三日以後は二か所に分かれての1時間講演が6日および最終日を除いて毎日 8-10 回ずつあったので，かなりの強行軍でしたし，随分その選択には迷いました．後で Lions 氏のもらした感想では，彼らしく三日目の小松氏のと共に五日目の高村(幸)氏のも大変関心があるとのことでした．四日目の H. Lewy 氏のは，'62 年頃より始まった Variational inequalities の解の Reqularity に関するもので，解析学に対するその深い洞察力より，Lions, Stampacchia 両氏の研究に原動力となる刺戟を与えたと察せられる研究およびその後の発展過程の話は，小柄な体格全体から活力あふれるばかりの生気に満ちたものでした．午後の溝畑-大矢両氏の講演を溝畑氏が‘自分の話は理論というより計算をしただけだ’と言うように結んだ時，Lax 氏は直ちに立って，大声で，それを否定して，計算の中の優れたアイデアを賞讃しましたが，New York 大学の計算センター所長も兼ねている Lax 氏ならではの発言でした．さらに吉田氏の講演も Recurrent Markov 過程に対する potential oprator を Semi group の考察より説明しようと試みられたとき，そのような potential の内部的特長づけは，transient の場合の positive potential のそれと比較して，どのようになるのか，興味をそそった様子でした．五日目の Lax 氏の講演は先端的な，野心あふれた，その諸論文からうかがい知れる人格通りの話でした．午後の藤田氏の講演は Gelfand の問題('59)の一つを解いたとのことでしたが，stationary な場合の解の一意性自身が気になりました．七日には，Lions 氏の北大招待が急に決まったことより，まだ休み中でもあったので，その受け入れ態勢も考えねばならず，Scattering に関する Kato 氏達の講演 abstruct を読みながら帰札しました．

Informal talking も数多く行なわれましたが，私も1時間程度のそれに4回出席しました．それは双曲型方程式の混合問題についておよび Lacuna についてのそれぞれ2回でしたが，前者では私達の話，井川氏の話，Lions および Lax 両氏の論文紹介がそれぞれあり，京都，大阪，東京の若年の人々も交えて盛況でしたが，難問題であるだけ，お疲れの方達が帰った後も，種々その今後を議論したことでした．Lacuna については，Atiyah および Hörmander 両氏が Gårding の最近の結果を紹介しましたが，Petrowsky の難解な論文を Atiyah が彼流に整理したものを，さらに Gårding が Weak Lacuna も考え合わせて論じたもので，より進んだ結果が，Nice の Congress で Gårding およびそのお弟子さん達により展開されることと思います．今回の紹介では基本解の構成やその諸性質に関して，Leray の例の Cauchy problem (Ⅳ) における結果を用いていたようです．これらの Lacuna に関する結果が公表される頃には，Leray と Gårding の双曲型方程式の Cauchy 問題についての，だいぶ以前からうわさにのぼった，大作の原稿も一段落と思われます．それについて Lions 氏に聞いたところ，まだ出版は何時になるか全然分らぬ，Gårding の方は種々準備もしているらしいが，Leray はうるさくて，そのチェックが大変らしいとのことでした．

若い人達の活動も目立つものがありました．特に Atiyah 氏はそれ等の人々と暇さえあれば，討論に打ち興じている様子でした．

私の直接興味を持ったことばかりとなり恐縮ですが，多くの問題がそれぞれ視野の広い一流の研究者より提示されたことは，この会議の将来に持つ意味を明確なものとするであろうと思いました．そして今も Hörmander 氏の貴公子然とした風貌，Lax 氏の野人的な中に優しい心情がうかがえる人間味，Lions 氏の普段の平静な話振りが講演となると熱情的になる不思議さと共に，その見事に整理された理論の進め方等を思い出します．さらにこれらの人々に共通して言いうることは，この会議に出席された多くの人々についてもですけれど，過去にとらわれず新しい各自の研究へのひたむきな意欲が，その外見の如何に関せず感じられたことでした．

各大学における講演記録

S. Agmon 教授講演記録

Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operator

(1969年3月27日　於大阪大学)

Ω を $\boldsymbol{R}^n$ の有界開集合とし，次の方程式を考える．

$$(1)\quad \begin{cases} -\Delta u(x)=\lambda u(x) & x\in\Omega \\ u(x)=0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

この方程式は $0\leqq\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots$ なる固有値を持つが，$N(t)=\sum_{\lambda_j<t}1$ の $t\to\infty$ としたときの $N(t)$ の挙動は Weyl, Courant, Fedosov, Carleman, その他の人々によって研究され

$$N(t)=\gamma t^{n/2}+O(t^{n/2})\qquad \text{Weyl}$$

$$N(t)=\gamma t^{n/2}+O(t^{(n-1)/2}\log t)\qquad \text{Courant}$$

等々の結果が得られた．さらに Avakumovic はコンパクト多様体上でのラプラシアンに対して

$$N(t)=\gamma t^{n/2}+O(t^{(n-1)/2})$$

を得，さらにこの結果が best possible であることも得

た．

もっと一般の楕円型作用素に対する固有値の数 $N(t)$ の挙動を考えよう．さてそこで $A(x, D)$ は Ω で滑らかな係数を持つ形式的に自己共役な m 階楕円型作用素とする．このとき，A の $L^2(\Omega)$ への自己共役拡張を $\tilde{A}$ とする．ここで，$\tilde{A}$ は，正の作用素として一般性を失わない．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 1. Ω は $\boldsymbol{R}^n$ で有界で，cone property を持つとする．さらに，ある整数 $k>n/m$ に対して $\tilde{A}^k$ の定義域 $D(\tilde{A}^k)$ が $D(\tilde{A}^k)\subset H_{km}(\Omega)$ となるとき

$$N(t)=\gamma t^{n/m}+O(t^{n/m})$$

が成り立つ．

定理 1 は Gårding その他の人々によって示された．

定理 2. 定理 1 と同様の条件（その他本質的な条件）のもとで，

$$N(t)=\gamma t^{n/m}+O(t^{(n-\sigma)/m})$$

ただし，σ は一般の係数のときは $\sigma<1/2$．最高階の係数が，定数のときは $\sigma<1$ なる任意の実数である．

定理 2 の証明には，次の事実によって，スペクトル函数の挙動が重要な役割を持つ．すなわち $\{\lambda_j\}$ を固有値とし $\{\varphi_j\}$ を対応する固有函数とすると

$$e(t: x, y)=\sum_{\lambda_j<t}\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}$$

とおいた函数 $e(t: x, y)$ は次の性質を持つ．$\tilde{A}=\int_0^\infty t dE_t$ とスペクトル分解すると，

(i) $E_t f=\int_\Omega e(t: x, y)f(y)dy \quad f\in L^2(\Omega)$

(ii) $e(t: x, y)\in C^\infty(\Omega\times\Omega)$

(iii) $\int_\Omega e(t: x, x)dx=N(t)$

ところで $e(t: x, y)$ に関して，次の定理が成り立つ．

定理 3. 定理 1 と同様の条件のもとで

$$e(t: x, x)-a(x)t^{n/m}=O(t^{(n-\sigma)/m})$$

が成り立つ．ただし σ は定理 2 と同様である．

スペクトル函数の挙動に関する定理 3 は best possible なものではない．best possible なものは最近 Hörmander によって得られた次の定理である．

定理 4. 一般の場合に，Ω のコンパクト集合上で一様に $e(t: x, x)-a(x)t^{n/m}=O(t^{(n-1)/m})$ が成り立つ．

定理 3 の証明には次の二つの定理が用いられる．

定理 5. $\tilde{A}$ に対する resolvent kernel を $R_\lambda(x, y)$ とする．σ を前述の数とすると次の評価が成り立つ．すなわち

$|\lambda|\geqq 1$ かつ $\mathrm{Re}\,\lambda\geqq 0$ のときは $|I_m\lambda|\geqq|\lambda|^{(n-\sigma)/m}$ なる λ に対して

$$R_\lambda(x, x)\sim(-\lambda)^{n/m-1}\sum_{j=0}^\infty C_j(x)(-\lambda)^{-j/m}$$

定理 6. (Pleijel). Γ を $t+i\tau$ から $t-i\tau$ に到る正の実軸を通らない曲線とするとき

$$\left|e(t: x, x)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\lambda(x, x)d\lambda\right|\leqq 2\tau|R_\zeta(x, x)|$$

$(\tau>0,\ \zeta=t+i\tau)$ が成り立つ．

なお定理 4 から (iii) を用いて $N(t)$ の挙動を知るには $e(t: x, x)$ の $\partial\Omega$ の近傍での評価が重要であるが，まだなされていない．

定理 2 の条件に関しては，参考文献 [1] を，定理 4 に関しては [3] を，講演全体に関しては [1] および [1] の References を参照されたい．

文　献

[1] S. Agmon, Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators. Arch. Rational Mech. Anal. **28** (1967), 165–183.

[2] S. Agmon & Y. Kannai, On the asymptotic behavior of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators. Israel J. Math. **5** (1967), 1–30.

[3] L. Hörmander, The spectral function of an elliptic operator. Acta Math. (1969), 193–218.

（長瀬道弘 記）

Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators

（1969 年 3 月 28 日　於京都大学数理解析研究所）

Ω を n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ の有界な開集合とし，その境界 $\partial\Omega$ は適当な滑らかさをもつものとする．次の固有値問題を考えよう．

$$-\Delta u=\lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad u=0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

よく知られているようにこの問題の固有値は負でない実数で可算個でしかも重複度は有限である．そして有限な集積点をもたない．そこでこれらを重複するものもこめて $\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\leqq\lambda_j\leqq\cdots$ と番号をつけると $\lim_{j\to\infty}\lambda_j=+\infty$ である．ところで 1910 年 H. A. Lorentz と A. Sommerfeld は独立に次の conjecture を行なった．‘固有値の漸近的挙動は第一近似においては領域 Ω の形に関係せずその体積のみに関係するであろう’ ($n=2, 3$ のときのみ考えていた) この問題の最初の解答は H. Weyl (一連の論文があるが最初のものは 1911 年 [15], [16]) によって与えられた．$N(t)=\sum_{\lambda_j\leqq t}1$ とおくとき Weyl は線形積分方程式論を用い

$$N(t)=\gamma_n t^{n/2}+o(t^{n/2}), \quad t\to\infty,$$

$$\gamma_n=V(\Omega)/2^n\pi^{n/2}\Gamma(n/2+1)$$

を示した．($n=2, 3$ のときで正確には

$$\lim_{j\to\infty}j/\lambda_j=V(\Omega)/4\pi, \quad \lim_{j\to\infty}j/\lambda_j^{3/2}=V(\Omega)/6\pi^2$$

を示した．$V(\Omega)$ はそれぞれ Ω の面積，体積を示す)．1924 年 R. Courant はその著書 (クーラン-ヒルベルト第 1 巻) において変分法に基づく方法で

$$N(t)=\gamma_n t^{n/2}+O(t^{(n-1)/2}\log t), \quad t\to\infty$$

なる結果を得た ($n=2, 3$ のとき)．1934 年 T. Carleman は全く異なった方法で固有函数 (spectral function) の漸近的挙動に対して類似の formula を得た ([5])．1936 年に Carleman は [6] において二階の楕円型作用素

の一つのクラス（必ずしも self-adjoint でない）に対し固有値の漸近的挙動について類似の結果を彼の方法で得ている．1956 年 V. G. Avakumović [3] は compact Riemannian manifold 上の Laplace-Beltrami 作用素に対し上の remainder term $o(t^{n/2})$ を $O(t^{(n-1)/2})$ におきかえることができることを証明した（結果は明確には $n=3$ のときのみ）．彼はまた 3 次元 sphere $S^3\subset \boldsymbol{R}^4$ 上の Laplace 作用素に対し上の remainder estimate を改良できないことを注意した．n 次元 sphere $S^n\subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ 上の Laplace 作用素 $-\Delta_S$ の固有値 λ_j は $\lambda_j=j(j+n-1)$ でありその重複度は $\binom{n+j}{n}-\binom{n+j-2}{n}$ $(j=0, 1, 2, \cdots)$ であるが，ある定数 $c>0$ をとれば十分大きなすべての j に対し

$$\binom{n+j}{n}-\binom{n+j-2}{n}\geqq N(\lambda_j+0)-N(\lambda_j-0)\geqq c\lambda_j^{(n-1)/2}$$

が成立する．これはさきの結果が改良できないことを示している．

さて高階楕円型作用素の場合の固有値や固有函数 (spectral function) の漸近的挙動については L. Gårding [7], [8] (Dirichlet 問題のとき), F. E. Browder [4] (non-local elliptic boundary value problems のとき), S. Mizohata & R. Arima [12] (高階一般境界値問題で self-adjoint case), S. Mizohata [13]（高階一般で必ずしも self-adjoint とは限らない場合), S. Agmon [1] (elliptic problems に関連した一般の作用素の場合）による次の結果がある．

$$N(t)=\gamma_{n,m}t^{n/m}+o(t^{n/m})$$

$$\sum_{\lambda_j\leqq t}|\varphi_j(x)|^2=a(x)t^{n/m}+o(t^{n/m}),\quad t\to\infty$$

ここで $\{\varphi_j\}$ は固有値 $\{\lambda_j\}$ に対応する固有函数の正規直交系とする．そこで $o(t^{n/m})$ を $O(t^{(n-1)/m})$ におきかえることができるかどうかが問題になる．

