ホモロジー的ミラー対称性の近況

深谷賢治　(Simons Center for Geometry and Physics)*

1. ミラー対称性

ホモロジー的ミラー対称性はコンセビッチ ([Ko]) によってチューリッヒの国際数学者会議の講演の中で提唱された。それはミラー対称性をより深く理解しようという試みであった。ミラー対称性はもともと物理学者が発見した形では、あるキャラビヤウ多様体 M[1] に対して、そのミラー $M^\perp$ を対応させて、M 上の弦理論のあるモデル（A モデル）と $M^\perp$ 上の別のモデル（B モデル）が一致するというものであった。それが数学者の間でも有名になったのは、キャンデラスたち ([COGP]) がそれを用いて、$\mathbf{C}P^4$ の 5 次超局面の中の有理曲線の数を、ミラーである空間（Mirror quintic と呼ばれる）の複素構造の変形理論が関わる（周期の理論）ピカールフックス方程式を使って数える公式を与えたことが大きい理由であった。これは現在では古典的ミラー対称性と呼ばれるものの重要な場合である。古典的ミラー対称性は、M のグロモフ-ウィッテン不変量（種数０）が $M^\perp$ の層係数コホモロジーが定める積構造（湯川結合）と一致すると述べられる。最初は M,$M^\perp$ は３次元キャラビヤウ多様体であったが次元は３以外の場合にも拡張された。さらに例えば種数が０以外のグロモフ-ウィッテン不変量に対しても湯川結合を量子小平・スペンサー理論 ([BCOV]) に置き換えて成立すると拡張された。

もともとの５次超局面の中の有理曲線に関するキャンデラスたちの考察はその後ギヴェンタルら ([Giv]) によって厳密に証明された。同様のミラー対称性が証明される例は他にもありまたその後も増え続けているが、それはここでのテーマではないので、述べない。

ホモロジー的ミラー対称性を考える目的の一つは、「数の一致」を超えてミラー対称性をよりよく理解したいということと、あまり計算に頼らない証明を与えて、なぜミラー対称性が成立するかを理解したいという２つと思われる。

この予稿ではホモロジー的ミラー対称性のついてのいろいろな事柄を，広く浅く書いておく。記述の正確さを犠牲にして，短く縮めてあるので，数学らしい正確な記述とはいえない。講演ではここに書かれていることの一部をもう少し数学的にしゃべる予定である。（この予稿よりは，もう少し詳しくあるいは丁寧にしゃべる予定。）どれをしゃべるか現時点（予稿の締め切りは７月末）では未定である。

なお本稿のホモロジー的ミラー対称性の記述はシンプレクティック側の記述に重点を置いており，その分複素幾何（代数幾何）側の記述が手薄くなっている．これは筆者の専門がシンプレクティック幾何であることが理由である．

この原稿は浦項の IBS Center for Geometry and Physics で書かれた．同センターに感謝する．

2010 Mathematics Subject Classification: 53D05, 53D40, 53D12, 53D37
キーワード：Symplectic manifolds, Floer homology, Lagrangian submanifold, Mirror symmetry
*Simons Center for Geometry and Physics, State University of New York Stony Brook, NY 11794-3636 U.S.A.
e-mail: kfukay@scgp.stonybrook.edu
web:

[1] 幾つかの流儀があるが、ここでは第一チャーン類が０のケーラ多様体としておく。

2. ホモロジー的ミラー対称性の主張

まずホモロジー的ミラー対称性の主張を簡単に述べる。

予想 1 キャラビヤウ多様体 M に対してそのミラーであるキャラビヤウ多様体 $M^\perp$ を対応させることができる。

もちろんこれだけでは何の意味もない。M と $M^\perp$ がどういう関係にあるかを述べていく。まず $M^\perp$ に対して、その上の解析的連接層の作る圏を考え、$Sh(M^\perp)$ とする。その導来圏を $DSh(M^\perp)$ とかく。$DSh(M^\perp)$ の対象は解析的連接層の作る鎖複体である。$DSh(M^\perp)$ が、弦理論で B モデルにおける D ブレーンの圏であるとされる。

A モデルにおける D ブレーンの圏はラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジー ([Fl]) を用いて構成される（深谷圏と呼ばれる。）これは解析的連接層とその層係数コホモロジーほどなじみ深いものではないと思われるので少しだけ説明する。M はケーラー多様体だったので、そのケーラー形式という閉 2 次微分形式 ω が定まる。(M,ω) はシンプレクティック多様体である。M を複素 n 次元とする。M のラグランジュ部分多様体 L とは、実 n 次元部分多様体であって、ω が L に制限すると 0 になるものをいう。2 つのラグランジュ部分多様体 L_1,L_2 の間のフレアーホモロジー $HF(L_1,L_2)$ とは、「交点数のカテゴリー化」であって、交わり $L_1 \cap L_2$ の点を基底とするベクトル空間 $CF(L_1,L_2)$ に L_1,L_2 を境界にもつ正則円盤を使って、境界作用素

$$\partial : CF(L_1,L_2) \to CF(L_1,L_2) \tag{1}$$

を定義したホモロジー群である。

荒くいうと、M の深谷圏 $Fuk(M,\omega)$ とは、対象が M のラグランジュ部分多様体 L で、射が $CF(L_1,L_2)$ の元である圏である。射の合成は、L_1,L_2,L_3 を境界にもつ正則円盤（3 角形）を使って定義する写像

$$\mathfrak{m}_2 : CF(L_1,L_2) \otimes CF(L_2,L_3) \to CF(L_1,L_3) \tag{2}$$

である。（これはまだいろいろ不正確であるが、ここではこの程度にとどめる。）

ホモロジー的ミラー対称性は次のように述べられる。

予想 2 圏同値

$$DFuk(M,\omega) \cong DSh(M^\perp)$$

が存在する。ここで $DFuk(M,\omega)$ は $Fuk(M,\omega)$ の導来圏である。

3. 楕円曲線と複素トーラス

コンセビッチがチューリッヒでホモロジー的ミラー対称性を提唱ときにその根拠とした重要な例は、楕円曲線である。$M = T$ を楕円曲線とするとそのミラーも $T^\perp$ も楕円曲線である。ただし、$T^\perp$ の複素構造は T のシンプレクティック構造によって決まる。すなわち、T の面積（シンプレクティック形式の積分）を B とすると、$T^\perp$ の基本領域は辺の長さが、1 と B である長方形になる。（T のシンプレクティック構造の概念を一般化して複素化したケーラー形式を考えると、基本領域が平行四辺形である場合が現れる。）

