本 会 議 講 演 記 録*

第1日　9月9日

本会議第1日の主題は，Hilbert によつてプログラムが作られ，高木および Artin によつて輝かしい成果のあげられた類体論に関するものである．

午前は，9時30分から C. Chevalley 教授座長のもとに，次の三講演が行われた．

E. Artin : Representatives of the connected components of the idèle class group. (50分).

岩沢健吉 : Galois groups acting on the multiplicative groups of local fields. (50分).

A. Weil : On certain characters of idèle class groups. (30分).

午後は，14時から，正田建次郎教授座長のもとに次の三講演と，二つの short communications が行われた．講演の始る前に，名誉議長高木先生が出席された．

R. Brauer : Number-theoretical investigations on groups of finite order. (50分).

淡中忠郎 : On the generalized principal ideal theorem. (40分).

寺田文行 : A generalization of the principal ideal theorem. (5分).

竹田　清 : Über die Struktur der metabelschen Gruppen. (5分).

久保田富雄 : Density in a family of abelian extensions. (30分).

Artin 教授の講演は，類体論の簡易化と拡張を目的として Chevalley 教授の導入した idèle 類群の単位元の連結成分を定め，その代表元を決定する方法をのべるものである．岩沢教授の講演は，標数0の局所体の場合の類体論をさらに深めるものである．Weil 教授の講演は，Hecke の量指標 (Grössencharakter) に関する予想であつて，3日目の発表と関連している．

Brauer 教授の講演は，有限群の modular 表現に整数論的方法を用いて，予想および，特別な場合のその証明をのべられた．淡中教授の講演は，Hilbert が予想し Furtwängler-Artin-彌永によつて証明された単項化定理の拡張に関する仙台学派の長年の研究の頂点であり，寺田氏の報告もこれと関連している．久保田氏の講演は定まつた Abel 群に同型な Galois 群をもつ，有限次代数体 k 上の Abel 拡大体全体の集合のある部分集合 $\mathfrak{K}_0$ に新しい密度を導入するものである．

次に，これらの講演の記録をかかげる．

---

* 9月9日，10日は東京，第一生命保険相互会社大会議室で行われ，12日，13日は日光金谷ホテルにおいて行われた．

E. Artin, イデール類群の連結成分の代表系

イデール類群の連結成分の構造は Weil[1)] によつて研究されたが，その重要性にかんがみここでは別の直接構成法を与える．

k を有限次代数体，r_1, r_2 をそれぞれその実および複素素点の箇数とし，$r=r_1+r_2-1$ とおく．U を k の unit idèle の群とする，すなわち

$$U=\prod_{\mathfrak{p}} U_{\mathfrak{p}}\cdot\prod_{\mathfrak{p}_\infty} k^*_{\mathfrak{p}_\infty}$$

ここに $U_{\mathfrak{p}}$ は有限素点 $\mathfrak{p}$ に関する k の完備化 $k_{\mathfrak{p}}$ における unit の群，$k^*_{\mathfrak{p}_\infty}$ は無限素点 $\mathfrak{p}_\infty$ に関する k の完備化 $k_{\mathfrak{p}_\infty}$ の乗法群を表わす．第一，第二の直積をそれぞれ $\bar{U}$, $\tilde{U}$ で表わせば，$U=\bar{U}\times\tilde{U}$. この分解に即して $\mathfrak{u}\in U$ を $\mathfrak{u}=\bar{\mathfrak{u}}\cdot\tilde{\mathfrak{u}}$ とかくことにする．

$U_{\mathfrak{p}}$ はすべてコンパクトであるから，$\bar{U}$ は直積の位相に関してコンパクトである．またその位相の定義からわかるように $\bar{U}$ における単位元の近傍系として finite index の部分群からなるものをとることができる．

さて $\bar{\mathfrak{u}}\in\bar{U}$, $x\in Z$ (有理整数加群) に対し $\bar{\mathfrak{u}}^x\in\bar{U}$ を対応させることにより pairing $(\bar{U}, Z)\to\bar{U}$ が定義される．この pairing は $\bar{U}$ の上記の位相，および Z のイデアルによる位相，すなわち $\{nZ\}$ を0の近傍系とする位相について連続となる．この位相に関する Z のコンパクト化 $\bar{Z}$ は周知の如く

$$\bar{Z}=\prod_p Z_p \quad (Z_p : p\text{-進整数加群})$$

によつて与えられる．従つて上の pairing を $(\bar{U}, \bar{Z})\longrightarrow\bar{U}$ に拡大することができる．

k における一つの独立な単数系 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r\}$ をとる．

補題 1. $\varepsilon_i=\bar{\varepsilon}_i\cdot\tilde{\varepsilon}_i$ $(1\leqq i\leqq r)$ とすれば

$$\bar{\varepsilon}_1^{x_1}\cdot\bar{\varepsilon}_2^{x_2}\cdot\cdots\cdot\bar{\varepsilon}_r^{x_r}=1,\ x_i\in\bar{Z}\Rightarrow x_i=0\ (1\leqq i\leqq r).$$

証明．全単数群において $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r\}$ が生成する部分群の index を d とする．m を任意の自然数とし

$$x_i\equiv\mu_i \quad (\mathrm{mod.}\ 2dm)$$

を満足させる $\mu_i\in Z$ をとる．

$$\varepsilon=\varepsilon_1^{\mu_1}\cdot\varepsilon_2^{\mu_2}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_r^{\mu_r}$$

とおけば，仮定により

$$\varepsilon=\bar{\varepsilon}_1^{\mu_1-x_1}\cdot\cdots\cdot\bar{\varepsilon}_r^{\mu_r-x_r}\cdot\tilde{\varepsilon}_1^{\mu_1}\cdot\cdots\cdot\tilde{\varepsilon}_r^{\mu_r}.$$

μ_i のとり方から ε はすべての有限素点において（すなわち $k_{\mathfrak{p}}$ の数として）$2dm$ 乗になつている．よつて周知の定理によつて $\varepsilon=\eta^{dm}$ とかける[2)]．η^d は $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r\}$ の生成する群に属するから

$$\varepsilon=(\varepsilon_1^{\nu_1}\cdot\varepsilon_2^{\nu_2}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_r^{\nu_r})^m$$

とかける．よつて $m|\mu_i$, 従つて $m|x_i$. m は任意であ

つたから $x_i=0$, 証明終.

次に $V=\bar{Z}\times R$ (R: 実数加群) とおく. これは有理数体 Q の integral valuation vector の加群と考えることができる. $x\in Z$ を $(x,x)\in\bar{Z}\times R$ に一致させて $Z\subset\bar{Z}\times R$ とみなせば, Z は discrete な部分群で V/Z はコンパクトになる. V/Z はまた連結でもある. $S\doteqdot V/Z$ を solenoid 群という.

$\lambda=(x,s)\in V$, ε: 単数に対して

$$\varepsilon^\lambda=\bar{\varepsilon}^x\cdot\tilde{\varepsilon}^s,\quad \tilde{\varepsilon}^s=(\cdots,\varepsilon^{(i)s},\cdots)\ ^{3)}$$

とおく. また $t\in R$ に対し, i 番目の複素素点における成分が $e^{2\pi\sqrt{-1}t}$, 他のすべての成分は 1 であるような idèle を $\Phi_i(t)$ で表わす $(1\leqq i\leqq r_2)$.

補題 2. $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r\}$ を総正な独立単数系とする. $\lambda_i\in V\ (1\leqq i\leqq r)$, $t_j\in R\ (1\leqq j\leqq r_2)$ に対して

$$\varepsilon_1^{\lambda_1}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_r^{\lambda_r}\cdot\Phi_1(t_1)\cdots\Phi_{r_2}(t_{r_2})=\alpha\ (\text{principal})$$
$$\Longleftrightarrow \lambda_i\in Z\ (1\leqq i\leqq r),\quad t_j\in Z\ (1\leqq j\leqq r_2).$$

証明. $\Leftarrow$ は明か. $\Rightarrow$ の左辺を仮定すれば

$$\bar{\varepsilon}_1^{x_1}\cdot\cdots\cdot\bar{\varepsilon}_r^{x_r}=\bar{\alpha}.$$

よつて α は単数, 従つて α^d は $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r\}$ から生成された群に属する(d はこの群の全単数群における index). よつて $\alpha^d=\varepsilon_1^{\nu_1}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_r^{\nu_r}$, $\nu_i\in Z$ とおけば

$$\bar{\alpha}^d=\bar{\varepsilon}_1^{dx_1}\cdot\cdots\cdot\bar{\varepsilon}_r^{dx_r}=\bar{\varepsilon}_1^{\nu_1}\cdot\cdots\cdot\bar{\varepsilon}_r^{\nu_r}.$$

補題 1 によつて $dx_i=\nu_i$. 故に $x_i\in Z$ である. $\varepsilon=\varepsilon_1^{x_1}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_r^{x_r}$ とおけば, $\bar{\varepsilon}=\bar{\alpha}$, 従つて $\alpha=\varepsilon$.

よつて最初の式の両辺の無限成分を比較すれば, まず絶対値 (附値) に関して

$$|\varepsilon_1|_{\mathfrak{p}_\infty}^{s_1-x_1}\cdot\cdots\cdot|\varepsilon_r|_{\mathfrak{p}_\infty}^{s_r-x_r}=1\quad \text{far all } \mathfrak{p}_\infty.$$

よつて Dirichlet の定理により $s_i-x_i=0\ (1\leqq i\leqq r)$. 故に $s_i=x_i\in Z$. すなわち $\lambda_i=(x_i,s_i)\in Z$. 従つて

$$\Phi_1(t_1)\cdot\cdots\cdot\Phi_{r_2}(t_{r_2})=1$$

故に $\Phi_j(t_j)=1$, $t_j\in Z$, 証明終.

$V^r\times R^{r_2}$ から k のイデール群の中への準同型写像

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,t_1,\cdots,t_{r_2})\longrightarrow\varepsilon_1^{\lambda_1}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_r^{\lambda_r}\cdot\Phi_1(t_1)\cdots\Phi_{r_2}(t_{r_2})$$

にイデール群からイデール類群への canonical な準同型を接合すれば volume 1 のイデール類の群 C_0 の中への準同型が得られる. 上の補題によりその kernel は $Z^r\times Z^{r_2}$ であるから

$$S^r\times T^{r_2}\longrightarrow \text{into } C_0$$
$$(S=V/Z:\text{solenoid 群},\ T=R/Z:\text{torus 群})$$

なる一対一連続準同型が生じるが, $S^r\times T^{r_2}$ はコンパクトかつ連結だからこの対応は位相同型, またその image は C_0 の連結成分 D_0 に含まれる.

さてこの対応が実は **$S^r\times T^{r_2}$ から D_0 の上への位相同型である**ことを示そう. C_0 はコンパクトな Abel 群であるから $D_0=\bigcap_m C_0^m$. よつて D_0 の各元は infinitely divisible である. a を D_0 の任意の元とせよ. h を k の類数, m を任意の自然数とすれば

$$a=c^{2hm},\quad c\in C_0$$

とかくことができる. c^{2h} は総正な unit イデール $\mathfrak{c}$ によつて代表される. $\mathfrak{c}^m$ の class が a であるが, $\mathfrak{c}^m=\bar{\mathfrak{c}}^m\cdot\tilde{\mathfrak{c}}^m$ と分解すれば, Dirichlet の定理により或る $s_i\in R\ (1\leqq i\leqq r)$, $t_j\in R\ (1\leqq j\leqq r_2)$ があつて

$$\tilde{\mathfrak{c}}^m=\tilde{\varepsilon}_1^{s_1}\cdot\cdots\cdot\tilde{\varepsilon}_r^{s_r}\cdot\Phi_1(t_1)\cdot\cdots\cdot\Phi_{r_2}(t_{r_2})$$

と表わされる. よつて $\tilde{\mathfrak{c}}^m$ の class は上記の写像の image に属する. 一方 $\{\bar{\mathfrak{c}}^m\}$ は $\{m\}$ として任意の自然数が十分大きい m に対してその約数になるような列をとれば, $\bar{\mathfrak{c}}^m\to 1$. よつて a は上記 image の閉包に, 従つて image 自身に属せねばならない.

註

1) A. Wiel, Sur la théorie du corps de classes, J. Math. Soc. Japan, **3** (1951), pp. 1–35.

2) "$\alpha\in k$ がほとんどすべての素点 $\mathfrak{p}$ において $\alpha=\beta_\mathfrak{p}^{(2)m}$, $\beta_\mathfrak{p}\in k_\mathfrak{p}$ ならば, $\alpha=\beta^m$, $\beta\in k$. ただし仮定において $\beta_\mathfrak{p}$ の指数における 2 は $4|m$, $i\notin k$ のときに限りつけるものとする." これは次のように証明される.

ζ_m (1 の原始 m 乗根) $\in k$ とすれば $k(\sqrt[m]{\alpha})/k$ は Abel 拡大である. 仮定により k のほとんどすべての素点が $k(\sqrt[m]{\alpha})$ において完全に分解するから, 類体論 (第一不等式) によつて $k(\sqrt[m]{\alpha})=k$, すなわち $\sqrt[m]{\alpha}\in k$.

一般の場合 $(\zeta_m\notin k)$, $m=p^r$ (素数冪) としてやれば十分である. まず $p\neq 2$ とする. $\zeta_p\in k$ とすれば, $k(\zeta_{p^r})$ は k の p 冪次の cyclic な拡大だから, $k(\zeta_{p^r})\supset k_1\supset k$, $[k_1:k]=p$ なる k_1 が唯一つ存在する. α が k の数の m 乗でないならば, α の任意の m 乗根 $\sqrt[m]{\alpha}$ に対して $k(\zeta_{p^r})\supset k(\sqrt[m]{\alpha})\supsetneqq k$. よつて $k(\sqrt[m]{\alpha})\supset k_1$. 故に Abel 体 k_1 において k のほとんどすべての素点が完全分解することとなり類体論の結果に矛盾する. $\zeta_p\notin k$, $[k(\zeta_p):k]=d$ のときはまず上記により $\alpha=\beta^m$, $\beta\in k(\zeta_p)$. 両辺のノルムをとつて $\alpha^d=N\beta^m$. $(d,m)=1$ 故, $\alpha=\gamma^m$, $\gamma\in k$.

$p=2$ の場合も, $\zeta_4=i\in k$ なら上記と同様にしてできる. $i\notin k$, $m=2^r$, $r\geqq 2$ のときは, 仮定により $\alpha=\beta^{2m}$, $\beta\in k(i)$. ノルムをとつて $\alpha^2=N\beta^{2m}$. 故に $\alpha=\pm N\beta^m$. しかるに仮定により $\alpha=\gamma^2$, $\gamma\in k$ であるから $\alpha=-N\beta^m$ とすれば, $\gamma/N\beta^{2^{r-1}}=\pm i\in k$ となつて矛盾である.

3) ε の複素共軛 $\varepsilon^{(i)}$ に対して $\varepsilon^{(i)s}=e^{s\log\varepsilon^{(i)}}$ は多価であるが, ここでは $\log\varepsilon^{(i)}$ の値を任意に一つ定めて考えるのである. (佐武一郎記)

岩沢健吉, 局所体の乗法群に作用する Galois 群

1. Q: 有理数体, p: 素数, Q_p: p 進数体.
   $Q_p\subseteqq k\subseteqq K$, $m=[k:Q_p]$, $n=[K:k]$.
   G: K/k の Galois 群, N: K/k の惰性群.
   e: K/k の分岐指数, f: K/k の次数.
   q: k の剰余体の元の数.

今 K/k は次の四つの条件を満足するものとする.

1) $p|f$.
2) K は 1 の原始 p 乗根を含む.
3) $p\nmid e$ すなわち K/k は tamely ramified とする.

4) 群拡大 G/N は分解する．すなわち G の部分群 H が存在して，$HN=G$ 且つ $H\cap N=1$.

ここで 4) は次の 4′) と同値である．

4′) K は $\pi^e \in k$ なる如き素元 π を含む．

証明はほとんど明かであるが 4′)→4) は $L=k(\pi)$ として，K/L の Galois 群を H とすればよい．

次に上の四つの条件の中で， essential なのは 3) のみである．すなわち次の事柄が容易に示される．

“K'/k が上の条件 3) を満足する Galois 拡大のときは，Galois 拡大 K/k $(K\supseteqq K'\supseteqq k)$ が存在して 1)～4) をすべて満足する．”

K'/k の Galois cohomology を調べるには，K/k に関する cohomology group を調べれば良いから 1)～4) のうち，3) のみが essential となつているのである．

次に ξ を 1 の原始 q^f-1 乗根とすると K/k の惰性体 F は $F=k(\xi)$ とあらわされ，又 π を 4′) における元とするとき，$L=k(\pi)$ とおく．σ を Frobenius 置換とし，τ を N の生成元とすると，G は σ, τ で生成される．σ, τ の間の基本関係は

$$\sigma^f=1,\quad \tau^e=1,\quad \sigma\tau\sigma^{-1}=\tau^q$$

である．さらに又 ξ, π に対する σ, τ の作用は

$$\xi^\sigma=\xi^q,\qquad \pi^\sigma=\pi,$$
$$\xi^\pi=\xi,\qquad \pi^\tau=\eta\cdot\pi$$

で与えられる．ここに η は 1 の e 乗根である．

さて，K の乗法群 K^* は $K^*=\{\pi\}\times\{\xi\}\times U_1$,

$$U_1=\{a\,;\,a\in K,\ a\equiv 1 \bmod. \pi\}$$

とあらわせるから，G の U_1 への作用を調べれば，G の K^* への作用を知ることができる．

そのために今 O_p を P-進整域とし，R を O_p 上 G の群環とする．U_1 の元 a に対して R の元 α の冪 a^α は通常の如く定義されたとする． 又 K に含まれる 1 の冪根の次数を割る p の最高冪を p^κ $(\kappa\geqq 1)$ とする．ω を 1 の原始 p^κ 乗根とすると

$$\omega^\sigma=\omega^g,\qquad \omega^\tau=\omega\zeta$$

なる有理整数 g (mod. p^κ で決まる)， O_p の 1 の e 乗根 ζ が存在する．そこで今

$$\lambda=\frac{1}{e}\sum_{j=0}^{e-1}\zeta^j\tau^{-j},\qquad \mu=\sum_{i=0}^{f-1}\sum_{j=0}^{e-1}g^i\zeta^j\sigma^{-i}\tau^{-j}$$

なる R の元をとると，次の定理が成立する．

定理． U_1 は R 上 $m+1$ 個の生成元 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ を有し，

$$a_0^{\sigma-g}=a_1^{p^\kappa\lambda},\quad a_1^{\tau-\zeta}=1,\qquad a_0^{g^f-1}=a_1^{-p^\kappa\mu}$$

が R 上の基本関係である．

2. Ω を k の代数閉体とし， Ω/k の分岐体 (即ち tamely unramified な体の合成体) を V とする．すると Ω/V の Galois 群 $\mathfrak{N}$ は Ω/k の Galois 群 $\mathfrak{G}$ のコンパクトな正規部分群である．$\Gamma=\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ とする．次に V' を Ω における V の最大 Abel 拡大体とし， V/V' の Galois 群 $\mathfrak{N}$, その指標群を X とする内部同型置換で定義することにより，Γ の X に対する作用を定義することができる．この時，

定理． $\bar{Q}_p=Q_p/O_p$ とし，$c(\Gamma)$ を Γ 上で定義され，$\bar{O}_p$ を値域とする連続函数の体とする時，

$$X=\bar{Q}_p+c(\Gamma)+\cdots+c(\Gamma)$$

と直和分解される．ここに $c(\Gamma)$ の個数は m 個である．$m=[k:Q_p]$.

ここで Γ の X に対する作用はこの分解で次のようになつている．すなわち $h=h(\omega)\in c(\Gamma)$, $\rho\in\Gamma$ に対して

$$(\rho h)(\omega)=h(\rho^{-1}\omega)$$

によつて Γ の $c(\Gamma)$ に対する作用を定義すると，$x\in X$ が $x=(\bar{u}, h_1, h_2, \cdots, h_m)$ とあらわされるとき，$\rho\in\Gamma$ に対して

$$\rho\cdot x=(\bar{u}',\ \rho h_1,\ \rho h_2,\ \cdots,\ \rho h_m)$$

となつている．ここに $\bar{u}'\in\bar{Q}_p$ である．(寺田文行記)

A. Weil，イデール類群の或る指標について

整数論における当面の最も重要な問題は，イデール類群の連結成分に関するものである．代数体 k のイデール類群の指標は，k の量指標に他ならない[1]． これはイデアル群の指標であるから，それを用いて L 函数を，

$$L(s,\chi)=\sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}\frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}=\prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f}}\left(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1}$$

により定義できる． ここで $\mathfrak{f}$ は量指標 χ の導手である．

イデアル指標 $\chi(\mathfrak{p})$ からイデール類群の指標を作ることは，やさしい練習問題にすぎない．一方，導手 $\mathfrak{f}$ と素な素イデアル $\mathfrak{p}$ の函数 $\chi(\mathfrak{p})$ が量指標を定義するための条件は， それを乗法的に， $\mathfrak{f}$ と素なイデアル $\mathfrak{a}$ の函数 $\chi(\mathfrak{a})$ に拡張したとき，単項イデアル (α) で，

$$\alpha\equiv 1 \quad \bmod. \mathfrak{f},\qquad \alpha \text{ は総正}$$

なる数 α で代表されるものに対し，$\chi((\alpha))$ が α の種々の共軛数の積で表わされること， 即ち α_ρ を実，α_ι を虚の共軛とするとき，次の形の式が成立つことである：

$$(*)\quad \chi((\alpha))=\prod_\rho \alpha_\rho^{\eta_\rho}\cdot\prod_\iota|\alpha_\iota|^{\xi_\iota}\cdot\prod\alpha_\iota^{n_\iota},$$

ここに ξ_ι, η_ρ は複素数，一方 n_ι は整数を意味する．そのときこの冪指数 ξ, η, n には， 単数と関連する自明な条件がある．すなわち α として，総正で，mod. $\mathfrak{f}$ で 1 に合同な単数を取るとき $\chi((\alpha))=1$ でなければならないから，それらは任意ではあり得ない[2]．

さて，L-級数 $L(s,\chi)$ の算術的説明という意味は正確にはいえないが，例えば，χ を位数有限，即ちイデール類群の連結成分の上で 1 となる指標とすれば， この L-級数は，k の或る巡回拡大から生じ，k の素イデアルの Frobenius 置換を使つて定義される，もう一つの L-級数と同一視できる[3]． これが， Artin により発見され，類体論，特に相互法則により示された，$L(s,\chi)$ の算術的説明である．

私はここで，狭義の，即ち連結成分の上で 1 でない，量指標により作られ Dirichlet-級数の，或る意味での算

術的説明を与えよう．Γ を量指標全体の作る群，Γ_0 を位数有限な，すなわち連結成分の上で1になり類体論で説明できる指標の作る部分群とすれば，Γ/Γ_0 は，rank n の Abel 群である，ここで n は体 k の次数[4]．その生成元の中には一つ trivial なもの，すなわちノルムがあるから，$n-1$ 個の独立な量指標の L-級数を説明できれば大体満足すべきであろう．現在はまだその段階には到つていないが，虚数乗法が使える場合，即ち k が，総実な体 k_0 の，総虚な2次の拡大であるときには[5]，その一部が算術的に説明できるのである．

ここで量指標の間に一つの区別が現れる．これは，今までどの文献にも見られなかつたものである．すなわちその指標から作つたDirichlet-級数の係数がすべて代数的数であるか否かによつて鋭い区別が生ずるのである．所で式（$*$）で，すべての ξ_ι，η_ρ が0であれば，$\chi((\alpha))$ は明かに代数的数であるが，又 mod. $\mathfrak{f}$ での類数が有限だから，すべての値 $\chi(\mathfrak{a})$，即ち $L(s,\chi)$ の係数，が代数的数であることもやはり明かである．一方この条件は又必要でもあるように思われる．これが第一の予想である．

先に進む前に，二つの典型的な例を挙げよう．虚2次体では，すべての量指標は上の意味で代数的値を持つ．一方実2次体ではそうでなく，超越的値の指標が存在する[6]．このことは，虚2次体には虚数乗法論があるが，実2次体にはそれに類するものが何もないということと密接に関連しているのである．

さて，代数的値を持つ量指標につき何かお話ししよう．それはイデール類群の，何か或る構造を指示しているのだが，今までどこにも見られなかつたもので，現在の所かなり神秘的に見える．

最も都合の良い場合は，k が総実な体 k_0 の，総虚な2次の拡大の時で，この時は，k の単数は本質的には k_0 の単数である．すなわち後者は前者の中で，指数有限な部分群を作つているから，k の単数の偏角（argument）は 2π の有理数倍である．一般の場合にはそれは単に正の実数倍であるのだが．それ故私の予想が正しいとすれば，代数的値を持つ独立な量指標は丁度 $n_0=n/2=[k_0:Q]$ 個ある．そこで，一般の型の代数体の場合に私の予想が証明できたとして，代数的値を持つ量指標が丁度どれだけあるかを見出すことが次の問題になる．これは，Artin が指摘したように，容易に，群環の問題に帰着される．それは単数の，虚の共軛数の偏角の間に，どれだけ一次独立な関係があるかということである．

少くとも，k が，総実な体 k_0 の，総虚な2次の拡大であるときには，上にいつた型の量指標は丁度 $n/2$ 個ある．それ故，幾分ルーズだが，このような $n/2$ 個の指標の L-級数が，k を虚数乗法の体に持つ Abel 多様体のゼータ函数により説明される[7]といえば，大雑把について，イデール類群の連結成分の半分が算術的に説明されたことになる．これだけでは不十分であるが，少くとも何も無いよりはましである．

次の論点は，代数的値を持つ量指標に，位数有限な指標を対応させることであるが，その方法はかなり奇妙なものである．

今問題にしている型の量指標が，値 $\chi(\mathfrak{p})$ により与えられているとする，ここで $\mathfrak{p}$ は或イデアル $\mathfrak{m}$（それは導手 $\mathfrak{f}$ より大きくてもよい）を割らない素イデアルすべてとする．この値 $\chi(\mathfrak{p})$ からイデール指標を作ることは，やさしい練習問題だが[8]，そのためには，値 $\chi(\mathfrak{p})$ の属する代数体を複素数体の中に embed する，なぜなら量指標は複素数値を取る函数だから．そして χ を自由に定めうる所，即ち $\mathfrak{m}$ を割る素点と無限遠素点での値を，χ が principal イデールの上で1になる様に調整して定めるのである．所で今やり方を少し変えて，$\chi(\mathfrak{p})$ の属する代数体を，その $\mathfrak{q}$-進完備体の中に embed して見る．ここに $\mathfrak{q}$ はこの代数体の素イデアルである．そして $\chi(\mathfrak{p})$ を，イデール群の，$\mathfrak{q}$-進体の中での表現に拡張するのである．所が $\mathfrak{q}$-進体は非連結だから，この表現は無限遠素点の連結成分で1にならなければならない．そこで χ を自由に定めうる所を少し変える必要がある．すなわち，$\mathfrak{q}$ で割れる有理数を q とする．…………色々な celebrations が余り沢山あつて，考え直す暇がなかつたので，この話に間違いがないと保証できないが，全体かなりルーズに話しているのだから，それは大して問題ではない[9]，……そこで $\mathfrak{q}$ で割り切れる素数 q を取り，$\mathfrak{m}$ を割る素点と，q を割る素点での χ の値を自由に定める，これは χ が連続で，principal イデールの上で1になるように調整するためで，このようにして，イデール類群の指標にもなる χ が一つ，ただ一つ定まる．所が $\mathfrak{q}$-進体の乗法群は非常に不連続で，有限群の projective limit として表わされるから[10]，その中で何かを表現することは，無限に多くの，有限群の中への表現を与えることと同等なのである．

このようにして，連結成分の上で1ではない量指標とイデール類群の，有限群の中への表現の無限列との間の関連が見出された．所が，有限群への表現は普通の類体論により説明されるもので，k の有限次 Abel 拡大を定める．これをまとめれば，k の無限次 Abel 拡大が得られ，これは χ と $\mathfrak{q}$ とで定まるものである．

これで話はほとんど終りだが，もう一つ予想が残つている．この予想は，最近志村，谷山及び私自身により虚数乗法に適用されたのと[11]丁度同じ方法によつて証明されることはほとんど確かであるが，先ず手始めに，普通の虚数乗法の場合に試して見ることもできる．そのときには，既に Deuring により得られている結果の中でこれが解決されることは，極めて確かである．

そこで k を虚2次体，E を楕円函数体で，その虚数乗法の環が k の order であるものとする．E のゼータ函数は，Deuring によつて計算され[12]，Hecke の L-函数により表わされるが，その指標 χ から，位数有限の指標を法として，k のすべての量指標が得られる[13]．今いつ

たように，素イデアル $\mathfrak{q}$ を一つ取れば，この χ には，k の無限次 Abel 拡大が対応するが，私の予想というのはこれが，E の週期の $\mathfrak{q}^n$ 等分により生ずる無限次 Abel 拡大と丁度一致するであろうということで，これは詳細に証明することができるであろう．次に，より一般的な高次元の場合にも，対応する予想が正しいことはかなり確かである．このことは，虚数乗法論の中での，Abel 多様体と量指標との関連が，偶然的なものではなくて，実質的なものであることを確証しているのである[14]．

註

1) これは岩沢–Tate の定理であるが，まとまつた文献としては未だ発表されていないようである．尤もこれだけのことならば，Weil [6] の始めにも簡単に説明してある．又 Weil [5] 参照．
2) (*)の具体的な形については Hecke [4] を見よ．
3) 即ち Artin の L–函数である．このことは，類体論の分解法則，相互法則と本質的に同等である．Artin [1]，[2] 参照．
4) Hecke [4] 参照．
5) この間の事情については，Weil の三日目の講演に詳しく説明されている．
6) Hecke [4] の最後の2節参照．
7) 谷山の講演参照．
8) $\mathfrak{m}$ を割らない素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し，$\mathfrak{p}$–進体 $k_\mathfrak{p}$ の乗法群での局所指標を，$\mathfrak{p}$–単数で 1，$\mathfrak{p}$–素元で $\chi(\mathfrak{p})$ なる条件により定める．それ以外の素点に対しては Weil のいう通りにやればよい．
9) 以下の話にも本質的には間違いはない．ただ全体としてかなりルーズなことは Weil のいう通りで，定式化には注意を要する．尤もこの講演の意義はアイディアを述べることにあるので，それがわかれば定式化は自然にできる．
10) これは $\mathfrak{q}$–進単数の群への表現であるから mod. $\mathfrak{q}^n$，$n\to\infty$ によりこの有限群を定めるのが最も都合がよい．
11) それぞれの三日目の講演参照．
12) Deuring [3] 参照．
13) これはかなりルーズな表現である，χ は E の定義体 k'（k の類体に取れる）の指標だから．然し χ は，位数有限な指標を法とすれば，k の量指標 χ_0 の co-norm として表わされ，この χ_0 から，k の指標がすべて得られるのである．従つて以下の $\mathfrak{q}^n$–等分云々も，χ_0 を基本に取つて考えれば，Weber の τ 函数の等分の意味に解さなければならない．
14) この関係は，或る意味で，より一般的な体の指標にも拡張できる．谷山の近刊の論文参照．

文　献

[1] E. Artin, Über eine neue Art von L-Reihen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 3 (1923), 89-108.
[2] E. Artin, Beweis des allgemeines Reziprozitätsgesetzes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 5 (1927), 353-363.
[3] M. Deuring, Die Zetafunktionen einer algebraischen Kurven vom Geschlecht Eins, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1953, 85-94.
[4] E. Hecke, Eine neue Art von Zatafunktionen und ihre Beziehung zur Verteilung der Primzahlen, II, Math. Z., 6 (1920), 11-51.
[5] A. Weil, Sur la théorie du corps de classes, J. Math. Soc. Japan, 3 (1951), 1-35.
[6] A. Weil, Sur les ''formules explicites'' de la théorie des nombre premiers, Communications du sém. math. univ. de Lund, tome suppliimentaire (1952), dédié à M. Riesz.

