

複素数と円の幾何

中西敏浩 (島根大学大学院自然科学研究科)

和田昌昭氏(大阪大学)作成のOPTiを用いて描画

金沢アートホール

長谷山観音院

関孝和の墓

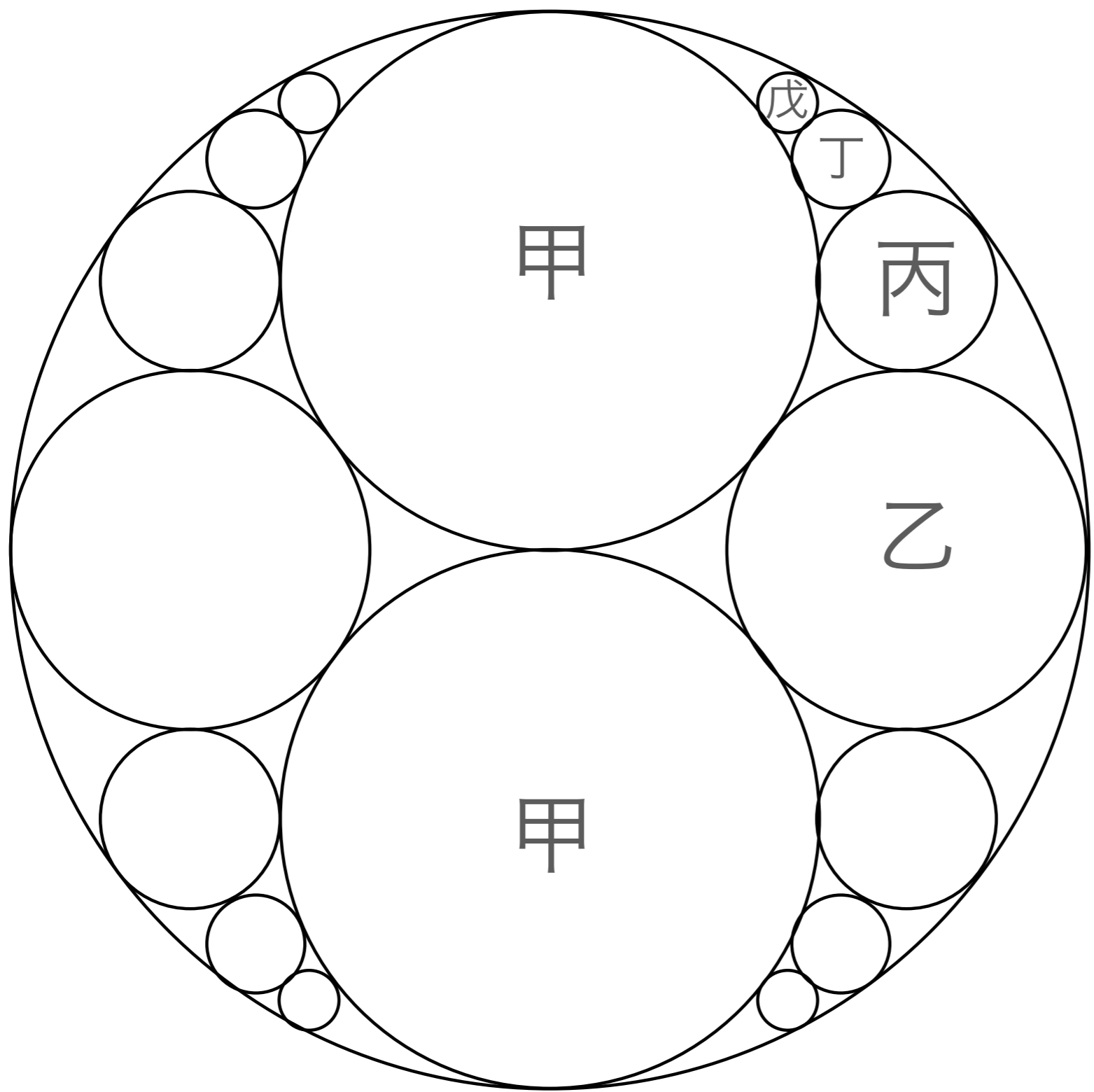
金沢駅から2.3km



関孝和

財団法人高樹会所蔵・射水市新湊博物館保管

問題



今大円径内容如图段々小円径ヲ

只云大円径二尺亦云甲円径一尺寸

問乙丙丁戊円径ヲ

大円の半径は 1， 甲円の半径は 2 分の 1

話の内容 (多分)

- ▶ 第1章 複素数の基礎
- ▶ 第2章 サークル・パッキングの数学
- ▶ 第3章 円とフラクタル
- ▶ 第4章 π は円周率か？

第1章 複素数の基礎

複素数 $a + bi$ (a, b は実数, $i^2 = -1$)

複素数は代数方程式が解をもつように数の世界を拡張することで得られた。

代数学の基本定理

代数方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

($n \geq 1$, $a_0 \neq 0$, a_0, \dots, a_n は複素数でよい)

は必ず、複素数の解をもつ。

第1章 複素数の基礎

複素数 $a + bi$ (a, b は実数, $i^2 = -1$)

$a + ib$ 派

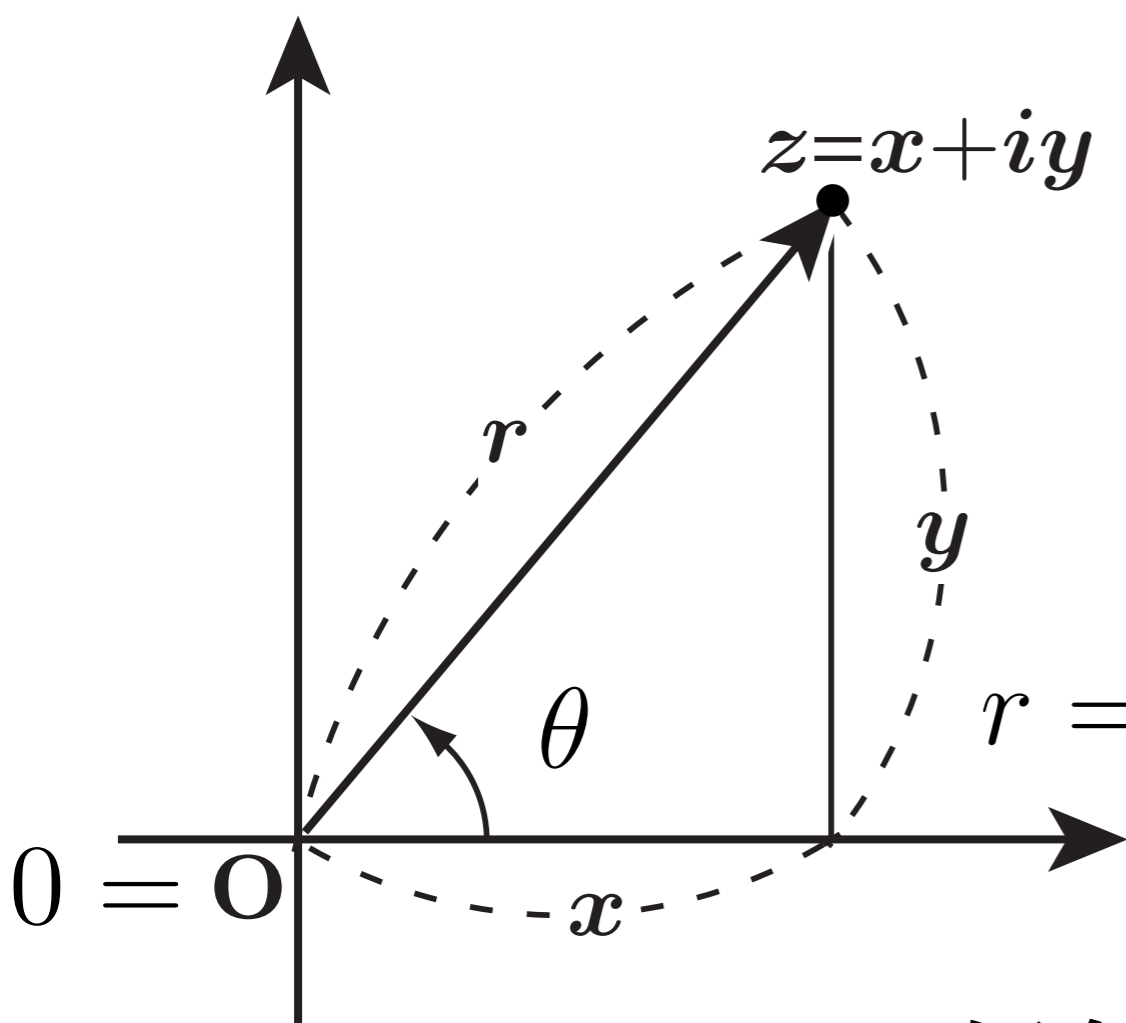
- Ahlfors (*Complex Analysis*)
- Whittaker-Watson (*Modern Analysis*)
- Bourbaki (*Éléments de Mathématique*)
- 辻正次 (複素函数論)
- 楠幸男 (解析函数論)
- 岸正倫・藤本坦孝 (複素関数論)
- 岩波 数学辞典 (複素数の項目)
- Wikipedia - 複素数 (仏・西・韓)

$a + bi$ 派

- Gauss (*Tagebuch*)
- Hille (*Analytic Function Theory*)
- 高木貞治 (解析概論)
- Wikipedia - 複素数 (日・英・独・露・中)

複素数の基礎 (複素平面と極形式)

xy -平面の点 (x, y) で複素数 $z = x + iy$ で表すとき、この平面を**複素平面** (高校の教科書では「複素数平面」) という。 $z = x + iy (\neq 0)$ は次の表現をもつ。



$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

これを z の**極形式**という。

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ を z の**絶対値**,

θ を z の**偏角**という。

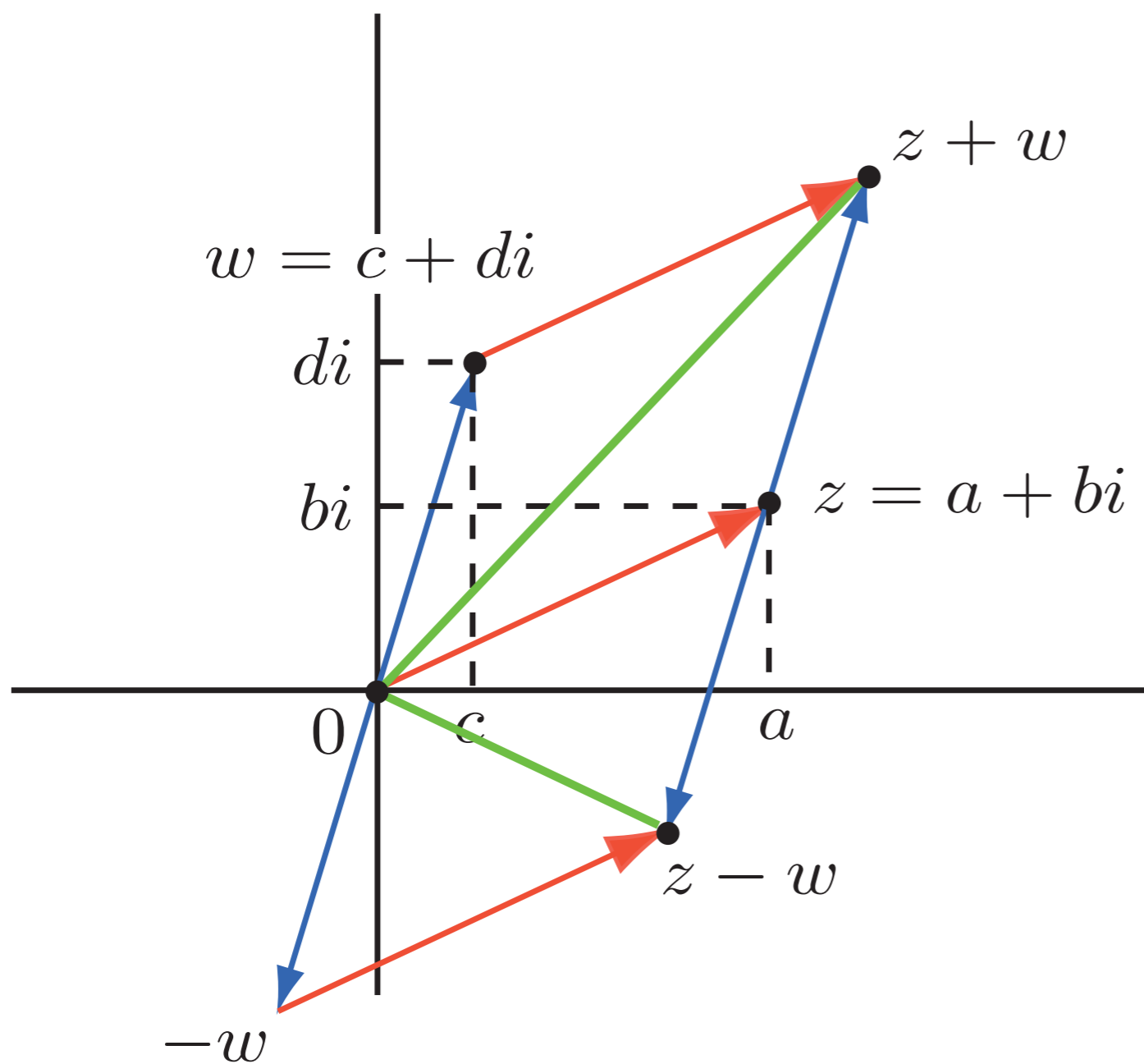
偏角は 2π の整数倍を除いて定まる。

複素数の基礎 (複素数のたし算)

$z = a + bi, w = c + di$ のとき

$$z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

複号同順



複素数の基礎 (複素数のかけ算)

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$
$$w = R(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{のとき,}$$

$$zw = rR(\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)).$$

つまり、絶対値は「かけ算」に、偏角は「たし算」に。
とくに $w = \cos \varphi + i \sin \varphi$ のとき、 zw は z を原点を中心に角 φ だけ反時計回りに回転させたものである。

$$w = c + di \neq 0 \text{ のとき}$$

割り算

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

$\bar{w} = c - di$ は w の複素共役

複素数の基礎 (オイラーの公式)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

とくに

$$e^{\pi i} = -1$$



$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

オイラーの公式は暗闇に光る一筋の流星だった。暗黒の洞窟に刻まれた詩の一行だった。

小川洋子「博士の愛した数式」より

複素数の基礎(一次分数変換)

鏡像(折り返し)



平行移動

鏡像(折り返し)

2つの平行な直線に関する鏡像の合成は平行移動

2つの交わる直線に関する鏡像の合成は回転移動

回転移動

鏡像

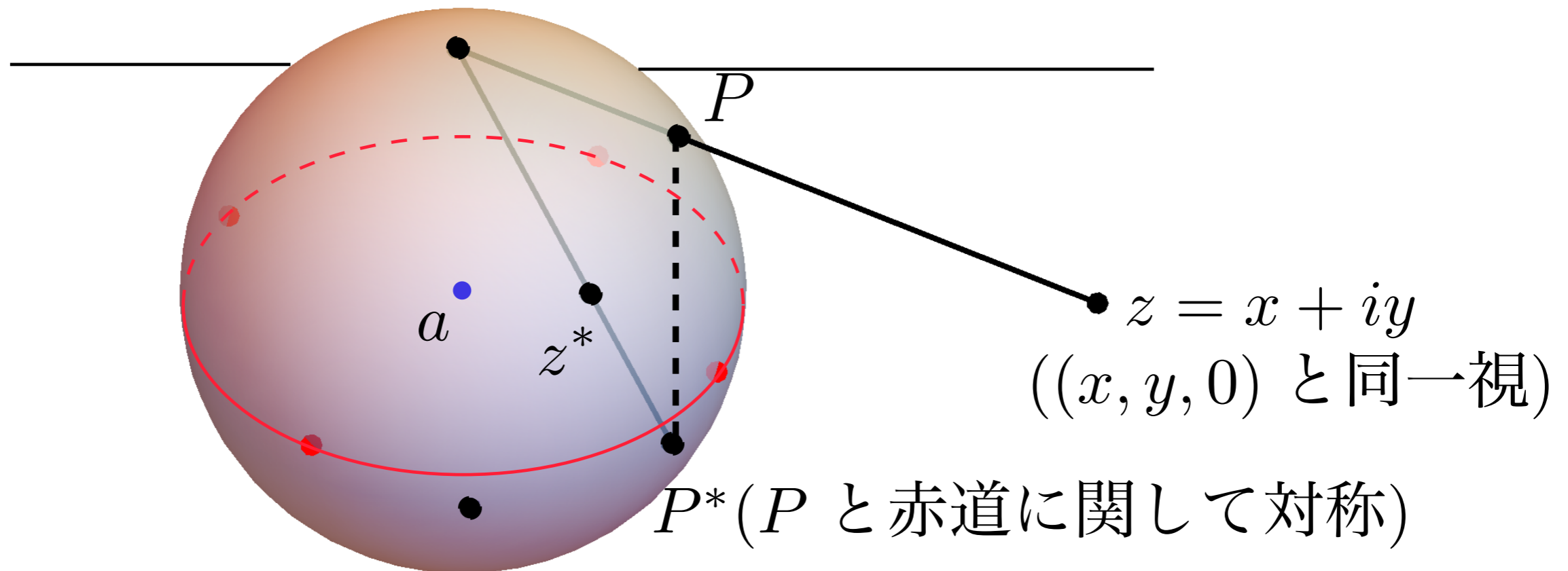
鏡像

回転角は 2 直線の交角の 2 倍



円に関する鏡像 (反転)

円 $|z - a| = r$ に関する鏡像

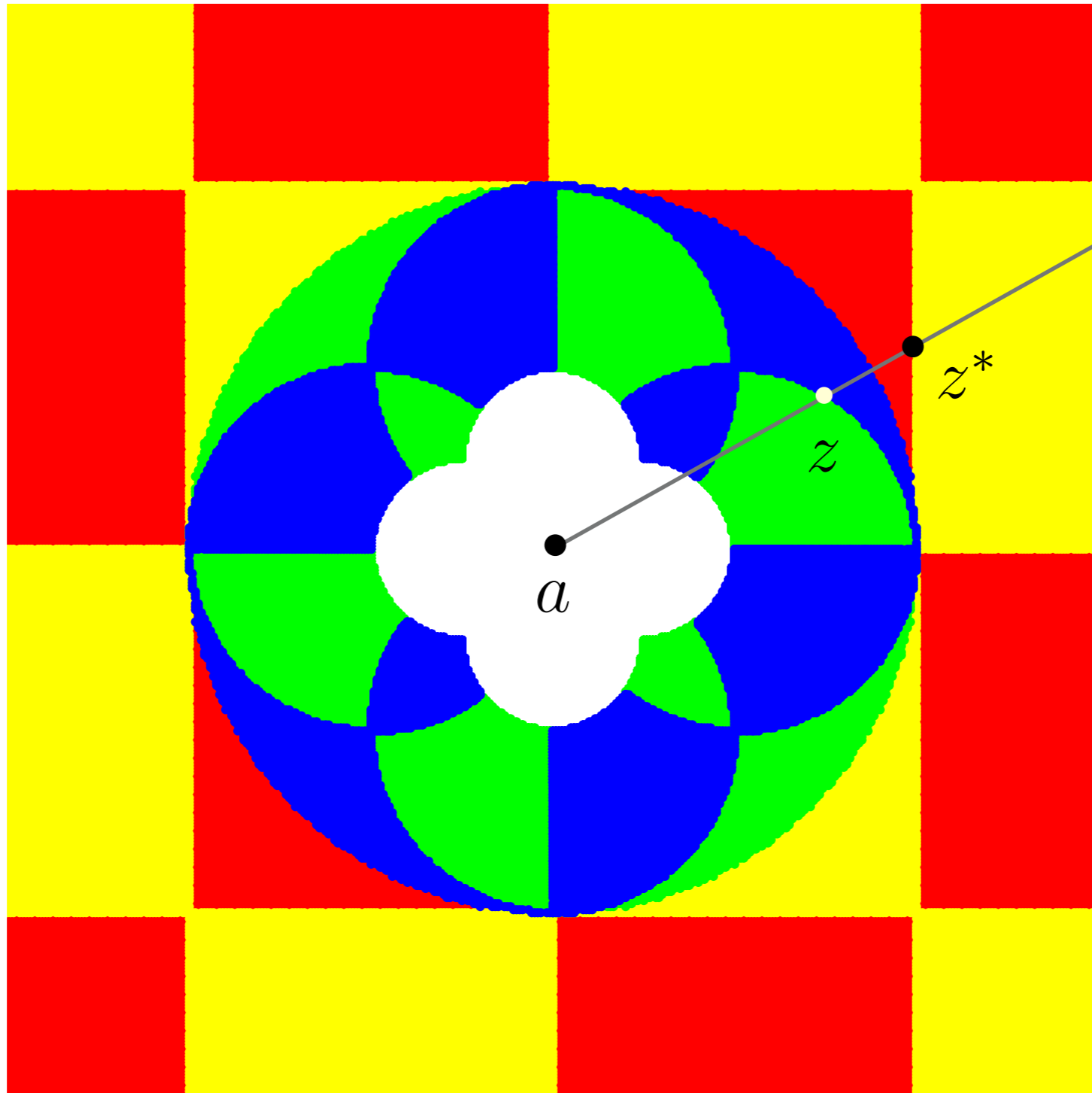


$$z^* = R(z) = \frac{r^2}{z - a} + a$$

無限遠点 ∞ を導入して

$R(a) = \infty, R(\infty) = a$ と定める。

円に関する鏡像 (反転)



$$|z^* - a||z - a| = r^2$$

複素数の基礎(一次分数変換)

