# V. G. Drinfel'd 氏の業績 II

神 保 道 夫

Drinfel'd は数理物理学においても，ソリトン・インスタントンなどの古典系と，量子群・共形場理論などの量子系の双方にわたる可積分系の分野で，著しい業績をあげています．これらの仕事はそれぞれが大変重要なものですが，とりわけ量子逆散乱法から構想された量子群の理論は，可積分系という一分野の枠を越えた数学の世界に，深い影響力をもって現在も浸透しつつあるように見えます．

ソ連で出版される論文が多くそうであるように，Drinfel'd の論文は記述が極めて凝縮され，その意味では決して読みやすいものではありません．しかしそれらを繙く読者は，可積分系の背後に隠れた数学的構造を見抜く炯眼と，それを正しい枠組みにまとめる構成力，そして徹底した結果にまで至る並々ならぬ力量に感銘を受けることと思います．筆者は最近 Drinfel'd 氏から生い立ちや数学観などについて話を伺う機会を得ましたので，興味をお持ちの方は［SS］をご覧下さい．本稿では Drinfel'd の可積分系における主要な業績を筆者の理解の及ぶ範囲で紹介したいと思います．

## （1） インスタントン解の構成

可積分系に関係した仕事のうち最初のものは，常微分作用素の作る可換環およびその正標数での類似を扱った [D1] と思われます．

後に触れるソリトン方程式の理論において，準周期解とよばれるクラスの解の構成は，可換な常微分作用素の組を作ることに帰着されます．Krichever [Kr] は，後者が代数曲線上のある種の接続をもつベクトル束と 1 対 1 に対応することを発見しました．（この事実は 1920 年代すでに Burchnall-Chaundy [BC] によって知られていたことが後で判明しました．）Drinfel'd は微分作用素の代りに一般の体上のある種のねじれた多項式環をとって Krichever の対応を拡張しました．これらについては Mumford の解説 [Mu] で読むことができます．この仕事は，Drinfel'd 自身が $GL(2)$ の関数体に対するラングランズ予想の証明を完成するための鍵になったと言う事です [SS].

しかし，本来の可積分系の枠内における仕事としては，1978 年の Yang-Mills 方程式のインスタントン解の構成が最初と言えるでしょう．Yang-Mills 方程式は一般に 4 次元多様体 $M$ 上の主束とその上の接続型式 $A$ に対して定義される概念です．その幾何学的重要性については [It], [Hu] を参照して下さい．ここでは $M$ がコンパクト化されたユークリッド空間 $S^4$ の場合に限って述べましょう．$A=\sum_{i=1}^{4} A_i(x)\,dx_i$ をリー環 $\mathfrak{g}$ に値をもつ $S^4$ 上の 1-型式，$F_A=dA+A\wedge A$ をその曲率型式とします．線形作用素 $*$ を $*\ dx_i\wedge dx_j=\pm dx_k\wedge dx_l$ ($(i, j, k, l)$ は $(1, 2, 3, 4)$ の置換, $\pm$ はその符号）で定める時，$*F_A=F_A$ と置いて得られる $A$ に対する非線形微分方程式系を自己双対 Yang-Mills 方程式，その大域解をインスタントン解と呼びます．物理学者は後者がインスタントン数と呼ばれる整数（位相的不変量）で大別されることを指摘し，$\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(2)$ の場合に具体的な解を見出していました [BPST]. Drinfel'd らの仕事は，$\mathfrak{g}$ が古典型コンパクトリー環の場合に，$S^4$ 上の自己双対 Yang-Mills 方程式と $P^3(C)$ 上のある種の代数的ベクトル束とが 1 対 1 に対応することを利用して，インスタントン解の全体を決定し，更に線形代数のみを用いてそれらの初等的構成法を与えたものです．この結果は，Drinfel'd-Manin [DM1][DM2] および Atiyah-Hitchin によって独立に見出され，4 人の連名の論文 [ADHM] として発表されました．

