複素数と円の幾何

島根大学大学院自然科学研究科
中西　敏浩

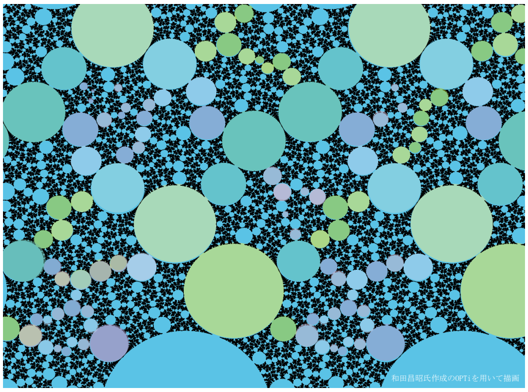
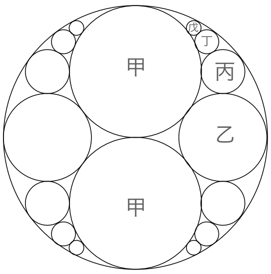


図 1　市民講演会ポスターに用いた Doubly cusped once punctured torus group の極限集合．OPTi[4] を用いて作成

以下は 2019 年 9 月 16 日金沢アートホールで開催された日本数学会主催市民講演会での講演を読み物用に書き直したものである．講演の目的は 10 月の消費税増税を控えて聴衆の皆様の金回りがよくなるように円がいっぱい出てくる話をすることであった．改変した算額の問題から話を始めた．

問題 1



今大円径内容如図段々小円径ヲ
只云大円径二尺亦云甲円径一尺寸
問乙丙丁戊円径ヲ

1　一次分数変換

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の領域[*1] D を領域 $\tilde{D}$ 全体に写す 1 対 1 で微分可能[*2]な写像 f を考えます．D の各点 z に対して，z を中心とする反時計回りに向きがついた十分小さい半径 r の円を f で写すと $f(z)$ のまわりの向きのついた閉曲線になる．f は連続だから r を限りなく 0 に近づけるとそれにつれて像曲線も小さくなるが，例えば $f(z)$ からの最短距離が 1 となるように像曲線を相似拡大するとその極限が反時計回りに向きのついた真円になった

*1 専門用語であり詳しくは述べないが，円の内部を想定してもらえればよい．
*2 変数を $z = x + iy$ とするとき (x, y) について (全) 微分可能であることを意味する．

とします．このとき，f は等角写像であるといいます．

　等角写像の初等的な例は一次分数変換（メビウス変換ともいう）

$$S(z)=\frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

です．ここで a,b,c,d は $ad-bc\neq 0$ をみたす複素定数．一次分数変換を特徴づけるために「円に関する反転」を定義します．複素数 $z=x+iy$ と点 $(x,y,0)$ との同一視によって複素平面を 3 次元空間内の xy 平面と見ます．点 a 中心，半径 r の円を同じ中心と半径をもつ球面に拡張します．元の円はこの球面の赤道です．球の北極点と $z=x+iy$ を結ぶ直線が球面と交わる点を $P=P(z)$，赤道に関して P と対称な点を P^* とし，今度は北極点と P^* を結ぶ直線を引き，それが xy 平面と交わる点を z^* とします．これが中心 a 半径 r の円に関する z の鏡像です．z を z^* に移す変換 R が円に関する**反転**です．式で書くとこのようになります．

$$z^*=R(z)=a+\frac{r^2}{\overline{z-a}}.$$

ただし，a の像が定義されないので，「無限遠点」という仮想の点 ∞(a に依らない) を導入して R は a を無限遠点に，無限遠点を a に写すと約束します． 上記の円を単位円に選