（谷山　豊記）

Richard Brauer，有限群の整数論的研究

有限位数 n の群 G は，任意の体 K の上に群環 Γ を定める．Γ は K の中に係数 a_i をもつ群元 g_i の一次結合

$$\gamma=\sum a_i g_i \qquad (1)$$

の全体からできていて，これらの元の相等，加法および乗法は自然な仕方で定義される．群環 Γ はわれわれが有限位数の群の研究にたいしてもつている最も有力な武器の一つをなしている．体 K が標数 0 のものであるときには，多元環 Γ は半単純であつて，多元環の理論の一般的な原理が適用されうる．よく知られているように，群表現および群指標の普通の理論はこのやり方で得られる．これからは体 K が代数的に閉じている，又は少くとも K は G の K 中の既約表現はすべて絶対既約であるという性質をもつていると仮定する．もし最後の条件が体 K で成立していないときには，それは 1 の n–乗根を K に添加しさえすれば満足されるようになる[1]．一般性を失うことなしに，われわれは K が 1 の n–乗根を含むような代数的数体であるという場合にかぎつてよい．そしてこの講演においてはこれがずつと仮定される．

われわれが群指標の重要な性質をほとんど知つていないということには疑問の余地がない．とくに，われわれは群指標を抽象群 G の性質に直接連結する新しい結果に興味をもつている．この種の結果はすべて，有限位数の一般群の構造に関する結果を意味する．

われわれの問題にたいする解決への一つの道は Γ の代数的な性質を研究したならばさらに Γ の整数論的な性質を研究することである．Γ の元 γ は (1) での係数 a_i がすべて K の整数ならば，整数といわれる．これらの整数の環 J は極大整環ではない，従つて，イデアルの普通の理論は成立しない．然しながら，われわれの整数の定義は群 G と自然な仕方で結ばれているのであつて，もし J を極大整環でおきかえるならば，この連絡を失つてしまうだろう．実際に極大整環の大概の整数論的な性質の研究は Γ の代数的性質を超えたところへ導かない．

われわれが興味をもつている整数論的な問題は K の素イデアル $\mathfrak{p}$ 或はむしろその J への拡張 $(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}J$ が J の中でどのようになつているかという問題である．これによつてわれわれは剰余類環 $\Gamma^*=J/(\mathfrak{p})$ の研究へと導かれる．ところで Γ^* は群 G の K の整数の $\mathfrak{p}$ を法とする剰余類の体 K^* の上の群環と解せられる．このようにして，然し今度はモジュラー体に関する，G の群環および表現の研究へ戻つてくる．$(\mathfrak{p})$ の研究は G のモジュラー表現の研究と等価になる．$(\mathfrak{p})$ の各素イデアル因子 $\mathfrak{P}$ にたいして，剰余類環 $J/\mathfrak{P}$ は K^* の上の或次数 f の完全行列環である．このようにして，$\mathfrak{P}$ は G の次数 f の

モジュラー既約表現を定義し，われわれは $(\mathfrak{p})$ の素イデアル因子 $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_k$ と，G の既約なモジュラー表現 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ とのあいだの $(1-1)$-対応をもつ．

J は極大整環ではないので，$(\mathfrak{p})$ を $\mathfrak{P}_i$ の冪積として書くことはできない．然しながら，われわれはなお $(\mathfrak{p})$ のイデアルの直共通部分として一意的な表現

$$(\mathfrak{p})=\mathfrak{B}_1\cap\mathfrak{B}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{B}_t \qquad (2)$$

をもつている．ここで，$\mathfrak{B}_\tau$ の任意二つは互に素であつて，どの $\mathfrak{B}_\tau$ も $\mathfrak{B}_\tau$ とは異る，互に素なイデアルの共通部分として書くことはできない．あるきまつた $\mathfrak{B}_\tau$ を割る $\mathfrak{P}_i$ はブロック B_τ を形成し，われわれがすでに述べたところに従えば，ブロック B_τ に属するモジュラー表現 F_i という表示を用うることもできる．各 F_i はそうするとそれぞれただ一つのブロック B_τ に属する．さいごに，われわれは G の普通の既約表現をそれぞれただ一つのブロック B_τ に連合させることができる．ブロック B_τ の各 Z_j は B_τ のモジュラー成分 F_i だけを含み，逆に，また B_τ の各 F_i は Z_j にだけでてくる．これは分解 (2) と Γ の単純多元環の直和への分解との間に或る連絡があることを示している．今 Z_j にでてくる F_i の重複度を d_{ji} で示すとき，有理整数 $d_{ji}\geqq 0$ を G の分解数と呼ぶ．

モジュラー群環 $\Gamma^*=\Gamma/(\mathfrak{p})$ は Cartan 数の行列 C を定める．この C はブロック B_τ に対応する環 $J/\mathfrak{B}_\tau$ の Cartan 数の行列 C_τ の直和である．C_τ の次数はそのブロックの中の素イデアル，したがつてまたモジュラー表現の個数に等しい．行列 C_τ は対称行列で，対応する2次形式は非負形式である．係数 c_{ij} は非負有理整数で，c_{ij} の値は素イデアル $\mathfrak{P}_i$ と $\mathfrak{P}_j$ との相互の関係に依存している．そしてこの Cartan 数 c_{ij} とさきほどの分解数 d_{ji} との間には次の著しい関係式が成立している[2)]．

$$C=D'D\,,\ C_\tau=D_\tau{}'D_\tau\,;\ c_{ij}=\sum_\lambda d_{\lambda i}\,d_{\lambda j}$$

p で $\mathfrak{p}$ で割れる有理素数を示そう．もし p^α がブロック B_τ に属する F_i の次数のすべてを割る p の最高冪であるならば，p^α はまた B_τ のすべての普通の表現 Z_j の次数すべてを割る p の最高冪でもある．このときわれわれはブロック B_τ は α 型のものであるという．或は，p^a が G の位数 n を割る p の最高冪であるとき，われわれは $d=a-\alpha$ を B_τ の defect と呼ぶ．d が小さいほど，(2) における $\mathfrak{B}_\tau$ の構造は簡単である．

以上の準備をもつてわれわれは今次の三つの予想問題を述べることができる．

予想 (1)　B_τ を或る有限位数の群 G の defect d のブロックとし，$C_\tau=(c_{ij})=D_\tau{}'D_\tau$ および $D_\tau=(d_{ij})$ をその Cartan 数および分解数のつくる行列としよう．このとき $d_{ij}\leqq p^d$ （あるいは d にだけ依存する限界をもつ）ということがいえるのではなかろうか？いずれにしても，p, d を与えるときに C_τ に対応する2次形式の類は有限位数の群全体を変域としても有限個しかない．また $d=0$ のときは C_τ は次数が1で $c_{ij}=d_{ij}=1$，$d=1$ のときは $c_{ij}=\sum_\lambda d_{i\lambda}d_{j\lambda}\leqq p$ ということはわかつている．これに関連して，B_τ に属する普通の既約表現の個数を x，モジュラー既約表現の個数を y で示すと，$d>0$ のときは，(1) $y<x$，(2) $\det C_\tau\leqq p^{d+(y-1)(d-1)}$，(3) $x\leqq 1/2\,p^{2d}$ までわかつているがもつとつよく，$x\leqq p^d$ がいえるのではなかろうか？ なお $p^dC_\tau^{-1}$ が2次形式として表示する整数値が $\geqq y$ ということもいえる．

問題 (2)　G を位数 n の有限群，$d>0$ とするとき，G には defect d のブロックはいくつあるか？ $d=0$ のときはある程度わかつている．また p が n をきつかり一乗で割るときはよくわかつていて，そのとき defect 1 のブロックの個数は G の共役類の個数から p-Sylow 群の正規化群の共役類の個数をひいたものに等しい．

問題 (3)　G を位数 n の有限群，$d>0$ とするとき，G の defect d のブロック B_τ にたいして，B_τ に属する普通の（およびモジュラー）既約表現の次数にたいしてそれを割る p の最高冪を $p^{a-\alpha+\varepsilon}$（ただし p^a は n を割る p の最高冪）とすると，$\varepsilon\geqq 0$ であるが，$\varepsilon=0$ となるものはいくつあるであろうか？ なお B_τ には G の位数 p^d の部分群 D_τ で B_τ がその正規化群のブロックと密接に関連するものが共役の意味で一意的に定まつてくる．これを B_τ の defect 群というが，D_τ が Abel 群ということと B_τ に属する普通の既約表現の次数のすべてについて $\varepsilon=0$ ということとは等価にならないのであろうか？ $d=1$ および2のときはこれは正しい．

これで三つの予想一問題を述べたわけであるが，なお次の二つのことがらに言及したい．

まず同型でない二つの群が同じ指標の表をもつことがあるということはよく知られている．しかし単純群にかぎつたらどうであろうか．単純群は指標できまつてしまうのではなかろうか？このことについて私の学生の一人であつた Stanton が位数 95040 および 244823040 の単純群が，いわゆる次数 12 および 24 の Mathieu 群にかぎることを証明したのは興味があることである．

さいごに G を次のような条件を満足する有限群としよう．すなわち G の位数 n はきつかり3の一乗で割れて，3-Sylow 群の中心化群はそれ自身に一致する．そうすると，自明な場合を除くと，n は次の形で与えられる．

$$n=3f(f+1)m^2.$$

この様な群は無限に多くあるのであるが，もしわれわれが単純群にかぎつたならばどうであろうか．今のところ位数 60（そのとき $f=4$，$m=1$）および 168（そのとき $f=7$，$m=1$）のものしか知られていない[3)]．

註

1)　このことの適切な証明を昨秋阪市大浅野教授が名大数学教室において話された．ところが Brauer 教授自身も Tate と共に同様な証明を同じ頃得られたのであつた．（学士院記事およびAnnalsにそれぞれ発表された．）

2)　これについては名大中山教授，岡大大島教授および阪市大永尾助教授の興味あるそれぞれの証明がある．

3) この方向については阪大永井氏が多くの努力をつづけられておられる．

（伊藤　昇記）

淡中忠郎，一般化された単項化定理

既知の通り単項化定理は D. Hilbert により formulate され，Furtwängler が Artin 相互律を用いて証明した．彼の証明は本質的には群論的のものであつたが，彌永氏により算術的な部分が Strahlklassenkörper の場合にまで次の形に拡張された．

K が k 上の ray class field であり $\mathfrak{f}=\mathfrak{f}(K/k)$，$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}(K/k)$ を conductor および modulus of genus とすれば k の $\mathfrak{f}$ と prime なイデアル $\mathfrak{a}$ は K において ray modulo $\mathfrak{F}$ に属する．もし K/k が（一般に ramified の場合でも）cyclic ならば situation は simple で direct computation から

$$(1)\qquad a=\frac{h\,2^{\rho}\prod e_{\mathfrak{p}}}{n(\varepsilon : N(\theta))}$$

が知られる．ここに

- a : ambigous class number
- h : absolute class number of k
- ρ : number of ramifying infinite spots of k
- $e_{\mathfrak{p}}$: exponent of ramification of $\mathfrak{p}$
- n : relative degree of K/k, $(K:k)$
- ε : units in k
- θ : elements of K whose norm $N(\theta)$ are units in k.

もしさらに K が absolute class field と仮定すると $a=1$ となつて principal genus theorem の拡張が得られる．これから自然に次の予想が得られる．すなわち K が k の絶対類体で $\mathfrak{a}$ が適当な意味で ambigous ならば $\mathfrak{a}$ は principal in K となる．以前に次の論文において ambigousness の定義を与えた： T. Tannaka, Über eine Indexrelation, Sci. Rep. Tohoku Univ., (1) **23** (1934)．すなわち

$$\mathfrak{a}^{1-\sigma}=(A_\sigma),\quad \frac{A_\tau A_\tau^{\tau}}{A_{\sigma\tau}}=\varepsilon_{\sigma,\tau},\quad \varepsilon_{\sigma,\tau}=\varepsilon_{\tau.\sigma}$$

従つて主定理は

主定理 I. K が absolute class field over k なら K の上の意味で ambigous なイデアルは principal である．

この定理のもつとも重要な lemma は次の結果である．

Lemma. Let K be the absolute class field over k and Ω/k its cyclic intermediate field, then every (in ordinary sense) ambigous ideal in Ω becomes principal in K.

この lemma は淡中により予想され寺田文行氏が複雑な計算により証明した．その方法は Furtwängler の考えを基礎とするものである：F. Terada, On a Generalization of the Principal Ideal Theorem, Tôhoku Math. Journ., (2) **1**, no. 2 (1949), 229-269 頁．

後に淡中は Artin の splitting group による補題に簡易化した証明を与えた．その証明の要旨を次に示す．

K を k 上の絶対類体，$\bar{K}$ を第2次類体，$G=G(\bar{K}/k)$ とすれば K は G の commutator subgroup G' に属する．$\bar{K}$ の prime ideal $\mathfrak{P}$ が K，k の $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ の divisor なる $\sigma=\left[\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right]$ に対し $\left(\frac{\bar{K}/K}{\mathfrak{q}}\right)=\sigma^{f}$，$N_{K/k}(\mathfrak{q})=\mathfrak{p}^{f}$ かつ

$$\left(\frac{\bar{K}/K}{\mathfrak{p}}\right)=V_{G\to G'}(\sigma)=\prod_{\tau} S_\tau S_\sigma S_{\sigma\tau}^{-1}$$

（$S_1=1$，S_τ : $G/G'=\Gamma$ の代表，V : Verlagerung）

われわれの lemma は次のようになる．

Lemma. Let G be a metabelian group with commutator subgroup G', H be an invariant subgroup of G with the cyclic quotient group G/H, and A an element of H with $ASA^{-1}S^{-1}\in H'$ (S being a generator of G/H), then the 'Verlagerung' $N(A)=V_{H\to G'}(A)=\prod_{T} TA\,\overline{TA}^{-1}$ from H to G' is the unit element of G. Thereby T runs over a fixed representative system of H/G', and $\overline{TA}$ means the representative corresponding to the coset TAG'.

次に Artin の splitting group $\bar{\mathfrak{U}}$ を導入する．これは $\mathfrak{U}=G'$ および symbols A_σ $(\sigma\neq 1)$ $(\sigma\in\Gamma=G/G')$ から生成され Γ を次の convention で operator にもつものである．

$$U^\sigma=S_\sigma U S_\sigma^{-1}\qquad (U\in G'=\mathfrak{U})$$

$$A_\tau^\sigma=A_\sigma^{-1}A_{\sigma\tau}D_{\sigma,\tau}^{-1},\quad (A_1=1,\ S_\tau S_\sigma S_{\sigma\tau}^{-1}=D_{\sigma.\tau})$$

とすれば

$$A_{\sigma\tau}\equiv A_\sigma A_\tau^\sigma\qquad (\mathrm{mod.}\ G').$$

従つて $\bar{\mathfrak{U}}$ は symbolically に $\mathfrak{U}$ と $A_i=A_{\sigma_i}$ $(i=1,2,\cdots)$ から生成される．ここに $\sigma_1,\sigma_2,\cdots$ は Γ の generators である．また

$$\begin{aligned}&(U_\sigma S_\sigma)(U_\tau S_\tau)(U_\sigma S_\sigma)^{-1}(U_\tau S_\tau)^{-1}\\&=U_\sigma^{1-\tau}U_\tau^{1-\sigma}A_\sigma^{\tau-1}A_\tau^{1-\sigma}\\&=(U_\sigma^{1-\tau}U_\tau^{1-U_\sigma})(U_\sigma^{U_\tau-1}U_\tau^{1-\sigma})(A_\sigma^{\tau-1}A_\tau^{1-\sigma}).\end{aligned}$$

以上から加法的な書き方をすれば G' の element は次の形に書けることがわかる．

$$\sum_{r,s}A_{r,s}A_r c_s$$

ここに $A_{r,s}=-A_{s,r}$，$A_{r,r}=0$，$\Delta_r=1-S_r$（S_r が G/G' の representative で $\Gamma=G/G'$ の fixed system of generators に対応するものおよび G' の element を表わす）．また c_r は S_r に対応する element である．ここに S_r は $\Gamma=G/G'$ の fixed system of generators 及び G' の element に対応する G/G' の代表を表わす．

以上によつて lemma は次のように変換される．

Lemma. Let M be an additive group with $Z[G]$ as operator domain with the (not necessarily independent) base elements $c_1, c_2, \cdots, c_n$ and c, and

$$N_i c_i=\sum_{r,s=1}^{n}A_{r,s}^{(i)}\Delta_r c_s+\sum_{j=1}^{n}B_j^{(i)}\delta_j\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

$\delta_i = \Delta c_i - \Delta_i c, \quad \Delta_i = 1 - S_i, \quad \Delta = 1 - S,$

$N_i \Delta_i = 0, \quad A^{(i)}_{r,s} = -A^{(i)}_{s,r}, \quad A^{(i)}_{r,r} = 0,$

$N_i = 1 + S_i + S_i^2 + \cdots + S_i^{e_i - 1}$

(e_i : order of S_i modulo G', so that $e_i = 1$, $N_i = 1$ if S_i represents the elements of $\mathfrak{A} = G'$)

If then

$$\sum \Gamma_i \delta_i = \sum F_{r,s} \Delta_r c_s \quad (F_{r,s} = -F_{s,r}, \ F_{r,r} = 0)$$

we have

$$N_1 \cdots N_n \sum \Gamma_i c_i = 0 .$$

この lemma の証明の key point は第一に

(2) $\qquad |\sum_r A^{(i)}_{jr} \Delta_r|_{i,j} = 0$

で，第二は寺田によつて発見されたのを書き直した次の形の式

(3) $\qquad N_1 \cdots N_n c_i = * \delta_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

である．最後の式から

$$N_1 \cdots N_n \sum \Gamma_i c_i = * \sum \Gamma_i \delta_i = * \sum F_{r,s} \Delta_r c_s$$

であるから lemma の証明は

(4) $\qquad * (\Delta_r c_s - \Delta_s c_r) = 0$

に帰せられる．(2), (3), (4) の証明について次の論文を見られたい：T. Tannaka, An Alternative Proof of a Generalized Principal Ideal Theorem, Proc. Japan Acad. **25** (1949), 26–31 頁.

また私は次の結果を得た．これは寺田の lemma を ray class field の場合に拡張したものである．

Theorem. Let K be the ray class field mod. $\mathfrak{f}(K/k)$ over k, and Ω a cyclic intermediate field of K/k. Let also $\mathfrak{m} = \mathfrak{f}(K, \Omega, k)$ denote the ideal Max $\{\mathfrak{f}(K/\Omega), \mathfrak{F}(\Omega/k)\}$ in Ω. If $\mathfrak{a}$ of Ω is an ideal in ambigous class modulo $\mathfrak{m}$, then $\mathfrak{a}$ lies in the ray modulo $\mathfrak{F}(K/k)$, when considered as an ideal in K. Thereby $\mathfrak{F}(K/k)$ denotes the modulus of K with respect to k.

以上の準備のもとに目的の主定理を証明する．ただし証明の意味を明瞭にするために，さらに一般に次の形にして証明することとする．

主定理 II. K が k 上の ray class field mod. $\mathfrak{f}$ で

$$\mathfrak{d}^{1-\sigma} = (A_\sigma), \quad \frac{A_\tau A_\sigma^\tau}{A_{\sigma\tau}} = \varepsilon_{\sigma,\tau} = \varepsilon_{\tau,\sigma} \equiv 1 \ (\text{mod. } \mathfrak{f})$$

ならば $\mathfrak{d}$ は principal ideal である．

σ_i $(i = 1, 2, \cdots)$ を K/k の Galois 群の basis とし $A_i = A_{\sigma_i}$ と置けば

(5) $\qquad A_i^{N_i} = \varepsilon_i \equiv 1$ (mod. $\mathfrak{f}$), $\quad A_i^{\Delta_j} = A_j^{\Delta_i}$.

Everywhere splitting algebra の定理から

(6) $\qquad \varepsilon_i = N_{L_i}(A'_i)$

ここに A'_i は $\{\sigma_1\} \times \cdots \times \{\sigma_{i-1}\} \times \{\sigma_{i+1}\} \times \cdots$ に属する体 L_i の元素である．

Principal genus theorem から

$$A'_i \equiv B^{1-\sigma_i} \quad (\text{mod. } \mathfrak{f}/\mathfrak{D}(L_i)).$$

従つて $A'_i / B^{1-\sigma_i}$ を始めから A'_i と書けば

(7) $\qquad \varepsilon_i = N_{L_i}(A'_i), \quad A'_i \equiv 1 \quad (\mathfrak{f}/\mathfrak{D}(L_i)).$

$\varepsilon_i = N_{L_i}(A'_i) = A_i^{N_i}$ から

(8) $\qquad A_i = A'_i A_i''^{\Delta_i}, \quad A''_i \in K.$

一方

(9) $\qquad N_{L_i}((A'_i)) = (1)$

であるから

(10) $\qquad (A'_i) = \mathfrak{a}_i^{\Delta_i}, \quad \mathfrak{a}_i$: ideal in L_i.

故に

(11) $\qquad \mathfrak{d}^{\Delta_i} = \mathfrak{a}_i^{\Delta_i} (A_i''^{\Delta_i}) = \mathfrak{a}^{\Delta_i} (A_i''^{\Delta_i}) \quad (\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{a}_i).$

また容易に

$$\mathfrak{f}/\mathfrak{D}(L_i) \geqq \mathfrak{f}(K, L_i, k)$$

が示されるから Tannaka の principal ideal theorem により $\mathfrak{a}_i \in R_K(\mathfrak{F})$ (ray class mod $\mathfrak{F}$ in K).

$\mathfrak{a}_i$ のどの因子も不分岐であるようにとれることを示さなければならないがここでは省略する．

さらに計算をすすめて

$\mathfrak{a}_i = (A_i'''), \quad A_i''' \equiv 1$ (mod. $\mathfrak{F}$),

$\mathfrak{a} = (A) = \prod (A_i'''), \quad \prod A_i''' = A \equiv 1$ (mod. $\mathfrak{F}$),

$(A'_i) = \mathfrak{a}^{\Delta_i} = (A)^{\Delta_i}, \quad \mathfrak{d}^{\Delta_i} = (A)^{\Delta_i} (A_i''^{\Delta_i}).$

ここに A''^{Δ_i} は

$$(A_i''^{\Delta_i})^{\Delta_j} = (A_j''^{\Delta_j})^{\Delta_i}, \quad (A_i''^{\Delta_i})^{N_i} = 1$$

を満足するから $B_i = B_{\sigma_i} = A_i''^{\Delta_i}$ は one-dimensional Galois cocycle に extend され Speiser-Noether の定理により $A_i''^{\Delta_i} = B^{\Delta_i}$. 従つて

$\mathfrak{d}^{\Delta_i} = (A)^{\Delta_i} (B)^{\Delta_i}, \quad \mathfrak{d} = (A)(B)\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$: k ideal)

ここに彌永の単項化定理によつて $\mathfrak{c}$ は単項化するから

$\mathfrak{d} \sim 1$ in K

が証明せられた．

上の定理で additional condition $A_\sigma \equiv 1$ (mod. $\mathfrak{F}$) の下に $\mathfrak{d}$ は $R_K(\mathfrak{F})$ に属し，彌永の定理の一般化となるものと思われるが，まだ証明は得られていない．

再び絶対類体に戻り，われわれの定理から容易に

$\mathfrak{d}$ ambigous $\rightarrow \varepsilon_{\sigma,\tau}$

の対応によつて次の定理に変換できる．

定理. $\varepsilon_{\sigma,\tau} = \varepsilon_{\tau,\sigma}$ が単数から成る 2 次元 cocycle であれば，これは単数によつて split する．

$$\varepsilon_{\sigma,\tau} = \frac{E_\tau E_\sigma^\tau}{E_{\sigma\tau}}.$$

従つてこのような，$\varepsilon_{\sigma,\tau}$ の類からなる modified cohomology group を $H'^2(G, E)$ と表わせば絶対類体の場合に $H'^2(G, E) = \{1\}$ となる．

久保田富雄，Abel 拡大体系における密度

Ω を有限次代数体，$\mathfrak{A}$ を n 次の Abel 群とする．又 $\mathfrak{F}$ を Ω の Abel 拡大体 K で，K/Ω の Galois 群が $\mathfrak{A}$ と同型であるようなもののなす，或る集合とする．そのとき，$\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$ について，$\mathfrak{F}_0$ の $\mathfrak{F}$ における密度 $\omega(\mathfrak{F}_0 ; \mathfrak{F})$ を

$$\omega(\mathfrak{F}_0\,;\,\mathfrak{F})=\lim_{s\to 1+0}\sum_{K\in\mathfrak{F}_0}(1/Nf_K^s)/\sum_{K\in\mathfrak{F}}(1/Nf_K^s)$$

によつて定義する．ここで Nf_K は K/Ω の導手の絶対ノルムをあらわす．もちろんこの密度は常に存在するとは限らない．また上の式にあらわれる Dirichlet 級数は，$s>1$ において絶対収束することが証明される．

さて，我々の目的は，この密度と，拡大体の整数論的性質との関係をしらべることである．まず次のような記号を定義する．

$\mathfrak{a}$: Ω の整イデアル．

U : Ω のイデールで，成分がすべて unit であるもの全部のなす群．

$U_\mathfrak{a}$: U の元 u で，すべての素イデアル冪 $\mathfrak{p}^c|\mathfrak{a}$ について，$u_\mathfrak{p}\equiv 1$ (mod. $\mathfrak{p}^c$) であるような $\mathfrak{p}$ 成分 $u_\mathfrak{p}$ をもつもの全部のなす群．

$c_\mathfrak{a}$: $U/U_\mathfrak{a}$ から $\mathfrak{A}$ の中への homomorphism の数．

さらに $\mathfrak{l}$ を Ω の素イデアルで2と素なものとし，次のようにおく．

$\mathfrak{K}$: K/Ω の Galois 群が $\cong\mathfrak{A}$ であるような K 全部の集合．

$\mathfrak{K}_0$: $K\in\mathfrak{K}$ であり，かつ $\mathfrak{l}$ が K/Ω で不分岐であるような K 全部の集合．

$\mathfrak{K}_0'$: $K\in\mathfrak{K}_0$ であり，かつ $\mathfrak{l}$ が K/Ω で完全分解するような K 全部の集合．

$\mathfrak{K}_u$: $K\in\mathfrak{K}$ であり，かつ f_K がちようど $\mathfrak{l}^u$ ($u=1, 2,\cdots$) でわり切るれような K 全部の集合．

このような定義の下で，我々の主要な結果は次のようにのべられる．

定理 1. $\omega(\mathfrak{K}_0'\,;\,\mathfrak{K}_0)$ は存在し，$1/n$ に等しい．

定理 2. $\omega(\mathfrak{K}_0\,;\,\mathfrak{K})$, $\omega(\mathfrak{K}_u\,;\,\mathfrak{K})$ はいずれも存在し，それぞれ，

$$\frac{1}{\sigma_\mathfrak{l}(1)(1-N\mathfrak{l}^{-1})},\quad \frac{c_{\mathfrak{l}^u}-c_{\mathfrak{l}^{u+1}}}{\sigma_\mathfrak{l}(1)(1-N\mathfrak{l}^{-1})N\mathfrak{l}^u}$$

に等しい．ここで，$\sigma_\mathfrak{l}(s)=\sum_{m=0}^{\infty}c_{\mathfrak{l}^m}/N\mathfrak{l}^{ms}$ である．

定理 3. η を $\mathfrak{a}$ の Ω における既約表現の数とすれば

$$\sum_{K\in\mathfrak{K}}1/Nf_K^s\sim(s-1)^{-(\eta-1)}$$

である．ここで ～ は両辺の比が $s\to 1+0$ のとき有限な極限値に近づくこと，すなわち $s=1$ における両辺の order が等しいことを示す．

証明は，Abel 体，Kummer 体等の代数的理論と，Tschebotareff の密度定理とを組みあわせてできるのであるが，詳細はここでは略すことにする．

以上のような考察の目標は，一般 Galois 体の理論を発展させることである．定理 1, 2, 3 はいずれも，類似の形で一般 Galois 体のあつまりについてもなりたつことが予想される．中でも定理3は，あたえられた基礎体の上の，あたえられた Galois 群をもつ体の存在に直接むすびついてくる．ここでは，一般の場合を予測するために，まず Abel 拡大の場合に，既知の理論を用いて，いくつかの結果を出してみたのである．

文献

[1] H. Hasse, Invariante Kennzeichnung relativ-abelscher Zahlkörper mit vorgegebner Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers. Abh. Deutsch. Akad. d. Wiss. zu Berlin, Math.-Naturw. Kl., Jahrg. 1947, Nr. 8.

[2] H. Hasse, Die Multiplikationsgruppe der abelschen Körper mit fester Galoisgruppe. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 16 (1949), 29-40.

第 2 日　9 月 10 日

この日の主題は，fibre bundle, faisceau, cohomology などの位相的方法の整数論への応用である．午前中，9時—11時40分，R. Brauer 教授座長のもとに，次の四講演が行われた．第3日，第4日の会場は日光金谷ホテルに移されるので，この日の午後一同は日光に向け出発した．

C. Chevalley, Projective imbedding of a group variety. (50 分).

山崎圭次郎, Fibre spaces and sheaves in number theory. (30 分).

C. Zelinsky, Cohomology of function fields and other algebras. (30 分).

中山　正, A conjecture on the cohomology of algebraic number fields and the proof of its special case. (20 分). (河田敬義代読)

Chevalley 教授の講演は，群多様体を射影空間に biregular にはめこむ方法を示したものである．山崎氏の講演は，Weil の Chicago 大学での講義にならつて，代数体の場合に fibre 空間の概念を拡張しようとするものである．Zelinsky 教授の講演は，有限次代数体上の algebra に cohomology 的次元を定義してその性質を研究したもの，中山教授の講演は，cohomology 群の間の同型に関する Tate の定理の拡張に関する予想と，その特別の場合の証明で，いずれも近年整数論に応用されて多くの成果をあげた cohomology 論の応用である．

C. Chevalley，群多様体の射影的はめこみについて

1. $\widetilde{U}$ を抽象的代数多様体とするとき，適当な射影空間内の代数多様体 $\boldsymbol{V}$ の開集合 $\boldsymbol{U}$ をとると，$\boldsymbol{U}$ と $\widetilde{U}$ との間に到るところ双正則な双有理変換が存在するとき，$\widetilde{U}$ は射影空間に **‘はめ込まれる’** といい，$\boldsymbol{U}$ を $\widetilde{U}$ の **射影的 ‘はめ込み’** という．以下において我々は

1) 群多様体 $\boldsymbol{G}$ は常に射影空間にはめこまれる，

2) 特に K を $\boldsymbol{G}$ の定義体とすれば，上の $\boldsymbol{V}$ として K で定義される多様体をとることが出来る，

ということを証明しよう．茲に K が群多様体の定義体であるとは，多様体として $\boldsymbol{G}$ が K で定義されるだけで

なく，G の上の正規結合法則も K で定義されることを意味する．これについては別に Barsotti [2] の証明がある．又 G が Abel 多様体であるときは松阪 [4], Weil [8] により，G が homogeneous space である時は，Chow [3] により証明された．

2. G を K で定義された群多様体，W を G の開集合 (Zariski 位相) で且 K で定義された擬似多様体[1]であるものをとる．$|T|=|G|-|W|$ とおけば $|T|$ は余次元 1 の有限個の部分多様体より成る．D を W-因子 (D のどの成分も $|T|$ には含まれないもの)，$\tilde{D}$ を D の G への延長，D の G の点 s による移動を $s\tilde{D}$, $F(s,D)$ を $s\tilde{D}$ の W への制限[2]とする．

補題 1. G より W の因子群への写像

$$\varphi:\ s\rightarrow F(s,\ D)$$

が injective[3] であるような K-有理的な W-因子 D が存在する．且特に D として，すべての G の元 s に対し sD のどの成分も $|T|$ に含まれないような D をとることが出来る．

我々は先に此の補題を仮定して，結論に進むことにしよう．W は擬似多様体であるから，之を射影空間 P の中にいれることが出来る．X を W-因子とし，X の P における代数的閉苞を $\bar{X}$ で表わす．D を補題1の条件をみたす W-因子とし，w_0 を $\bar{K}$ (K の代数的閉苞) に関する W の生成点，γ_0 を射影空間 P の中のサイクル $Z_0=\overline{F(w_0,D)}$ の Chow-点[4]とする．さて D は K-有理的であるから，Z_0 は $K(w_0)$-有理的，従つて $\gamma_0\in K(w_0)$. 且補題1より，w_0 の $K(\gamma_0)$ の上の特殊化は只一つ w_0 だけである．よつて w_0 は $K(\gamma_0)$ の上に純非分離代数的である．Γ を γ_0 の K の上の軌跡とする．さて松阪の補題[5]により，次の条件を充す W と双有理同値な射影多様体 Γ' 及び Γ' より Γ への K で定義された写像 φ が存在する．

(1) φ は上の $W\rightarrow\Gamma$ という写像の自然な拡張である．

(2) φ は Γ' 上到るところで定義されている．

(3) Γ のどの点 γ に対しても $\varphi(\gamma')=\gamma$ であるような Γ' の点 γ' は有限個しかない．

Γ' を K に関して正規化して得る射影多様体を Γ'' とすれば，Γ'' と G の間に自然な双有理変換 g が存在する．g による G の像を $g(G)$ とすれば，補題1及び，双有理変換に関する Zariski の基本定理[6]により，G と $g(G)$ の間の対応は，到るところ双正則である．かくして G の射影的 ‘はめ込み’ が得られる．

3. 補題1の証明のためには，次の補題2が基本的である．以下 $W_{\bar{K}}$ で以て W に含まれ，かつ K に関して代数的な点の集合を表すことにする．

補題 2. s を $\bar{K}$-有理的な G の点とする．今 x と sx が共に $W_{\bar{K}}$ の点であるようなすべての x に対し，x と sx が K に関して互に共軛であるとすれば，s は G の単位点である．

証明．W は擬似多様体であるから，その上の点に対して擬似座標系がはいる．x_i をその座標函数とする．すなわち $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ を W の点とするとき $x_i(a)=a_i$. 今 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$ を $K(s)$ の上の W の生成点とすると，$f_i(\bar{x})=x_i(s\bar{x})$ によつて W の上の函数 (定義体は $K(s)$) が定義される．i を $\bar{x}_i\notin K$ であるような指数とする．w_0 を W の $\bar{K}$ に関する生成点とすると，$F(w_0)=(x_i(w_0),f_i(w_0))$ により W より，擬似平面 E^2 への写像 F が定義される．C を $F(w_0)$ の $\bar{K}$ 上の軌跡とすれば，容易に見られるように C は1次元多様体になる．又 U を f_i が定義される W の点の集合とすれば U は W の開集合である．且 U の点の像であるような C の点の集合を V とすれば V は C の開集合であり，V に属し，かつ $\bar{K}$-有理的な点 (u,v) の座標は K に関して互に共軛になる．特に u を K の元とするとき，有限個の値を除いて点 (u,u) は C に含まれる．

さて K を無限体とすると，上に述べたことより，C と E^2 の対角線多様体 Δ とが無限個の交点を持つことになり，従つて $C=\Delta$ でなければならない．よつて $f_i(\bar{x})=x_i(\bar{x})$. $\bar{x}_i\in K$ のときも同様の結論を得る．よつて補題2の仮定の下に $s\bar{x}=\bar{x}$, 即ち $s=1$ が証明された．

次に K が有限体 $GF(q)$ とする．K_N を K の $2N$ 次拡大体，u を K_N の元とする．さて $P(X,Y)=0$ を C の定義方程式とすれば，C の構成及び補題2の仮定より，高々有限個の u の値を除けば，$P(u,Y)=0$ なる方程式は u^{q^ν} $(0\leqq\nu\leqq 2N-1)$ という根を持つ．此の除外すべき値の数を c とおく．

次に証明することは適当な正の整数 m に対して，$P(X,X^{q^m})=0$ 或は $P(X^{q^m},X)=0$ の何れかが恒等的に成立つことである．今そうでないと仮定し，P の次数を e とする．そうすると $P(X,X^{q^\nu})=0$ の解は高々 eq^ν 個である．今 $\nu>N$ の場合，此の方程式の K_N の中にある解の数を別の方法で評価してみる．$P'(X,Y)$ を $P(X,Y)$ の各係数を $q^{2N-\nu}$ 乗して得る多項式とする．もし $P(u,u^{q^\nu})=0$, $u\in K_N$ ならば $P'(u^{q^{2N-\nu}},u)=0$. しかるに仮定により $P'(X^{q^{2N-\nu}},X)=0$ は恒等式ではない．よつてこの解の数は高々 $eq^{2N-\nu}$ 個しか存在しない．よつて $P(u,Y)=0$ が u の K に関する共軛を解として持つような K_N の元 u の個数は，高々 $2e(1+q+\cdots+q^N)=2e(q^{N+1}-1)(q-1)^{-1}$. さて K_N の元の個数は q^{2N} であるが，q^{2N} と $2e(q^{N+1}-1)(q-1)^{-1}$ との差は N と共に無限に増加し，先にのべた常数 c を超過するにいたる．之は予盾である．したがつて $P(X,X^{q^m})\equiv 0$, $P(X^{q^m},X)\equiv 0$ の何れかが，適当な m に対して成立する．さて C は既約多様体であるから，$P(X,Y)$ は既約多項式．したがつて $P(X,Y)\equiv X^{q^m}-Y$ であるか $P(X,Y)\equiv X-Y^{q^m}$.

