R. Thom 教授記念特別講演

Limit sets of leaves of analytic foliations.

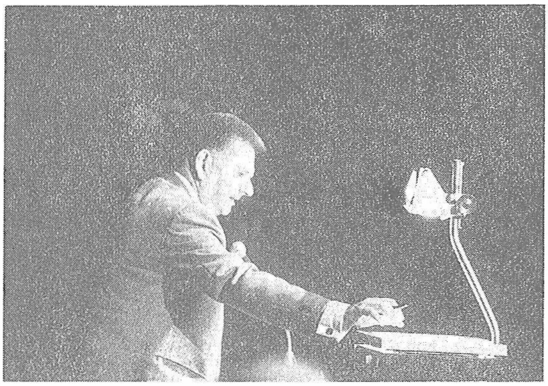
(1977年10月9日　於 共立女子学園講堂)

以下の記事は，Thom 教授が講演後にその内容を書き下ろして下さったものの翻訳である．

内　容　A．歴史的概説
B．いくつかの定義
C．葉層の特異点
D．Limit sets of leaves

A．歴史的概説．

関数の標準的概念は，全く自然な動機から生まれた．しかし，その最初の正確な定義が，漸く17世紀末の Leibniz の仕事にみられることからわかるように，その出現には時間がかかった．現実は，決定論と非決定論の複雑に混み入った形でわれわれに立ちはだかるが，関数の概念は，この相反するものを極端に合わせ持っている．最大の非決定論が，任意に値を選べる変数 x の概念の中に現われ，強固な決定論が，関数 $f(x)$ の値 y を定めることにあてはまる．われわれは，この関数の概念が，どのように滑らかな写像 $F:S\to T$ の概念に一般化されたかを知っている：ここに始空間 (sourse space) S，および終空間 (target space) T はユークリッド空間で，それぞれの座標を，$(s_1,\cdots,s_n)$ および $(t_1,\cdots,t_n)$ とするとき，写像 f は等式 $t_j=f_j(s_1,\cdots,s_n)$ で与えられる．この，関数および写像の概念は，つい最近まで，現代科学を支配していた．しかし，関数や写像の概念が，われわれをとりまく世界を描写できる唯一の数学の道具であるとは，もはやみられなくなるだろうことを暗示するかすかな前兆が，現在ではいくつかある．関数の概念がこれまで乱用されてきたことを忘れてはならない．たとえば，普通，時間は一つの変数だと考えられているが，私達が任意に与えられた時刻に身を置くことができないことは，ほとんど疑いない．運動体の連続軌道の概念が不完全なことにより明らかにされた，この明白な事実を，



量子力学が再発見するまで，科学は待たなければならなかった．

より正確に現実に適応しようとすれば，変数をそれほど変りうるものでなく，また，関数をそれほど決定論的でなくする方向に，関数の概念を改良せざるをえないと，当然われわれは思うべきである．

前の講演において，Atiyah 教授は，関数の代りにファイバーバンドルの切断面を考えれば，始空間の概念が終空間の上に，どのように局所化できるかをすでに説明した．葉層構造の概念もまた，この概念の特別な場合である．

定義． 多様体 S 上の余次元 k の Haefliger 葉層構造 $\mathcal{F}$ とは，次の条件を満たす族 $\{(U_i,g_i)\}$ である：

(i) $\{U_i\}$ は S の開被覆，$g_i:U_i\to \boldsymbol{R}^k$ は滑らかな写像である．

(ii) 各 i,j に対して，$h_{ij}\circ g_j=g_i$ on $U_i\cap U_j$ となる $\boldsymbol{R}^k$ の微分同相 h_{ij} がある．

(iii) $h_{ij}\circ h_{jk}=h_{ik}$ が $U_i\cap U_j\cap U_k$ 上で成り立つ．

このとき S において，'$x_1\sim x_2 \Longleftrightarrow g_i(x_1)=g_i(x_2)$' なる同値関係を得る．この同値類の各連結成分を余次元 k の葉層構造 $\mathcal{F}$ の葉とよぶ．葉層構造の