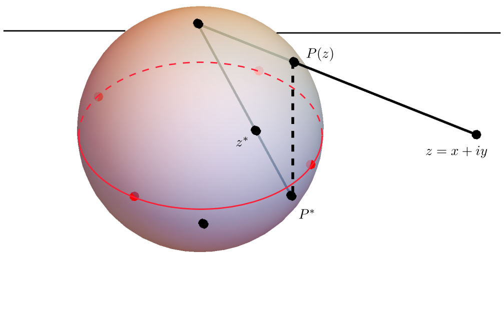


図 2

んだとき，北極点 $N=(0,0,1)$ を $P(\infty)$ とすると，$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ と単位球面との間に 1 対 1 対応がつきます．それゆえ $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を**複素球面**あるいは**リーマン球面**と呼びます．また P の逆写像を**立体射影**と呼びます．以下では円に関する反転というときは直線に関する反転（折り返し）も含んでいるとします． 2 つの円に関する反転の合成は一次分数変換です．その逆も正しいです．一次分数変換 (1) に対して $c\neq 0$ のときは $S(-d/c)=\infty$, $S(\infty)=a/c$, $c=0$ のときは $S(\infty)=\infty$ とします． 2 つの一次分数変換の合成や一次分数変換の逆変換も一次分数変換になります．恒等変換は特別な一次分数変換です．一次分数変換全体の集合は写像の合成に関して「群」という代数的構造をもつことがわかります．一次分数変換の一つの重要な性質は「一次分数変換の円々対応」と呼ばれるものです．

定理 1　一次分数変換は円を円に写す．ただし，直線も (無限遠点を通る) 円と見なす．

2　サークルパッキングの数学

有理数は分母 q が正の既約分数 p/q で表すことにします．p/q で実軸に接し，半径が $2^{-1}q^{-2}$ の複素上半平面の開円板を $C_{p/q}$ とします．[*3]　$p/q \neq r/s$ のとき，$C_{p/q}$ と $C_{r/s}$ は交わりません．そして，それらの境界が接するための必要十分条件は $|ps-qr|=1$ です．$\{C_{p/q}\}$ を図示すると図 3．$C_{a/c}$ と $C_{b/d}$ が接しているとき，これら 2 円と実軸に接

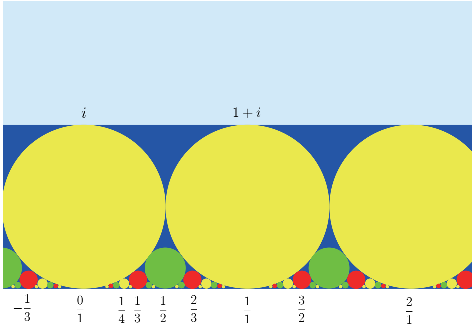


図 3　上半平面のサークルパッキング

する円はやはり $C_{p/q}$ の形の円です．ここで p/q は

$$\frac{p}{q}=\frac{a+b}{c+d}$$

となり (図 4 参照)，a/c と b/d の**中間数**といいます．$0/1$ と $1/1$ の中間数は $1/2$, $1/1$ と $1/2$ の中間数は $2/3$, $1/2$ と $2/3$ の中間数は $3/5$, $2/3$ と $3/5$ の中間数は $5/8, \cdots$ と続けると隣接するフィボナッチ (Fibonacci) 数の比の列となり[*4]，それらは黄金数の逆数に収束します．

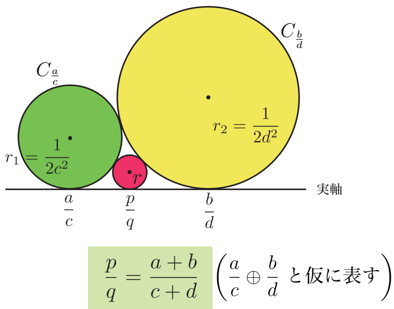


図 4　中間数

円板族 $\{C_{p/q}\}$ によるサークル・パッキングの応用を一つを紹介します．

[*3] 虚部が 1 より大きい複素数全体からなる半平面も $C_{1/0}=C_\infty$ と書いて $\{C_{p/q}\}$ に含める．
[*4] 後に提出する問題 2 へのヒントになっている．