以上の考察より，補題2の条件を充たす G の元 s に対して，$x_i(s\cdot\omega)=x_i(\omega)^{\sigma_i}$, $\omega\in W_{\bar{K}}\cap U$ であるような $\bar{K}/K$ の自己同型対応 σ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ が対応する．一

方 s はある有限体 K' $(=K(s))$ に関して有理的であるから，$s^l=1$ であるような自然数 l が存在する．従つて $x_i(\omega)=x_i(s^l\cdot\omega)=x_i(\omega)^{\sigma_i{}^l}$. 之より $\sigma_i{}^l$ が $\bar{K}/K$ の恒等的自己同型対応になることが知られる．しかし之は σ_i が恒等的自己同型対応でない限り起り得ない[7]. 故に $\sigma_i=1$. すなわち $s=1$. かくして補題 2 が証明せられた．

4. $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{W}$-因子とするとき，$\boldsymbol{W}$ を含む射影空間 $\boldsymbol{P}$ における $\boldsymbol{X}$ の閉苞 $\bar{\boldsymbol{X}}$ の次数を‘$\boldsymbol{X}$ の次数’と呼ぶことにする．さて前のように $|\boldsymbol{T}|=|G|-|\boldsymbol{W}|$, $|\boldsymbol{T}|=\bigcup|\boldsymbol{T}_i|$ ($\boldsymbol{T}_i$ は余次元 1 の $\boldsymbol{G}$ の部分多様体) とおくとき，$s\boldsymbol{T}_i$ の次数 ($s\boldsymbol{T}_i$ から $\boldsymbol{D}$ の成分をとつたものの) は s の如何にかかわらず一定の常数 N_i を超えない．したがつて $\boldsymbol{D}$ を $\boldsymbol{W}$ の部分多様体で十分次数の高いもの ($>N=\mathrm{Max}(N_i)$) とすれば，$\boldsymbol{D}$ は決して $|s\boldsymbol{T}|$ の成分にはならない．

補題 3. s を 1 でないの任意の点とすると，$|\boldsymbol{D}|\neq F(s,\boldsymbol{D})$ であるような K-有理的な $\boldsymbol{W}$-因子 $\boldsymbol{D}$ が存在する．かつそのとき，更に $\boldsymbol{D}$ として $\boldsymbol{D}$ のどの成分の次数も与えられた整数 n より大きく，且 $\boldsymbol{D}$ の各成分の K に関する非分離度が 1 であるように出来る．

証明．$s\neq1$ であるから，補題 2 より，x と sx が共に $\boldsymbol{W}_K$ の点で，且つ x と sx が K に関して互に共軛でないような点 x が存在する．$\boldsymbol{M}_m$ として $\boldsymbol{P}$ の m 次超曲面で次の条件を充すものをとる[8]．

1) $\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{M}_m$ は既約多様体．

2) $\boldsymbol{D}_1$ は x を含むが，sx のどの K 上の共軛点も含まない．

3) $\boldsymbol{H}_m$ の定義体 K' は K の上に分離代数的である．

$\boldsymbol{D}_1$ の K に関する共軛多様体の形式的な和 $\boldsymbol{D}$ は K の上の既約有理因子であるが，之が補題の条件を充たすことは容易に見られる，証明終．

5. さて一般に $\boldsymbol{D}$ を正の K に関して代数的な $\boldsymbol{G}$-因子とすれば，$s\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}$ であるような点 s の集合は，$\boldsymbol{G}$ の部分多様体房をつくることは容易にたしかめられる．補題 1 を証明するために，$\boldsymbol{D}_1$ としてその成分の次数が，4 で与えられた数 N $(=\mathrm{Max}\,N_i)$ より大きいような K-有理的 W-因子を一つとる．$\mathfrak{L}_1$ を $s\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{D}_1$ であるような $\boldsymbol{G}$ の点集合とすれば，上のとり方より $\boldsymbol{G}-\mathfrak{L}_1$ の点 s に対して，$\boldsymbol{D}_1\neq F(s,\boldsymbol{D}_1)$ が成立する．次に $\mathfrak{L}_1$ に属する任意の点 s_1 をとる．この s_1 に対して補題 3 の条件を充たす $\boldsymbol{W}$-因子 $\boldsymbol{D}_2'$ を求める．この時更に $\boldsymbol{D}_2'$ のどの成分の次数も $\{s\boldsymbol{D}_1\}$ をいう代数的因子族のどの成分より次数が大きくなるようにとつておく．そうすれば $\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2'$ に対しては $s_1\boldsymbol{D}_2\neq\boldsymbol{D}_2$ が成立し，且つ $\mathfrak{L}_1$ の点 s に対しても $s\boldsymbol{D}_2\neq\boldsymbol{D}_2$ が成立するから，$s\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{D}_2$ をみたす $\boldsymbol{G}$ の点のつくる部分多様体房 $\mathfrak{L}_2$ は $\mathfrak{L}_1$ の真部分集合になる．以下此の操作を有限回繰返すことにより，補題 1 の条件を充たす $\boldsymbol{W}$-因子 $\boldsymbol{D}$ を構成することができる．

註

1) $\boldsymbol{W}$ が擬似多様体であるとは，$\boldsymbol{W}$ とある適当な擬似多様体 $\boldsymbol{W}'$ との間に 1 対 1 双正則な双有理変換が存在することをいう．

2) $s\tilde{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2$ を $|\boldsymbol{T}|$ に含まれる因子 $\boldsymbol{D}_1$ と，含まれない因子 $\boldsymbol{D}_2$ による分解とすれば，$F(s,\boldsymbol{D})=\boldsymbol{D}_2$.

3) $F(s,\boldsymbol{D})=F(t,\boldsymbol{D})\Rightarrow s=t$ の成立すること．

4) 射影空間内のサイクルに対しては，一つの齊次型式が対応する (associated form). その型式の係数を一つの射影空間の点と考えて Chow-点と呼ぶ．[6] 参照．

5) 松阪 [4] 参照．

6) Zariski の基本定理については，例えば Weil [7] 第 9 章，第 3 節，或いは Zariski [9] 参照．

7) 例えば Artin [1] 参照．

8) そのような条件をみたす $\boldsymbol{H}_m$ の存在については，例へば Nishi-Nakai [5] 参照．

文献

[1] Artin, E., Galois theory, Notre Dame, 1947.
[2] Barsotti, L., A note on abelian varieties, Rend. Cir. Mat. di Palermo, 2, 1953.
[3] Chow, W-L., will appear soon.
[4] Matsusaka, T., Some theorems on abelian varieties, Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ., 4 (1953).
[5] Nishi, M. and Nakai, Y., On the hypersurface sections of algebraic varieties embedded in a projective space, Mem. Coll. of Sci. Univ. of Kyoto, 29 (1955).
[6] van der Waerden, B.L., Einführung in die algebraische Geometrie, Springer, Berlin, 1939.
[7] Weil, A., Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Colloq. Pub., 29 (1946).
[8] Weil, A., On the projective embedding of abelian varieties, will appear soon in memorial number of Lefschetz.
[9] Zariski, O., Foundations of a general theory of birational correspondences, Trans. Amer. Math. Soc., 53 (1943).

(中井喜和記)

山崎圭次郎，整数論における fibre space について

従来の代数的整数論は，代数体の構造或は構成の理論という形をとつていた．ところで代数体と類似の性質をもつ 1 変数代数関数体というものは，代数曲線上の有理関数全体の体という意味をもつており，そこでは幾何学的取扱いができるのである．代数幾何学が長足の進歩をとげつつある今日，形式上の類似という幾分狭い観点ではあるが，代数的数の理論に代数関数の理論と類似の幾何学的方法を導入する試みがなされてもよいであろう．

この小文の内容は，まず代数体 k の有限素点全体を適当に変じて代数曲線の類似物 $\bar{S}(k)$ を構成し，k の元を $\bar{S}(k)$ で定義され 1 の冪根を値とする関数として実現し，さらに $\bar{S}(k)$ 上の 1 の冪根の群 W を構造群とする fibre space の一つ一つがちようど k のイデアル類に対応するという事実を示すことにある．このことは Weil [1] が代数幾何学で行つたことの類似である．

しかしながらこれらのことは，代数体に常数体に相当するものがないという事情から，もつぱら乗法的に扱わざるを得なかつた[2]．この点に関しては，その後 faisceau の概念の利用によつて加法的処理も同時にできるようになり，その観点を進めて，一般に Kronecker の意味で高次元 (代数体は 1 次元) の対称をも扱えるようになつたと思われる．そして fibre space の概念も，各点における fibre が同型でないものに拡張されることが

必要になつて来た．

しかしこれについては他の機会にゆずつて，ここでは会議における報告の大部分を占めた [2] の内容の概説にとどめることにする．

1. k を任意の代数体として，$S(k)$ を k のすべての有限素点の集合とする．k が有限次のときは $S(k)$ に最も弱い T_1 位相を入れるが，もし k が無限次ならば，k_λ ($\lambda \epsilon \Lambda$) を k のすべての有限次部分体を動かして，自然連続写像 $S(k_\lambda) \to S(k_\mu)$ (ただし $k_\lambda \supset k_\mu$) に関する射影極限として位相空間 $S(k)$ を考える．以上は一般の記号 $S(k)$ の説明であるが，今後有限次の代数体 k を固定する．

今1の冪根全体の作る群 W に0と記号 ∞ を加えた集合を $\overline{W}$ と書く．$\overline{W}$ には最も弱い T_1 位相を入れるが，さらに次の新しい演算も導入する：$\infty\infty=\infty$, $0^{-1}=\infty$, $\infty^{-1}=0, \zeta\infty=\infty\zeta=\infty$ ($\zeta \epsilon W$). $0\infty, \infty 0$ は定義しない．

補題． K をすべての1の冪根を含む代数体とし，$K(p)^*$ によつて K の有限素点 p に関する K の剰余類体の乗法群を表わす．そのとき任意の $c \epsilon K(p)^*$ に対して $\iota_p(c)$ の p を法とする剰余類が c 自身となるような同型 $\iota_p: K(p)^* \to W$ が唯一つ存在する．

この補題を $k(W)=K$ に適用して，任意の $f \epsilon k^*$ と $p \epsilon S(k(W))$ に対して $f(p) \epsilon \overline{W}$ を次のように定義する：(ただし $|\ |_p$ は p を代表とする賦値を，$\bar{f}$ は f の p を法とする剰余類をそれぞれ意味する．)

$$f(p)=\begin{cases} 0 & |f|_p<1 \text{ のとき,} \\ \infty & |f|_p>1 \text{ のとき,} \\ \iota_p(\bar{f}) & |f|_p=1 \text{ のとき.} \end{cases}$$

次に，もしすべての $f \epsilon k^*$ について $f(p)=f(q)$ ならば p と q は同値であると定義して，この同値関係に関する $S(k(W))$ の商空間を $\bar{S}(k)$ と記す．このとき $\bar{S}(k)$ の位相は最も弱い T_1 位相となるが，対応附け $p \to f(p)$ は各 $f \epsilon k^*$ について $\overline{W}$ に値をとる $\bar{S}(k)$ 上の一つの関数を定める．もし $p \epsilon S(k(W))$ が $p' \epsilon S(k)$ の拡張ならば，p' は p の同値類 $\bar{p} \epsilon \bar{S}(k)$ のみに依存するので，$\bar{p}$ を p' の上にあると呼ぶ．ところで任意の $p' \epsilon S(k)$ の上には有限個の点しか存在せず，それらを互に共役であると呼び，$\bar{S}(k)$ の部分集合でその任意の点に共役な点が再びその集合に属するとき**有理的**という．

2. さてここで一般の定義を述べる．

定義 1. S を位相空間，$R(S)$ を S の空でない開集合で定義された $\overline{W}$ に値をとる関数の集合とする．ここでもし次の5条件が満たされるならば，対 $(S, R(S))$ を **W-variety** という：(ただし $D(f)$ は関数 f の定義域を表わす．)

(1) S の空でない任意の二つの開集合は互に交わる．

(2) 任意の $f \epsilon R(S)$ は恒等的には値 $0, \infty$ をとらない．そして連続でない $f \epsilon R(S)$ は S の空でない或る開集合の上で一定の値をとり，しかも定義された所で値 $0, \infty$ をとらない．

(3) 任意の $f, g \epsilon R(S)$ に対して，或る空でない開集合上 $f(x)g(x)=h(x)$ が定義されて成立するような関数 $h \epsilon R(S)$ が唯一つ存在する．この h を fg と書くとき，$f(x)g(x)$ が定義される限り $fg(x)$ も定義されて両者の値は等しい．

(4) 適当な $e \epsilon R(S)$ をとると，$D(e)=S$ であり，到る所 $e(x)=1$.

(5) 任意の $f \epsilon R(S)$ に対して，適当な $f' \epsilon R(S)$ をとれば $D(f') \subset D(f)$ であり，しかもすべての $x \epsilon D(f')$ について $f'(x)=f(x)^{-1}$.

さらに，代数幾何における如く，W-variety 間の**有理写像**や，適当な条件の下に**直積**などの概念が定義され，**群 W-variety** も考えられる．ここで後に引用される **W-variety** の例を二つあげる．

1) $S=W$, $R(W)=$ すべての有理整数 n についての対応附け $\zeta \to \zeta^n$ の全体 (ただし $\zeta \epsilon W$)．これは群 W-variety でもある．

2) m を k の整因子(無限素点を含んでもよい)として $|m|$ によつて m に含まれる k の有限素点の上にあるすべての $\bar{S}(k)$ の点の集合を表わして，$S=\bar{S}(k)-|m|$, $R(S)=\{f\,;f \epsilon k^*, f\equiv 1 \bmod. m\}$ とする．

3. W-variety 上の fibre space の概念を定義する．

定義 2. Principal fibre W-space は次の諸概念の集まりである：

(1) W-variety B,

(2) W-variety S,

(3) B から S の上への有理写像 π,

(4) B に右から作用する群 W-variety G.

なおこれらに関し次の条件を仮定する：S の適当な開被覆 $\{U_i\}_{i\epsilon J}$ と双有理写像 $\Phi_i: U_i\times G \to \pi^{-1}(U_i)$ ($i \epsilon J$) が存在して，

$$\pi(\Phi_i(x, \xi))=x,$$
$$\Phi_i(x, \xi)\cdot\eta=\Phi_i(x, \xi\eta),$$

ただし $x \epsilon U_i$, $\xi, \eta \epsilon G$ ($i \epsilon J$).

今 W-variety S として2における例2) の W-variety $\bar{S}(k)-|m|$ をとり，群 W-variety G としては同じく例1) の W をとる．このときもし上の定義の条件において U_i がすべて有理的であると仮定できるならば，その principal fibre W-space は**有理的**であるという．そして互に同型なものを類にまとめれば，与えられた $S=\bar{S}(k)-|m|$ について有理的な principal fibre W-space の類全体は通常の位相的な場合と同様に群 $\mathbf{B}(S)$ を作るが，これについて次の事柄が成り立つ．

定理． 群 $\mathbf{B}(S)$ は剰余類群 A_m/S_m に同型である．ただし A_m は m に素な k のすべてのイデアルの群，S_m は $f\equiv 1$ (mod. m) となる元 $f \epsilon k$ で生成されたすべての単項イデアルの群とする．

文　献

[1] A. Weil, Fibre spaces in algebraic geometry, Chicago 大学における講義ノート, 1952.

[2] K. Yamazaki, On fibre spaces in the algebraic number theory, J. Math. Soc. Japan, 7 (1955).

D. Zelinsky，函数体およびその他の多元環のコホモロジー

1. A を体 k の上の，必ずしも有限階でない多元環とし，M を A 両側加群とする．Hochschild [4] はこのような A, M および自然数 n について，n 次元コホモロジー群 $H^n(A, M)$ を定義した．今もし，適当な A 両側加群 M をとれば $M^n(A, M)\neq 0$ となるような自然数 n のうちに最大のものが存在するならば，その最大の自然数を A の次元，くわしくは A の k-次元といい，dim A または k-dim A とかく．また無数の n について，$H^n(A, M)\neq 0$ がなりたつならば $\dim A=\infty$，すべての n, M について $H^n(A, M)=0$ ならば $\dim A=0$ とする．このような定義の下で我々の主定理は次のようにのべられる．

定理． k が任意の体，A が k の任意の拡大体ならば，

a) A の上記の意味での k-次元 k-dim A は，A の k に関する超越次数 tr. deg A/k より小さくない．従つて tr. deg $A/k=\infty$ ならば当然 k-dim A=tr. deg A/k と考えられる．

b) 特に tr. deg A/k が有限ならば，A/k が finitely, separably generated であるとき，またそのときに限つて k-dim A=tr. deg A/k がなりたつ．

以下，この定理の証明のあらましをのべよう．

2. まず二つの補助定理を説明しなければならない．

補助定理 1． 三つの体の列 $A\supset K\supset k$ について，次の不等式がなりたつ．

$$k\text{-}\dim K\leqq k\text{-}\dim A\leqq k\text{-}\dim K+K\text{-}\dim A.$$

証明． 多元環に関する Hochschild のコホモロジー群は，Cartan-Eilenberg [2] の定義によるコホモロジー群の特殊の場合になつている．このことに注意すれば，始めの不等式は直ちに得られる．またあとの不等式は，Eilenberg-池田-中山 [3] から得られる．

補助定理 2． $K=k(x_1, \cdots, x_n)$ が体 k の上の n 変数の有理函数体ならば，k-dim $K=n$ である．

証明． $n=1$ の場合は，直接計算してみれば簡単に証明される．次に変数が n 個よりすくない場合について定理を仮定すれば，まず補助定理 1 のあとの不等式によつて，$\dim K\leqq n$ が得られるが，一方

$$f(u_1, \cdots, u_n)=\prod\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\quad (u_i\in K)$$

が non-cobounding な n-cocycle であることにより，$\dim K\geqq n$ となる．

3. 定理の証明． a) の部分は，補助定理 1 の始めの不等式と，補助定理 2 を組みあわせることによつて明らかである．また，b) の部分についても，もし A が n 変数の有理函数体 $k(x_1, \cdots, x_n)$に関して有限次分離的であるならば，補助定理 1, 2 及び Hochschild [4] によつて，

$$n\leqq k\text{-}\dim A\leqq n+0$$

が得られる．従つてあとは次の二つのことを証明すればよい．

i) A/k が finitely generated であるが，finitely, separably generated ではないならば，k-dim $A=\infty$.

ii) A が k に有限個の元を添加することによつて得られないならば，k-dim $A>$ tr. deg A/k.

i) の証明． 仮定により，A から，k に関して代数的に独立な元 $x_1, \cdots, x_m$ 及び或る適当な元 y をえらんで $K=k(x_1, \cdots, x_m)$ に関する y の最小多項式

$$\varphi(x_1, \cdots, x_m, t)=0$$

にあらわれる各 x_i および t の指数がすべて k の標数 $p\neq 0$ の倍数であるようにできる．そのとき，φ のすべての係数の p 冪根を k に添加して得られる体を G とすれば，$G\otimes_k K(y)$ は radical をもつ可換環になる．このような場合には，Auslander [1] によつて，k-dim $K(y)=\infty$ であるから，補助定理 1 によつて，k-dim $A=\infty$ でなければならない．

ii) の証明． $x_1, \cdots, x_n$ を A/k の一組の transcendence basis とし，$K=k(x_1, \cdots, x_n)$ とおく．補助定理 1 によつて，$(A:K)=\aleph_0$ のとき，k-dim $A>n$ をいえばよい．所が，このような場合には，A を K の上の多元環と考えるとき，我々は $H^1(A, A\otimes_K A)\neq 0$ を証明することができる．これは最も基本的な結果なのであるが，その証明はここでは省略しなければならない．$H^1(A, A\otimes_K A)\neq 0$ ということは，A から $A\otimes_K A$ の中への K-微分であつて，内部微分でないもの δ が存在するということにほかならないが，一方 $\delta_i=\partial x/\partial x_i$ ($x\in K$) という，K から K の中への微分が存在し，δ_i は A から $A\otimes_K A$ の準同型環の中への微分に自然的に延長される．今

$$f(a_1, \cdots, a_{n+1})=(\delta_1(a_1)\cdots\delta_n(a_n))\,\delta(a_{n+1})\quad (a_i\in A)$$

とおけば，f は A から $A\otimes_K A$ の中への non-cobounding な $n+1$ cocycle である．従つて (ii) が証明された．

4. $x_1, \cdots, x_n$ が A/k の transcendence basis であり，$K=k(x_1, \cdots, x_n)$ について $(A:K)=\aleph_0$ ならば，k-dim $A>n$ であることは前にのべたが，実はこの場合には，k-dim $A=n+1$ であることが証明されるのである．このことを用いると，補助定理 2 の，あとの不等式において，実際に等号のなりたたない例を作ることができる．それには，$n=0$, $k=K$ とおき，更に A/k の中間体 K' を $(A:K')=(K':K)=\aleph_0$ となるようにえらべばよい．すなわち，この場合には明らかに

$$1=k\text{-}\dim A<k\text{-}\dim K'+K'\text{-}\dim A=1+1=2$$

となる．

文　献

[1] M. Auslander, On the dimension of modules and algebras III, Nagoya Math. J. (forthcoming).

[2] H. Cartan and S. Eilenberg, Cohomological Algebra, Princeton, 1955.

[3] S. Eilenberg, M. Ikeda and T. Nakayama, On the dimension of modules and algebras I, Nagoya Math. J. 8 (1955), 49-57.

[4] G. Hochschild, On the cohomology groups of an associative algebra, Ann. of Math. 46 (1945), 58-64.

（久保田富雄記）

中山　正，代数数体の cohomology についての予想と，その特別な場合の証明

k を有限次代数体，K を k の有限 Galois 拡大，G を K/k の Galois 群，C_K を K のイデール群とする．そのとき，群 G の C_K を係数とする2次元コホモロジー群 $H^2(G, C_K)$ は，位数 $a=[K:k]$ の巡回群である．$\alpha_{K\,k}$ を $H^2(G, C_K)$ を生成する基本2コサイクルとする．よく知られているように，この基本2コサイクル $\alpha_{K/k}$ の性質から，類体論の主な結果が導かれる．特に Tate の公式

（1）　　$H^n(G, C_K)\cong H^{n-2}(G, Z)$　　$n\in Z$

（ただし Z は自然数の加法群）によつて C_K を係数とするコホモロジー群の決定は，純粋に代数的問題にいいかえられる．さらに (1) の同型対応は，$\zeta^{n-2}\to\alpha_{K\,k}\cup\zeta^{n-2}$ によつて与えられる．さてこの公式を次のように拡張しよう．すなわち，M を任意の有限階 G 加群として，テンソル積 $M\otimes C_K$ (over Z) を作る．そのとき

予想．（2）　$H^n(G, M\otimes C_K)\cong H^{n-2}(G, M)$　($n\in Z$)．かつ，同型対応は，同じく cup 積 $\zeta^{n-2}\to\zeta^{n-2}\cup\alpha_{K/k}$（ただし $(M, C_K)\to M\otimes C_K$ なる pairing に関して）で与えられる．

定理．M による G の整係数表現が 'essentially abelian' (e.a.) ならば，上の予想は成り立つ．

ここに G の整係数表現 $D(\sigma)$ $(\sigma\in G)$ が e.a. とは，(i) $G=1$ ならば，すべての D は e.a.，(ii) $G\neq 1$ で，G のすべての部分群 H の表現に対して，e.a. ということが定義されたとすれば，G の表現 D が Z において

$$\begin{pmatrix} M_1(\sigma) & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & M_s(\sigma) \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値で，各 $M_i(\sigma)$ が，それ自身 Abel 表現であるか，または或る部分群 H_i の e.a. 表現よりの誘導表現の直和因子となつている場合に，G の表現 D を e.a. という．

証明は簡単ではない．元来 Tate の公式 (1) の証明は

$$(3)\quad \begin{cases} 0\to C_K\to A\to B\to 0 & \text{(split)} \\ 0\to B\to A'\to Z\to 0 & \text{(split)} \end{cases}$$

なる exact sequence で，

（4）　$H^n(G, A)=H^n(G, A')=0$　$(n\in Z)$

なるものを構成し，$\delta^*\cdot\delta^*:\ H^{n-2}(G, Z)\cong H^n(G, C_K)$ を得，かつ $\delta^*\cdot\delta^*$ が $\alpha_{K\,k}$ による cup 積で表示されることを示すのである．よつて，任意の G 加群 M に対して，(3) より

$$(3')\quad \begin{cases} 0\to M\otimes C_K\to M\otimes A\to M\otimes B\to 0 \\ 0\to M\otimes B\to M\otimes A'\to M\to 0 \end{cases}$$

なる exact sequence を作るとき，(4) より

(4′)　$H^n(G, M\otimes A)=H^n(G, M\otimes A')=0$　$(n\in Z)$

が証明されるならば，Tate の定理と全く同様に (2) が証明されるのである．

補題　有限階 G 加群 M に関して，M による G の表現が e.a. であれば，(4) より (4′) が導かれる．

補題を証明するには，C_K の連結成分 D_K の構造に関する細かい性質を必要とする．

［追記］　最近この予想が任意の $[G]$-torsion free の G 加群 M に対して成り立つことが証明された．証明の方法は全く代数的である．　　　　（河田敬義記）

第3日　9月12日

会場は東京から日光にうつり，11日（日曜）の日光見物の後，再開された3日目は，会議の山ともいうべき日であつた．研究方法は固有の整数論的方法から代数幾何学的方法へとうつり，殊に虚数乗法論の展開が中心題目であつた．

午前は，9時―12時，座長：E. Artin 教授

志村五郎，On complex multiplications.（40分）．

谷山　豊，Jacobian varieties and number fields.（40分）．

A. Weil, Generalization of complex multiplication.（50分）．

この後，次の short communications が行われた．

稲葉栄次，On cohomology groups in a field which is complete with respect to a discrete valuation.

池田正験，Cohomology theory for algebras.

