Y(M_1 \times M_2) \geq 0$.

証明. $Y(M_1) > 0$ または $Y(M_2) > 0$ のときは, (12.5) より明らかに $Y(M_1 \times M_2) > 0$ であるから, $Y(M_1) = Y(M_2) = 0$ のときを考えればよい．このとき，上の補題から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mathrm{Vol}(M_i, g_i) = 1$,

$R_{g_i} \geq -\varepsilon/2$ をみたす $g_i \in \mathfrak{M}(M_i)$ $(i = 1,\, 2)$ がとれるので，$M = M_1 \times M_2$, $g = g_1 + g_2$ とおけば，$\mathrm{Vol}(M, g) = 1$, $R_g \geq -\varepsilon$. よって，もし $Y(M) \leq 0$ ならば，上の補題から，$Y(M) \geq -\varepsilon$. したがって，$Y(M) = 0$. □

$Y(M_1) = Y(M_2) = 0$, しかし，$Y(M_1 \times M_2) > 0$ になるような例がある．次の系は明らかである．

系 12.5. $Y(M) \leq 0$ のとき，$Y(M) \geq n \sup_g (\min_{|X|=1} \mathrm{Ric}_g(X, X))\mathrm{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}$.

グロモフ ([41], [42]) によれば，断面曲率 K_g が負であるような計量 g を許容するコンパクト多様体に対して，この系の結論の式の右辺は負である．

問題 12.6. $\exists g \in \mathfrak{M}(M);\, K_g < 0$, ならば $Y(M) < 0$ か？

ペレルマンのポアンカレ予想の解決に関する研究の発展の 1 つとして, 3 次元の場合には肯定的な主張が [15] に述べられている．

補題 12.7. $\{g_\delta\}$ は M のリーマン計量の列で，$\delta \to 0$ で，g_δ が g_0 に，R_{g_δ} が R_{g_0} に一様収束するならば，$\lim_{\delta\to 0} Y(M, [g_\delta]) = Y(M, [g_0])$ である．したがって，$Y(M, C)$ は C に関して連続である．

証明. (5.3) を使って，地道な計算で確かめることができる． □

補題 12.8. $n \geq 3$ のとき，

(i) 任意の $g \in \mathfrak{M}(M)$ に対して，$Y(M) + (\int_M |R_g|^{n/2} d\mu_g)^{2/n} \geq 0$.
(ii) $Y(M) \geq 0$ であることと，$\inf_g \int_M |R_g|^{n/2} d\mu_g = 0$ であることは同値.
(iii) $Y(M) \leq 0$ のとき，$Y(M) = -\inf_g (\int_M |R_g|^{n/2} d\mu_g)^{2/n}$.

証明. $g \in C$ とする．(5.2) とヘルダー不等式を使って，

$$E(u^{\frac{4}{n-2}} g) = \frac{4\frac{n-1}{n-2}\int_M |du|^2 d\mu_g + \int_M R_g u^2\, d\mu_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} \geq -\frac{\int_M |R_g| u^2\, d\mu_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$
$$\geq -\left(\int_M |R_g|^{\frac{n}{2}} d\mu_g\right)^{\frac{2}{n}}.$$

よって，$Y(M, C) \geq -(\int_M |R_g|^{n/2} d\mu_g)^{2/n}$ が任意の $g \in C$ に対して成り立つ．したがって (i) が示せた．$Y(M, C) \leq 0$ のとき，C の山辺計量 g に対して，$Y(M, C) = -(\int_M |R_g|^{n/2} d\mu_g)^{2/n}$ であるので (iii) が言える．したがって，(ii) を示すためには，$Y(M) > 0$ のとき，$\inf_g \int_M |R_g|^{n/2} d\mu_g = 0$ が言えれば良い．補題 12.7 と (12.1) より，$Y(M) > 0$ ならば $Y(M, C) = 0$ となる共形類がある．この共形類の山辺計量 g を考えれば $R_g = 0$. よって，(ii) が示せた． □

コンパクト多様体 M の最小体積が $\mathrm{MinVol}(M) = \inf\{\mathrm{Vol}(M, g) \,|\, |K_g| \leq 1\}$ で定義される ([41]). $\mathrm{MinVol}(M) = \inf_g \sup |K_g|^{n/2} \mathrm{Vol}(M, g)$ と書き換えられるので次の結果を得る．

系 12.9. $Y(M) + n(n-1)\mathrm{MinVol}(M)^{2/n} \geq 0$.