## （2） ソリトン方程式のハミルトン理論

1970 年代後半は，ゲージ理論とならんでソリトン方程式の理論が数学者の注目を集め，数学と物理学の急接近の開始を印象づける時代となりました．その代表例として KdV 方程式

$$u_t=u_{xxx}+uu_x \quad (u=u(x, t),\ \text{添字は微分}) \qquad (1)$$

が挙げられます．

いま一変数 $x$ の関数 $u(x)$ の全体のなす無限次元多様体を $\mathcal{M}$ とし，その上にポアソン括弧

$$\{u(x), u(y)\} = \delta'''(y-x)+u(y)\delta'(y-x)$$

およびハミルトニアン $H=\frac{1}{2}\int u^2$ を導入します．このとき(1)は $\mathscr{M}$ 上の力学系 $u_t=\{H, u\}$ の形に書くことができます．更に，ハミルトニアン $H=I_3$ を含む汎関数の無限系列 $I_n=\int \mathscr{I}_n(n=1, 3, 5\cdots$;各 $\mathscr{I}_n$ は $u, u_x, u_{xx}, \cdots\cdots$ の多項式)が存在して，これらは互にポアソン括弧の意味で可換になっている：$\{I_m, I_n\}=0(\forall m, n)$．したがって，$dI_n/dt=\{H, I_n\}=0$ より $\{I_n\}$ は(1)の無限個の第一積分を与えます．これは有限自由度の力学系における積分可能性('十分多くの第一積分が存在する')の類似であり，この意味で(1)は無限自由度の完全積分可能な力学系とみなすことができます．この時各 $n$ に応じて独立に時間変数 $t_n$ を導入すれば，互に可換な $\mathscr{M}$ 上の flow の系列 $u_{t_n}=\{I_n, u\}$ が得られます．これを高次 KdV 方程式の階層とよびます．

一般に $G$ を有限次元のリー群，$\mathfrak{g}$ をそのリー環とするとき，良く知られているように各余随伴軌道(双対線形空間 $\mathfrak{g}^*$ での $G$ の作用による軌道)は標準的なシンプレクテイック構造を持っています．Adler [Ad], Lebedev-Mainin [LM] らは，上に述べた無限自由度の力学系としての KdV 方程式が，一変数の擬微分作用素からなる無限次元の形式リー群に対する余随伴軌道上の力学系として捉えられることを指摘しました．

これらの事実は，Drinfel'd-Sokolov [DS1], [DS2] によって一挙に組織的に一般化されました．それによれば，任意のアフィン(Kac-Moody)リー環とその Dynkin 図形の頂点からなる組を与えるごとに，あるソリトン方程式の階層を対応させる事ができます．(KdV 方程式の階層は $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathrm{C})$ に付随して得られます．)余随伴軌道は，1 階の行列微分作用素，及び高階のスカラー微分作用素(場合によっては擬微分作用素)によって 2 通りに実現され，それらの同型を与える写像が，いわゆる modified KdV 方程式と KdV 方程式をつなぐ Miura 変換として知られていたものの一般化である事が示されています．

一方、この仕事とほぼ同じ頃，佐藤・佐藤 [Sa] は解の構造に着目し，ソリトン方程式の解の全体が無限次元グラスマン多様体をなすことを発見しました．伊達・柏原・三輪・神保 [DJKM] は，この立場からアフィン・リー環の basic 表現に付随するソリトン方程式の系列を Drinfel'd らとは独立に見出しています．Drinfel'd らの理論は解の構造に触れるものではありませんが，それ自体として興味深いうえ，更にハミルトン系として定式化されている為に量子化と自然に結びつく点に重要な意義があります．最近共形場の理論の摂動との間に新たな結びつきが見出され，Drinfel'd-Sokolov 理論に対する関心が再び高まっている事をここに付言して置きましょう．