言葉による Von Neumann algebra の解釈を与えた A. Connes の仕事に見られるように，葉層構造の概念は，現代物理学の道具としての関数の概念を一般化するのに，ある役割を果たしうる．

B.　いくつかの定義.

Haefliger 葉層が正則であるとは，前定義における写像 g_i 達が，submersion であるときにいう．正則葉層においては，葉を与える同値関係は，局所的には $\boldsymbol{R}^n$ における平行な $(n-k)$ 次元平面達のような様相をしている．余次元 k のもっと一般的な葉層は次のように定義される．

定義. 多様体 S の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と，U_α 上の k 個の 1-形式 $\Theta_\alpha=\{\theta_{\alpha,1},\cdots,\theta_{\alpha,k}\}$ が与えられていて，次の条件を満たすとき，$\{(U_\alpha,\Theta_\alpha)\}$ を S 上の余次元 k の**一般葉層**という：

(i)　Frobenius の積分可能条件

$$d\theta_{\alpha,j}\wedge\theta_{\alpha,1}\wedge\cdots\wedge\theta_{\alpha,k}=0\quad(j=1,\cdots,k)$$

(ii)　$U_\alpha\cap U_\beta$ の各点 p において，Θ_α および Θ_β で定められる $(n-k)$ 次微分形式は一致する；

$$\{v\in T_p(S)\,|\,\theta_{\alpha,i}(v)=0,\,i=1,\cdots,k\}$$
$$=\{v\in T_p(S)\,|\,\theta_{\beta,i}(v)=0\}.$$

このとき，$\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_k\neq0$ となる点では葉層は正則 Haefliger 葉層である．$\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_k=0$ となる点は**特異点**とよばれる．

Gromov と Thurston の仕事以来，(正則な)葉層の大域理論は驚ろくべき進歩をとげた．この講演の目的は，しかしながら，葉層に特異点を許すや否や，局所理論に付随した未解決の問題が，まだ多くあることを示すことにある．

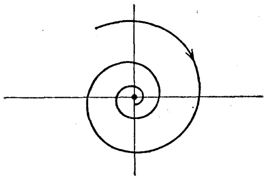
C.　葉層の特異点.

葉層の特異点が学問上のお遊び以上のものであることは，1 次元葉層 (i. e. 流れ (flows)) の場合から明らかである．微分形式系においては，saddle-like-特異点によって，プロセスの時間に沿った進展において実際上の不確定性がひきおこされることが (19 世紀末すでに，J. Boussinesq によって) 考察されている．鞍点におこる分水嶺を横切ると，初期条件の少しの変化でも，結果においては，大きな差をひきおこす．したがって，ここに特異点のまわりでおきる葉層の性質，特に，特異点に到達する葉の集合の性質を理解することが，非常に重要になってくる．関数の勾配軌道に関しては，この問題は Morse 理論によって解決される：よく知られているように，非退化臨界点のまわりでは，(特異点に達する，またはそこから出発する) 分水嶺は相補次元 (complementary dimensions) の二つの線型多様体の和になっている．

葉層の特異点に関する問題. 一般的な方法として，$\boldsymbol{R}^{n+k}$ 上の余次元 k の葉層は，常に $\boldsymbol{R}^{k+1}$ 上の流れの $(n-1)$ 個のパラメータ付の族と考えることができる．したがって葉層の特異点の理論は，$\boldsymbol{R}^{k+1}$ 上の流れの特殊な形の分岐理論に還元できる．

まず最初に，Haefliger 葉層の場合を考えよう．この場合には，葉層の特異点は局所写像 $g_i: U_i\to\boldsymbol{R}^k$ の特異点であり，その generic な特異点を決定するには，写像の特異点の理論，特に開折 (unfolding) の理論で十分である．したがってこの場合には，平面 $\{x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=0\}$ で定義される写像 $\boldsymbol{R}^{k+1}\to\boldsymbol{R}^k$ の特異点を開折すればよい．