4 次元のとき，$W(M, C) = \int_M |W_g|^2 d\mu_g$, $g \in C$, とおくと，これは共形不変量である．ここで，W_g はワイルの共形曲率テンソルである．次のように共形不変量だけを用いて，アインシュタイン計量を含む共形類の

特徴づけができる．

命題 12.10 ([62])**.** $n=4$ のとき，

$$W(M,C) \geq -\frac{1}{6}Y(M,C)^2 + 32\pi^2\chi(M).$$

等号成立は C がアインシュタイン計量を含むとき，そしてそのときに限る．

証明. $g \in C$ を山辺計量として，ガウス・ボンネの公式を書くと，

$$32\pi^2\chi(M) = \frac{1}{6}Y(M,C)^2 - 2\int_M |\mathrm{Ric}_g^\circ|^2 d\mu_g + W(M,C).$$

これで不等式が示された．等号条件はアインシュタイン計量が山辺計量である事 (系 7.5) に注意すればすぐわかる． □

写像 $(M,C) \mapsto (Y(M,C), W(M,C))$ の像がどうなっているのかは，興味深い問題である．詳しいことはあまり知られていない ([7]).

さて，これまで述べた結果は暗黙のうちに M が連結であることを仮定しているものもあるが，次に連結でない場合の山辺不変量を考える．$M_1 \amalg M_2$ で M_1 と M_2 の非交和を表す．

補題 12.11.

$$Y(M_1 \amalg M_2) = \begin{cases} Y(M_1) + Y(M_2) & \cdots\ n=2 \text{ のとき}, \\ -(|Y(M_1)|^{n/2} + |Y(M_2)|^{n/2})^{2/n} & \cdots\ Y(M_1) \leq 0 \text{ かつ } Y(M_2) \leq 0 \text{ のとき}, \\ \min\{Y(M_1), Y(M_2)\} & \cdots\ \text{その他}. \end{cases}$$

証明.

$$\begin{aligned} Y((M_1,C_1) \amalg (M_2,C_2)) &= \inf_{g_i \in C_i} \frac{\int_{M_1} R_{g_1} d\mu_{g_1} + \int_{M_2} R_{g_2} d\mu_{g_2}}{(\mathrm{Vol}(M_1,g_1) + \mathrm{Vol}(M_2,g_2))^{\frac{n-2}{n}}} \\ &= \inf_{0 \leq t \leq 1} \inf_{\mathrm{Vol}(M_1,g_1)=1-t} \inf_{\mathrm{Vol}(M_2,g_2)=t} \left(\int_{M_1} R_{g_1} d\mu_{g_1} + \int_{M_2} R_{g_2} d\mu_{g_2}\right) \\ &= \inf_{0 \leq t \leq 1} (Y(M_1,C_1)(1-t)^{\frac{n-2}{n}} + Y(M_2,C_2)t^{\frac{n-2}{n}}) \\ &= \begin{cases} Y(M_1,C_1) + Y(M_2,C_2) & \cdots\ n=2 \text{ のとき}, \\ -(|Y(M_1,C_1)|^{n/2} + |Y(M_2,C_2)|^{n/2})^{2/n} & \cdots\ Y(M_1,C_1) \leq 0 \text{ かつ } Y(M_2,C_2) \leq 0 \text{ のとき}, \\ \min\{Y(M_1,C_1), Y(M_2,C_2)\} & \cdots\ \text{その他}, \end{cases} \end{aligned}$$

となることから． □

注意 12.12. この計算を $n \geq 3$, $Y(M_1) > 0$ の場合に見ると，連結でない場合には一般に山辺の問題が解けないことがわかる．

命題 12.13 ([18], [11])**.** $(\widetilde{M}, \widetilde{C}) \to (M,C)$ が非自明な有限被覆で，$Y(M,C) > 0$ ならば，$Y(\widetilde{M}, \widetilde{C}) > Y(M,C)$.