楕円曲線 $T^\perp$ の解析的連接層はよくわかっている。大体直線束だけを考えればよい。その場合の圏 $DSh(T^\perp)$ での射の合成は大体テータ関数で与えられる。

T のラグランジュ部分多様体もよくわかっている。すなわち、閉曲線である。フレアーホモロジーがうまくく決まるためには、閉曲線はホモロジー類が 0 であってはならない。閉曲線であるラグランジュ部分多様体の間のフレアーホモロジーもこの場合は簡単に計算でき、ほとんどの場合境界作用素は 0 になる。

この場合の主張の非自明な部分は、射の合成の一致である。すなわち、テータ関数のフーリエ展開が (2) としてあらわれる。

楕円曲線の例は、ポリシュチュックとザスロ ([PZ]) によってより細かく調べられた。筆者は [Fu1] でこれを高次元の複素トーラスとシンプレクティックトーラスに一般化した。ただし、その場合の予想 2 が [Fu1] で解けているわけではない。ラグランジュ部分多様体は楕円曲線の場合は容易全て分かる。(全ての 1 次元部分多様体)。しかし、次元が上がると途端に難しくなる。そこで筆者は、アファイン（平坦）部分多様体であるラグランジュ部分多様体に限った。そうすると、境界作用素は大体 0 になる。しかし、合成 (2) の計算はやはり楕円曲線より難しい。楕円曲線の場合には、円盤からの正則写像は簡単に分かる（基本的にはリーマンの写像定理)。高次元の時はそうはいかない。どうやったかは説明しないが、結論としては予想 2 は左辺をアファイン部分多様体であるラグランジュ部分多様体に右辺を semi homogeneous と呼ばれるベクトル束に制限するとほぼ証明される。

4. ストロミンジャー-ヤウ-ザスロの提案とホモロジー的ミラー対称性

ミラー対称性を幾何学的により深く理解する提案が、ストロミンジャー-ヤウ-ザスロ ([SYZ]) によってなされている。彼らの提案はホモロジー的ミラー対称性の現在進展中の証明の一つと密接に関わる。

ストロミンジャー-ヤウ-ザスロの提案をここでの話に合わせて書き換えたものは，次のようなものである。M をキャラビ-ヤウ多様体とする。M の変形の族 $\{M_t\}$ で極大退化族と言われているものを考える。これは

$$\mathfrak{M} \to D^2$$

という族で，$t \notin D^2$ の時は，そのファイバーは M_t で，$t = 0$ でのファイバー M_0 は特異で，しかも，$n = \dim_{\mathbf{C}} M$ この規約成分がどこか少なくとも 1 点で交わっているとする。典型例は

$$t\sum_{i=0}^{4} x_i^5 + x_0x_1x_2x_3x_4 = 0$$

で定まる $\mathbf{C}P^4$ の 5 次超局面の族である。

この時，M_t にキャラビ-ヤウ計量（リッチ曲率 0 のケーラー計量）を入れ，直径を 1 になるように定数倍して，これを g_t とかく。$t \to 0$ でのグロモフ-ハウスドルフ収束に関する極限 $\lim_{t\to 0}(M_t, g_t)$ を考えると，これは実 n 次元になると予想される。(多分これが証明されているのは楕円型 K3 曲面の一部だけ（グロスとウィルソン [GW]）と思われる。）この極限を B とかく。すると, (特異な）ファイバー束

$$\pi : M_t \to B \tag{3}$$

があると予想される。M_t の断面曲率が $-\infty$ に飛ばず，また，B が特異点を持たなければ，これはグロモフ-ハウスドルフ収束の一般論（[Ya]）から従うが，そういう仮定は

トーラスでない限り満たされない。従ってこのような（特異な）ファイバー束があるということ自身が予想である。ただし，多くの具体例でこのようなファイバー束は作られている。

さて，この時，ファイバー束(3)のファイバーはラグランジュ部分多様体であると予想されている。（これは，Bの特異点から離れたところにあたる部分は，複素座標で考えると，M_0のn個の規約成分が交わる点（有限個）の「近く」の部分で，そこでは，$(\mathbb{C}_*)^{\dim \mathfrak{M}}$の作用が$\mathfrak{M}$にあることが根拠であろう。）

ファイバーがラグランジュ部分多様体であるようなファイバー束の場合，ファイバーはラグランジュトーラスでなければならない。（これは，可積分系に関するリウヴィル-アーノルドの古典的な定理の帰結。）特異ファイバーに対応する部分集合$S \subset B$を除いた$B_0 = B \setminus S$ を考えると，πを$M_t^0 = \pi^{-1}(B_0)$に制限したものは，トーラスをファイバーとしたファイバー束である。このファイバー束$\pi_0 : M_t^0 \to B_0$のファイバーごとに双対トーラスを取る。こうして得られたトーラスをファイバーとするファイバー束を

$$\pi_0^{\perp} : (M^{\perp})^0 \to B_0 \tag{4}$$

とかく。

予想 3 Mのミラーは(4) のコンパクト化$\pi^{\perp} : M^{\perp} \to B$ である。

予想3がなぜホモロジー的ミラー対称性と関わるのか説明しよう。圏$DSh(M^{\perp})$から$M^{\perp}$自身を復元するにはどうしたらいいだろうか。それには，$M^{\perp}$は摩天楼層のモジュライであるという事実を使えば良い。摩天楼層というのは，点$p \in M^{\perp}$に対して考えた層$\mathfrak{F}_p$のことで

$$\mathfrak{F}_p(U) = \begin{cases} \mathbf{C} & p \in U \text{のとき} \\ 0 & p \notin U \text{のとき} \end{cases}$$

で定義される。ホモロジー的ミラー対称性と予想3 を結びつけるのが：

予想 4 摩天楼層のミラーにあたる，$Fuk(M)$ の対象は$\pi_0 : M_t^0 \to B_0$のファイバー$(\pi_0)^{-1}(x) = L_x$ とその上の平坦$U(1)$束の組である。

2節では，$Fuk(M)$ の対象はラグランジュ部分多様体としたが，ここでは，ラグランジュ部分多様体とその上の平坦$U(1)$束の組とする。これはフレアーホモロジーを平坦$U(1)$束で「捻る」ことで可能になる。

予想4の最大の根拠は，摩天楼層のコホモロジー（正確には自分自身とのExt）がトーラスのコホモロジーと一致することである。

予想4を認めると，$M^{\perp}$はBの点xと $L_x = \pi^{-1}(x)$上の平坦$U(1)$束の組全体のモジュライ空間になり，これは，ファイバーごとに双対トーラスを取ったものになる。（本当は特異ファイバーがあるから，話はもう少し複雑である。予想3はただコンパクト化といっているだけで，どういうふうにコンパクト化するかを述べていない。）