さて一般の場合，今のところ，積分条件について忘れることにすると，微分形式系 $\theta_1=\cdots=\theta_k=0$ の階数が $(k-i)$ となる点の集合 $\sum_i$ は generically には余次元 $i(n-k+i)$ の微分可能多様体である．しかし，J. Kupka によって始めて観察されたのだが，実際にはこうはならない．というのは，$\boldsymbol{R}^2$ 上の **focus 特異点** (下図) は構造不安定特異点である．したがって，それは，分岐によって破壊されるはずである．したがって余次元 1 の任意の葉層は一般に余次元 2 の特異点集合をもつ (というのはこのような点はみな特異点である，もしそれが正則点ならば，$\boldsymbol{R}^2$-断面上に導引された葉層は Haefliger 葉層でなければならないが，focus 特異点は，Haefliger 葉層の特異点ではない)．このような singular locus の一般的な特異点はよくわかっていない．(しかし，物性物理学はいくつかの特異点をわれわれに示している．) このことは，確実に，高余次元の場合に一般化できる．(例えば，$k+1$ が偶数であれば，$\boldsymbol{R}^{k+1}$



上に focus-like 特異点を構成できる．）

葉層を，孤立特異点のみを持つ葉層に演繹することは，興味ある問題である．(Haefliger 葉層に関しては，このことは，S^{n-1} が S^{k-1} 上のファイバーバンドルになることを要求するが，これは一般に不可能である．)　これに関して次の定理を引用しよう：

定理(Malgrange-Moussu)．ω を原点で孤立特異点をもつ1-形式で，条件 $\omega\wedge d\omega=0$ を満たすとする．すると ω は局所的に**積分因子**をもつ：$\omega=df$，ここに f は原点で複素解析的となる．

後程，この定理についてはもう一度述べる．

定義．0を $\boldsymbol{R}^{n+k}$ の余次元 k の葉層 $\mathcal{F}$ の孤立特異点とする．L を $\mathcal{F}$ の一枚の葉で，$0\in\bar{L}$ とする．増大するコンパクト集合 $K_i\subset\boldsymbol{R}^{n+k}-0$ の列を考え，集合 $\overline{L-K_i\cap L}$ の射影的極限の連結成分を，L の0の近くでの一つの**端**(end)と定義する．

まず，葉の**ホロノミー**の定義をおもい出そう．L が余次元 k の葉とし，L に点 $x\in L$ で横断的な単体 Δ^k をとる．基点 x の，L の中の閉道 γ に対して，その閉道に沿って Δ^k を平行移動すると，微分同相の芽 $h_\gamma:(\Delta^k,x)\to(\Delta^k,x)$ を得る．このようにして準同型 $\mathfrak{H}:\pi_1(L)\to\mathfrak{G}^k$ を得る：ここに $\mathfrak{G}^k$ は Δ^k の微分同相の点 x における芽のなす群である．これが L のホロノミーである．ホロノミーが自明でないような葉が稠密に存在する解析的葉層は，容易に構成できる．けれども，特異点の近くの葉達の端達の局所ホロノミーに対して，このような情況があり得るかどうかを問うことができる．この点に関して，私は次のことが成り立つと思う：

予想．‘原点を孤立点にもつ余次元1の複素解析葉層においては，原点で non-trivial なホロノミーをもつ葉のいかなる端も，原点をこえて解析的に拡張できる’．

もし，原点のまわりの葉 L が無限位数のホロミーを持てば，L のまわりの任意の葉 L' は，ある直線との交わりが離散無限集合になることは明らかである．したがって L' は原点で解析的ではありえない．その構造を一般的な plane section に還元することによって，上の予想も解くことは十分希望がもてる．このことは，複素葉層に対する Lefschetz 型の定理の議論を用いて可能である．(注：Lefschetz の定理は，Morse 理論を複素多様体上の線型一次形式の加群に適用して証明できる．したがってそれは，葉の端にも適用できる．）

さて $\boldsymbol{C}^2$ の中の余次元1の葉層の場合，特異点を何回か blow-up して，特異点を $(dx/x=dy/y^k)$ なる標準型達に還元するという規準的道具がある．この標準型に関しては，予想は証言しうる．射影直線よりなる樹木(tree)は単連結なので，原点から blow-up した多様体に沿っては，ホロミーは存在しない．このような分類は，実係数の場合，F. Dumortier によってなされた．