定理 2（無理数の特徴付け）　実数 α が無理数であるための必要十分条件は

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2} \tag{2}$$

をみたす有理数 p/q (既約分数表示) が無限個存在することである．

不等式 (2) は α を通る垂直線に沿って下降して α に近づくとき円板 $C_{p/q}$ を通過することと同じです．α が有理数ならば円板 C_α に進入したが最後，もう他の円板を通過できないので (2) をみたす p/q は有限個．逆に α が無理数ならば $C_{p/q}$ の形の円板に入ったり出たりを無限に繰り返します．(証明終)

冒頭の問題 1 はデカルト (Descartes) の円定理と数学的帰納法を用いて解答できます．

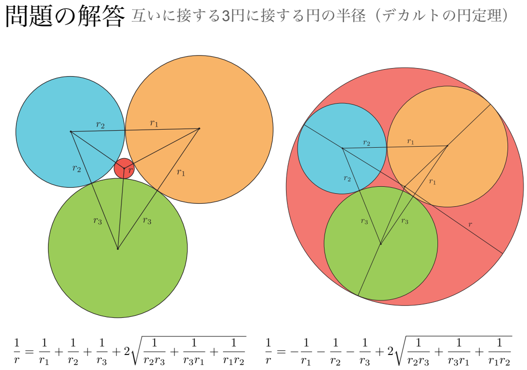


図 5　デカルトの円定理．右図では $\frac{1}{r} = -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + 2\sqrt{\frac{1}{r_1}\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_3}\frac{1}{r_1}}$

乙丙丁戊の替わりに $1, 2, 3, 4, \cdots$ と番号をつけると n 番目の円の半径の逆数は $n^2 + 2$ です．上半平面を単位円板に 0, 1, ∞ を順に $-i$, 1, i に対応させるように写す一次分数変換 S による円 $C_{n/1}$ の像の円の半径を計算してもよいでしょう．$C_{p/q}$ の S による像円の半径の逆数は $p^2 + q^2 + 1$ です．

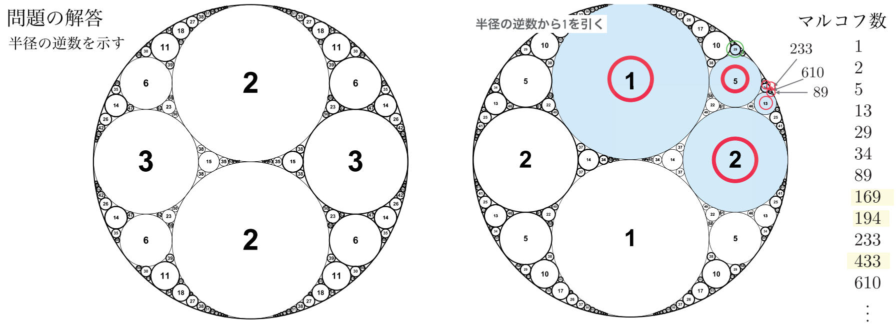


図 6　問題の解答．数字は半径の逆数

図 6 の左図の数は円の半径の逆数を，右図の数はそれらから 1 を引いた数で，610 までのマルコフ (Markov) 数が現れていることが観察できます[*5]．マルコフ方程式 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ をみたす正整数の組 (x,y,z) をマルコフの 3 つ組といい，マルコフ数[*6]とはあるマルコフの 3 つ組の構成要素のことです．(a,b,c) $(a \le b \le c)$ をマルコフの 3 つ組とすると，マルコフ方程式は各変数について 2 次方程式だから，解と係数の関係より次の図式の右辺もそれぞれマルコフの 3 つ組です．

$$\begin{array}{ccc} & & (a,c,3ac-b) \\ & \nearrow & \\ (a,b,c) & & \\ & \searrow & \\ & & (b,c,3bc-a) \end{array}$$