予想3，4がホモロジー的ミラー対称性で重要なのは，これらの予想が，ミラー多様体$M^{\perp}$ だけではなく，函手

$$Fuk(M,\omega) \to DSh(M^{\perp}) \tag{5}$$

を構成する手段を与えることである。このことを説明しよう。$Fuk(M,\omega)$の対象であるラグランジュ部分多様体Lを考え，対応する層（の複体）$\mathcal{E}_L$（$DSh(M^{\perp})$）をどう構

成したらいいかを考えよう。層はまあ特異点がある正則ベクトル束のようなものだと思うことにして $\mathcal{E}_L$ はベクトル束であるとしてみる。すると，まずその各点 $p \in M^{\perp}$ でのファイバー $(\mathcal{E}_L)_p$ を求めたい。これは実は摩天楼層 $\mathfrak{F}_p$ を使って，

$$(\mathcal{E}_L)_p \cong \mathrm{Ext}(\mathcal{E}_L, \mathfrak{F}_p)$$

と求められる。$\mathfrak{F}_p$ にあたるのが，予想 4 では，$(L_{x(p)}, \mathfrak{L}_x)$ である。（ここで $\mathfrak{L}_x$ は平坦 $U(1)$ 束。）すると，予想 2 は

$$\mathrm{Ext}(\mathcal{E}_L, \mathfrak{F}_p) \cong HF(L, (L_{x(p)}, \mathfrak{L}_p))$$

を予想する。すなわち，$\mathcal{E}_L$ はフレアーホモロジーの族 $HF(L, (L_{x(p)}, \mathfrak{L}_p))$ を正則ベクトル束とみなしたものである。

すなわち，族のフレアーホモロジーに複素構造を入れるやり方があれば，ミラー函手が構成できることになる。実際は特異ファイバーがあるので，話はもう少し難しい。特異ファイバーがない場合，すなわちトーラスの場合は，3 節で述べた筆者の証明はアフィン（平らな）部分多様体であるトーラスのラグランジュ部分多様体の場合に上記の方針を実行したものである。([Fu2] も参照.）

族のフレアーホモロジーによるホモロジー的ミラー対称性の証明は現在進展中である。最近の結果については [Ab2, Ab3] などをご覧いただきたい。

5. ノヴィコフ環とリジッド幾何学

4 節でも少し出てきたが，ミラー対称性は単独のキャラビ-ヤウ多様体で考えるのではなく，極大退化族と呼ばれる円盤 D^2 でパラメトライズされる族で考えるべきである。そう考えるべきであるのは，もう一つ理由があり，それはフレアーホモロジーの係数環に関わっている。フレアーホモロジーやグロモフ-ウィッテン不変量を考える時は，擬正則曲線の数（あるいはそのモジュライ空間の（仮想）基本ホモロジー類）を考える。ただし，単にその数ではなく，

$$T^{\text{擬正則曲線の面積}} \tag{6}$$

というウェイトをつける。(6) のようやウェイトをつける理由は，そうしないと，擬正則曲線の数そのものは無限大になるからである。擬正則曲線モジュライ空間のコンパクト性は,「ある一定数 C より面積の小さい擬正則曲線のモジュライ空間はコンパクト化できる」という形で述べられる。（グロモフコンパクト性。ウーレンベックやザックス-ウーレンベックの定理から得られるもので，ウーレンベックコンパクト性と呼んだ方がいいかもしれない。）そうすると，(6) のようやウェイトをつけて数えた「擬正則曲線の数」は T の形式的べき級数として意味を持つ。正確に言うと，

$$\sum a_i T^{\lambda_i}$$

なる形式和で，$\lambda_i \in \mathbf{R}$ は $i \to \infty$ で $\lambda_i \to +\infty$ となるもの全体を考えた環の元として意味を持つ。(λ_i が整数とは限らず実数であるぶん形式的べき級数環とは異なる。）この環はノヴィコフ環と呼ばれていて Λ とかく。これは a_i がある体に値を持つ場合には，体になる。$\lambda \geq 0$ を条件としてたしたものは環でこれは Λ_0 と書く。ノヴィコフが関数についてのモース理論を閉微分 1 形式の場合に拡張した時 ([N]) 用いたものである。（ノ

ヴィコフ自身が使ったのは基本群の完備化で少し異なる。[FOOO1] でこれを使い始めた時は，普遍ノヴィコフ環と呼んだ。）

フレアーホモロジーも一般の場合は，ノヴィコフ環に係数を持つと考えるべきである。

すると，$Fuk(M,\omega)$ も Λ あるいは Λ_0 上の鎖複体を射の空間として考えるべきであろう。すると，ミラー側の $DSh(M^\perp)$ も同様でなければならない。実際 $M^\perp$ が円盤にパラメトライズされた族であると，その上の解析的連接層のカテゴリーは円盤上の正則関数の環を係数に持つ。収束性の問題があって，円盤は半径無限小の円盤と考える方がよく，すると，その上の正則関数の環とは，形式的べき級数関数環である。ノヴィコフ環と形式的べき級数関数環はべきの肩が実数か整数かの差がある。これをどう考えるべきかを説明するのは大変なので，ここでは省略する。

ノヴィコフ環や形式的べき級数関数環で考えると，$M^\perp$ はその上の「代数多様体」であるべきであるが，実はそうではなくて,「解析多様体」になる。$Fuk(M,\omega)$ の射の合成などを決める構造定数は Λ_0 の元なのであるが，$Fuk(M,\omega)$ は実は普通のカテゴリーでなく，A 無限大圏で，その積構造には高次の項がある。（合成が２次の項。）理論を正しく組み立てるには，

$$\sum T^{\lambda_i} P_i(x_1,\dots,x_m)$$

P_i は n_i 次の多項式で，$n_i \to +\infty$ というような形式和を「関数」に含めないといけない。これは多項式環 $\Lambda_0[x_1,\dots,x_m]$ の元ではなく，その完備化[2] の元である。完備化には，T-進位相を使うので，これは非アルキメデス的な付値を使っていることになる。非アルキメデス的な付値を使った完備化で「解析関数」を考える幾何を rigid analytic geometry という。ノヴィコフ環はフレアーホモロジーのかなり早い時期から使われ（ホーファーサラモンと小野が半正の場合のアーノルド予想を解決するのに使っている）た。rigid analytic geometry を使えと宣言したのはコンセヴィッチ-ソイベルマン ([KS]) である。トーリック多様体のラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジーやミラー対称性の研究で，ノヴィコフ環上の可換環論や解析幾何学が本格的に使われるようになった ([FOOO3])。現在の族のフレアーホモロジーの研究では，rigid analytic geometry が用いられている。その場合，ミラー側に現れる (4) というファイバー束は少し変わり，この射影は Λ の元に対してその付値を対応させる写像から作られる。