$A=\sum_{|\alpha|\leqq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 Ω において定義された C^∞ 係数の m 階楕円型線形微分作用素とし formally self-adjoint とする．A の $L_2(\Omega)$ における一つの self-adjoint realization を $\tilde{A}$ で表わす．われわれは $\tilde{A}$ が下に有界であることを仮定しよう．$\{E_t\}$ を $\tilde{A}$ の spectral resolution とする：$\tilde{A}=\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dE_t$．このとき E_t が C_∞ Carleman type の kernel $e(t\,;x, y)$ をもつ積分作用素であることはよく知られている．

$$E_tf=\int_\Omega e(t\,;x, y)f(y)dy,\quad f\in L_2(\Omega).$$

$e(t\,;x, y)$ は spectral function of $\tilde{A}$ と呼ばれる．特に $e(t\,;x, x)$ は t の負でない実数値をとる非減少函数である．Ω が有界のとき $\{\varphi_j\}$ を $\tilde{A}$ の固有函数のつくる正規直交系 ($\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots$ と番号づけられた固有値に対応する）とするとき $e(t\,;x, y)=\sum_{\lambda_j\leqq t}\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}$ である．われわれは spectral function $e(t\,;x, y)$ の $t\to\infty$ のときの漸近的挙動を問題にする．$\bar{\Omega}$ において一様に成り立つ formula が得られれば

$$N(t)\sim\int_\Omega e(t\,;x, x)dx$$

より固有値についても同様な結果が得られる．spectral functions の漸近的挙動についてはさきに述べたように Carleman [5] により始められたが L. Gårding は一連の論文で Carleman の方法を拡張し高階自己共役強楕円型作用素に対し次の formulas が成り立つことを示した（例えば [7]）．

$$e(t\,;x, y)=o(t^{n/m}),\quad x\neq y,\quad t\to\infty,$$

$$e(t\,;x, x)=a(x)t^{n/m}+o(t^{n/m}),\quad t\to\infty,$$

$$a(x)=(2\pi)^{-n}\int_{A_m(x,\xi)<1}d\xi,$$

ここで $A_m(x, \xi)$ は A の主部を表わす．

彼の結果から A が定数係数のとき remainder term $o(t^{n/m})$ を $O(t^{(n-1)/m})$ で置きかえることができることが示される ([8])．L. Hörmander [9] および S. Agmon and Y. Kannai [2] は

主部が定数係数のとき $\sigma<1$ に対し一般の場合は $\sigma<1/2$ に対し

$$e(t\,;x, x)-a(x)t^{n/m}=O(t^{(n-\sigma)/m}),\quad t\to\infty$$

が成り立つことを示したが L. Hörmander は最近

$$e(t\,;x, x)-a(x)t^{n/m}=O(t^{(n-1)/m}),\quad t\to\infty$$

を得た [10]．この講演ではわれわれの結果の証明の鍵となる楕円型作用素の resolvent kernel に対する一つの漸近展開定理とその証明の方針を簡単に述べその後 Hörmander の idea を説明する．

紙数の関係で以後割愛する．詳細は [2], [10] を参照．なお，講演では [2] の定理 3.1 の説明と Hörmander の idea の簡単な説明があった．

文　献

[1] S. Agmon, On kernels, eigenvalues, and eigenfunctions of operators related to elliptic problems, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 627-663.

[2] S. Agmon and Y. Kannai, On the asymptotic behavior of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators, Israel J. Math., **5** (1967), 1-30.

[3] V. G. Avakumović, Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Math. Z., **65** (1956), 327-344.

[4] F. E. Browder, Asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions for non-local elliptic boundary value problems I, Amer. J. Math. **87** (1965), 175-195.

[5] T. Carleman, Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, C. R. du 8 ème Congr. des Math. Scand. Stockholm 1934 (Lund 1935), 34-44.

[6] ———, Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partielles Differentialgleichungen,

Ber. Math.-Phys. Klasse der Sächs, Akad, Wiss. Leipzig, Mat.-Nat. Kl. **88** (1936), 119-132.
[7] L. Gårding, On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators, Math. Scand. **1** (1953), 237-255.
[8] ———, On the asymptotic properties of the spectral function belonging to a self-adjoint semi-bounded extension of an elliptic differential operator, Kungl. Fysiogr. Sällsk. i Lund Förth. **24** (1954), 1-18.
[9] L. Hörmander, On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators. Recent Advances in the Basic Sciences, Yeshiva University Conference November (1966), 155-202.
[10] ———, The spectral function of an elliptic operator, Acta Math. **121** (1968), 193-218.
[11] H.A.Lorentz, Vortrag auf dem internationalen Kongresse in Rom 1908, Phys. Ztschr. **11** (1910), 1248.
[12] S. Mizohata et R. Arima, Propriétés asymptotiques des valeurs propres pour les opérateurs elliptiques autoadjoints, J. Math. Kyoto Univ. **4** (1964), 245-254.
[13] S. Mizohata, Sur les propriétés asymptotiques des valeurs propres pour les opérateurs elliptiques, J. Math. Kyoto Univ. **4-5** (1965), 399-428.
[14] A. Sommerfeld : Phys, Ztschr. **11** (1910), 1057-1066.
[15] H. Weyl, Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte, Göttinger Nachrichten, (1911), 110-117.
[16] ———, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte lineare partieller Differentialgleichungen. Math. Ann. **71** (1911), 441-471.

(松村睦豪 記)

M. F. Atiyah 教授講演記録

Automorphism groups of compact manifolds

(1969年4月10日　於東京大学)

1. 考察の対象として，compact, 向きのついた C^∞-多様体 X の微分自己同型全体の作る群 Diff(X) をとりあげる．このままでは広すぎるので，compact 部分群 G を考える．G は適当な Riemann 計量について isometric な compact Lie 群である（向き保存は仮定されている）．

問題． 与えられたXについてGはどれほど大きいか．例えば，有限群でない compact な群 G がみつかるか．

例． Riemann 面 X (dim $X=2$) を考える．種数 p が 2以上のとき compact な自己同型群 G はすべて有限群である．これを Lefschetz の不動点公式で証明しよう．Gが連続群なら，単位元1の連結成分の元で孤立不動点のみをもつ元 g を考える．g の不動点の個数 N は Lefschetz の公式を $g\simeq 1$ に注意して使うと，

$$\begin{aligned} N&=\sum(-1)^q \operatorname{Trace}(g|H^q(X\,;\boldsymbol{R}))\\ &=\sum(-1)^q \dim H^q(X\,;\boldsymbol{R})\\ &=\text{Euler 標数}\\ &=2-2p<0\end{aligned}$$

となり，負になり矛盾が生ずる．ゆえに G は有限群．

この論法は，高次元では Euler 標数が正になり得るので通用しないが，ある種の多様体について拡張に成功した．以下に Hirzebruch との新結果を述べる．それには，Atiyah, Bott, Singer による指数理論と不動点公式が使われ，上例における Euler 標数の役目を $\hat{A}$-種数が代りにするのである．

2. 以下 X は Spin 多様体，dim $Y=4k$ とする．Spin 構造は，例えば $\pi_1(X)=\pi_2(X)=0$ なら入る．Spin $(4k)$ の Spinor 表現空間 $\Delta=\Delta^+\oplus\Delta^-$ によって principal Spin $(4k)$-bundle に同伴する vector bundle を $S=S^+\oplus S^-$ とする．Dirac 作用素 D とは，S^+ の切断の空間から S^- のそれへ作用する1階のある楕円型微分作用素であった．Spin(X) を，

$$\operatorname{Spin}(X)=\dim\ \ker D-\dim\ \operatorname{coker} D$$

で定める．Spin(X) は指数理論により，X の Pontrjagin 類で定まる $\hat{A}(X)$ に等しいことが知られている．

例． $\hat{A}(X)=-\dfrac{1}{24}p_1[X]$ $\quad\cdots\dim X=4$

$=\dfrac{1}{2^7\cdot 45}(-4p_2+7p_1^2)[X]$ $\quad\cdots\dim X=8$

ただし，$p_i\in H^{4i}(X\,;\boldsymbol{Q})$ は Pontrjagin 類．(Spin(X) は X に Spin 構造がなくては定められないが，$\hat{A}(X)$ はそうでないことに注意．)

定理． $4k$ 次元の向きつき compact C^∞-多様体 X が Spin 構造を許すとき，$\hat{A}(X)\neq 0$ ならば，Diff(X) のどんな compact 部分群も有限群になる．

定理 (いいかえ). 上の Spin 多様体 X に群 S^1 が自明でなく作用するなら $\hat{A}(X)=0$.

証明の概略．G の X への作用は Spin 構造と整合するので，$S^\pm$ は G-bundle となり，ker D, coker D は G-space．そこで

$$\operatorname{Spin}(G,X)=(\text{character of }\ker D)-(\text{character of coker }D)$$

$$\operatorname{Spin}(g,X)=\operatorname{Trace}(g|\ker D)-\operatorname{Trace}(g|\operatorname{coker} D)$$

と定義する．Spin$(1,X)=$Spin(X) である．Spin(g,X) は Lefschetz 数といい，g の不動点集合 X^g から定まる cohomological な量で表わせる．さて $g\in S^1$ は S^1 の生成元で X^g は有限集合 $\{P\}$ としよう．このときは，

$$\operatorname{Spin}(g,X)=\sum_P\alpha(P)$$

$$\alpha(P)=(\pm)\prod_{j=1}^{2k}\frac{\sqrt{-1}}{2\sin(\theta_j/2)}$$

とあらわせる．ここで θ_j $(1\leqq j\leqq 2k)$ は $(dg)_P: T_P(X)\to T_P(X)$ の回転角である．$g=z$, $|z|=1$ と考えると，

$$\alpha(P)=(\pm)\prod_{j=1}^{2k}\frac{1}{z^{m_j(P)/2}-z^{-m_j(P)/2}}$$

とかけることがわかる．$m_j(P)$ は整数．したがって，Spin (z, X) は有理関数を定め，$z\to\infty$，$z\to 0$ で 0 になるが，一方 Spin (z, X) は S^1 の表現環の元として有限 Laurent 級数だから

$$\mathrm{Spin}\,(z, X)\equiv 0. \quad \therefore \quad \mathrm{Spin}\,(X)=\mathrm{Spin}\,(1, X)=0.$$

X^g が次元 1 以上のときは，X^g の normal bundle について考察を拡張すればよい．　（終）

例． X が $P_3(\boldsymbol{C})$ 内の代数曲面で $\deg\cdot X=2q$ とする．このとき Spin 構造が入り，Spin $(X)=q(q^2-1)/3\neq 0$ $(q>1)$．$X=P_2(\boldsymbol{C})$ とすれば $(\deg X=1)$，Spin 構造は入らない．$\hat{A}(X)=-p_1[X]/24\neq 0$ に注意せよ．実際 $U(3)$ が作用している．

例． compact 連結 Lie 群の等質空間 G/H $(G\neq H)$ が Spin 構造をもつなら，$\hat{A}(G/H)=0$.

文　　献

[1] M.F.Atiyah and F.Hirzebruch, Spin-Manifolds and Group actions (to appear).

[2] M. F. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic operators III, Ann. of Math. **87** (1968), 546-604.

（内山康一 記）

Vector fields on manifolds

（1969 年 4 月 22 日　於北海道大学）

X をコンパクト，oriented な微分可能多様体とする．X の differentiable automorphisms の群を Diff X とかく．Diff X は位相群である．X の上のベクトル場は infinitesimal automorphisms とみなされる．Diff X のコンパクトな部分群 G を考える．X 上に G-不変な Riemannian metric が存在するから，G は isometries の群に含まれ，したがってコンパクト・リー群となる．そこで，どれだけ大きな群 G が X に作用するかを考える．G が有限に限るか，無限の場合もあるかということが問題となる．まず，Diff X の任意のコンパクト部分群 G が有限ならば，X を rigid と呼ぶことにする．X が rigid であるということは，X 上に non-trivial な circle action が存在しないことと同値である．次の古典的な定理が成り立つ．

定理 1.　Dim $X=2$, X が連結であると仮定する．このとき，X が rigid であるための必要十分条件は，genus $X\geqq 2$.