### (3) 古典 Yang-Baxter 方程式

統計物理学や場の量子論において，物理量が具体的な数式として閉じた形に求めることのできる一連の可解模型が増々重要になって来ています．ソリトン方程式の対象が可換な量に対する通常の微分方程式であり，この意味で古典的可積分系であったのに対し，これらは量子的可積分系と言えます．Onsager, Yang, Baxter らによる可解格子模型の研究 [Ba] や，Zamolodchikov らによる因子化 $S$ 行列の理論を通じて，量子的可積分系に於る可解性のメカニズムが，次の Yang-Baxter 方程式に基づいていることが明らかになりました．いま $V$ を有限次元ベクトル空間，$\check{R}(u)\in \mathrm{End}(V\otimes V)$ をパラメータ $u\in C$ の行列値関数とした時，$V\otimes V\otimes V$ に於る次の関係式を Yang-Baxter 方程式(YBE)と言います：

$$\begin{aligned}&\check{R}_{23}(u_1-u_2)\check{R}_{12}(u_1-u_3)\check{R}_{23}(u_2-u_3)\\&\quad=\check{R}_{12}(u_2-u_3)\check{R}_{23}(u_1-u_3)\check{R}_{12}(u_1-u_2).\end{aligned}\tag{2}$$

ここに $\check{R}=\sum_i a_i\otimes b_i(a_i, b_i\in \mathrm{End}(V))$ と表したとき $\check{R}_{12}=\sum_i a_i\otimes b_i\otimes 1$, $\check{R}_{23}=\sum_i 1\otimes a_i\otimes b_i$．この YBE の解があるごとに量子的可積分模型が定められます．

Faddeev らのグループは，古典および量子可積分系の間にある著しい並行関係に注目し，YBE を基礎として両者を統一する代数的枠組み(量子逆散乱法)を定式化しました [STF]．古典的可積分系は，量子可積分系において Planck 定数 $h$ が 0 となる極限として捉えられます．

いま(2)において，更に $\check{R}(u)=\check{R}(u, h)$ がパラメータ $h$ を含み，$h\to 0$ で次の展開を持つとしましょう．

$$P\check{R}(u, h)=(\text{scalar})\times(I+hr(u)+O(h^2)).$$

ただし $P\in \mathrm{End}(V\otimes V)$ は成分の入れ替え $Px\otimes y=y\otimes x$．このとき，(2)から係数 $r(u)$ に対する次の関係式が従います．

$$\begin{aligned}&[r_{12}(u_1-u_2),\ r_{13}(u_1-u_3)]+[r_{12}(u_1-u_2),\\&\quad r_{23}(u_2-u_3)]+[r_{13}(u_1-u_3),\ r_{23}(u_2-u_3)]\\&\quad=0.\end{aligned}\tag{3}$$

方程式(3)を古典 Yang-Baxter 方程式(CYBE)といいます．[FT] では古典可積分系の理論が CYBE を基礎において展開されています．

CYBE は交換子のみを用いて書かれているため，

$r(u)$ を $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 値関数($\mathfrak{g}$ は抽象的リー環)と見て意味をもっています．Belavin と Drinfel'd [BD1-3] は，$\mathfrak{g}$ が複素単純リー環である場合に，ある種の非退化性の仮定の下に(3)の解の分類を実行して見せました．それによれば，$u$ の関数として，$r(u)$ は(i)楕円関数，(ii)三角関数($e^u$ の有理関数)，(iii)有理関数，のいずれかとなり，(i) (ii)の場合には $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形のデータを用いて解の記述が可能です．因みに本来の YBE に対しては解の分類は知られていません．

Drinfel'd は更に [D2] において，CYBE の幾何学的意味を明らかにしました．リー群 $G$ 上の関数環 $\mathrm{Fun}(G)$ のポアソン括弧に対し，群の積構造から誘導される写像 $\mathrm{Fun}(G)\to\mathrm{Fun}(G)\times\mathrm{Fun}(G)$ がポアソン括弧を保存するとき，$G$ をポアソン・リー群と言います．他方，リー環 $\mathfrak{g}$ の双対 $\mathfrak{g}^*$ 上にまたリー環の構造が与えられ，$\mathfrak{g}^*$ の括弧積の双対写像 $\delta:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ が 1-コサイクルとなるとき，$\mathfrak{g}$ はリー双代数であるといいます．Drinfel'd によれば，単連結なポアソン・リー群と $G$ のリー環 $\mathfrak{g}$ のリー双代数構造は同等です．そしてこのコサイクル $\delta$ がコバウンダリになるとき，すなわち $\delta(X)=[X\otimes1+1\otimes X, r]$ $(X\in\mathfrak{g}, r\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$ と書けるとき(たとえば $\mathfrak{g}$ が単純リー環ならばそうなります)，この $r$ は CYBE の解(正確にはそれを少し修正したもの)となります．なおここで $\mathfrak{g}$ がアフィン・リー環であるときには $r$ は'スペクトル・パラメータ' $u$ に依存することになります．