以下，直線も「円」（無限遠点を通る円）とみなす。

2つの円に関する反転の合成は

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

とかける。これを一次分数変換またはメビウス変換という。

$$S(-d/c) = \infty, S(\infty) = a/c \quad (c \neq 0)$$

$$S(\infty) = \infty \quad (c = 0)$$

と定める。

a, b, c, d に同時に同じ数をかけても変換 $S(z)$ は変わらない。よって $ad - bc = 1$ といった条件を課すことがある。

複素数の基礎(一次分数変換)

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad T(z) = \frac{pz + q}{rz + s}$$

を一次分数変換とする。

- 一次分数変換の合成は一次分数変換

$$S(T(z)) = \frac{(ap + br)z + (aq + bs)}{(cp + dr)z + (cq + ds)}$$

- 一次分数変換の逆変換は一次分数変換

$$S^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

- 恒等変換は一次分数変換

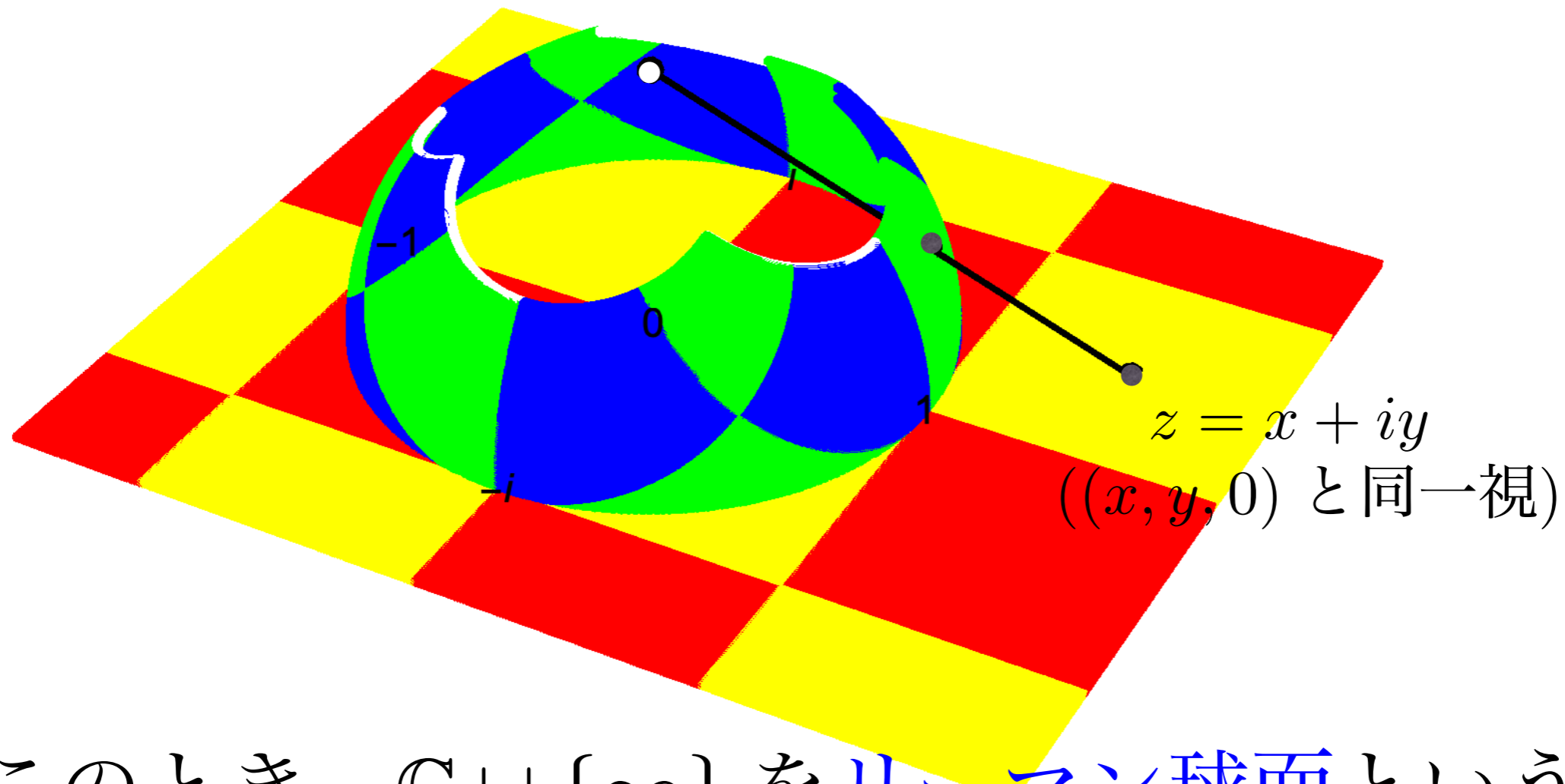
$$I(z) = z = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}$$

一次分数変換全体は「群」をなす。

複素数の基礎(立体射影)

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は立体射影を通して球面と同一視する。

$$x^2 + y^2 + t^2 = 1$$



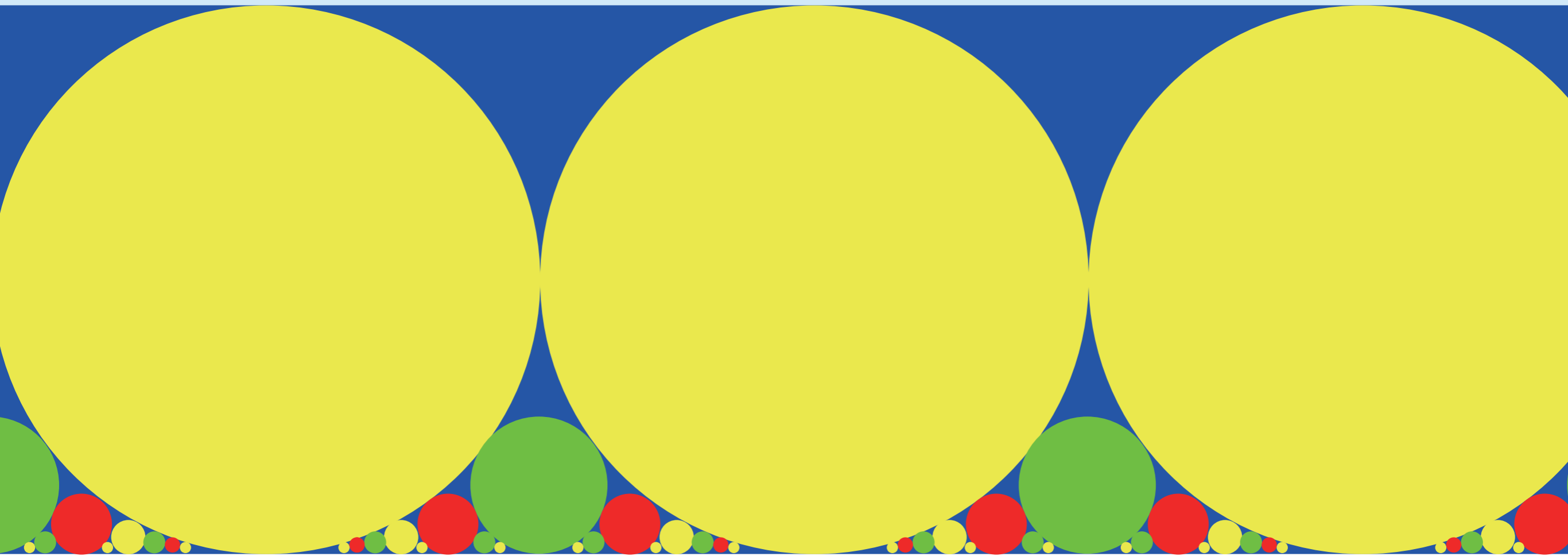
このとき, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をリーマン球面という。

複素数の基礎(一次分数変換)

- 一次分数変換はリーマン球面からリーマン球面への1対1対応を与える (正則同型になる。)
- 相似変換 (拡大・縮小) は2つの同心円に関する反転の合成
- 一次分数変換は円を円に写す。

第2章 サークル・パッキングの数学

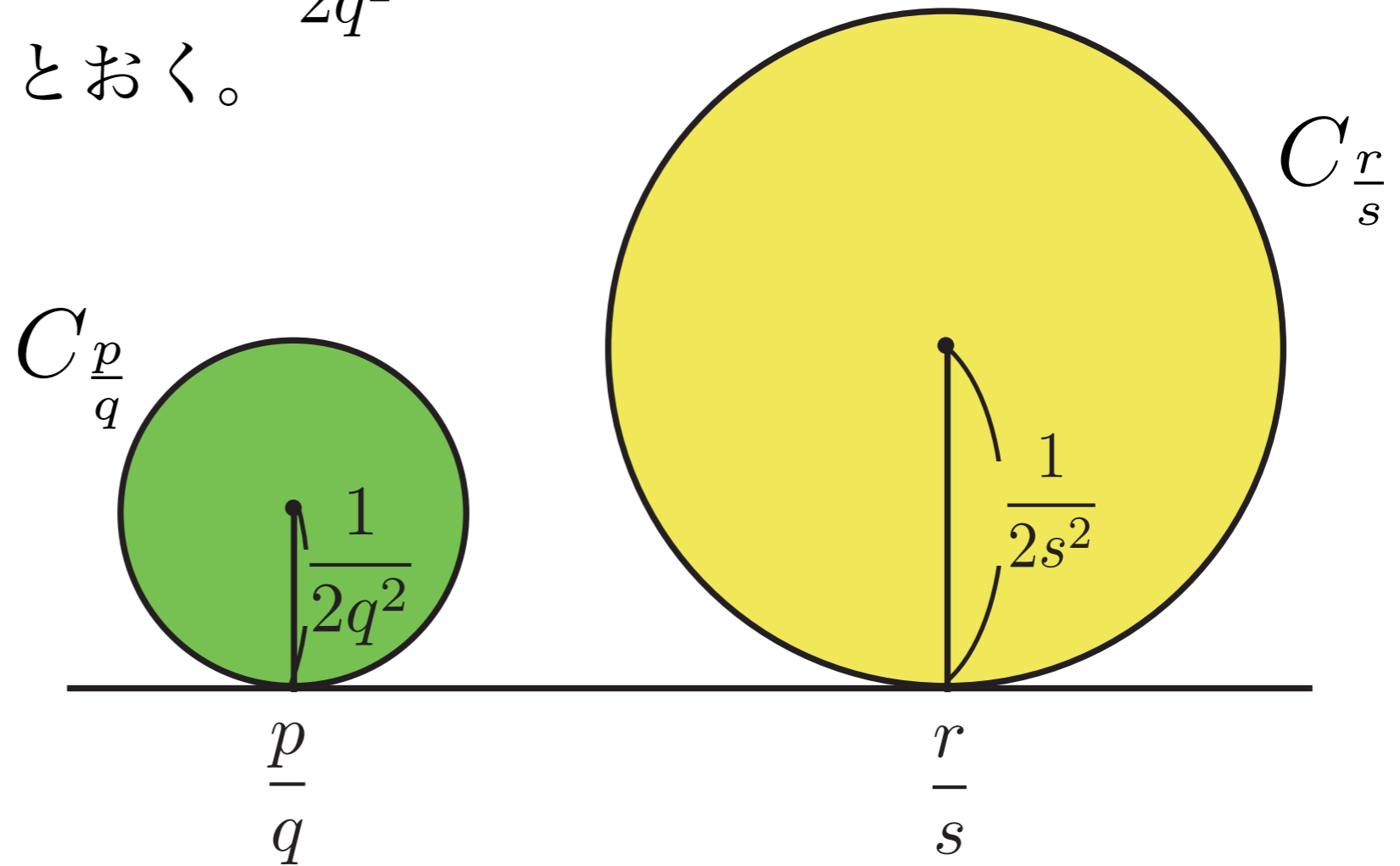
上半平面のサークルパッキング



上半平面のサークルパッキング

以下、有理数 $\frac{p}{q}$ は既約分数で表示し、 $q > 0$ とする。

有理数 $\frac{p}{q}$ で実軸に接し、半径 $\frac{1}{2q^2}$ をもつ上半平面内の (開) 円板を $C_{\frac{p}{q}}$ とおく。

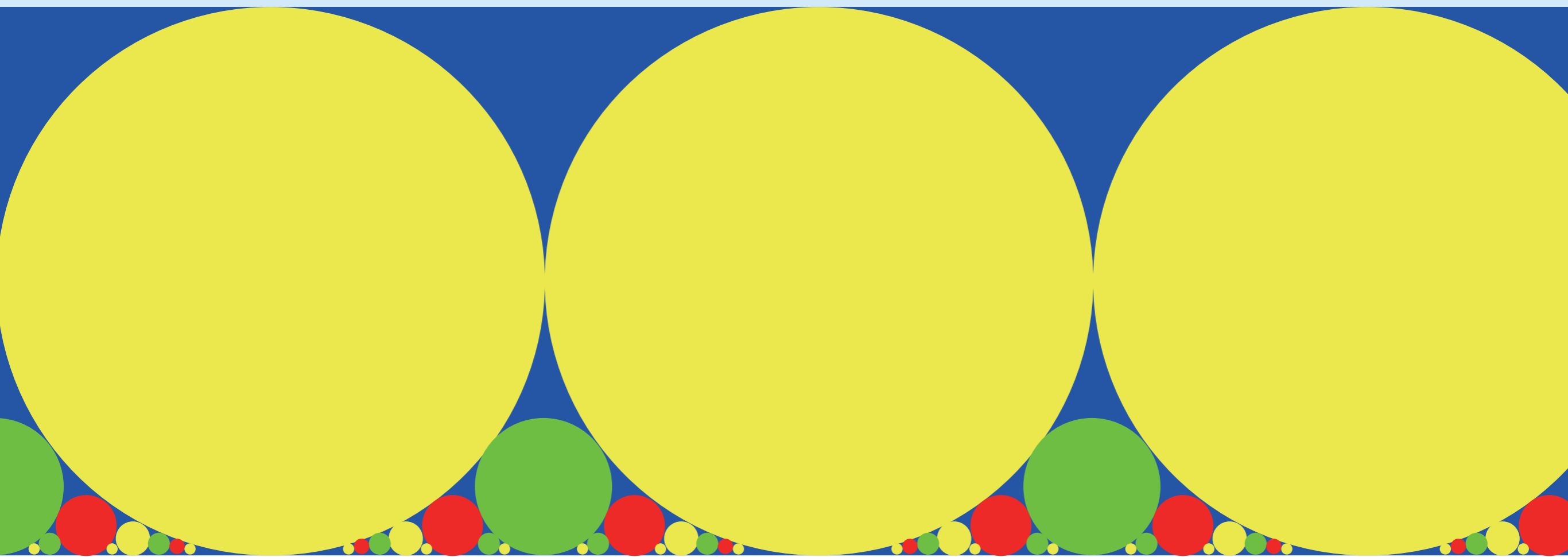


$\frac{p}{q} \neq \frac{r}{s}$ のとき、 $C_{\frac{p}{q}}$ と $C_{\frac{r}{s}}$ は交わらない。また $|ps - qr| = 1$ のときに限り、2つの円板は接する。

上半平面のサークルパッキング

i

$1 + i$



$-\frac{1}{3}$

$\frac{0}{1}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$

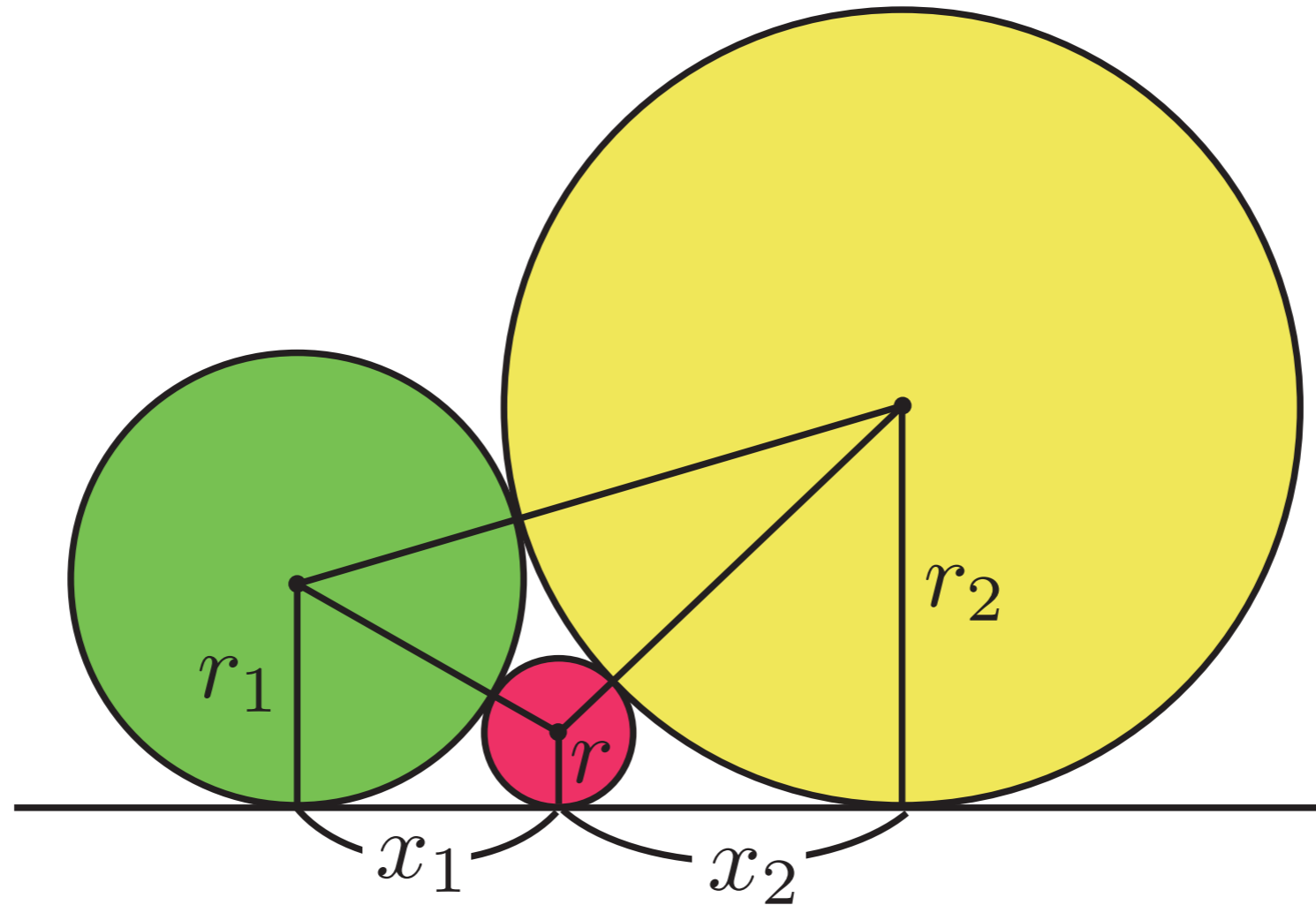
$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{1}$