午後は，14時―16時30分，座長：A. Weil 教授

M. Deuring, A theorem and a conjecture on principal ideals.（50分）．

佐武一郎，On Siegel's modular functions.（40分）．

K. G. Ramanathan, Units of fixed points in involutorial algebras.（30分）．

志村氏の講演は，代数幾何的な立場からの虚数乗法論の一般化であり，その結果から Kronecker の合同式を代数幾何の言葉でいい表わし，さらに Abel 多様体の整数論的な性質を類体論と結びつけるものである．谷山氏の講演は，上述の志村氏の場合より問題は特殊化されるが，古典的虚数乗法論，虚4次体上の不分岐 Abel 拡大体の構成に関する Hecke の理論を特別の場合として含む理論を展開し，Abel 多様体の ζ 函数に関する Hasse の予想を解決した．Weil 教授の講演は，第1日の講演でのべられた予想を，さらに詳しく説明し，一般的立場からこれらを総括した．この三幅対によつて，問題に一つの結着がつけられ，次に進むべき方向が示されたといえよう．

Deuring 教授の演題は，上記のように'単項イデアル定理'であつたが虚数乗法の予想外の進展のために予

定を変更され，虚数乗法を有する楕円函数体のζ函数を表現する量指標の conductor の成分となる素イデアルについて論ぜられた．この講演には活溌な質問が発せられた．佐武氏の講演は多様体の概念を拡張して $\mathfrak{V}$-manifold を導入し，Siegelのモジュラー函数を基本領域のコンパクト化したものの上の有理型函数として取り扱おうとするものである．Ramanathan 教授によつて，Siegel 自身も別の観点から同じ問題を扱つたことが伝えられた．Ramanathan 教授の講演は，2次形式の単数群に関する同教授の業績の集大成で Siegel の結果の拡張という方向への一段落を示すものである．この拡張に際しては，Siegel のアイディアを，より複雑な対象に適用する技術がむしろ問題である．

小憩の後，16時40分—17時30分，岩沢健吉教授座長のもとに，次の五つの short communications が行われた．(各5分)．

小野　孝，数体上の直交群について．

玉河恒夫，Epstein の Z-級数の拡張について．

竜沢周雄，総正の代数数体での加法的素数論．

山本幸一，算術的一次変換の理論と，算術級数内の素数に関する Dirichlet の定理の初等的証明への応用

森川　寿，代数多様体上のサイクル．

この夜，虚数乗法論の予想外の進展のため，Weil 教授の発案で19時30分から21時30分まで，虚数乗法論に関する非公式討論会が A. Weil, M. Deuring, E. Artin，谷山豊，志村五郎らの諸氏を中心として，30名ばかり集つて開かれた．虚数乗法について，多くの角度から活発な討論が行われ，いくつかの問題が提出された．

志村五郎，虚数乗法について

1. 虚2次体上の類体の理論が楕円函数の虚数乗法によつて書き表わされるということはよく知られている．M. Deuring はこの理論を純代数的に取り扱つたが，それは当然代数幾何学的にいい表わされることである．すなわち，楕円函数に関する Kronecker の合同関係式を代数幾何学の言葉でいい表わすことができる．さらに高次元の場合を考えれば，Abel 多様体に関する或る合同関係を得るがそれから我々は，Abel 多様体の整数論的な性質を類体論と結びつけることができる．これらについての考え方と結果をのべるのを目的とする．

2. $\mathfrak{o}$ を discrete 賦値環，k を $\mathfrak{o}$ の商体，$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{o}$ の最大イデアル，$\kappa=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ とする．V を射影空間 P^N 内の k 上に定義された代数多様体，$\mathfrak{A}$ を，V のすべての点で0になり，係数が $\mathfrak{o}$ の中にある多項式全体とする．今，方程式系 $\bar{F}(X)=0$ ($F\in\mathfrak{A}$, $\bar{F}$ は F mod. $\mathfrak{p}$ を表す) を考えると，これは κ 上に定義される一つの代数的集合を定める．それを $\bar{V}$ とかく．$\bar{V}$ は reducible であることもあるが，それが一つの代数多様体である時，$\bar{V}$ を V から reduction modulo $\mathfrak{p}$ で得た多様体とよぶ．特に，k で定義された Abel 多様体 A について，$\bar{A}$ がまた (κ 上の) Abel 多様体である時，A は $\mathfrak{p}$ に関して defect をもたないという．k が有限次代数体の場合には，k 上の Abel 多様体は，有限個を除いて残りの，k の素因子に関して defect をもたないことが証明できる．A, B を k 上の Abel 多様体で共に $\mathfrak{p}$ に関して defect がないとする．λ を A から B への準同型写像，T を λ の graph とする．しからば $\bar{A}$ から $\bar{B}$ への準同型写像で，その graph が T から red. mod. $\mathfrak{p}$ で得られる多様体であるもの $\bar{\lambda}$ が存在する．特に $A=B$ の時，対応 $\lambda\to\bar{\lambda}$ は，A の k 上に定義される自己準同型全体の環から $\bar{A}$ の自己準同型環の中への同型を与える．

3. k を一つの体，A を k 上に定義された n 次元 Abel 多様体，K を $2n$ 次の代数体，R を K の全整数環とする．今，R から，A の自己準同型環の中への同型 ι があつたとする．その時，Abel 多様体 A に，同型 ι を一緒に組合せた概念 (A,ι) を，R を作用域にもつ Abel 多様体といい，A 及び自己準同型 $\iota(\mu)$ がすべての $\mu\in R$ について k で定義されている時，(A,ι) は k で定義されているという．(A,ι), (A',ι') を共に R を作用域にもつ Abel 多様体とする．R のイデアル (0 イデアルでないとする) $\mathfrak{a}$ に対して次の条件 i)—ii) をみたす A から A' への準同型 λ が存在する時，(A',ι') を (A,ι) の $\mathfrak{a}$-transform，λ を (A,ι) から (A',ι') への $\mathfrak{a}$-multiplication という．

i) すべての $\mu\in R$ について，$\lambda\iota(\mu)=\iota'(\mu)\lambda$.

ii) x が A/k の generic point ならば $k(\lambda x)$ は，μ が $\mathfrak{A}$ に含まれる時の $k(\iota(\mu)x)$ すべての合併体である．

さて，$k, \mathfrak{p}, \kappa$ は 2. における通りとし，(A,ι) を k 上に定義された，R を作用域にもつ Abel 多様体とし，A は $\mathfrak{p}$ に関して defect をもたないとする．しからば，red. mod. $\mathfrak{p}$ によつて，κ の上に定義された Abel 多様体 $\bar{A}$ を得る．今，$\bar{\iota}$ を，$\bar{\iota}(\mu)=\overline{\iota(\mu)}$ で定義すると，一つの κ 上に定義された，R を作用域にもつ Abel 多様体 $(\bar{A},\bar{\iota})$ が得られる．以後 (A,ι) を単に A とかく時 $\bar{A}$ は $(\bar{A},\bar{\iota})$ を意味するものとする．

4. 以上の概念によつて，Kronecker の合同関係式は次の定理として書き表わされる．

定理 1. Φ を虚2次体，R をその全整数環，E を，R を作用域にもつ種数1の代数曲線とし，E は Φ を含む有限次代数体 k で定義されているとする．$\mathfrak{p}$ を R の素イデアル，$\mathfrak{P}$ を k における $\mathfrak{p}$ の一つの素因子，E は $\mathfrak{P}$ に関し defect をもたないとし，E から red. mod. $\mathfrak{P}$ で得られる Abel 多様体を $\bar{E}$ とする．しからば

1) $\bar{E}^{N\mathfrak{p}}$ は $\bar{E}$ の $\mathfrak{p}$-transform である．

2) $\pi\bar{t}=\bar{t}^{N\mathfrak{p}}$ $(\bar{t}\in\bar{E})$ で定まる $\bar{E}$ から $\bar{E}^{N\mathfrak{p}}$ への写像 π は $\mathfrak{p}$-multiplication である．

この定理から容易に，虚2次体上の類体の相互律を一般類体論を使わずに導くことができる．また同様な考え方にそつて，Führer が2と素な場合の分岐を調べるこ

とができる．

5. 上の定理を高次元に拡張することを考える．K, R, (A,ι) は 3. における通りとし，(A,ι) は，K を含む或る有限次代数体 k で定義されているとする．さらに k は有限体 Q の Galois 拡大であるとし，その Galois 群を G と記す．K に対応する G の部分群を H とする．今 $\mu\in R$, $\iota(\mu)=\mu_0$ として，写像 μ_0 の微分 $\delta\mu_0$ を考えると，これは，A の次数1の第1種微分形式全体の作る(n 次元)線型空間の線型変換を与える．そこで G の n 個の要素 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ を適当にえらんで，すべての $\mu\in R$ に対して，$\mu^{\sigma_1},\cdots,\mu^{\sigma_n}$ が $\delta\mu_0$ の固有値を与えるようにできる．Coset の組 $(H\sigma_1,\cdots,H\sigma_n)$ は (A,ι), k によつて定まる．さて，

$$H_0=\{\sigma\mid\sigma\in G,\ (A^\sigma,\iota^\sigma)\text{ は } R \text{ のあるイデアル } \mathfrak{a} \text{ について } (A,\iota) \text{ の } \mathfrak{a}\text{-transform}\}$$

とおく．ここで ι^σ は $\iota^\sigma(\mu)=\iota(\mu)^\sigma$ で定義する．このように H_0 を定めると，H_0 は G の部分群であつて，しかも，

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{-1}H=\sum_{j=1}^{s}H_0\tau_j$$

となる G の要素 $\tau_1,\cdots,\tau_s$ が存在する．H_0 に対応する k の部分体を K_0 とすると $[K_0:Q]=2s$ である．さて Abel 多様体 A に関して次の合同関係を得る．

定理 2. $\mathfrak{p}$ を K_0 の絶対1次の素イデアル，$N\mathfrak{p}=p$, $\mathfrak{P}$ を k における $\mathfrak{p}$ の素因子とし，A は $\mathfrak{P}$ に関して defect をもたないとする．しからば $\mathfrak{p}^{\tau_1}\cdots\mathfrak{p}^{\tau_s}$ は K のイデアルになり，次の 1)—2) が成立つ．$\bar{A}$ は A から red. mod. $\mathfrak{P}$ で得られる Abel 多様体を表わす．

1) $\bar{A}^p$ は $\bar{A}$ の $\mathfrak{p}^{\tau_1}\cdots\mathfrak{p}^{\tau_s}$-transform である．

2) $\pi\bar{t}=\bar{t}^p$ $(\bar{t}\in\bar{A})$ で定まる $\bar{A}$ から $\bar{A}^p$ への写像 π は $\mathfrak{p}^{\tau_1}\cdots\mathfrak{p}^{\tau_s}$-multiplication である．

この定理を使つて次の結果を得る．

定理 3. 記号 K, k, K_0, $\tau_1,\cdots,\tau_s$ は上の通りとして，次の 1)—2) が成立つ．

1) k は K_0 上の或る類体 $K_{(1)}$ を含む．$K_{(1)}$ は類群

$$H_{(1)}=\{\mathfrak{a}\mid K \text{ において } \mathfrak{a}^{\tau_1}\cdots\mathfrak{a}^{\tau_s}\sim 1\}$$

に対応する．

2) $\mathfrak{m}$ を R のイデアル，t を A の点で

$$\iota(\mu)t=0 \iff \mu\in\mathfrak{m}$$

をみたすものとする．(そのような A の点 t は必らず存在する．) しからば，$k(t)$ は K_0 上の或る類体 $K_\mathfrak{m}$ を含む．$K_\mathfrak{m}$ は類群

$$H_\mathfrak{m}=\{\mathfrak{a}\mid K \text{ において } \mathfrak{a}^{\tau_1}\cdots\mathfrak{a}^{\tau_s}\sim 1 \pmod{\mathfrak{m}}\}$$

に対応する．

この結果は次の点で不明確である．すなわち，単にこれだけでは，K_0 が K と $\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}$ ばかりでなく，A のとり方にも関係するかも知れない．それ故，体 K_0 を K と $\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}$ のみで書き表わすことが望ましい．A が単純 Abel 多様体で，また $\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}$ が或る条件をみたせばそのようなことができる．そのような条件は，次の谷山による講演の中で述べられるであろう．簡単な場合として K が有理数体の Galois 拡大の時には $\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}$ の適当な条件の下に $K=K_0$ となる．

谷山　豊，Jacobi 多様体と数体[1)]

§1. 緒言.

虚2次体上の類体はすべて，虚数乗法を持つ楕円函数のモズルと，周期の等分値とにより生成され得るというのが，古典的な虚数乗法論の主要な結果である．所で，この理論の，より高次の体への一般化を試みたものとしては，これまで，Hecke [2], [3] の理論があるにすぎない．ここでは，此等の理論を特別の場合として含む，一般的な虚数乗法論を作ることを目標とする．

一方，代数体上定義された代数曲線の ζ-函数に対し，Hasse は，それが全複素平面で有理型で，普通の型の函数等式を満すであろうと予想した．この予想は，$ax^m+by^n+c=0$ という形の方程式で定義される曲線に対しては Weil [8] により，虚数乗法を持つ楕円曲線に対しては Deuring [1] により，それぞれ肯定的に解決された．ここでは，上の理論の応用として虚数乗法を十分多く持つ曲線及び Abel 多様体に対し，此の予想を証明する．

§2. 準備[2)].

A を g 次元 Abel 多様体，$\mathfrak{A}(A)$ を A の endomorphism の環，$\mathfrak{A}_0(A)$ を，$\mathfrak{A}(A)$ の係数環の，有理数体への拡大により得られる algebra とする．$\mathfrak{A}(A)$ の元は，A の1次第1種微分の空間の1次変換を引き起すから，此の空間の基底 $\omega_1,\cdots,\omega_g$ を用いて，$\mathfrak{A}(A)$ を逆表現することが出来る．$S(\mu)$, $\mu\in\mathfrak{A}(A)$ を，此の逆表現の行列とする．今以上すべてのものが，有限次代数体 k の上で定義されているとする．$\mathfrak{P}$ を k の素イデアルとし，此等のものを mod. $\mathfrak{P}$ で reduce して得られるものを，対応する記号の上に ～ をつけて表わすことにする．

補助定理 1. ほとんどすべての(つまり有限個を除く) $\mathfrak{P}$ に対し，$\tilde{A}$ は Abel 多様体で，$\mu\to\tilde{\mu}$ は，$\mathfrak{A}(A)$ から $\mathfrak{A}(\tilde{A})$ の中への同型写像であり，又 $\tilde{\omega}_1,\cdots,\tilde{\omega}_g$ は $\tilde{A}$ の1次第1種微分の空間の基底で，それによる $\mathfrak{A}(\tilde{A})$ の逆表現を $\tilde{S}(\tilde{\mu})$ と書けば，$\widetilde{S(\mu)}=\tilde{S}(\tilde{\mu})$.

此の補助定理の中で除かれた素因子 $\mathfrak{P}$ を，A の例外素因子という．以後 mod. $\mathfrak{P}$ で考えることは，例外でない $\mathfrak{P}$ に限ることにし，一々断らない．'ほとんどすべての' という形容詞も省略することがある．

仮定 1. 以後，$\mathfrak{A}(A)$ が，$2g$ 次の代数体 K の order と同型な環 R を含むと仮定する．

K を含む最小の正規体を $\bar{K}$ と書く．R のすべての元に対し，$S(\mu)$ は，$k\cdot\bar{K}$ において，同時に対角形に変換される．そのとき，

$$S(\mu)=\begin{pmatrix}\mu_1^{\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_1^{\sigma_g}\end{pmatrix},\qquad \mu_1\in K$$

と書ける．σ_i は K から複素数体の中への同型写像で，

特に σ_1 は恒等写像とする．以後 μ と μ_1 を同一視する．

補助定理 2. σ_0 を，K の複素共軛同型とすれば，$\sigma_1, \cdots, \sigma_g, \sigma_0\sigma_1, \cdots, \sigma_0\sigma_g$ は，K から複素数体の中への，$2g$ 個の同型写像すべてである．それ故とくに，A が単純ならば，K は，総実なる g 次の体 K_0 の，総虚な2次の拡大である．

系. k が $\bar{K}$ を含むとき，σ_i の k への接続の一つを再び σ_i で表すことにする．そのとき k の数 β に対して，$N_{k/K}(\beta^{\sigma_1^{-1}}\cdots\beta^{\sigma_g^{-1}})$ のすべての共軛は，その絶対値が $(N\beta)^{1/2}$ である．ここで N は絶対ノルムを表わす．

§3. **Hasse の ζ-函数.**

先ず，R が K の principal order であるとする．R のイデアル $\mathfrak{a}$ に対し，$\alpha a=0$, $\forall\alpha\in\mathfrak{a}$ を満す A の点 a を，A の $\mathfrak{a}$ 分点という．a が，$\mathfrak{a}$ より本当に大きいどんなイデアル $\mathfrak{b}$ に対しても $\mathfrak{b}$ 分点でないとき，本来の $\mathfrak{a}$ 分点という．$\mathfrak{a}$ 分点は $N(\mathfrak{a})$ 個，本来の $\mathfrak{a}$ 分点は $\varphi(\mathfrak{a})$ 個ある．ただし $\varphi(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の Euler 函数．それ故，a を本来の $\mathfrak{a}$ 分点とするとき，σ を，$k(a)/k$ の同型写像とすれば，$a^\sigma=\mu_\sigma a$ なる $\mu_\sigma\in R$ がある．μ_σ を含む mod. $\mathfrak{a}$ での剰余類を $\langle\sigma\rangle$ と書けば，$\langle\sigma\rangle$ は σ により一意に定まり，$\mathfrak{a}$ と素な剰余類である．k はすべての μ の定義体だから，$a^{\sigma\tau}=(\mu_\sigma a)^\tau=\mu_\sigma\mu_\tau a$. それ故，$\sigma\to\langle\sigma\rangle$ は，$k(a)/k$ の Galois 群から，mod. $\mathfrak{a}$ の素剰余類群の中への同型写像を与える．特に，$k(a)/k$ は Abel 拡大である．

さて，x を A の k 上の generic point (以下 G.P. と略す) とする．$\mathfrak{P}$ を k の素因子とする．そのとき，$\tilde{x}\to\tilde{x}^{N\mathfrak{P}}$ は $\tilde{A}$ の endomorphism であるが，仮定1より，それは，R の中に逆像 $\pi_\mathfrak{P}$ を有する．($\tilde{x}^{N\mathfrak{P}}$ は，$\tilde{x}$ の座標の $N\mathfrak{P}$ 乗を座標を持つ点を表わす．) 又，例外素因子と素な k のイデアル $\mathfrak{B}=\mathfrak{P}_1\cdots\mathfrak{P}_r$ に対し $\pi_\mathfrak{B}=\pi_{\mathfrak{P}_1}\cdots\pi_{\mathfrak{P}_r}$ と定義する．

仮定 2. $k\supset\bar{K}$ (§3 のみ).

補助定理 3.[3]

$$(\pi_\mathfrak{B})=N_{k/K}(\mathfrak{B}^{\sigma_1^{-1}}\cdots\mathfrak{B}^{\sigma_g^{-1}}).$$

今，上に考えたイデアル $\mathfrak{a}$ が，K の判別式の2倍と素であるとする．適当な自然数 F を取れば，$k(a)$ は，k 上の，F を法とする Strahl 類体に含まれる．ここで F が $\mathfrak{a}$ で割れるとしてよい．$\sigma(\mathfrak{P})$ を $k(a)/k$ での，$\mathfrak{P}$ の Frobenius 自己同型とすれば，$\widetilde{a^{\sigma(\mathfrak{P})}}=\tilde{a}^{N\mathfrak{P}}=\tilde{\pi}_\mathfrak{P}\tilde{a}$ だから，$\pi_\mathfrak{P}$ は $\langle\sigma(\mathfrak{P})\rangle$ に属する．故に，$\sigma(\mathfrak{B})$ を $k(a)/k$ での，$\mathfrak{B}$ の Artin 記号とすれば，$\pi_\mathfrak{B}\in\langle\sigma(\mathfrak{B})\rangle$. 特に，$k$ の数 β に対し，$\beta\equiv1$ mod. F ならば，$\pi_{(\beta)}\equiv1$ mod. $\mathfrak{a}$. それ故補助定理2の系と補助定理3とより，$\mathfrak{a}$ についての仮定を使えば，此のような β に対しては，

$$\pi_{(\beta)}=N_{k/K}(\beta^{\sigma_1^{-1}}\cdots\beta^{\sigma_g^{-1}}).$$

それ故，$\chi(\mathfrak{B})=\pi_\mathfrak{B}/|\pi_\mathfrak{B}|$ は k の量指標である．

さて，A の，Hasse の ζ-函数は，例外でない $\mathfrak{P}$ に対する $\tilde{A}$ の合同 ζ-函数の無限積として定義される．所が後者は，$\tilde{A}$ の，$\tilde{k}$ 上 f 次の点の個数 N_f から計算される[4]．所が N_f は，A の，$\tilde{\pi}_\mathfrak{P}^f-1$ 分点の個数，故に $N_f=N(\pi_\mathfrak{P}^f-1)$. 以上をまとめて，

定理 1. 仮定1, 2の下に，A の k 上の ζ-函数 $\zeta_A(s)$ は，次のように表わせる．

$$\zeta_A(s)=\Phi(s)\prod_{\mu=1}^{2g}\prod_{i_1\cdots i_\mu}L\left(s-\frac{\mu}{2},\ \chi^{\rho_{i_1}}\cdots\chi^{\rho_{i_\mu}}\right)^{(-1)^\mu}$$

ここで χ は上に定義された量指標，ρ_i は K の $2g$ 個の同型写像で，積は，一定の μ に対しては，ρ_i の，μ 項の組合せすべてにわたる．L は k の L-函数，$\Phi(s)$ は，簡単な形の有理函数で，例外素因子に由来する[5]．

系. C を，有限次代数体 k 上定義された代数曲線で，その Jacobi 多様体が，上の定理の条件を満すものとする．そのとき C の ζ-函数に対しても，Hasse の予想が成立つ．即ちそれは，量指標の L-函数により表せる．

§4. **不分岐拡大体の構成.**

仮定 3. 以後 R は K の principal order とする．

$\bar{K}$ の Galois 群を G とし，K に対応するその部分群を H とする．$\sum_{i=1}^g H\sigma_i\sigma=\sum_{i=1}^g H\sigma_i$ を満す σ 全体の作る，G の部分群を，G^* とする．K^* を，G^* に対応する，$\bar{K}$ の部分体とする．そのとき次の形の分解が成立つ：$\sum_{i=1}^g H\sigma_i=\sum_{j=1}^s \tau_j G^*$. 今，$K^*$ のイデアル $\mathfrak{b}$ に対し，$\Gamma(\mathfrak{b})=\mathfrak{b}^{\tau_1^{-1}}\cdots\mathfrak{b}^{\tau_s^{-1}}$ とおけば $\Gamma(\mathfrak{b})$ は K のイデアルになる．そのとき k の素イデアル $\mathfrak{P}$ で，$N_{k/K^*}=\mathfrak{P}=\mathfrak{p}^f$ なるものに対し，$(\pi_\mathfrak{P})=\Gamma(\mathfrak{p})^f$.

仮定 4. K^* の，ほとんどすべての1次素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し，$\Gamma(\mathfrak{p})$ は，K の，どんな真部分体のイデアルにもならない．

補助定理 4. 以上の仮定が成立てば，A は単純である．又 K^* の1次の $\mathfrak{p}$ の，k における素因子 $\mathfrak{P}$ に対し，$\tilde{A}$ も単純である．従つて $\mathfrak{A}(A)$, $\mathfrak{A}(\tilde{A})$ は共に R に同型である．

補助定理 5. x を k の上の G.P. とする．R のイデアル $\mathfrak{a}$ に対し，A から，或る Abel 多様体 B への準同型 $\lambda_\mathfrak{a}$ で，$k(\lambda_\mathfrak{a}x)=\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{a}}k(\alpha x)$ を満すものがある．此の $\lambda_\mathfrak{a}$，B は同型を除き一意に定り，k 上で定義され得る．そして，$\lambda_\mathfrak{a}A\cong\lambda_\mathfrak{b}A$ は，K で $\mathfrak{a}\sim\mathfrak{b}$ なること，即ち，$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}(\beta)$ なる K の数 β があることと同等である．

$\mathfrak{p}$ を，K^* の1次素イデアル，$\mathfrak{P}$ を k におけるその素因子とすれば，明かに，$\tilde{k}(\tilde{x}^p)=\tilde{k}(\lambda_{\widetilde{\Gamma(\mathfrak{p})}}\tilde{x})$. ただし $p=N\mathfrak{p}$.

ここで，$B=\lambda_\mathfrak{a}A$ として，$\mathfrak{A}(A)$ と $\mathfrak{A}(B)$ との同型対応を，$\lambda_\mathfrak{a}\mu=\mu^*\lambda_\mathfrak{a}$ なる $\mu\in\mathfrak{A}(A)$ と $\mu^*\in\mathfrak{A}(B)$ とを対応させることにより固定する．そのとき，$\mathfrak{A}(A)$ のイデアル $\mathfrak{b}$ の像を $\mathfrak{b}^*$ と書けば，明かに，$\lambda_{\mathfrak{b}^*}\lambda_\mathfrak{a}A\cong\lambda_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}A$.

一方，k の同型写像 σ に対し，A から A^σ への準同型 λ があると仮定する．σ は，$\mathfrak{A}(A)$ から $\mathfrak{A}(A^\sigma)$ への同型 $\bar{\sigma}:\mu\to\mu^{\bar{\sigma}}$ を引き起す．故に，$\mu^{\bar{\sigma}}\to\mu^*$ は，$\mathfrak{A}(A^\sigma)$ の自己同型である．所が，

補助定理 6. 仮定4の下に，$\mathfrak{A}(A)$ の自己同型 Σ に対し，表現 $S(\mu^\Sigma)$ と $S(\mu)$ とが同じ特性根を持てば，

Σ は実は恒等置換である.

系. $S(\mu^{\bar{\sigma}})$ が $S(\mu)$ と同じ特性根を持てば, $\mu^{\bar{\sigma}}=\mu^*$.

ここで,解析的理論を援用しなければならない. Endomorphism 環が R と同型で, 同一の表現 $S(\mu)$ を許容するような,互いに同型でない Abel 多様体を $A_1,\cdots,A_h$ とすれば, Riemann 行列の理論より, A_i の間には, 上への準同型が存在し, さらに, $A_i=\lambda_{\mathfrak{a}_i}A$ と取れる. 今此等の中で, 単因子がすべて1である Riemann 形式を持つものを $A_1,\cdots,A_{h'}$ とすれば, これらも, その中の一つ A により, $A_i=\lambda_{\mathfrak{a}_i}A$ と書けるが, そのとき $\mathfrak{a}_i$ は K のイデアルで, K の, 指数2の実体 K_0 (補助定理2を見よ) へのノルム $\mathfrak{a}_i\bar{\mathfrak{a}}_i$ が, K_0 の狭い意味での主類に属するものの作る, K のイデアル類すべてにわたる. 此のような類の作る群を $\mathfrak{C}$ と書けば, $\mathfrak{C}$ の位類は, それ故 h' である.

簡単のため k/K^* を正規とし, その Galois 群を $\mathfrak{G}$ とする. $\sigma\in\mathfrak{G}$ に対し, $\mathfrak{A}(A^\sigma)$ は R と同型で, 又 A^σ もすべての単因子1なる Riemann 形式を持つから, $A^\sigma\cong\lambda_{\mathfrak{a}(\sigma)}A$ と書け, 此れにより, $\mathfrak{a}(\sigma)$ を含むイデアル類 $[\sigma]$ が一意に定まる. 勿論 $[\sigma]\in\mathfrak{C}$. 又 $\tau\in\mathfrak{G}$ に対し, $A^{\sigma\tau}\cong\lambda^{\tau}_{\mathfrak{a}(\sigma)}\lambda_{\mathfrak{a}(\tau)}A=\lambda_{\mathfrak{a}(\sigma)^{\bar{\tau}}}\lambda_{\mathfrak{a}(\tau)}A$. 所が, τ は, K^* の上の自己同型だから $S(\mu^{\bar{\tau}})$ は $S(\mu)$ と同じ固有値を持つ. 故に補助定理6の系より $\mu^{\bar{\tau}}=\mu^*$, 従つて $\mathfrak{a}(\sigma)^{\bar{\tau}}=\mathfrak{a}(\sigma)^*$, 結局 $A^{\sigma\tau}\cong\lambda_{\mathfrak{a}(\tau)\mathfrak{a}(\sigma)}A$. 故に $\sigma\to[\sigma]$ は, $\mathfrak{G}$ から $\mathfrak{C}$ の中への準同型写像である. その kernel を $\mathfrak{H}$ とし, $\mathfrak{H}$ に対応する, k の部分体を $\hat{K}$ とすれば, $\hat{K}/K^*$ の Galois 群は $\mathfrak{C}$ の部分群と同型, 故に Abel 群である.

x を A の k 上の G.P. とする. $\mathfrak{p}$ を K^* の1次素イデアルとし, $\sigma(\mathfrak{p})$ を, $\mathfrak{p}$ の, $\hat{K}/K^*$ での Frobenius 自己同型とすれば, $\mathfrak{p}$ の, k での素因子 $\mathfrak{P}$ で reduction して, $\widetilde{k}(\widetilde{x^{\sigma(\mathfrak{p})}})=\widetilde{k}(\tilde{x}^{p})=\widetilde{k}(\lambda_{\widetilde{\Gamma}(\mathfrak{p})}\tilde{x})$, 即ち $\widetilde{A^{\sigma(\mathfrak{p})}}\cong\lambda_{\widetilde{\Gamma(\mathfrak{p})}}\widetilde{A}$. $\mathfrak{A}(\widetilde{A})\cong R\cong\mathfrak{A}(A)$ (補助定理4) より, これから, $\Gamma(\mathfrak{p})\in[\sigma(\mathfrak{p})]$. 特に $\sigma(\mathfrak{p})^f=1$ は $\Gamma(\mathfrak{p})^f\sim 1$ と同等. それ故, K^* のイデアル $\mathfrak{b}$ で, $\Gamma(\mathfrak{b})$ が K で単項イデアルになるものすべての作る群を I とすれば,

定理 2. $\hat{K}$ は, イデアル群 I に対する, K^* の類体である.

特に, $\mathfrak{C}$ の各類が, $\Gamma(\mathfrak{b})$ なる形のイデアルで代表されるときは, $[\hat{K}:K^*]=h'$. 此れは, '類方程式' の既約性を意味する.

§5. 分点の体における分解法則.

K^* のイデアル数の系を一つ選び[6], イデアル $\mathfrak{b}$ を表すイデアル数を $\hat{\beta}$ と書く. $\Gamma(\hat{\beta})=\hat{\beta}^{\tau_1^{-1}}\cdots\cdots\hat{\beta}^{\tau_s^{-1}}$ は $\mathfrak{b}$ により1の冪根因子を除き定まり, 従つて, 本質的には, イデアル数の系の選び方によらない. 絶対値を比べれば, $\pi_{\mathfrak{P}}=\varepsilon'\Gamma(\hat{\tilde{\omega}})^f$ がわかる. ただし $\mathfrak{P}$ は k の素イデアル, $\mathrm{N}_{k/K^*}\mathfrak{P}=\mathfrak{p}^f$, $\mathfrak{p}=(\hat{\tilde{\omega}})$, 又 ε' は1の冪根である.

K に含まれる1の冪根の集合を E と書き, A の点 a に対し, $Ea=\sum_{\varepsilon\in E}(\varepsilon a)$ なる, 0次元の cycle を定義する. そして $k(a)_0$ を, k を含み, その上で Ea が有理的になる最小の体とする.

$\mathfrak{a}$ を K のイデアル, a を, A の, 本来の $\mathfrak{a}$ 分点とする. K^* の素イデアル $\mathfrak{p}$ が k で f 次に分解するとする. 一方 f_0 を合同式 $\varepsilon''\Gamma(\hat{\tilde{\omega}})^{f_0}\equiv\varepsilon \bmod .\ \mathfrak{a}$ が成立つ最小の自然数とする. ここに ε'' は1の冪根, $\varepsilon\in E$. 今 F を, f と f_0 との最小公倍数とすれば, $\pi_{\mathfrak{P}}^{F/f}=\varepsilon'^{F/f}\Gamma(\hat{\tilde{\omega}})^F\equiv\varepsilon_2(\mathfrak{a})$, $\varepsilon_2\in E$, だから, Ea は $\pi_{\mathfrak{P}}^{F/f}$ で不変, 故に $\widetilde{Ea}$ は $\tilde{k}$ 上高々 F/f 次, 故に $\tilde{K}^*$ 上高々 F 次である. $\widetilde{Ea}$ の $\tilde{K}^*$ 上の次数は, $\mathfrak{P}$ の $k(a)_0/k$ での分解の次数に等しい. それを F_0 とすれば, それ故 $F_0\leqq F$. 一方定義より, $\tilde{\pi}_{\mathfrak{P}}^{F_0/f}\tilde{a}=\tilde{\varepsilon}\tilde{a}$ なる $\varepsilon\in E$ があるから, $\pi_{\mathfrak{P}}^{F_0/f}\equiv\varepsilon(\mathfrak{a})$. 即ち $\varepsilon'\Gamma(\hat{\tilde{\omega}})^{F_0}\equiv\varepsilon(\mathfrak{a})$. 又 F_0 が f の倍数であることは明かだから $F\leqq F_0$, 故に $F=F_0$. 故に, $\varepsilon'\Gamma(\hat{\beta})\equiv\varepsilon \bmod .\ \mathfrak{a}$, $\varepsilon\in E$ を満すイデアル $(\hat{\beta})$ の作る群を $I_{\mathfrak{a}}$ と書けば,

定理 3. $k(a)_0$ は, k と, イデアル群 $I_{\mathfrak{a}}$ に対する, K^* の類体との合成体である.

系. A が $\hat{K}$ 上で定義されていれば, $\hat{K}(a)_0$ は, $I_{\mathfrak{a}}$ に対する, K^* の類体である.

註

1) 二三の事情のため, 此の題名は内容にそぐわないものになつた. 妥当な題名は, 'Abel 多様体と数体' であろう.

2) 以下に現われる概念の定義, 主要性質については Weil [6], Shimura [5], Hecke [4] その他を見られたい.

3) 補助定理2は此の補助定理を使つて証明される. 従つて此れを先に書いた方が良いかもしれない.

4) Weil [7].

5) R が principal order でないときは, principal order のときに帰着される.

6) 定義は Hecke [4].

文献

[1] M. Deuring, Die Zetafunktionen einer algebraischen Kurven vom Geschlecht Eins, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, (1953), 85-94.

[2] E. Hecke, Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie, Math. Ann., 71(1912), 1-37.

[3] E. Hecke, Über die Konstruktion relativ ABEL-scher Zahlkörper durch Modulfunktionen von zwei Variablen, Math. Ann., 74 (1913), 465-510.

[4] E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehung zur Verteilung der Primzahlen, II, Math. Z., 6 (1920), 11-51.

[5] G. Shimura, Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field, Amer. J. Math., 77 (1955) 134-176.

[6] A. Weil, Variétés abéliennes et courbes algébriques, Paris, 1948.

[7] A. Weil, Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 497-508.

[8] A. Weil, Jacobi sums as 'Grössencharaktere', Trans. Amer. Math. Soc., 73 (1952), 487-495.

(本研究は文部省研究助成金 (昭 29 年) によるものである)

A. Weil, 虚数乗法の拡張

k_0 を tolally real field, $[k_0:Q]=n$ とする. Q は有

理数体．又 k を totally imaginary な k_0 の 2 次拡大体とする．もちろん $[k:Q]=2n$ となる．k の複素数体の中への isomorphism は $2n$ 個ある．それを $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{2n}$ とかこう．これらは二個ずつ互に複素共軛の関係にある．今その中から n 個の isomorphism $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_n$ を σ_i と σ_j とが互に複素共軛にならないように (for all $i, j=1, 2, \cdots, n$) 選び出す．そのような選び出し方は全部で 2^n 通りある．σ_i の複素共軛を σ_i' とかく．すなわち，$\{\sigma_1, \cdots, \sigma_n, \sigma_1', \cdots, \sigma_n'\}=\{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{2n}\}$.

さて次に体 k の中の module を一つとつて，それを m とかく．ただしここで module というのは，k の或る整数の環 R のイデアルのことをいう．そして m の数 μ に対して，複素 n 次元空間 C^n の点 $P(\mu)=(\sigma_1(\mu), \sigma_2(\mu), \cdots, \sigma_n(\mu))$ を対応させるこのような点の全体 $\{P(\mu)|\mu \in m\}$ は C^n の中の discrete な subgroup P をつくり，C^n/P が complex torus になるのは明らかだが実は C^n/P はさらに abelian variety になる．

以下その理由：一般に複素 n 次元空間 C^n の中の $2n$ 個の生成元をもつ格子群 D に対して，C^n/D が abelian variety になるための，必要かつ充分な条件は，C^n の上に次の性質 1), 2), 3) をもつ real valued, real linear form $E(x,y)$ が定義できることである．

1)　$E(x,y)=-E(y,x)$.