この定理の主要な部分は，X のオイラー標数 $E(X)$ が負ならば X が rigid となることで，これは Lefschetz fixed point theorem によって容易に証明される．高次元の場合この結論自体は成り立たない．

次に，この結論の，高次元における類似を考える．D を X の接ベクトル・バンドルに対する Dirac operator とする．D は elliptic だから Index $D=\dim \mathrm{Ker}\, D-\dim \mathrm{Ker}\, D^*$ が定まる．この量は X のみに依存し，Spin (X) とかき表わされる．X が Spin-manifold のとき，Spin $(X)=\hat{A}(X)$ となる．$E(X)$ の代りに Spin (X) を用い，Atiyah-Singer による generalized Lefschetz fixed point theorem に基いて，定理 1 の証明は拡張され次のような結果が得られる．

定理 2.　(Atiyah-Hirzebruch). Dim $X=4k$ とする．が spin-manifold で Spin $(X)\neq 0$ ならば X は rigid となる．

次に証明の概略を述べる．D を X の上の elliptic operator，G をコンパクト群とし，G の作用と D は可換であるとする．このとき G は (X, D) の上に作用するという．Ker D は有限次元で，G の一つの表現空間である．$g\in G$ に対して，Trace $(g|\mathrm{Ker}\, D)-$Trace $(g|\mathrm{Ker}\, D^*)$ $=L(g, D)$ を generalized Lefschetz number という．

D を Dirac operator，$G=S^1$ とする．$g=z$（絶対値 1 の複素数）とみなす．$L(g, D)$ は X および g のみに依存する．$L(g, D)=$Spin (z, X) とおく．明らかに Spin $(1, X)$ $=$Spin (X) となる．Spin (z, X) は，X 上の circle action に対して定義される z の関数である．以下，簡単のため，不動点の個数が有限の場合に限るものとする（一般の場合は[2]を参照されたい）．不動点 $p\in X$ における接ベクトル空間を T_p とする．T_p における S^1 の表現 $S^1\to SO(n)$ が定まり，T_p を適当な $2k$ 個の 2 次元部分空間の直和と表わすとき，各 2 次元空間における回転 $z\to z^m$ (m は整数) となる．この整数を $m_1(p), \cdots, m_{2k}(p)$ とかく．このとき Spin $(z, X)=\sum_{\text{不動点}\,p}\prod_{j=1}^{2k}1/(z^{m_j(p)/2}-z^{-m_j(p)/2})$ $=\sum_{h=-N}^{N}c_h z^h$ $(|z|=1,\ c_h$ は整数) と表わされる．ほとんどすべての z に対してこの等式は拡大されるから，実は恒等式であり，Spin (z, X) は z の有理関数となる．$z\to 0$ または $z\to\infty$ のとき，$1/(z^{m_j(p)/2}-z^{-m_j(p)/2})\to 0$ だから，すべての h に対して $c_h=0$，したがって，Spin $(z, X)=0$ 特に Spin $(X)=$Spin $(1, X)=0$．すなわち，X の上に S^1-action が存在するとき，Spin $(X)=0$ となる．これは定理 2 の結論を示す．

定理 2 の例が，実際に複素 3 次元射影空間の代数超曲面のなかに見出される．また，Spin (X) は，定理 2 が成り立つようなただ一つの Pontrijagin numbers の 1 次結合であることがわかる．

参考文献を二つあげておく．本講演の内容は特に[2]と密接に関連する．

文　　献

[1] M. F. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic operators : III, Am. of Math. (2) **87** (1968), 546-604.

[2] M.F.Atiyah and F.Hirzebruch, Spin-manifolds and group actions, Preprint.

（鈴木治夫 記）

R. Courant 教授講演記録

What are mathematicians?

(1969 年 4 月 9 日　於京都大学)

最初に数学者に二つの種類があり，それぞれ純粋数学者，応用数学者と称していることそしてこの両者の間に深い緊張関係が存在する事実を指摘しよう．しかしこの二つの立場の衝突はどちらかが間違っているのではなくて，調和的に共存するべきものであると考える．実際に，近代の数学は理論的な諸科学との密接な接触のもとに発展してきており，単に数学が応用されるだけでなく，数学を進めるためにも，物理学的現象による解釈が用いられている．例えば F. Klein が指摘しているように，Riemann は複素函数論，特に写像定理を非圧縮性流体の場における二重極を用いることによって発見し，さらにこの考えをおしすすめて genus の問題にまでおよんでいる．さらにその定理の証明に用いた Dirichlet 積分の考えは，その証明にいささかの論理的ギャップがあったが，それを埋めようとする努力が幾人かの数学者，たとえば Weber, H. A. Schwarz, Poincaré, Zaremba, 等の研究を生み出し，結局 50 年後に Hilbert によって完全に埋められた．それと同時にこの Hilbert の仕事が数学に新たな局面をもたらした．数学は今日いわゆる，函数解析とよばれる部分を生みだし，それのみではなく，いわゆる応用数学にも Ritz-Galerkin の方法という，たくみな近似解法をもたらした．

このように数学と応用数学とは相たづさえ，調和的に発展すべきものであることを，実例を混えてやさしく情熱的に話された．

(山口昌哉 記)

J. L. Doob 教授講演記録

Analytic functions and probability theory

(1969 年 4 月 12 日　於東京都立大学)

函数論におけるかなり古典的な問題——解析函数，調和函数の Fatou 型 limit theorem 等——に対し，確率論的考察が有効であることが，教授の一連の研究によって明らかにされた．本講演では，Phragment-Lindolöf-Ahlfors-Heins の問題 (PLAH と略記) に確率論がどのように適用されるかを中心に解説された．

1.　以下の議論は平面上の任意の領域，Riemann 面，Green 空間でも同様であるが，簡単のため上半平面 $R_+=\{(\xi,\eta),\eta>0\}$ で問題を考える．したがって境界は実軸 $\eta=0$ である．$x(t)$ を点 $z\in R_+$ から出発した Brown 運動の path，Pをその確率測度とする．$x(t)$ の境界への到達時刻を τ であらわす．次の定理は調和函数論と確率論をむすびつける基本的結果である．

定理 1.　u を R_+ 上の非負調和函数とすれば，$u(x(t))$ は ($t\geqq\tau$ で 0 とおけば) 連続な path をもつ super martingale である．したがって特に $\lim_{t\uparrow\tau}u(x(t))$ が確率 1 で存在する．

この定理は h-path process (条件付 Brown 運動) に拡張される．まずその定義をしよう．$p(t,x,y)$ を R_+ 上の Brown 運動の推移確率の Lebesque 測度に関する密度函数，h を正の調和函数とすれば，

$$p^h(t,x,y)=p(t,x,y)h(y)/h(x)$$

はふたたび R_+ 上のある推移確率の密度函数になる．ゆえにこの推移確率にしたがう Markov 過程が存在するが，その path $x^h(t)$ は連続であることが知られている．$x^h(t)$ を h-path process と呼ぶ．

h-path process の中，h が minimal のとき特に興味がある．R_+ 上の非負 minimal 調和函数は定数倍を除けば，1) η (R_+ の第二座標) および，2) $\eta/\{(\xi-\xi_0)^2+\eta^2\}$ (ξ_0 は任意に固定された実数) にかぎられる．さらに対応する h-path $x^h(t)$ は $t\to\tau$ のとき確率 1 で，1) の場合は $+\infty$ に収束し，2) の場合は $(\xi_0,0)$ に収束する．

さて定理 1 は h-path process のとき次のようになる．

定理 2.　u を非負優調和函数とすれば，$u(x^h(t))/h(x^h(t))$ は ($t\geqq\tau$ では 0 とおけば) h-path process に関し super-martingale である．ゆえに特に $\lim_{t\uparrow\tau}u(x^h(t))/h(x^h(t))$ が存在する．

2.　つぎに定理 2 が実解析の問題とどうむすびつくか調べよう．次の定理は Lelong (1949) によって証明された．

定理 3.　R_+ 上の函数 f が $h=\eta/\{(\xi-\xi_0)^2+\eta^2\}$-path にそって極限値 l をもつとする，すなわち $\lim_{t\uparrow\tau}f(x^h(t))=l$ が確率 1 でなりたつとする．$(\xi_0,0)$ を通り実軸との角度が θ の射線 (ray) を L_θ であらわせば，命題 ‘L_θ にそって $z\in R_+$ を $(\xi_0,0)$ に近づければ $f(z)$ は l に収束する’ が極集合を除いたすべての θ について成立する．

しかしこの逆の命題は必ずしも成立しない．すなわち，射線にそって極限値が存在しても必ずしも h-path にそって極限値があるかどうかわからない．この意味で path にそって極限値をとる方が自然である．

さて PLAH の問題をのべよう．u は R_+ 上の優調和函数で次の 1), 2) をみたすとする：1) $\liminf_{z\to(\xi_0,0)}u(z)\geqq0$；2) $\limsup_{r\to\infty}m(r)/r>-\infty$，ただし $m(r)=\inf_\theta u(re^{i\theta})$．PLAH の問題とは，このような u に対し $u(re^{i\theta})/r$ が $r\to\infty$ のとき極限値をもつかどうか，また u が R_+ で正になる条件をみつけること等である．この問題に関連して，次の定理が定理 2 を用いて容易に示される．

定理 4.　u を 1), 2) をみたす優調和函数とすると，$u(re^{i\theta})/(r\sin\theta)$ は $h=r\sin\theta$-path にそって確率 1 で極限値 α をもつ．しかも α は $\inf u(re^{i\theta})/(r\sin\theta)$ に等しい．

この定理と定理 3 から，極集合を除いたすべての θ に対し，$u(re^{i\theta})/r$ は $r\to\infty$ のとき極限値 $\alpha\sin\theta$ をもつことがわかる．

(国田　寛 記)

A. A. Gontchar 教授講演記録

Rational approximations of continuous functions

(1969 年 4 月 15 日　於早稲田大学)

複素平面 $\boldsymbol{C}^1$ 内のコンパクトな集合を E とし，E で連続な関数全体の algebra を $C(E)$ とする．関数 $f\in C(E)$ のノルムを $\|f\|=\max_{z\in E}|f(z)|$ とするとき，$C(E)$ の subalgebra $R(E)$ を次のように定義する：

$$R(E)=\{f\in C(E)\,;\,{}^\forall\varepsilon>0,\quad {}^\exists r=r(z)：\text{有理関数},\ \|f-r\|<\varepsilon\}.$$

すなわち，$C(E)$ の要素で有理関数によって一様近似される関数の集合が $R(E)$ である．このとき，問題は

$$R(E)=C(E)$$

がいかなる条件の下に成立するかということである．

この問題の歴史的事実としては，例えば次の結果がある．

(1) $C(E)$ の要素で多項式によって一様近似される関数族を $P(E)$ とすれば，$P(E)=C(E)$ であるための必要十分な条件は

i) E の内点は空集合，

ii) $\boldsymbol{C}^1-E$ は連結集合

となることである．

(2) $R(E)=C(E)$ ならば E の内点の集合は空集合である．逆が成立しない反例がある．

次に，e は $\boldsymbol{C}^1$ に含まれるコンパクトな集合とするとき，関数族 B を次のように定義する：

$$B=\{f\,;\,f \text{ は } \boldsymbol{C}^1-e \text{ で解析的},\ |f(z)|\leqq 1,\ |f(\infty)|=0\}.$$

このとき

$$\gamma(e)=\sup_{f\in B}|f'(\infty)|$$

を e の analytic capacity という．これはまた

$$\gamma(e)=\sup_{f\in B}\lim_{z\to\infty}|zf(z)|$$

と同値である．また，$\gamma(\Omega)=\sup_{e\subset\Omega}\gamma(e)$ と表わす．

集合 E 上の点 ζ を中心とし，半径 δ の円を $K(\zeta,\delta)$ とし，$G(\zeta,\delta)=K(\zeta,\delta)-E$，$\gamma_{\zeta,\delta}=\gamma(G(\zeta,\delta))$ とおくとまずつぎの定理が成立する．

定理 1. 次の三つの条件はいずれも $R(E)=C(E)$ であるための必要十分な条件である．

I．ほとんどすべての $\zeta\in E$ に対して

$$\lim_{\delta\to 0}\sup\frac{\gamma_{\zeta,\delta}}{\delta^2}>0\,;$$

II．任意の $\zeta\in\boldsymbol{C}^1$ および $\delta>0$ に対して $\gamma_{\zeta,\delta}=\delta$；

III．任意の有界な開集合 O に対して $\gamma(O-E)=\gamma(O)$.

次に 3 次元の調和関数について考える．R^3 内のコンパクトな集合を $\mathcal{E}$ とし，$\mathcal{E}$ 上で定義された連続関数の族を $C(\mathcal{E})$ とするとき，関数族

$$H(\mathcal{E})=\{f\in C(\mathcal{E})\,;\,{}^\forall\varepsilon>0,\ {}^\exists h(p)：\text{調和関数},\quad \|f-h\|<\varepsilon\}$$

を定義し，古典的なニュートンポテンシャルによる capacity を $C_{Q,\delta}=C(K_{Q,\delta}-\mathcal{E})$ で表わせば，よく知られているように $H(\mathcal{E})=C(\mathcal{E})$ であるための必要十分な条件は任意の $O\in\mathcal{E}$ に対して

$$(*)\qquad \int_0\frac{C_{Q,\delta}}{\delta^2}\,d\delta=\infty$$

が成立することである．

定理 2. 次の三つの条件はいずれも $H(\mathcal{E})=C(\mathcal{E})$ であるための必要十分な条件である：

I．ほとんどすべての点 $Q\in\mathcal{E}$ に対して

$$\lim_{\delta\to 0}\sup\frac{C_{Q,\delta}}{\delta^3}>0\,;$$

II．任意の $Q\in R^3$ および $\delta>0$ に対して $C_{Q,\delta}=\delta$.

III．任意の開集合 O に対して $C(O-\mathcal{E})=C(O)$.