よって $(1,1,1)$ から下のマルコフの 3 つ組の樹形図 (Markov tree) が得られます．任意のマルコフの 3 つ組は順序を無視すれば Markov tree 上にあることが知られています．マルコフ数を昇順に並べると $1,2,5,13,29,34,89,169,194,233,433,610,\cdots$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & (1,13,34) \\
 & & & (1,5,13) \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & & & (5,13,194) \\
(1,1,1) \arrow[r, dash] & (1,1,2) \arrow[r, dash] & (1,2,5) \arrow[uur, dash] \arrow[ddr, dash] & & \\
 & & & & (5,29,433) \\
 & & & (2,5,29) \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & & & (2,29,169)
\end{tikzcd}$$

問題 2　Markov tree を見ると，f_n をフィボナッチ数列とするとき，$(1,f_{2n-1},f_{2n+1})$ と $(1,f_n^2+f_{n+1}^2,f_{n+1}^2+f_{n+2}^2)$ はマルコフの 3 つ組のようである．このことは正しいか？

問題 3　図 6 の右図において，単位円周と接する円の「半径の逆数 -1」の数の中にすべてのマルコフ数が現れるか？

上の問題は高校の数学部や数学サークルで研究課題として取り上げてほしいと思います．入手しやすい文献として [3] があります．

問題 4　(Frobenius 1903．未解決)[1] c をマルコフ数とする．c を最大数とするマルコフの三つ組は順序は無視してただ一つしか存在しないか？

マルコフ数は (2) のような無理数の有理数近似の理論にも面白い役割を果たします [2].

[*5] 169,194, 433 は別のスライドで示した．

[*6] よく尋ねられることだが，マルコフ数の A. A. Markov(あるいは Markoff) はマルコフ過程の Markov と同一人物である．彼の息子も数学者でやはり A. A. Markov なので紛らわしい．

3　円とフラクタル

フラクタルという術語は 1970 年代後半に B. Mandelbrot が提唱しました．通常，非整数次元をもつ図形をフラクタルと呼びます．しかし，整数次元を持ちながらフラクタルと呼ぶに相応しい図形があるし，次元にもハウスドルフ次元やボックス次元などさまざまな種類があって，フラクタルという言葉が流行ったとき，複雑な図形がフラクタルかどうか問われても当時話題の小説になぞらえて「なんとなく，フラクタル」としか答えようがなかったという懐かしい曖昧さがあります．そのフラクタルもすっかり普通名詞になって，ディズニー映画「アナと雪の女王」の挿入歌 Let It Go! の歌詞の中にも登場します[*7]．

$A_1,\ldots,\ A_g,\ A_{-1},\ldots,\ A_{-g}$ を互いに交わらない複素平面内の閉円板とすると，各 $j = 1,\ldots,g$ に対して，リーマン球面における A_{-j} の外部を A_j の内部に写す一次分数変換 S_j が一意的ではないが必ず存在します．$S_1,\ldots,\ S_g$ およびそれらの逆変換 $S_{-i} = S_i^{-1}(i = 1,\ldots,g)$ で生成される一次分数変換の群 G をショットキー (Schottky) 群 (正確には古典的ショットキー群) といいます．円板

$$D_{i_1,\ldots,i_n,j} = S_{i_1}\cdots S_{i_n}(A_j)$$

を定めます．ただし，$i_n + j \neq 0$．すると，円板 $D_{i_1,\ldots,,i_n}$ は $2g-1$ 個の円板 $D_{i_1,\ldots,i_n,j}$ を内部に含みます．$\{D_{i_1,\ldots,i_n}\}$ の中の無限個の円板に含まれる点の集合 $L(G)$ を G の極限集合といいます．その構成法からカントール集合に似ていますが，自己相似集合ではないのでハウスドルフ次元 $\dim_H(L(G))$ を求めるのは難しいです．G の元に番号をつけて

$$G = \left\{ T_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} : n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