$\frac{3}{2}$

$\frac{2}{1}$

互いに接する直線と2円のすべてに接する円の半径

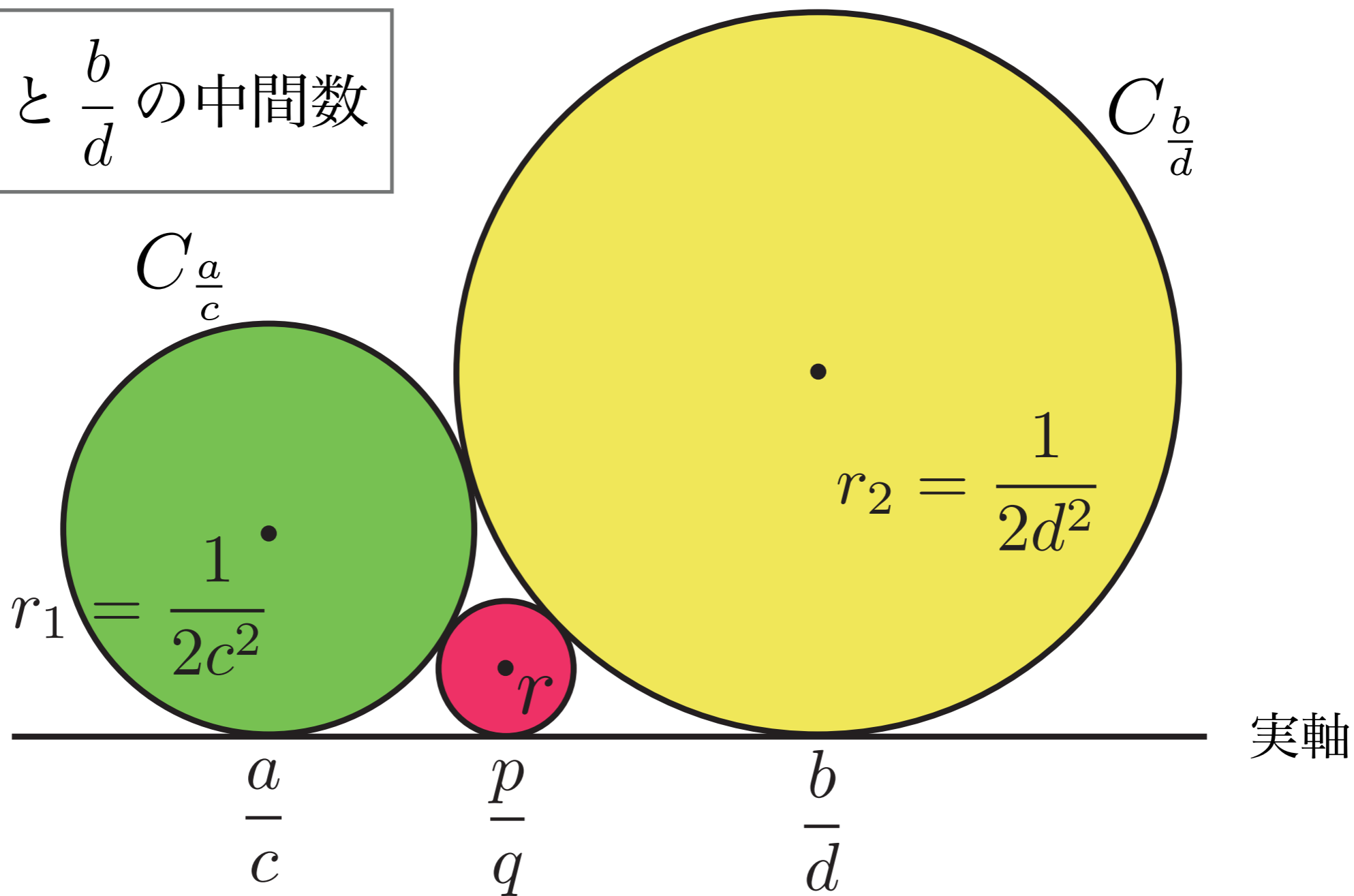


$$x_1 = 2\sqrt{rr_1} \quad x_2 = 2\sqrt{rr_2}$$

$$r = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}$$

$\frac{a}{c}$ と $\frac{b}{d}$ は既約分数. $c > 0, d > 0, ad - bc = \pm 1$.

$\frac{a}{c}$ と $\frac{b}{d}$ の中間数



$$\frac{p}{q} = \frac{a + b}{c + d} \left(\frac{a}{c} \oplus \frac{b}{d} \text{ と仮に表す} \right)$$

$$\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} \oplus \frac{2}{3} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{5} \oplus \frac{5}{8} = \frac{8}{13}$$

$$\frac{8}{13} \oplus \frac{5}{8} = \frac{13}{21}$$



黄金数 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ の逆数に収束

$\frac{0}{1}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{3}{5}$

$\frac{5}{8}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{1}$

フィボナッチ数列

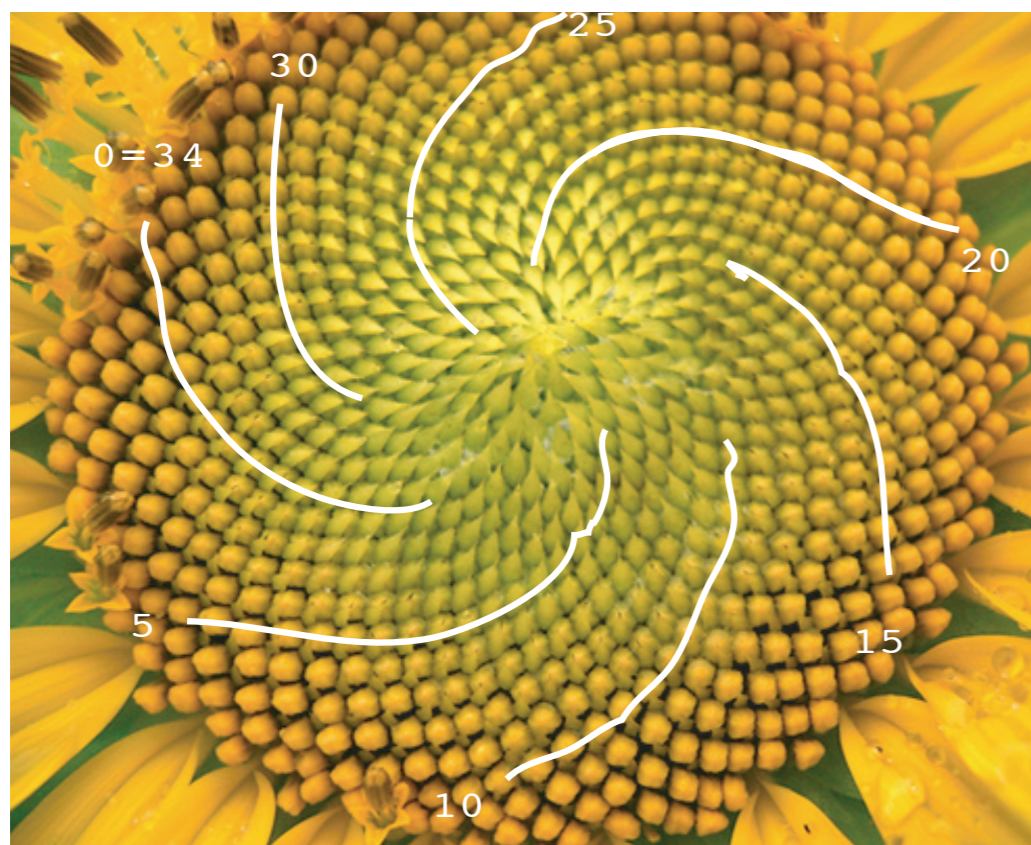
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

フィボナッチ数列

$$a_0 = 0, a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots



サークルパッキングの応用：有理数と無理数の見分け方

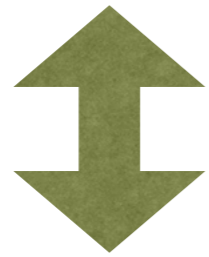
実数 α が**無理数**であるための必要十分条件は

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

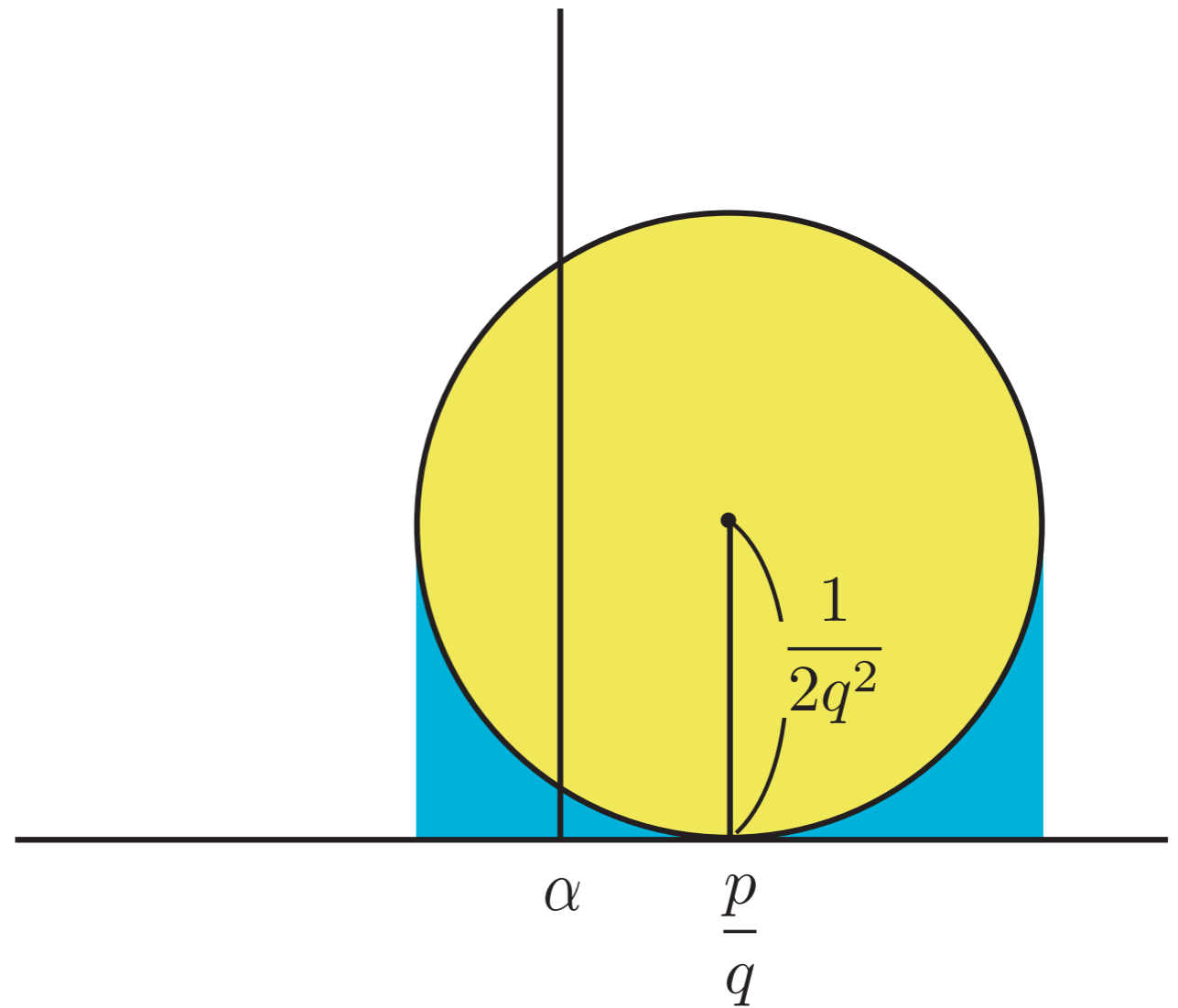
をみたす有理数 $\frac{p}{q}$ (既約分数, $q > 0$) が無限個存在することである。

証明

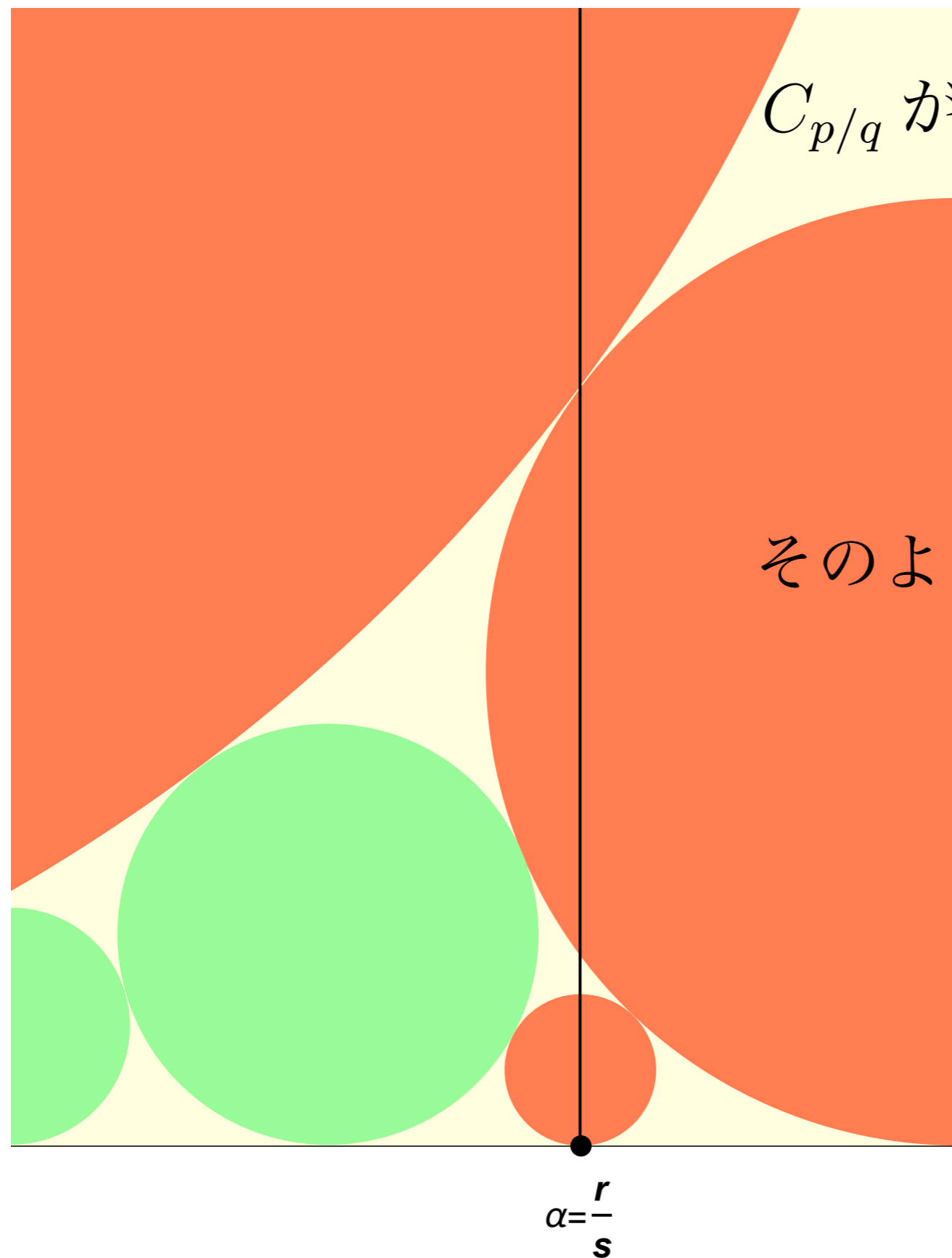
$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$