6. ４次曲面

サイデルは [Sei2] で４次曲面のホモロジー的ミラー対称性を証明した。これは 2000 年代始めのことで，平坦な場合（トーラス）を超えてホモロジー的ミラー対称性が証明された最初の例で，その後も大きな影響を持った。[3]

[Sei2] の４次曲面のホモロジー的ミラー対称性の証明を少しだけ説明する。M を $\mathbf{C}P^3$ の中の４次超曲面とする。シンプレクティック多様体としては (M,ω) は一意に定まる。コホモロジー類 $[\omega]$ のポアンカレ双対は因子（より正確には複素余次元 1 の複素部分多様体）$D \subset M$ で実現できる。$M_0 = M \setminus D$ に制限すると $[\omega] = 0$ であるので、$d\theta = \omega$ となる微分 1 形式 θ が取れる。（θ の D の近傍での様子を正確に記述する必要があるがここでは省略。）

---

[2] strongly convergent power series ring と呼ばれる

[3] この論文の出版は書かれてから 10 年以上後である。シンプレクティック幾何の論文のレフェリープロセスは大きな問題を抱えていて，出版に大変時間がかかることが多い。[Sei2] の内容は出版された頃にはすでに広く用いられていて、その拡張が多く行われる古典になっていた。

M_0 のラグランジュ部分多様体 L であって、$\theta|_L$ のコホモロジー類が 0 のものを完全ラグランジュ部分多様体という。完全ラグランジュ部分多様体だけを考えフレアーホモロジーを M_0 の擬正則曲線（つまり D とは交わらない擬正則曲線）を使って考えると、話がいろいろ簡単になる。例えば、

1. フレアーホモロジーはいつでも定義でき、$HF(L, L)$ は L のホモロジーに一致する。
2. フレアーホモロジーやその間の諸々の構造（特に A 無限大構造）を決めるモジュライ空間は常にコンパクトになり、ノヴィコフ環を考えなくても良い。
3. 仮想ホモロジー類を使わなくても、必要なすべての定義ができる。

サイデルは完全ラグランジュ部分多様体の有限集合 $\{L_1, \ldots, L_N\}$ を見つけ、それらが、M（D を除かない M 全体）の深谷圏 $Fuk(M)$ の生成元になっていることを示した。$\{L_1, \ldots, L_N\}$ を選ぶ選び方はあまり組織的なものでなくアドホックである。（サイデルは物理学者に相談したと書いている。）「生成元である」[4] ということの意味は 9 節を見られたい。その証明は、4 次超曲面のある S^1 でパラメトライズされる族を利用するが述べられない。

さて $\mathfrak{L} = \{L_1, \ldots, L_N\}$ を対象とし、その M_0 でのフレアーホモロジーを射とする A 無限大圏を $Fuk(M_0, \mathfrak{L})$ とかく。$\mathfrak{L}$ は $Fuk(M)$ を生成するから、大体 $Fuk(M_0, \mathfrak{L})$ は $Fuk(M)$ に近いと思われるが、一箇所で大きく違う。すなわち、$Fuk(M)$ の射を与えるフレアーホモロジーでは M での擬正則曲線を利用しているが、$Fuk(M_0, \mathfrak{L})$ は M_0 の擬正則曲線に基づいている。

$D = M \setminus M_0$ は $[\omega]$ のポアンカレ双対だから (6) の肩に出てくる面積は大体擬正則曲線と D の交点数（いつも 0 以上の整数）になる。したがって、M_0 に入っている擬正則曲線すなわち D と交わらない擬正則曲線だけを考えるというのは $T = 0$ と置くことに他ならない。

$M^\perp$ を D^2 上の族とみなすという立場だと、$Fuk(M_0, \mathfrak{L})$ のミラーは 0 のファイバー上の解析的連接層の導来圏に他ならない。

サイデルの証明は次のように続く。まず、$Fuk(M_0, \mathfrak{L})$ を計算する。カテゴリーを計算するというのは、射の空間（フレアーホモロジー）を計算し、その間の合成（積）とさらにこの場合は A 無限大圏をであるので、高次の合成がありそれを全部計算する。この計算にはレフシッツ束のフレアー理論についてのサイデルが進めてきた研究 ([Sei1]) が使われる。計算は相当に大変である。次にそれのミラーとなる複素多様体 $M^\perp$ を探してきて、また、$\mathfrak{L}$ の元のミラーとなるべき $M^\perp$ 上の解析的連接層も探してくる。[5] その間の Ext とその積（米田積）さらには高次の積（マッセイ米田積）も計算し、それがフレアーホモロジーの計算と合うことを確かめる。これはやはり大変な計算である。可能であった理由は、計算しなければない積構造が有限個でなんとか手に負える程度の量であることである。（完全ラグランジュ部分多様体だけを考えていることが、有限個である理由である。）

最後のステップでは、$Fuk(M_0, \mathfrak{L})$ のホッホシルドコホモロジーを計算し 1 次元であることをチェックする。$Fuk(M_0, \mathfrak{L})$ の係数環は $\mathbb{Q}$ である。特にノビコフ環ではない。

[4] 対象のある集合がカテゴリーを生成するとは何か？
[5] ここもアドホックで筆者にはメノコで探したように見える。

A 無限大圏のホッホシルドコホモロジーはその変形の自由度を決める。ホッホシルドコホモロジーが 1 次元であるとは、変形の仕方がパラメータの取り方を除けば 1 通りしかないことを意味する。前に述べたことから、$Fuk(M)$ は $Fuk(M_0, \mathfrak{L})$ の一つのパラメータ T を持つ変形である。この変形は自明でないことがわかるので、T の変数変換をのぞいて、$Fuk(M)$ は $Fuk(M_0, \mathfrak{L})$ で決まってしまう。したがって、$Fuk(M_0, \mathfrak{L})$ の場合に計算でチェックした一致から、$Fuk(M)$ の場合も証明される。[6]

箇条書きでまとめると、

(A) まず、$[\omega]$ のポアンカレ双対を除いた M_0 を考え、その完全ラグランジュ部分多様体の有限集合で $Fuk(M)$ を生成するもの $\mathfrak{L}$ を探す。

(B) $Fuk(M_0, \mathfrak{L})$ を計算し、それがミラーの候補となるべきものと $T = 0$ と置いたとき一致することを、計算でチェックする。