($a_n d_n - b_n c_n = 1$，T_0 は恒等変換) とするとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|c_n|^s} \tag{3}$$

の発散・収束に関して境目にある実数値 $s = \delta(G)$ を G の収束指数と呼びます．

[*7] 残念ながら日本語訳詞にはない．

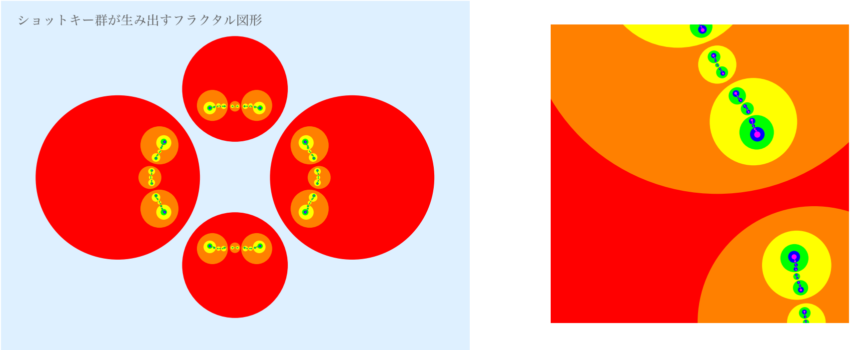


図 7　ショットキー群に現れる円の入れ子構造

ここで金沢生まれの美しい定理を紹介します．

定理 3　(Tohru Akaza 1973)

$$\dim_H(L(G)) = \frac{1}{2}\delta(G).$$

この定理は赤座暢元金沢大学教授によるものです．級数 (3) の収束は G の保型形式をつくるのに必要ですが，しかし，その目的のためには整数値 s での収束を論じればよく，初期の研究は整数 (あるいは半整数) 値の s のみを扱っていました．だから，連続量を導入するという着想は意外だったでしょう．この方面の研究は後に Patterson–Sullivan 測度を用いた手法が主流となって，上の定理の証明に用いられた赤座の手法は廃れてしまいましたが，赤座の定理が不連続群論に大きな足跡を残したことに変わりはありません．
— 赤座暢先生は 1951 年に金沢大学理学部助教授に就任，72 年同教授に昇進されましたが，1983 年に肺癌のために 50 代半ばで死去されています．

4　π は円周率か？

4.1　リーマン面

球面やドーナツの表面のような曲面を考えます．曲面の地図を作成しようとするとき，大抵一枚の地図では収まらないのでいくつもの地図からなる地図帳をつくることになります．ある地域が 2 枚の地図上に表示されているとき，同じ地点を表す地図の 2 点の対応が等角写像であるような地図帳をもつ曲面をリーマン面といいます．簡単に云うと，各点のまわりに複素パラメータが導入されていてその上で複素関数論をちゃんと論じることができる曲面のことです．リーマン面の例としては複素平面やリーマン球面，それにショットキー群の定義で出てきた $2g$ 個の円板をリーマン球面から取り除いた後で A_j と A_{-j}(図では B_j) の境界円を一次分数変換 S_j による対応で同一した種数 g の閉曲面があります．