この定理において II→(＊)→I→II が成立することに注意されたい．

次に，$\boldsymbol{C}^1$ に含まれるコンパクトな集合 E に対して，E で連続，E の内点で解析的な関数の Banach algebra を $A(E)$ で表わすとき，一般的な問題は $R(E)=A(E)$ がいかなるときに成立するかということである．このために，R の minimum boundary を

$$M_R=\{\zeta\in E\,;\,{}^\forall z\in E-\{\zeta\},\ {}^\exists f\in R(E),\ |f(\zeta)|>|f(z)|\}$$

と定義すると，まず次の結果が成立する．

定理 3. $R(E)=C(E)$ であるための必要十分な条件は $M_R=E$ である．

最後に未解決の問題をあげておく．

open problem：$R(E)=A(E)$ であるための必要十分な条件は $M_R=M_A$ である．

この問題と関連した結果としては $R(E)=C(E)$ ならば $M_R\subset M_A\subset\partial E$ (E の topological boundary) が知られているが，$M_R=\partial E$ ならば $R(E)=A(E)$ が成立するかどうかは未解決である．　(杉山昌平 記)

L. Hörmander 教授講演記録

Asymptotic properties of the spectral function of an elliptic operator

(1969 年 4 月 11 日　於京都大学数理解析研究所)

Ω を 3 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^3$ の有界領域としその境界 $\partial\Omega$ は区分的に滑らかとする．L^2 の枠で次の固有値問題を考えよう．

$$\Delta u+\lambda u=0 \text{ in } \Omega,\quad u|_{\partial\Omega}=0$$

この問題の固有値はすべて実数≧0 で可算個で重複度は有限であり $+\infty$ のみに集積点をもつ．そこで固有値の全体に，重複するものはその多重度だけ並べることにして，$\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\leqq\lambda_j\leqq\cdots$，と番号をつければ $\lim_{j\to\infty}\lambda_j=+\infty$ である．このとき固有値の漸近的挙動に関し

$$\sum_{\lambda_j\leqq\lambda}1=\frac{m(\Omega)}{6\pi^2}\lambda^{3/2}(1+o(1)),\quad \lambda\to\infty,$$

(ここで $m(\Omega)$ は Ω の体積を表わす)

が成り立つ．この結果は 1911 年 Weyl によって得られた．Carleman は 1934 年固有函数の漸近的挙動について

も類似の結果を得た．$\{\varphi_j\}_{j=1,2,\cdots}$ を $\{\lambda_j\}_{j=1,2,\cdots}$ に対応する固有函数のつくる完全正規直交系とし

$$e(x, y, \lambda)=\sum_{\lambda_j\leqq\lambda}\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}$$

とおく．この $e(x, y, \lambda)$ は spectral function と呼ばれる．このとき

$$e(x, y, \lambda)=o(\lambda^{3/2}), \quad x\neq y,$$

$$e(x, x, \lambda)=\frac{1}{6\pi^2}\lambda^{3/2}(1+o(1)), \quad \lambda\to\infty$$

が成り立つ．$\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ で上の漸近式が一様に成り立つことから

$$\sum_{\lambda_j\leqq\lambda}1\sim\int_\Omega e(x, x, \lambda)dx=\frac{m(\Omega)}{6\pi^2}\lambda^{3/2}(1+o(1)), \quad \lambda\to\infty$$

がしたがう．なお Carleman は 1936 年 2 階線形楕円型作用素の一クラス (必ずしも self-adjoint でない) に対する固有値の漸近分布に関し類似の結果を確立している．

さて Ω を C^∞ paracompact manifold とし P を Ω 上の C^∞ 係数，m 階の微分作用素とする．すなわち P は $C_0^\infty(\Omega)$ を $C^\infty(\Omega)$ への連続線形作用素であって $u\in C_0^\infty(\Omega)$, 実数値 C^∞ 函数 φ に対し

$$e^{-i\tau\varphi}P(ue^{i\tau\varphi})=\tau^m p_m(x, \mathrm{grad}\,\varphi)+\cdots$$

が τ について m 次の多項式となるものである．ここで p_m は P の principal symbol と呼ばれ cotangent bundle $T^*(\Omega)$ 上の m 次の斉次多項式である．dx を正の C^∞ density とし固定しよう．$(u, v)=\int u\bar{v}dx$ とおく．われわれは P が formally positive であることを，すなわちある定数 $c>0$ が存在し $(Pu, u)\geqq c(u, u)$, $\forall u\in C_0^\infty(\Omega)$ が成立することを仮定する．ここで一般性を失うことなく $c=1$ としてよい．$C_0^\infty(\Omega)$ を定義域と考えた作用素 P は $L^2(\Omega)$ で対称であり上の semi-bounded の仮定より Friedrichs の古典的定理によって self-adjoint extension $\hat{P}$ をもつ．そこで $\{E_\lambda\}$ を $\hat{P}$ の spectral resolution とする：$\hat{P}=\int_1^\infty\lambda dE_\lambda$. E_λ は C^∞ Carleman 型の kernel $e(x, y, \lambda)$ をもつ積分作用素であり $e(x, y, \lambda)$ は $\hat{P}$ の spectral function と呼ばれる．高階の self-adjoint elliptic problems の spectral functions や固有値の漸近的挙動について Gårding (1950, 51, 53 年) および Browder (1953 年) は

$$e(x, y, \lambda)=o(\lambda^{n/m}), \quad x\neq y,$$

$$\lambda^{-n/m}e(x, x, \lambda)=(2\pi)^{-n}\int_{p_m(x,\xi)<1}d\xi+o(1), \quad \lambda\to\infty$$

$$N(\lambda)=\sum_{\lambda_j\leqq\lambda}1=\left((2\pi)^{-n}\int_{p_m(x,\xi)<1}d\xi\right)\lambda^{n/m}(1+o(1)), \quad \lambda\to\infty$$

なる結果を得た．Gårding の 1954 年の結果から定数係数のとき

$$\lambda^{-n/m}e(x, y, \lambda)=(2\pi)^{-n}\int_{p_m(x,\xi)<1}e^{i\langle x-y,\xi\rangle\lambda^{1/m}}d\xi+O(\lambda^{-1/m}), \quad \lambda\to\infty$$

が成り立つことが示される．変数係数の場合 Agmon & Kannai (1967 年) と Hörmander (1966 年) は独立に主部が定数係数のとき $c<1$ に対し，変数係数一般の場合は $c<1/2$ に対し

$$\lambda^{-n/m}e(x, y, \lambda)=(2\pi)^{-n}\int_{p_m(x,\xi)<1}e^{i\langle x-y,\xi\rangle\lambda^{1/m}}d\xi+O(\lambda^{-c/m})$$

が成り立つことを示した．講演者は最近変数係数の場合次の formula が成り立つことを証明したのでこれについて紹介する．

$$\lambda^{-n/m}e(x, y, \lambda)=O(\lambda^{-1/m}), \quad x\neq y,$$

$$\lambda^{-n/m}e(x, x, \lambda)=(2\pi)^{-n}\int_{p_m(x,\xi)<1}d\xi+O(\lambda^{-1/m}), \quad \lambda\to\infty,$$

$$\lambda^{-n/m}e(x, y, \lambda)=(2\pi)^{-n}\int_{p_m(x,\xi)<1}e^{i\psi(x,y,\xi)\lambda^{1/m}}d\xi+O(\lambda^{-1/m}), \quad \lambda\to\infty.$$

ここで $\psi(x, y, \xi)$ は ξ に関し homogeneous of degree 1 で

$$p(x, \mathrm{grad}_x\,\psi)=p(y, \xi),$$

$$\psi(x, y, \xi)=\langle x-y, \xi\rangle+O(|x-y|^2|\xi|), \quad x\to y$$

をみたすある函数である．

上の結果は 2 階の場合には Avakumović, Lewitan によって得られている．

さて spectral functions や固有値の漸近的挙動に関する研究は Carleman 以後上記の人々やその他多くの人々によって種々の場合に拡張され発展したがそれらの方法は原理的には Carleman の方法の拡張あるいは発展と見做される．その方法の原理は $\hat{P}$ のある函数の kernel であって，ある種の微分方程式をみたすものの研究を基礎とし Tauber 型定理を適用することにより spectral function の漸近的挙動に関する知識を得るものと言える．Carleman は $\hat{P}$ の函数として Stieltjes transform：$G(z)=\int(\lambda-z)^{-1}dE_\lambda$ をとった．このとき $G(z)$ は $(\hat{P}-z)\times G(z)=1$ をみたし，したがって $G(z)$ は $\hat{P}$ の resolvent $(\hat{P}-z)^{-1}$ である．z が角領域 $|\arg z|<\varepsilon$ の外にあるとき $G(z)$ の error terms が $1/z$ の任意の巾よりも小さくなるような一つの漸近展開を得ることができる．しかしながらこれからは remainder estimate $O(1/\log\lambda)$ が結論されるにすぎず $O(\lambda^{-1/m})$ は得られない．Minakshisundaram, Pleijel, Gårding によって用いられた Laplace transform：$G(t)=\int_0^\infty e^{-t\lambda}dE_\lambda$, $t>0$ を用いるやり方もある．このとき $(\partial/\partial t+\hat{P})G(t)=0$, $G(0)=1$ をみたし，したがってこの $G(t)$ は熱作用素 $\partial/\partial t+\hat{P}$ の基本解とみなすことができる．これによって得られる結果は先の場合と parallel である．二階の場合の Lewitan の仕事は cosine transform：$G(t)=\int\cos t\sqrt{\lambda}\,dE_\lambda$ の研究に基づいている．このとき $G(t)$ は $(\partial^2/\partial t^2+\hat{P})G(t)=0$, $G(0)=1$,

$G'(0)=0$ をみたす．したがって，この $G(t)$ は双曲型作用素 $\partial^2/\partial t^2+P$ の基本解と密接な関係がある．$m=2$ のときの Avakumovič の仕事は Fourier transform：$G(t)=\int e^{-it\lambda^{1/m}}dE_\lambda$ の研究に基づいている．われわれの結果もこの $G(t)$ の研究にその基礎をおく．Lewitan の方法が階数 m が 2 より大である作用素に適用されなかった理由は微分方程式 $((i(\partial/\partial t))^m-\hat{P})G(t)=0$ が双曲型でないことにあるように思われる．しかし，この障害は双曲性を破壊する不適切な因子を取り除くことにより得られる方程式 $(i(\partial/\partial t)-\hat{P}^{1/m})G(t)=0$ を考えることによりさけることができる．ここで $\hat{P}^{1/m}$ は spectral theorem により定義され，もはや微分作用素ではなく (classical) pseudo-differential operator である (Seeley の仕事をみよ)．われわれの結果は $G(t)$ の kernel の singularities を完全に記述することにより得られる．そのために幾何光学においてしばしば利用される漸近解を求める方法を用いる．これは Lax により 1957 年，双曲型方程式に対する generalized Huyghens principle を証明するのに用いられた．われわれのやり方もこれと密接な関係にある．証明の詳細や文献については講演者による次の論文を参照されたい．

L. Hörmander, The spectral functions of an elliptic operator, Acta Math., **121** (1968), 193-218.

(松村睦豪 記)

Fourier integral operator

(1969 年 4 月 14 日　於大阪大学)

この講演は pseudo-differential operator の理論の拡張に関してである．Pseudo-differential operator は楕円型方程式あるいは準楕円型方程式の研究には都合が良い．すなわちそれを用いて parametrix を構成することができる．一方 non-elliptic の場合，たとえば hyperbolic operator を考察しようとするならば事態はより複雑であり大抵は Fourier の方法よりもエネルギー積分の方法が用いられている．しかし P. D. Lax の双曲型作用素の基本解の singularity に関した論文 (Duke Math. J., 1957, 627-646) は例外の一つであり，これを参照する．$P(x, D)=P_m(x, D)+$lower term が x_n に関して hyperbolic とし Cauchy 問題 $Pu=0$, $(\partial/\partial x_n)^k u|_{x_n=0}=0$ $(k=0, 1, 2, \cdots, m-2)$, $(\partial^{m-1}/\partial x_n^{m-1})u|_{x_n=0}=f(x')$ を考察するとき

$$Ef=\sum_{\nu=1}^{m}\iint e^{i\varphi_\nu(x,\xi')-i\langle y',\xi'\rangle}a_\nu(x,\xi')f(y')d\xi' dy'$$

の形の作用素 E が導かれてくる．ここで

$$Af=\iint e^{i\varphi(x,y,\xi)}a(x, y, \xi)f(y)dyd\xi$$

によって $C_0^\infty(\Omega_2)$ から $C^\infty(\Omega_1)$ への作用素 A を定義し，Fourier integral operator と名づける．ここで φ は ξ に関して order 1 の斉次函数とし，phase function と呼ぶ．集合

$$F_\varphi=\{(x, y) : \varphi(x, y, \xi) \text{ が } \xi \text{ の函数として critical point をもつ}\}$$

は A の distribution kernel の singular support を含む．

$P(x, D)=P_m(x, D)+\cdots$ を主部が実数値変数係数をもった principal type の作用素とする．このとき

$$Ef=\iint e^{i\varphi(x,y,\xi)}\{q(x, y, \xi)/P_m(y, \xi)\}f(y)dyd\xi$$

の形で P の基本解が与えられる．ここで φ は

$$\varphi=\langle x-y, \xi\rangle+O(|x-y|^2|\xi|)$$

で $P_m(x, \mathrm{grad}_x\,\varphi)=P_m(y, \xi)$ を満すもので，q は P より構成できる．上の積分で P_m は零点をもつので，積分の意味を Cauchy-Riemann equation の理論を用いて $\mathrm{Im}\,\xi=\varepsilon N$ $(N=\mathrm{grad}_\xi P_m)$ とおきかえたものとする．E は ε に依存するが，その差は C^∞-kernel をもつ作用素である．以上の議論を用いることにより，定数係数のとき Grusin によって得られた結果を変数係数の場合にまで拡張できる([2]定理1.2参照)．またこれより principal type の方程式の解の singularity の一意接続についても結果を導くことができる．

文　献

[1] L. Hörmander, The spectral function of an elliptic operator, Acta Math., **121** (1968), 193-218.

[2] ———, On the singularity of solution of partial differential equation, 国際函数解析学会予稿 (1969).