(C) $Fuk(M_0, \mathfrak{L})$ のホッホシルドコホモロジーを計算しそれが小さいことから $Fuk(M)$ が $Fuk(M_0, \mathfrak{L})$ から大体決まることを示す。

この方針はその後ホモロジー的ミラー対称性が証明された多くの例でも踏襲されている。大体、族のフレアーホモロジーを使う証明以外はほぼ全てこの方針と言ってよいであろう。2000 年代の初頭に行われたこの証明はそういう意味でホモロジー的ミラー対称性の証明のプロトタイプになった。実は必要な計算は後から出てきた種々の場合に比べても、この場合が一番大変である。欠点は種々のアドホックな点が証明にあることであるが、それらは順に解消されつつある。

7. レフシッツファイバー束とランダウ-ギンズブルグモデル：キャラビヤウでない場合

ミラー対称性は現在ではキャラビ-ヤウ多様体とは限らない、より一般の場合に拡張されていて、ホモロジー的ミラー対称性についても同様である。それについて簡単に説明する。キャラビ-ヤウ多様体は曲率 0 のばあいであるが、曲率が正の場合つまり、ファノ多様体の場合などが、多く研究されている。特に具体的にホモロジー的ミラー対称性を様々な場合に証明した論文がいろいろあり，引用すべき論文が多すぎるので，そのような論文（重要なものが多い）は引用していないことをおわびする.

まず，ホモロジー的ミラー対称性では，M と $M^{\perp}$ が持っている構造のうち半分しか使っていないことに注意しておく。すなわち，M ではシンプレクティック構造だけが $M^{\perp}$ では複素構造だけが使われる。[7] それで，一般には M と $M^{\perp}$ は非対称である。M をシンプレクティック側あるいは A 側，$M^{\perp}$ を複素側あるいは B 側などと呼ぶ。

まず，A 側の M がキャラビ-ヤウ多様体ではなくファノ多様体などの場合を考える。この時そのミラーは複素多様体 $M^{\perp}$ とその上の関数 W の組み $(M^{\perp}, W)$ になる。

このような描像は掘-Vafa の論文 [HV] に現れているが，ギヴェンタルは 1990 年代からそのようなことを述べていた。$(M^{\perp}, W)$ をランダウ-ギンズブルグモデルと呼ぶ. [8]

[6] ただし変数変換の具体的な形はこの証明ではわからない。

[7] 安定性条件を考えるときには M の構造や $M^{\perp}$ のシンプレクティック構造が使われるがここではそれには触れない。

[8] ホモロジー的ミラー対称性ではなく，古典的ミラー対称性を考えると，$(M^{\perp}, W)$ を B 側で考えたものは，特異点にまつわる周期の理論（斎藤恭司ら）になる.

シンプレクティック幾何の立場からはこれを次のように説明できる。フレアーホモロジーを2節で述べたとき，あたあもいつでも定義できるかのように書いたが，そうではなく，定義されるためには障害がある ([FOOO1])。それは偶数次のコホモロジー類 $m_0^L(1)$ である.（それぞれのラグランジュ部分多様体 L に対して定まる.）これがあるために，境界作用素(1) は2回やって0にはならず，

$$(\partial \circ \partial)(x) = \pm(\mathfrak{m}_2(\mathfrak{m}_0^{L_1}(1), x) - \mathfrak{m}_2(x, \mathfrak{m}_0^{L_2}(1))).$$

となる．M がキャラビ-ヤウ（で L_i のマスロフ指数と呼ばれる量が0）だと，$\mathfrak{m}_0^L(1)$ は2次のコホモロジー類になる．その場合は，(bounding chain b なるもので変形して）$\mathfrak{m}_0^{L_i}(1) = 0$ としないといけない．L とそうなるような変形の仕方 b の組が実は $Fuk(M, \omega)$ の対象である．

キャラビ-ヤウでない場合は，$m_0^L(1)$ は単に偶数次としかわからない．それで（bounding chain bで変形して）$m_0^{L_i}(1)$ が0次すなわち単位元の定数倍，のばあいが出てくる．この場合は，$Fuk(M, \omega)$ の対象は L と $m_0^{L_i}(1)$ が単位元の定数倍になるような b の組である．そして $W(L, b)$ を

$$\mathfrak{m}_0^L(1) = W(L, b) \times \text{単位元}$$

で定義する．すると

$$(\partial \circ \partial)(x) = (W(L_1, b_1) - W(L_2, b_2)) \cdot x.$$

となる.（ここで $x \in CF((L_1, b_1), (L_2, b_2))$. 「境界作用素」を2回繰り返したものが，定数倍になるようなものは行列分解と呼ばれ，環論では古くから知られていて，多くの研究があった．フレアーホモロジーでこのような現象があることも古くから知られ，[Oh] にも出ている．ギヴェンタールは関数 W がFOOOの障害類からこのように得られるのではないかと1990年代から述べていた．[HV] があらわれ，行列分解がミラー対称性研究で頻繁に論じられるようになった頃，[CO] は（ファノ）トーリック多様体の場合に実際にラグランジュフレアーホモロジーに出てくる $\mathfrak{m}_0(1)$ を計算し [HV] が述べる形の関数であることを証明した．当時は，W は複素数値の（ローラン）多項式とみなされていたが，[FOOO2] 以後シンプレクティック幾何の立場からは，むしろノヴィコフ環に値を持つ rigid analytic function と見なすべきであることがわかってきている．

この場合のホモロジー的ミラー対称性は「$Fuk(M, \omega)$ と W の行列分解のカテゴリーが対応する」と述べられる．この形のホモロジー的ミラー対称性を研究した論文はいろいろあり，重要なものも沢山あるが，ここでは省略する．

8. コンパクトでないラグランジュ部分多様体

逆側に移る．すなわち組 (M, W) が A 側である場合である．ここでは，W はケーラー多様体 M 上の正則関数 $W : M \to \mathbf{C}$ である．この場合は M はコンパクトではない.（例えば，$\mathbf{C}^n$ や $\mathbf{C}_*^n$.）それで，M のラグランジュ部分多様体としては，コンパクトでないものを考える必要がある．W がない場合でも，M がアファイン代数多様体である場合や，M が余接束である場合など，コンパクトでないラグランジュ部分多様体を考える必要がある場合は多い．

$W : M \to \mathbf{C}$ であるが，これはレフシッツファイバー束であると見る．この時には考えるラグランジュ部分多様体は，「安定多様体」の複素版のようなものでレフシッツシ

