Univ. Tokyo, **44**, Art. 5 (1922), 1-50.

18. On the law of reciprocity in the cyclotomic corpus, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, Ser. III, **4** (1922), 173-182.
19. Note on Fredholm's determinants, Nagaoka Anniversary Volume, Tokyo, 1924, 313-318.
20. On an algebraic problem related to an analytic theorem of Carathéodory and Fejér and on an allied theorem of Landau, Jap. J. Math., **1** (1924), 83-93, (Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, Ser. III, **6** (1924), 130-140.)
21. Remarks on an algebraic problem, Jap. J. Math., **2** (1925), 13-17.
22. On the mutual reduction of algebraic equations, Proc. Imp. Acad. Japan, **2** (1926), 41-42.
23. Zur Theorie des Kreiskörpers, J. Reine Angew. Math., **157** (1927), 230-238.
24. On the theory of indeterminate equations of the second degree in two variables, Bull. Calcutta Math. Soc. Commemoration Volume, **20** (1928), 59-66.
25. Zur Theorie der natürlichen Zahlen, Proc. Imp. Acad. Japan, **7** (1931), 29-30.
26. Zur Axiomatik der ganzen und der reellen Zahlen, Proc. Imp. Acad. Japan, **21** (1945), 111-113.

高木先生と類体論

河田敬義

§1. 代数的整数論は F. Gauss の Disquisitiones Arithmeticae (1801) に始まる．以来 L. Dirichlet, E. Kummer, L. Kronecker, R. Dedekind, H. Weber, D. Hilbert などの巨匠たちによって展開されて来た理論は，高木先生の類体論(1920)によって完成されたと言うことができる．類体論は代数的整数論のかなめに位するので，それ以前の結果がこれによって統一され，それ以後の発展がここを出発点とする．

高木先生の類体論の先駆の役割を果したのは，Hilbert の‘整数論報告’(報文)[1](1897)とそれにつづく諸論文[2], [3]および Weber の‘代数学’第3巻[1](1908)である．Hilbert の報文は，19世紀に得られた諸結果を彼自身の目によって整理したもので，類体 (Klassenkörper) という言葉もここに初めて現われる．報文は全体で五部よりなる．第一部は代数体の一般論，第二部は Galois 拡大における分岐の理論，第三部は2次体の理論，第四部は円体の理論，第五部は Kummer 体の理論である．ここに有理数体 Q に1の原始 m 巾根 ζ_m を添加した体を円分体といい，或る円分体の部分体を円体と総称する．またここで Kummer 体というのは，素数 l に対して，円分体 $Q(\zeta_l)$ にその元 α の l 巾根を添加した体 $Q(\zeta_l, \sqrt[l]{\alpha})$ をいう．この第五部は当時到達しえた最高水準ともいうべき円分体 $Q(\zeta_l)$ における l 巾剰余に関する Kummer の理論を含んでいる．

Hibert は報文につづく論文[3]において，類体を次のように定義した．“k を任意の代数体とし，k の狭義の類数[1]を h とする．そのとき k 上に次数 h の不分岐 Abel 拡大 K がただ一つ存在する．かつ K/k の Galois 群は k の狭義のイデアル類群と同型になる．” このイデアル類群との密接な関係に着目して，Hilbert は K を k の上の類体と名付けた．今日では類体の概念が拡張されているので，Hilbert の類体を**絶対類体**と呼ぶ．もっとも Hilbert は一般の代数体 k に対して k 上の絶対類体の存在を予想したにとどまるので，彼自身は特殊な場合 ($h=2$ 等) に証明を与えたに過ぎない．一般の場合における絶対類体の存在は後に Furtwängler[1](1907)によって証明された．

Hilbert の報文の第三，四，五部で取り扱われているのはすべて特殊な Abel 拡大の理論で，平方剰余や巾剰余の相互律が一つの中心課題であった．虚の2次体の上の Abel 拡大に関する虚数乗法の理論は，このときまだ十分に体系化されていないという理由で報文には取り入れられていない．

“代数体の理論は，驚嘆すべき美と調和を備えた建築物に比べられる．この建物の最も豊かに飾られた部分は，Abel 拡大に関する理論であると思われる．それは Kummer が高次の相互律に関する研究によって，また Kronecker が楕円函数の虚数乗法の研究によって，われわれに示したものである．これらの深い洞察は，同時に，この分野

に最も貴重な宝庫がかくされていることを示し，この宝の価値を知りかつこれを手に入れようと熱心に努める研究者をさしまねいている．"[2]

この見地から Hilbert は彼の 23 の問題 (1900) の中に，代数的整数論と特に関係の深い次の二つを取り入れた．その一つは**第 9 問題**で"任意の代数体 k において，l 巾剰余の相互律を証明すること"[3] である．これは類体論の応用として高木先生[2] (1922) および Artin [3] (1927) によって解決された．

いま一つは**第 12 問題**で，Abel 体の構成問題である．報文第三部に述べてある Kronecker の定理"有理数体上の任意の Abel 拡大は円体である"という結果を，一般代数体に拡張せよというのである．この拡張には二つの命題が含まれている．その一つは代数的な部分であって，与えられた基礎体 k の上に，与えられた Abel 群を Galois 群とし，与えられた判別式を持つような拡大 K/k がいつどれだけ存在するかという問題である．これも高木先生の類体論で本質的な部分は解決された[4]．その二は超越的な方法を用いて具体的にこのような Abel 拡大 K/k を構成せよという問題である．基礎体が有理数体であれば，その上の Abel 拡大は 1 の巾根すなわち指数函数の等分値によって構成される．また基礎体が虚の 2 次体の場合には，その解答は Kronecker の'青春の夢'として予想され，楕円函数の虚数乗法論を用いて，Kronecker, Weber, R. Fueter などをへて，高木先生の類体論をまって完全に解決された．Hilbert は"一般の代数体 k の上の Abel 拡大 K を具体的に構成すること"を，整数論および函数論の最も深遠かつ重大な問題の一つとして提出したのである．この問題の全面的な解決は今後の一つの大目標として残されている．