2)　$D \ni x, y$ のとき $E(x,y)$ は整数値をとる．

3)　$E(ix,y)$ は x, y の正値対称実双 1 次形式である．

この C^n/P の場合には，そのような実双 1 次形式 $E(x, y)$ を次のようにして構成できる．k は totally real field k_0 上の totally imaginary な 2 次拡大体だから，$k=k_0(\sqrt{-\eta})$ と書ける．ただし η は k_0 の総正な一つの元．$\sigma_i(\sqrt{-\eta})$ はもちろん純虚数であるが，なお $\Im(\sigma_i(\sqrt{-\eta}))>0$ $(i=1, \cdots, n)$ が成りたつように η を選ぶことができる．そこで C^n 上の実双 1 次形式 $E(x,y)$ を，

$$E(p(\mu), p(\mu'))=N \quad \mathrm{Tr}(\sqrt{-\eta}\,\mu\bar{\mu}') \qquad (*)$$

が，m の勝手な二元 μ, μ' に対して成立するようにきめる．ここで Tr は k/Q の trace，$\mu \to \bar{\mu}$ は k/k_0 の (non-trivial な) 自己同型，N は適当な正整数で $E(p(\mu), p(\mu'))$ の値が $\mu, \mu' \in m$ に対してつねに整数になるように定めたものである．この関係 (*) によつて C^n 上の実双 1 次形式 $E(x,y)$ が一意的に決定されるが，その $E(x,y)$ が上記の条件 1), 2), 3) を充していることはすぐ確かめられる．証明はおしまい．以後 C^n/P を A とかく．蛇足を一つ．$k=k_0(\sqrt{-\eta})$ なる η は勿論 unique にはきまらぬ．だが，$k_0(\sqrt{-\eta})=k_0(\sqrt{-\eta'})$ であれば $\eta'/\eta=\xi^2$, $\xi \in k_0$ である．又 $k=k_0(\sqrt{-\eta})$ でかつ，$\Im\{\sigma_i(\sqrt{-\eta})\}>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ なる η も unique にはきまらぬ．だが，η と η' とがこの条件を充していれば $\eta'/\eta=\xi^2$, $\xi \gg 0$ (総正)，$\xi \in k_0$ である．又 η を $k=k_0(\sqrt{-\eta})$, $\eta \gg 0$ になるように与えたとき，条件：$\Im(\sigma_i(\sqrt{-\eta}))>0$ $(i=1, \cdots, n)$ によつて $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ の (2^n 個の可能性の中の) 一組をきめることができる．蛇足はおしまい．

さて，上のようにして abelian variety $A=C^n/P$ が "体 k/k_0", "module m", "$\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ の一組" なる三種類の材料から組立てられたが，ここで module m をそれと同じ class にある他の module $m'=m \cdot \rho$ $(\rho \in k)$ でおきかえても同型な abelian variety が得られることは明らかであろう．

さて Dedekind の notation で $R=m:m=\{\rho|\rho \in k, \rho m \subset m\}$ とおいてやると，R は k の ring をつくる．

そしてこの R の元 μ は自明な方法で A の endomorphism をひきおこす．すなわち $\mathfrak{A}(A) \supset R$ と考えられるが，ここで $R=\mathfrak{A}(A)$ になるかどうかを考えてみる．(ただし $\mathfrak{A}(A)$ は A の endomorphism の全体のつくる ring をあらわす．) もし k_0 が totally real subfield k_0' をふくみ，k_0' の一つの totally imaginary な 2 次拡大体 k' があつて，$k=k' \cdot k_0$ となつているときは，$m, \sigma_1, \cdots, \sigma_n$ の選び方によつては A は $A_1 \times \cdots \times A_1$ の形になるだろう．そのときは $\mathfrak{A}(A)$ は $\mathfrak{A}(A_1)$ の上の行列環になり，したがつて R とは一致しない．しかし，このような場合でなければ，すなわち $\eta\xi^2=\eta_1$ が k_0 の部分体 k_0' を生成するような総正数 ξ が存在せぬと仮定するならば，$R=\mathfrak{A}(A)$ になることが証明されるのである．

いろいろな話をならべたが，さて最も essential で最も interesting なのは，先日述べた algebraic valued Größencharacter との関係である．

体 k と modul m と $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ とから上のようにしてつくつた abelian variety の ζ-函数を，谷山の定理で L-函数の積としてあらわしたとき，その L-函数にあらわれる (A の定義体 k' の—これは複素数体に入つていると考える—) $2n$ 個の Größencharacter $\chi_1, \cdots, \chi_{2n}$ は値を体 k の中にとる algebraic valued größencharacter で，しかも互に共軛であり，それらは次のようにしてえられる．

すなわち体 k' の divisor $\mathfrak{f}$ を法とする ideal 群 $G_{k'}(\mathfrak{f})$ から k の乗法群の中への homomorphism

$G_{k'}(\mathfrak{f}) \ni \tilde{\mathfrak{A}} \longrightarrow \chi(\tilde{\mathfrak{A}})$ が存在して，

$$\chi_i(\tilde{\mathfrak{A}})=\chi(\tilde{\mathfrak{A}})^{\rho_i} \qquad (i=1, 2, \cdots, 2n)$$

である．(以下を A の定義体 k' と endomorphism ring の商体 k とが一致しているとおもつてお読み下さい．そうでないと話が通じません．すなわち $k=k'$, したがつて k も複素数体の部分体になります．)

そして，この χ は体 k' $(=k)$ の数 α が適当な divisor $\mathfrak{n}$ $(\mathfrak{f}|\mathfrak{n})$ を法として $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{n}$ ならば

$$\chi(\alpha)=\left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^{\sigma_1^{-1}} \cdots \left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^{\sigma_n^{-1}}$$

になるようなものであろうと予想される．ここで $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ は abelian variety A をつくるときに用いた，$(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ である．

そしてなお k の素点 $\mathfrak{p}$ と χ から，第1日の講演のときのべた方法で，つくつた k の上の無限次 Abel 拡大は A の $\mathfrak{p}$ 冪分点全体を k に添加した体と一致するだろうと思われる．これはきわめてたしからしい．

以上にのべたことは，実は正確ではない．だいたい，$\zeta_A(s)$ にあらわれる χ_i は A の定義体 k' における Größencharacter で，この体は A の endomorphism ring の商体 k とは全然別物である．このように，ここでのべた事柄は非常に不正確だけれども，谷山・志村および私自身の（すなわち A. Weil 自身の）虚数乗法の一般化をつかえば，その正確な formulation は automatically に得られるだろう．

尚上にのべた所では k が totally real field k_0 の totally imaginary quadratic extension の場合であつたが，k が一般の体の場合には，abelian variety の代りに non-complete な commutative algebraic group に関しての虚数乗法論をつくつて，それを用いれば，類似の結果がえられるだろう．

以下はやや，technical な事柄についてのおはなし．

楕円函数の場合には modul j を添加して，curve $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ の最小定義体がえられた．しかし，一般の，abelian varieties の場合には，abelian varieties の全体を一つの algebraic system にまとめる．Modul に相当するものがないから，何か他のことを考えねばならない．（Curve に対する modul の理論すらも存在しない，したがつて jacobian variety に話をかぎつても楕円函数のときのような modul を用いる方法をそのままねるわけにはいかない．）

そこの所は，次の様にすればよい．

Riemann matrix と 1:1 に対応するのは，(abelian variety ではなくて) abelian variety と，それの divisor class ϑ との pair である．ただし，この場合の divisor class とは，divisor の同値類別を同値関係‘$nX\sim mY$ なる n, m が存在すること’によつて，類別したものである．

そこで，今 abelian variety A とそれの divisor class（上にのべた意味での）ϑ とを並立した概念を polarized abelian variety とよぼう．これは，また (abstract) abelian variety A と，それの projective imbedding とを考えあわせたものともいえる．

すなわち，1次元の場合には，(abstract に) 楕円函数体を考えるのでなく，具体的な函数，$\wp(u)$，$\wp'(u)$ を考えることに相当する．ところで，古典的な虚数乗法論において，主役を演ずるのは，$\wp$，$\wp'$，そのままではなくて，Weber の τ 函数

$$\tau(u)=\text{常数}\ \times\begin{cases}\wp(u) & k\neq Q(i),\ Q(\sqrt{-3})\,; \\ \wp^2(u) & k=Q(i)\,; \\ \wp^3(u) & k=Q(\sqrt{-3})\end{cases}$$

であつた．ここで $\wp$ を2乗したり3乗したりしたのは，automorphism

$$\begin{cases}u\Rightarrow \pm u & k\neq Q(i),\ Q(\sqrt{-3}) \\ u\Rightarrow \pm u,\ \pm iu & k=Q(i) \\ u\Rightarrow \pm u,\ \pm\varepsilon u\quad(\varepsilon^3=1) & k=Q(\sqrt{-3})\end{cases}$$

の影響を消すためであつた．

Polarized abelian variety (A,ϑ) においても，その (polarization を保存する) automorphism は有限群になる．そこで (A,ϑ) をその有限群 G で分けてえられる algebraic variety を Kummer variety といおう．それをつくるには，G の元を $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ とするとき 0-cycle $\sum(\varepsilon_i a)$ の Chow point の locus をとればよい．そうすれば，もうこの Kummer variety はもはや non-trivial な automorphism をもたないから，Chow により始められた一般的な方法で，それには，それと birational に equivalent であるようなすべての variety の定義体の中に，最小の定義体がきまつて，それは代数体である．この代数体が，古典的な場合における $k(j)$ の役割をするだろう．

あと，つけたりを二つばかり．

その一つは，話の初めにもどつて，志村や谷山は k の module m として principal order $\mathfrak{o}$ のイデアルだけを採用しているけれども，それではせまい．一般の module (=ring ideal) について一緒に議論しておいた方がよい．さて k と module class $\{m\}$ と $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ が abelian variety A を定め $m:m=R$ が A の endomorphism の環になつたが，Dedekind の terminology をつかうと k の module class には，regular module class と irregular class とがある．Regular module class とは $m:m=R$ の conductor $\mathfrak{f}$ と素なる module m を含む class $\{m\}$ のことで，irregular module class とは，そうでない class のことである．

Regular module class に対する abelian variety の虚数乗法論は，わりにうまくゆくが，irregular module のそれは難点をもつ．虚2次体には，irregular module class をもたない．Dedekind は，irregular module class をもつ体の例を見出したが，それは3次体で，totally real field の totally imaginary quadratic extension でない．

Totally real field k_0 の totally imaginary quadratic extension k の場合で，irregular module class をもつ場合があるだろうか？もしあれば，example を示されたい．又そのときは，regular class に対する abelian variety の虚数乗法論と irregular な場合のそれとの間の違いは，どんな処かが問題となろう．

つけたりの第二は，positive な2次形式との関係についてであるが．それは今夜の informal discussion の際にしやべろう．

（久賀道郎記）

Max Deuring, Singular modulus を持つ楕円函数体の Zeta 函数について

E を有限次代数体 k の上で定義された種数1の代数曲

線とする．k の素因子 $\mathfrak{p}$ を法として E を reduce して得られる代数曲線 $\bar{E}$ がまた種数 1 であるとき，E は $\mathfrak{p}$ に関して defect をもたないという．E が $\mathfrak{p}$ に関して defect をもたないとき，reduce された曲線 $\bar{E}$ の ζ 函数を $\zeta(s,E,\mathfrak{p})$ とし，E の ζ 函数 $\zeta(s,E,k)$ を

$$\zeta(s,\ E,\ k)=\prod_{\mathfrak{p}}\zeta(s,\ E,\ \mathfrak{p})$$

で定義する．ここで，積は，E が defect をもたないようなすべての $\mathfrak{p}$ についてのものである．[1] において，E が虚数乗法をもつているならば，

$$\zeta(s,E,k)=\frac{\zeta_k(s)\zeta_k(s-1)}{L_E\left(s-\frac{1}{2},\ \chi_E\right)L_E\left(s-\frac{1}{2},\ \bar{\chi}_E\right)}$$

となることを示した．ここで，$\zeta_k(s)$ は代数体 k の ζ 函数，χ_E は k の或るイデアル $\mathfrak{m}$ を法として定義された量指標，L_E はその量指標による L 函数を表す．そこで次のような問題が生ずる．即ち，実際に χ_E をその conductor で定義されるように E をとれるか，またその conductor の意味は何かということである．これに対して一つの解答を与えるのがこの講演の目的である．

K を，k を常数体とする楕円函数体とする．$\mathfrak{p}$ を k の素因子として，K を函数体にもつ k 上の代数曲線 E で $\mathfrak{p}$ に関して defect をもたないものが存在するとき，K は $\mathfrak{p}$ に関して defect をもたないという．今 $\mathfrak{p}$ に関して，K を函数体とする曲線 E が defect をもたないとし，

$$\zeta(s,\ K,\ \mathfrak{p})=\zeta(s,\ E,\ \mathfrak{p})$$

とおくと，これは $\mathfrak{p}$ のみに関係して，E のとり方にはよらないことがいえる．K が defect をもつ $\mathfrak{p}$ については種数 0 の，$k/\mathfrak{p}$ 上の ζ 函数を $\zeta(s,K,\mathfrak{p})$ とし，函数体 K の ζ 函数 $\zeta(s,K)$ を

$$\zeta(s,\ K)=\prod_{\mathfrak{p}}\zeta(s,\ K,\ \mathfrak{p})$$

で定義する．ここで積は k のすべての素因子 $\mathfrak{p}$ についてのものである．この $\zeta(s,K)$ について

$$\zeta(s,K)=\frac{\zeta_k(s)\zeta_k(s-1)}{L\left(s-\frac{1}{2},\chi_K\right)L\left(s-\frac{1}{2},\bar{\chi}_K\right)}$$

が成り立つ．ここで χ_K は実際にその conductor を法として定義されている量指標で，その conductor の素因子は，ちようど K が defect をもつような素因子すべてからなる．これらが主要な結果である．

これを示すのに次のように行う．K, K' を同じ不変量 j をもつ k 上の楕円函数体とし，それらの生成元として

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3,\quad y'^2=4x'^3-g_2c^2x'-g_3c^3$$

をみたす $x,\ y,\ x',\ y'$ をとつて，

$$K=k(x,\ y),\quad K'=k(x',\ y')$$

とする．(以下簡単のために $g_2g_3\neq 0$ とする．) $c,\ g_2,\ g_3$ は代数体 k の数であるが，c が k のある数の平方であることが，K と K' が k 上で同型であるために必要十分である．K, K' について次の二つの定理が成り立つ．

定理 1. K が $\mathfrak{p}$ に関し defect をもたないとき，K' が $\mathfrak{p}$ に関し defect をもたないために，$\mathfrak{p}$ が $k(\sqrt{c})$ で分岐しないことが必要十分である．

定理 2. K が $\mathfrak{p}$ に関し defect をもたないとすると

$$\chi_{K'}(\mathfrak{p})=\chi_K(\mathfrak{p})\left(\frac{c}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}$$

が成り立つ．ここで $\chi_K,\ \chi_{K'}$ は $K,\ K'$ から得られる k の量指標，$(c/\mathfrak{p})$ は平方剰余記号である．

さて，K が defect をもつような素因子の積であるような適当なイデアル $\mathfrak{a}$ について次のことがいわれる．K の虚数乗法の作る虚 2 次体 Σ (今はそれを k の部分体とみる) の適当なイデアル $\mathfrak{q}$ が存在して，$\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{q}\mathfrak{a}$ をわらないならば K' は $\mathfrak{p}$ に関し defect をもたず，しかも $\chi_{K'}$ は $\mathfrak{q}\mathfrak{a}$ を法にして定義される．このことが証明されて，更に，任意の ($\mathfrak{a}$ をわらない) 素因子 $\mathfrak{p}$ に対して $\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{q}$ をわらないように K' が作れるならば，χ_K が実際に $\mathfrak{a}$ を法として定義されるわけである．これは証明することができるが，そのようなことをいうために次の lemma が重要である．

Lemma. k を $\Sigma(j)$ を含む代数体，$\mathfrak{p}$ をその素因子とすると，j をその不変量にもつような種数 1 の k 上の代数曲線で，$\mathfrak{p}$ に関し defect をもたないものが存在する．

そのような代数曲線を作るのに $\mathfrak{p}|2, 3$ の場合は面倒であるが，$\mathfrak{p}\nmid 2,\ \nmid 3$ の場合は，曲線として

(1) $y^2=4x^3-3j(j-2^6\cdot3^3)c^2x-j(j-2^6\cdot3^3)^2c^3$

で定義されるものをとる．$\Delta=2^6\cdot3^3j^2(j-2^6\cdot3^3)c^6$ が $\mathfrak{p}$ でわれないように c をとればよい．$\mathfrak{p}\nmid j(j-2^6\cdot3^3)$ ならば $c=1$ でよい．$\mathfrak{p}|j$ のときは $\mathfrak{p}^{3e}\|j$, $\mathfrak{p}|(j-2^6\cdot3^3)$ のときは $\mathfrak{p}^{2e}\|(j-2^6\cdot3^3)$ が証明できるからそれによつて c を適当にとることができる．この j の性質は singular modulus についてのみいえることで，j の $\mathfrak{p}$ 進展開をしらべることにより証明できる．解析的にも証明される．

この lemma と関係のある問題として次のようなものがある．Σ を虚 2 次体，R をその全整数環，K を楕円函数体で R を虚数乗法としてもつものとする．j を K の不変量，K の常数体は $\Sigma(j)$ であるとする．R の $\{0\}$ と異るイデアル $\mathfrak{a}$ に対して，K の部分体 $K^{\mathfrak{a}}$ を

$$K^{\mathfrak{a}}=\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{a}}K^{\alpha}$$

で定義すれば，$K^{\mathfrak{a}}$ もまた楕円函数体でその不変量は j の有理数体上の共軛の一つ j' である．$\Sigma(j)$ は Σ の Galois 拡大であるから，$\Sigma(j)/\Sigma$ の自己同型 σ で $j^{\sigma}=j'$ となるものがある．この σ について，適当な $\Sigma(j)$ の代数拡大 k をとれば，σ が $k\cdot K$ から $k\cdot K^{\mathfrak{a}}$ の上への同型に拡張されることは容易にわかるが，代数拡大 k をとらずに単に σ が K から $K^{\mathfrak{a}}$ の上への同型に拡張できるかというのが問題である．それは，一般にはできない場合もあるが，不変量 j を与えたとき，上の式 (1) をみたす $x,\ y$ をとつて $K=k(x,\ y)$ とおくと (1) における c を適当にとれば，その K について σ が K から $K^{\mathfrak{a}}$ の上への同型に拡張できることが証明される．

文献

[1] Max Deuring, Die Zetafunktion einer algebraischen

Kurve vom Geschlechte Eins. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Jahrgang 1953 Nr. 6.

（志村五郎記）

佐武一郎，Siegel の modular 函数について

$\mathfrak{H}_n$ を $n(n+1)/2$ 次元の symplectic space，すなわち n 次の複素対称行列 $Z=X+iY,\ Y>0$ の空間とし，M_n を $\mathfrak{H}_n$ に作用する Siegel の modular 群とする．商空間 $M_n\backslash\mathfrak{H}_n$ の適当な compact 化を構成することが吾々の目標である．

1. 準備としてまず複素解析多様体の概念を拡張して V-manifold の概念を導入する．

$\mathfrak{V}$ を Hausdorff 位相空間とする．$\mathfrak{V}$ の開集合 U に対して local uniformizing system（略して l. u. s.）$\{\widetilde{U},G,\varphi\}$ とは次のようなものの集りをいう：

$\widetilde{U}$：複素 n-空間 C^n の領域，
G：$\widetilde{U}$ の自分自身への解析的変換の作るある有限群．
φ：$\widetilde{U}$ から U の上への連続写像で $\varphi\circ\sigma=\varphi\ (\sigma\in G)$ であり，その induce する商空間 $G\backslash\widetilde{U}$ から U の上への写像が位相同型となるもの．

$\{\widetilde{U},G,\varphi\}$，$\{\widetilde{U}',G',\varphi'\}$ をそれぞれ U，U' に対する l. u. s.，$U\subset U'$ とする．そのとき，$\widetilde{U}$ から $\widetilde{U}'$ の中への解析的同型 λ で，任意の $\sigma\in G$ に対しある $\sigma'\in G'$ があつて $\lambda\circ\sigma=\sigma'\circ\lambda$，また $\varphi=\varphi'\circ\lambda$ となるものを $\{\widetilde{U},G,\varphi\}$ から $\{\widetilde{U}',G',\varphi'\}$ の中への injection とよぶ．明かに，σ' は σ によつて一意的に定まり，対応 $\sigma\to\sigma'$ は G から G' の中への同型になる．もし λ が $\widetilde{U}$ から $\widetilde{U}'$ の上への解析的同型ならば，対応 $\sigma\to\sigma'$ も G から G' の上への同型となり，λ^{-1} は $\{\widetilde{U}',G',\varphi'\}$ から $\{\widetilde{U},G,\varphi\}$ への injection になる．この場合この二つの l. u. s. は同値であるという．$\{\widetilde{U},G,\varphi\}$ から $\{\widetilde{U}',G',\varphi'\}$ の中への injection の一つを λ とすれば，すべての injection は $\sigma'\circ\lambda\ (\sigma'\in G')$ で与えられることが証明される．

さて，$\mathfrak{V}$ の上に次の条件を満足する l. u. s. の族 $\mathfrak{F}$ が存在するとき，$\mathfrak{V}$ を **V-manifold** という．

(1) $\{\widetilde{U},G,\varphi\}$，$\{\widetilde{U}',G',\varphi'\}\in\mathfrak{F}$，$\varphi(\widetilde{U})\subset\varphi'(\widetilde{U}')$ とすれば，かならず injection $\lambda:\{\widetilde{U},G,\varphi\}\to\{\widetilde{U}',G',\varphi'\}$ が存在する．

(2) $\mathfrak{F}$ に属する l. u. s. によつて uniformize される開集合全体は $\mathfrak{V}$ の開集合の basis になる．

上にのべたことにより，$\mathfrak{V}$ の同一の開集合に対する（$\mathfrak{F}$ に属する）l. u. s. は互に同値であることが判る．

例えば，$\mathfrak{D}$ を C^n の一つの領域，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{D}$ の自分自身への解析的変換からなる不連続群とすれば，商空間 $\mathfrak{G}\backslash\mathfrak{D}$ は一つの V-manifold になる．

V-manifold の上で，微分形式，正則または有理型函数，因子等々の概念が容易に定義される．例えば，$\mathfrak{V}$ 上の函数 f が有理型であるとは任意の l. u. s. $\{\widetilde{U},G,\varphi\}\in\mathfrak{F}$ に対し $f\circ\varphi$ が $\widetilde{U}$ 上の（G 不変な）有理型函数になることである．

2. Siegel の modular 函数は M_n で不変な $\mathfrak{H}_n$ 上の有理型函数であるから V-manifold $\mathfrak{V}_n=M_n\backslash\mathfrak{H}_n$ 上の有理型函数と考えることができる．しかし $\mathfrak{V}_n$ が compact でないために，Siegel は modular 函数 $f(Z)$ を同じ重さをもつ二つの modular form $h_1(Z)$，$h_2(Z)$ の商として表わされるものと定義した．ここに $h_i(Z)$ は無限遠点までこめて正則である，すなわち

$$h_i(Z)=\sum_{\substack{T\geqq 0\\ \text{half-integral}}} a_T\, e^{2\pi i\mathrm{Sp}(TZ)}$$

の形の Fourier 展開をもつものとする．

さて $\mathfrak{V}_n$ に若干箇の低次元の V-manifold を添加して compact な V-manifold $\overline{\mathfrak{V}}_n$ を作り，Siegel の modular 函数を単に $\overline{\mathfrak{V}}_n$ 上の有理型函数として定義することはできないだろうか？ $n=2$ のとき，それが実際可能であることを以下に述べる．

3. M_2 の次のような部分群を考える．

$$\mathfrak{G}=\{\sigma\in M_2;\ \sigma=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & b_{11} & b_{12}\\ a_{21} & \pm1 & b_{21} & b_{22}\\ c_{11} & 0 & d_{11} & d_{12}\\ 0 & 0 & 0 & \pm1\end{pmatrix}\},$$

$$\mathfrak{N}=\{\sigma\in M_2;\ \sigma=\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & s_{22}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\}.$$

$\mathfrak{N}$ は $\mathfrak{G}$ の不変部分群で，商群 $\widetilde{M}_1=\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ は $\mathfrak{H}_1\times C=\{(z_{11},\ z_{12})\}$ の effective な不連続解析変換群と見なされる．$\widetilde{M}_1$ は次のような部分群 $M_1'\ (\cong M_1)$ と不変部分群 $\varDelta$ から合成される．

$$M_1'=\{(z_{11},\ z_{12})\to(\sigma^*(z_{11}),\ (a-\sigma^*(z_{11})c)z_{12});$$
$$\sigma^*=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_1\},$$
$$\varDelta=\{(z_{11},\ z_{12})\to(z_{11},\ \pm z_{12}+g_1z_{11}+s_{12});$$
$$g_1,\ s_{12}：\text{有理整数}\}.$$

$\mathfrak{W}_1=\widetilde{M}_1\backslash\mathfrak{H}_1\times C$ とおけば，$\mathfrak{W}_1$ は $\mathfrak{V}_1=M_1\backslash\mathfrak{H}_1\approx C$ を base space，$\varDelta(z_{11})\backslash C\approx\overline{C}$ を fibre とする fibre space の構造をもつ．ここに $\varDelta(z_{11})$ は $C=\{(z_{12})\}$ の次のような変換群である：

$\varDelta(z_{11})=\{z_{12}\to\pm z_{12}+g_1z_{11}+s_{12};\ g_1,\ s_{12}：\text{有理整数}\}$．

実際，$\mathfrak{W}_1\approx C\times\overline{C}$ であることは容易にわかる．（$\approx$ は二つの V-manifold が homeomorphic でその上の解析函数が同一になることを示す．）

$\mathfrak{W}_1$ は次の方法で $\mathfrak{V}_2$ に接合される．$q\in\mathfrak{W}_1$ を $(z^0_{11},z^0_{12})\in\mathfrak{H}_1\times C$ の class，H_q を (z^0_{11},z^0_{12}) の isotropy 群，$\widetilde{V}_q$ を H_q-不変な (z^0_{11},z^0_{12}) の十分小さい近傍，ψ_q を $\widetilde{V}_q$ から $\mathfrak{W}_1$ の中への canonical map とせよ．$\{\widetilde{V}_q,H_q,\psi_q\}$ は q のある近傍に対する l. u. s. である．$\widetilde{U}_q$ を $\mathfrak{H}_1\times C\times C$ における $(z^0_{11},z^0_{12},0)$ の十分小さい（連結）近傍で

$\widetilde{V}_q\times 0\subset\widetilde{U}_q\subset\widetilde{V}_q\times C$ なるものとする．$\widetilde{M}_1=\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ は $\mathfrak{H}_1\times C\times C$ の次のような変換群と考えることができる．

$$\bar{\sigma}(z_{11},\ z_{12},\ e^{2\pi i z_{22}})=(z'_{11},\ z'_{12},\ e^{2\pi i z'_{22}})$$

$$\Longleftrightarrow \sigma\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ & z_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z'_{11} & z'_{12} \\ & z'_{22}\end{pmatrix}$$

ここに $\bar{\sigma}$ は $\sigma\in\mathfrak{G}$ の mod. $\mathfrak{N}$ の class を表わす．そのとき，$\widetilde{M}_1$ の $(\overset{0}{z}_{11},\overset{0}{z}_{12},0)$ における isotropy 群 G_q は H_q と一致させられる．$\widetilde{U}_q$ を $G_q=H_q$ に関して不変なるようにとる．$(z_{11},\ z_{12},\ w)\in\widetilde{U}_q$ に対して

$$\varphi_q(z_{11},z_{12},w)=\begin{cases}\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ & z_{22}\end{pmatrix} \text{ の } M_2 \text{ に関する class}, \\ \qquad (w=e^{2\pi i z_{22}} \text{ のとき}) \\ (z_{11},z_{12}) \text{ の } \widetilde{M}_1 \text{ に関する class}, \\ \qquad (w=0 \text{ のとき})\end{cases}$$

とおく．(well-defined) このように定義された $\{\widetilde{U}_q, G_q,\varphi_q\}$ を $q\in\mathfrak{W}_1$ のまわりの l.u.s. とし，$p\in\mathfrak{B}_2$ のまわりの l.u.s. は $\mathfrak{B}_2$ におけるそれをそのままとつて $\mathfrak{B}_2\cup\mathfrak{W}_1$ に V-manifold の構造を入れることができる．

4. 次に $\mathfrak{W}_{12}=\Delta(\infty)\backslash C$, $\mathfrak{B}_0=\{p_\infty\}$ とおく．ここに $\Delta(\infty)$ は $C=\{(z_{12})\}$ の変換群で，

$$\Delta(\infty)=\{z_{12}\to\pm z_{12}+s_{12}\}.$$

しからば $\mathfrak{W}_{12}\approx C$，また楕円函数論によつて周知のように，$\overline{\mathfrak{W}}_1=\mathfrak{W}_1\cup\mathfrak{W}_{12}\cup\mathfrak{B}_0$ に適当な V-manifold の構造を入れれば，$\overline{\mathfrak{W}}_1\approx\bar{C}\times\bar{C}$.