ンバルと呼ばれる．それは概ね次のようなものである．W の臨界値を $z_1,\ldots,z_N \in \mathbf{C}$ とする．また，$\mathbf{C}$ 上の方向 $e^{\theta i}$ を決めておく．z_i から線 C_i を引き，遠くでは $e^{\theta i}$ 方向になり，また線がお互いに交わらないようにする．すると，z_i の所で丁度消えるようなサイクルで，C_i の上にあり，C_i 上では平行移動であるようなラグランジュ部分多様体がある．これがレフシッツシンバルである．レフシッツシンバルが対象で，ある種のフレアーホモロジーが射である圏が[Sei1] で構成されていて，現在ではサイデル圏（または深谷サイデル圏）と呼ばれる．$S(M,W)$ とかくことにする．M のミラーは典型的にはファノ多様体である．この場合のホモロジー的ミラー対称性は

$$S(M,W) \cong DSh(M^{\perp})$$

である．ファノ多様体の解析的連接層の圏にはしばしば例外集合（exceptional collection）と呼ばれる生成元があり，これが，$S(M,W)$ の生成元であるレフシッツシンバルたちに対応する．

このようなミラー対称性は [Sei1] を皮切りに様々な場合に調べられている．それらの個々の結果は省略する．

1990 年代からサイデルはレフシッツペンシルに基づくフレアーホモロジーの研究について，次のような構想の元に進めていると思われる．コンパクトなシンプレクティック多様体（あるいは射影代数多様体）(M,ω) から出発し，まず因子 $D \subset M$ と正則写像 $W : M_0 = M \setminus D \to \mathbf{C}$ を作る．M 上のラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジーは M_0 上のそれの変形として理解される.（つまり，D との交点の数を使って T のべき級数環上で理論を展開した時，$T = 0$ と置いたのが M_0 上の場合である.）

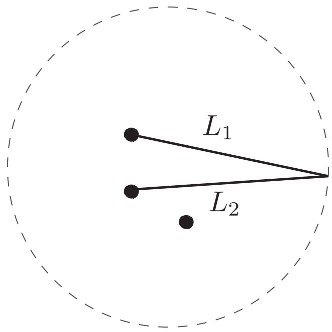
次に，M_0 上のフレアーホモロジーとファイバー $W^{-1}(z_0)$（$z_0 \in \mathbf{C}$ は臨界値でない.）のフレアー理論を比べる．M_0 上のレフシッツシンバルを考えると，それらは $W^{-1}(z_0)$ と交わりその交わりが $W^{-1}(z_0)$ のラグランジュ部分多様体であるように取れる．この時，レフシッツシンバル L_i の間のフレアーホモロジーと $L_i \cap W^{-1}(z_0)$ の間の（コンパクトシンプレクティック多様体 $W^{-1}(z_0)$ での）フレアーホモロジーには深い関係がある．

このようにして，コンパクト多様体 M から出発して，次元が一つ低い別のコンパクト多様体 $W^{-1}(z_0)$ に至った．これを繰り返すことにより，次元の帰納法でフレアーホモロジーを理解していく．代数幾何学でコホモロジーを調べるときは，似たようなやり方で次元について機能的に調べるのが常道と思われるので，これはそのアナロジーなのであろう．

サイデルからは，1990 年代のいつだったか，この構想はドナルドソン[9] との議論で生まれたもの，と聞いた記憶がある．同時に聞いたのは，このやり方でホモロジー的ミラー対称性を証明しようとすると，A 側のレフシッツファイバー束の構成の B 側の対応物が見えないのが問題である，ということだったように記憶している.（A 側のレフシッツファイバー束の構成の B 側の対応物が B 側のレフシッツファイバー束であるというのは多分違う.）

レフシッツシンバルはコンパクトでない．コンパクトでないラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジーにはコンパクトな場合にはない点が種々ある．それらについて少しだけ述べる．コンパクトでないラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジー

[9] シンプレクティック幾何にレフィシッツファイバー束を持ち込んだのはドナルドソンである．



無限遠で接している

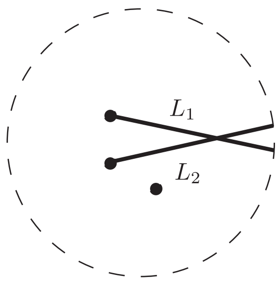


図1

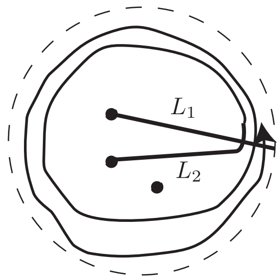


図2

が定義されるためには，無限遠方での擬正則曲線の振る舞いが制御可能であるような条件が必要であるが，それについては言及しない．

重要な点はコンパクトでない場合，フレアーホモロジーの定義には複数のやり方があり，得られるものが異なることである．層係数コホモロジーもコンパクトでない空間では，コンパクトサポートにするかしないかで答えが変わるがそれに近い．

$HF(L_1, L_2)$ を定義するには，無限遠方で L_1 と L_2 が接していると都合がわるい．(無限遠方で少し摂動しただけで交点の数が変わるようでは良い定義ができない．）実際レフシッツシンバル同士は無限遠方で接している．(傾き $e^{\theta i}$ が共通なので．）そこで一方 L_2 を無限遠方で回し」L_1 と L_2 が無限遠方で横断的にする．$W : M \to \mathbf{C}$ があるときは，W の絶対値が決める関数 $|W|$ のハミルトンベクトル場でづらす（図１）．これが一つのやり方で，サイデル圏を作るときはこうやる．

もう一つのやり方は，無限遠方で無限回回す．(図２）．

例えば，余接束 T^*M の時には，長さにの２乗に対応するハミルトン関数で動かすのがこのやり方である．これは Wrapped Floer homology（日本語訳は包装フレアーホモロジーでどうだろう）と呼ばれ $FW(L_1, L_2)$ などと書かれる．これは [AS] で登場した．余接束 T^*M のファイバー T_x^*M の場合 $FW(T_x^*M, T_x^*M)$ M のループ空間のホモロジーに一致し，特に無限次元である．包装フレアーホモロジーを使って A_∞ 圏を作ることができる．ミラー対称性との関わりでいうと，非コンパクト複素多様体，例えばアファイン代数多様体，での解析的連接の層係数コホモロジーは無限次元（例えば多項式環）である．包装フレアーホモロジーはそのミラーに当たる．

（シンプレクティック側が）リーマン面から有限個の点を除いたもの，などの場合のホモロジー的ミラー対称性などが包装フレアーホモロジーを用いて研究されていて，具体例は色々と研究されている．