(井川　満 記)

K. Jacobs 教授講演記録

Modifications of dynamical systems

(1969 年 4 月 5 日　於東京都立大学)

0. 台北大学に客員教授として滞在中であった Erlangen 大学の Konrad Jacobs 教授は International Conference on Functional Analysis and Related Topics に出席のため，台湾より飛来された．東京都立大学数学教室と東京教育大学応用数理学教室の共催にて，東京都立大学にて Jacobs 教授の講演会が持たれたので，ここにごく簡潔にその講演の要旨をのべておく．

1. T を空間 $\Omega\equiv\{\omega, \eta, \cdots\}$ から Ω への点写像とするとき，点列 $\{\omega, T\omega, T^2\omega, \cdots\}$ を orbit という．orbit の behavior およびそれに基づく諸性質を研究するのがエルゴード理論である．エルゴード理論は大きくいって，位相的構造の研究と測度論的構造のそれに分けられる．

2. 位相的構造の研究は Topological Dynamics といわれる．

T をコンパクト空間の連続写像とするとき，minimal invariant set は，考察をそこに限定してもよいという意味で基本的であるが，その characterization は次のようになされる．

定理. M が T に関する minimal invariant set であるための必要十分条件は，$\omega \in M$ が almost periodic であることである．

3. 測度論的エルゴード理論の話に入る．$(\Omega, \boldsymbol{B}, m, T)$ を力学系とする．そこでの研究上の問題点は，エルゴード性，混合性，スペクトル型，エントロピー等である．

Ω がコンパクト空間，T が連続写像の場合を考える．

定理. $\omega \in \Omega$ が almost periodic なとき，Ω において不変測度が unique に定まるための必要十分条件は，連続関数 f に対して

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{u=0}^{t-1}f(T^{u+s}\omega)=\int_{\Omega}fdm$$

が $s \geqq 0$ に関して一様に成立することである．そのとき，$\omega \in \Omega$ は strictly ergodic である．

4. Riemann 力学系 $(\Omega, \boldsymbol{B}, m, T)$，すなわち Ω がコンパクト距離空間で，T が $m(U)=m(\Omega)=1$ なるある開集合 U 上で連続な場合を考える．$E \in \boldsymbol{B}$ に関して induced mapping T_E を考えることにより，新しい力学系 $(E, \boldsymbol{B}, m, T_E)$ が得られる．

定理. (1) $(\Omega, \boldsymbol{B}, m, T)$ に関して E に属する almost periodic visitor ω が E に adapted ならば，$(E, \boldsymbol{B}, m, T_E)$ に関してもそうである．(2) $(\Omega, \boldsymbol{B}, m, T)$ に関して E に属する regular visitor ω が E に adapted ならば，$(E, \boldsymbol{B}, m, T_E)$ に関してもそうである．

定理. $(\Omega, \boldsymbol{B}, m, T)$ が Riemann 力学系ならば，$(E, \boldsymbol{B}, m, T_E)$ もそうである．

5. 力学系 $(\Omega, \boldsymbol{B}, m, T)$ が与えられたとき，直積空間 $(\hat{\Omega}, \hat{\boldsymbol{B}}, \hat{m}) \equiv (\Omega, \boldsymbol{B}, m) \times (\Omega, \boldsymbol{B}, m) \times \cdots$ を考え，そこにおける shift を $\hat{T}$ とすると，新しい力学系 $(\hat{\Omega}, \hat{\boldsymbol{B}}, \hat{m}, \hat{T})$ が得られる．

定理. $(\Omega, \boldsymbol{B}, m, T)$ において点 ω が regular visitor ならば $(\hat{\Omega}, \hat{\boldsymbol{B}}, \hat{m}, \hat{T})$ において点 $\hat{\omega} \equiv \{\omega, T\omega, T^2\omega, \cdots\}$ は strictly ergodic である．

6. 最後に，Moscow の Katok, Stepin の最近の研究を紹介し，今後の研究上の問題点などにもふれられた．

(鶴見　茂 記)

加藤敏夫教授講演記録

発展方程式について

(1969 年 4 月 10 日　於東京大学)

Banach 空間 X における発展方程式

$$du/dt+A(t)u(t)=f(t), \quad 0 \leqq t \leqq T,$$

を考える．$A(t)$ が t によらなければ，Hille-Yosida の理論が解を与える．一般の場合の研究には二つの系統がある．すなわち，任意の t に対して $-A(t)$ が，i) C_0 級半群の生成作用素である，と仮定するものと，ii) 正則半群の生成作用素と仮定するものとがある (i) の場合を hyperbolic equation, ii) の場合をparabolic equation とよぶこともあるが，必ずしも適切な名ではない)．ii) の場合には，$A(t)$ の t-dependence については十分弱い条件を課すだけで解が得られている (H. Tanabe, P. E. Sobolevskii)．i) は加藤[2]で最初に扱われた以後あまり研究されていない．以下 i) について講演者が最近得た結果を述べる．

$-A(t)$ は C_0 級半群の生成作用素であるとつねに仮定する．[2]では，'$A(t)$ の定義域 $D(A(t))=D$ が t によらない' などの仮定のもとに，次の性質 a)-f) をみたす evolution operator $\{U(t,s)|0 \leqq s \leqq t \leqq T\}$ を構成した．

a) $U(t,s)$ は二変数 t, s について連続；b) $U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$, $0 \leqq r \leqq s \leqq t \leqq T$；c) $U(t,t)=I$；d) $U(t,s)D \subset D$；e) 任意の $\varphi \in D$ に対して，

$$(\partial/\partial t)U(t,s)\varphi=-A(t)U(t,s)\varphi\,;$$

f) $A(t)U(t,s)(A(t)+\beta)^{-1}$ ($\beta>0$ は十分大きな数) は二変数 s, t につき強連続である．

$D(A(t))$ が t によらないという仮定は強すぎる．以下，それを弱めても上のような $\{U(t,s)\}$ が作れることを示す．まず次の条件 I, II を導入する．

I (安定条件)．任意の $0 \leqq t_1 \leqq \cdots \leqq t_n \leqq T$ と $\lambda > \beta$ とに対して

$$\|(A(t_n)+\lambda)^{-1}\cdots(A(t_1)+\lambda)^{-1}\| \leqq M(\lambda-\beta)^{-n}.$$

II．次の性質 i)-iii) をみたす Banach 空間 $\tilde{X}$ がある．

i) $\tilde{X}$ は X の稠密な部分空間で，X の中に連続的に埋めこまれている．

ii) $D(A(t)) \supset \tilde{X}$ かつ $A(t) \in B(\tilde{X}, X)$ であり，$t \to A(t)$ はノルムの意味で連続である．

iii) $e^{-\tau A(t)}\tilde{X} \subset \tilde{X}$ である．$\tilde{X}$ における半群 $\{e^{-\tau A(t)}|_{\tilde{X}}\}$ の生成作用素を $\tilde{A}(t)$ とすると，$\tilde{A}(t)$ は安定条件をみたす．

定理 1. 条件 I, II が成り立つならば，a), b), c) および

$$(D_t^+U(t,s)\varphi)_{t=s}=-A(s)\varphi, \quad \varphi \in \tilde{X},$$

をみたす $\{U(t,s)\}$ が存在する．さらに $\tilde{X}$ が反射的ならば，d′), e′) [d), e) において D を $\tilde{X}$ でおきかえたもの] も成り立ち，また $\{U(t,s)\}$ は一意的である．

a)-f) をみたす $\{U(t,s)\}$ を作るには，仮定 II を強めねばならない ($\tilde{X}$ が反射的とは仮定しない)．

II′．次の性質 i′)-iii′) をみたす $\{\Lambda(t) \in B(X)|0 \leqq t \leqq T\}$ がある．

i′) $D(\Lambda(t))=D$ は t によらない．かつ $D(A(t)) \supset D$.

ii′) $\Lambda(t)^{-1} \in B(X)$ が存在し，$t \to \Lambda(t)\Lambda(t)^{-1}$ はノルムの意味で連続，$\Lambda(t)\Lambda(0)^{-1}$ は t につき滑らか．

iii′) $\Lambda(t)A(t)\Lambda(t)^{-1}=A(t)+C(t)$, $C(t) \in B(X)$, とかけ，$t \to C(t)$ は強連続である．

定理 2. 条件 I, II′ が成り立つならば，a)-f) をみたす $\{U(t,s)\}$ が存在する．ただし，$\{U(t,s)\}$ の性質 d), e) の D としては，i′) にでてきた D をとり，f) では $A(t)$ を $\Lambda(t)$ でおきかえるものとする．

注意. [2] で扱われたのは，$\Lambda(t)=A(t)$ の場合であ

り，上の結果は[2]の結果の拡張である．

応用. Symmetric hyperbolic system

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(t)u=\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}+b(x,t)u=0$$

を考える．ここで $x\in R^n$, $0\leqq t\leqq T$ であり，$u(x)$ は N 次元ベクトル，a_k, b は N-N 行列で a_k はエルミート行列，a_k, $\partial a_k/\partial x_j$, b は $[R^n]\times[0, T]$ 上で有界かつ連続であると仮定する．

$X=L^2(R^n)$ とする．A は縮小作用素の半群の生成作用素となるので，条件Ⅰはみたされる．また，$\Lambda(t)=\Lambda=(1-\Delta)^{1/2}$ ととれば条件Ⅱ′ の i′), ii′) がみたされる (このとき $\tilde{X}=H^1(R^n)$ として条件Ⅱの i), ii) が成り立つ)．条件Ⅱ′ の iii′) が成り立つことは，Calderon[1] の定理から導かれる次の結果による．$a\in C^1(R^n)$ で，$a, \partial a/\partial x_k$ が R^n 上で有界ならば，$\Lambda a-a\Lambda$ は $L^2(R^n)$ 上の有界作用素である．

文　献

[1] A.P. Calderon, Commutators of singular integral operators, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **53** (1965), 1092-1099.

[2] T. Kato, Integration of the equation of evolution in a Banach space, J. Math. Soc. Japan, **5** (1953), 208-234.

(黒田成俊 記)

角谷静夫教授講演記録

Measure preserving transformation defined on an infinite measure space

(1969 年 4 月 12 日　於京都大学)

講演の内容は，簡単にいうと，infinite measure space 上の measure preserving transformation の理論と，finite measure space 上の理論との内的な関係を提示することと，ergodic transformation の equivalent class に対する不変量を与えることである．

角谷教授は von Neumann の定理 (すなわち，純点スペクトルをもつ ergodic transformation に対しては，metrical equivalence は spectre equivalence に一致する) に対応するものを望まれているようであるが，それは成功されていないようである．以下その内容を紹介する．

1. $(X, \boldsymbol{B}, \mu)$ を measure space とする．ここで $\boldsymbol{B}$ は σ-field, μ は σ-additive measure であって σ-finite であるとする．φ を X から X への one to one measure preserving transformation とする (今後 transformation と言ったとき，one to one measure preserving transformation とする)．

X' を $X'\in\boldsymbol{B}$ で，$0<\mu(X')<+\infty$ なるものとする．measure space $(X', \boldsymbol{B}', \mu')$ を考える．ここで μ' は μ から導入されたものである．X' 上の transformation φ' を次のように構成する．

$X'\ni x$ に対して，$n=\min\{k\geqq 1\,;\,\varphi^k(x)\in X'\}$ とするとき，$\varphi'(x)=\varphi^n(x)$ とおくものとする．明らかに φ が ergodic なら φ' も ergodic である．

重要なのはこの逆である．すなわち X' 上の ergodic transformation φ' から X 上の ergodic transformation を canonical に構成することである．

$\{A_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を X' の可算個の可測分割，$\{A_n^{(k)}\}_{n=1,2,\cdots}^{k=0,1,2,\cdots}$ を X の可算個の可測分割とする．ここで $A_n^{(0)}=A_n$ である．$A_n^{(k)}$ から $A_n^{(k+1)}$ への transformation χ が存在するとき，

$$\begin{cases}\varphi(x)=\chi(x), & \chi\in A_n^{(k)}, \quad 0\leqq k\leqq n-2\\ \varphi(x)=\varphi'(\chi^{-(n-1)}(\chi)), & \chi\in A_n^{(n-1)}\end{cases}$$

このように X 上の transformation φ が構成できる．

次の定理は infinite measure の理論と，finite measure の理論を結ぶものとして重要である．

定理. X 上のすべての ergodic transformation φ は，分割を適当にとることによって上記の方法で φ' から構成することができる．

2. 次に ergodic transformation の equivalent class の不変量を提示された．出発点は infinite measure space の場に特有の Hajian による次の定理である．

定理 (Hajian). $\mu(x)=+\infty$ で，φ は ergodic のとき，$W\in\boldsymbol{B}$, $(\mu(W)>0)$ と，数列 $\{n_k\}_{k=0,1,2,\cdots}$, $(0=n_0<n_1<n_2<\cdots)$ とが存在して，$\{\varphi^{n_k}(W)\,;\,k=0,1,2,\cdots\}$ が disjoint になるようにできる．

定理の数列 $\nu=\{n_k\}$ を weakly wandering sequence という．φ に対して，weakly wandering sequence の全体を $\mathfrak{M}(\varphi)$ とすると次の定理が成立する．

定理. φ_1 と φ_2 が equivalent ならば $\mathfrak{M}(\varphi_1)=\mathfrak{M}(\varphi_2)$ である．

定理のように $\mathfrak{M}(\varphi)$ は equivalent class の不変量ではあるが，代数的構造をもっていないので，すこし拡張することを考える．

$$\mathfrak{M}^*(\varphi)=\left\{\nu=\{n_k\}\,;\,\sum_{k=1}^{\infty}f(\varphi^{n_k}(x))<+\infty\ (\text{a.e.}\,x),\quad {}^{\forall}f\in L^1_+(x)\right\}$$

とおくと $\mathfrak{M}^*(\varphi)$ は ideal のような構造をもっている．明らかに $\mathfrak{M}(\varphi)\subsetneqq\mathfrak{M}^*(\varphi)$ である．