Hilbert は，整数論と他の分野との関係，特に代数函数論との類似関係を深く考慮に入れていた．この認識の上に立って，代数函数の Riemann 面の最大不分岐 Abel 被覆面との類似に基づいて，Hilbert は彼の類体の存在を予想したものと思われる．また彼は代数体の局所理論としての $\mathfrak{p}$ 進体の理論の重要性を認め，代数函数の留数定理と代数体のノルム剰余記号の和定理との類似を注意している．しかし Abel 拡大の理論に関しては，"代数函数は何できまるか．それは Riemann 面できまる"という立場から，拡大の不分岐性に固執して，"Abel 拡大はすなわち類体である"という類体論の基本定理を予見できなかった．

"類体論に関しては，あれは Hilbert にだまされていたのです．つまりこちらが勝手にだまされていたので，ミスリードされたのです．"[5]

2 次体，円体，Kummer 体，虚数乗法論等のすべての Abel 拡大の理論をおおって，しかもそれを Hilbert の絶対類体の概念の拡張として把握したのが高木先生の類体論であるが，先生自身も初めからこのような理論を目標とされたのではなかったようである．主論文に先立つ数篇の論文において Hilbert の理論の拡張を積み重ねていって，ついにこの結果に到達されたのではあるまいか．

さて分岐を持つ類体の概念は Weber [1] によって，虚数乗法論の諸結果からの類推によって導入された．元来 Hilbert の絶対類体 K/k は，次の諸性質を持つことが予想された[6]．

（1） K/k は最大不分岐 Abel 拡大である．

（2） K/k の Galois 群は，k の狭義のイデアル類群と同型である．

（3） k の素イデアル $\mathfrak{p}$ の K/k における分解様式は $\mathfrak{p}$ の属する狭義のイデアル類によって定まる．特に $\mathfrak{p}$ が K/k で完全分解する：

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots\mathfrak{P}_n, \qquad n=[K:k]$$

のは，$\mathfrak{p}$ が総正な主イデアルである場合に限る．

（4） k のすべてのイデアルは K で主イデアルとなる．

これに対して，分岐のある Abel 拡大の理論の古典的な例は円分体である．すなわち $k=Q$, $K=Q(\zeta_m)$ とする．自然数 m と互いに素な有理数全体の作る乗法群を A_m と書き，$\alpha\equiv 1 \pmod{m}$ となる $\alpha\in A_m$ の全体の作る部分群を S_m と書く．そのとき

（1）* K/k で分岐する素数は m の約数に限る．

（2）* K/k は Abel 拡大で，その Galois 群は A_m/S_m と同型である．

（3）* （i） 素数 p が S_m に属するとき，p は K/k で $(p)=\mathfrak{P}_1\cdots\mathfrak{P}_n$, $n=[K:k]$ と完全分解する．

（ii） p が f 巾して初めて S_m に属するとき，

p は K/k で $(p)=\mathfrak{P}_1\cdots\mathfrak{P}_g$, $N\mathfrak{P}_i=p^f$, $n=fg$ と分解する. ただし, p は m を割らない素数とする.

Weber は基礎体 k として虚の2次体をとり, k に Weber の τ 函数の等分値を添加した体 K に対して, 虚数乗法論を用いて, 上の(1)*, (2)*, (3)* に相当する結果を導いた. さらに Weber は, 一般の代数体においてイデアル類群の概念を拡張し, これを用いて類体の定義を拡張したが, これに関して多くの結果を導くことはなかった.

§2. 今日いう類体は, 絶対類体の定義において不分岐性の仮定を除き, Weber の導入したイデアル類群の拡張を利用したものである. 高木先生はまずこのように拡張された意味での類体の存在を証明し(1915), ついで主論文 [1](1920) で, "Abel 拡大すなわち類体である" という基本定理に到達されたのである. これは先生自身にとっても予想外の好結果であった.

"当時これはあまりにも意外なことなので, それは当然間違っていると思った. 何が間違いか実例を探して見ても, 間違いの実例が無い. 大分長く間違いばかり探していたので, その後理論ができ上った後にも自信が無かった."[7]

以下簡単に主論文の内容を説明しよう. k を任意の代数体とし, $\mathfrak{m}$ を k の一つの整イデアルとする. $\mathfrak{m}$ と素な k の素イデアルより生成される k のイデアル全体の作る乗法群を $\mathfrak{A}_\mathfrak{m}$ と書く. $\mathfrak{m}$ と素な k の総正な元 α で, $\alpha\equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ なものの作る主イデアル (α) 全体の作る乗法群を $\mathfrak{S}_\mathfrak{m}^*$ と書く. $\mathfrak{S}_\mathfrak{m}^*$ は $\mathfrak{A}_\mathfrak{m}$ の指数有限な部分群である. 一般に $\mathfrak{A}_\mathfrak{m}\supset\mathfrak{H}\supset\mathfrak{S}_\mathfrak{m}^*$ となる乗法群 $\mathfrak{H}$ を m を法として定義される**イデアル群**という. イデアル群 $\mathfrak{H}$ に対して, これを定義し得る最大の整イデアル $\mathfrak{f}$ を, $\mathfrak{H}$ の**導手**という[8].

定義. 基礎体 k においてイデアル群 $\mathfrak{H}$ を任意に与えるとき, k の拡大 K が **$\mathfrak{H}$ に対応する類体**であるとは, k の素イデアル $\mathfrak{p}$ で $\mathfrak{H}$ に属するもののみが K/k で完全分解する:

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots\mathfrak{P}_n,\qquad n=[K:k]$$

ことをいう[9].