$\mathfrak{B}_2$ の compact 化 $\overline{\mathfrak{B}}_2$ は適当な V-manifold の構造を集合論的和 $\quad\overline{\mathfrak{B}}_2=\mathfrak{B}_2\cup\mathfrak{W}_1\cup\mathfrak{W}_{12}\cup\mathfrak{B}_0$ に定義することによつてえられるであろう．

そのためには $\mathfrak{W}_{12}$, $\mathfrak{B}_0$ の点のまわりの適当な uniformizing parameter を定義せねばならない．$\mathfrak{W}_{12}$ の点に対してはこれは上の場合と全く同様に，通常の指数函数だけ使つて，定義できる．しかし p_∞ においては次のような theta-函数を使わねばならない．

$$\vartheta^*_{\mathfrak{m}}(Z)=\sum_{\substack{\mathfrak{g}\equiv\mathfrak{m}\ (\mathrm{mod.}\ 2)\\ \text{primitive}}}{}^{'}\ e^{\pi i Z[\mathfrak{g}]}$$

ここに $\mathfrak{m}$ は mod. 2 で定まる整数ベクトル，右辺の和は $\mathfrak{g}\equiv\mathfrak{m}$ (mod. 2) なる primitive (成分の最大公約数 1) な整数ベクトルで associated (符号を除いて一致する) でないものすべてにわたるものとする．

p_∞ における l.u.s. は次のように構成される．$\widetilde{U}_\infty$ を C^3 における十分小さい ε-球，G_∞ を C^3 の座標の対称置換群，また $(w_1,w_2,w_3)\in\widetilde{U}_\infty$ に対し次のようにおく．

$\varphi_\infty(w_1,\ w_2,\ w_3)\cdots Z=\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ & z_{22}\end{pmatrix}$ の M_2 に関する class,

$$\text{ただし}\quad w_1=\frac{\vartheta^*_{10}(Z)\cdot\vartheta^*_{11}(Z)}{\vartheta^*_{01}(Z)},$$

$$w_2=\frac{\vartheta^*_{01}(Z)\cdot\vartheta^*_{10}(Z)}{\vartheta^*_{11}(Z)},\qquad w_3=\frac{\vartheta^*_{11}(Z)\cdot\vartheta^*_{10}(Z)}{\vartheta^*_{10}(Z)}$$

のとき，

$\varphi_\infty(w_1,\ w_2,\ 0)\cdots(z_{11},\ z_{12})$ の $\widetilde{M}_1$ に関する class,

$$\text{ただし}\quad w_1=e^{\pi i z_{11}}\frac{\vartheta_2(2z_{12}\ ;\ 1,\ 4z_{11})}{\vartheta_3(2z_{12}\ ;\ 1,\ 4z_{11})},$$

$$w_2=e^{\pi i z_{11}}\frac{\vartheta_3(2z_{12}\ ;\ 1,\ 4z_{11})}{\vartheta_2(2z_{12}\ ;\ 1,\ 4z_{11})}\ \text{ のとき},$$

$\varphi_\infty(0,\ w_2,\ 0)\cdots(z_{12})$ の $\Delta(\infty)$ に関する class,

$$\text{ただし}\quad w_2=\frac{1}{e^{2\pi i z_{12}}+e^{-2\pi i z_{12}}}\ \text{ のとき},$$

$\varphi_\infty(0,\ 0,\ 0)=p_\infty$,

ここに ϑ_2, ϑ_3 は elliptic theta function である．また φ_∞ の定義はその G_∞-不変性によつて補うものとする．

こうして定義された V-manifold $\overline{\mathfrak{B}}_2$ が compact であることは容易に証明される．また Siegel の modular 函数が $\overline{\mathfrak{B}}_2$ の上の有理型函数になることもわかる．

K. G. Ramanathan, Involution のある多元環の不動点の単数

1. 問題点の説明． Δ を有理数体 Γ 上の有限階の多元体とし Z を Δ の中心とする．よつて Z は有限次代数体．Δ には involution : $x\to\widetilde{x}$ ($\widetilde{\widetilde{x}}=x$, $\widetilde{x+y}=\widetilde{x}+\widetilde{y}$, $\widetilde{xy}=\widetilde{y}\widetilde{x}$; $x,y\in\Delta$) で $\lambda\in Z$ に対し $\widetilde{\lambda x}=\widetilde{\lambda}\widetilde{x}$ をみたすのがあると仮定する．$A=\mathfrak{M}_m(\Delta)$ を Δ 上の m 次の全行列環とすると $M=(a_{kl})\in A$ に対して $M\to\widetilde{M}=(\widetilde{a}_{lk})$ によつて A に involution が入る．$\mathfrak{o}$ を Δ の一つの order とし，$a_{kl}\in\mathfrak{o}$ なる $M=(a_{kl})$ の全体を $\mathfrak{o}_m$ とかく．$S=\widetilde{S}$ なる $S\in A$ を対称，$S=-\widetilde{S}$ なる S を歪対称とよぶ．これらの S でノルム $\neq 0$ なるものを fix して，$\Gamma(S)=\{U;\ U^{\pm1}\in\mathfrak{o}_m,\ \widetilde{U}SU=S\}$ なる群 (S の単数群) を考察する．目標は次の定理1である．

定理 1. $\Gamma(S)$ は有限個の生成元をもつ．

この結果は [1] ($\Delta=\Gamma$ (有理数体)), [3], [4] ($\Delta=Z$ (代数体)) によつて特殊な場合に知られているが，定理1の証明の基調となる考えは [1] にすでに与えられている．すなわち，discrete 群 $\Gamma(S)$ が不連続に作用するある実 Euclid 空間の領域を適当にとつて，この群の基本領域が有限個の平面で境されることをいうので，Δ を係数とする2次形式に対して reduction theory をつくることに帰せられる．さて，$A=\mathfrak{M}_m(\Delta)$ に対し $\Gamma(A)=\{U;\ U^{\pm1}\in\mathfrak{o}_m\}$ なる群についても，われわれの reduction theory は有効で，次の同様なタイプの結果をうる．

定理 2. $\Gamma(A)$ は有限個の生成元をもつ．

これはすでに [2] で証明されている (その special case については，Minkowski, Humbert, Eichler の仕事がある: [2]) ことであるが，われわれのは幾分 simplify されている．定理2の証明をさきにする．

2. 定理2の証明． $(\Delta:Z)=s^2$, $(Z:\Gamma)=h$ とする．Z の無限素点を3種にわけて，実素点でそこで Δ が不分岐となる (Δ をこの実素点による Z の完備体の上で

考えたとき実数体上の全行列環になる）ものの数を r_1, $\varDelta$ が分岐する（$\varDelta$ が4元数体上の全行列環になる）ものの数を r_3, そして虚素点（$\varDelta$ は複素数体上の全行列環）の数を r_2 とする．従つて $h=r_1+r_3+2r_2$ である．Γ を実数体 $\bar{\Gamma}$ に拡張すると $\varDelta$ は semi-simple algebra $\bar{\varDelta}$ になるが，これの simple algebra への分解は $Z_{\bar{\Gamma}}$ の分解（体の直和への）に対応することから，$x \in \bar{\varDelta}$ は

$$(1)\quad x=\begin{pmatrix} x_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & x_{r_1} & & & & \\ & & & x_{r_1+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & x_{r_1+r_2} & \\ & & & & & & x_{r_1+r_2+1} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & x_{r_1+r_2+r_3}\end{pmatrix}$$

なる形にあらわされる．$x_1, \cdots, x_{r_1}$ は s 次の実数係数の行列，$x_{r_1+1} \cdots x_{r_1+r_2}$ は s 次の複素係数の行列，残りの r_3 個は $s/2$ 次の4元数係数の行列である．さて $\varDelta$ の involution $\sim$ は $\bar{\varDelta}$のそれ，よつて $\bar{A}=\mathfrak{M}(\bar{\varDelta})_m$ のそれに 1. でのべた方法で拡張される．これをやはり $\sim$ であらわす．$S \in \bar{A}$ が $S=\tilde{S}$ のとき対称という．

$\mathfrak{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $x_i \in \bar{\varDelta}$ に対して $S[\mathfrak{x}]=\sum_{i,j} \tilde{x}_i s_{ij} x_j$,

$S=(s_{ij})$, $s_{ij} \in \bar{\varDelta}$, によつて $\bar{\varDelta}$ 係数の2次形式ができるが，σ を $\bar{\varDelta} \to \bar{\Gamma}$ の trace とすると，$\mathfrak{x}$ を実係数のベクトルと考えて，$\sigma(S[\mathfrak{x}])$ は実係数の通常のいみの2次形式となる．これが正値のとき，S は正値といつて $S>0$ であらわす．実 Euclid 空間とみた $\bar{A}$ の中で $S>0$ な S の全体は，$(1/2)ms(hms+r_1-r_3)$ 次元の凸集合をつくる．さてすべての $x_i \in \mathfrak{o}$ なるごとき $\mathfrak{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ の中で，$\sigma(S[\mathfrak{x}_1])=t_1>0$ が最小であるような $\mathfrak{x}_1$ をとり，次に $\mathfrak{x}_1$ で張られる $\varDelta$ 係数の空間外にある成分 $\in \mathfrak{o}$ なる $\mathfrak{x}_2$ を $\sigma(S[\mathfrak{x}_2])=t_2$ が最小になるように定める．以下同様にして，$\mathfrak{o}$ 成分の一次独立な $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots, \mathfrak{x}_m$ ができる．つくり方からあきらかに，$t_1 \leqq t_2 \leqq \cdots \leqq t_m$. ところで行列 B を $B=(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_m)$ によつてきめる．そこで Humbert の方法（[2] に引用）によつて，

補助定理 1. ノルム (B) は m と $\varDelta$ のみに関する常数でおさえられる，

が成立つ．いま，non-singular な $\mathfrak{o}$-係数の M_1, M_2 が associated ということを $M_1=UM_2$ なる $U \in \Gamma(A)$ がとれることとすれば，このいみで類ができるが，

補助定理 2. 一定のノルムに対してかかる類の数は有限個である．

そこで，補助定理 1 から S からきまる B で上記類の代表である有限個をえらんで，$S[B]$ を S の reduced form といい，S をうごかして，$S[B]$ の全体のつくる空間を F とする．$\Gamma(A)$ は $S \to S[U]$, $U \in \Gamma(A)$ によつて $S>0$ なる $S \in \bar{A}$ の空間に不連続に作用するが，F が平面にかこまれた $\Gamma(A)$ の基本領域であることは次の一連の不等式からえられる．まず，$S[B]$ に Jacobi の変換をほどこして

$$S[B]=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d_{12} \cdots\cdots & d_{1m} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

とする．Weyl の方法（[2] 参照）によつて

補助定理 3. m と $\varDelta$ のみに関した常数 c があり，

$$\begin{cases} c^{-1}t_k \leqq \sigma(d_k) \leqq ct_k, \\ \sigma(d_k) \leqq c\sigma(d_{k+1}). \end{cases}$$

また，$r_k^{(1)}, \cdots, r_k^{(r_1+r_2+r_3)}$ を d_k の (1) なる表示における固有限とすると，

補助定理 4. $\begin{cases} r_k^{(3)} \leqq dr_l^{(9)}, & k \leqq l, \\ d_{kl} \leqq c. \end{cases}$

最後に，F が有限この平面でかこまれることのためには [1] の方法を本質的にもちいるのである．

3. 定理1の証明． $\varDelta$ の involution $\sim$ について，Z の元がすべて $\sim$ で fix されるとき $\sim$ は第1種といい，そうでないとき第2種とよぶ．第2種のとき，k を Z の部分体で $\sim$ で fix されるもの全体とすると $Z=k(\theta)$, $\tilde{\theta}=-\theta$ なる θ がとれる．そこで Z の無限素点のかわりに k の無限素点を考えることにより，やや面倒だが，第1種と同様にできるから，ここでは第1種のみを考える．このときは Albert の定理から $\varDelta$ は Z 又は Z 上の一般4元数体となる．$\varDelta=Z$ のときは [4] に扱つてあるから後者の場合が残る．このときは $s=2$ だから (1) で $i<r_1+r_2$ ならば x_i は4元数，$i \leqq r_1+r_2$ ならば x_i は実数又は複素数の2次の行列である．これら2次の行列（$i \leqq r_1+r_2$）に対しては $\tilde{x}_i=V^{-1}x_i'V$ が成立つ．x' は x の転置行列，V は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ なる行列をあらわす．$S \in A=M_m(\varDelta)$ が対称とする．$\bar{A}=M_m(\bar{\varDelta})$ の分解は (1) から得られるが，それを整頓して

$$S=\begin{pmatrix} S_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & S_{r_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & S_{r_1+r_2} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & S_{r_1+r_2+r_3}\end{pmatrix}$$

とかける．やはり V によつて上記2次の行列 V を対角線的にならべたものを表わし，$i \leqq r_1+r_2$ なら $T_i=VS_i$, $i>r_1+r_2$ なら $T_i=S_i$ とおく．$i \leqq r_1+r_2$ なら $T_i'=-T$ だから適当に R_i をとると，

$$T_i=R_i'\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}R_i, \qquad i \leqq r_1+r_2,$$

$$T_i=R_i'\begin{pmatrix} E_{n_i} & 0 \\ 0 & -E_{n-n_i} \end{pmatrix}R_i, \quad i>r_1+r_2.$$

$h_i=R_i'R_i$ とおいて

$$h=\begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_{r_1+r_2+r_3} \end{pmatrix}$$

とおくとこれは >0 で

$$\begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_{r_1+r_2+r_3} \end{pmatrix}$$

に対して

（2）　$$hT^{-1}h=T'$$

が成立つ．S に対して T を定めこれについて (2) を満足する >0 なる h の全体の空間に $\Gamma(S)$ が $h\to h[U]$, $U\epsilon\Gamma(S)$ により不連続に作用していることがわかり，この基本領域を定めるのに次の補助定理がいる．

補助定理 5. ノルムが一定な各類の中には，reduced form は有限個しかない．

ここで，類とは $S_1, S_2\epsilon\bar{A}$ に対し $U\epsilon\Gamma(A)$ があつて $S_1=S_2[U]$ なるとき同値として得られるもの，又 S が reduced とは (2) をみたす >0 なる h で 2. のいみで reduced なるものがとれることとする．

この補助定理をもとにして [1] の方法で基本領域が構成され，これが有限個の平面で定まることがでてくる．以上は S が対称のときであるが，歪対称のときは詳細は略すが，対称の場合にならつて証明される．又，いずれの場合にも基本領域 F について，

$$\int_F dv<\infty$$

が得られる．

文　献

[1] C. L. Siegel, Einheiten quadratischer Formen, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ., 13 (1940), 209-239.

[2] C. L. Siegel, Discontinuous groups, Ann. of Math., 44 (1943), 674-689.

[3] K. G. Ramanathan, The theory of units of quadratic and Hermitian forms, Amer. J. Math. 73 (1951), 233-255.

[4] K. G. Ramanathan, Units of quadratic forms, Ann. of Math., 56 (1952), 1-10.

（小野　孝記）

虚数乗法に関する非公式討論会[1)]

会は非専門家による質問から始まる．(以下，Artin を A., Deuring を D., Weil を W. と略記する．)

A.　非可換な group variety の等分を考えて，非 Abel 拡大の場合を扱うことはできないか？

W.　Abel 多様体で既に非 Abel 拡大が得られる．虚数乗法のない楕円曲線の，週期の n 等分から生ずる拡大体の Galois 群は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bmod n,\quad (ad-bc,\ n)=1,$$

a, b, c, d は有理整数 mod n, という行列群の部分群に同型だ．定義体が 1 の n 乗根を含むときは，さらに $ad-bc\equiv 1 \pmod n$ という条件のついた部分群に含まれる．特に modulus j を超越元とし，複素数体に j を添加した体を常数体とすれば，Galois 群は，丁度この後の群全体 (すなわち modular 群 mod n) になる[2)]．面白いのは週期の p^N-分点全部[3)]を添加した体で，その Galois 群は p-進行列による表現をもつ[4)]．一方 ζ-函数は Abel 拡大を精密に調べるもう一つの方法で[5)]，このこととは，Frobenius 置換を通して結びついているが，今の所全く神秘的に見える．詳しくいうと，E を，代数体 k 上定義された楕円曲線，その週期の m-分点を k に添加した体を k_m とし，

$$k^{(p)}=\bigcup_n k_{p^n}$$

とする．p, q を二つの素数，l を p, q と違う素数とする[6)]．$G^{(p)}$ を，$k^{(p)}/k$ の Galois 群とすれば，

$$G^{(p)}=GL(Z_p, 2),\ G^{(q)}=GL(Z_q, 2)^{7)}$$

と同一視できる[8)]．さて，ほとんどすべての l は $k^{(p)}/k$, $k^{(q)}/k$ で不分岐である[9)]．この拡大に関する，l の Frobenius 置換を，$M_l^{(p)}\epsilon G^{(p)}$, $M_l^{(q)}\epsilon G^{(q)}$ とする．その特性方程式は，Frobenius 置換のとり方によらない[10)]．ここで E を mod l で考えれば，$M_l^{(p)}$ の特性方程式が，$M_l^{(q)}$ のそれと等しいことがわかる[11)]．ここで注目すべきことは，普通無限次代数拡大の理論には，有限次拡大の性質をひとまとめに表現するだけの意味しかないのだが，今の場合には無限次ということが本質的であることだ．有限次で切つて考えると，p-進近似と q-進近似との間には何の関係もないから，特性方程式の間にも，どんな関係もみられない．

A.　それではその特性方程式を explicit に計算することが大切だと思う．

W.　ζ-函数の分子だから計算はすぐできる[12)]．

D.　虚数乗法がなくても同じだ．

W.　(志村に)，variable modulus[13)] の理論について考えていることを話せ．

志村．Kronecker の仕事を再構成しただけだ．

W.　そういつただけでは，ほかの人にはわからない．

志村．E を，variable modulus の楕円曲線とし，定義体を有理数体 Q とする[14)]．従つて modulus j は変数だ．今，$k=Q(j)$ とし，$p\neq 2,3$ とすれば k_p/k の Galois 群は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bmod p$$

なる行列の群で[15)]，k_p/k での p の分解，分岐の次数もわかる．またその分解群，惰性群も計算できた．また Kronecker の合同関係式[16)] もでる．

W.　Totally imaginary でない体の上の類体の構成を考えようとすれば，コンパクトでない，可換な group variety を考えることが必要になる．例えば，有理数体の上の類体は，指数函数の週期の等分によつてできる．虚数乗法と，このような場合との両方を含む理論ができることが望ましい．それはまた，一般の代数体上の量指標の理論と関係がある[17)]．

志村．(D. に)，今日，講演の内容を変えたが[18)]，始めやる予定だつた話を聞きたい．

D.　Weierstrass の $\wp$ 函数を考える．これに対し，

$$\wp(pu\,;p\omega_1,\omega_2)\equiv\wp(u,\omega_1,\omega_2)^p \bmod p$$

が成立つ．この式の意味は，左辺を，$\wp(u,\omega_1,\omega_2)$ の有

理函数として表わしたときの合同を表わすのだが，また一方，両辺の差を modular 函数として Fourier 展開したときの係数が全部 p で割れるということにもなる[19].

次に K を，虚数乗法をもつ楕円函数体とし，その虚数乗法の環が，或る虚２次体 Σ の principal order と同型であるとする．Σ の整イデアル $\mathfrak{a}$ に対し，K の部分体 $K^{\mathfrak{a}}$，K から $K^{\mathfrak{a}}$ への同型写像 $\varphi(\mathfrak{a})$ がある[20]．これは，常数体 k の元をも動かす，すなわち k に，自己同型 $(\Omega/\mathfrak{a})$ を引き起す．du を K の第１種微分とすれば，

$$(du)^{\varphi(\mathfrak{a})}=\theta(\mathfrak{a})\,du$$

という形の式が成り立つ[21]．$\mathfrak{a}$ が，単項イデアル (α) のときは，$\varphi(\mathfrak{a})=\alpha$，$\theta(\mathfrak{a})=\alpha$ となるが[22]，一般の場合には，$(\theta(\mathfrak{a}))=\mathfrak{a}$ は，$\mathfrak{a}$ の，単項イデアルとしての表現である．次に $\mathfrak{b}$ を別のイデアルとする．

$$K\rightarrow K^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}=\varphi(\mathfrak{a})\,\varphi(\mathfrak{b})\,K$$

を考えて

$$(du)^{\varphi(\mathfrak{b})\varphi(\mathfrak{a})}=\theta(\mathfrak{b})^{(\Omega/\mathfrak{a})}\cdot\theta(\mathfrak{a})\,du$$

となる．ここで $\varphi(\mathfrak{a})$ は，$\mathfrak{a}$ により Σ の単数を除いて決るから，

$$\theta(\mathfrak{b})^{(\Omega/\mathfrak{a})}\cdot\theta(\mathfrak{a})=\theta(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\varepsilon$$

となる．ここで ε は k の単数であるだけでなく，Σ の単数でさえもある．これは単項イデアル定理のより強い形である[23].

ついでに，私はこの間，Fricke の，"Lehrbuch der Algebra, III" の中で，古典的方法による単項イデアル定理の証明をみつけた[24]．この本は Weber と違つて誤りも少く，良い本なのだが，余り読まれていない．非常に難かしいからだろう．とにかくも……[25].

A.　(D. に)，単項イデアル定理についての予想というのは，一般的にいえば，代数体 k のイデアル $\mathfrak{a}$ を表わす，k の絶対類体 K の数 $\theta(\mathfrak{a})$ を適当に取れば，その coboundary が k に属するようにできるということか？

D.　そうだ．

W.　虚数乗法論の一般的テクニックを話そう．A を虚数乗法をもつ Abel 多様体とする．まず定義体を下げること[26].

Kummer 多様体[27]に対し，A は一意には決らないが，簡単のために，A が，最小定義体 k で定義されているとする．σ を k の自己同型とし，A, A^{σ} に対応する R-module を $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ とする．A は $\mathfrak{m}$ の類と，$\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ とによつて決り，逆に A は $\mathfrak{m}$ の類を決める[28]．しかし $A\rightarrow(\mathfrak{m})$ という対応は解析的関係で，代数的には定式化できない[29]．代数的に考えるには，次のようにやる．まず

$$\lambda_{\mathfrak{a}}:\ A\rightarrow A^{\sigma}$$

なる準同型 $\lambda_{\mathfrak{a}}$ がある．さらに，A から A^{σ} の上への準同型の全体は R-module を作る．この module の類が A と A^{σ} との関係を代数的に表わすのである[30].

だが，完全な説明をするのには，polarized Abel 多様体が必要になる．A, A^{σ} は，それを polarize する因子により，射影空間 $\boldsymbol{P}$ の中に imbed されるから[31]，始めから $\boldsymbol{P}$ の中に入つているとして差支えない．A から A^{σ} への準同型の module は，今いつたように，A と A^{σ} とを較べるには適当だが，polarized Abel 多様体には向かない[32]．μ を，A から A^{σ} の上への一つの準同型とし，$\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ を，A, A^{σ} を polarize する因子類とする．$\mathfrak{D}$ と $\mu^{-1}(\mathfrak{D}')$ とを比較するのだ．所で，A 上の各因子類は，k_0 の，或る総正な数 η から作られた $\sqrt{-\eta}$ に対応する[33]．今 $\mathfrak{D}$, $\mu^{-1}(\mathfrak{D}')$ が，$\sqrt{-\eta}$, $\sqrt{-\eta_1'}$ に対応するとすれば

$$\sqrt{-\eta_1'}\big/\sqrt{-\eta}=\xi$$

は総正な k_0 の数で μ により決るから $\xi(\mu)$ と書ける．さて，A から A^{σ} への準同型の module $\mathfrak{N}$ は R-module（１次元の）だから，k_0 上２次元，故に $\mu\in\mathfrak{N}$ は，$\mathfrak{N}$ の k_0 上の基底に関する成分 μ_1, μ_2 $(\in k_0)$ により表わせる：$\mu=(\mu_1,\mu_2)$．そのとき，$\xi(\mu)$ は，この μ_1, μ_2 の２次形式になる．これは，虚数乗法と２次形式との古典的な関係の一般化である[34].

志村，谷山．（W. に)，我々の方法で，Abel 拡大がどの程度構成できると思うか？

W.　それについては既に予想を話したはずだ．Abel 多様体に対応する量指標から作られる拡大体と一致するだろうというのだ[35].

W.　Abel 多様体の modulus について話そう．与えられた次元の Abel 多様体全体では，algebraic family を作らない．Riemann 行列の古典論から，単因子 e_1, $\cdots$, e_n が決る[36]．簡単なのはそれが全部１のときで，その全体は，modulus の一つの family を作り，丁度 Siegel の modular 函数に出てくるものになる[37]．一般に，e_1, $\cdots$, e_n が同じもの全体は，それぞれ一つの family を作る．それには Siegel の modular 群を適当に変えたものが対応する[38]．Confort が何かやつているが，彼の仕事には大した価値はない．Siegel の modular 函数そのものでさえ，arithmetical な目的に使えるかどうかは，今の所何ともいえない．

W.　(谷山に)，Hasse の ζ-函数についての，これからの計画を話せ．

谷山．別にない．ただ，虚数乗法のある楕円曲線と modular 函数との関係[39]から類推して，Hecke の作用素の理論[40]を使つて考えようと思つている．

W.　楕円函数は全部，modular 函数で一意化されると思うか？

谷山．Modular 函数だけでは駄目だろう．別の特別な型の automorphic function も必要だと思う．

W. もちろんそれで或るものはできるだろう．しかし一般の場合は，今までとは全く違い，全く神秘的に見える[41]．だが差当り，Hecke の作用素を使うことは有効だ．Eichler が，Hecke の理論を応用したが，虚数乗法のない楕円曲線の或るものはその中に含まれる[42]．無限に多くのそのような楕円曲線が……．

D.　違う！　有限個しかわかつていない．

（これに続き W. と D. との間に二三のやりとりがあつた

が早口で聞きとれない.)

W.（谷山に），このような問題と，Ramanujan の予想[43]との間にどのような関係があると思うか？

谷山. Ramanujan の予想は Eichler が証明したと思うが[44].

W. 私のいつているのは本来の予想，つまり $\Delta(\tau)$ の場合だ.

谷山. それについては考えたことはない.

森川.（W. に），高次の singular relation をどう思うか？

W. それは一体何だ？

森川. Riemann 行列 (E, T) に対する singular relation とは

$$(E, T)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\Lambda(E, T)$$

なる形[45]のものだが，代数多様体の，r 次の第1種微分の週期行列

$$(E,\ T^{(r)})$$

に対し同じ形の関係が成り立つとき，それを higher singular relation というのだ[46].

Chevalley.（W. に），さつき定義体をさげる云々といつたが，あの言葉の定義は何だ？

W. V を k 上定義された代数多様体，k_0 を k の部分体で，k/k_0 が分離的代数拡大であるとする. σ, τ を k/k_0 の同型とするとき，V^σ/k^σ から V^τ/k^τ[47] への双有理対応 $f_{\sigma\tau}/k^\sigma \cup k^\tau$ があり，すべての組 (σ, τ, ρ) に対して

$$\begin{tikzcd} V^\sigma \arrow[rr, "f_{\sigma\tau}"] & & V^\tau \arrow[dl, "f_{\tau\rho}"] \\ & V^\rho \arrow[ul, "f_{\rho\sigma}"] & \end{tikzcd}$$

が good diagram であり，またさらに $f_{\sigma\lambda,\tau\lambda}=(f_{\sigma,\tau})^\lambda$ であるとする. そのとき，k_0 で定義された V_0，V から V_0 への双有理対応 f/k があり，従つて f^σ/k^σ は V^σ から V_0 への双有理対応になるわけだが，すべての対 (σ, τ) に対して

$$\begin{tikzcd} & V_0 & \\ V^\sigma \arrow[ur, "f^\sigma"] \arrow[rr, "f_{\sigma,\tau}"] & & V^\tau \arrow[ul, "f^\tau"'] \end{tikzcd}$$

が good diagram になる. 始めのような条件の下でこのような V_0 が存在することを，定義体が k_0 まで下げられるというのだ. これは V の，自分自身への双有理対応がただ一つ（すなわち恒等写像）しかないときが最も簡単だ. k/k_0 が正則拡大のときにも似たような定理が成り立つ[48].

（ここで散会，その後誰かが W. に，Ramanujan の予想とは何かと聞いたので，）

W. $\Delta(\tau)$ を Weierstrass の判別式，つまり

$$\Delta(\tau)=q\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^\nu)^{24}, \quad q=e^{2\pi i\tau}$$

とし，q の冪で整頓して，

$$\Delta(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,q^n.$$

これに対する Dirichlet 級数[49]は，そのとき，次のような Euler 積に分解される[50].

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}=\prod_p(1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s})^{-1}.$$

この各因子を，p^{-s} の2次方程式と考えたとき，これが虚根をもつというのが Ramanujan の予想だ. これは合同 ζ-函数に対する Riemann 予想に似た形をもつている[51].

ここで有理点が問題だ. つまり有理数体 Q の上で定義された多様体 V で，mod p で考えたときの有理点の個数が，何かしら $\tau(p)$ と関係があるようなものが存在するか？ 対称の性質，合同性 …，函数等式が …，この V は 23 次でなければならぬ. 決定的なことは … …[52].

註

1) この記事は筆者のノートと記憶とだけにもとづいて書かれたものであるから，記憶違い，誤解もあることと思う. 読者は前以て，このことを承知しておいていただきたい.

2) 週期の n 分点は (n, n) 型 Abel 群をつくり，Galois 群はその自己同型を引き起すから，このような行列で表現できるのである. 詳しいことは，例えば Weber の代数学の3巻に書いてある.（§63）

3) p を固定し N を自然数全体を動かしたもの全部.

4) すぐ下に説明されている.

5) W. の1日目，3日目の講演を参照.

6) W. は素数といつたが実は，l は，pq を割らない k の素イデアルのつもりなのである. 以下そのつもりで読んでいただきたい.

7) $GL(Z_p, 2)$ は p-進整数環 Z_p 上の2次の行列群.

8) p^N-分点全体を p-進数 mod 1 を係数とする，2次元のベクトル空間で表わし，その変換群として表現するのである. Deuring [1] §2 または Weil [13] n° 31 参照.

9) l が p, q を割らないとき，E を mod l で考えたものがやはり楕円曲線ならば，E の p^n, q^n-分点はすべて，mod l で考えたとき，位数が小さくなることはない. 不分岐性はこのことからすぐに証明できる.

10) l の，相異る素因子に対応する Frobenius 置換は，Galois 群の内部自己同型によつて互に移りうるから.

11) mod l で考えることにより，Frobenius 置換は，局所的に，E mod l の $x\to x^{\mathrm{Norm}\,l}$ なる endomorphism により与えられ，その特性方程式は，$M_l^{(p)}$, $M_l^{(q)}$ のそれと等しくなる. Weil [13] Th. 36 参照.

12) Weil [13] p. 138，または Hasse [6] §11 参照.

13) E の modulus j を変数として，E を，u と j とを超越元とする代数曲面として取り扱う理論. Kronecker [11] 参照.

14) 曲面と考えた E は，Q 上定義されうる. Weber の τ 函数の方程式を使えばよい. Deuring [2] 参照.

15) 記号は W. と同じ.

16) Kronecker [11]，p. 439，式 (64).

17) W. の1日目の講演参照. 有理数体のときは, 量指標 : $\chi(n)=|n|$ との関係は明白である.

18) D. は単項イデアル定理について話すはずであつたが ζ-函数の話に変更になつた.

19) このことは D. の東京での講義で, くわしく証明された.

20) x を K の generic point : $K=k(x)$; とするとき, $K^{\mathfrak{a}}=\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{a}} k(\alpha\mathfrak{a})$ と定義する. Deuring [1] 参照. このとき, K と $K^{\mathfrak{a}}$ とは抽象体としては同型だが, $\mathfrak{a}$ が単項イデアルでなければ, 函数体としては同型にならない. 従つて $\varphi(\mathfrak{a})$ は, "verallgemeinierte Meromorphism" で常数体 k の元を動かすのである. Deuring [3] 参照.

21) $(du)^{\varphi(\mathfrak{a})}$ は, 微分 du の同型 $\varphi(\mathfrak{a})$ による $K^{\mathfrak{a}}$ への像の, 写像 $\varphi(\mathfrak{a})$ の微分による逆像で, 故に K の微分となるから, このように書ける. $\theta(\mathfrak{a})$ はそのとき, k の数となる.

22) 最初の α は K の, 自身の中への自己同型 (Meromorphism), 第二の α は Σ の数.

23) 実際に証明を遂行するためには, 次の三つの補題が必要である : (i) 与えられた singular modulus j と, $\Sigma(j)$ の与えられた素イデアル $\mathfrak{P}$ とに対し, modulus j をもつ楕円曲線 E で, $\Sigma(j)$ 上定義されるものが存在して, mod $\mathfrak{P}$ での reduction が E に対しうまく行く. (ii) $\Sigma(j)$ で定義され, modulus j をもつ楕円曲線 E で, E から E^{σ} への準同型 λ_{σ} が, $\Sigma(j)$ で定義されるようなものが存在する. ここで σ は $\Sigma(j)$ の任意の自己同型である. (iii) 任意の楕円曲線 E 上に, 第1種微分 ω があり次の性質をもつ : mod $\mathfrak{P}$ での reduction が E に対しうまく行くようなすべての $\mathfrak{P}$ に対し ω を mod $\mathfrak{P}$ で考えたものはやはり第1種微分である.

D. は, (i), (ii) は証明できたが, (iii) は modulus j が, 或る合同式を満す場合にしか証明できなかつたということである. (この註は志村の話による.)

24) p. 362 にある.

25) 以下略. 詳細は Fricke の本を見よ.

26) これについては後に再び話がある.

27) 以下に使われる概念, 記号と, その主要性質とについては, W. の3日目の講演参照.

28) W. の3日目の講演参照.

29) A から代数的に決るのは R だけで, $\mathfrak{m}$ は決らない. たとえば A, A^{σ} は同じ R をもつが, どの $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ がそれに対応するかはわからないのである.

30) $\lambda_{\mathfrak{a}}$ なる記号については, 志村, 谷山の講演参照. もちろん σ には適当なる条件が必要である. R が principal order のときには, $\mathfrak{a}^{-1}$ の類が, $A\to A^{\sigma}$ の準同型の module の類と同じになる. 一般の場合には $\mathfrak{a}^{-1}$ は作れないことに注意.

31) W. の3日目の講演および Weil [16] 参照. この imbedding が到る所双正則になるように, 因子を十分大きくとつておくのである.

32) この module は A と A^{σ} とだけで決るから, 因子類の違いは反映されない.

33) W. の3日目の講演参照. $\sqrt{-\eta}$ は $K=k_0(\sqrt{-\eta})$, $\Im\sigma_i(\sqrt{-\eta})>0$ $(i=1,\cdots,n)$ なる性質をもつとしてある. ここで K は R の商体, k_0 は K の, 指数2の総実なる部分体である. W. はこのような $\sqrt{-\eta}$ を使つて, Riemann 形式 $E(p(\lambda),p(\lambda'))=T_r(\sqrt{-\eta}\lambda\bar{\lambda}')$ を作つている. 所で Riemann 形式は, A の, $\equiv$ での同等による因子類と1対1に対応するのである. Weil [14] 参照.

34) A から A^{σ} への準同型 μ は, $\mu(p(\mathfrak{m}))\subset p(\mathfrak{m}')$ なる, C^n の複素1次変換 μ で与えられる (記号は W. 3日目の講演を見よ). いいかえれば, $\mu\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}'$ なる数 $\mu\in K$ で代表される. 簡単のため, R が principal order のときに説明する. $\mu\mathfrak{m}=\mathfrak{m}'\mathfrak{a}$ からイデアル $\mathfrak{a}$ が決るが, そのとき $\mu=\lambda_{\mathfrak{a}}$ と書けることは容易にわかる. そして A から A^{σ} への準同型 μ の module は $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m}'$ となるから, $\mathfrak{a}$ と逆の類に属するわけである. 今 $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ に対応する数を $\sqrt{-\eta}$, $\sqrt{-\eta'}$ とする. すなわち $E(p(\lambda),p(\lambda'))=T_r(\sqrt{-\eta}\,\lambda\bar{\lambda}')$, $\lambda,\lambda'\in\mathfrak{m}$, $E'(p(\nu),p(\nu'))=T_r(\sqrt{-\eta'}\,\nu\bar{\nu}')$, $\nu,\nu'\in\mathfrak{m}'$; $\mu^{-1}(\mathfrak{D}')$ に対応する Riemann 形式 E_1' は,

$$E_1'(p(\lambda),\ p(\lambda'))=E'(\mu p(\lambda),\ \mu p(\lambda'))$$

により与えられるから, E_1' に対応する $\sqrt{-\eta_1'}$ に対し

$$T_r(\sqrt{-\eta_1'}\,\lambda\bar{\lambda}')=T_r(\sqrt{-\eta'}\,\mu\lambda\cdot\overline{\mu\lambda'})$$

となる. これから, $\sqrt{-\eta_1'}=\sqrt{-\eta'}\,\mu\bar{\mu}$ が出る. 結局,

$$\xi(\mu)=(\sqrt{-\eta'}/\sqrt{-\eta})\mu\bar{\mu}.$$

ここで μ を, 成分 μ_1, μ_2 で表わせば, $\xi(\mu)$ は2次形式になるわけである.