このような結果は，引用した Malgrange-Moussu の定理を説明できるだろう．というのは，もし ω がこのような原点のまわりで積分可能な1-形式だとすると，一般的な plane section 上では，無限ホロミーをもつ葉は存在しない(*)．結局，このような plane section に ω を制限したものは，このような plane 上で積分因子をもち，そして連続性により，いたるところそうなる．((*)詳しくいうと，$\varphi:\boldsymbol{C}^{n+k}\to\boldsymbol{C}^n$, $\varphi^{-1}(0)$ を generic plane section とするとき，十分近い plane section $\varphi^{-1}(\varepsilon)$ において，同じ葉は特異点として，quadratic points のみを持ち，その特異点では，葉層は局所的に積分可能である．これらの特異点のまわりの loops が，基本群 $\pi_1(\mathcal{F}\cap\varphi^{-1}(\varepsilon))$ を生成するので，$(\mathcal{F})$ のまわりのホロノミーは自明である．)

上に述べた予想は，余次元2に対しては成り立たないことに注意すべきである．このことは，$\boldsymbol{C}^2$ 上の二つの余次元1の直積を作ることによって早くから知られている．

葉層の特異点の問題を魅力的にしているのは，次の矛盾である：力学系のジェットに対する Varchenko 型の安定化定理を確立するためには，F. Takens によって示されたように，多分解析性に関する仮定が必要であろう．一方 S^3 上の余次元1の葉層に関する Haefliger の定理は，一般にはこのような葉層構造は解析的でありえないことを示している．そして，このような現象は，すでに特異点のまわりの局所情況においてさえも存在していることはほとんど確かである．このような二つの相反する要求を，どのように処理すべきであろうか．

D. Limit set of leaves.

葉の端に関する問題はすでに述べた：端の 'generic' な位相構造は何か？　M の解析的部分集合 A が与えられたとき，L を $\bar{L}-L\subset A$ なる葉とせよ．そのとき集合 $\bar{L}-L$ に関して，どのようなことがいえるだろうか？

まず第一に，A を層分割(stratify)して，(i. e. $A=\cup X_i$ と多様体＝層(strata)の和にわけて)各 X_i への制限 $\mathcal{F}|X_i$ は次元が一定であるようにできる．x を一つの stratum X の点とする．

$\tau(x)=\cap T_x(X)\cap \lim_{y\to x} T_y(\mathcal{F})$,　$y\to x$ なるすべての点列についての共通部分，

とおく．

すると plane field $\tau(x)$, $x\in X$, は積分可能で，したがって X の中に葉層を定めるように見える．さらに，層分割を細分して，$\tau(x)$ の次元が X 上で一定であるようにできる．このようにしてわれわれは，葉層 $\mathcal{F}$ から A へ導入された Whitney の性質(A)を満たす《reduced》foliation を定義する：Whitney の性質(A)を満たすとは，$\bar{Y}\supset X$ なる層 Y の点列 $\{y\}$ で，$y\to x$ なるものに対して，常に $\lim_{y\to x}\tau(y)\supset\tau(x)$ が成り立つときにいう．

すると，葉の極限集合に関して次のことがいえる：L を $\mathcal{F}$ の leaf で $\bar{L}-L\subset A$ なるものとする．すると，$\bar{L}-L$ は $\mathcal{F}$ から A へ reduce された葉層の葉の集合和である．

A の stratum X^μ が M の中で余次元 1 のとき，X^μ の上に還元された葉層の余次元は，k か $k-1$ である($\mathcal{F}$ の余次元が k として)．したがって A が境界をもつ多様体 M の境界のとき，この境界のほとんどすべての点において，還元された葉層の余次元は $\mathcal{F}$ のそれと同じか，または一つ下がる．

この種の考察は，ある特殊な場合，特に次の場合に応用できる：O を解析力学系の(孤立)特異点とし，γ を O に到達する軌道とする．m_t を γ をあらわす点列で，$t\to\infty$ のとき $m_t\to O$ なるものとするとき，O と m_t を結ぶ直線 $\widehat{Om_t}$ の limit set についてはどのようなことがわかるであろうか？　H. Poincaré 以来知られている古典的な定理は次のように述べている：$\boldsymbol{R}^2$ 上の解析的力学系の実特異点においては，軌道 γ は原点において接線をもつか，または原点のまわりを何回もぐるぐるとまわる．問題の一つは，この性質を高次元の場合に，一般化できるものを一般化することである．