類体 K/k に対して, 上に挙げた性質 (1), (2), (3) (または (1)*, (2)*, (3)*) に対応する次の諸定理が成り立つ.

一意性定理. k のイデアル群 $\mathfrak{H}$ に対応する類体 K は, (もし存在すれば) それはただ一つである.

存在定理. k の任意のイデアル群 $\mathfrak{H}$ に対して, $\mathfrak{H}$ に対応する類体 K が必ず存在する.

分岐定理. イデアル群 $\mathfrak{H}$ に対応する類体 K/k で分岐する k の素イデアルは, $\mathfrak{H}$ の導手 $\mathfrak{f}$ を割るものだけである.

同型定理. イデアル群 $\mathfrak{H}$ に対応する類体 K/k は, k の Abel 拡大で, K/k の Galois 群 $G(K/k)$ は $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}/\mathfrak{H}$ と同型である.

分解定理. イデアル群 $\mathfrak{H}$ の導手 $\mathfrak{f}$ を割らない素イデアル $\mathfrak{p}$ の K/k における分解形式は, $\mathfrak{p}$ の属する mod $\mathfrak{H}$ の剰余類のみによって定まる. すなわち $\mathfrak{p}$ の f 巾が初めて $\mathfrak{H}$ に属するならば, $\mathfrak{p}$ は K/k において, $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_1\cdots\mathfrak{P}_g$, $N_{K/k}\mathfrak{P}_i=\mathfrak{p}^f$, $n=fg$ と分解される.

一般に K を k の拡大とする. k の整イデアル $\mathfrak{m}$ を任意にとるとき, 剰余類群 $\mathfrak{A}_\mathfrak{m}/\mathfrak{S}_\mathfrak{m}^*$ において, K のイデアルのノルムを含む剰余類全体を $\mathfrak{H}_\mathfrak{m}(K/k)$ とおく. このとき, $[\mathfrak{A}_\mathfrak{m}:\mathfrak{H}_\mathfrak{m}]\leqq[K:k]$ が成り立つ. この左辺の値を最大ならしめるイデアル群 $\mathfrak{H}$ を **K に対応するイデアル群**と呼ぶ. K/k が k のイデアル群 $\mathfrak{H}$ に対応する類体であれば, K に対応するイデアル群は $\mathfrak{H}$ である. また K/k に対応するイデアル群 $\mathfrak{H}(K/k)$ に対して, $[\mathfrak{A}_\mathfrak{f}:\mathfrak{H}]=[K:k]$ が成り立てば, K は $\mathfrak{H}(K/k)$ に対応する類体となる[10]. さて "k のどんな拡大が類体であるか", すなわち "$[\mathfrak{A}_\mathfrak{f}:\mathfrak{H}(K/k)]=[K:k]$ がいつ成り立つか" という問題の決定的な解答を与えるのが, 次の基本定理である.

基本定理. k の任意の Abel 拡大 K/k は類体である.

したがって, 任意の基礎体 k に対して, 一方では k の Abel 拡大 K が, 他方では k のイデアル群 $\mathfrak{H}$ が, 互いに他を一意に特徴付けつつ一対一に対応する.

類体論の応用の中で, Dirichlet の算術級数中の素数に関する定理の拡張を見のがすことができない. すなわち

拡張された算術級数の定理. k の任意のイデアル群 $\mathfrak{H}$ に対して, $\mathfrak{H}$ の各剰余類は無限に多くの素

イデアルを含む.

主論文の最後の章で，類体論の実例として

Kronecker 青春の夢の確認. 虚の2次体 k のすべての Abel 拡大は1の巾根，モジュラー函数 $j(\tau)$ の虚の2次無理数における値（いわゆる特異値），および Jacobi 楕円函数の等分値によって生成される

ことが証明された. ここに Abel の楕円函数以来多くのすぐれた数学者の関心を集めた問題に最後の断定を下したのである.

主論文につづく論文[2] (1922) は，“任意の体における相互律”に関するもので，これはすでに述べたように類体論の応用として，Hilbert の第9問題を（素数 l の場合に）解決したものである. しかも先生は一般相互律の本質的な内容は，“l を奇の素数とし，基礎体 k が1の l 巾根を含むとき，k の数 μ に対して体 $K=k(\sqrt[l]{\mu})$ に対応する k のイデアル群 $\mathfrak{H}(K/k)$ の導手を $\mathfrak{f}$ とすれば，k のイデアル $\mathfrak{a}$ に対応する l 巾剰余記号 $\left(\dfrac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ の値は，$\mathfrak{a}$ を含む mod $\mathfrak{f}$ の剰余類のみによる”点にあることを洞察された.

この見解は，Artin[3] (1927) によって本質的な発展を成しとげた. Artin の得た定理は，これまでの各種相互律の源となるもので，それ自身は類体論の同型定理における対応を具体的に与えるものであった. すなわち Abel 拡大 K/k において，分岐しない k の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して

$$\sigma A \equiv A^{N\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{p}}$$

がすべての K の整数 A に対して成り立つような K/k の Galois 群の元 σ が定まる. ただし $N\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}$ の絶対ノルムを表わす. σ を $\mathfrak{p}$ の **Artin 記号**と呼び，$\sigma=\left(\dfrac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ と書く.

一般相互律. k のイデアル群 $\mathfrak{H}$ に対応する類体を K/k とする. そのとき K/k で分岐しない素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，$\mathfrak{p}$ の Artin 記号 σ は $\mathfrak{p}$ の属す mod $\mathfrak{H}$ の剰余類のみによって定まる. かつこの対応によって，mod $\mathfrak{H}$ の剰余類と，K/k の Galois 群の元とは一対一に対応し，同型対応 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{X}\cong G(K/k)$ を与える.

これは高木先生の主論文の仕上げをした重要な結果である. 先生も“1927年に Artin が驚嘆すべき発見を成した”と讃辞を惜んではおられない.