特に A が楕円曲線のときを考えて見る. このときには, Riemann 形式は本質的に一つしかないから,

$$E=E'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

として差支えない. $\mathfrak{m}=(\omega_1,\omega_2)$, $\mathfrak{m}'=(\omega_1',\omega_2')$ と, 有理整数環上の基底で表わす. さて, $\lambda=x_1\omega_1+x_2\omega_2$, $\lambda'=y_1\omega_1+y_2\omega_2$ に対し, $E(p(\lambda),\ p(\lambda'))=x_1y_2-x_2y_1=T_r(\sqrt{-\eta}\lambda\bar{\lambda}')$ より, $\sqrt{-\eta}=(\omega_1\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1\omega_2)^{-1}$ なることが計算される. 同様にして $\sqrt{-\eta'}=(\omega_1'\bar{\omega}_2'-\bar{\omega}_1'\omega_2')^{-1}$. それ故 $\sqrt{-\eta'}/\sqrt{-\eta}=N(\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}'^{-1})$ となる (N は絶対ノルム). 結局 $\xi(\mu)=(\mu\bar{\mu})/N(\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^{-1})$. それ故 μ を $\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^{-1}$ の基底で表わせば, $\xi(\mu)$ が, イデアル類 $\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^{-1}$ に対応する2次形式であることがわかる.

一般の場合には余り簡単ではない. $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ が共に, k_0 の整数環上の相対基底 (ω_1,ω_2), (ω_1',ω_2') をもつ場合には, E と E' との単因子が同じとすれば, 類似の計算によつて,

$$\xi(\mu)=\mu\bar{\mu}N_{K/k_0}(\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^{-1})$$

が成り立つことがわかる. 一般の $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ に対しては, この場合を仲介にすれば, 同じ式が証明できるであろう. しかしこれからすぐに, $\xi(\mu)$ が $\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^{-1}$ に対する2次形式であるとはいえない. なぜならどの場合にも, $\mathfrak{m}'\mathfrak{m}^{-1}$ が k_0 上に相対基底をもたないのが普通だからである. W. はこの点, 何か感違いをしているのではないかと思われる.

35) W. の1日目, 3日目の講演参照. またここで見られるような量指標の性質と Hasse の予想との関係については谷山の近刊の論文参照.

36) Riemann 形式 E は歪対称だから

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

なる標準形にできる. ここに D は整係数対角行列. その

対角元 $e_1,\cdots,e_n$ を，E の単因子という．そのとき Riemann 行列は (D, T) なる形に変換される．T は対称で虚数部が正定符号．この T を modulus と考えるのである．これは polarized Abel 多様体に対応する概念である．W. の3日目の講演参照．

37) Siegel [12] の終りにくわしく説明されている．

38) Siegel の modular 群は，I を単位行列として

$$ {}^t\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} $$

(t は転置行列を表わす) なる関係を満す整係数行列 A, B, C, D による1次変換から成るが，ここで I の代りに D^{-1} とするのである．Confort の仕事については，筆者は何も知らない．

39) Hecke [7] 参照．

40) Hecke [9], [10] 参照．

41) W. は公開講演のときにも同じことをいつている．

42) Eichler [4], [5] 参照．ただし話題になつている，楕円曲線の例は書いてない．Stufe 11, 17, 19 などのときにそうなる．

43) 最後に説明がある．

44) Eichler は，-2 次元の，或る型の形式に対し，対応する予想を証明したのである．Eichler [4], [5] 参照．この [5] で彼は，Ramanujan の予想が，Hasse の höhere Differential と関係があるといつている．

45) A, B, C, D は n 次整係数，Λ は n 次複素係数行列．このような変換は T を，すなわち Reimann 形式を変えないから，普通の虚数乗法よりせまい概念で，丁度，polarized Abel 多様体の自身への変換になる(古典論の principal transformation である)．

46) これに対する W. の答は記憶にない．高次微分の週期行列を考えることは，いわゆる高次 Jacobi 多様体 (Weil [15] 参照) を考えることであるが，W. は，別の機会に，高次 Jacobi 多様体には，複素解析的でない (従つて代数的でない) 要素が入つて来るので，考えるのを止めたと語つている．

47) 一般に V/k は，V が k 上定義されていることを示す簡略記法である．f/k も同様．

48) この定理は Chow, Lang, 松阪 (輝) によるという話である．

49) 一般に，$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$ なる modular 形式に対し，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$ なる Dirichlet 級数を対応させるので，両者は Mellin 変換により結びついている．Hecke [8] 参照．

50) これも Ramanujan の予想の一部だが，既に解決されている．証明は，たとえば Hecke [9] にある．

51) -2 次元の，或る型の形式に対しては，この二つの予想は実際，本質的に同等である．Eichler [4], [5].

52) この最後の話は，散会後の騒がしさも手伝つて，ほとんど聞きとれなかつた．近くにいた人の話では，W. は何かいいかけて，まだ話す時期ではないと思つたらしく，ニヤニヤ笑つて止めてしまつたという．

文献

[1] M. Deuring, Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 14 (1941), 197-272.

[2] M. Deuring, Invarianten und Normalformen elliptischer Funktionenkörper, Math. Z. 47 (1941), 47-56.

[3] M. Deuring, Die Struktur der elliptischen Funktionenkörper und die Klassenkörper der imaginären quadratischen Zahlkörper, Math. Ann. 124 (1952), 393-426.

[4] M. Eichler, Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion, Arch. Math. 5 (1954), 355-366.

[5] M. Eichler, La théorie des correspondences des corps des fonctions algébriques et leurs application dans l'arithmétiques. (lecture note, Nancy, 1954)

[6] H. Hasse, Abstrakte Begründung des komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 10 (1934), 325-348.

[7] E. Hecke, Bestimmung der Perioden gewisser Integrale durch die Theorie der Klassenkörper, Math. Z. 28 (1928), 708-727.

[8] E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Ihre Funktionalgleichung, Math. Ann. 112 (1936), 664-700.

[9] E. Hecke, Über die Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerschen Produktentwicklung, I, Math. Ann. 114 (1937), 1-28.

[10] E. Hecke, 〃 , II, Math. Ann. 114 (1937), 316-351.

[11] L. Kronecker, Zur Theorie der elliptischen Funktionen, Werke, IV., Leipzig-Berlin, 1929, 345-495.

[12] C. L. Siegel, Über die analytische Theorie der Quadratischen Formen, I, Ann. of Math. 36 (1935), 527-606.

[13] A. Weil, Variété abélienne et courbes algébriques, Paris, 1948.

[14] A. Weil, Théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions theta (Séminaire Bourbaki, Paris, 1949).

[15] A. Weil, On Picard varieties, Amer. J. Math. 74 (1952), 865-894.

[16] A. Weil, On the projective embedding of abelian varieties, forthcoming somewhere.

(谷山 豊記)

第4日 9月13日

本会議最終日は，代数幾何と整数論の関係の重要性にかんがみて，必ずしも整数論への応用に限定せず，代数幾何学一般についての講演が行われた．

午前は，9時—12時10分，座長：秋月康夫教授

J.-P. Serre, Syzygy theory in local rings.(50分).

A. Néron, Arithmétique et classes de diviseurs sur les variétés algébriques. (50分).

中井喜和, Some results in the theory of the differential forms of the first kind on algebraic varieties. (30分).

永田雅宜, Theory of multiplicity in local rings. (30分).

Serre 教授の講演は，Hilbert の syzygy の理論を一般の局所環に対して考察し，特に射影空間内の代数的多様体への応用を論じた．Néron 教授の講演は始めフランス語で予定されていたが，聴講者の便をはかつて英語に改められ，Weil の distribution の理論を代数体から函数体に拡張することによつて，代数的多様体上の因子類を考察した．中井氏の講演は，第1種微分式を，標数 p の場合までこめて純代数的に扱おうというもの，永田氏

の講演は，Chevalley，Samuel による交点の重複度の理論を，一般の局所環について証明し，証明を簡略にしたものである．

J.-P. Serre，局所環の syzygy の理論

Noetherian ring A と A 上の modules とを考察する．考える module は一々断らなくても Noetherian (i. e. finitely generated over A) と約束する．A-module P が projective というのは，P が free A-module の直和因子であることと同値である．例えば A が整域，$\mathfrak{a}$ がそのイデアルなる時，$\mathfrak{a}$ が projective ということは inversible (即ち $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}=A$) というのと同値である[1]．

E を A-module とする．各項 P_i が projective であるような exact sequence

$$\cdots\to P_i\to P_{i-1}\to\cdots\to P_0\to E\to 0$$

を E の projective resolution と呼ぶ．

$$0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_0\to E\to 0$$

となつているとき長さ n という．E の proj. resolutions の中最短なものの長さを E の homological dimension と呼び $\mathrm{dh}(E)$ で表わす．$\mathrm{dh}(E)=+\infty$ の時もある．$\mathrm{dh}(E)=0$ は E が projective なることを意味する．

E の proj. resolution

$$\boldsymbol{P}:\ \cdots\to P_2\to P_1\to P_0$$

と，他の A-module F とが与えられたとき，

$$\boldsymbol{P}\otimes F:\ \cdots\to P_2\otimes F\to P_1\otimes F\to P_0\otimes F$$

は complex である．その homology 群を $\mathrm{Tor}^A(E,F)$ で示す．すなわち

$$H_p(\boldsymbol{P}\otimes F)=\mathrm{Tor}_p^A(E,F).$$

同様に complex $\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P},F):\leftarrow\mathrm{Hom}_A(P_i,F)\leftarrow\mathrm{Hom}_A(P_{i-1},F)\leftarrow\cdots$ から

$$H^p(\mathrm{Hom}(\boldsymbol{P},F))=\mathrm{Ext}_A^p(E,F)$$

と定義する[2]．基本的性質として　$\mathrm{Tor}_p^A(E,F)\cong\mathrm{Tor}_p^A(F,E)$，$\mathrm{Tor}_0^A(E,F)\cong E\otimes F$，$\mathrm{Ext}_A^0(E,F)\cong\mathrm{Hom}_A(E,F)$．さらに F についての exact sequence $0\to F'\to F\to F''\to 0$ から

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_p(E,F')\to\mathrm{Tor}_p(E,F)\to\mathrm{Tor}_p(E,F'')\to\mathrm{Tor}_{p-1}(E,F')\to\cdots$$

$$\cdots\to\mathrm{Ext}^p(E,F')\to\mathrm{Ext}^p(E,F)\to\mathrm{Ext}^p(E,F'')\to\mathrm{Ext}^{p+1}(E,F')\to\cdots$$

$$\cdots\to\mathrm{Ext}^p(F'',E)\to\mathrm{Ext}^p(F,E)\to\mathrm{Ext}^p(F',E)\to\mathrm{Ext}^{p+1}(F'',E)\to\cdots$$

なる三つの exact sequence が得られる．

さらに次の 3 条件は同値である：

1. $\mathrm{dh}(E)\leqq n$.
2. $\mathrm{Ext}^p(E,F)=0$　($\forall p>n$, $\forall A$-module F).
3. $\mathrm{Tor}_p(E,F)=0$　($\forall p>n$, $\forall A$-module F).

$1\Longleftrightarrow 2$，$1\Rightarrow 3$ は見易い．$3\Rightarrow 1$ は後述．

次に A の極大イデアル全体の集合を Ω とするとき，$\mathfrak{m}\in\Omega$ に対し $E_\mathfrak{m}$ を記号 e/s ($e\in E$, $s\in A$, $s\notin\mathfrak{m}$) の全体に $e/s=e'/s'\Longleftrightarrow\exists s'':s''\notin\mathfrak{m},\ s''(s'e-se')=0$ なる同値関係を入れたものとする．すると $A_\mathfrak{m}$ はいわゆる $\mathfrak{m}$ による商環で，$E_\mathfrak{m}$ は $A_\mathfrak{m}$-module となり，容易に判るように $E_\mathfrak{m}=E\otimes_A A_\mathfrak{m}$．従つて $\otimes_A A_\mathfrak{m}$ は A-modules の exact sequence を $A_\mathfrak{m}$-modules の exact sequence に移すことも見易い．又

$$\forall\mathfrak{m}\in\Omega\ E_\mathfrak{m}=0\Rightarrow E=0$$

が成立つ．又 E が projective なら $E_\mathfrak{m}$ も然り．

定理．　$\mathrm{dh}(E)=\sup_{\mathfrak{m}\in\Omega}\mathrm{dh}(E_\mathfrak{m})$.

証明．　Free modules から成る E の proj. resolution

$$\to P_i\to P_{i-1}\to\cdots\to P_0\to E\to 0$$

を取る．　$\cdots\to(P_i)_\mathfrak{m}\to(P_{i-1})_\mathfrak{m}\to\cdots\to E_\mathfrak{m}\to 0$　も exact だから $E_\mathfrak{m}$ の proj. resolution になる．$\mathrm{Hom}_A(P_i,F)$ は P_i の基の含む元の数（最初の約束により有限！）だけの F の直和に外ならないから

$$\mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{m}}((P_i)_\mathfrak{m},F_\mathfrak{m})=(\mathrm{Hom}_A(P_i,F))_\mathfrak{m}\ ^{3)}.$$

これより容易に

$$(\mathrm{Ext}_A^p(E,F))_\mathfrak{m}=\mathrm{Ext}_{A_\mathfrak{m}}^p(E_\mathfrak{m},F_\mathfrak{m})$$

を得る．（Tor についても同じような関係が容易に示される．）よつて $\mathrm{Sup}\,\mathrm{dh}(E_\mathfrak{m})=s$ とおくと $p>s$ に対し $\forall\mathfrak{m}\in\Omega$, $(\mathrm{Ext}^p(E,F))_\mathfrak{m}=0$．故に $\mathrm{Ext}^p(E,F)=0$, $\mathrm{dh}(E)\leqq s$．逆は E の長さ n の proj. resolution から $E_\mathfrak{m}$ の長さ n のそれが得られるから明らかである．

この定理により local ring の場合を調べればよいことになる．今後 A を local ring，$\mathfrak{m}$ をその極大イデアル，$K=A/\mathfrak{m}$ とおく．

E を A-module，$x_1,\cdots,x_n\in E$ とする．(x) が E を生成することは，$(x)\bmod.\mathfrak{m}E$ が $E/\mathfrak{m}E$ を生成することに同値であることはよく知られている．さらに

Lemma．　$\mathrm{Tor}_1^A(E,K)=0$ ならば，(x) が $\bmod.\mathfrak{m}E$ で一次独立な生成元の組になることと，(x) が E の一次独立な生成元の組になることと同値になる．

証明．　まず任意の A-module F について $F\otimes_A K\cong F/\mathfrak{m}F$ は容易に判る．さて (x) が $\bmod.\mathfrak{m}E$ で一次独立な生成元の組ならば，(x) は E を生成するから，x_i に対し一次独立な生成元 t_i を取つて free module $L_0=\sum At_i$ を作る．t_i を x_i に対応させる準同型の核を N とする．$0\to N\to L_0\to E\to 0$．これから得られる Tor の homology sequence から $N=0$ が出る．

この lemma から，E が projective $\Rightarrow\mathrm{Tor}_1(E,K)=0\Rightarrow E$ free となるから，local ring の上では free と projective とは同意語である．

又この lemma から容易に

$$\mathrm{dh}(E)\leqq n\Longleftrightarrow\mathrm{Tor}_{n+1}(E,K)=0.$$

故に A が local ring でない場合でも，$\mathrm{Tor}_{n+1}(E,F)$ がすべての F について 0 ならば，

$$\forall\mathfrak{m}\in\Omega\ \mathrm{Tor}_{n+1}^{A_\mathfrak{m}}(E_\mathfrak{m},A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}A_\mathfrak{m})=\mathrm{Tor}_{n+1}^A(E,A/\mathfrak{m})_\mathfrak{m}$$

$=0$, 従つて $\forall \mathfrak{m} \in \Omega$ $\mathrm{dh}(E_{\mathfrak{m}}) \leqq n$, $\mathrm{dh}(E) \leqq n$.
これは前に残しておいたことの証明である.

一般に, 環 A を固定して, 'すべての (或いは或る種の) A-module E に対し常に $\mathrm{dh}(E) \leqq n$' という形の定理を syzygy の定理という. 例えば体の上の n 変数の多項式環の場合, すべての homogeneous ideal $\mathfrak{a}$ に対し $\mathrm{dh}(\mathfrak{a}) \leqq n-1$. (Hilbert の定理. 例えば [2] 参照.) 一般に A の global homological dimension $\mathrm{gl.\,dh}(A)$ を $\sup \mathrm{dh}(E)$ で定義する. ただし sup はすべての A-module E にわたつての上限.

再び A が local ring の場合に帰ろう. $\mathrm{dh}(K)=n \Rightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}(E, K)=\mathrm{Tor}_{n+1}(K, E)=0 \Rightarrow \mathrm{dh}(E) \leqq n$ だから $\mathrm{dh}(E) \leqq \mathrm{dh}(K)$, $\mathrm{gl.\,dh}(A)=\mathrm{dh}(K)$ となる. 従つて $\mathrm{dh}(K)<+\infty$ なる A については syzygy の定理が成立つ訳である. ところが

定理. $\mathrm{gl.\,dh}(A)<+\infty \Longleftrightarrow A$ regular.

A が regular $\Longleftrightarrow \dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=$ Krull dim. of A $\Longleftrightarrow A$ の form ring $\sum \oplus \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ が K 上の多項式環, となることはよく知られている. さて上の定理の証明であるが, A が regular ならば, $n=$ Krull dim A, $(x_1, \cdots, x_n)=\mathfrak{m}$ とおくとき x_i は $A/(x_1, \cdots, x_{i-1})$ で非零因子であることから, 容易に K の長さ n の projective resolution が得られ $\mathrm{dh}(K) \leqq n<+\infty$ となる. (実際 $e\langle i_1 \cdots i_p\rangle$ $(1 \leqq i_1 \leqq \cdots \leqq i_p)$ なる記号を base とする free module を L_p, $L_0=A$ とし, $d_p: L_p \to L_{p-1}$ を

$$d_p(e\langle i_1 \cdots i_p\rangle)=\sum_{r=1}^{p}(-1)^r x_{i_r} e\langle i_1 \cdots \hat{i_r} \cdots i_p\rangle$$

$$d_1(e\langle i\rangle)=x_i$$

で定義すると $0 \to L_n \to \cdots \to L_0 \to K \to 0$ が exact になる.) しかし実は $\mathrm{dh}(K)=n$ が成立つのである. $Q_i=A/(x_1, \cdots, x_i)$ とおき, x_{i+1} を乗ずる作用を φ_i で表わせば,

$$0 \to Q_i \xrightarrow{\varphi_i} Q_i \to Q_{i+1} \to 0$$

なる exact sequence を得る. これから容易に $\mathrm{dh}(Q_{i+1})=\mathrm{dh}(Q_i)+1$ を得る. $Q_0=A$, $Q_n=K$, $\mathrm{dh}(A)=0$ より $\mathrm{dh}(K)=n$.

一般に, A-module E が与えられた時, $\mathfrak{m}$ の元の列 $a_1, \cdots, a_s$ が E-sequence であるとは a_i が $\bar{E}=E \bmod. (a_1, \cdots, a_{i-1})E$ に関して非零因子 (即ち $e \in \bar{E}$, $a_i e=0 \Rightarrow e=0$) $(i=1,2, \cdots, s)$ なることと定義する. この時 $\mathrm{dh}(E)+s=\mathrm{dh}(E/(a_1, \cdots, a_s)E)$ が上と同様に証明される. $E \neq 0$ ならば, E-sequence の長さは有界であることが判つている. 従つて maximal E-sequence が存在する. A が $\mathrm{gl.\,dh}(A)=n<+\infty$ を充す時, $n-\mathrm{dh}(E)=\mathrm{codh}(E)$ とおけば次の定理が成立つ.

定理. Maximal E-sequence の長さ $=\mathrm{codh}(E)$.

従つて maximal E-sequence の長さは一定である.

$\mathrm{codh}(E)=0 \Longleftrightarrow \mathfrak{m}$ が E の 0 の prime の一つ[4)]

$\Longleftrightarrow E$ が K と同型な submodule を含む

は容易. 又 $\mathfrak{p}_i$ が E の 0 の任意の prime なる時

$$\mathrm{codh}(E) \leqq \dim \mathfrak{p}_i$$

が判つている.

一般の local ring は必ずしも regular local ring の factor ring でないが, A-module E を完備化すれば $\hat{A}$-module $\hat{E}$ を得る. A の完備化 $\hat{A}$ は Cohen の定理により regular local ring の factor ring であり, $\hat{E}=E \otimes_A \hat{A}$, $\mathrm{dh}(E)=\mathrm{dh}(\hat{E})$ である[5)].

定理. V を射影空間内の代数的多様体, $\mathbf{F}$ を V 上の faisceau algebrique coherent とすると,

十分大なる n に対し $H^q(V, \mathbf{F}(-n))=0$ $(k>q \geqq 0)$

$\Longleftrightarrow \forall x \in V$ $\mathrm{codh}(\mathbf{F}_x) \geqq k$.

(ただし $\mathbf{F}_x$ を射影空間の x における local ring の上の module と見て.)

Syzygy の理論は Hilbert, Macaulay, Dubreil, Gröbner, 更に近くは Auslander-Buchsbaum などによつて研究された.

以下, 先に証明し残した '$\mathrm{gl.\,dh}(A)<+\infty$ ならば A は regular' の証明のあら筋を述べる. $r=\mathrm{gl.\,dh}(A)$, $d=$ Krull dim A とおこう.

1) $r \leqq d$. これは $r=\mathrm{codh}\,A \leqq \dim \mathfrak{p}_i$ ($\mathfrak{p}_i$ は A の 0 の associated prime) から明らか.

2) $\dim_K \mathrm{Tor}_p(K, K) \geqq \binom{s}{p}$, $s=\dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

これを認めれば $p=s$ のとき $\mathrm{Tor}_s(K, K) \neq 0$, 故に $r \geqq s$, $d \geqq r \geqq s$. しかるに $s \geqq d$ は local ring の性質の一つだから $r=d=s$ を得て A は regular. 2) の証明は難しいが, 次の予想

'$\sum_p \oplus \mathrm{Ext}^p(K, K)$ は Hopf algebra'[6)]

が成立てば簡単になる.

A が一般の Noetherian ring のときには,

$\mathrm{gl.\,dh}(A) \leqq n<+\infty \Longleftrightarrow$

$\forall \mathfrak{m} \in \Omega$ $A_{\mathfrak{m}}$ regular, $\dim A_{\mathfrak{m}} \leqq n$.

この場合 $\mathrm{gl.\,dh}(A)$ は普通の (Krull) dim. A と一致する.

定理. $\mathrm{gl.\,dh}(A)<+\infty$ ならば, 任意の (必ずしも極大でない) 素イデアル $\mathfrak{p}$ について $A_{\mathfrak{p}}$ は regular.

証明. $\mathrm{dh}(A/\mathfrak{p})<+\infty$ だから, proj. resolution

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to A/\mathfrak{p} \to 0$$

が存在する. $\otimes A_{\mathfrak{p}}$ は exact 性を保つから

$$0 \to P_n \otimes A_{\mathfrak{p}} \to \cdots \to P_0 \otimes A_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \to 0$$

は $A_{\mathfrak{p}}$ の剰余体 $K=A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ の proj. resolution で, 従つて $\mathrm{gl.\,dh}(A_{\mathfrak{p}})=\mathrm{dh}(K)<+\infty$.

特に regular local ring の素イデアルによる商環は又 regular である. 又この定理の仮設は $\exists q$: $\mathrm{Tor}_q^A(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{p})=0$ だけに弱めてもよい.

例えば体 k 上の多項式環 $A=k[X_1, \cdots, X_n]$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し $A_{\mathfrak{p}}$ が regular (即ち affine space は non-singular) なることはよく知られているが, その証明は, $\mathrm{gl.\,dh}(A)<+\infty$ を直接示すことができれば簡単になる.

註

1) $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}=A$ ならば，$\sum_{i=1}^{r} a_i b_i=1$，$a_i \in \mathfrak{a}$，$b_i \in \mathfrak{a}^{-1}$ となり，容易に判るように $(a_1, \cdots, a_r)=\mathfrak{a}$．今 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ を base とする free module $L=\sum A e_i$ を作り $\varphi: L \to \mathfrak{a}$ を $\varphi(e_i)=a_i$ で定義し，

$$\psi(a)=\sum_{i=1}^{r}(ab_i)e_i \qquad (a \in \mathfrak{a})$$

で $\varphi: \mathfrak{a} \to L$ を定義すれば $\varphi\psi=\text{identity}$．これより $\mathfrak{a}$ は L の直和因子と同型，逆も同様．

2) 誤るおそれのない時には Tor や Ext に A を省いて書くことにする．

3) これは実は P_i が free でなくても一般の A-module で成立する．$L_1 \to L_0 \to E \to 0$ (L_i free) のような exact sequence を用いて free の場合に帰着させればよい．

4) Noetherian module E の submodule N について

$$x \in A,\ \eta \in E,\ x\eta \in N \Rightarrow \begin{cases} \exists n: x^n E \subset N \\ \text{又は } \eta \in N \end{cases}$$

が成立つ時 N を primary と呼べば，E の submodule の primary 分解がイデアルの場合と同様に成立ち associated primes も確定する．

5) 京大での講演‘解析的層と代数的層の関係’参照．

6) Hopf algebra の定義や性質は A. Borel, "*Sur la cohomologie des espaces*⋯" Ann. of Moth. vol. 57 の §6 参照．

文　献

[1] H. Cartan-S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton, 近刊.
[2] Gröbner, Moderne Algebraische Geometrie.

（松村英之記）

A. Néron，代数的多様体上の因子類と整数論について

§1. 任意の代数的多様体 V に対して $G(V)$, $G_a(V)$, $G_l(V)$ でそれぞれ V 上のすべての因子の群，V 上で 0 に algebraically equivalent の因子の群，V 上 0 に linearly equivalent の因子の群を表わす．又 k が V の任意の定義体のとき $G^k(V)$ を k 上有理的な因子の群とし，$G_a^k(V)=G^k(V)\cap G_a(V)$, $G_l^k(V)=G^k(V)\cap G_l(V)$ とする．V が projective, normal のときこれらの因子類群については次の二つの結果が知られている．

(A) $G_a(V)/G_l(V)$ は V の Picard 多様体と同型．

(B) $G(V)/G_a(V)$ は有限個の生成元をもつ．

これらの因子群を調べるために先ず次の便法をとる．一般性を失わずに，V は一つの代数的多様体 B で parametrize された曲線群によつて fibrer されていると仮定してよい．即ち一般の V を reduce して base が B で fibre が代数曲線の‘広義の fibre variety’の上の因子群の構造の問題に帰着させる．次に定義体に関して universal domain Ω の代数的に閉じた部分体 F であつて，素体からの超越次数無限，F から Ω までが更に超越次数無限のものをとると，$G(V)$, $G_a(V)$, $G_l(V)$ の代りに $G^F(V)$, $G_a^F(V)$, $G_l^F(V)$ を考えればよいことになる．

このようにして，体 F の上の曲線群の general member を C とし，M を C の parameter とすると，$F(M)/F$ が B の函数体であつて $F(M)$ の上に C の函数体 $K/F(M)$ を重ねると V の函数体 K/F が得られることになる．

C は F の上の general member ゆえ，F 上任意の有理 V-因子 X に対し $F(M)$ 上有理 C-因子 $X\cdot C$ が常に定義される．準同型 $\theta: X \to X\cdot C$ の kernel を $H^F(V,C)$ とし

$$H_a^F(V)=H^F(V,C)+G_a^F(V),$$
$$H_l^F(V)=H^F(V,C)+G_l^F(V)$$

とすると

$$G^F(V)/H_l^F(V,C) \approx G^{F(M)}(C)/G_l^{F(M)}(C).$$

ところで $G^F(V)/G_l^F(V)$ と $G^F(V)/H_l^F(V,C)$ とのくいちがいは次元の低い多様体の因子類の群になるのでここで V の次元に関する帰納法を使うことにすれば，F の上の有理 V-因子の群の構造は $F(M)$ の上の代数曲線 C の有理因子の群の問題にうつることとなる．即ち $G(V)/G_l(V)$ の構造の問題と A. Weil がその thèse [4] で代数曲線上の整数論としてとりあげた $G^k(C)/G_l^k(C)$ の構造をきめる問題との間には著しい類似が認められ，両者の差異はただ Weil の場合に k が代数体であり，吾々の場合にはもつと一般な函数体 $F(M)$ の上の有理因子を扱う点である．

先に [1] ではこの類似をたどつて (B) の証明および Weil の有限性定理の拡張を得た（有限性定理：C が projective, non-singular な代数曲線のとき $G^k(C)/G_l^k(C)$ は有限個の生成元をもつ．Weil の場合 k は代数体，Néron はこれを標数任意の素体上 finitely generated な k の場合に証明した.）ここではこの類似を更に深くさぐる意味で Weil が thèse で導入した distribution の原理 ([4], [5], [2]) を吾々の場合に適応させてみ，あわせて [1] で示した (B) の証明の後半‘descente infinie’の部分を簡易化したい．

§2. Valuation function. この節では [4] からぬき出した必要な定義および二，三の結果をあげる．

K を体，$\mathbf{V}(K)$ を K の non-trivial な valuation の全体とする．K の部分体 k に対して $\mathbf{V}(K)$ の元で k 上 trivial な valuation の集合を $\mathbf{V}(K/k)$ で表わす．

直積 $\mathbf{F}'(K)=\prod_{\omega \in \mathbf{V}(K)} \omega(K^*)$ (K^* は K から 0 を除いてできる乗法群）の元は K のすべての non-trivial valuation ω に ω の一つの値を対応させる函数であるが，$x \in K^*$ には canonical に

$$[x] \in \mathbf{F}'(K): [x](\omega)=\omega(x), \ \forall \omega$$

が対応する．$\omega(K^*)$ には全順序があるから $\mathbf{F}'(K)$ は束群の構造をもつ．$\mathbf{F}'(K)$ の部分群ですべての $[x]$, $x \in K^*$ を含む束演算で閉じた最小のものを $\mathbf{F}(K)$ とする．

F(K) を K の **valuation function の群**とよぶ．束演算の配分律から **F**(K) の任意の元 X は

(1) $\quad X=\inf_{\alpha}\sup_{\beta}[x_{\alpha\beta}]$

$$x_{\alpha\beta}\in K^{*}\ ;\ 1\leqq\alpha\leqq m,\ 1\leqq\beta\leqq n_{\alpha}$$

と表わされる．又上で **V**(K) の代りに **V**(K/k) をとれば束群 **F**(K/k) が得られる．

一方 U を任意の代数的多様体，K/k をその函数体とすると因子の群 $G(U)$ は natural な順序によつて束群をなし，更に U が projective, non-singular のときは $G^{k}(U)$ から **F**(K/k) の中への canonical な同型がある．この同型対応で k 上有理 U-因子 T に対応する K/k valuation function を X_T で示す．この同型は U が singular points をもつときは多少事情を異にし $G^{k}(U)$ 全体でなく到る処0に locally equivalent の因子の群に限らねばならないが，簡単のため今後 U は projective, non-singular とする．

§3. **Distribution**. 前節では基礎体 k は無条件であつたが，ここでは k は常数体 k_0 の上の regular extension とし k/k_0 の projective, normal な model B をとる．即ち

$$\underbrace{K\supset k}_{U}\underbrace{\supset k_0}_{B}.$$

定義. $X\in\mathbf{F}(K)$ に対し，X の一つの表現を

$$X=\inf_{\alpha}\sup_{\beta}[x_{\alpha\beta}]\quad x_{\alpha\beta}\in K^{*}$$

としたとき，すべての k-valued の place f に k_0 上有理 B-因子を対応させる対応

$$\varDelta_X: f\rightarrow\varDelta_X(f)=\inf_{\alpha}\sup_{\beta}((f(x_{\alpha\beta})))$$

を **X に属する distribution** という．

又 $T\in G^{k}(U)$ のとき $\varDelta_T=\varDelta_{X_T}$ を因子 T に**属する distribution** という．