したがって，$n \geq 3$ のとき，$M = S^1 \times S^{n-1}$ とすると，$Y(M,C) = Y(M)$ をみたす共形類 C は存在しない．なぜならば，どのような C に対しても S^1 の 2 重被覆からくる 2 重被覆 $p\colon S^1 \times S^{n-1} \to S^1 \times S^{n-1}$ を考えれば，$Y(M, p^*C) > Y(M,C)$ だからである．

このように, $Y(M)=Y(M,C)$ をみたす共形類 C の存在は一般には言えない．つまり, $Y(M,C_i)\nearrow Y(M)$ のような共形類の列をとっても，その極限 $\lim(M,C_i)$ はあまりはっきりしない．しかし，特別な場合を見ると，ある種の特異性をもった極限が得られる場合がある．例えば，$n\geq 3$ のとき $(M,g_r)=S^1(r)\times S^{n-1}(1)$ とすると，$[g_r]$ の山辺計量は具体的に分かり ([37] の結果を使う)，$\lim_{r\to\infty}Y(M,[g_r])=Y(M)=Y(S^n)$ であることもわかる．一般的に分かっていることは少ない ([2], [3], [103]).

問題 12.14. $\lim_{i\to\infty}Y(M,C_i)=Y(M,C)$ のとき，(M,C_i) の極限の幾何を考察せよ．

極限は多様体になるとは限らないので, 特異性をもつ空間での山辺の問題も興味をもたれている ([6], [55], [105], [5], [8], [9])．また次の問題も $Y(M,C)>0$ の場合は未解決である ($Y(M,C)\leq 0$ の場合については, 例えば [20] を参照).

問題 12.15. $Y(M,C)=Y(M)$ をみたす共形類 C はアインシュタイン計量を含むか？

以下では，多様体の手術と山辺不変量に関する知られている結果を紹介する．M は n 次元コンパクト多様体で，k 次元球面の埋め込み

$$S^k\hookrightarrow M$$

が与えられているとする．さらにこの埋め込みの法束が自明であるとする．すると，S^k の近傍は $S^k\times D^{n-k}$ であり，埋め込み

$$S^k\times D^{n-k}\hookrightarrow M$$

を得る．ここで D^{n-k} は $n-k$ 次元閉円板である．境界について

$$\partial(S^k\times D^{n-k})=\partial(D^{k+1}\times S^{n-k-1})$$

であるから，境界での張りあわせで多様体

$$\hat{M}=(M\setminus(S^k\times D^{n-k}))\cup(D^{k+1}\times S^{n-k-1})$$

を得る．自然な埋め込み $S^k\subset S^n$ に対して，$\overline{S^n\setminus(S^k\times D^{n-k})}=D^{k+1}\times S^{n-k-1}$ であるから,

$$\hat{M}=(M\setminus(S^k\times D^{n-k}))\cup(S^n\setminus(S^k\times D^{n-k}))$$

と考えることもできる．このような $\hat{M}$ を M から (法束が自明な) 埋め込まれた S^k に沿う**球面改変**をほどこしてできた多様体という．球面改変を単に**手術**とも言う．$\hat{M}$ の位相は M への S^k の埋め込み方およびその法束の自明化の仕方に依存するが, 記法においては単に $\hat{M}$ と書くことにする．手術によって得た $\hat{M}$ は M とコボルダントであり，また逆にコボルダントな 2 つの多様体は手術を有限回行うことに移りあえる．このように手術はコボルディズムの理論と関係がある．以下，手術に関して簡単な基礎事項を述べる．

- $S^0\subset S^n$ に沿う手術により，$S^1\times S^{n-1}$ または $S^1\tilde{\times}S^{n-1}$ を得る．$S^1\tilde{\times}S^{n-1}$ は S^1 上の向き付け不能な S^{n-1} 束である．2 種類出てくるのは S^0 の法束の自明化の仕方による．
- M を埋め込まれた S^k に沿って手術をして $\hat{M}$ が得られたとする．このとき，$\hat{M}$ に埋め込まれた S^{n-k-1} の沿って手術をすると M に戻る．
- $M_1\cup M_2$ を非交和とし，M_1, M_2 からそれぞれ 1 点をとり，S^0 の埋め込みを考える．この S^0 に沿っての手術は連結和 $M_1\# M_2$ である．

- M のひとつの連結成分に S^0 を埋め込み，同調する向きで法束の自明化をして手術をすると $\hat{M} = M\#(S^1 \times S^{n-1})$ を得る．このとき $\hat{M}$ に自然に埋め込まれた S^1 に沿って手術をすると M に戻る．

以下，$\hat{M}$ で n 次元コンパクト多様体 M を埋め込まれた S^k に沿う手術で得られた n 次元コンパクト多様体を表す．

定理 12.16 ([95], [44])**.** $k \leq n-3$, $Y(M) > 0$ ならば $Y(\hat{M}) > 0$.