### (4) 量子群

数理物理学における Drinfel'd の仕事のうち，最も重要かつ多方面に深い影響力を及ぼしたものは，何といっても 1985-86 年に発表された量子群の理論でした．Drinfel'd の構想は，量子群のマニフェストである Berkeley congress 報告集の論文 [D6] に展開されています．以下その'哲学'を述べてゆきましょう．

古典力学系は，相空間 $M$ と，$A_0=\mathrm{Fun}(M)$ 上のポアソン括弧 $\{,\}$ およびハミルトニアン $H\in A_0$ によって定まります．可換環 $A_0$ の元は力学系 $(M, H)$ の観測量を表し，それらの時間発展は運動方程式 $d\mathcal{O}/dt=\{H, \mathcal{O}\}$ $(\mathcal{O}\in A_0)$ によって記述されます．力学系を量子化するとは，観測量をヒルベルト空間上のオペレーターという非可換な量で置換え，ポアソン括弧 $\{a, b\}$ を交換子 $[a, b]/h=(ab-ba)/h$ と読換えることでした($h$ は Planck 定数)．これは代数的には，可換代数 $A_0$ の 1 パラメータ $h$ による deformation を考える事を意味します．相空間 $M$ が更にリー群である場合には，$A_0$ は $M$ の群構造からくるホップ代数の構造をもっているので，ホップ代数としての deformation を考える事が自然です．ごく大雑把には，一般に可換なホップ代数＝群上の関数環，余可換なホップ代数＝リー環の包絡環，と言えます．この意味で可換でも余可換でもないホップ代数をリー群・リー環の拡張概念―量子化―と見なし，量子群と呼ぶわけです．標語的には，古典可積分系はリー双代数＝ポアソン・リー群に，量子可積分系は量子群に対応することになります．(このような理念を語るのみでは一見無内容にも見えかねませんが，量子群の概念は，これまでに触れてきた古典可積分系の量子化，とりわけ CYBE の量子化の試みに促されて発見された意味のある実例から抽出されたものであることを強調しておきます．)

量子群の典型的な例として，CYBE の三角関数解に対応するリー双代数の，上の意味での量子化である量子包絡環があります．これは一般に複素単純リー環やアフィン・リー環を含むクラスの Kac-Moody リー環に対して定義されます [D4], [Ji]. 最も基本的なリー環 $\mathfrak{sl}_2$ の場合，量子包絡環 $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ とは次のように定義される $C[[h]]$ 上のホップ代数です．

生成元：$E, F, H$

関係式：$[H, E]=2E, \quad [H, F]=-2F,$

$$[E, F]=\frac{q^H-q^{-H}}{q-q^{-1}},$$

余　積：
$$\Delta(E)=E\otimes1+q^H\otimes E,$$
$$\Delta(F)=F\otimes q^{-H}+1\otimes F,$$
$$\Delta(H)=H\otimes1+1\otimes H.$$

ここに $q=e^h$ で，'古典極限' $h\to0$ で $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ は通常の包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ に移行します．(なお Drinfel'd は [D4] で量子包絡環の'有理的退化'にあたる Yangian も導入しています．) リー群の関数環が包絡環の双対概念であるように，量子包絡環の双対を考えることによって関数環の量子化 $\mathrm{Fun}_q(G)$ が定義されます．この関数環の変形は，作用素環の立場から独立に Woronowicz [$W_1$], [$W_2$] によっても発見されました．

論文 [$D_6$] における Drinfel'd の重要な寄与のひとつは，普遍 $R$ 行列の構成です．量子群は可換でないホップ代数ですが，余可換性が最も弱い意味で崩れているホップ