9. 閉開写像と A 無限大圏の生成元

6 節で述べたように、ホモロジー的ミラー対称性の証明の一つの要点は $Fuk(M)$ の生成元を見つけることである。カテゴリーを計算する、というのは、有限個の（できれば少数の）生成元を見つけなければ困難である。(全ての射の空間すなわちフレアーホモロジーとその間の全ての積構造を計算する必要があるわけだが、無限個の対象があったら、そんな計算はできまい。）対象の有限集合が生成元であることを示すのに、6 節の証明にはまだアドホックな点があったが、最近ではより組織的な証明法が見つかっている。

それが見つかる出発点はコンセヴィッチの提案である。それが書いてある文献を筆者は知らない。[10]（2000 年ぐらいにコンセヴィチからそういう内容の電子メールをもらった記憶がある。メールそのものはその後持っていたパソコンのハードディスクが壊れた時なくなってしまった。）これは代数幾何のモチーフ理論で使われる考え方をミラーで写したものと考えられる。複素多様体 $M^{\perp}$ を考える。有限個の $DSh(M^{\perp})$ の対象 $\mathfrak{F}_1,...,\mathfrak{F}_N$ が $DSh(M^{\perp})$ を生成することを証明するにはどうすれば良いだろうか。ここで生成するとは次のことを言う。$\mathfrak{F}_1,...,\mathfrak{F}_N$ から出発して、次の操作を行う。

1. それらの直積からなる層をメンバーとする鎖複体を作りそれを加える。また、次数をずらす操作も許す。

2. $\mathfrak{F}$ が直和分解するとき、その直和因子も加える

この２つの操作を繰り返して、$DSh(M^{\perp})$ の全ての対象が得られる時 $DSh(M^{\perp})$ は $\{\mathfrak{F}_1,...,\mathfrak{F}_N\}$ によって split generate されるという。

さて、$\{\mathfrak{F}_1,...,\mathfrak{F}_N\}$ の２つの元の外部テンソル積

$$\mathfrak{F}_i \times \mathfrak{F}_j \tag{7}$$

は直積 $M^{\perp} \times M^{\perp}$ の解析的連接層の導来圏の対象になる。一方で $M^{\perp} \times M^{\perp}$ の対角集合 Δ も $M^{\perp} \times M^{\perp}$ の解析的連接層とみなせる。(すなわち対角集合の定めるイデアル層を取る。）代数幾何でよく知られていると思われる主張は次の通りである。

定理 1 (7) の形の対象の集合から１、２の操作を繰り返して、Δ が得られると仮定すると、$\{\mathfrak{F}_1,...,\mathfrak{F}_N\}$ は $DSh(M^{\perp})$ を split generate する。

これは対角集合が定めるフーリエ向井変換が恒等写像であることから従う。

これをミラーに移す。すなわち $\{L_1,...,L_N\}$ のが $Fuk(M)$ を split generate するかどうかを判定するのに、$M \times M$ の対角集合（$\omega \oplus -\omega$ なるシンプレクティック構造に関するラグランジュ部分多様体）が、$L_i \times L_j$ の形のラグランジュ部分多様体から１、２の操作で得られるか調べれば良い，というものである。大体以上が２０００年にもらったコンセヴィチのメールに書いてあったことで、特にこれを使うとトーラスの場合にアファイン（平らな）ラグランジュ部分多様体が生成元になることがわかる。

２つ問題点があって、

1. ラグランジュ部分多様体の積のフレアーホモロジーを与えるはずのキュネス型の定理はまだ完成していない。[11]

[10] それでここに書いておく。

[11] Lino の結果 [Ln] がある。

2. フーリエ向井変換のミラーはまだ完成していない。[12]

この２つとも、近い将来（あと半年以内）に解決される予定であるが（[Fu3])、それを避けて次のように定式化する。

まず、対角集合のフレアーホモロジーを M の量子コホモロジー（あるいはその双対であるホモロジー）で置き換える。対角集合が、$L_i \times L_j$ の形のラグランジュ部分多様体の作る鎖複体の直和因子になるという条件を見直す。すると次の定理が得られる。

定理 2 開閉写像

$$\mathfrak{p}_* : HH(\mathcal{L}) \to H_*(M)$$

が $H_*(M)$ の基本ホモロジー類 $[M]$ を含むならば、$\{L_1, \ldots, L_N\}$ は $Fuk(M)$ を split generate する。

開閉写像 $\mathfrak{p}_*$ の解説はここでは省略する。([FOOO1] の３節などを参照。）定理の証明の詳細はアブサイの論文 [Ab1] に完全ラグランジュ部分多様体の場合が書かれている。(コンパクトでないので、M の基本ホモロジー類がないので、少し言い方を変える必要がある。）コンパクトの場合の [AFOOO] はもうすぐ完成するはずである。

定理２を用いて、生成元が求められている（求められるであろう）場合に次のようなものがある。

1. $M = T^*M$ の場合。この場合はファイバー T_p^*M が生成元である。

2. M がワインシュタイン多様体例えばアフィン代数多様体の場合。この時は、M 上に固有で下に有界な劣調和モース関数 f をとり、f のモース指数が次元の半分である臨界点 x について、その安定多様体 L_x を考える。L_x はコンパクトでないラグランジュ部分多様体である。これらが生成元であるというのが [Ab1] の中心的な帰結である。

3. M がトーリック多様体のとき。この時、トーラス作用の軌道であるラグランジュ部分多様体のうち有限個についてフレアーホモロジーが消えない。これら有限個が $Fuk(M)$ の生成元になることが、[FOOO3] と定理２からわかる。

4. $\pi : M \to B$ をストロミンジャー-ヤウ-ザスロのファイバー束とする。このファイバーたちは定理２の仮定を何らかの形で変えたものを満たし、$Fuk(M)$ の生成元となると思われる。そのままでないのは次のことが理由である。ファイバーたちは非加算無限個ある。こういう場合は単にファイバーをそれぞれ考えるのではなく、連続族と考えて、B 方向の位相も考える必要がある。すなわち位相カテゴリーのホッホシルドホモロジーは単に代数的にとったホッホシルドホモロジーとはずれる。さらに、この場合はファイバーが作る $Fuk(M)$ の対象のモジュライは rigid analytic space とみなすべきと思われるので、位相カテゴリーというより rigid analytic カテゴリーと云うべきものになるはずであり、そのホッホシルドホモロジーをしかるべく定義すると仮定が満たされるはずである。その辺はまだ定義なども未整理のようである。アブザイが今研究中のようなので、近い将来できると思われる。族のフレアーホモロジーによるホモロジ的ミラー対称性の証明の最終ステップはこの議論になると思われる。