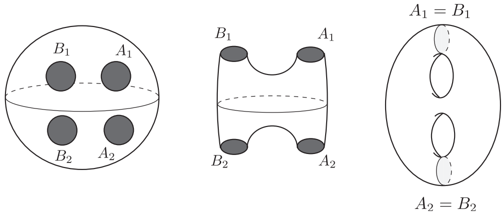


図 8　ショットキー群からつくられるリーマン面

4.2　モジュライ空間

リーマン面は正角図法で描かれた地図つき曲面ですから，2 つのリーマン面の間の写像が等角であるかどうかを論じることができます．2 つのリーマン面の間に上への 1 対 1 等角写像があるとき，これらのリーマン面は等角同値であるといいます．さきほどショットキー群からリーマン面が作れると言いましたが，異なるショットキー群から等角同値なリーマン面ができることもあります．種数 g のリーマン面に n 個の穴を空けた形のリーマン面の等角同値類全体の空間を (g,n) 型リーマン面のモジュライ空間といいます．モジュライ空間は現代数学において活発に研究が行われている対象の一つです．モジュライ空間内の図形はヴェイユ・ピーターソン (Weil–Petersson) 計量 (あるいはその他の計量) を用いてその長さや，面積，体積を測ることができます．ヴェイユ・ピーターソン計量ではモジュライ空間そのものの体積 (WP 体積) が有限値です．

トーラス，すなわちドーナツの表面の形をしたリーマン面のモジュライ空間を考えます．トーラスと 1 つ穴あきトーラスのモジュライ空間はたまたま同じなので双曲計量をもつ 1 つ穴あきトーラスで考えると変形の様子がよくわかります．トーラス上の 3 つの単純閉測地線の長さに由来したあるパラメータ x, y, z を導入します．これらは第 2 節で出てきたマルコフ方程式 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ をみたします．この方程式が表す曲面の第 1 象限に含まれる部分を xy 平面に射影したのが下の図です[*8]．（スライドでは）黄色の部分が $(1,1)$ 型モジュライ空間 $\mathcal{M}_{1,1}$ の一つのモデルで，その一つ一つの点がトーラスの形のリーマン面を表します．黄色の領域内で点を無限遠方向に動かすと，対応するトーラス上の一つの閉曲線が段々短くなって究極的にはドーナツからクロワッサンに変身します．

$(1,1)$ 型モジュライ空間の WP 体積は S. Wolpert が計算し，その値は $\pi^2/6$．一般の (g,n) 型リーマン面のモジュライ空間の WP 体積を求める問題はマリアム・ミルザハニ (Maryam Mirzakhani) が独創的なアイデアで解決してしまいました．

$$(g,n)\text{ 型モジュライ空間の WP 体積} = Q(g,n)\pi^{6g-6+2n}.$$

ここで $6g-6+2n$ はモジュライ空間の次元，$Q(g,n)$ は有理数で，(g,n) を与えれば漸化

*8 この射影は曲線 $z=3xy$ 上を除き 2 対 1 写像なので z 座標の小さい方の点を選ぶ．図中の正方形と平行四辺形は上下の辺と左右の辺を貼り合わせてトーラスにする．

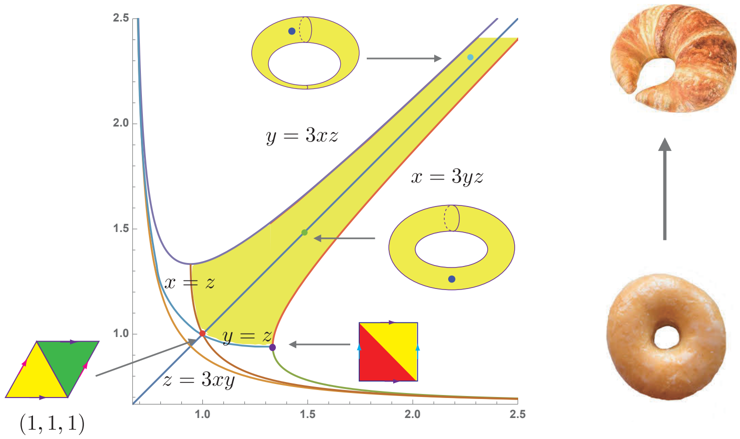


図 9　一つ穴あきトーラスのモジュライ空間

式を用いてその値を具体的に求めることができます．ミルザハニは n が正のときを扱いました．それは穴を広げて境界つき曲面をつくって，その境界曲線の長さを指定したリーマン面のモジュライ空間を導入する必要があったからで，WP 体積を境界曲線の長さをパラメータとする関数と見てその微分や極限を計算してうまくいきました[*9][*10]．ミルザハニはリーマン面のモジュライ空間に関する業績で，2014 年にフィールズ賞を受賞しました．彼女は女性としては初の，かつ現在までで唯一の受賞者です．ミルザハニは 2017 年，40 歳の若さで亡くなりました．