代数として，Drinfel'd は次の概念を導入しました．余積 $\varDelta$ をもつホップ代数 $A$ が準三角(quasi-triangular)であるとは，ある可逆元 $\mathscr{R}\in A\otimes A$ (普遍 $R$ 行列と呼ぶ)が存在して次を満たすことです：

$$\sigma\circ\varDelta(a)=\mathscr{R}\varDelta(a)\mathscr{R}^{-1}\quad(a\in A),$$
$$(\varDelta\otimes\mathrm{id})\mathscr{R}=\mathscr{R}_{13}\mathscr{R}_{23},\ (\mathrm{id}\otimes\varDelta)\mathscr{R}=\mathscr{R}_{13}\mathscr{R}_{12}.\tag{4}$$

ここに $\sigma(x\otimes y)=y\otimes x$，又は $\mathscr{R}_{12}\in A\otimes A\otimes A$ などは(2)と同様の意味とします．(4)の帰結として $\mathscr{R}$ は $A^{\otimes 3}$ において次の形の YBE を満たすことが容易に分ります．

$$\mathscr{R}_{12}\mathscr{R}_{13}\mathscr{R}_{23}=\mathscr{R}_{23}\mathscr{R}_{13}\mathscr{R}_{12}.$$

特に，表現 $\rho: A\to\mathrm{End}(V)$ がある時，$\check{R}=P(\rho\otimes\rho)\cdot(\mathscr{R})$ とおけば，これは(2)の YBE の解を与えています．Drinfel'd は quantum double と言う一般的構成法を導入し，単純リー環およびアフィンリー環の量子包絡環が準三角であることを示しました(アフィンの場合は少し弱い意味になります)．Belavin-Drinfel'd の分類にある三角関数解の量子化(＝YBE の解)は，個々の表現の場合に具体的表示式が知られていましたが，普遍 R 行列の構成によってその一般的な存在が確立されました．

量子群のもたらしたものは YBE への応用以外にも多岐にわたっています．主なものを挙げれば，低次元トポロジー(絡み目や3次元多様体の不変量の構成 [Re], [TR])，特殊関数論($q$ アナグロの‘群論的’解釈 [MMNNU])，表現論(特に変形パラメータ $q$ が1の巾根の場合 [Lul] や $q^{\pm 1}\to 0$ の場合 [Ka], [Lu 2] の研究は古典的な $q=1$ の場合に対しても新しい知見をもたらしています)，更に非可換な幾何学の模索 [Ma] 等等……．今後これらがどう展開してゆくかは大変興味深い課題と思われます．

### (5) 準ホップ代数

量子群が登場する数理物理の理論には，もうひとつ2次元の共形場の理論があります．これは2次元時空間上の場の量子論の模型ですが，Virasoro 代数と呼ばれる無限次元のリー環の対称性を持つために相関関数(場のオペレーターの積の期待値)などの物理量が決定でき，(3), (4)とは別のクラスの可積分系と言えます．

ここでは Wess-Zumino (WZ)模型と呼ばれる例を考えましょう．いま $\mathfrak{g}$ を有限次元単純リー環，$\{X_\mu\}$ をキリング形式に関する正規直交基，$t=\sum_\mu X_\mu\otimes X_\mu\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ とします．また表現 $\rho:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)$ を固定し，$\rho_{ij}(t)\in\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ によって第$(i,j)$成分に $\rho\otimes\rho(t)$ で，他の成分に id. で働く行列を表します．このとき，WZ 模型の $n$ 点相関関数 $W(z_1,\cdots\cdots,z_n)$，$(z_1,\cdots\cdots,z_n\in\boldsymbol{P}^1)$ は次の線形微分方程式系によって特徴づけられます．

$$\frac{\partial W}{\partial z_i}=\frac{h}{2\pi i}\sum_{j\neq i}\frac{\rho_{ij}(t)}{z_i-z_j}W\quad(1\leq i\leq n).$$