一般相互律から，直ちに巾剰余の相互律とノルム剰余記号の和定理が導かれる[11]. 代数体 k が1の原始 m 巾根を含むものとする. $k(\sqrt[m]{\alpha})/k$ で分岐しない k の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，1の m 巾根 $\left(\dfrac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ を

$$\alpha^{(N\mathfrak{p}-1)/m}\equiv\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) \pmod{\mathfrak{p}}$$

によって定義し，k のイデアル $\mathfrak{a}=\Pi\mathfrak{p}^{\nu}$ に対して

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)=\Pi\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)^{\nu}$$

と定義する. これを k の **m 巾剰余記号**という. これは Artin 記号を用いて

$$\left(\frac{k(\sqrt[m]{\alpha})/k}{\mathfrak{p}}\right)\sqrt[m]{\alpha}=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\sqrt[m]{\alpha}$$

と表わされる. Artin の一般相互律より

巾剰余の相互律. (i) m 巾剰余記号 $\left(\dfrac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)$ の値は，$k(\sqrt[m]{\alpha})/k$ に対応するイデアル群 $\mathfrak{H}$ の $\mathfrak{a}$ の属する剰余類のみによって定まる. (ii) $k(\sqrt[m]{\alpha})/k$ と $k(\sqrt[m]{\beta})/k$ との導手が互いに素であれば

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

が成り立つ[12].

次に任意の Abel 拡大 K/k, k の素イデアル $\mathfrak{p}$, k の元 $\beta\,(\neq 0)$ に対して，**ノルム剰余記号**

$$\left(\frac{\beta, K/k}{\mathfrak{p}}\right)\in G(K/k)$$

が次のように定義される.

K/k の導手を $\mathfrak{f}$ とし，$\mathfrak{f}$ の $\mathfrak{p}$ 成分を $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$ とする. β に対して $\beta_0\equiv\beta \bmod \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$, $\beta_0\equiv 1 \bmod \mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}^{-1}$, $(\beta_0)=\mathfrak{p}^b\mathfrak{q}$, $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})=1$ に素イデアル $\mathfrak{q}$ および $\beta_0\in k$ をとることができる. そのとき $\left(\dfrac{\beta, K/k}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\dfrac{K/k}{\mathfrak{q}}\right)$ とおくのである. その名のあるのは，$\left(\dfrac{\beta, K/k}{\mathfrak{p}}\right)=1$ となるのは，$\mathfrak{p}$ の任意の巾を法として，β が K の元のノルムと合同となる場合に限るからである.

ノルム剰余記号の積定理 (Hasse[2]). 任意の $\beta\in K$ に対して，$\mathfrak{p}$ が k のすべての素イデアルを動くとき

$$\prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\beta, K/k}{\mathfrak{p}}\right)=1$$

が成り立つ.

Hilbert の注意した代数函数論との類似は，このように美しい形で実現された．

Hilbert は巾剰余記号の理論に代数体の深い性質が含まれているものと考えていたが，高木先生の類体論と Artin の一般相互律とができ上った後は，それらの比較的手近い応用に過ぎないものとなってしまった．

後に高木先生の書かれた‘代数的整数論’[3] (1948) を Hilbert の報文と比べるとき，その前篇はおおよそ報文の第一，二部に相当する．後篇は類体論の主要諸定理にあてられているが，付録まで加えれば，報文の第三，四部は大体含まれている．しかし当時の最先端であった報文第五部 Kummer 体の理論は，今やはるかに時代に取り残されたものとなり，その代りに類体論が代数的整数論の王座を占めるに至ったのである．

“付録2次体論は，それを類体論の最も卑近な一例として取り扱うことによって，僅かに数ページの中に圧縮することを得た．前世紀の始め，Gauss の2次形式論の完成によって，整数論の一分科としての面目を具ええたのであったが，当時数学の最高峰の随一であった Disquisitiones Arithmeticae の主要部分が，かくも手軽に扱われるに至ったのは，数学進歩の一つの標識と言わねばならない[13]．

§3. Hilbert の予言のうち，絶対類体における主イデアル定理 (4) は，長い間証明されなかった．一般相互律を用いると，主イデアル定理は累 Abel 群に関する命題に帰着される[14]．この群論の定理は Furtwängler [2] (1930) によって証明された．さらに弥永 [1] によって，$\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}}$ に対応する類体に対して，主イデアル定理が拡張された[15]．

一般の Galois 拡大 K/k に類体論の結果を拡張することは，多くの人々の試みにもかかわらず今日まで成功していない[16]．Artin [2], [6] の定義した L 函数は，Galois 拡大 K/k の素イデアルの分解に関して大切な意味を持つように思われる．χ を K/k の Galois 群の任意の指標とするとき，級数

$$\log L(s, \chi, K/k) = \sum_{\mathfrak{p}^n} \frac{\chi(\mathfrak{p}^n)}{n \cdot N\mathfrak{p}^{ns}} \quad {}^{17)}$$

(ただし和は k のすべての素イデアル巾について加える) は，$\Re(s) > 1$ で広義絶対一様収束し，全平面上に解析接続される[18]．この L 函数の函数方程式と関連して，Artin [5] は Galois 拡大 K/k の導手 $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$ を定義して，これと K/k の判別式との関係を得た．これら L 函数や導手の理論は Galois 拡大の整数論にとって一つの手がかりを与えるものといえよう．

与えられた基礎体 k の上に，与えられた有限群 G を Galois 群としてもつ Galois 拡大 K/k の存在を証明することは，まだ一般には解決されていない．G が Abel 群であれば，この問題は類体論の直接の応用として解決される．G が Abel 群の積み重ねとなる場合は順次解決されて，一般に G が可解群の場合に，この問題は Šafarevič [2] (1950) によって解かれた[19]．