α を通る垂直線が
円板 $C_{p/q}$ と交わる。



α が有理数のとき

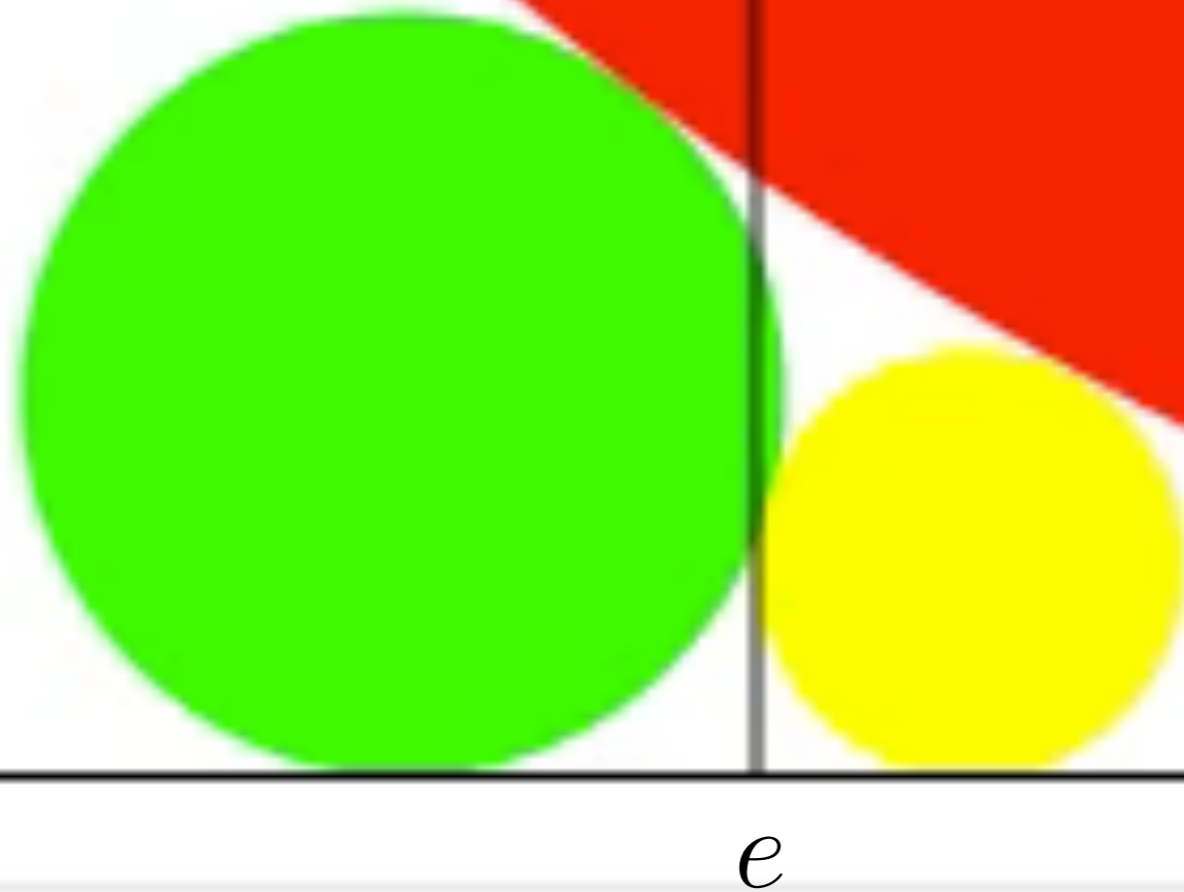


$C_{p/q}$ がオレンジの円板のときに限り

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

そのような有理数 $\frac{p}{q}$ は有限個しかない。

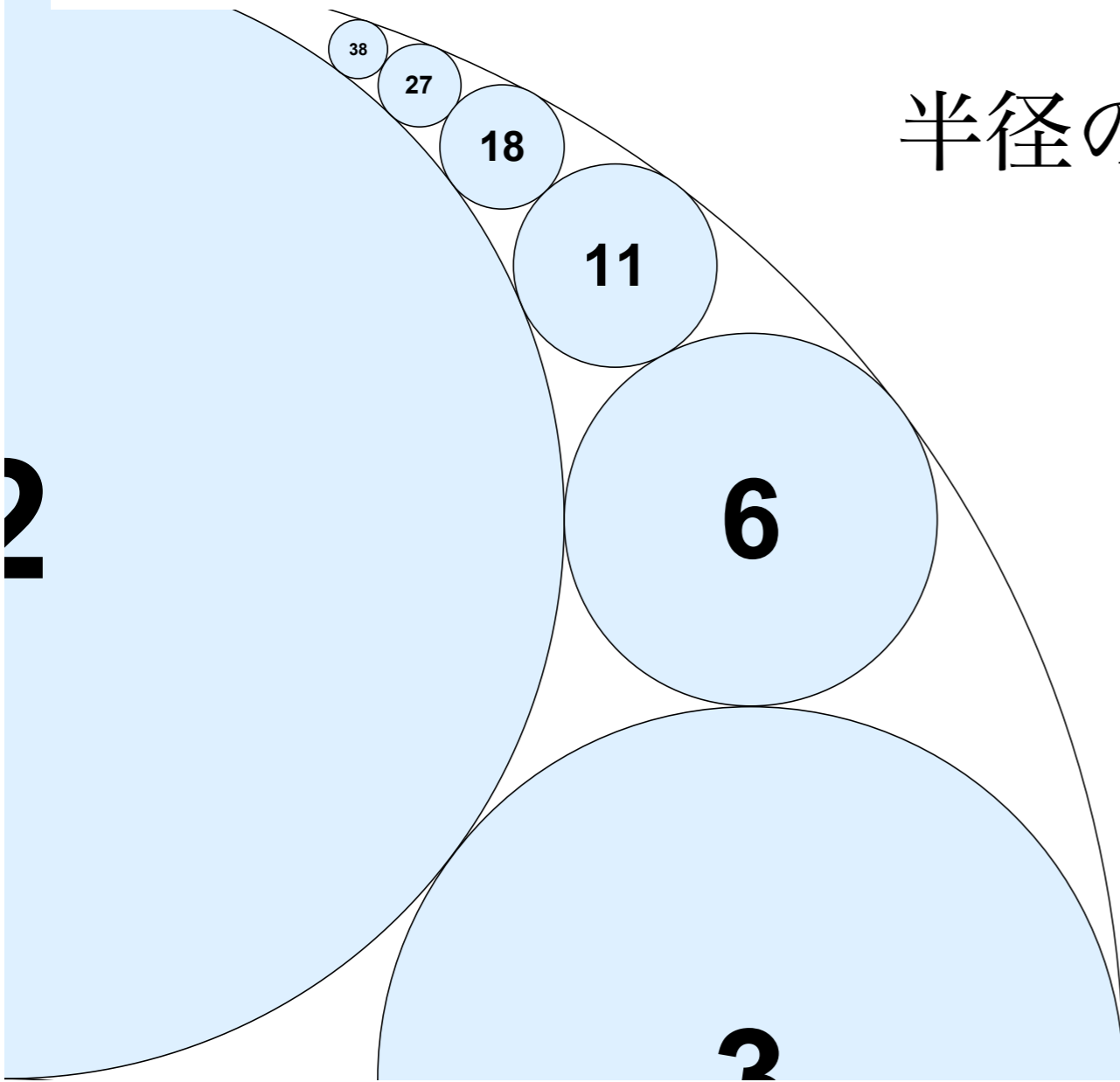
α が無理数ならば、垂直直線に沿って α に近づくとき、いつまでも $C_{p/q}$ の形の円板に入ったり出たりを繰り返す。



証明終わり

問題の解答

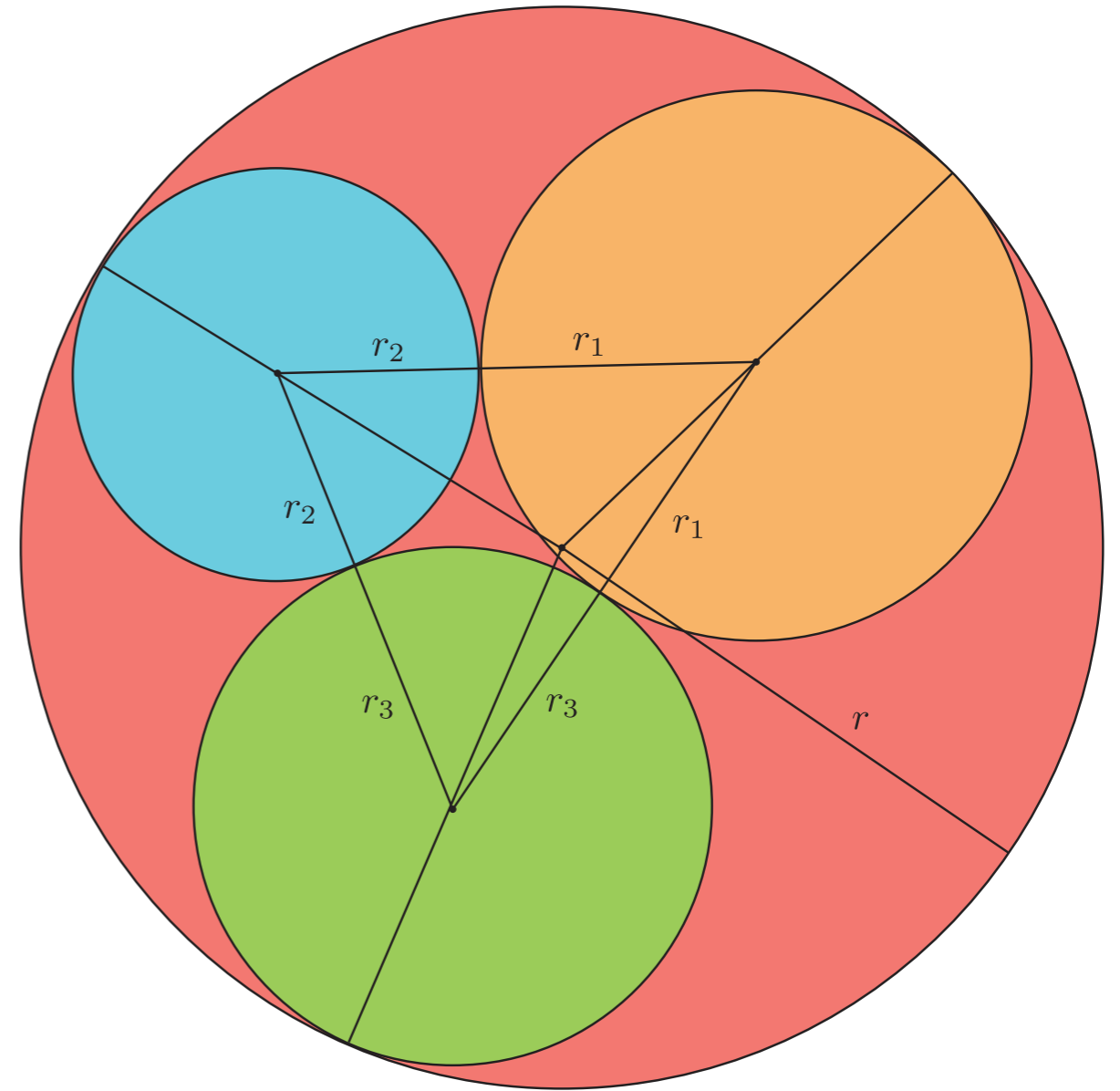
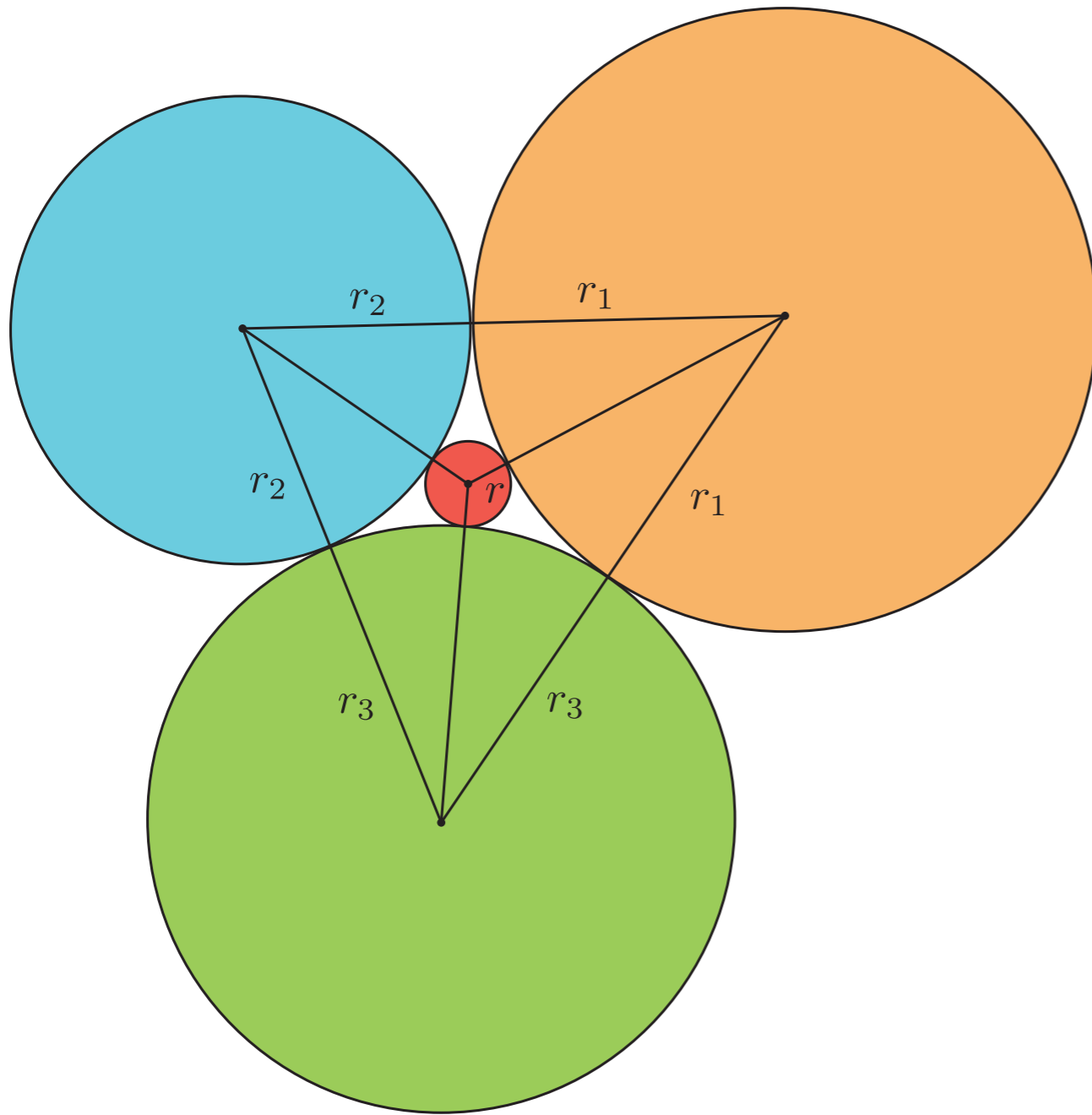
半径の逆数を示す



乙 → 丙 → 丁 → 戊 → 己 → 庚 →
3 → 6 → 11 → 18 → 27 → 38 →

規則性を見つけてください！

問題の解答 互いに接する3円に接する円の半径 (デカルトの円定理)



$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + 2\sqrt{\frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_3r_1} + \frac{1}{r_1r_2}}$$

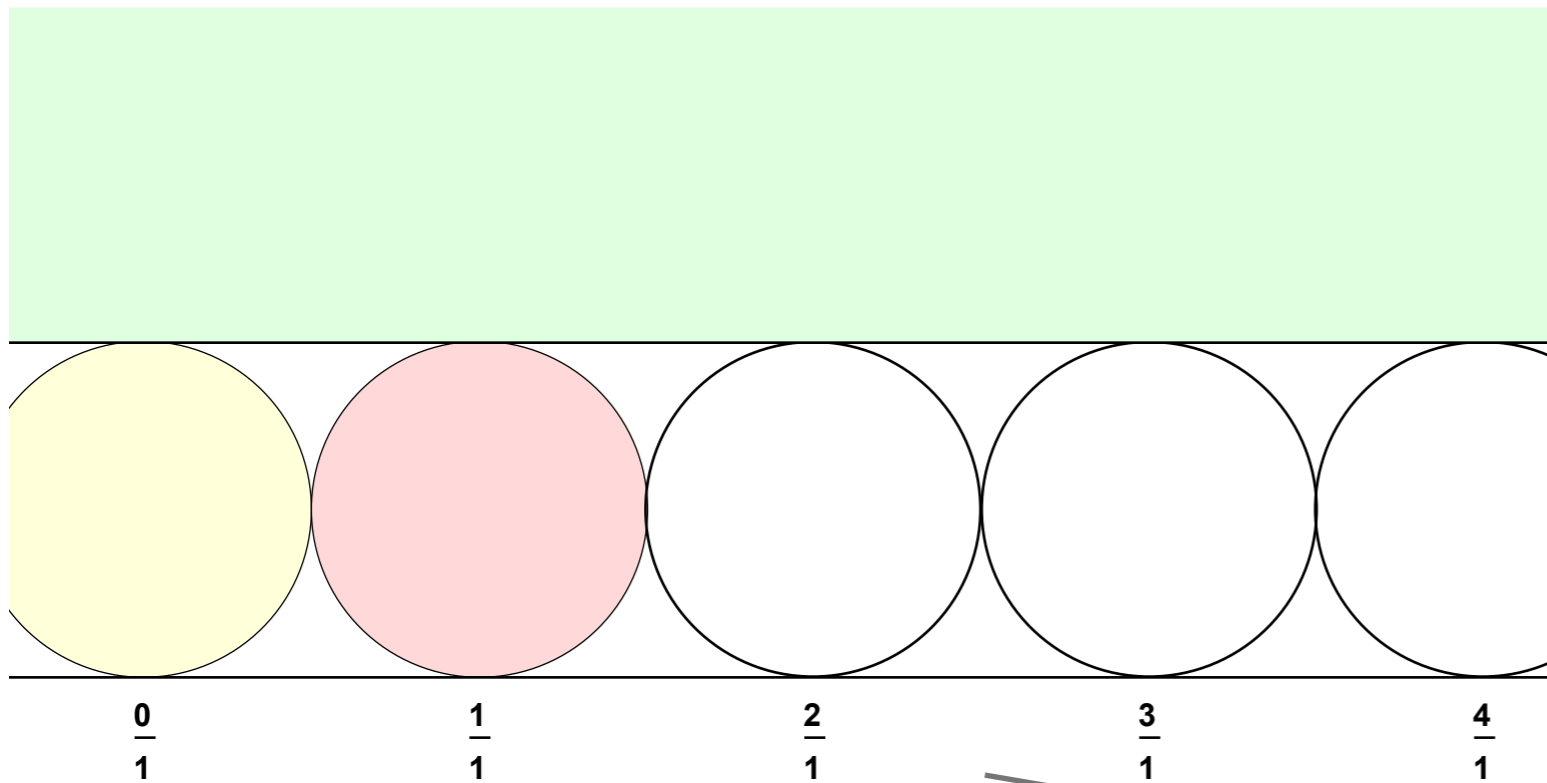
$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + 2\sqrt{\frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_3r_1} + \frac{1}{r_1r_2}}$$

男の児が中学(注：旧制中学)で幾何や代数を習うのは何の為めか、

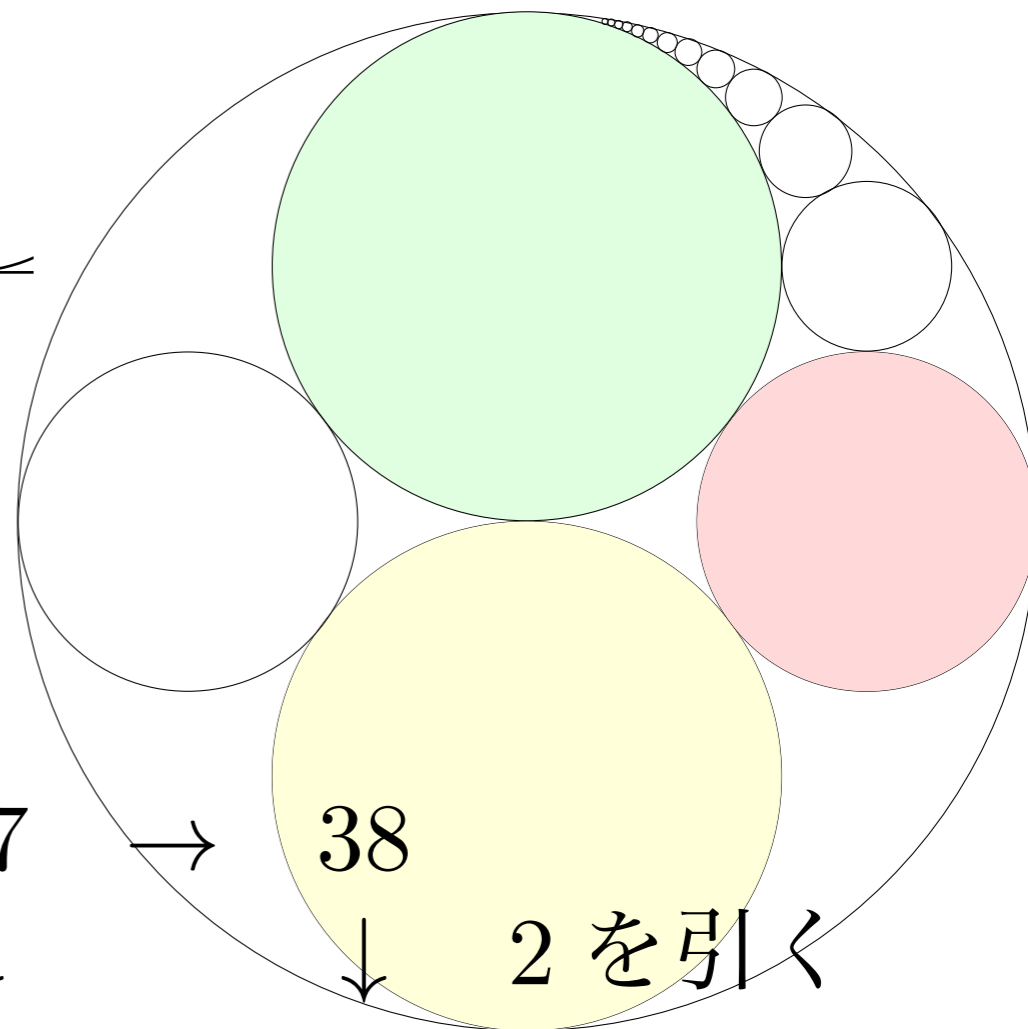
必ずしも実用に供するのが主眼ではなく、頭脳の働きを緻密にし、錬磨するのが目的ではないか。