これを Knizhnik-Zamolodchikov (KZ)方程式と呼びます．土屋・蟹江 [TK], 河野 [Ko] は，KZ 方程式のモノドロミーとして生じる組み紐群の表現が，量子包絡環の普遍 $R$ 行列から得られるものと一致していることを発見しました．ここに変形パラメーターは $q=e^h$ で与えられます．

Drinfel'd は，[D8] において準ホップ代数(quasi-Hopf algebra)の概念を導入し，上の事実の説明に成功しました．(但し Drinfel'd の扱ったのは形式巾級数のカテゴリーであり，物理的に興味のある $q$ が1の巾根の場合には問題が残されています．)準ホップ代数とは，ホップ代数の公理において，準同型 $\varPhi: A^{\otimes 3}\to A^{\otimes 3}$ を与え，余積の余結合律の代りにそれを弱めた次の公理を課したものをいいます．

$$(\mathrm{id}\otimes\varDelta)\circ\varDelta(a)=\varPhi(\varDelta\otimes\mathrm{id})\circ\varDelta(a)\varPhi^{-1}\quad\forall a\in A.$$

(他の公理との compatibility は省略．)準三角な準ホップ代数の概念も(3)と同様に定義されます．C[[$h$]] 上の準三角準ホップ代数$(A,\varDelta,R,\varPhi)$があるリー環 $\mathfrak{g}$ の包絡環の変形であるとき，(即ち $A/hA\simeq U\mathfrak{g}$)，$\mathscr{R}$ の古典極限 $t=(\mathscr{R}_{21}\mathscr{R}-1)/h \bmod h$ が定義されて，$\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ の元になります．ただし，$\mathscr{R}=\sum_i a_i\otimes b_i\,(a_i,b_i\in A)$ と表したとき $\mathscr{R}_{21}=\sum_i b_i\otimes a_i$. Drinfel'd の主要結果は，このとき$(A,\varDelta,R,\varPhi)$はある‘ひねり’を除いてその古典極限$(\mathfrak{g},t)$に一意的に対応するというものです．上に述べた組み紐群の二つの表現の同値性はこの一意性の系として得られます．Drinfel'd は，与えられた$(\mathfrak{g},t)$から$(A,\varDelta,\mathscr{R},\varPhi)$を構成する手続に KZ 方程式の解を本質的に利用しています．この理論は，更にガロア群 $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$ の表現の問題と深く関わっているようですが，筆者にはわかりません．

以上，数理物理的側面に限っても Drinfel'd の仕事をどこまでお伝えできたか甚だ心許ないのですが，その数学のスケールの大きさを少しでも感じ取っていただければ幸いとして，筆をおくことにします．

### Drinfel'd 氏の論文

[D1] V. G. Drinfel'd, Commutative subrings of certain noncommutative rings, Funct. Anal. Appl., **11**

(1977), 9-12.

[DM1] Drinfel'd and Yu. I. Manin, Self-dual Yang-Mills fields over a sphere, Funct. Anal. Appl., **12** (1978), 140-142.

[DM2] V. G. Drinfel'd and Yu. I. Manin, Instantons and bundles on $\boldsymbol{CP}^3$, Funct. Anal. Appl., **13** (1979), 124-134.

[ADHM] M. F. Atiyah, V. G. Drinfel'd, N. J. Hitchin and Yu. I. Manin, Construction of Instantons, Phys. Lett. A **65** (1978), 185-187.

[DS1] V. G. Drinfel'd and V. V. Sokolov, Equations of Korteweg-de Vries type and simlpe Lie algebras, Soviet Math. Doklady, **23** (1981), 457-462.

[DS2] V. G. Drinfel'd and V. V. Sokolov, Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type, J. Soviet Math., **30** (1985), 1975-2036.

[BD1] A. A. Belavin and V.G. Drinfel'd , Solutions of the classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras, Funct. Anal. Appl., **16** (1983), 159-180.

[BD2] A. A. Belavin and V. G. Drinfel'd, Classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras, Funct. Anal. Appl., **17** (1984), 220-221.