Distribution に関し次のことを注意しよう．

(i) $\varDelta_X$ は X によつて一意にきまるわけではない(X の表現 (1) には任意性がある) が $\varDelta, \varDelta'$ が共に X に属する distribution であれば $D_1, D_2\in G(B)$ が各 f に無関係にとれ

(2) $\quad\forall f:\ D_1\leqq\varDelta(f)-\varDelta'(f)\leqq D_2.$

(ii) $\varDelta(f_P)$ は center が P のすべての place f_P について等しい．そこで

$$\varDelta_T(P)=\varDelta_T(f_P)$$

と定義する．即ち Weil の場合 $\varDelta$ は U の k 上の有理点に k のイデアルを対応させる函数であつたが，いまの場合 $\varDelta$ は U の k 上の有理点に k_0 上有理 B-因子を対応させる．(2) は従つて $\varDelta_T, \varDelta'_T$ 共に T に属する distribution のとき $\exists . D_1, D_2\in G(B)$

(3) $\quad D_1\leqq\varDelta_T(P)-\varDelta'_T(P)\leqq D_2.$

定理 1. (分解定理) $x\in K^{*}$ に対し，$(x)=\sum m_i T_i$ と prime rational divisor に分解したとき，$\exists . D_1, D_2\in G(B)$, $x(P)$ が定義される任意の P に対し

$$\sum m_i\varDelta_{T_i}(P)+D_1\leqq(x(P))\leqq\sum m_i\varDelta_{T_i}(P)+D_2$$

が成立つ．

次に distribution とともに吾々の場合に更に有効な height の概念を導く．

いま $x=(x^0, x^1, \cdots, x^n)$ を射影空間 P^n の k の上の有理点とした時，k_0 上有理 B-因子 $-\inf_i((x_i))$ を考え

$$h(x)=\deg[-\inf_i((x_i))]$$

を点 x の height という．これは齊次座標 x^i のえらびかたにはよらない．又簡単に証明されることとして

補助定理 1. h_0 固定して，$h(x)\leqq h_0$ ならば，x の k_0 上の locus X の次数は有界．従つてとくに X は h_0 によつてのみきまる有限個の algebraic family のいずれかに属す．

さて φ を U から P^n の中への一つの有理写像とするとよく知られているように，fixed component をもたぬ U の linear series L が一意的にきまる．更に L に fixed points がなければ，φ は U の到る処で well-defined であるからこのとき U の k 上の有理点 Q に対して $h(\varphi(Q))$ が定義される．

定理 2. φ, φ' を夫々 U から $P^n, P'^{n'}$ の中への有理写像，L, L' を夫々 φ, φ' によつてきまる linear series とし共に fixed points をもたぬとする．L, L' が同一の complete linear series $\varGamma$ に属するならば

$$\exists . C_1, C_2\in G(B)$$

(4) $\quad\forall Q:\ C_1\leqq h(\varphi(Q))-h(\varphi'(Q))\leqq C_2.$

証明．$X\in L, X'\in L'$ とし，$\varDelta_X, \varDelta_{X'}$ として X, X' に属する distribution を適当にとれば

$$h(\varphi(Q))=\deg(\varDelta_X(Q)),\ h(\varphi'(Q))=\deg(\varDelta_{X'}(Q))$$

$$X-X'=(f)$$

となる．函数 f に分解定理を使えばよい．

(4) の意味で $h(\varphi(Q))$ は本質的に L の属する linear equivalence の class $\varGamma$ のみによつてきまるから

$$h_{\varGamma}(Q)=h(\varphi(Q))$$

と定義する．また (4) 式の意味で

$$h_{\varGamma+\varGamma'}=h_{\varGamma}+h_{\varGamma'}$$

となることに注意する．

§4. **(B) の証明**. $G(V)/G_a(V)$ の問題にもどる．$\theta: X\rightarrow X\cdot C$ によつて $G^{F}(V)/G_l^{F}(V)$ は $G^{F(M)}(C)/G_l^{F(M)}(C)$ に帰着できた．いま $G_0^{F(M)}(C)$ を degree 0 の $F(M)$ の有理 C-因子の群とすると

$$G^{F(M)}(C)/G_l^{F(M)}(C)=Z+H,$$

$$H=G_0^{F(M)}(C)/G_l^{F(M)}(C).$$

H の元は C の Jacobi 多様体 J の点と同一視する．$G_a(V)$ の θ による像を $H_a\subset H$ とすると証明すべきことは H/H_a が有限個の生成元をもつことである．2段に分けて

補助定理 2. s：任意自然数のとき H/sH が有限群．これは仮定する．

補助定理 3. $P_{\nu}^{(0)}$ $(\nu=1, \cdots, t)$ を H の有限個の元とし，任意の $P\in H$ に対して $P^{(0)}=P, P^{(1)}, \cdots, P^{(n)}, \cdots$ が

$$sP^{(n)}=P^{(n-1)}-P_{\nu_n}^{(0)}\quad 1\leqq\nu_n\leqq t,\ n=1, 2, \cdots$$

をみたせば，$n\gg 0$ に対し $P^{(n)}$ は H/H_a の有限個の，P に無関係に定まる元しか表わし得ない．

補助定理 2, 3 から H/H_a の有限性は直ちに従う．即ち補助定理に言う有限個の元を $P_1,\cdots,P_r$ (mod H_a) とすると

$$P^{(n)}=P_i \qquad 1\leqq i\leqq r$$
$$P^{(n-1)}=sP_i+P^{(0)}_{\nu_{n-1}}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$P=s^p\cdot P_i+s^{n-1}\cdot P^{(0)}_{\nu_{n-1}}+\cdots+P^{(0)}_{\nu_1} \quad (\mathrm{mod}\ H_a).$$

そこで height の理論の応用として補助定理3を証明する．

$P^{(n)}\in J$ の height $h(P^{(n)})$ は定理2より $h_\Gamma(P^{(n)})$ ともみられる．ここに Γ は J の超平面切断の class. J の自己同型

$$\theta_\nu:\ Q\to sQ+R^{(0)}_\nu \qquad (\nu=1,\cdots,t)$$

をとり，これによる1の超平面切断 L の逆像を L_ν とすると，Abel 多様体の因子の計算から [6]

$$(s^2-1)L\sim L_\nu+D_\nu \qquad D_\nu\geqq 0.$$

一方 $\theta_{\nu_n}(P^{(n)})=(P^{(n-1)})$ であるから，定理2より

$$(s^2-1)h(P^{(n)})\leqq h(P^{(n-1)})+C.$$

C は P によらない常数．これから直ちに $h(P^{(n)})$ の有界性が出て補助定理1を使えばよい．

文献

[1] A. Néron, Problèmes arithmetiques et geometriques rattaches a la notion de rang d'une courbe algebrique dans un corps, Bull. Soc. Math. France 80 (1952).
[2] D. G. Northcott, An inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties, Proc. Cambridge Philos. Soc. 45 (1939).
[3] ————, A further inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties, ibid.
[4] A. Weil, L' arithmetique sur les courbes algerbriques, Acta Math. 52 (1928).
[5] ————, Arithmetic on algebraic varieties, Ann. of Math. 53 (1951).
[6] ————, Variété abéliennes, Act. Sci. Ind. n° 1064.

（西村 孟記）

中井喜和，代数多様体の上の第1種微分に関する二三の結果

抽象的代数幾何学（universal domain の標数が素数 p ($\neq 0$) の場合）の分野においては，微分型式の理論に関して余り多くの結果が知られていない．然しその様な研究は大切なものでないかと思われる．特に最近の井草の結果[1]によつて，微分型式の理論が古典的代数幾何学における場合と異る新しい役目を果すかも知れない様相が見えだした今日，その感は特に深い．本稿においては特に第1種微分に関して得た二三の結果につき述べる．

1. V^r を射影空間 $\boldsymbol{S}^n$ におかれた．正規な多様体とし，k をその定義体とする．$\boldsymbol{P}=(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)$ を $\boldsymbol{V}$ の k に関する生成点とする．u_{ij} $(0\leqq i\leqq r+1,\ 0\leqq j\leqq n)$ を $(r+2)(n+1)$ 個の $k(\boldsymbol{P})$ に関して互に独立な変数とし，$K=k(u)$, $\eta_i=\sum_{j=0}^n u_{ij}\cdot\xi_j$ とおく．そうすれば $(r+1)$ 次元射影空間 $\boldsymbol{S}^{r+1}$ の点 $(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{r+1})$ は K の上に $\boldsymbol{V}^*$ という軌跡を持つ．この $\boldsymbol{V}^*$ を k に関して一般な $\boldsymbol{V}$ の射影とよぶ．$\boldsymbol{H}_i$ を $\sum_{j=1}^n u_{ij}\cdot X_j=0$ で定義された $\boldsymbol{S}^n$ の超平面，$\boldsymbol{C}_i=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{H}_i$，$y_i=\eta_i/\eta_0$ とおけば，$(y_i)=\boldsymbol{C}_i-\boldsymbol{C}_0$．$\boldsymbol{V}^*$ を定義する齊次型式を $F^*(Y_0, Y_1, \cdots, Y_{r+1})$ とし，$F(Y_1,\cdots,Y_{r+1})=F^*(1, Y_1,\cdots,Y_{r+1})$ とする．又 $(dy_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dy_i}\wedge\cdots\wedge dy_{r+1})+(r+1)\cdot\boldsymbol{C}_0=\boldsymbol{Y}_i$, $(1\leqq i\leqq r+1)$ とおけば，$\boldsymbol{Y}_i$ は $\boldsymbol{V}$ の正因子で且 $\boldsymbol{Y}_i$ と $\boldsymbol{Y}_j$ は i と j が異れば共通因子を持たない．かつ $F_i=\partial F/\partial y_i$, $m=\deg\boldsymbol{V}$ とおけば $(F_i)=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}_i-(m-1)\boldsymbol{C}_0$ をみたすような $\boldsymbol{V}$ の正因子 $\boldsymbol{X}$ が存在することが知られる．$x_i=\xi_i/\eta_0$, $\mathfrak{o}=K[x]$, $\mathfrak{o}'=K[y]$ とおけば，$\mathfrak{o}$ は $\mathfrak{o}'$ に関して整であり，かつ $\mathfrak{o}$ の $\mathfrak{o}'$ における導手 $\mathfrak{C}$ のどの素因子も位数が1であることが示される[2]．之より $\mathfrak{o}$ の元 α がもし $(\alpha)_0\succ\boldsymbol{X}$ をみたすならば，α は $\mathfrak{C}$ の元であることがわかる．以下此の導手 $\mathfrak{C}$ の元を $K[y]$ における **adjoint polynomial** と呼ぶことにする．

定理 1.[3] V^r を射影的に正規[4]で且つ特異点を持たない多様体，ω を q 階第1種微分とし，ω の定義体を K' ($\supset K$) とする．もし $q<r$ ならば ω は次の形にかける．

$$(1)\qquad \omega=\sum_{i_1<\cdots<i_q}\frac{A_{i_1\cdots i_q}}{F_{r+1}}dy_{i_1}\cdots dy_{i_q},$$

但し，和は $1,\cdots,r$ よりとつた q 個の数の順列 $i_1<\cdots<i_q$ の上に亘る．玆で $A_{i_1\cdots i_q}$ は次の条件 (2), (3) をみたす次数が高々 $m-q-1$ の $K'[y]$ における adj. poly. であり，かつ指数に関して交代対称であるとする．

$$(2)\qquad \sum_{j\neq i_1\cdots i_{q-1}} y_j A_{ji_1\cdots i_{q-1}}=A'_{i_1\cdots i_{q-1}}$$

$$(3)\qquad \sum_{j=0}^{q}(-1)^j F_{i_j}A_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_q}=F_{r+1}A'_{i_0 i_1\cdots i_q}$$

をみたすような次数が高々 $m-q-1$ の adj. poly. $A'_{i_1\cdots i_{q-1}}$ 及び $A'_{0i_1\cdots i_q}$ が存在する．

逆に係数が (2), (3) の条件をみたす微分型式 (1) は第1種微分である．又 r 階第1種微分 ω は

$$(4)\qquad \omega=\frac{A}{F_{r+1}}dy_1\wedge\cdots\wedge dy_r$$

とかける．但し A は $K'[y]$ における adj. poly. で次数が高々 $m-r-2$ のものである．逆に (4) の形の r 階微分型式は第1種である．

2. $\boldsymbol{V}$ を k で定義された正規多様体，$\boldsymbol{C}$ を k に関して一般な超平面による截口とすると，$\boldsymbol{C}$ はまた正規多様体である．$\bar{\omega}$ を $\boldsymbol{C}$ の上の $(r-1)$ 階第1種微分とすれば $\bar{\omega}=\mathrm{Res}_{\boldsymbol{C}}\Omega$[4] であるような $\boldsymbol{V}$ の上の r 階微分 Ω が存在する．その時更に Ω として，$(\Omega)+\boldsymbol{C}\succ 0$ であるものがとれるとき，$\bar{\omega}$ は性質 (P) を持つということにする．さて $\boldsymbol{K}$ を $\boldsymbol{V}$ の微分因子とすると，次の定理を得る．

定理 2. $\bar{\omega}$ が性質 (P) を持つのは $(\bar{\omega})=\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{C}$ であるような $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{C}$ に線型的に同値な $\boldsymbol{V}$ の正因子 $\boldsymbol{Z}$ が存在するとき，且そのときに限る．

3. ω を $\boldsymbol{V}$ の上の $(r-1)$ 階第1種微分とするとき，ω の $\boldsymbol{C}$ の上への trace $\omega_{\boldsymbol{C}}$ が性質 (P) を持つとき，ω

は $\boldsymbol{C}$ に関して性質 (P) を持つということにする.

補助定理. $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{C}$ は2におけると同様とし, ω を $\boldsymbol{V}$ の上の $(r-1)$ 階第1種微分とする. もし ω が $\boldsymbol{C}$ に関して性質 (P) を持つならば, $\boldsymbol{V}$ の超平面によるどんな既約な截多様体に関しても, ω は性質 (P) を持つ.

此の時我々は単に ω は性質 (P) を持つということにする. さて $\boldsymbol{V}$ を射影的正規な特異点を持たない多様体とするとき1の結果をつかえば, 性質 (P) を持つ $(r-1)$ 階第1種微分は

$$\omega=\sum_{i=1}^{r}(-1)^i\frac{A_i-y_iA_0}{F_{r+1}}dy_1\wedge\cdots\wedge dy_r$$

と書くことが出来る. 玆に A_i は次数が高々 $m-r-1$ の adj. poly. である. 尚これに (3) の条件を使用すれば

$$\sum_{i=0}^{r+1}A_i^*(\eta)F_i^*(\eta)=0 \qquad (5)$$

をみたすような adj. poly. A_{r+1} の存在がわかる. 但し, ここで $A_i^*(\eta)=\eta_0^{m-r-1}A_i(\eta)$, $F_i^*=\partial F^*/\partial\eta_i$.

さて著者は, $\boldsymbol{V}$ の上の $(r-1)$ 階第1種微分 ω は決して性質 (P) を持たないという古典的代数幾何学においてはよく知られた結果を抽象的に証明することを目的としたのであるが, その証明は得ていない. 然しここで次の補助定理を予想として提出する.

補助定理*. 特異点を持たない射影多様体 $\boldsymbol{V}^r$ の一般な射影を $\boldsymbol{V}^*$ とし, $F^*(Y_0, Y_1, \cdots, Y_{r+1})$ を $\boldsymbol{V}^*$ を定義する齊次型式とする. m を F^* の次数, A_i^* を次数が $m-r$ より小さい齊次型式で恒等的に

$$\sum_{i=0}^{r+1}A_i^*(Y)F_i^*(Y)=0$$

をみたすとする時, もし m が universal domain の標数 p でわれなければ A_i^* は恒等的に0である.

此の補助定理*が肯定的ならば, 上に述べた問題は, $\deg \boldsymbol{V}$ が p の倍数でないとき肯定的に解決されることは容易にわかる. $r=1$ の時は此の補助定理*は Castelnuovo により証明され代数曲面における第1種微分の理論に本質な役目を果している[6]. 尚此の補題が肯定的ならば, 之より第1種微分に関する他の結果, 例えば第1種微分の独立性が一般な超平面による截口の上においても保存されることを導き出すこともできる.

註

1) Igusa, J., On some problems in abstract algebraic geometry, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **41** (1955).

2) 此の事実は永田に負う.

3) 此の論文が書き上げられた後, 河原より彼も亦同じような結果を異る方法で得たことをきいた.

4) $\boldsymbol{V}$ が射影的に正規とは, $\boldsymbol{V}$ の齊次座標環が整閉であることをいう.

5) Ω の $\boldsymbol{C}$ に関する Poincaré residue を表わす.

6) Severi, F., Sugl' integrali algebrici semplici et doppi. Rend d. r. Acad. Lincei, **7**, 1928.

永田雅宜, 局所環における重複度の理論

局所環における重複度の理論は Chevalley により導入され, Samuel により一般化された. われわれは Samuel の定義に従つて重複度の理論の進展と Samuel, Chevalley の扱いの簡易化とをする.

くわしいことは論文 'The theory of multiplicity in general local rings' にゆずる.

1. 半局所環 $\mathfrak{o}'$ が局所環 $\mathfrak{o}$ を含んでいて, $\mathfrak{o}'$ のどの極大イデアル $\mathfrak{p}'$ をとつても $\mathfrak{o}'/\mathfrak{p}'$ は有限 $\mathfrak{o}'/(\mathfrak{p}'\cap\mathfrak{o})$ 加群であるとする. ($\mathfrak{p}=\mathfrak{p}'\cap\mathfrak{o}$ は $\mathfrak{o}$ の極大イデアル.) $\mathfrak{p}$ に属する任意の準素イデアル $\mathfrak{q}$ をとれば, $l(\mathfrak{o}'/\mathfrak{q}^n\mathfrak{o}'\,;\,\mathfrak{o})$ ($l(M\,;\,\mathfrak{o})$ は $\mathfrak{o}$-加群 M の長さを表わす) は十分大きい n については n の多項式として表わされる. その多項式を $a_0n^d+a_1n^{d-1}+\cdots+a_n(a_0\neq 0)$ とすると, $d=\mathrm{rank}\,\mathfrak{o}'$ である. $d!\times a_0$ を $\mathfrak{q}\mathfrak{o}'$ の $\mathfrak{o}$ に関する relative multiplicity といい, $\mathrm{rm}(\mathfrak{q}\mathfrak{o}'\,;\,\mathfrak{o})$ で表わす.

(Extension formula) 上で $\mathfrak{o}'$ が有限 $\mathfrak{o}$-加群であつたとする. さらに, $\mathfrak{o}$ に関し一次独立元 $a_1, \cdots, a_n\ (\in\mathfrak{o}')$ と $\mathfrak{o}$ の元 a で $\mathfrak{o}'$ で零因子でないものとがあつて, $a\mathfrak{o}'\subseteq\sum\mathfrak{o}a_i$ であつたとする. このとき $\mathfrak{o}$ の極大イデアルに属する任意の準素イデアル $\mathfrak{q}$ について

$$\mathrm{rm}(\mathfrak{q}\mathfrak{o}'\,;\,\mathfrak{o})=n\cdot e(\mathfrak{q}).$$

2. (加法性) $\mathfrak{o}$ を局所環, $\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{o}$ の極大イデアルに属する準素イデアルとする. すると $e(\mathfrak{q})=\sum e(\mathfrak{q}+\mathfrak{q}_i/\mathfrak{q}_i)$, ここに $\mathfrak{q}_i$ は, 0の準素成分であつて $\mathrm{rank}\,\mathfrak{o}=\mathrm{rank}\,\mathfrak{o}/\mathfrak{q}_i$ であるものすべてにわたる.

この結果は, 次の定理とを合せると, 重複度の計算を整域の場合に reduce することができることがわかる.

(Reduction theorem) 局所環 $\mathfrak{o}$ の0が準素イデアルであつたとする. $\mathfrak{p}$ を0の素因子とするとき, 極大イデアルに属する任意の準素イデアル $\mathfrak{q}$ について $e(\mathfrak{q})=e(\mathfrak{q}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})\cdot l(\mathfrak{o}_\mathfrak{p})$.

3. 正則局所環は, 重複度1が unmixed (=齊次元) であることにより特徴づけられる.

4. 局所環 $\mathfrak{o}$ の媒介変数素 $x_1, \cdots, x_d$ が distinct であるとは, $e(\sum x_i\mathfrak{o})=l(\mathfrak{o}/(\sum x_i\mathfrak{o}))$ であるときにいう.

i) 媒介変数素 $x_1, \cdots, x_d$ が distinct であるための必要十分条件は, どの x_i も $(x_1, \cdots, x_{i-1})$ を法として零因子でないことである.

ii) 局所環 $\mathfrak{o}$ についての次の三つの条件は互に同値である. イ) $\mathfrak{o}$ は distinct な媒介変数素をもつ. ロ) $\mathfrak{o}$ のどの媒介変数素も distinct である. ハ) $\mathfrak{o}$ において unmixedness theorem が成立する.

この ii) を使つて, unmixedness theorem の成立する環についていろいろの性質が知られる. 例えば Noether 環 $\mathfrak{o}$ で unmixedness theorem が成立すれば, $\mathfrak{o}$ の上の多項式環 (有限変数) でも成立する.

5. Chevalley の theorem of transition は次のように一般化される. (証明も非常に簡単).

$\mathfrak{o}$ を局所環, $\mathfrak{o}^*$ をその完備化とする. $\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{o}$ の素イ

デアル，$\mathfrak{z}^*$ を $\mathfrak{z}\mathfrak{o}^*$ の極小素因子とする．$m=l(\mathfrak{o}^*{}_{\mathfrak{z}^*}/\mathfrak{z}\mathfrak{o}^*{}_{\mathfrak{z}^*})$ とおく．すると $\mathfrak{z}$ に属する任意の準素イデアル $\mathfrak{q}$ について，$l(\mathfrak{o}^*_{\mathfrak{z}^*}/\mathfrak{q}\mathfrak{o}^*{}_{\mathfrak{z}^*})=m\cdot l(\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}}/\mathfrak{q}\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}})$.

従つて，$e(\mathfrak{q}\mathfrak{o}^*{}_{\mathfrak{z}^*})=m\cdot e(\mathfrak{q}\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}})$，rank $\mathfrak{z}^*=$ rank $\mathfrak{z}$.

6. Chevalley の associativity formula は次のように一般化される．(最近 Serre 氏も同じ結果を証明した由.)

$x_1, \cdots, x_d$ を局所環 $\mathfrak{o}$ の媒介変数系とし，$\mathfrak{q}=(x_1, \cdots, x_d)$，$\mathfrak{a}=(x_1, \cdots, x_r)$ とおく．すると，

$$e(\mathfrak{q})=\sum_{\mathfrak{z}} \epsilon\ (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}})\cdot e(\mathfrak{q}+\mathfrak{z}/\mathfrak{z}).$$

ここに $\mathfrak{z}$ は，$\mathfrak{a}$ の素因子で，rank $\mathfrak{z}=r$，rank $\mathfrak{o}/\mathfrak{z}=d-r$ なるものすべてをわたる．

7. $\mathfrak{z}$ を局所環 $\mathfrak{o}$ の素イデアルとする．rank $\mathfrak{z}+$rank $\mathfrak{o}/\mathfrak{z}=$ rank $\mathfrak{o}$，かつ $\mathfrak{z}$ は解析的不分岐であるとする．このとき，$\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}}$ の重複度は $\mathfrak{o}$ のそれより大きくはない．

この結果を代数幾何に適用すれば，一つの model で重複度が $\geqq r$ なる点全体は，閉集合 (bunch) になることがわかる．

午後は，14 時—15 時，彌永昌吉教授座長のもとに次の九つの short communications が行われた．

成田正雄，完備な局所環の構造について．

高橋秀一，Fermat の函数体について．

国吉秀夫，有理函数体のある部分体．

増田勝彦，Galois 構造についての整数論について．

東屋五郎，多元環の存在定理．

河田敬義，類の構成についての注意．

守屋美賀雄，2-コホモロジー群とディフェレンテとの関連．

中野　昇，無限次代数体内のイデアル論．

森島太郎，Fermat の最後の定理について．

森島教授の報告について，Artin 教授から，'Fermat の定理よりも，類数に関する結果が重要だから，完全な証明を書いて発表することを望む旨の発言があつた．

15時より閉会式が行われ，末綱教授のあいさつで閉会．

その後，晩餐会までの余暇に，Ramanathan 教授を中心に，Chevalley 教授，久賀道郎氏，小野孝氏，森川寿氏ら有志が集つて，2次形式とモジュラー函数に関する非公式討論会が行われた．

18 時から 20 時まで，金谷ホテル食堂で，送別晩餐会が行われ，最後に全員螢の光を合唱して散会．翌 14 日昼すぎ，浅草駅に帰つて，解散した．

2次形式についての非公式討論会

最終日の会議終了後 Ramanathan 教授の提案により2次形式およびモジュラー函数についての非公式の討論会が公式会場と同じ場所において行われた．出席者は Ramanathan 教授，Chevalley 教授，彌永教授，河田教授，其の他この題目について興味をもつ日本側の若い研究者であつた．

討論会は先ず森川氏（名大）が自分の論文を Ramanathan 教授に説明することから始め，それについての質疑が Ramanathan 教授と森川氏の間に行われた後，久賀氏（東大教養）の‘2次形式の principal problem は何か’という質問に対して Ramanathan 教授は例えば Siegel の研究を algebra の場合に一般化することなども一つの問題であると前置きして次の様な話をした．即ち今簡単のために $\varDelta$ を有理数体 $\varGamma$ 上の quaternion の algebra とし $\varDelta/\varGamma$ の底を $1, i, j, ij$ とする時 $\varDelta$ の一般の元 $x=a_0+a_1i+a_2j+a_3ij$, $a_i \in \varGamma$, $(i=0,1,2,3)$ の共軛元を普通の通り $\bar{x}=a_0-a_1i-a_2j-a_3ij$ と定める．$\varDelta$ の元素をもつ行列 M が skew-symmetric であるというのは，$\bar{M}'=-M$ であると定義する．此処で $\bar{M}$ は各元素をその共軛元で置き換えた行列で，$'$ は転置行列を示すものとする．いま $M=(a_{ij})$ として，skew-symmetric form $\sum\limits_{i,j}\bar{x}_i a_{ij} x_j$ を考えると体の場合には skew-symmetric form は何時でも non-trivially に 0 になるが，この場合には non-trivially には 0 とならない行列が存在する事も可能である．例えば

$$\begin{pmatrix} i+j, & 0 \\ 0, & i+j+ij \end{pmatrix}$$

は skew-symmetric matrix であつて，これに対する skew-symmetric form は trivial にしか $=0$ とならない．この様な場合に Siegel の色々の結果を一般化する事を試みるならば，例えば λ を $\varDelta$ の或る元とする時

$$\bar{X}'MX=\sum_{i,j}\bar{x}_i a_{ij} x_j=\lambda$$

(X は列ベクトル) の $\varDelta$ における整数解の個数を適当な仕方で求めよという問題もおきてくる．然し一般にこの行列による整数解は無限にあるという事が証明出来る．それは $\bar{U}'MU=M$ が成立つような，元素が皆整数である行列 U のなす群は無限群であるということが証明出来るからである．また，このような行列 U を或る適当な空間の上で表現すると，基本領域が Siegel の方法により finite な領域になるということも示すことが出来る．それを証明するには有理数体 $\varGamma$ を実数体 $\bar{\varGamma}$ まで係数拡大をすると $\varDelta$ の係数拡大 $\bar{\varDelta}$ はまた $\bar{\varGamma}$ 上の quaternion の algebra であつて，その時はじめの行列 M は次の様な形に書きかえることができる．

$$M=\bar{C}'\begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}C,$$

此処で C は $\varDelta$ の元をもつ行列である．M がこの様な形に書きなおされたならば後は Siegel の方法と同一の方法により証明出来る．此処で Ramanathan 教授は Siegel の方法について簡単に概略を説明してその話を終えた．この後森川氏がモジュラー函数の involutive division algebra への一般化について話した後，Chevalley 教授が次のような2次形式の問題を更に一般化した問題

を提出した．即ち G を有理数体 Q 上の algebraic linear group，V をその上に G が作用するベクトル空間，$(x_1, \cdots, x_n)$ を V の base とする．G は幾つかの invariants，即ち base の函数により定義され得ることはよく知られている．今 G を semi-simple と仮定すると，此等の函数は多項式になることも知られている．その時問題の第一は今上に述べた二つの bases の函数が互いに group G の作用により変換され得るための必要且十分な条件を求めることというのであつた．更にベクトル空間 V の中で有理整数環の上の加群 M を考え，$\{x_1, \cdots, x_n\}$ を M の base とする．其の時前に述べた意味の群 G を定義する多項式 $J_k(x_1, \cdots, x_n)$ と有理素数 p を考えると $J_k(x_1, \cdots, x_n)$ は有理係数だから分母の正規 p-進賦値に対する値を考えることができる．それを $\|J_k(B)\|_p$ $(B=(x_1, \cdots, x_n))$ と表わす時，無限素点 p_∞ に対して

$$\underset{B \text{ all bases of } M}{\mathrm{Min}} \|J_k(B)\|_{p_\infty}$$

を考える．第二の問題は上の値が bounded ならば群 G の作用により加群 M を類に分けた時，それ等の類の個数が有限であるということが出来るかというのであつた．

Chevalley 教授の話の後，小野氏(名大)が algebraic group の問題について，Chevalley 教授に質問し，Chevalley 教授との間に質疑があつた後，久賀氏が Siegel の mean value theorem の或る一つの一般化を報告し矢張り Siegel の mean value theorem の他の或る一般化を玉河氏(東大理)が報告し，同氏はまたこれとは別に Eichler の研究に関連して一つの問題を提出した．

ここで予定の時間が過ぎたので討論会は打切りとなつた．何分最終日の公式のスケジュールが組んである時間の合間をみての討論会であつたので時間の制約があつたのは残念であつた．(藤崎源二郎記)

来日数学者の各地における講演

国際数学会議のため来日された数学者は，会議の前後に，各地の数学教室において講演された．Artin, Brauer, Deuring, Ramanathan, Serre, Weil の諸氏の講演の記録が得られたので，その概要を以下に紹介しよう．

E. Artin，有限単純群の位数[1)]

I. Survey of the known finite simple groups.

A) Groups of Lie type :

$q=p^r$ を素数 p の冪とする．有限体 F_q 上の Lie type の単純群は大別して次の4種である．

$L_m(q)$: linear group
$U_m(q)$: unitary group
$S_m(q)$: symplectic group
$O_m(q)$: orthogonal group

それらは次のようにして構成される．

V を F_q 上の次元 $m \geqq 2$ (orthogonal の場合には $m \geqq 3$) のベクトル空間，unitary の場合だけは特に F_q の2次の拡大体 F_{q^2} 上の次元 $m \geqq 2$ のベクトル空間とする．f を V 上の non-degenerate form で unitary の場合には hermitian (conjugation は F_{q^2} の2次の automorphism)，symplectic の場合には symplectic bilinear (従つて m は偶数)，orthogonal の場合には quadratic なるものとする．

G を linear の場合は V の unimodular transformation 全体，その他の場合は f を不変にする V の unimodular transformation 全体の群とする．Orthogonal の場合には H を G の commutator subgroup (ただし q が偶数，m が奇数の場合を除く) とし，他の場合は $H=G$ とおく．H をその center で割つた factor group が表記の(単純)群である[2)]．

Unitary, symplectic 及び奇数次元 orthogonal の場合これらの群の構造は f によらないが，偶数次元 orthogonal の場合 f のとり方によつて二種の orthogonal group がえられる．それらを $O_m(\varepsilon, q)$，$\varepsilon=\pm 1$ で表わす．

これらの群の他に最近 Chevalley によつて発見された rank $m=2, 4, 6, 7, 8$ の例外の Lie 群に対応する群 $E_m(q)$ をつけ加えねばならない．

B) m 文字の交代群 A_m $(m \geqq 5)$.

C) 五つの Mathieu 群，位数はそれぞれ 7920, 95040, 443520, 10200960, 244823040.

II. Isomorphisms between these groups. 上記の群の間の同型として次のものが知られている．

1) $L_2(q) \cong U_2(q) \cong S_2(q) \cong O_3(q)$
2) $O_5(q) \cong S_4(q)$
3) $O_4(+1, q) \cong L_2(q) \times L_2(q)$
4) $O_4(-1, q) \cong L_2(q^2)$
5) $O_6(+1, q) \cong L_4(q)$
6) $O_6(-1, q) \cong U_4(q)$
7) $O_{2n+1}(q) \cong S_{2n}(q)$　(q : 偶数)
8) $L_2(3) \cong A_4$; 位数 $N=12$
9) $L_2(4) \cong L_2(5) \cong A_5$; $N=60$
10) $L_2(7) \cong L_3(2)$; $N=168$
11) $L_2(9) \cong A_6$; $N=360$
12) $L_4(2) \cong A_8$; $N=20160$
13) $U_4(2) \cong S_4(3)$; $N=25920$

注意．8) の群は simple でない．参考のため単純群の位数を小さい方から少しかいてみれば次の通り：