一方 1920 年代に抽象代数学が急速に進歩し，有限群の表現論と関連して，多元環の理論が E. Noether, R. Brauer らによって進められた．特に基礎体 k が代数体の場合に，類体論の応用として，k 上の正規単純環 $\mathfrak{A}$ はすべて巡回多元環であること，またその類を不変数 $(\mathfrak{A}/\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p}$ は k の素イデアル) を用いて完全に決定しえたことは，局所理論と大局理論との関連を示す著しい結果であった (Hasse [5] (1933)[20])．この理論の応用として，I. Schur の予想“次数 n の有限群 G の各既約表現は，すべて円分体 $Q(\zeta_n)$ で得られる”ことが Brauer [1] (1945) によって証明された．

§4. 類体論の主要諸定理の内容はきわめて簡明であるが，その証明は極めて面倒である．証明の簡易化の試みは長い間つづけられた[21]．Chevalley [4] はイデールの考えを用いて，それまで用いられていた解析的方法を必要としない証明を組み立てた．Weber によるイデアル類群の拡張は，イデールの導入によって最終的な形を得るに至った．

定義． 代数体 k の各素イデアル $\mathfrak{p}$ における $\mathfrak{p}$ 進拡大を $k_{\mathfrak{p}}$ とし，すべての $\mathfrak{p}$ に関する無限直積 $\prod_{\mathfrak{p}} k_{\mathfrak{p}}^*$ を作ると，これは乗法群を作る．この元で，ほとんどすべての $\mathfrak{p}$ 成分が $k_{\mathfrak{p}}$ の単数であるとき，これを**イデール**という．k のイデール全体の作る乗法群を k のイデール群といい，J_k で表わす．また k の元 $\alpha(\neq 0)$ に対して，すべての $\mathfrak{p}$ 成分が α

に等しいイデールを主イデールという．k の主イデール全体を P_k で表わし，$C_k=J_k/P_k$ を k のイデール類群という．J_k に自然な位相を定めるとき，J_k は局所コンパクト群となり，P_k は discrete 部分群となる[22]．類体論の基本的諸定理は次の形にまとめられる．

定理． 代数体 k の上のすべての有限次 Abel 拡大の合併体を Ω とし，Ω/k の Galois 群を $G(\Omega/k)$ と書く．k のイデール類群 C_k の単位元の連結成分を Δ_k とするとき，（位相まで含めて）

$$G(\Omega/k)\cong C_k/\Delta_k$$

となる．かつこの同型対応は，拡張されたノルム剰余記号によって与えられる[23]．

イデールと同様に，無限直積 $\prod_{\mathfrak{p}} k_{\mathfrak{p}}$ の作る加群の元で，ほとんどすべての $\mathfrak{p}$ 成分が $k_{\mathfrak{p}}$ の整数であるものを**アデール**（または付値ベクトル）という．k のアデール全体の作る加群 V_k は，その自然な位相に関して局所コンパクト群となる．V_k や J_k の位相・測度を用いると，Hecke の量指標を持つ L 函数の理論が極めて自然に扱われることが，岩沢，Tate [1] によって示された[24]．19 世紀の整数論は Dedekind のイデアル論を生んだが，類体論はイデールやアデールの理論を生んだ．これらの概念は，k 上の 2 次形式論や代数群の理論にも極めて有効なものとなった[25]．

一方類体論と多元環の理論との間の密接な関係から，逆に類体論の諸定理の証明に多元環における因子団の理論が役立つことが Chevalley [1]，中山 [1] らによって示された[26]．たまたま群のコホモロジー理論が組み立てられて，因子団の理論は群の 2 次元コホモロジーの理論として含まれることになった．その結果 1950 年ごろから，多くの数学者によって，Galois 拡大 K/k の Galois 群 G のコホモロジー群と類体論との関係が明らかにされた[27]．特に Artin と Tate は，Galois 群 G のイデール類群 C_K を係数とする 1 次元および 2 次元コホモロジー群について，

$$H^1(G,C_K)=0,\quad H^2(G,C_K)\cong Z/nZ$$

（ただし $n=[K:k]$）であれば，上記定理（$G(\Omega/k)\cong C_k/\Delta_k$）がコホモロジー理論のみから示されることを証明し，類体論のもつ整数論的内容が上のコホモロジー群の性質に集約されることを示した[28]．

§5. Hilbert は代数函数の理論から整数論の結果を類推したが，逆に整数論の発展は代数函数論に影響を及ぼした．特に有限体を係数体とする標数 $p(\neq 0)$ の 1 変数代数函数体 k は，代数体と極めて類似した性質を持ち[29]，この場合にも類体論と平行な理論が成り立つことが示された（F.K. Schmidt[1]，E. Witt[1]）．また ζ 函数の類似として k の合同 ζ 函数が定義され，それの零点の分布についての Riemann 予想が問題となった．特に Hasse[6] は，合同 ζ 函数の Riemann 予想と虚数乗法論における分解定理との関係に注意した．このようなことが刺激となって，1930 年代に Hasse[7]，Witt [2], [3]，H. L. Schmid [1], [2] らを中心にいわゆる代数函数論の整数論的研究が活発に展開された[30]．その成果の一つとして，楕円函数体 k の合同 ζ 函数の Riemann 予想の肯定的解決が Hasse [8] (1936) によってなされた．しかしこの方法は代数曲線を扱う場合にのみ有効であって，高い種数の場合の代数的対応や Jacobi 多様体のような高次元多様体が本質的に問題とされる場合には，十分な成功が得られなかった[31]．

この壁は A. Weil によって破られた．Weil[1] はまず（標数 p の場合をも含めた）代数幾何学の一般的基礎を作り上げ，ひきつづいて合同 ζ 函数に関する Riemann 予想を一般の種数の場合に証明した[32]．ここに整数論と，新しく基礎付けられた代数幾何学との関係に人々の目が向けられるようになった．その結果 Hilbert が単に形式的に注意した整数論と代数函数論との類似の持つ深い関係が初めて解明されたということができよう[33]．