[BD3] A. A. Belavin and V. G. Drinfel'd, Triangle equations and simple Lie algebras, Soviet Scientific Reviews section C, ed. S. P. Novikov, Harwood Academic Press, vol. **4** (1984), 93-165.

[D2] V. G. Drinfel'd, Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations, Soviet Math. Doklady, **27** (1983), 68-71.

[D3] V. G. Drinfel'd, On constant, quasi-classical solutions of the Yang-Baxter quantum equation, Soviet Math. Doklady, **28** (1983), 667-671.

[D4] V. G. Drinfel'd, Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, Soviet Math. Doklady, **32** (1985), 254-258.

[D5] V. G. Drinfel'd, Degenerate affine Hecke algebras and Yangians, Funct. Anal. Appl., **20** (1986), 58-60.

[D6] V. G. Drinfel'd, Quantum groups, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California USA 1986, 798-820.

[D7] V. G. Drinfel'd, A new realization of Yangians and quantized affine algebras, Soviet Math. Doklady, **36** (1988), 212-216.

[D8] V. G. Drinfel'd, Quasi-Hopf algebras, Algebra i Analiz, **1** (1989), 114-148.

## 文　献

[SS] ドリンフェルト氏インタビュー，数セミ(出版予定).

[Kr] I. M. Krichever, Integration of nonlinear equation by the method of algebraic geometry, Funct. Anal. Appl., **11** (1977), 12-16.

[BC] J. L. Burchnall and T. W. Chaundy, Commutative ordinary differential operators, Proc. London Math. Soc., **21** (1922), 420-440.

[Mu] D. Mumford, An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg de Vries equation and reated non-linear equations, in Int. Symp. on Algebraic Geometry, Kinokuniya (1977), 115-153.

[It] 伊藤光弘，Yang-Mills 方程式―インスタントンとモノポールを中心にして―，数学，**37** (1985), 322-337.

[Hu] 古田幹雄，S. K. Donaldson 氏の業績，数学，**39** (1987), 16-25.

[BPST] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz and Y. Tyupkin, Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations, Phys. Lett., **59B** (1945), 85-87.

[Ad] M. Adler, On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure of Korteweg-de Vries type equations, Inventiones Math., **50** (1979), 219-248.

[LM] D. R. Lebedev and Yu. I. Manin, Gel'fand-Dikii Hamiltonian operator and the coadjoint representation of the Volterra group, Funct. Anal. Appl., **13** (1979), 268-273.

[Sa] M. Sato, Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifold, 数理解析研究所講究録，**439** (1981), 30-46.

[DJKM] 柏原正樹・神保道夫・伊達悦朗・三輪哲二，ソリトン方程式と Kac-Moody リー環，数学，**34**, 1 (1982), 1-16.

[Ba] 例えば R. J. Baxter, Exactly solved models in statistical mechanics, Academic, London 1982.

[STF] E. K. Sklyanin, L. A. Takhtajan and L. D. Fadeev, Quantum method of inverse scattering I, Teor. Mat. Fiz., **40** (1979) 174-220.

[FT] L. D. Fadeev and L. A. Takhtajan, Hamiltonian methods in the theory of solitons, Springer, 1980.

[Ji] M. Jimbo, A $q$-difference analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys., **10** (1985), 63-69.

[W1] S. L. Woronowicz, Twisted $SU(2)$ group. An example of differential calculus, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **23** (1987) 117-181.

[W2] S. L. Woronowicz, Compact matrix pseudo-groups, Comm. Math. Phys., **111** (1987), 613-665.

[Re] N. Yu. Reshetikhin, Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links, I, II, preprint LOMI (1988).

[TR] V. G. Turaev and N. Yu. Reshetikhin, Invariants of 3-manifolds via Link polynomials and quantum groups, preprint 1990.