定理. φ_1 と φ_2 が equivalent ならば $\mathfrak{M}^*(\varphi_1)=\mathfrak{M}^*(\varphi_2)$ である．

逆に，$\mathfrak{M}^*(\varphi_1)=\mathfrak{M}^*(\varphi_2)$ なら φ_1 と φ_2 が equivalent になるかどうかは open problem である．

$\mathfrak{M}^*(\varphi)$ を代数的構造の中に把えると，$\beta(z_+)$ を z_+ の maximal ideal の全体とするとき，$\beta(z_+)$ の open set $\theta(\varphi)$ が存在して，$\mathfrak{M}^*(\varphi)$ の元と $\theta(\varphi)$ の元とが1対1に対応することが知られている．この関係がどのように役立つかは今のところ明らかではない．

(大槻舒一 記)

P. D. Lax 教授講演記録

‘Informal talk’

(1969 年 4 月 10 日　於京都大学)

これは Lax 教授が京大でなされた informal talk の内容である．京都関係の数学者，鹿野忠良，野木達夫，西田孝明の 3 氏の talk のあとで特に西田氏の話，非線型双曲型方程式の大局解に関連して，教授と J. Glimm が得た最近の結果を次のように説明された．以下のような連立方程式を考える：

$$u_t+f_x=0$$
$$v_t+g_x=0$$

ここで，f, g は u と v の函数で次の三つの条件をみたす．

a）上の方程式系は双曲型である．

b）Lax の意味で真に非線型である．

c）同じ族の二つの shock の interaction は常に同じ族の一つの shock と他の族の rarefaction wave を生み出す．

初期値 $u(0, x)$ については常数と ε の範囲でしか違はないことを仮定する．このときこれが有界変動であることは要求しない（ここが新しい），すると結果として

定理 1. もし初期値について，ε が十分小ならばこの初期値問題はすべての時間まで解をもつ．

定理 2. もし初期値が周期的ならば，その解は $1/t$ のオーダーで $t\to+\infty$ のとき 0 に近づく．

定理 3. もし初期値があるコンパクト集合以外で 0 であるならば，$1/t^{1/2}$ のオーダーで 0 となる．

すべての証明は 1965 年 Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 697-715 にのせられた Glimm の方法を少し変更し，適当な不等式をつくることによって証明できる．

(山口昌哉 記)

KdV 方 程 式

(1969 年 4 月 12 日　於大阪大学)

いま，一次元における次の方程式を考えよう．

$$(KdV)\begin{cases} u=u(t, x), \quad -\infty<t<\infty, \quad -\infty<x<\infty \\ \dfrac{\partial}{\partial t}u+u\dfrac{\partial}{\partial x}u+\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\right)^3 u=0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^n u\to 0, \quad |x|\to\infty, \quad n=0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

上の方程式はある種の進行波を解にもつ．速度 c の進行波を $u(t, x)=s(x-ct)$ とおくと，s は次式

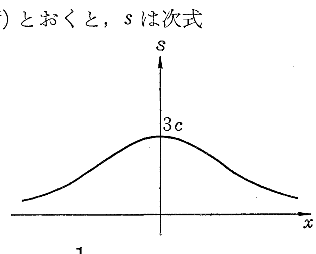
$$-cs_x+ss_x+s_{xxx}=0$$

をみたす．

さらに $|x|\to\infty$ における条件より

$$s_x^2=cs^2-\frac{1}{3}s^3.$$

これは



$$s(x)=3c\,\mathrm{sech}^2\frac{1}{2}x\sqrt{c}$$

なる解をもつ（図 1）．

これら $s(x, c)$ を Normal Modes と言おう．この進行波は (KdV) において重要な役割をするが，特に興味あることとして二つの進行波の合成からなる解を考えよう．

$s_1(x, c_1), s_2(x, c_2)$ を Normal Modes とする $(c_1>c_2>0)$．

非線型であるから $s_1(x-c_1t\,;\,c_1)+s_2(x-c_2t\,;\,c_2)$ は (KdV) の解にはならないが，$t\to-\infty$ に対しこれに近づく解はただ一つ存在する．すなわち $t\to-\infty$ にしたがって二つの進行波に分離していく解である．$d(t, x)$ とかこう．

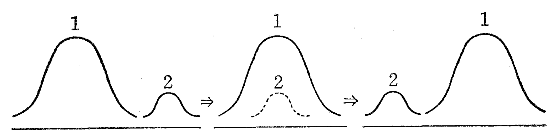
この $d(t, x)$ は t の変化に対してどう変るか．

まず $t\to\infty$ に対しては，位相はずれるが再び同じ進行波に別れる．すなわち $^\exists\theta_1, \theta_2$

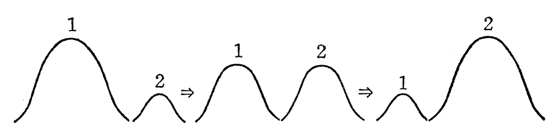
$$d(t, x)\cong s_1(x-\theta_1-c_1t\,;\,c_1)+s_2(x-\theta_2-c_2t\,;\,c_2)\quad t\to\infty$$

ここで問うのはこの途中の時間である．

a）$c_1>3c_2$ のとき，のみこみによる追越しが起る．



b）$c_2<c_1<(3+\sqrt{5})c_2/2$ のとき，球突の球のように，進行波のすりかえが起る（次のような感じ）．



以上のことを示すために $d(t, x)$ が満たすべき，時間微分を含まない方程式を (KdV) から導こう．

ここに (KdV) の積分（Integrals――保存量と言うほうがふさわしいかも知れない）を用いる．

$$I_1(u)=\int\frac{1}{2}u^2dx, \qquad I_2(u)=\int\left(\frac{1}{3}u^3-u_x^2\right)dx$$

$$I_3(u)=\int\left(\frac{1}{4}u^4-3uu_x^2+\frac{9}{5}u_{xx}^2\right)dx$$

等は $u=u(t, x)$ が (KdV) を満たすとき，t に対し不変である．このようなものを (KdV) の積分と言う．

$$I(u)=I_3(u)-\frac{9}{5}(c_1+c_2)I_2(u)+\frac{18}{5}c_1c_2I_1(u)$$

なる積分を考えよう．これはフレッシェ微分可能で，そのグラジエント G は次のもので与えられる．すなわち

$$\frac{d}{d\varepsilon}I(u+\varepsilon v)|_{\varepsilon=0}=(G(u), v)\quad {}^\forall u, v$$

$$G(u)=u^3-\frac{9}{5}(c_1+c_2)u^2+\frac{18}{5}c_1c_2u+3u_x^2$$
$$+6uu_{xxx}-\frac{18}{5}(c_1+c_2)u_{xx}+\frac{18}{5}u_{xxxx}.$$

さらに G は $G(s_1)=G(s_2)=0$ をみたす．

さて，$u_\varepsilon(t, x)$ として $^\forall\varepsilon\geqq 0$ に対し $u_\varepsilon(t, x)$ は (KdV) の解で，ε に関して‘微分可能’であるものを考える．

すると仮定から $I(u_\varepsilon(t,\cdot))$ は t に独立，ゆえに

$$\frac{d}{d\varepsilon}I(u_\varepsilon(t,\cdot))|_{\varepsilon=0}=\left(G(u_0),\frac{d}{d\varepsilon}u_\varepsilon|_{\varepsilon=0}\right)$$

も t に独立である．いま，$v=(d/d\varepsilon)u_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ については

$$\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon=-u_\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}u_\varepsilon-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3u_\varepsilon$$

より

(＊)　$v_t=-(u_0)_xv-u_0v_x-v_{xxx}$

をうる．

$u_0(t,x)=d(t,x)$ ととろう．

G は局所的に作用するから d および s_1,s_2 のかたちから

$$E(t)=G(d(t,\cdot))-(G(s_1)+G(s_2))=G(d(t,\cdot))$$

は $t\to-\infty$ に対し巾的に減少する．

一方（＊）の解 $v(t,\cdot)$ は巾的な増大は示さないことが言えるから $(E(t),v(t,\cdot))\to0,\ t\to-\infty$.

したがって，$(G(d(t,\cdot)),v(t,\cdot))=(E(t),v)\equiv0$ となる．

また，（＊）は well-posed だから $v(t,x)|_{t=t_0}$ として任意の値をとれる．以上より $G(d(t,\cdot))=0$ をうる．これは d について t をパラメーター，x を変数とする4階の常微分方程式だが，$|x|\to\infty$ における条件により，2階の方程式 $Q(d_{xx},d_x,d)=0$ をうる．

これを調べることにより，前記の結果が得られる．

時間の都合により，残念ながら教授は後半は省略しながら話された．

さらに，講演中，再度の‘政治的’発言，およびユーモアに溢れる講義を再現できなかったことを残念に思います．なお，詳しくは教授の論文，‘Integrals of Nonlinear Equation of Evolution and Solitary Waves’ Comm. Pure Appl. Math. **21** (1967), 467-490 を参照されたい．　（早川款達郎 記）

J. L. Lions 教授講演記録

Optimal controls of systems governed by partial differential equations

（1969年4月10日　於北海道大学）

必要な記号，定義はすべて Lions の同じ表題の書物 (1968, Paris) によるものとする．内容は代表的例による同書3章の導入であった．

I.　Ω を滑めらかな境界 Γ で囲まれた R^n の有界領域，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$，$Q=\Omega\times]0,T[$，函数はすべて実数値とする．このとき $y(x,t)\equiv y(x,t,v)\equiv y(v)$ を次のように定義する：

（1）　$\dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y=f+v(x,t)$　　in Q,

（2）　$y(x,0)=y_0(x)$　　（初期条件），

（3）　$y(x,t)=0$　　if $x\in\Gamma$　（境界条件）．

ここで $f\in L^2(Q)$，$y_0\in L^2(\Omega)$ はそれぞれ与えられたものとする．

さらに与えられた $z_d\in L^2(Q)$ について

（4）　$J(v)\equiv\displaystyle\int_Q(y(v)-z_d)^2dxdt+\int_Q v^2dxdt,$

（5）　$\mathfrak{A}_{ad}$: closed convex set of $\mathfrak{A}=L^2(Q)$（許容条件）

とし，$J(v)$ $(v\in\mathfrak{A}_{ad})$ を極小にする函数 v（最適制御）を研究するのが，ここでの目的である．

以上の仮定の下で $(v\to y(v))$ は $(\mathfrak{A}_{ad}\to L^2(Q))$ となる affine mapping を作るが，さらに $(v\to J(v))$ は strictly convex，かつ $\|u\|_{\mathfrak{A}}\to+\infty$ ならば，$J(v)\to+\infty$ を満たす．したがって

Prop 1.　$\exists_1\,u\in\mathfrak{A}_{ad}$, $J(u)=\inf\{J(v)|v\in\mathfrak{A}_{ad}\}$.

Prop 2.　u が最適制御$\Longleftrightarrow$

（6）　$J'(u)(v-u)=\displaystyle\int_Q(y(u)-z_d)(y(v)-y(u))dxdy+\int_Q u(v-u)dxdy\geqq0,\quad\forall v\in\mathfrak{A}_{ad}.$

次に共役な状態 $p=p(x,t)=p(x,t,u)\in L^2(Q)$ を

（7）　$-\dfrac{\partial p}{\partial t}-\Delta p=y(u)-z_d$　　in Q,

（8）　$p=0$　　on Γ,

（9）　$p(x,T)=0$

で定義し，$y(v)-y(u)$ を (7) に乗じ積分して，(6)$\Longleftrightarrow$

(10)　$\displaystyle\int_Q(p+u)(v-u)dxdt\geqq0\qquad\forall v\in\mathfrak{A}_{ad}.$

したがって次の定理および系を得る：

定理．　一意的に定まる最適制御 u は次の方程式および不等式の集合を満足するものとして特徴づけられる：

$$(11)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y=f+u,\\ -\dfrac{\partial p}{\partial t}-\Delta p=y-z_d,\quad\text{in } Q\\ y=0\ \text{ on }\Sigma,\qquad p=0\ \text{ on }\Gamma,\\ y(x,0)=y_0(x)\quad(t=0),\qquad p(x,T)=0,\end{cases}$$

および (10).

特に $\mathfrak{A}_{ad}=\{v|v\geqq0$ a, e. in $Q\}$ とすれば，(10)$\Longleftrightarrow$

(10′)　$p+u\geqq0$　in Q,　$u\geqq0$　in Q　および
$(p+u)u=0$　　in Q.