さらに著しいことは，Weil[3] の展開した Abel 多様体の理論に基づいて，高次元 Abel 多様体の虚数乗法論が谷山・志村[1], [2] によって組み立てられ，特別な場合ではあるが，Hilbert の第 12 問題に一つの寄与をなし遂げたことである[34]．

数学の各分野は互いに密接に関連していて，一分野での本質的な成果が他の分野にも影響を及ぼすことは当然なことであろう．上に挙げた僅かな説明の中においても，類体論が，代数的整数論のわくをこえて，他の分野に大きい影響を及ぼしたことを見ることができる．これは一面より見れば，美と調和の使徒であることを志した多くの数

学者たちが，類体論を通じて高木先生を傾慕したことによるものといえよう．

注

1） 代数体 k の元 α が総正であるとは，α の実共役数が（もし存在すれば）すべて正であることをいう．k のイデアル全体の作る乗法群を $\mathfrak{A}$, k の総正な元（$\neq 0$）より作られる主イデアル全体の作る乗法群を $\mathfrak{H}_0$ とするとき，$\mathfrak{A}/\mathfrak{H}_0$ を狭義のイデアル類群といい，$h=[\mathfrak{A}:\mathfrak{H}_0]$ を狭義の類数という．

2） Hilbert, Werke I, p. 67.

3） ただし l は素数または素数の巾とする．

4） Grunwald [1], Wang [1] 参照．

5） 高木，近世数学史談，付録 1.‘回顧と展望’，河出書房，p. 197.

6） Hilbert [3] (Werke I. p. 508).

7） 高木，同上，‘回顧と展望’，p. 197.

8） くわしくは，高木‘代数的整数論’，p. 161 参照．

9） イデアル群 $\mathfrak{H}$ として注 1) の $\mathfrak{H}_0$ を取れば，$\mathfrak{H}_0$ に対応する類体が絶対類体である．また基礎体が Q の場合に $\mathfrak{H}$ として $\mathfrak{S}_m^*$ を取れば，対応する類体が円分体 $Q(\zeta_m)$ である．

10） 高木先生の主論文では，この等式が成り立つとき K を類体と呼んだ．

11） 相互律に関する 1930 年までの結果は Hasse [1] Bericht II にまとめてある．なお Šafarevič [1] 参照．

12） Hasse[1], Bericht II 参照．なお平方剰余の相互律との関係については，たとえば高木‘代数的整数論’，p. 208 参照．

13） 高木‘代数的整数論’序より．

14） Artin[4] による．すなわち“累 Abel 群 G で，$G'=[G,G]$ に対して G/G' が有限 Abel 群であるとき，G/G' の任意の代表系 S_σ に対して $\prod_\sigma S_\sigma S_\tau S_{\sigma\tau}^{-1}=1$ が，任意の $\tau \in G/G'$ に対して成り立つ”ことに帰着される．

15） 弥永[1]の結果は淡中[3]にていねいに紹介されている．またこの方面では淡中[2]，寺田[1]などの研究がある．また Furtwängler の証明に対しては，後に弥永[2]によって本質的な簡易化がなされた．

16） Galois 拡大 K/k は，K/k で完全分解する k の素イデアルの集合 $M(K/k)$ によって一意に定まる (Bauer [1])．K/k が Abel 体でない場合に，$M(K/k)$ を特徴づけることができない．いくつかの特殊な場合に，この方向の研究がなされている（黒田 [1]，古田 [1] など）．Tschebotareff[1]（高木‘代数的整数論’，p. 255）の結果はこの方面の重要な貢献である．また Hasse [9] は，一般の Galois 拡大 K/k に対して従来の Kummer 拡大の理論を拡張することを試みたが，まだ具体的に利用できる形になっていない．

17） $\chi(\mathfrak{p}^n)$ の定義については，たとえば末綱 [1]，p. 231 参照．

18） L 函数の一価性は，Brauer[2] によつて証明された．$\chi\neq 1$ のとき L 函数は整函数であることが予想されているが，まだ一般には証明されていない．

19） G が累 Abel 群や，p 群の場合に，まず Scholz[1]，Reichardt [1]，淡中 [1] らによって証明された．

20） 多元環の理論については，Deuring [1] 参照．

21） 初期の成果は J. Herbrand, Chevalley [2] らによって得られた．なお Artin [7], Hasse [3] をも参照．高木‘代数的整数論’はこれらの結果を用いている．さらに Chevalley [3] は無限次 Abel 拡大の理論を組み立てたが，その際はじめてイデールの概念が導入された．

22） イデール群の位相は岩沢，Weil[4] らによって導入された．河田[3]に説明してある．

23） Weil[4] 参照．$G(\Omega/k)$ の位相は Krull によって定義されたものである．なお久保田[1]では C_k/Δ_k の群論的構造が具体的に定めてある．

24） 岩沢-Tate[1] の理論と呼ばれているが，著者自身の論文は発表されていない．河田[3]に紹介してある．

25） 玉河，Weil [5]，小野 [1] などの研究がある．玉河の 2 次形式に関する研究は近刊の予定である．

26） 局所類体論に多元環を用いる方法は Schilling[1] にまとめてある．また Artin[8] に極めて美しく述べられている．

27） 中山 [2], [3], Weil [4], Tate [2], Hochschild らの研究がある．

28） Artin : Princeton 大学(1951-52) 講義．河田[2] に紹介してある．Chevalley [6] をも参照．なお河田[1] では，この形式化（類構造）をさらに追求した．