谷崎潤一郎「痴人の愛」より

解答はデカルトの円定理を使った数学的帰納法でも得られるが，図の一次分数変換による C_n の像の半径を計算してもよい。



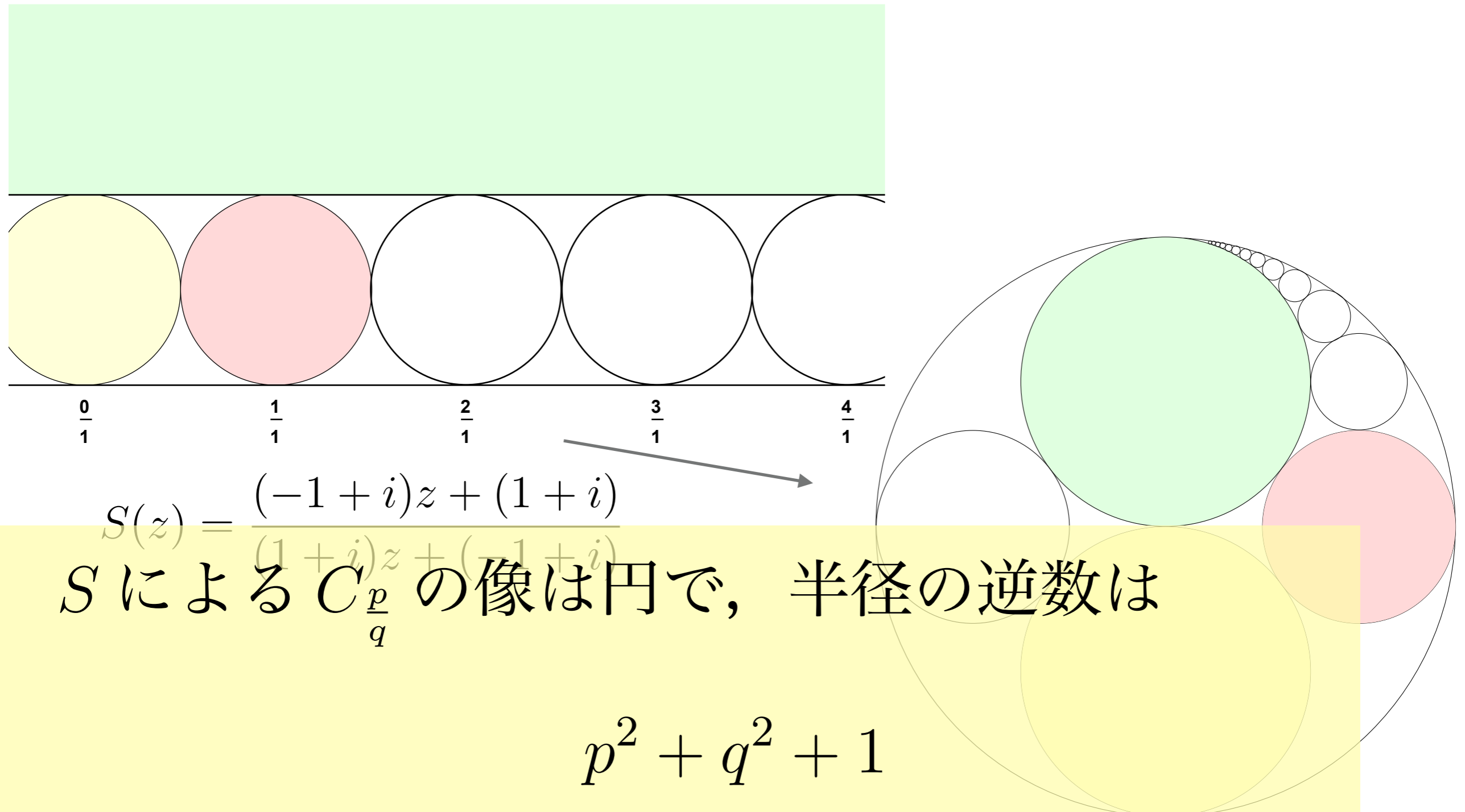
$$S(z) = \frac{(-1 + i)z + (1 + i)}{(1 + i)z + (-1 + i)}$$



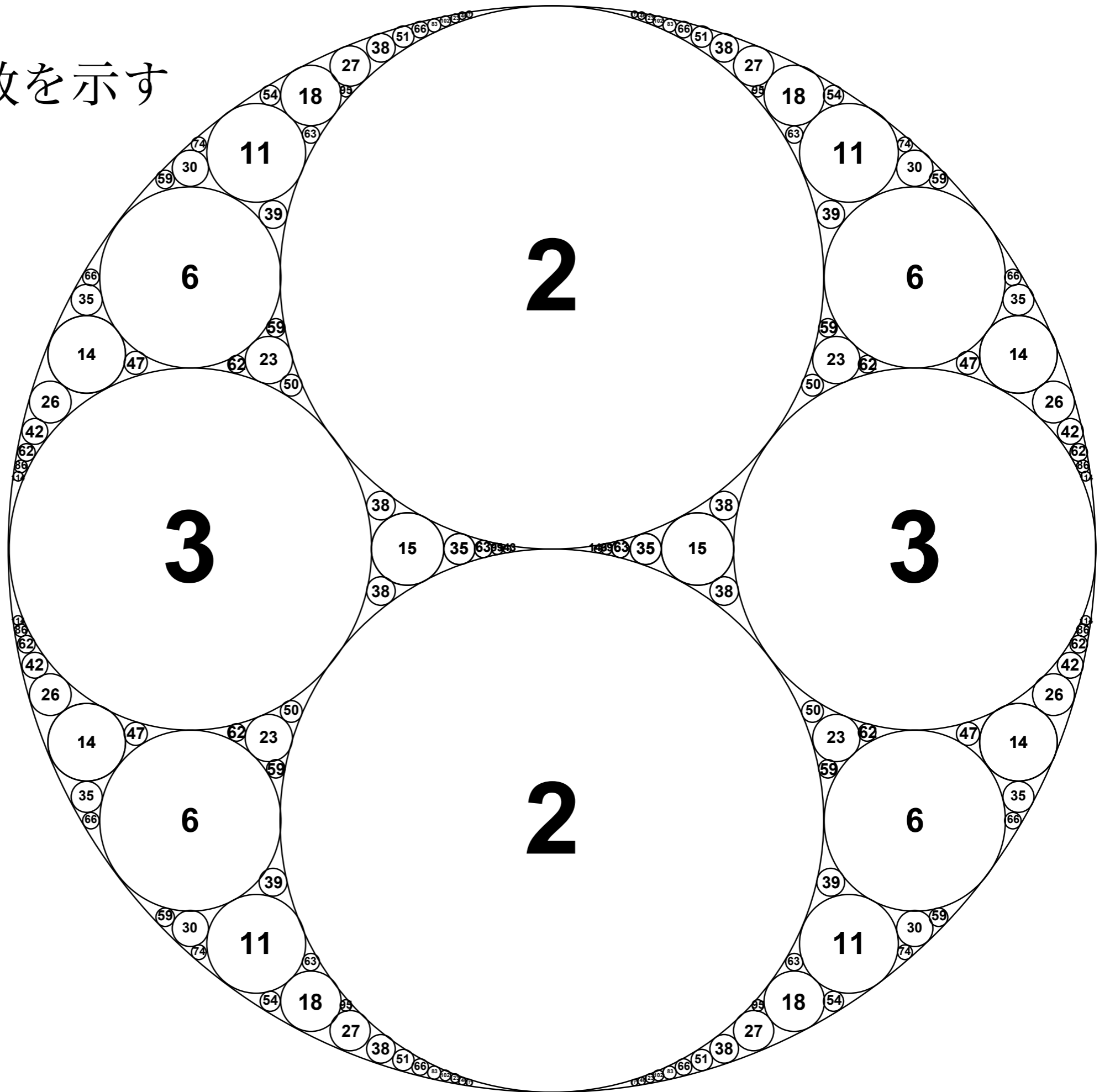
3	→	6	→	11	→	18	→	27	→	38
↓		↓		↓		↓		↓		↓
1	→	4	→	9	→	16	→	25	→	36

2を引く

解答はデカルトの円定理を使った数学的帰納法でも得られるが，図の一次分数変換による C_n の像の半径を計算してもよい。

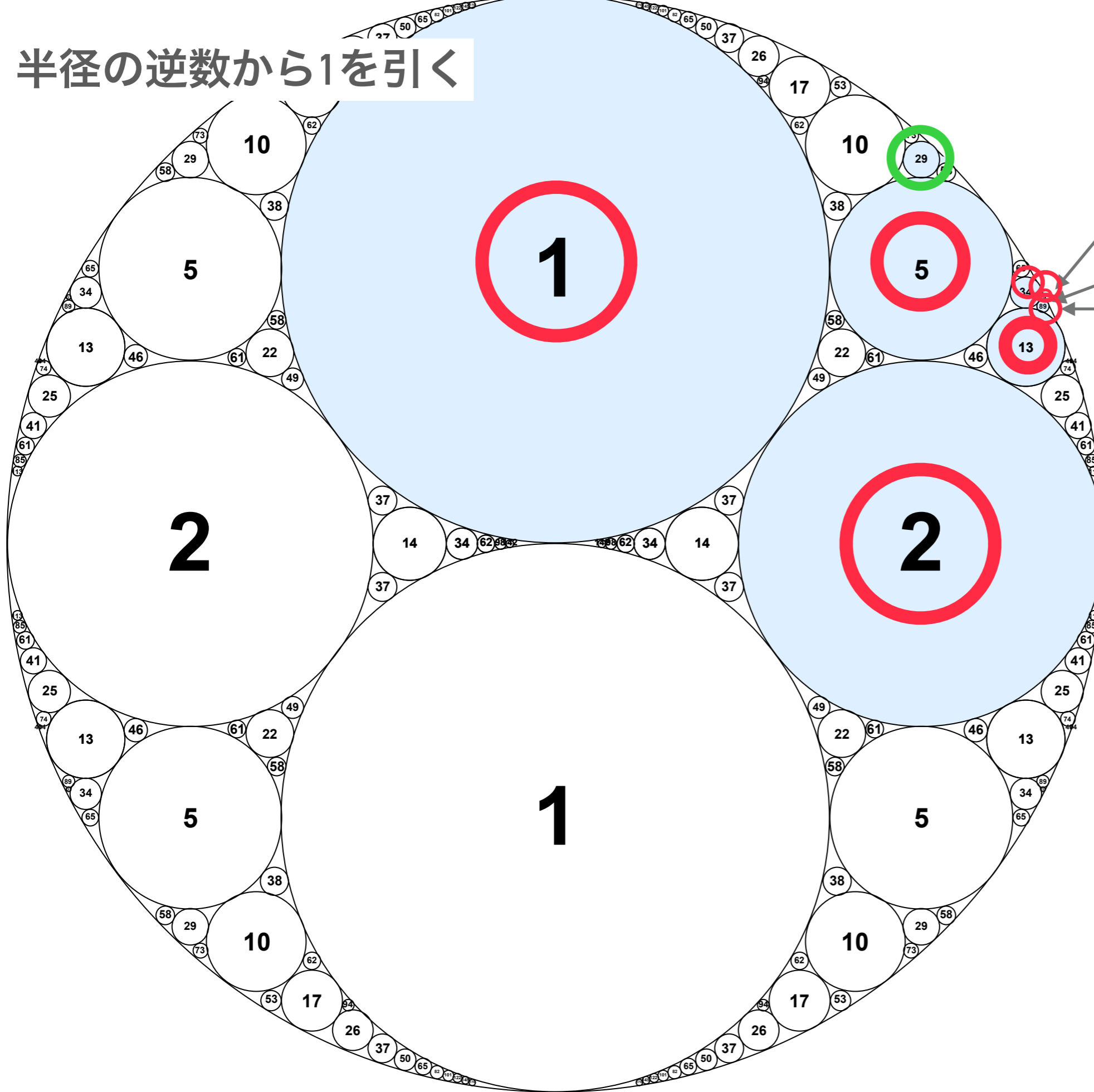


半径の逆数を示す



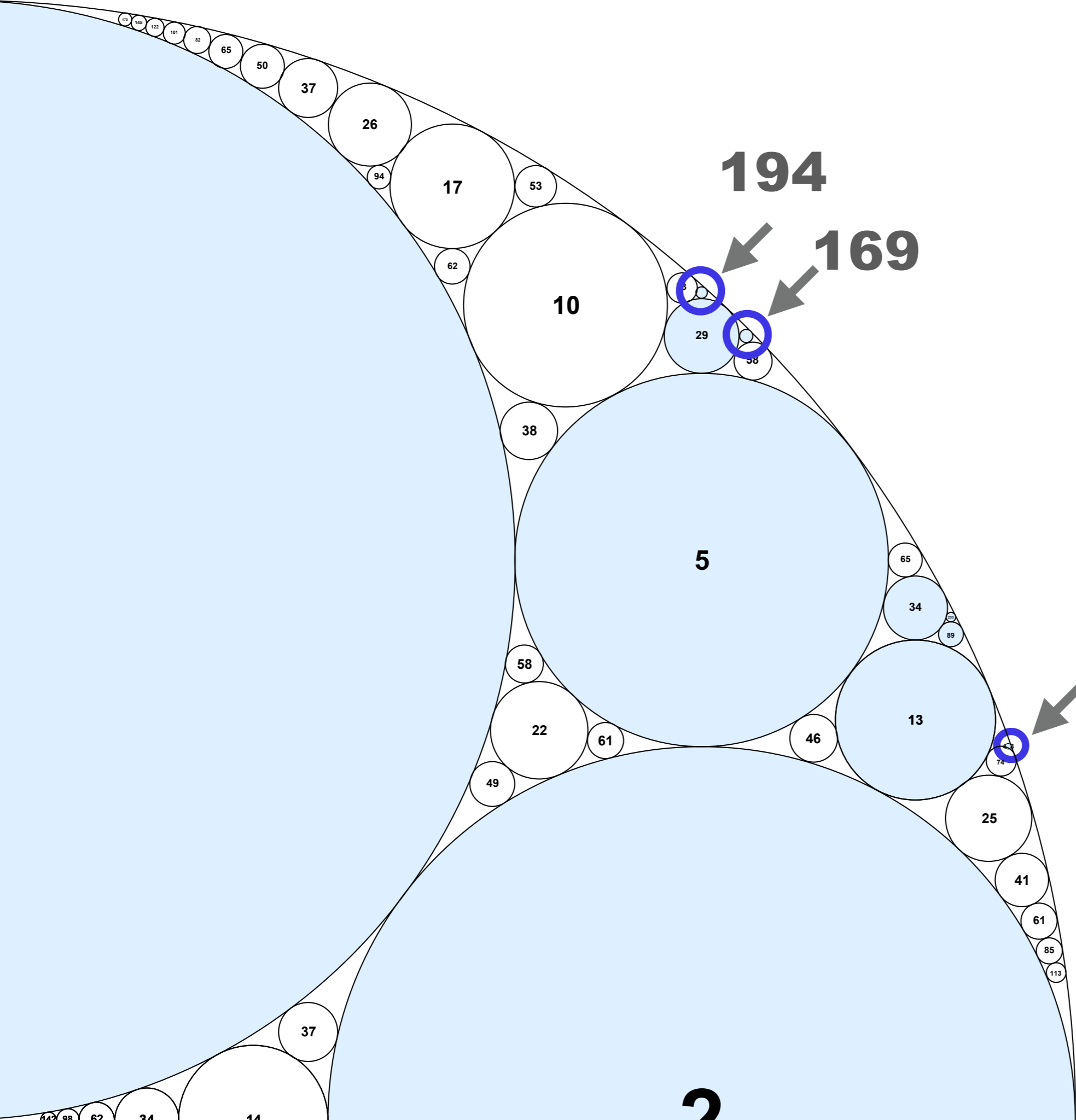
半径の逆数から1を引く

マルコフ数



233
610
89

- 1
- 2
- 5
- 13
- 29
- 34
- 89
- 169
- 194
- 233
- 433
- 610
- ⋮



- 1
- 2
- 5
- 13
- 29
- 34
- 89
- 169
- 194
- 233
- 433
- 610
- ⋮

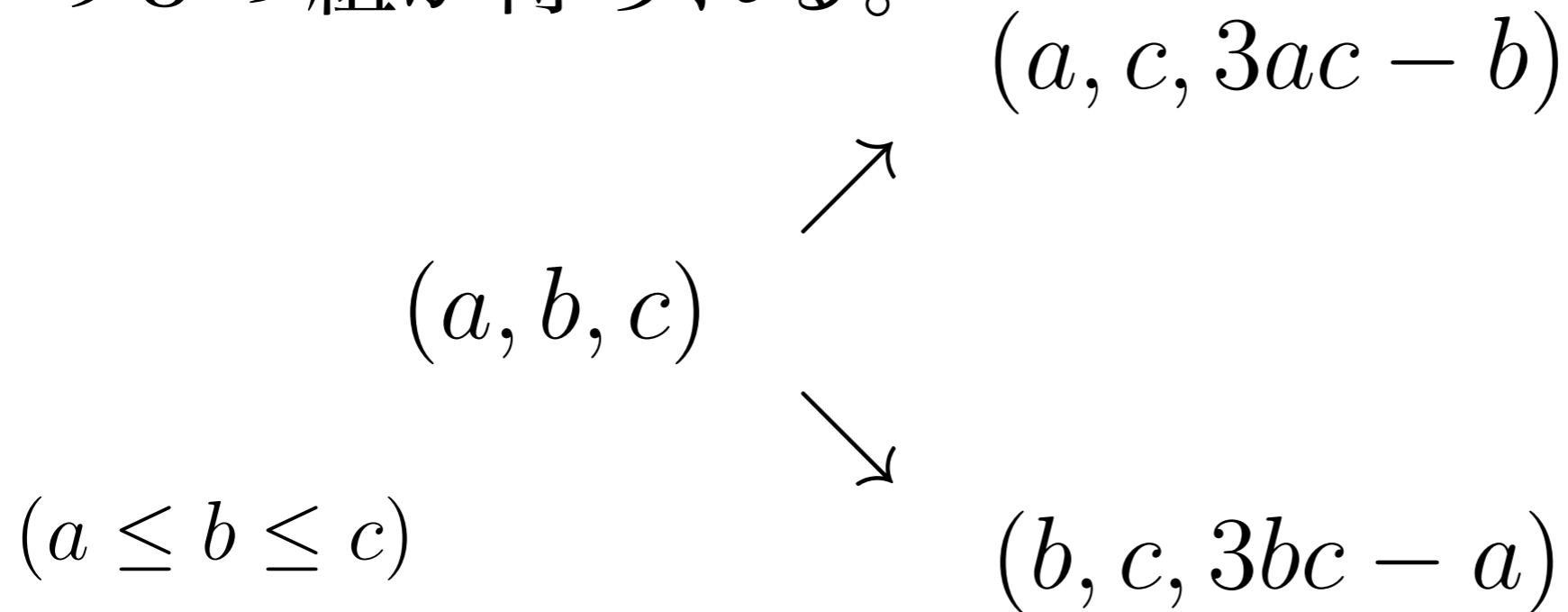
マルコフ数

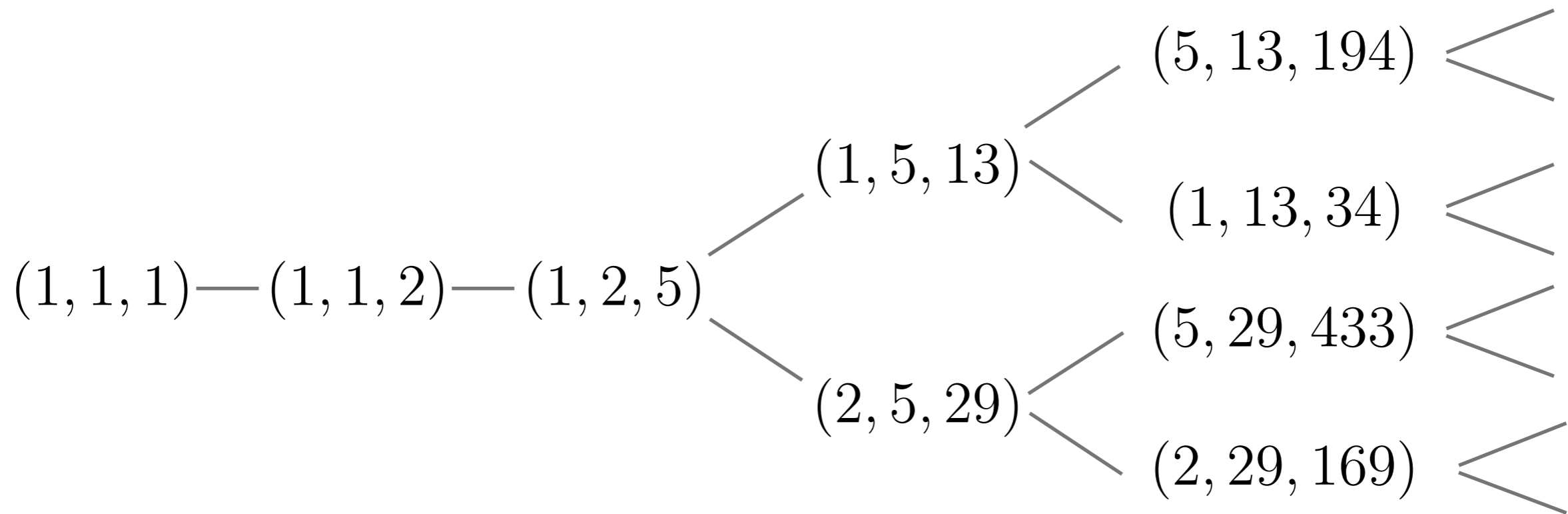
正整数の3つ組 (x, y, z) が

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

をみたすとき、**マルコフの3つ組 (Markov triple)** という。

$(1, 1, 1)$ から次の操作を繰り返してすべてのマルコフの3つ組が得られる。





あるマルコフの3つ組みに属する数をマルコフ数という。

マルコフ数は無限にあって、小さい数から順に

1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, 610, 985, 1325, 1597, …

マルコフ数とフィボナッチ数列

$f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, \dots$ をフィボナッチ数列

このとき,

$$(1, f_{2n-1}, f_{2n+1})$$

はマルコフの3つ組

$$(1, f_n^2 + f_{n+1}^2, f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)$$