したがって $u=\partial y/\partial t-\Delta y-f$ として，(11)，(10′) より u を消去して

系

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y-f\geqq0,\\ -\dfrac{\partial p}{\partial t}-\Delta p-y+z_d=0,\\ p+\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y-f\right)\geqq0, & \text{in } Q\\ \left(p+\dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y-f\right)\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y-f\right)=0,\\ y=p=0\ \text{on }\Gamma,\ y(x,0)=y_0(x),\ p(x,T)=0.\end{cases}$$

は $\{y,p\}\in W(0,T)\times W(0,T)$ でただ一つの解を有す．ここで

$$W(0,T)=\{\varphi|\varphi\in L^2((0,T),H_0^1(\Omega)),\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}\in L^2((0,T),H_0^1(\Omega)^*).$$

II. $\mathfrak{A}_{ad}=\mathfrak{A}$ (制約条件なしの場合) を考える. このとき (11)$\Longleftrightarrow$ (Euler equation)

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y+p=f, & \\ & \text{in } Q \\ -\dfrac{\partial p}{\partial t}-\Delta p-y=-z_d, & \\ y=p=0 \text{ on } \Gamma,\ \ y(x,0)=y_0(x),\ \ p(x,T)=0. \end{cases}$$

以上は常微分方程式についての Kalman-Bucy の結果の拡張であるが, t に関して 'two points-boundary value problem' となる. これを $t=0$ だけの初期値問題におきかえることを考えよう. ただし, このため non-linear problem を解かねばならぬ. 実際

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}-\Delta\varphi-\psi=f, & \text{in }]s,T[\quad (0<s<T), \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial t}-\Delta\psi-\varphi=-z_d, & \text{in }]s,T[\\ \varphi=\psi=0 & \text{on } \Gamma\times]s,T[, \\ \varphi(x,s)=h(x)\in L^2(\Omega) & \text{(given)}, \\ \psi(x,T)=0 & \end{cases}$$

の一意解に対して,

$$(14)\quad \begin{cases} \psi(x,s)=\boldsymbol{P}(s)h+R(s) & \forall s\in]0,T[, \\ \exists_1 \boldsymbol{P}(s)\in\mathcal{L}(L^2(\Omega),L^2(\Omega)), & \exists_1 R(s)\in L^2(\Omega). \end{cases}$$

ここで $P(s)h$ は (13) の斉次な右辺 ($f=-z_d=0$) の解 $\{\varphi,\psi\}$ についての $\psi(s)$, $R(s)$ は斉次な初期条件 ($h=0$) の解 $\{\varphi,\psi\}$ についての $\psi(s)$ と考えられる. 特に最適制御を導く (12) の解 $\{y,p\}$ に対して

(15)　$p(x,t)=\boldsymbol{P}(t)y(x,t)+R(t),\quad t\in]0,T[$.

さて (12), (15) と型式的演算により

$$(16)\quad \begin{cases} -\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt}-\boldsymbol{P}\Delta-\Delta\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^2=I & \text{in }]0,T[, \\ -\dfrac{dR}{dt}-\Delta R+\boldsymbol{P}R=\boldsymbol{P}f-z_d & \text{in }]0,T[, \\ \boldsymbol{P}(T)=R(T)=0 & \end{cases}$$

を得る. (16) 第1式は Riccati type の non-linear equation であるが, (16) 自身は Galerkin の近似法を用いてある意味で一意解を有し, また $p(0)=\boldsymbol{P}(0)y_0+R(0)$ とおくことができ, $(y(0),p(0))$ は (12) の解 (y,p) の $t=0$ における初期函数であることもわかる.

さらに $\boldsymbol{P}(t)$ は $\mathcal{L}(L^2(\Omega),L^2(\Omega))$ であるから, L. Schwartz の kernel theorem により

$$\boldsymbol{P}(t)g(x)=\int_\Omega P(x,\xi,t)g(\xi)d\xi \quad \forall g\in\mathcal{D}(\Omega)$$

という核が $\mathcal{D}'(\Omega_x\times\Omega_\xi)$ で一意的に存在し, (16) の初めの式に対応する non-linear integro-differential equation

$$(17)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial t}(x,\xi,t)-\Delta_x p(x,\xi,t)-\Delta_\xi p(x,\xi,t) \\ \qquad +\displaystyle\int_\Omega p(x,\xi_1,t)p(\xi_1,\xi,t)d\xi_1=\delta(x-\xi), \\ \qquad\qquad \text{in } t\in]0,T[, \\ p(x,\xi,t)=p(\xi,x,t)=0 \quad \text{on } x\in\Gamma, \\ p(x,\xi,T)=0. \end{cases}$$

を満足する ((17) の non-linear term についての説明はなかった). (17) の直接的方法による解の研究は興味深い.

(白田　平 記)

A. A. Mal'sev 教授講演記録

Supperpositions of mappings

(1967 年 4 月 15 日　於早稲田大学)

Kolmogoroff 等は 1957 年に, コンパクトな距離空間 X, $\dim X=m$ において任意の連続写像 $f: X^n\to R$ (直線) を $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_q \eta^q\sum\psi^{pq}(x_p)$ として表わしうる連続写像 $\psi^{pq}: X\to I=[0,1]$ が存在することを示した. ただし, $p=1,\cdots,n\geqq 2$, $q=1,2,\cdots,2mn+1$ であり $\eta^q: R\to R$ は連続写像である. ここで $f: X^n\to X$ として類似の問が考えられる. X を単なる有限集合とするとこの問題は多価論理の問題となり, S. Lapeaci 等により部分的な結果がえられている.

この問題を扱うために, X が任意の位相空間であるとき $I(X)=\{f|\text{cont. ft. } f: X^n\to X,\ n \text{ 任意}\}$ を考える. $I(X)$ には次の五つの演算が導入されて iteration algebra となる. $f: X^n\to X$, $g: X^m\to X$ とする.

1) $\zeta f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_2,x_1,x_3,\cdots,x_n)$,
2) $\xi f(x_1,\cdots,x_n)=f(x_2,x_3,\cdots,x_n,x_1)$,
3) $\Delta f(x_1,\cdots,x_{n-1})=f(x_1,x_1,\cdots,x_{n-1})$,
4) $\nabla f(x_1,\cdots,x_{n+1})=f(x_2,\cdots,x_{n+1})$,
5) $f*g(x_1,\cdots,x_{m+n-1})$
$\qquad =f(g(x_1,\cdots,x_m),x_{m+1},\cdots,x_{n+m-1})$.

$I(X)$ は $I^n(X)=\{f|\text{cont. ft. } f: X^n\to X,\ n \text{ 固定}\}$ とするとき $I(X)=\bigcup I^n(X)$ となる graded algebra であるが, $I^1(X)$ の構造すら一般にはわからない very bad algebra である.

$I^1(X)$ については M. Gavrilov, K. D. Magill Jr. 等の結果があるが, A. A. Mal'sev は 1966 年に次を証明した. T_1-空間 X が正規分離空間であるとは, ある $I^1(X)$ の元 f が存在して X の閉集合の基が, この f によるある点の原像であることと定める. X と Y が正規分離 T_1-空間のとき, もし半群 $I^1(X)$ と $I^1(Y)$ が同型であると X と Y とは同位相である.

(野口　広 記)

J. Moser 教授講演記録

Stability theory for Hamiltonian systems

(1969 年 4 月 15 日　於京都大学)

常微分方程式, とくに Hamiltonian Systems の周期解の安定性の問題について話された.

初めに有名な Poincarè-Birkhoff の不動点定理を述べた後, いくつかの拡張について述べられた. 例えば,

円環　$A=\{(R,\theta);\ 0<a\leqq R\leqq b,\ \theta: \bmod 2\pi\}$

からその上への写像:

$M: (R,\theta)\to(R_1,\theta_1)$

$\qquad \theta_1=\theta+\alpha(R)+f(\theta,R)$

$$R_1=R+g(\theta, R)$$

を考える．このとき，

定理． M が次の条件：

1) M は $\boldsymbol{A}$ の同相写像
2) $C\cap MC\neq\phi$ (C は $\boldsymbol{A}$ 内の閉曲線：$R=\varphi(\theta)$)
3) $\dfrac{d\alpha}{dR}\neq 0 \quad \left(\dfrac{d\alpha}{dR}>0 \text{ と仮定する}\right)$

をみたせば，$\rho(a)<p/q<\rho(b)$ をみたす任意の整数 p, q に対して，$M^qP=P$, $\theta_q-\theta=2\pi p$ なる M の周期点 P が存在する．ここで，

$$\rho(a)=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\theta_\nu}{2\pi\nu}\bigg|_{R=a}. \quad \rho(b) \text{ も同様.}$$

さて，ここで，(α, f, g に十分な滑らかさを仮定して) f, g が十分に小さいとすれば，M の不変閉曲線の存在が示せる．すなわち

定理 (Moser)． もし M が上の定理の条件 1) のかわりに

1′) $\quad |f|+|g|<\delta(\varepsilon)$

をみたせば，M は不変な閉曲線 Γ : $M\Gamma=\Gamma$ をもつ．

$$\Gamma : R=u(\varphi)=u(\varphi+2\pi)$$
$$\theta=\varphi+v(\varphi), \quad v(\varphi)=v(\varphi+2\pi)$$
$$|u-\text{const.}|_1+|v|_1<\varepsilon$$

さらに，M が Γ の上にひきおこす写像は純粋な回転：

$$\varphi_1=\varphi+2\pi\rho \qquad \rho : \text{無理数.}$$

この定理 (Moser's Twist Mapping Theorem) を利用して，種々の応用，とくに自由度2の Hamilton System の周期解の安定性に関する重要な結果が述べられた．

これらの講演内容に関しては，J. Moser の次の論文が参考になる (ほとんどそれらの中に述べられている)． 'On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus', Nachr. Akad. Wiss. Göttingen: Math. Phys. Kl. **1** (1962), 1-20. 'Lectures on Hamiltonian Systems' Amer. Math. Soc. 1967.

(丹羽敏雄 記)

S. L. Sobolev 教授講演記録

Some remarks on the numerical integration of functions of several independent variables

(1969 年 4 月 9 日　於京都大学)

Ω を R^n 内のある領域として次の積分：

$$\int_\Omega \varphi(x)dx$$

の近似公式：$\sum c_k\varphi(x^{(k)})$ と上の積分との誤差を問題とする．ただし，φ は後にのべる函数空間 $L_2^{(m)}$ の元であり，$x^{(k)}$ は R^n 上に張られた格子点 (有限個) である．$\varepsilon_\Omega(x)$ を Ω の特性函数として次のような $L_2^{(m)}$ 上の誤差汎函数：

$$(l(x), \varphi(x))=\int\varphi(x)[\varepsilon_\Omega(x)-\sum_k\delta(x-x^{(k)})]dx$$

を考えて，このうちの $L_2^{(m)*}$ でのノルムが最小になるものを求めることが問題である．$L_2^{(m)}$ について説明すれば，$W_2^{(m)}$ を m 階の偏導函数がすべて2乗可積分である函数の空間とし，P_{m-1} を $m-1$ 次以下の次数の多項式とするとき，

$$L_2^{(m)}=\frac{W_2^{(m)}}{P_{m-1}}, \quad \langle\varphi, \psi\rangle_m=\int\sum_{|\alpha|=m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}D^\alpha\varphi D^\alpha\psi dx$$

で定義されるヒルバート空間である．

このようにすれば $m>n/2$ のとき上の汎函数が意味をもち問題が設定できる．格子点 $x^{(k)}$ が一般な場合は困難であるので，次のような格子に限定する．H を $\det(H)=1$ であるような n 次行列として，γ を整数を成分とするたてベクトルとして次のように表わされる $x^{(\gamma)}$ に限定する．

$$x^{(\gamma)}=hH\gamma$$

ここで h は小さな正数である (格子間隔にあたる)．主なる結果は

$$\inf\|l(x)|L_2^{(m)*}\|=\left(\frac{h}{2\pi}\right)^n\sqrt{\Omega}\,\sqrt{\zeta(H^{-1*}/2m)}+O(h^{m+1})$$

であたえられる．ただし $\zeta(A/s)$ は Epstein ζ 函数である．その定義は A を格子をきめる行列，$\Omega(A\beta)$ を原点から格子点 $A\beta$ までの距離として級数

$$\zeta(A/s)=\sum_{\beta\neq 0}\frac{1}{\Omega(A\beta)^s}$$

であたえられる．この級数は $s>n$ のとき収束である．証明は略するが，m が十分大のとき整数論のある定理に関係し，また与えられた領域に一定半径の球を最も密につめこむ問題に関係がある．

(山口昌哉 記)

I. N. Vekua 教授講演記録

On some boundary value problems for elliptic equations

(1969 年 4 月 9 日　於京都大学)

われわれは2変数の2階線形楕円型斉次方程式の標準形である

$$E(u)=\Delta u+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}+c(x, y)u=0$$

なる形の方程式に関連する一般境界値問題を考える．ここで Δ は Laplace 作用素 $\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ を表わし a, b, c は (x, y) 平面のある領域 $\mathfrak{D}$ で定義された解析函数とする．簡単のため $\mathfrak{D}$ は単連結であることを仮定し，またその境界 Γ は滑らかな単一閉曲線で次の条件を満足するものとする：Γ 上の点 t における Γ への接線とある一定方向とのなす角 $\theta(t)$ は L 上で Hölder の意味で連続とする ($\theta(\cdot)\in C_\alpha(\Gamma)$, $0<{}^\exists\alpha\leqq 1$)．

次の形の作用素を考えよう．

$$T(u)\equiv\sum_{0\leqq i+k\leqq n}T_{ik}\left(\frac{\partial^{i+k}u}{\partial x^i\partial y^k}\right)$$

ここで n は整数 $\geqq 0$ で T_{ik} は $i+k=n$ のとき $T_{ik}=a_{ik}(t)+T_{ik}^0$ なる形で $a_{ik}(\cdot)\in C_\alpha(\Gamma)$ $(0<{}^\exists\alpha\leqq 1)$ であり $\bar{\mathfrak{D}}=\mathfrak{D}\cup\Gamma$ として T_{ik}^0 は $C(\bar{\mathfrak{D}})$ から $C_\alpha(\Gamma)$ への完全連

続線形作用素とする．また $i+k<n$ のとき T_{ik} は $C(\bar{\mathscr{D}})$ から $C_\alpha(\Gamma)$ への任意の線形作用素である．われわれが考察の対象とするのは次の type の境界値問題である．

‘方程式 $E(u)=0$ を領域 $\mathscr{D}$ でみたし境界 Γ 上で境界条件 $T(u)=f\in C_\alpha(\Gamma)$ を満足する解 $u(x,y)$ を求める．’