これはまだ山辺不変量の概念が意識されない頃の結果である．証明のアイデアは明快で，このような手術をするとき，新しく付け加わる部分，$D^{k+1} \times S^{n-k-1}$，で積の因子の球の次元が $n-k-1 \geq 2$ であることから正のスカラー曲率を出せるということにある．

定理 12.17 ([63])**.** $n \geq 3$, $k = 0$ ならば $Y(\hat{M}) \geq Y(M)$.

これを示すにはやや精密な議論が必要である．その証明は論文 [63] を参照して欲しい．

系 12.18. $n \geq 3$ のとき，$Y(S^1 \times S^{n-1}) = Y(S^1 \widetilde{\times} S^{n-1}) = Y(S^n)$.

S^1 との直積空間については, [90] がある．これに先行する研究として [10] がある．補題 12.11 から,

系 12.19. $n \geq 3$ のとき

$$Y(M_1 \# M_2) \geq Y(M_1 \amalg M_2) = \begin{cases} -(|Y(M_1)|^{\frac{n}{2}} + |Y(M_2)|^{\frac{n}{2}})^{\frac{2}{n}} & \cdots\ Y(M_1) \leq 0, Y(M_2) \leq 0 \text{ のとき}, \\ \min\{Y(M_1), Y(M_2)\} & \cdots\ \text{その他}. \end{cases}$$

系 12.20. $n \geq 3$ のとき，$Y(M_1) \geq 0$, $Y(M_2) \geq 0$ ならば $Y(M_1 \# M_2) \geq 0$.

具体例として，$n \geq 3$ のとき $Y(T^n \# T^n) = 0$ などがわかる．

定理 12.21 ([91])**.** $k \leq n-3$, $Y(M) \leq 0$ ならば，$Y(\hat{M}) \geq Y(M)$.

この定理の証明は定理 12.16 と似ている．補題 12.2 を使うのが要点である．この結果と手術に関する性質ならびに定理 12.16 を用いて次の系を得る．

系 12.22. $2 \leq k \leq n-3$, $Y(M) \leq 0$ ならば，$Y(\hat{M}) = Y(M)$.

系 12.23. $n \geq 4$, $Y(M) \leq 0$ ならば，$Y(M\#(S^1 \times S^{n-1})) = Y(M)$.

系 12.24. $k \leq n-3$, $Y(M) \geq 0$ ならば，$Y(\hat{M}) \geq 0$.

この最後の系，系 12.4, 系 12.20 から山辺不変量が非負であるような多様体の族は，ある種のまとまりをもっていることが観察される．ペティアンは次の結果を示した．

定理 12.25 ([89])**.** $n \geq 5$, M は単連結ならば，$Y(M) \geq 0$.

この定理はグロモフ・ローソンの結果，およびそれを完成させたストルツによる次の定理を用いる．

定理 12.26 ([44], [102])**.** $n \geq 5$, M は単連結とする．$Y(M) > 0$ であるための必要十分条件は，M がスピンでない，または M がスピンで $\alpha(M) = 0$ である．

ここで α はスピンコボルディズム不変量で，$n \equiv 0 \mod 8$ のときは $\alpha(M)$ はディラック作用素の指数,

$n \equiv 4 \mod 8$ のときは $\alpha(M)$ はディラック作用素の指数の $1/2$, $n \equiv 1 \mod 8$ のときは，その値は 0, 1 で調和スピナーの空間の次元の偶奇と一致する．$n \equiv 2 \mod 8$ のときも，その値は 0, 1 で正の調和スピナーの空間の次元の偶奇と一致する．それ以外の次元では 0 である．(cf. [48]).

定理 12.25 は現在微妙な状況にあるといえなくもない．というのは本書を書いている時点で，5 次元以上の多様体で山辺不変量が負になる例が知られていないからである．とはいえ，注目すべき結果であり，実際，4 次元では単連結な多様体で山辺不変量が負になるものがたくさんあることが知られている．5 次元以上という仮定は必要である．

4 次元多様体の山辺不変量，特に非正なものは，1990 年代にルブランにより，サイバーグ・ウィッテン理論を使ってかなりひろいクラスで求められた ([71], [73] など)．さらにルブランは $Y(\mathbf{C}\mathrm{P}^2) = 12\sqrt{2}\pi$ であることも示した ([72], [46])．これは $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ のフビニ・スタディ計量の属する共形類が山辺不変量を与えることを言っている．ちなみに，$Y(S^4) = 8\sqrt{6}\pi$ である．このルブランによる仕事が山辺不変量に関する 1990 年代のもっとも大きな進展と言える．続く仕事として [52], [92] などがある．