29） Artin[1] によって初めて取り扱われた．

30） これらの研究は 1936 年ごろの J. Reine Angew. Math. 誌上に見られる．

31） Deuring[2] の研究がよく引き合いに出される．

32） Weil[2] 参照．

33） たとえば Serre [2] を見よ．Weber によるイデアル類の拡張に対応して，代数函数体における Jacobi 多様体の概念の拡張が Rosenlicht[1] によってなされた．なお森川[1]，Lang[1] 参照．

34） 志村・谷山 [1] の序文に，発展の歴史が書いてある．なお志村[2]をも参照．

文　献

E. Artin, [1] Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen, I, II, Math. Z., **19** (1924), 153-246 ; [2] Über eine neue Art von L-Reihen, Abh. Math. Sem. Hamburg, **3** (1924), 89-108 ; [3] Beweis des allgemeinen Reziprozitätssatzes, Abh. Math. Sem. Hamburg, **5** (1927), 353-363 ; [4] Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitätssatzes, Abh. Math. Sem. Hamburg, **7** (1929), 46-51 ; [5] Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper, J. Reine Angew. Math., **164**(1931), 1-11 ; [6] Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren, Abh. Math. Sem. Hamburg, **8** (1931), 292-306 ; [7]* Klassenkörpertheorie, Göttingen, 1932 ; [8]* Algebraic numbers and algebraic functions I, Princeton, 1950-51.

E. Artin and G. Whaples, [1] Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations, Bull. Amer. Math. Soc., **51** (1945), 469-492.

M. Bauer, [1] Zur Theorie der algebraischen Zahlkörper, Math. Ann., **77** (1916), 353-356.

R. Brauer, [1] On the representation of a group of order g in the field of the g-th roots of unity, Amer. J. Math., **67** (1945), 461-471 ; [2] On Artin's L-series with general group characters, Ann. of Math., **48** (1947), 502-514.

C. Chevalley, [1] La théorie du symbole de restes normiques, J. Reine Angew. Math., **169** (1932), 140-157; [2] Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, **2** (1933), 363-476 ; [3] Généralization de la théorie du corps de classes pour les extensions infinies, J. Math. Pures Appl., **15** (1936), 359-371 ; [4] La théorie du corps de classes, Ann. of Math., **41** (1940), 398-418 ; [5]* Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Amer. Math. Soc., 1951; [6]* Class field theory, Nagoya Univ., 1953-54.

M. Deuring, [1]* Algebren, Erg. Math., 1935 ; [2] Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper, I, J. Reine Angew. Math., **177** (1937), 161-191, II, ibid., **183** (1941), 25-36 ; [3] Die Klassenkörper der Komplexen Multiplikation, Enzikl. der Math. Wiss. Bd. 12. Ht. 10 (1958).

G. Fujisaki, [1] On the zeta-function of the simple algebra over the field of rational numbers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, **7** (1958), 567-604.

Ph. Furtwängler, [1] Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers, Math. Ann., **63** (1907), 1-37 ; [2] Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, Abh. Math. Sem. Hamburg, **7** (1930), 14-37.

Y. Furuta, [1] On meta-abelian fields of a certain type, Nagoya Math. J., **14** (1959), 193-199.

W. Grunwald, [1] Ein allgemeines Existenzbeweis für algebraische Zahlkörper, J. Reine Angew. Math., **169** (1932), 103-107.

H. Hasse, [1] Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der algebraischen Zahlkörper, I, Jber. Deutsch. Math. Verein., **35** (1926), 1-55, Ia ibid., **36** (1927), 233-311, II, ibid., Ergänzungsband **6** (1930), 1-204 ; [2] Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie des Normenrestsymbols, J. Reine Angew. Math., **162** (1930), 134-144 ; [3]* Klassenkörpertheorie, Marburg, 1932-33; [4] Normenresttheorie galoisscher Zahlkörper mit Anwendungen anf Führer and Diskriminante abelscher Zahlkörper, J. Fac. Sic. Univ. Tokyo, Sec. I, **2** (1934), 477-498 ; [5] Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann., **107** (1933), 731-760 ; [6] Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern, Abh. Math. Sem. Hamburg, **10** (1934), 325-348 ; [7] Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper, J. Reine Angew. Math., **172** (1935), 37-64 ; [8] Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper, I, II, III, J. Reine Angew. Math., **175** (1936), 55-62, 69-88, 193-208; [9] Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe, J. Reine Angew. Math., **187** (1949), 14-43; [10]* Zahlentheorie, Berlin, 1949.

E. Hecke, [1] Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie, Math. Ann., **71** (1912), 1-37 ; [2] Eine neue Art von Zetafunktion und ihre Beziehung zur Verteilung der Primzahlen, Math. Z., **1** (1918), 357-376, II, ibid., **6** (1920), 11-51.

J. Herbrand, [1]* Le développement moderne de la théorie des corps algébriques, Mem. Sci. Math., **75** (1936).

D. Hilbert, [1] Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jber. Deutsch. Math. Verein. **4**(1897), 175-546, (Werke I, 63-363); [2] Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers, Math. Ann., **51** (1899), 1-127, (Werke I, 370-482); [3] Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper, Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen, (1898), 370-399, (Werke I, 483-509).

K. Iwasawa, [1] On the rings of valuation vectors, Ann. of Math., **57** (1953), 331-356 ; [2] On solvable extensions of algebraic number fields, Ann. of Math., **58** (1953), 548-572 ; [3] On Γ-extensions of algebraic number fields, Bull. Amer. Math. Soc., **65** (1959), 183-226.

S. Iyanaga, [1] Über den allgemeinen Hauptidealsatz, Jap. J. Math., **7** (1930), 315-333 ; [2] Zum Beweis des Hauptidealsatzes, Abh. Math. Sem. Hamburg, **10** (1934), 349-357.

Y. Kawada, [1] Class formations, Duke Math. J., **22** (1955), 165-178, II (with I. Satake) J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, **7** (1956), 353-389, III, J. Math. Soc. Japan, **7** (1956), 453-490, IV, ibid., **9** (1957), 395-405, V, ibid., **12** (1960), 34-64, VI, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 8 (1960), 229-262; [2] 代数的整数論(現代数学講座), 共立出版(1957); [3] 岩沢-Tate の理論について, 数学, **11** (1959), 31-44.