以後われわれが $E(u)=0$ の解と言うとき $\mathscr{D}$ で regular で $E(u)=0$ をみたし $\bar{\mathscr{D}}$ において Hölder 条件を満足する n 階の導函数をもつ函数 u を意味するものとする．

さて，われわれの目的は任意の $f\in C_\alpha(\Gamma)$ に対し上記の問題が解をもつための必要かつ十分条件を与えることである．上の境界値問題の特殊な場合である Dirichlet 問題のとき，すなわち $T(u)=u|_\Gamma=f$ のとき $c(x,y)\leqq 0$ in $\mathscr{D}$ は十分条件であるが必要条件ではない．われわれの結果を述べるためには次の概念を用意する必要がある．

方程式 $E(u)=0$ の特殊解の列 $u_1, u_2, \cdots, u_m, \cdots$ は任意の解 u がそれらの特殊解の一次結合で $\mathscr{D}$ で一様に近似されるとき complete であると言う．すなわち任意の $\varepsilon>0$ に対し適当な定数 $c_1, \cdots, c_m$ をとれば

$$\left\|u-\sum_{k=1}^m c_k u_k\right\|<\varepsilon, \quad \|v\|=\operatorname*{Max}_{(x,y)\in\mathscr{D}}|v(x,y)|$$

とできるとき $\{u_k\}$ を $E(u)=0$ の特殊解の complete system と呼ぶ．

$E(u)=0$ の解は $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ として

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\left\{G(z,\bar{z},z,\bar{z}_0)\varphi(z)-\int_{z_0}^z\varphi(t)\frac{\partial G}{\partial t}(z,\bar{z},t,\bar{z}_0)dt\right\} \equiv L(\varphi)$$

なる formula で表わすことができる[1]．ここで $\varphi(z)$ は $\mathscr{D}$ における z の holomorphic 函数である．また $G(z,\zeta,t,\tau)$ は方程式 $E(u)=0$ の Riemann function と呼ばれるもので $E(u)=0$ を複素変数 $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$ によって変換し，得られる双曲型方程式

$$\frac{\partial u}{\partial z\partial\zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial\zeta}+C(z,\zeta),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\zeta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

から導かれる積分方程式の解として構成される．

たとえば

1. 方程式 $\Delta u=0$ に対しては $G=1$ である

2. 方程式 $\Delta u+\lambda^2u=0$（λ は複素数）に対しては
$$G(z,\zeta,t,\tau)=J_0(\lambda\sqrt{(z-t)(\zeta-\tau)})$$
である．ここで J_0 は order 0 の第一種 Bessel 函数を表わす．

3. $\Delta u+(4n(n+1)/(1+x^2+y^2)^2)u=0$ に対しては
$$G(z,\zeta,t,\tau)=P_n\left(\frac{(1-z\zeta)(1-t\tau)+2z\tau+2\zeta t}{(1+z\zeta)(1+t\tau)}\right),$$
P_n は index n の第一種 Legendre 函数である．

さて，いま $\varphi=z^k, iz^k (k=0,1,2,\cdots)$ ととると特殊解の列

$$\{u_k(x,y)\}:u_{2k}(x,y)=L(z^k),\quad u_{2k+1}(x,y)=L(iz^k)$$

が得られるがこれは complete system をなす．そこで $x_k(t)=T(u_k)$ とおく．われわれの結果は次の通りである．

‘任意の $f\in C_\alpha(\Gamma)$ に対し境界値問題 $E(u)=0$, $T(u)=f$ が解をもつための必要かつ十分条件は函数列 $x_k(t)$ $(k=0,1,\cdots)$ が Γ 上で complete system をつくることである．ここで $\{x_k\}$ が Γ 上で complete system をつくるとは任意の $f\in C_\alpha(\Gamma)$ と $\forall\varepsilon>0$ に対し適当な $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ が存在し，$\left\|f(t)-\sum_{i=1}^m\alpha_i x_i(t)\right\|_\Gamma<\varepsilon$ とできることを言う’.[2]

例えば Δ に対する Dirichlet 問題（非斉次境界条件）に対してはこの条件はみたされるが Neumann 問題（非斉次境界条件）に対してはみたされない．

方程式 $E(u)=0$ に対するその他の問題の種々の結果や multiply-connected domain の場合そしてまた高階や系の場合の考察や応用については講演者による次の本を参照して頂きたい．

I. N. Vekua, New methods for solving elliptic equations, North-Holland, 1967 (1948 年に出版されたロシヤ語版の英訳).

注

1) 講演では断わられなかったが上記の本では a, b, c がすべて実数値函数で解 u も実数値函数のときの表現式で一般のときはもう少し複雑な形となる．

2) T がこのような一般な形の境界値問題は上記の本では論じられていない．もう少し T が具体的なとき類似の結果が Chap. III にある．　（松村睦豪記）

Some problems on elliptic differential operators

（1969 年 4 月 12 日　於大阪大学）

大阪大学に来られた Vekua 教授は厳しい日程の疲れも見えず悠揚表題の講演をされた．

S を $\boldsymbol{R}^n$ の領域，E を S で定義されたある楕円型線型微分作用素，$C(\bar{S})$ を $\bar{S}$ で定義された連続函数からなる B 型空間（ノルムは普通のもの）とする．

このとき，E の特殊解のなすある族で，E の解空間を張るという問題を考える．このときこの族を完備系という．すなわち，u が S で正則で $Eu=0$

$\Longleftrightarrow\forall S'$ 相対コンパクト $\subset S$ に対し u は上の族の線型結合で S' 上一様に近似される．

したがって問題は (E,S) に対して（ある具合のよい）完備系を得るということになる．

例．$n=2$, S は滑らかな有界単連結領域

$E=\Delta$ のとき $\{1, r^k\cos k\varphi, \ r^k\sin k\varphi\}_{k=1}^\infty$ は完備系（ただし $z=x+iy$, $r=|z|$, $\varphi=\arg z$）

少し具体的にここでは $n=2$, S は例と同様．

$$E=\Delta+a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+c(x,y).$$

a, b, c は (x,y) について解析的としよう．

$z=x+iy$, $\zeta=\bar{z}$ とおいて E を次のように書き直す．

$$Fu=\frac{\partial^2u}{\partial z\partial\zeta}+A(u,\zeta)\frac{\partial u}{\partial z}+B(u,\zeta)\frac{\partial u}{\partial\zeta}+C(u,\zeta)u=0$$

これを E の双曲形式と言う．これの基本解を

$G(t, \tau, z, \zeta)$ とおこう．すなわち $^\forall f(z, \zeta)$ 解析函数に対し $Fu=f$ の解 U_f は

$$U_f=\int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(t, \tau, z, \zeta) f(t, \tau) d\tau, \quad (z_0, \zeta_0) \in S \times S^*$$

で与えられる．

この G は F から導かれるあるヴォルテラ型積分方程式の解として与えられる．

そしていま，$f=z^k$, iz^k $(k=0,1,2,\cdots)$ とおくことにより $\{U_k=U_{f_k}\}$ なる解の完備系が得られる．

例の場合は $G\equiv 1$ である．

さて，以上の完備系を境界値問題に応用する．

(E, S) は前と同様，$T: C(\bar{S}) \to C(\partial S)$ なる作用素で，次のようなものを考える．

$$Tu=\sum_{|\alpha| \leqq N} T_\alpha(D^\alpha u), \quad \alpha=(\alpha_1, \alpha_2), \quad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$$

仮定 i) $|\alpha|=N$ のとき $T_\alpha=T_\alpha^0+A_\alpha(t)^\times$

しかも T_α^0 は $C(S) \to C(\partial S)$ のコンパクト作用素．

仮定 ii) $|\alpha|<N$ のとき T_α は有界線型作用素．

このとき次の定理が成立する．

定理． E, S 前と同様，$\{u_k\}$ が E の S に関する完備系．このとき

$$^\forall g \in C(\partial S) \quad ^\exists u \quad Eu=0, \quad Tu=g$$

$\Longleftrightarrow \{Tu_k\}$ が $C(\partial S)$ の完備系をなす．

例． $E=\Delta+\lambda^2$ に対し $T=\mathrm{id}$ (すなわち Dirichlet 問題) を考えると $\{\mathcal{J}_0(\lambda r), \mathcal{J}_k(\lambda r)\cos k\varphi, \mathcal{J}_k(\lambda r)\sin k\varphi\}_{k=1}^{\infty}$ は $C(\bar{S})$ では E の S に関する完備系であるが $C(\partial S)$ では $\lambda^2 \neq \Delta$ の固有値のときにかぎり完備系となる．

以上の事柄は，方程式系の場合にも成立し，また高次元の場合にも成立すると思うが誰もやらないのは残念に思う（と教授は言われた）．

文　献

I. N. Vekua, New Method for solving elliptic equation (1967) Nort-Holland.

（早川款達郎 記）

Some problems of two dimensional theory of elliptic equation

（1969 年 4 月 15 日　於東京大学）

まず問題を $\boldsymbol{R}^m$ $(m \geqq 2)$ で設定する．S を有界領域，∂S をその境界，$\bar{S}=S+\partial S$ とする．E を S で与えられた楕円型作用素，T を $C(\bar{S})$ から $C(\partial S)$ への線型作用素で次の仮定を満たすとする．

(i) $T(u)=\sum_{0 \leqq \alpha_1+\cdots+\alpha_m \leqq N} T_{\alpha_1 \cdots \alpha_m}\left(\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_m} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}\right)$,

(ii) $\alpha_1+\cdots+\alpha_m=N$ のとき

$$T_{\alpha_1 \cdots \alpha_m}=a_{\alpha_1 \cdots \alpha_m}(t) I+T_{\alpha_1 \cdots \alpha_m}^0, \quad t \in \partial S,$$

$T_{\alpha_1 \cdots \alpha_m}^0$ は $C(\partial S)$ での完全連続作用素，I は $C(\partial S)$ での恒等作用素，

(iii) $\alpha_1+\cdots+\alpha_m<N$ に対し，$T_{\alpha_1 \cdots \alpha_m}$ は任意の線型作用素．

このとき，Problem $A: \bar{S}$ で連続，S で $E(u)=0$, ∂S 上 $T(u)=g$ $(g \in C(\partial S))$ となる u を見つけよ．

一般に，Problem A が well-posed のためには，他に条件が必要である．以後，特に $m=2$,

$$E(u)=\Delta u+a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}+C(x, y) u$$

のときを考え，さらに，T に関し次の条件を付加する．

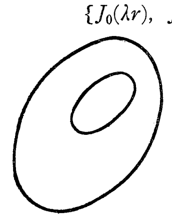
(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} i^k a_{N-k, k}(t) \neq 0$ on ∂S

この (iv) は essential な要請である．すなわち，(iv) がみたされないとき，無限個の一次独立な解をもつ例がつくれる．さて $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $E(u)=0$ をみたす完全系としよう．すなわち，$E(u)=0$ なる任意の u が，u_i の一次結合で一様に近似できるとする．

例 1. S を単連結，有界なる任意の領域のとき $\Delta u=0$ に対し，$\{1, r^k \cos k\varphi, r^k \sin k\varphi ; k=1,2, \cdots\}$．ただし $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\arg y/x$．

例 2. $\Delta u+\lambda^2 u=0$ に対し，

$$\{J_0(\lambda r), J_k(\lambda r) \cos k\varphi, J_k(\lambda r) \sin k\varphi\}.$$



ただし，J_k は k 次の Bessel 函数．多くの場合 $\{u_i\}$ は構成できる．また複連結のとき，たとえば左図のときには $\Delta u=0$ に対し，

$$\{1, r^k \cos k\varphi, r^k \sin k\varphi, r^{-k} \cos k\varphi, r^{-k} \sin k\varphi\}$$

をとればよい．

主定理． $E(u)=\Delta u+a(x, y) \dfrac{\partial u}{\partial x}+b(x, y) \dfrac{\partial u}{\partial y}+c(x, y) u$, a, b, c は実解析的，∂S は Liapunov 条件を満たしているとする．T が (i)-(iv) をみたし，さらに，$a_{N-k, k}(t)$ および g が $C_\alpha(\partial S)$ に属するとする ($C_\alpha(\partial S)$ は指数 α $(0<\alpha \leqq 1)$ の Hölder 連続函数)．かつ $\{u_i\}_{k=1}^{\infty}$ を一つの完全系とする．このとき，Problem A が unique な解をもつ必要十分条件は，$\{T(u_k)\}_{k=1}^{\infty}$ が $C(\partial S)$ における完全系となることである．

この結果は，generalized Cauchy-Riemann equation の場合に拡張できる．

さて，上の定理の証明には，$E(u)=0$ の解が，$f(z)$ を解析的とし，

$$(*) \quad u(x, y)=\operatorname{Re}\left\{G(z, \bar{z}, z, \bar{z}_0) f(z)-\int_{z_0}^{z} f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} G(z, \bar{z}, \xi, \bar{z}_0)\, d\xi\right\},$$

$z=x+iy$ と積分表示できることを用いる．ここで，$G(z, \zeta, t, \tau)$ は E に対応する Riemann 函数，すなわち，$z=x+iy$, $\zeta=x-iy$ として，E を

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \zeta}+A(z, \zeta) \frac{\partial u}{\partial z}+B(z, \zeta) \frac{\partial u}{\partial \zeta}+C(z, \zeta) u=0$$

と変形，これに対応する Riemann 函数を G とする．

例 1. $\Delta u=0$ のとき $G=1$.

例 2. $\Delta u+\lambda^2 u=0$ に対し $G=J_0(\lambda \sqrt{(z-t)(\zeta-\tau)})$.