はマルコフの3つ組み。

以上は、興味をもたれた方への宿題



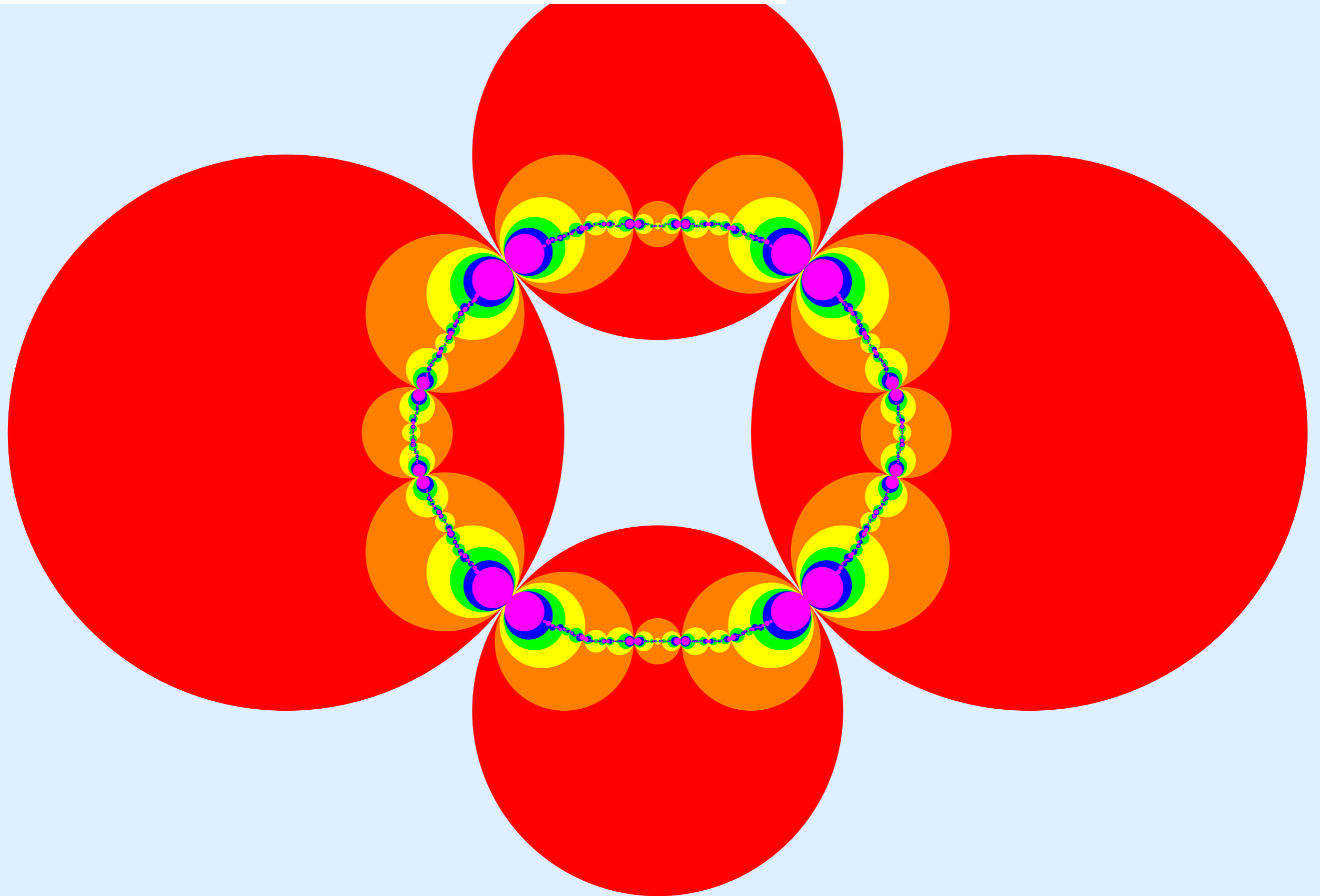
A. A. Markov (1856-1922)

マルコフ数に関する予想 (G. フロベニウス, 1913)

c をマルコフ数とすると c を最大値とするマルコフの3つ組 (a, b, c) はただ一つしかない。

$$(a \leq b \leq c)$$

第3章 円とフラクタル図形



フラクタル(fractal)は1975年に自己相似集合など複雑な図形を扱うためにB.マンデルブロートによって提唱された幾何学の概念。非整数次元をもつ図形をフラクタルと呼ぶことが多いが、整数次元をもちながらフラクタルと呼ぶに相応しい図形も存在する。



Benoit Mandelbrot (1924-2010)

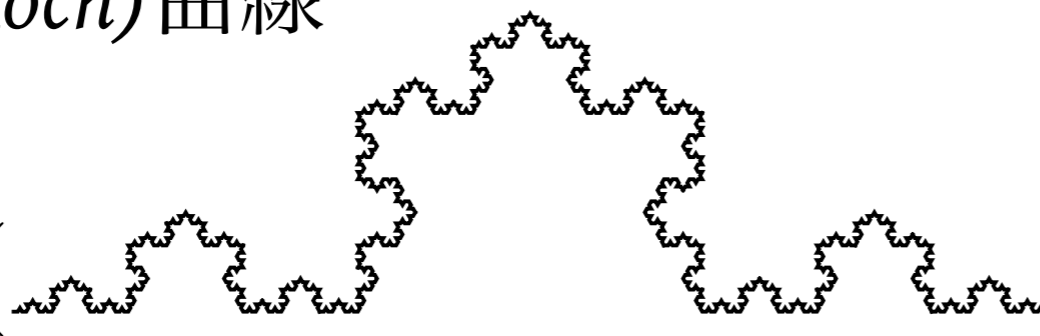
*My soul is spiraling in frozen **fractals** all around.*

— *Frozen*(アナと雪の女王) *Let It Go* より—

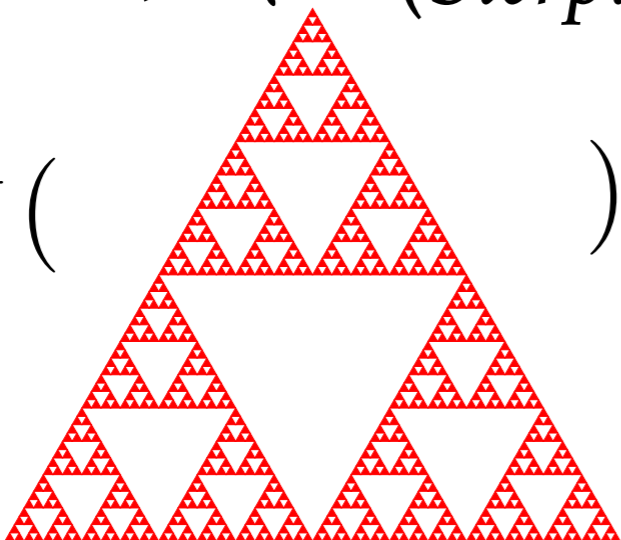


フラクタル図形の例とそのハウスドルフ次元

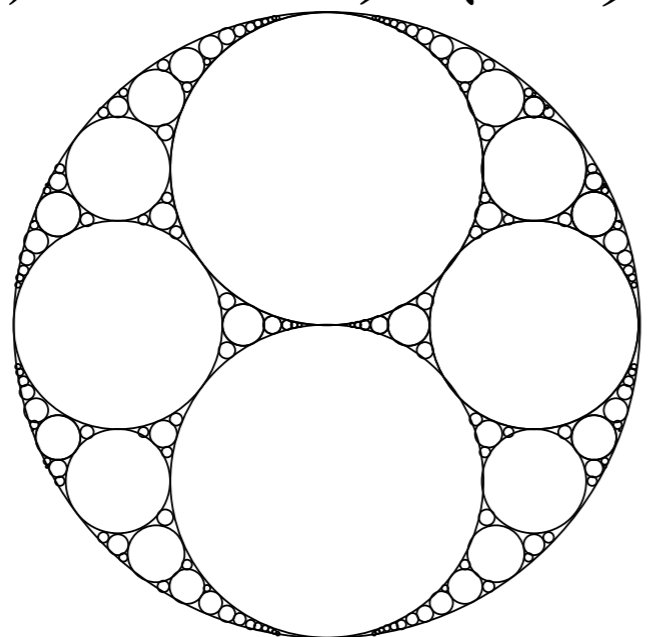
コッホ (Koch) 曲線


$$\dim_H (\text{Koch curve}) = \log_3 4 = 1.26186 \dots$$

シェルピンスキー (Sierpinski) の三角形


$$\dim_H (\text{Sierpinski triangle}) = \log_2 3 = 1.58496 \dots$$

アポロニアン・パッキング


$$\dim_H (\text{Apollonian packing}) \approx 1.305688 \text{ (McMullen, 1998)}$$

シヨットキー群(SCHOTTKY GROUP)

iben, als complexe Grössen beliebig leichungen, auf welche wir hier

dass wir die Gesamtmannigfaltigkeit derselben wieder leicht überblicken können.. Dass wir hier mit einem Continuum zu thun haben, ist ohne weiteres ersichtlich. Um die Mannigfaltigkeit des letzteren zu bestimmen, bemerken wir, dass die einzelne loxodromische Erzeugende drei wesentliche complexe Constante enthält. Alle n Erzeugenden liefern somit $3n$ complexe Constante. Doch müssen wir noch Einheiten in Abzug bringen, da wir ja in einander transformierbare Gruppen nicht als verschieden ansehen werden und eine beliebige Transformation, die

Die im Anschluss an Figur 154 pg. 437 betrachteten Gruppen zweiter Art enthalten Untergruppen erster Art, welche hierher gehören. Das Besondere ist, dass wir bei diesen Untergruppen mit symmetrischen Bereichen P und lauter hyperbolischen Erzeugenden zu thun haben.

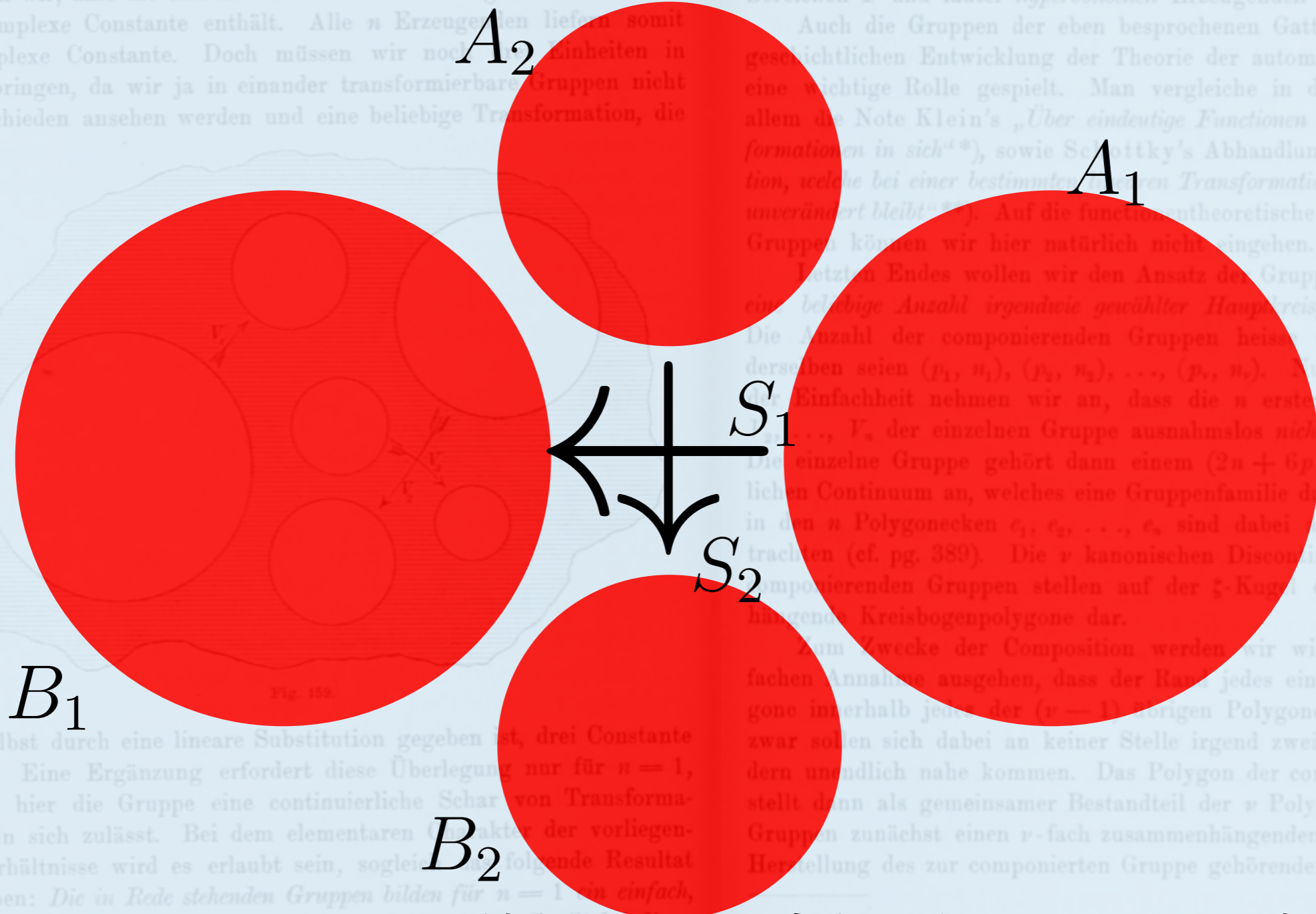
Auch die Gruppen der eben besprochenen Gattung haben in der geschichtlichen Entwicklung der Theorie der automorphen Functionen eine wichtige Rolle gespielt. Man vergleiche in dieser Hinsicht vor allem die Note Klein's „Über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich“ (*), sowie Schottky's Abhandlung „Über eine Function, welche bei einer bestimmten Transformation ihres Argumentes unverändert bleibt“ (**). Auf die functionentheoretische Bedeutung unserer Gruppen können wir hier natürlich nicht eingehen. —

Letzten Endes wollen wir den Ansatz der Gruppencomposition auf eine beliebige Anzahl irgendwie gewählter Hauptkreisgruppen anwenden. Die Anzahl der componierenden Gruppen heisse ν , die Charaktere derselben seien $(p_1, n_1), (p_2, n_2), \dots, (p_\nu, n_\nu)$. Zur aus Rücksichten der Einfachheit nehmen wir an, dass die n ersten Erzeugenden V_1, \dots, V_n der einzelnen Gruppe ausnahmslos nicht-hyperbolisch seien. Die einzelne Gruppe gehört dann einem $(2n + 6p - 6)$ -fachen unendlichen Continuum an, welches eine Gruppenfamilie darstellt; die Winkel in den n Polygonecken e_1, e_2, \dots, e_n sind dabei als gegeben zu betrachten (cf. pg. 389). Die ν kanonischen Discontinuitätsbereiche der componierenden Gruppen stellen auf der ξ -Kugel einfach zusammenhängende Kreisbogenpolygone dar.