まずはじめに，解析的な gradient flow $X=-\operatorname{grad} V(x)$; V は解析的関数；を考えよう．Łojasiewicz は次の注目すべき定理を証明した．

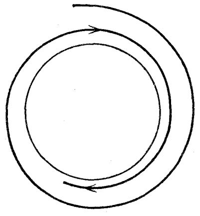
定理(Łojasiewicz)．X の任意の軌道は V のどの level-hypersurface においても，limit points を(もつとすれば)ただ一つしかもたない．

ここで議論の鍵となるのは，Łojasiewicz の不等式

$$|\operatorname{grad} V|>c|V|^\alpha \quad 0<\alpha<1$$

で，この不等式は，軌道 γ のレベル V_0 と原点の間の長さが有限であることを証明するのに用いられる：

$$\int_{V_0}^0 ds=\int_{V_0}^0\frac{dV}{|\operatorname{grad} V|}<\frac{1}{c}\int_{V_0}^0\frac{dV}{V^\alpha}<\infty.$$



このようなことが C^∞-関数の gradient に対しては成立しないことが，右の図の反例により示される．この例では gradient の軌道は $V=0$ で与えられる limit cycle にまきつく．

OPEN PROBLEM. 解析関数 V の特異点 O に到達する grad$V$ の軌道 γ は，O において接線をもつか？

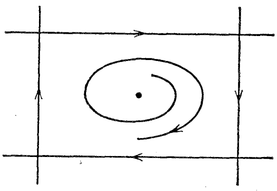
原点 O を $S^{n-1}\times\boldsymbol{R}$ に blow up することにより，持ち上げられた軌道 $\tilde{\gamma}$ が境界 $S^{n-1}\times 0$ に到達するときの limit set をみつけなければならない．$\tilde{\gamma}$ はリーマン metric $du^2+u^2d\sigma^2$ に関する V の gradient で与えられる，ここに $d\sigma^2$ は S^{n-1} 上の標準的なリーマン metric で，$u=|Ox|$, $x\in\boldsymbol{R}^n$ である．grad V と grad$(u^{-1}V)$ の S_u^{n-1}(u=const) の接成分を比較しよう．

二つの場合がある．二つの接成分が同じになる場合；これは V が次数 μ の斉次多項式 $V(\rho x)=\rho^\mu V(x)$ の場合で，この場合 blow up された空間 $S^{n-1}\times\boldsymbol{R}$ に持ち上げられた関数 $\tilde{V}$ は $S^{n-1}\times 0$ で値 0 をとるとする．したがって $\tilde{V}(u,s)=u^\mu\tilde{V}(u,s)$, $\tilde{V}(0,0)\neq 0$ とかける．斉次多項式の場合，$\tilde{V}(u,s)$ は s にのみ depend する．この場合，X から S^{n-1}

$\times 0$ に還元された葉層はまさに $\tilde{V}(s)$ の gradient flow に他ならぬ．そして，Łojasiewicz の定理を解析的(代数的) gradient $\tilde{V}(s)$ に適用して，limit point の唯一性を証明できる．

しかし，一般には，上の議論は，'持ち上げられた軌道 $\tilde{\gamma}$ の極限集合が $\tilde{V}(s, 0)$ の minimum set の中か，または $\tilde{V}(s, 0)=0$ で定義される variety の中にある' ことを示すだけである．もしこれら二つの集合が一致するときには，limit point の唯一性を証明しようとする現在までのすべての努力に抵抗してきた情況に陥る．

いずれにしろ，m が O に収束するとき，一般の特異点に対してはすべての直線 $|Om|$ の limit sets は，方向として，多くの直線の



generators により分離されている，区分的に解析的な線分からなる cone であるようにみえる．恐らくこの集合は，$\boldsymbol{R}^2$ の中の長方形の中をぐるぐるまわる軌道の，典型的な例のように，角をもつであろう． (福田拓生記)