21 世紀に入ってからの大きな進展は，ブレイ・ネヴェスによる [26] である．この論文で彼らは $Y(\mathbf{R}\mathrm{P}^3)$ を決定した．この延長線上に，芥川・ネヴェスによる [11] がある．

以上，おおまかに山辺不変量に関する結果を述べた．わからないことは沢山ある．

問題 12.27. $Y(S^2 \times S^2)$ を求めよ．

系 7.5 より，$Y(S^2 \times S^2) \geq 16\pi$ であることは容易に確かめられる．ベーム・ワン・ツィラー [25] は $Y(S^2 \times S^2) > 16\pi$ であることを示した．$Y(S^2 \times S^2)$ が $Y(S^4)$ より本当に小さいのかどうか，あるいは，$Y(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)$ と比較してどうなのか，未解決である．この問題の解は，手術と山辺不変量に関する一般的な問題に新たな一歩を与えるであろう．山辺不変量の手術理論に関する最近の結果については [13] を参照.

最後に，山辺不変量に関するものではないが，ブレンドル*14 ([27], [28]) による最近の非線形解析の結果を紹介しておく: 次元 $n \geq 25$ の球面 S^n の共形類 C で，山辺汎関数 $E\colon C \to \mathbf{R}$ が無限個の臨界値を持つようなものがある．次元の条件 25 は最良．山辺の問題に関わる大方の研究者が予期していた結果に反するものであったという点において，また 25 と言う，安易な解説を許さない次元条件の神秘性において，驚くべき結果であると言わざるを得ない．

*14 S・ブレンドル氏は 1981 年生まれ，ドイツで教育を受け 19 歳で学位を取得，アメリカに渡りヒュースケンのもとで頭角を現し，27 歳でスタンフォードの教授 (現職) になったアメリカの数学者．氏がプリンストンの助教授の時，直接会う機会があった．天才と呼ぶにふさわしい畏怖すべき人物であった．(小林)

参考文献

[1] R. Aiyama and K. Akutagawa, 3-manifolds with positive flat conformal structure, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 3587–3592.

[2] K. Akutagawa, Yamabe metrics of positive scalar curvature and conformally flat manifolds, Diff. Geom. Appl. **4** (1994), 239–258.

[3] —, Convergence for Yamabe metrics of positive scalar curvature with integral bounds on curvature, Pacific J. Math. **175** (1996), 307–335.

[4] —, Aubin's Lemma for the Yamabe constants of infinite coverings and a positive mass theorem, Math. Ann. **352** (2012), 829–864.

[5] —, Computations of the oribifold Yamabe invariant, Math. Z. **271** (2012), 611–625.

[6] K. Akutagawa and B. Botvinnik, Yamabe metrics on cylindrical manifolds, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), 259–333.

[7] K. Akutagawa, B. Botvinnik, O. Kobayashi and H. Seshadri, The Weyl functional near the Yamabe invariant, J. Geom. Anal. **13** (2003), 1–20.

[8] K. Akutagawa, G. Carron and R. Mazzeo, The Yamabe problem on stratified spaces, preprint (2012), arXiv:1210.8054.

[9] —, The Yamabe problem on Dirichlet spaces, preprint (2013), arXiv:1306.4373.

[10] K. Akutagawa, L. A. Florit and J. Petean, On Yamabe constants of Riemannian products, Comm. Anal. Geom. **15** (2007), 947–969.

[11] K. Akutagawa and A. Neves, 3-manifolds with Yamabe invariant greater than that of $\mathbb{RP}^3$, J. Diff. Geom. **75** (2007), 359–386.

[12] H. Alexander and R. Osserman, Area bounds for various classes of surfaces, Amer. J. Math. **97** (1975), 753–769.

[13] B. Ammann, M. Dahl, and E. Humbert, Smooth Yamabe invariant and surgery, J. Diff. Geom. **94** (2013), 1–58.

[14] M. Anderson, On uniqueness and differentiability in the space of Yamabe metrics, Comm. Contemp. Math. **7** (2005), 299–310.

[15] —, Canonical metrics on 3-manifolds and 4-manifolds, Asian J. Math. **10** (2006), 127–163.

[16] R. Arnowitt, S. Deser and C. Misner, Coordinate invariance and energy expressions in general relativity, Phys. Rev. **122** (1961), 997–1006.