[MMNNU] T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi and K. Ueno, Representations of quantum groups and $q$-analogue of orthogonal polynomials, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **307** (1988), 559

-564.
[Lu1] G. Lusztig, Modular representations and quantum groups, Contemporary Mathematics, **82** (1989), 59-77.
[Lu2] G. Lusztig, Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, J. Amer. Math. Soc., **3** (1990), 447-498.
[Ka] M. Kashiwara, Base crystalline, C. R. Acad. Sci. Paris, **311** (1990), 277-280.
[Ma] Yu. I. Manin, Quantum groups and noncommutative geometry, Les Publications de Centre de Recherches Scientifiques, Universitde Motreal, 1989.
[TK] A. Tsuchiya and Y. Kanie, Vertex operators in confomal field theory on $P^1$ and monodromy representations of braid group, Adv. Stud. Pure Math., **16** (1988), 297-372.
[Ko] T. Kohno, Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations, Ann. Inst. Fourier, **37** (1987), 139-160.

（じんぼう みちお・京都大学理学部）

# Vaughan F. R. Jones 氏の業績 I

河 東 泰 之

作用素環論は，A. Connes に続く二人目の Fields 賞受賞者 V. F. R. Jones を出すにいたった．Connes は，**[C2]** に代表される超人的アイディアとテクニックによって，作用素環論を徹底的に深めたが，Jones は，作用素環論における広大な新分野，index 理論を切り開き，絡み目の不変量，Jones 多項式の発見によって，誰もが思いもしなかった数学，物理の他分野との関連を明るみに出した．

Jones の業績は，大雑把には，(i)作用素環上の群作用の分類，(ii)$\mathrm{II}_1$ factor の Jones index の理論，(iii) Jones 多項式の発見とその発展，の 3 つに分かれる．このうち，(ii)は，(i)からの，(iii)は，(ii)からの自然な発展として現れてきたものなので，その流れを明らかにするため，ここでは(i)，(ii)と，そしてこれらがどのようにして(iii)に結びついたかまでを概説する．(iii)については，本号の村上氏による解説を参照されたい．

さて，爆発的発展の出発点となった Jones index とは，荒っぽくいえば次のようなものである．Hilbert 空間上の有界線形作用素のなすある多元環($\mathrm{II}_1$ factor と呼ばれる——定義は後述)とその部分多元環を考えるとき，体と部分体に対する Galois 群のようなものを考えることができる．その‘位数’が Jones index である．このとき普通の有限群とその位数としての整数はすべて現れて来るが，そのほかに，‘位数’がもはや整数ではないようなものがたくさん出てくる．こうして現れる数学的対象は有限群の(deformation ではない)量子化とでもいうべきものであり，現在，研究が進められているところであるが，以下，これらにつながる Jones の仕事について，順に説明していくことにする．

なお，Jones index に関する解説としては，**[25]**, **[27]**, **[31]**, **[37]**, **[C4]**, **[Kb]**, **[Ks1]**, **[Ks2]** などが，またそれらを読むための作用素環論の教科書としては，**[KR]**, **[Pd]**, **[S]**, **[St]**, **[T1]**, **[T2]**, **[UOH]** などが参考になろう．

## 1. $\mathrm{II}_1$ factor とは何か．

残念ながら，Jones の理論の基礎となる，$\mathrm{II}_1$ factor と呼ばれる作用素環については，Murray - von Neumann による発見以来，50 年以上もたっているにもかかわらず，広く知られているとは，いいがたい．そこで，ここで簡単な解説を加えておくことにする．

Hilbert 空間上の有界線形作用素の成す多元環で，$*$-演算について閉じているものを考え，それがノルム位相で閉じているとき，$C^*$ 環，より弱い位相(たとえば作用素の強収束)で閉じているとき，von Neumann 環という．ここでは，主に von Neumann 環を扱う．

まず素朴に，行列環 $M_n(\mathbf{C})$ に対応する，無限次元の，von Noumann 環とは何だろうか，と考えてみる．一番簡単な答えは，すべての有界線形作用素のなす多元環を考える，というものであろう．しかしこれは，多元環としては，それほどおもしろくない．これは，有限次元の可換作用素環 $\mathbf{C}^n$ の無限次元拡張として $l^\infty$ をとったことに対応している．(たとえば，上の行列のうち対角行列だけを考えてみればよい．)ところが，$l^\infty$ より，$L^\infty[0,1]$ のほうがいろいろおもしろいことがあるように，$L^\infty$