T. Kubota, [1] Galois group of the maximal abelian extension over an algebraic number field, Nagoya Math. J., **12** (1957), 177-189.

S. Kuroda, [1] Über die Zerlegung rationaler Primzahlen in gewissen nicht-abelschen galoisschen Körpern, J. Math. Soc. Japan, **3** (1951), 148-156.

S. Lang, [1] Unramified class field theory over function fields in several variables, Ann. of Math., **64** (1956), 285-325.

H. Morikawa, [1] Generalized Jacobian varieties and separable abelian extensions of function fields, Nagoya Math. J., **12** (1957), 231-254.

M. Moriya, [1] Klassenkörpertheorie im Grossen für die unendlichen algebraischen Zahlkörper, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I, **6** (1937), 63-101.

T. Nakayama, [1] Über die Beziehungen zwischen den Faktorensystemen und der Normklassengruppen eines galoisschen Erweiterungskörpers, Math. Ann., **112** (1936), 85-91; [2] Idèle-class factor sets and class field theory, Ann. of Math., **55** (1952), 73-84; [3] (with G. Hochschild) Cohomology in class field theory, Ann. of Math., **55** (1952), 48-66.

T. Ono, [1] On some arithmetic properties of linear algebraic groups, Ann. of Math., **70** (1959), 266-290.

H. Reinhardt, [1] Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung, J. Reine Angew. Math., **177** (1937) 1-5.

M. Rosenlicht, [1] Generalized Jacobian varieties, Ann. of Math., **59** (1954), 505-530.

I. Šafarevič, [1] A general reciprocity law, Math. Sbornik, **26** (1950), 113-146 (Amer. Math. Soc. Translation Vol. 4, 73-106); [2] Construction of fields of algebraic numbers with given solvable Galois group, Izv. Akad. Nauk, **18** (1954), 525-578 (Amer. Math. Soc. Translation Vol. 4, 185-237).

O. Schilling, [1]* The theory of valuations, Amer. Math. Soc., 1950.

H. L. Schmid, [1] Über das Reziprozitätsgesetz in zyklischen Funktionenkörpern, Math. Z., **40** (1936), 94-109; [2] Zyklische algebraischen Funktionenkörper vom Grade p^n über endlichem Konstantenkörper der Charakteristik p, J. Reine Angew. Math., **175** (1936), 108-123.

F. K. Schmidt, [1] Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Konstantenbereich, Sitzungsberichte Erlangen, **62** (1930), 267-284.

A. Scholz, [1] Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppen von Primzahlpotenzordnung I, Math. Z., **42** (1936), 161-188

J. P. Serre, [1] Sur la topologie des variétés algébriques en caracteristique p, Symposium top. alg. Mexico, 1956, 24-53; [2]* Groupes algébriques et corps de classes, Hermann, Paris, 1959.

G. Shimura, [1] Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field, Amer. J. Math., **77** (1955), 134-176; [2] 保型函数と整数論 I, 数学, **11** (1960), 193-205.

G. Shimura and Y. Taniyama, [1]* 近代的整数論(現代数学講座), 共立出版, 1957; [2]* Complex multiplication of abelian varieties and its application to number theory, Publ. of Math. Soc. of Japan, 1960.

Z. Suetuna, [1]* 解析的整数論, 岩波書店, 1950.

T. Takagi, [1] Über eine Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers, J. Coll. Sci. Tokyo, **41** Art. 9 (1920), 1-133; [2] Über das Reciprocitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, J. Coll. Sci. Tokyo, **44**, Art, 5 (1922), 1-50; [3]* 代数的整数論, 岩波書店, 1948.

Y. Taniyama, [1] L-functions of number fields and zeta-functions of abelian varieties, J. Math. Soc. Japan, **9** (1957), 330-366.

T. Tannaka, [1] Über die Konstruktion des galoisscher Körper mit vorgegebener p-Gruppe, Tôhoku Math. J., **43** (1937), 252-260; [2] A generalized principal ideal theorem and a proof of a conjecture of Deuring, Ann. of Math., **67** (1958), 574-589; [3]* 代数的整数論, 共立出版, 1949.

J. Tate, [1] Fourier analysis in number field and Hecke's Zeta-functions, Thesis, Princeton Univ., 1950; [2] The higher dimensional cohomology groups of class field theory, Ann. of Math., **56** (1952), 294-297.

F. Terada, [1] On a generalization of the principal ideal theorem, Tôhoku Math. J., **1** (1950), 229-269.

N. Tschebotareff, [1] Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, Math. Ann., **95** (1926), 191-228.

S. Wang, [1] On Grunwald's theorem, Ann. of Math., **51** (1950), 471-484.

A. Weil, [1]* Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc., 1945; [2]* Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Hermann, Paris, 1948; [3]* Variétés abéliennes et courbes algébriques, Hermann, Paris, 1948; [4] Sur la théorie du corps de classes, J. Math. Soc. Japan, **3**(1951), 1-35; [5]* Adèles and algebraic groups, Princeton, 1959.

G. Whaples, [1] Generalized local class field theory, Duke Math. J., **19** (1952), 507-517, II, III, IV, ibid., **21** (1954), 247-255, 575-581, 583-586.

H. Weber, [1]* Lehrbuch der Algebra, III, (Elliptische Funktionen und algebraischen Zahlen), 2-te Aufl., 1908.

E. Witt, [1] Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper, J. Reine Angew. Math., **173** (1935), 43-51; [2] Konstruktion von galoisschen Körpern der Charakteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^f, J. Reine Angew. Math., **174** (1936), 237-245; [3] Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grade p^n, J. Reine Angew. Math., **176** (1936), 126-140.