[17] T. Aubin, Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, J. Diff. Geom. **11** (1976), 533–598.

[18] —, The scalar curvature, Differential Geometry and Relativity, edited by M. Cahen and M. Flato, Reidel Publ., 1976.

[19] —, Equation différentielles non linéaires et Problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pures et appl. **55** (1976), 269–296.

[20] —, Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry, Springer, 1998.

[21] R. Bartnik, The mass of an asymptotically flat manifold, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 661–693.

[22] M. S. Berger, On Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds, J. Diff. Geom. **5**, 325–332.

[23] A. Besse, Einstein Manifolds, Springer, 1987.

[24] G. A. Bliss, An integral inequality, J. London Math. Soc. **5** (1930), 40–46.

[25] C. Böhm, M. Wang and W. Ziller, A variational approach for compact homogeneous Einstein manifolds, Geom. Funct. Anal. **14** (2004), 407–424.

[26] H. Bray and A. Neves, Classification of prime 3-manifolds with Yamabe invariant greater than $\mathbf{R}\mathrm{P}^3$, Ann. of Math. **159** (2004), 407–424.

[27] S. Brendle, Blow-up phenomena for the Yamabe equation, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), 951–979.

[28] S. Brendle and F. C. Marques, Blow-up phenomena for the Yamabe equation II, J. Diff. Geom. **81** (2009), 225–250.

[29] H. Brezis and E. Lieb, A relation between pointwise convergernce of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 486–490.

[30] J. Cao, The existence of generalized isothermal coordinates for higher dimensional Riemannian manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991), 901–920.

[31] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau, Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 333–354.

[32] S. S. Chern, Minimal submanifolds in a Riemannian manifold, Univ. of Kansas, 1968.

[33] D. G. Ebin, The manifold of Riemannian metrics, Proc. Symp. Amer. Math. Soc. **15** (1968), 11–40.

[34] N. Ejiri, A negative answer to a conjecture of conformal transformations of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan **33** (1981), 261–266.

[35] R. Finn, On a class of conformal metrics, with application to differential geometry in the large, Comment. Math. Helv. **41** (1965), 1–30.

[36] S. Gallot, D. Hullin and J. Lafontaine, Riemannian Geometry, Springer, 1987.

[37] B. Gidas, W-M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbf{R}^n$, Math. Anal. and Appl. Part A, Adv. Math. Suppl. Studies **7A** (1981), 369–402.

[38] D. Gilbarg and N. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Springer, 1983.

[39] E. Giusti, Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation, Birkhäuser, 1984.

[40] W. M. Goldman, Conformally flat manifolds with nilpotent holonomy and the uniformization problem for 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), 573–583.

[41] M. Gromov, Volume and bounded cohomology, Publ. Math. IHES **56** (1983), 213–307.

[42] —, Filling Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. **18** (1983), 1–147.

[43] M. Gromov and H. B. Lawson, Spin and scalar curvature in the presence of a funcdamental group I, Ann. of Math. **111** (1980), 209–230.

[44] —, The classification of simply connected manidolds of positive scalar curvature, Ann. of Math. **111** (1980), 423–434.

[45] M. Günther, Conformal normal coordinates, Ann. Global Anal. Geom. **11** (1993), 173–184.

[46] M. Gursky and C. LeBrun, Yamabe invariants and spin^c structures, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), 965–977.

[47] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Notes on the theory of series (XII): On certain inequalities connected with the calculus of vatiations, J. London Math. Soc. **5** (1930), 34–39.

[48] N. Hitchin, Harmonic spinors, Adv. in Math. **14** (1974), 1–55.

[49] A. Huber, On the isoperimetric inequality on surfaces of variable Gaussian curvature, Ann. of Math. **60** (1954), 237–247.

[50] —, On subharmonic functions and differential geometry in the large, Comment. Math. Helv. **32** (1957), 13–72.

[51] —, Vollständige konforme Metriken und isolierte Singularitäten subharmonischer Funktionen, Comment. Math. Helv. **41** (1966), 105–136.

[52] M. Ishida and C. LeBrun, Curvature, connected sums, and Seiberg-Witten theory, Comm. Anal. Geom. **11** (2003), 809–836.

[53] H. Izeki, On the conformal transformation group of a compact Riemannian manifold with constant scalar curvature, Tokyo J. Math. **15** (1992), 123–127.

[54] —, On compact conformally flat 4-manifolds, Tohoku Math. J. **44** (1992), 299–304.