[12] Werheim-Woodwards [WW] が部分的にやっている。

生成元の判定を用いるホモロジー的ミラー対称性の証明の大変重要な例が、最近のシェルダンらの研究（[Sh] など）である。それに簡単に触れてこの稿を終わる。[Sh] では射影空間の超曲面であるキャラビヤウ多様体でその後はより一般の場合で，ホモロジー的ミラー対称性が証明されている．(キャンデラスたちの中心的な例である５次超曲面が含まれている．）シェルダンらは良い（はめ込まれた）ラグランジュ部分多様体を見つけ，４次曲面のサイデルのやり方と共通した方法を用いる．シェルダンらの見つけたラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジーとその積構造の計算はサイデルの計算より見やすいと思われる．大きな違いはこのラグランジュ部分多様体が生成元であることの証明である．定理 2 を用いるのだが，その条件である開閉写像についての仮定をホッホシルドホモロジーを計算することなく将来の一般化が可能な良いやり方でチェックしている．考えているシンプレクティック多様体を M とし，そのミラー（の候補）を $M^\perp$ とする．前に（5 節）述べたように，$M^\perp$ は複素多様体の $D^2\setminus\{0\}$ でパラメトライズされる族（極大退化族）と見なされるべきである．極大退化族の定義そのものから次のことがわかる．$M^\perp$ への $\mathbf{Z}=\pi_1(D^2\setminus\{0\})$ の作用を考える．それを表す行列を $I+N$ とかく．すると N は冪零になるが，極大退化族のばあいは $N^n\neq 0$, $N^{n+1}=0$ である．N をかける操作はミラーに映ると ω をかける操作になる．このことからホッホシルドホモロジー上で ω を n 回かける操作の像が 0 でないことがわかる．ω^n が基本ホモロジー類なので，これから定理 2 の仮定が確かめられる．

もっと書くべきことは沢山あるが，紙数を大幅に超過しているので，ここで終わる．

参考文献

[Ab1] M. Abouzaid, *A geometric criterion for generating the Fukaya category*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 112 (2010), 191-240.

[Ab2] M. Abouzaid, *Family Floer cohomology and mirror symmetry*, arXiv:1404.2659.

[Ab3] M. Abouzaid, *The family Floer functor is faithful*, arXiv:1408.6794.

[AFOOO] M. Abouzaid, K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Quantum cohomology and split generation in Lagrangian Floer theory*, in preparation.

[AS] M. Abouzaid and P. Seidel, *An open string analogue of Viterbo functoriality*, Geom. Topol. 14 (2010) 627-718.

[BCOV] M. Bershadsky, S. Ceccoti, S. Ooguri and C. Vafa, *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Commun. Math. Phys. 165 (1994) 311–427.

[COGP] O. Candelas, X.C. de la Ossa, P. Green and L Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal field theory*, Nuclear Phys. B 342 (1991) 21-74.

[CO] C.-H. Cho and Y.-G. Oh, *Floer cohomology and disk instantons of Lagrangian torus fibers in Fano toric manifolds*, Asian J. Math. 10 (2006), 773-814.

[Fl] A.Floer, *Morse theory for Lagrangian intersectoin*, J.Diff.Geom. 28 (1988), 513-547.

[Fu1] K. Fukaya, *Mirror symmetry of abelian variety and multi theta function*, J. Algebraic Geom. 11 (2002) 393–512.

[Fu2] K. Fukaya, *Floer homology for families—a progress report*, Integrable Systems, Topology, and Physics (Tokyo, 2000), Comtemp. Math. 309 (2002), 33-68.

[Fu3] K. Fukaya, *Categorification of invariants in gauge theory and symplectic geometry*, 2016 年春，高木レクチャー予稿集.

[FOOO1] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction I - II*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol **46**, Amer. Math. Soc./International Press, 2009.

[FOOO2] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I*, Duke. Math. J. 151 (2010), 23–174.

[FOOO3] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds*, Astérisque, 376, 2016, Socieété Mathématique de Franc. .

[Giv] A. Givental, *Equivariant Gromov-Witten invariants*, Internat. Math. Res. Notices 996 (1996) 613–663.

[GW] M. Gross and P.M.H. Wilson, *Large Complex Structure Limits of K3 Surfaces*, J. Diff. Geom., 55, (2000) 475-546.

[HS] H. Hofer and D. Salamon, *Floer homology and Novikov ring*, The Floer Memorial Volume, Progr. Math., 133, H. Hofer, C. Taubes, A. Weinstein and E. Zehnder, Birkhäuser, Basel (1995) 483–524.

[HV] K Hori, C Vafa, *Mirror Symmetry*, arXiv:hep-th/0002222

[Ko] M. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry,* ICM-1994 Proceedings, Zürich, Birkhäuser, 1995.

[KS] M. Kontsevitch and Y. Soibeleman, *Homological mirror symmetry and torus fibration*, in "Symplectic geometry and Mirror Symmetry" (K.Fukaya, Y.G.Oh and G.Tian ed.) World Sci. Press, Singapore (2001), 203-265.

[Ln] A. Lino, *The Künneth theorem for the Fukaya algebra of a product of Lagrangians*, arXiv:1407.8436.

[N] S. Novikov, *Multivalued functions and functional - an analogue of Morse thoery*, Sov. Math. Dokl. **26** (1981) 222-225.

[Oh] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks I, II*, Comm. Pure and Appl. Math. 46 (1993), 949–994, 995–1012; Addenda, ibid, 48 (1995), 1299 –1302.

[On] K. Ono, *On the Arnold conjecture for weakly monotone symplectic manifolds*, Invent. Math. 119 (1995) 519–537.

[PZ] A. Polishchuk and E. Zaslow, *Categorical mirror symmetry: the elliptic curve*, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 443 - 470.

[Sei1] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[Sei2] P. Seidel, *Homological mirror symmetry for the quartic surface*, Mem. Amer. Math. Soc. 236 (2015), no. 1116, vi+129.

[Sh] N. Sheridan, *Homological mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in projective space*, Invent. Math. 199 (2015), no. 1, 1–186.

[SYZ] A. Strominger, S. Yau and E. Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, Nucl. Phys. B 479 (1996) 243–259.

[WW] K. Wehrheim and C. Woodward, *Functoriality for Lagrangian correspondences in Floer theory*, Quantum Topology 1 (2010), 129–170.

[Ya] T. Yamaguchi, *Collapsing and pinching under a lower curvature bound*, Ann. of Math. (2) 133 (1991), 317-357.