Zum Zwecke der Composition werden wir wieder von der einfachen Annahme ausgehen, dass der Rand jedes einzelnen der ν Polygone innerhalb jeder der $(\nu - 1)$ übrigen Polygone gelegen ist; und zwar sollen sich dabei an keiner Stelle irgend zwei unter den ν Rändern unendlich nahe kommen. Das Polygon der componierten Gruppe stellt dann als gemeinsamer Bestandteil der ν Polygone der einzelnen Gruppen zunächst einen ν -fach zusammenhängenden Bereich dar. Die Herstellung des zur componierten Gruppe gehörenden Netzes geschieht

doch selbst durch eine lineare Substitution gegeben ist, drei Constante enthält. Eine Ergänzung erfordert diese Überlegung nur für $n = 1$, insofern hier die Gruppe eine continuierliche Schar von Transformationen in sich zulässt. Bei dem elementaren Charakter der vorliegenden Verhältnisse wird es erlaubt sein, sogleich folgende Resultat anzugeben: Die in Rede stehenden Gruppen bilden für $n = 1$ ein einfach,

zum Zwecke der Composition werden wir wieder von der einfachen Annahme ausgehen, dass der Rand jedes einzelnen der ν Polygone innerhalb jeder der $(\nu - 1)$ übrigen Polygone gelegen ist; und zwar sollen sich dabei an keiner Stelle irgend zwei unter den ν Rändern unendlich nahe kommen. Das Polygon der componierten Gruppe stellt dann als gemeinsamer Bestandteil der ν Polygone der einzelnen Gruppen zunächst einen ν -fach zusammenhängenden Bereich dar. Die Herstellung des zur componierten Gruppe gehörenden Netzes geschieht



S_i ($i = 1, 2$) は A_i の外部を B_i の内部に写す一次分数変換 (必ず存在するが一意的ではない)

シヨットキー群と収束指数

恒等変換 I と

$$S_{i_1}^{\epsilon_1} S_{i_2}^{\epsilon_2} S_{i_3}^{\epsilon_3} \cdots S_{i_n}^{\epsilon_n}$$

$$i_k = 1 \text{ または } i_k = 2, \epsilon_k = \pm 1, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$i_k = i_{k+1} \text{ のときは } \epsilon_k + \epsilon_{k+1} \neq 0$$

- S_k^{-1} は S_k の逆変換

の形の一次分数変換全体がつくる群 G をシヨットキー群という。

G の元に番号をつけて

$$G = \left\{ T_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} : n = 0, 1, 2, 3, \dots \right\}$$

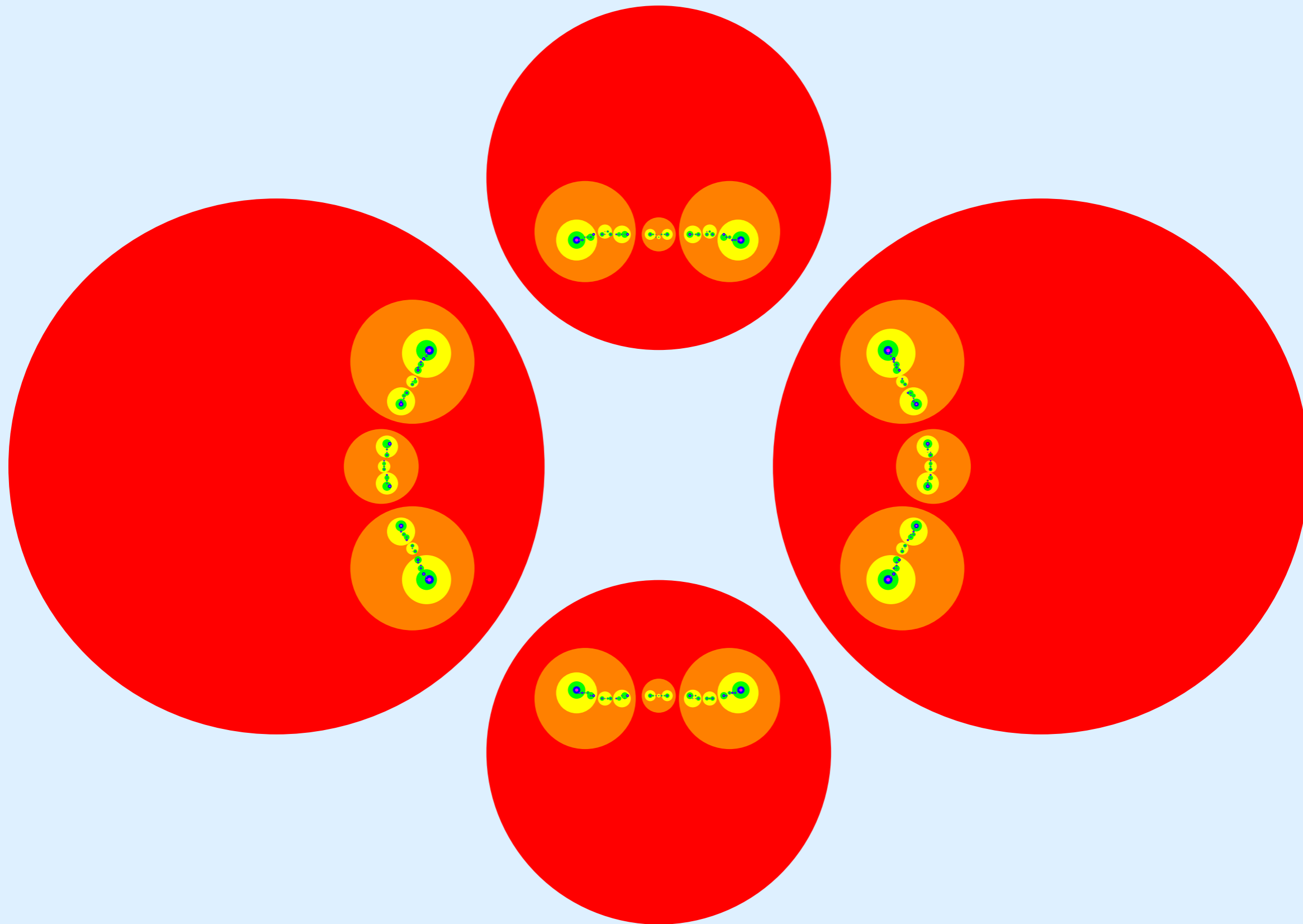
とする。ただし, $a_n d_n - b_n c_n = 1, T_0 = I$.

級数

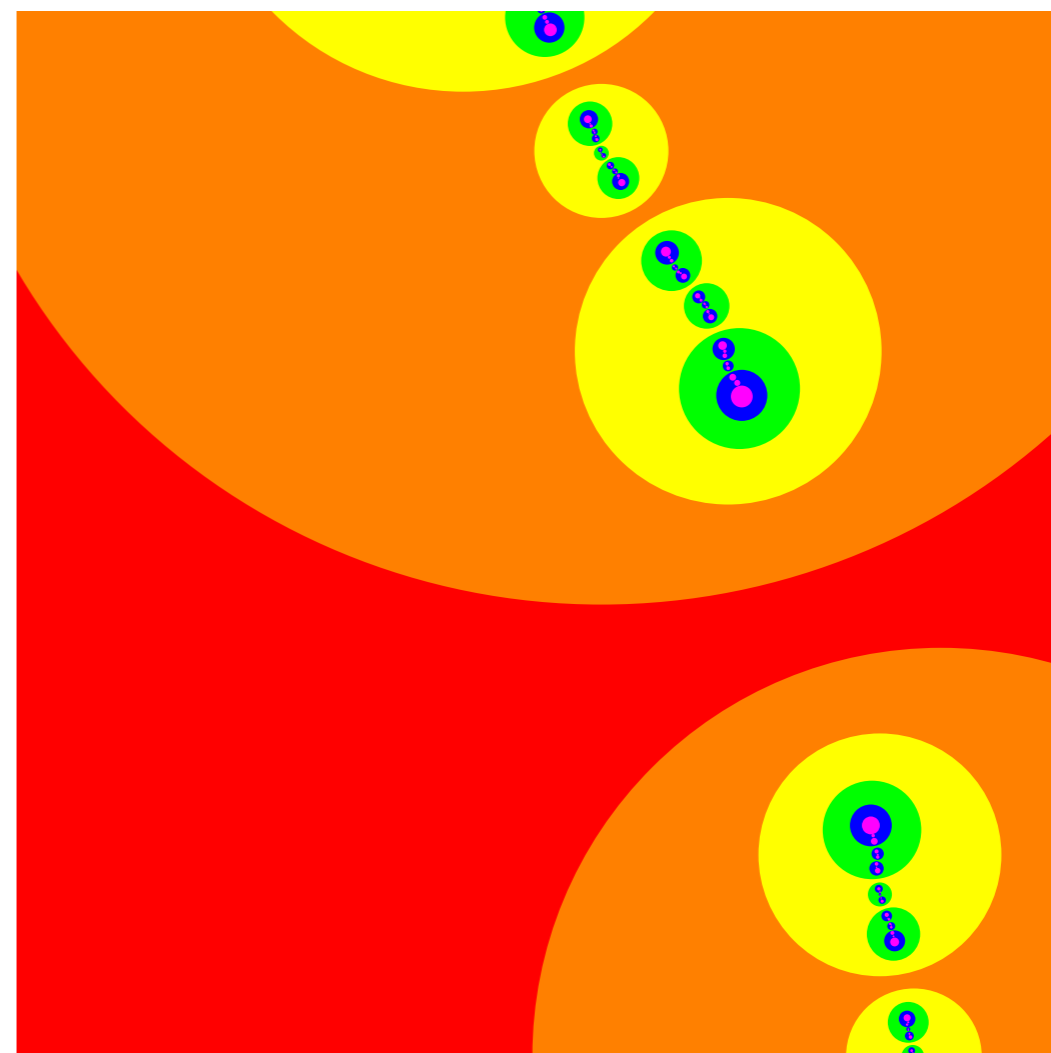
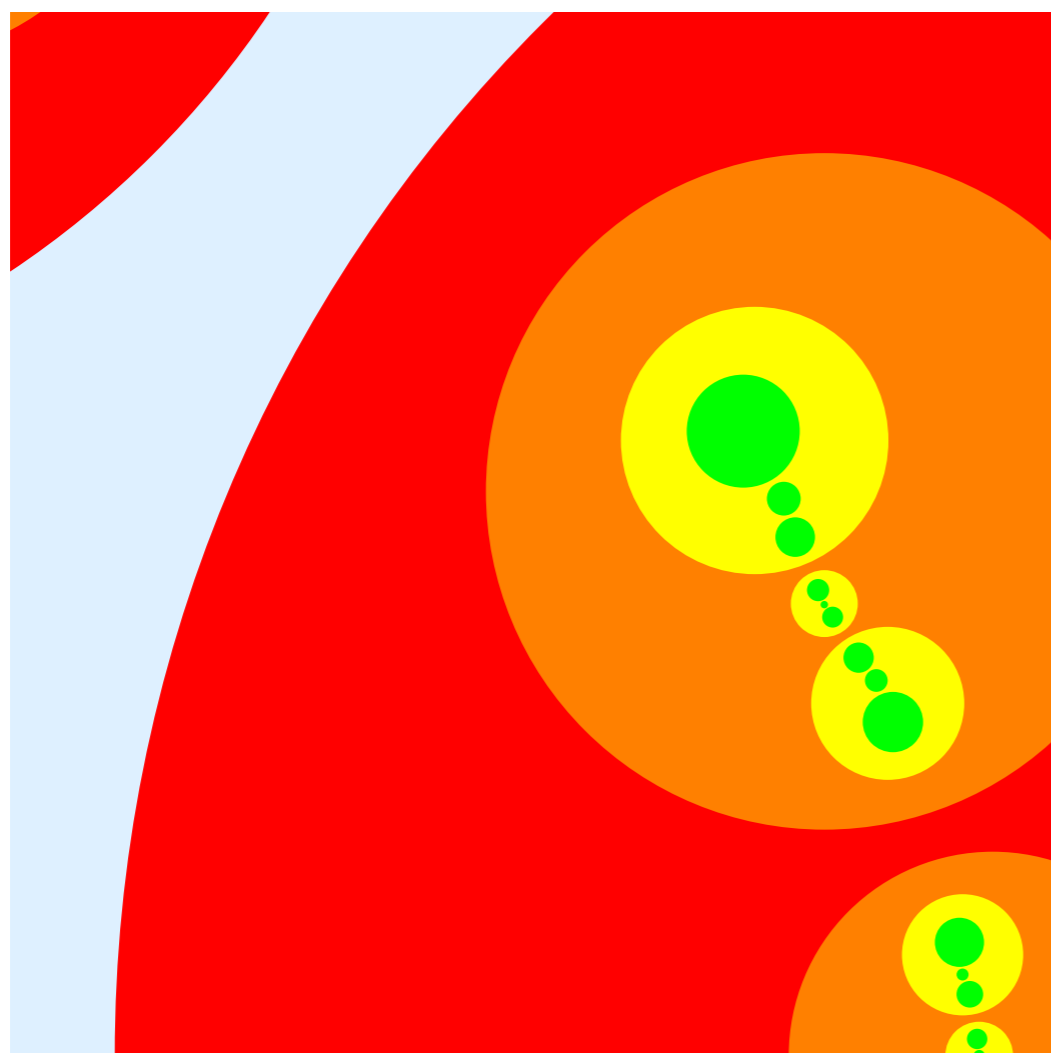
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|c_n|^s}$$

が収束する s の集合と発散する s の集合との境目 $\delta(G)$ を G の収束指数という。

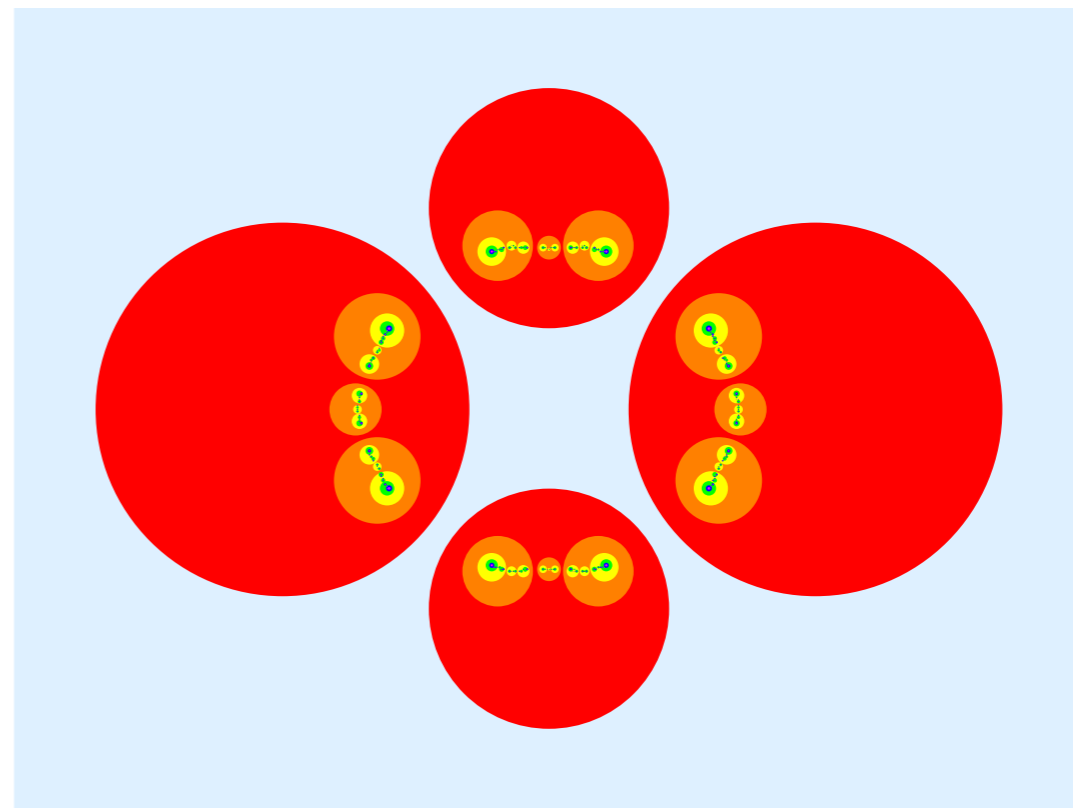
ショットキー群が生み出すフラクタル図形



ショットキー群が生み出すフラクタル図形



無限個の円板に含まれる点の集合 $L(G)$ を G の極限集合という。



定理 (赤座, 1973)

$$\dim_H L(G) = \frac{\delta(G)}{2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|c_n|^s}$$

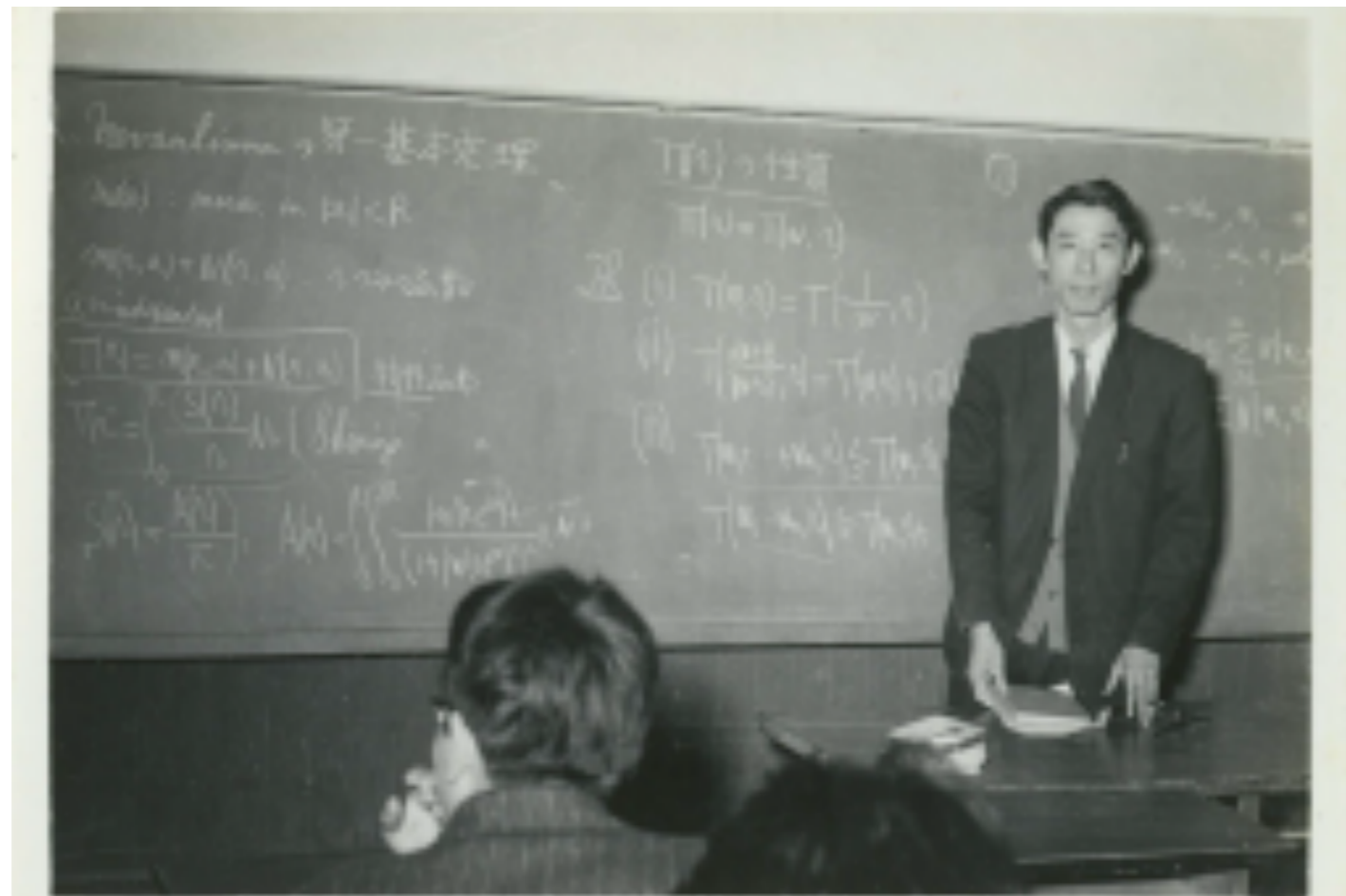
赤座暢(1927-1983)

経歴

1951年10月 名古屋大学から金沢大学理学部助教授（函数論講座）に就任

1972年8月 同教授（函数方程式講座）に昇進

1983年2月 肺癌のために死去



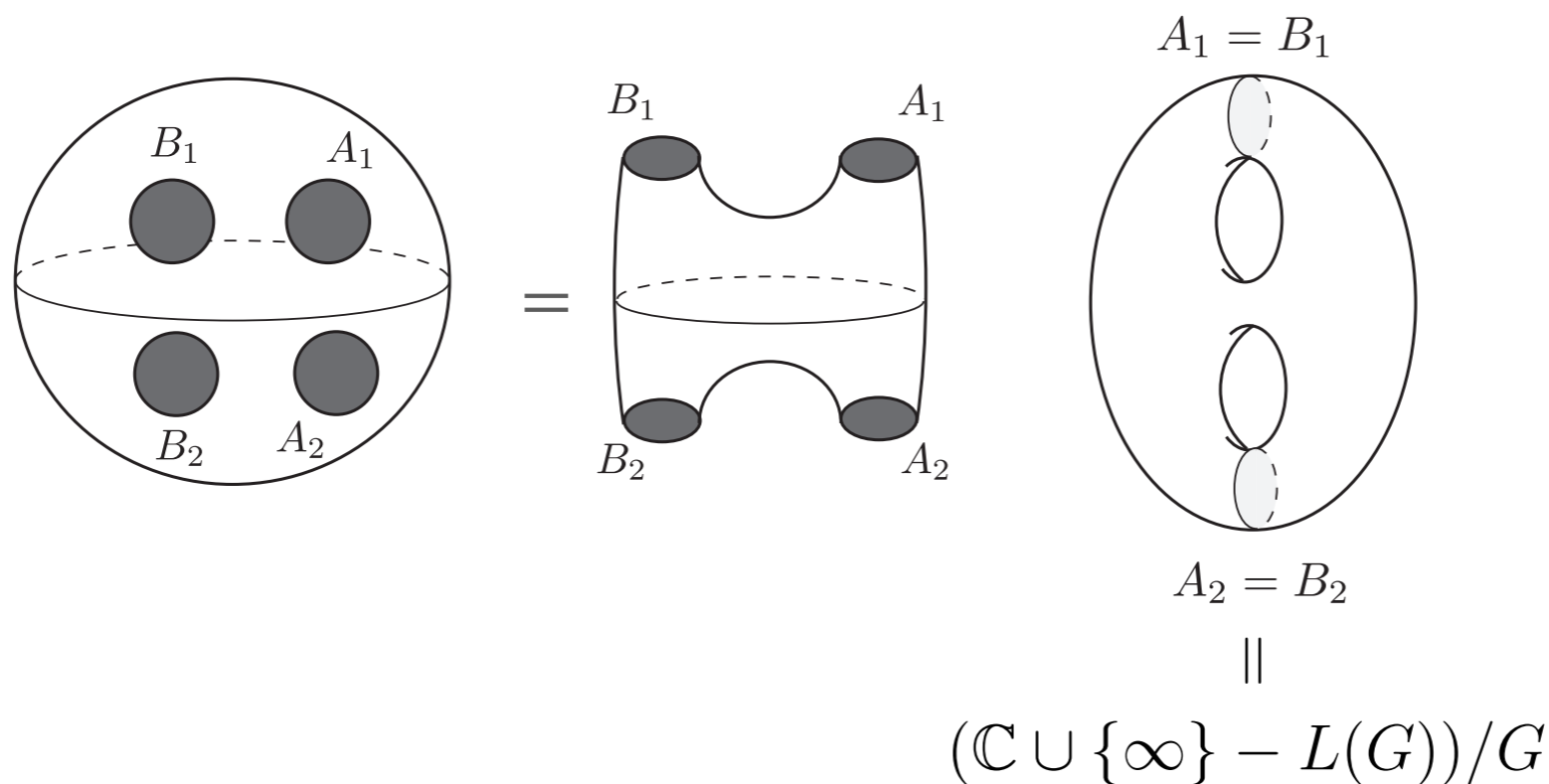
第4章 π は円周率か？

リーマン面

各点のまわりに (局所的な) 複素数のパラメータが導入されていて, その上で複素関数論がちゃんと議論できる曲面

リーマン面の例

G を **シュottキー群** とし, リーマン球面から円板 A_1, B_1, A_2, B_2 を取り除き, A_k の境界円と B_k の境界円を $S_k (k = 1, 2)$ を用いて貼り合わせて得られる曲面