[55] T. Jeffres and J. Rowlett, Conformal deformations of conic metrics to constant scalar curvature, Math. Res. Lett. **17** (2010), 449–465.

[56] S. Kato, Examples of non-Einstein Yamabe metrics with positive scalar curvature, Tokyo J. Math. **17** (1994), 187–189.

[57] J. L. Kazdan, Some applications of partial differential equasions to problemds in geometry, Surveys in geometry 1983/84.

[58] J. L. Kazdan and F. W. Warner, Curvature functions for compact 2-manifolds, Ann. of Math. **99**, (1974), 14–47.

[59] J. L. Kazdan and F. W. Warner, A direct approach to the determination of Gaussian and scalar curvature functions, Invent. Math. **28** (1975), 227–230.

[60] O. Kobayashi, On a conformally invariant functional of the space of Riemannian metrics, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 373–389.

[61] —, On large scalar curvature, Research Report 11, Keio Univ., 1985.

[62] —, A Willmore type problem for $S^2 \times S^2$, Lecture Notes in Math. 1255, 67–72, Springer, 1987.

[63] —, The scalar curvature of a metric with unit volume, Math. Ann. **279** (1987), 253–265.

[64] —, Scalar curvature of spheres, Math. Z. **200** (1989), 273–277.

[65] —, 山辺の問題について, Seminar on Math. Sci. 16, 慶応大，1990.

[66] —, Yamabe metrics and conformal transformations, Tohoku Math. J. **44** (1992), 251–258.

[67] N. H. Kuiper, On conformally flat manifolds in the large, Ann. of Math. **50** (1949), 916–924.

[68] W. Kühnel, Conformal Transformations between Einstein Spcaces, Conformal Geometry, edited by R. S. Kulkarni and U. Pinkall, Vieweg, 1988, 105–146.

[69] J. Lafontaine, The theorem of Lelong-Ferrand and Obata, Conformal Geometry, edited by R. S. Kulkarni and U. Pinkall, Vieweg, 1988, 93–104.

[70] H. B. Lawson and M. Michelsohn, Spin Geometry, Princeton Univ. Press, 1989.

[71] C. LeBrun, Four manifolds without Einstein metrics, Math. Res. Lett. **3** (1996), 133–147.

[72] —, Yamabe constants and the perturbed Seiberg-Witten equations, Comm. Anal. Geom. **5** (1997),

535–553.
[73] —, Kodaira dimension and the Yamabe problem, Comm. Anal. Geom. **7** (1999), 133–156.
[74] J. M. Lee and T. H. Parker, The Yamabe problem, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987), 37–91.
[75] J. Lelong-Ferrand, Transformations conformes et quasi-conformes des variété riemanniennes compactes (démonstration de la conjecture de A. Lichneruwicz), Acad. Roy. Belg. Sci. Mem. Coll. 8(2), 39, no 5, 1971.
[76] —, Geometrical interpretation of scalar curvature and regularity of conformal homeomorphism, Differential Geometry and Relativity, edited by M. Cahen and M. Flato, Reidel Publ., 1976.
[77] A. Lichnerowicz, Spineurs harmoniques, C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963), 7–9.
[78] J. Lohkamp, The space of negative scalar curvature metrics, Invent. Math. **110** (1992), 403–407.
[79] —, Metrics of negative Ricci curvature, Ann. of Math. **140** (1994), 655–683.
[80] J. Milnor, Morse Theory, Princeton Univ. Press, 1963.
[81] —, A note on curvature and fundamental group, J. Diff. Geom. **2** (1968), 1–7.
[82] F. Morgan, Geometric Measure Theory – a beginner's guide –, Academic Press, 1988.
[83] 中島啓, Yau のトリック, 数学 **41** (1989), 253–258.
[84] 西川青季, Positive mass 予想, Reports on Global Analysis **IV**, Minimal Surfaces–極小曲面の応用–(1982), 83–116.
[85] M. Obata, Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 333–340.
[86] —, The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. **6** (1971), 247–258.
[87] T. Parker and C. Taubes, On Witten's proof of the positive energy theorem, Comm. Math. Phys. **84** (1982), 223–238.
[88] J. Petean, Computations of the Yamabe invariant, Math. Res. Lett. **5** (1998), 703–709.
[89] —, The Yamabe invariant of simply connected manifolds, J. Reine Angew. Math. **523** (2000), 225–231.
[90] —, Isoperimetric regions in spherical cones and Yamabe constants of $M \times S^1$, Geom. Dedicata **143** (2009), 37–48.
[91] J. Petean and G. Yun, Surgery and the Yamabe invariant, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), 1189–1199.
[92] H. Sasahira, Spin structures on Seiberg-Witten moduli spaces, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **13** (2006), 347–363.
[93] R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, J. Diff. Geom. **20** (1984), 479–495.
[94] R. Schoen, Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics, Lect. Notes in Math. **1365** (1989), 121–154.
[95] R. Schoen and S.-T. Yau, On the structure on manifolds with positive scalar curvature, Manusctipta Math. **28** (1979), 159–183.
[96] —, On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, Comm. Math. Phys. **65** (1979), 45–76.
[97] —, Proof of the positive action conjecture in quantum relativity, Phys. Rev. Lett. **42** (1979), 547–