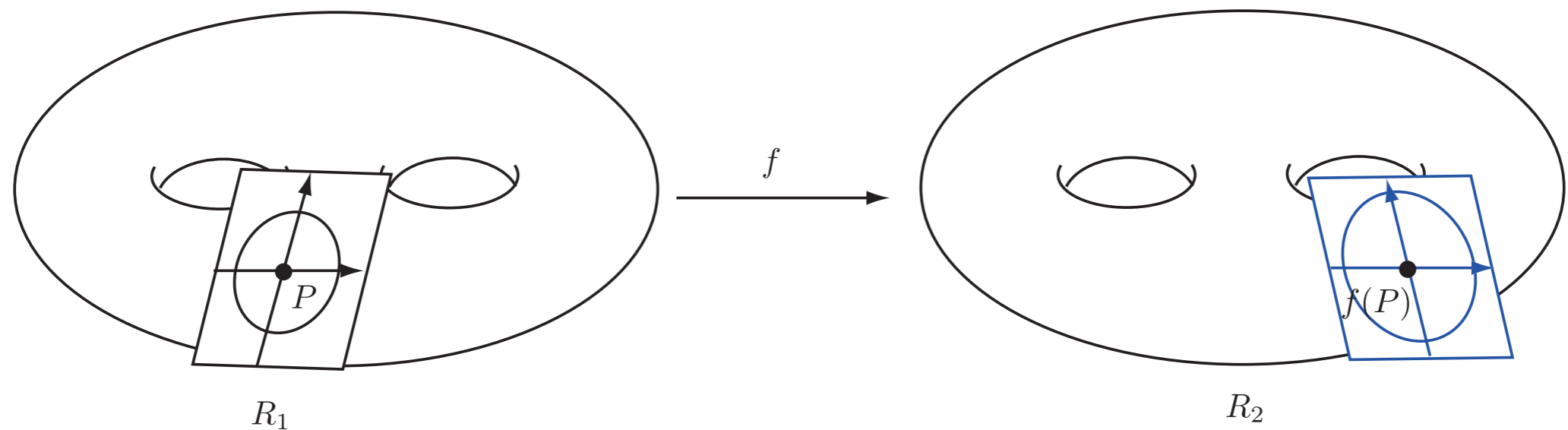


リーマン面の同値

2つのリーマン面 R_1, R_2 は等角写像 (接平面の円を円に写す向きを保つ写像)

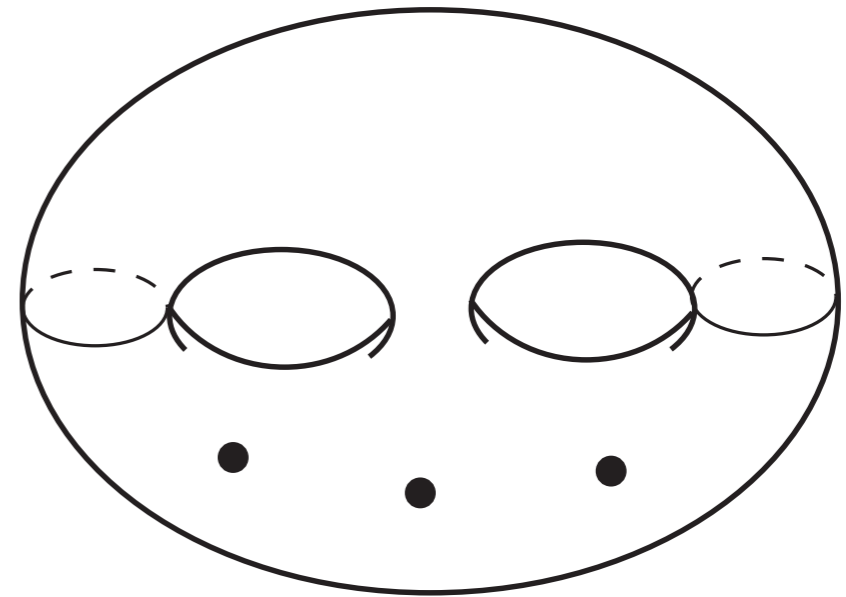
$$f : R_1 \rightarrow R_2$$

が存在するとき, 同じリーマン面であるとみなす。



リーマン面のモジュライ空間

位相的に n 個の穴を開けた種数 g の閉曲面であるリーマン面を (g, n) 型リーマン面という。



(2,3) 型曲面

(g, n) 型モジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n} =$

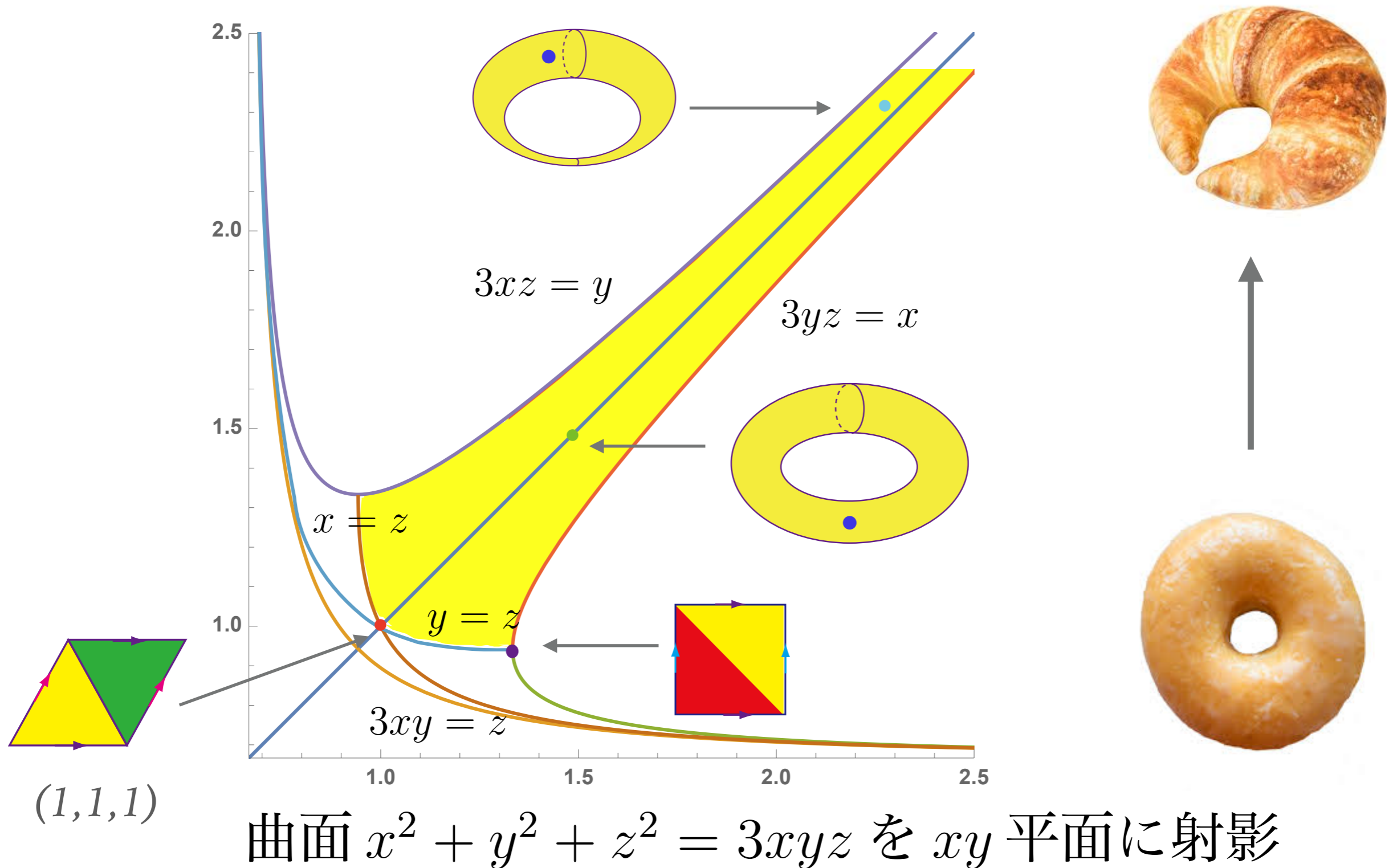
(g, n) 型リーマン面 (の同値類) 全体がつくる空間

モジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ は **ヴェイユ・ピーターソン計量** と呼ばれる計量をもつ。(他にもいろいろな計量をもつ。)

しかも、ヴェイユ・ピーターソン計量で測った $\mathcal{M}_{g,n}$ の体積は有限値。

(1つ穴あき) トーラスのモジュライ空間の一つのモデル

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \quad (x, y, z > 0)$$



(一つ穴あき) トーラスのモジュライ空間のヴェイユ・
ピーターソン体積 (面積)

$$\text{Vol}_{WP}(1, 1) = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{S. Wolpert, 1983})$$

(g, n) 型リーマン面のモジュライ空間のヴェイユ・ピーターソン体積

定理 (M. Mirzakhani, 2007)

モジュライ空間の次元

$$\text{Vol}_{WP}(g, n) = Q(g, n)\pi^{6g-6+2n}$$

ここで、 $Q(g, n)$ はある有理数。

注意： $Q(g, n)$ は双曲距離についての長さが指定された境界つきリーマン面も考え、それらのモジュライ空間のヴェイユ・ピーターソン体積の間に成り立つ漸化式を用いて計算できる。

ミルザハニによる結果は $n > 0$ を仮定する。

マリアム・ミルザハニ (Maryam Mirzakhani, 1977-2017)



1977年 イラン・テヘランで生まれる

1994-95年 国際数学オリンピックで金メダル獲得

2004年 ハーヴァード大学で博士号取得

2008年 スタンフォード大学教授 (31歳)

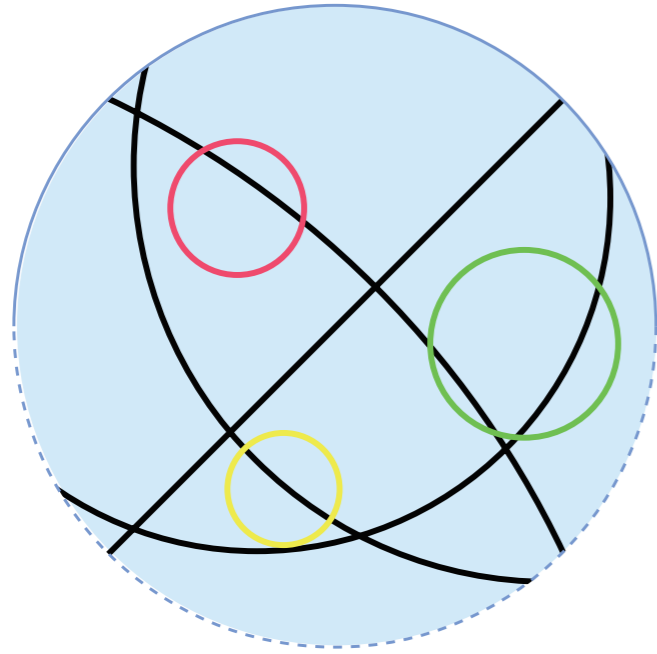
2014年 フィールズ賞受賞 (女性として初)

2017年 乳がんのために死去 (40歳)

「低い位置に実っている果実は、無視するべきです。
それは少々大変なことですが」
彼女は続ける。「こうした姿勢がベストなのかは分かりません。
その過程で、散々自分が苦しむことになりますから」

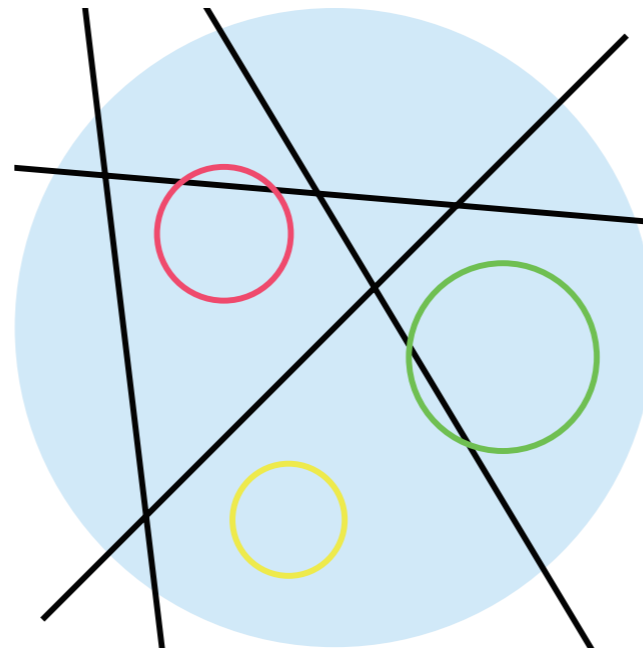
- WIRED, 2014年8月24日 -

ユークリッド幾何と非ユークリッド幾何



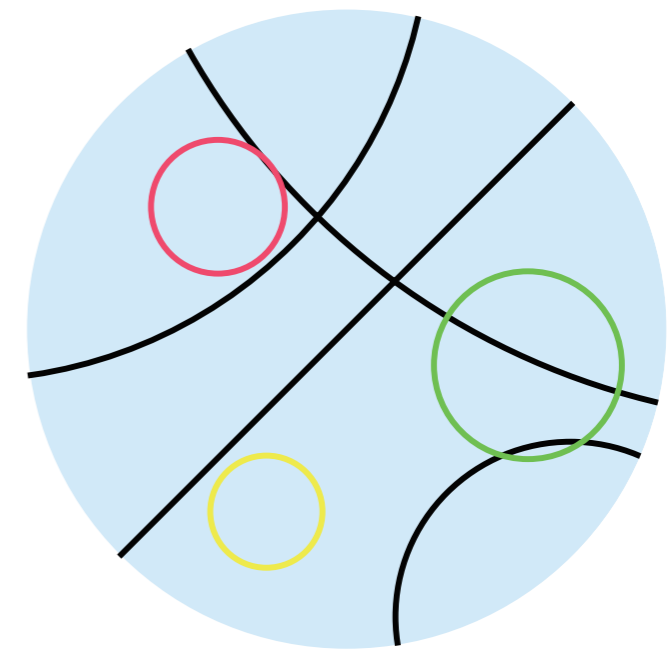
楕円幾何

曲率 $\equiv 1$



ユークリッド幾何

曲率 $\equiv 0$



双曲幾何

曲率 $\equiv -1$

「円」はすべてに幾何において円（定点から等距離にある点の集合）である。（ただし，中心と半径は異なる）

半径 r の円の周長と直径との比

楕円幾何 ($K \equiv 1$)	$r^{-1} \sin r \cdot \pi$
ユークリッド幾何 ($K \equiv 0$)	π
双曲幾何 ($K \equiv -1$)	$r^{-1} \sinh r \cdot \pi$

B 6 1 2 では、 π は円周率という名では存在し得ない。でも、何らかの形で π という数字は見つかっていただろう。この惑星で π がどのように発見されるのか想像してみるのも楽しいかも知れません。



今日のまとめ

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

オイラーの公式 in 博士が愛した数式



指数関数 e^x

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

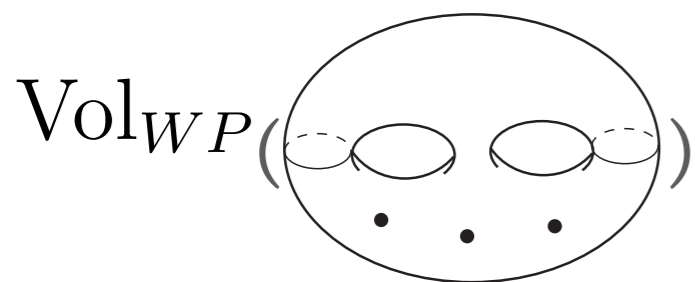
オイラーの公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|c_n|^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|c_n|^4} \text{ の収束・発散}$$



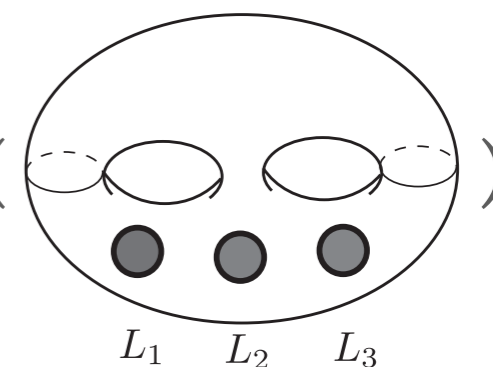
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|c_n|^s} \text{ の収束・発散}$$

$$\dim_H L(G) = \frac{\delta(G)}{2} \text{ 赤座の定理}$$



$$V_g(L_1, L_2, L_3) = \text{Vol}_{WP}(\text{torus with 3 holes})$$

Mirzakhani の定理



考える対象を連続的に変化する量や現象の中で捉えることによってうまくいった例を紹介した。

私の話はこれで終わりです。

どうも，ありがとうございました。

- ▶ 沖方丁「天地明察」角川書店, 2009年 (文庫版 (上・下), 2012年)
- ▶ 遠山啓「数学入門 (上)」岩波新書, 1959年
- ▶ 小川洋子「博士の愛した数式」新潮社, 2003年 (文庫版, 2005年)
- ▶ 谷崎潤一郎「痴人の愛」改造社, 1947年 (新潮文庫他)
- ▶ *M. Aigner, Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture, Springer, 2013*
- ▶ 小林吹代「マルコフ方程式」技術評論社, 2017年
- ▶ *B. マンデルブロ, 田沢恭子訳 「フラクタリスト マンデルブロ自伝」*
早川書房, 2013年
- ▶ 「とびきりの想像力が, 女性初のフィールズ賞数学者を生んだ: マリアム・ミルザハニ」, *Wired* 2014年8月24日 (インターネット上で閲覧可)