548.

[98] —, Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature, Invent. Math. **92** (1988), 47–71.

[99] —, Lectures on Differential Geometry, ConferenceProceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology **I**, International Press, 1994.

[100] R. Schoen, L. Simon and S.-T. Yau, Curvature estimates on minimal hypersurfaces, Acta Math. **134** (1975), 275–288.

[101] L. Simon, Lectures on Geometric Measure Theory, Centre for Math. Anal., Australian National Univ., 1984.

[102] S. Stolz, Simply connected manifolds of positive scalar curvature, Ann. of Math. **136** (1992), 511–540.

[103] G. Tian and J. Viaclovsky, Moduli spaces of critical Riemannian metrics in dimension four, Adv. Math. **196** (2005), 346–372.

[104] N. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968), 265–274.

[105] J. Viaclovsky, Monopole metrics and the orbifold Yamabe problem, Ann. Inst. Fourier **60** (2010), 2503-2543.

[106] E. Witten, A simple proof of the positive energy theorem, Comm. Math. Phys. **80** (1981), 381–402.

[107] H. Yamabe, On the deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Osaka Math. J. **12** (1960), 21–37.

あとがき

小林治氏の講義録 [65] は山辺の問題の解説とその解決および山辺不変量に関する非常に優れた解説書です．残念ながら，現在では絶版となっています．他にもリー・パーカー [74]，シェーン・ヤウ [99, Chapters V, VI]，オーバン [20] 等の優れた解説書がありますが，それらは全て幾何解析に重点が置かれたものです．一方，小林氏の講義録 [65] の視点は，非常に幾何的で他のものとは異なっています．その大きな要因は，今後の目指す方向性が幾何解析か幾何かの違いにあると思います．その第 9 章の「問題」は，幾何学者に問いかけられた未解決問題集でした．現在までそのいくつかは部分的に解決されていますが，そのどれもが深い結果です．このことは，これらの問題が本質的かつ深遠な問題であったことを意味しており，小林治氏の先駆的な洞察力を物語っています．さらに，いくつかのオリジナルな結果，および既存の結果やその証明の改良が含まれていて，貴重な解説書であったと言えます．

幸いにも，今回その改訂増補版にあたるものを出版することとなりました．大きな改訂は，第 10 章 (定理 C の証明 (3)=正質量定理の証明) の追加，第 12 章 (山辺不変量) の最新化にともなう大幅な更新，の 2 点です．その他の章においても，内容は以前のものより更に推敲・増補されています．

「多様体の曲率と言うようなものを表現したかった．そのようなものの一つが山辺不変量である」，と小林治氏は気持ちをあかされます．山辺不変量に関して分らないことが多く，その研究は深遠で難しいと執筆者達は感じています．一方近年，4 次元の山辺不変量はサイバーグ・ウイッテン理論によって, 3 次元の山辺不変量はリッチフローおよび逆平均曲率流の手法によって，かなりのことが分るようになって来ました．逆に述べると，この不変量をさらに研究することで，幾何・トポロジーの新たな深遠な領域に切り込んでいくことになり，とてもワクワクする研究対象とも感じています．本書が若い研究者のチャレンジ精神をかき立てるものになっていれば幸いです．

最後になりましたが，本書の執筆を機会を与えて下さった前田吉昭氏，遅々として進まない我々の原稿を辛抱強く待ち続けていただいた日本数学会メモアール編集委員の古田幹雄氏に深く感謝いたします．また 2 名の査読者の方々からは有益なコメントをいただき，ここに感謝いたします．

2013 年 5 月　　　　芥 川 和 雄, 井 関 裕 靖