4.3　非ユークリッド幾何

円との関係がよくわからないモジュライ空間の体積に円周率 π が現れました．ヨーロッパの言語には，ドイツ語を除いて「円周率」という術語はなく，単に π(パイ) と呼びます．しかし，どうして円周率という便利で直截な用語はないのでしょうか？ 中学校で学ぶ「ユークリッド幾何」以外に平行線公準を仮定しない幾何，すなわち，非ユークリッド幾何があります．非ユークリッド幾何にも「楕円幾何」，「双曲幾何」の 2 種類があり，それぞれ正と負の定曲率平面をモデルをもちます．図 10 の 3 つの領域は複素平面内の単位

[*9] ただし，Mirzakhani の独創的なアイデアはこのことではなく，McShane 恒等式の巧みな応用である．
[*10] 「連続的に動くパラメータを導入するとうまくいくことがありますよ」がこの講演の隠しテーマであった．その最初の例が講演で紹介した小川洋子さんの小説「博士が愛した数式」で博士が最も愛した $e^{i\pi}+1=0$．指数関数なしにこのオイラーの公式は得られなかっただろう．赤座の定理に続いてこれが 3 例目．

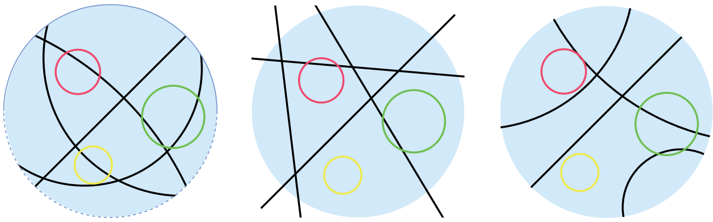


図 10

円板でそれぞれの幾何モデルの部分領域とみています．図の黒い線はそれぞれの幾何における「直線」を表しています．それは楕円幾何では立体射影で球面の大円に写される円弧で，この世界では平行線という概念はありません．双曲幾何では単位円周に直交する円弧が直線になります．この世界では一直線 ℓ とその上にない点 P が与えられると P を通り ℓ に平行な直線は無限に存在します．図の中の円はいずれの幾何においても「円」，すなわち定点 (中心) から等距離にある点集合です．ただし，同じ位置にある円でも中心の位置や半径は同じではありません．

この地球は十分広くてユークリッド幾何の世界に住んでいるように思えたので，まず円周率として π が発見されたのではないでしょうか．しかし，表のように，円の周の長さの直径に対する比率として円周率の定義は「非ユークリッド幾何」では成立しません (r を 0 に近づけたときの極限ではありますが.）

楕円幾何 (曲率 $\equiv 1$)	$(r^{-1}\sin r)\pi$
ユークリッド幾何 (曲率 $\equiv 0$)	π
双曲幾何 (曲率 $\equiv -1$)	$(r^{-1}\sinh r)\pi$

半径 r の円の周長と直径との比

星の王子さまが住む小さな星では多分円周率と呼ばれる数はなかったでしょう．しかし，その星で数学がなんらかの形で発達していくならば，いつかは π は発見されて，星の文明に重要な役割を果たしているに違いありません．しかし，π はどのような形で発見されるでしょうか？

5　終わりに

市民講演会では時間配分を間違ってしまい，途中から話が（初めからだったと言われるかもしれないが）グダグダになってしまいました．例えば，第 4 節「π は円周率か？」で予定していたモジュライ空間の話を省略してしまったので，トーラスのモジュライ空間に

姿を変えて再登場するはずだった第 2 節のマルコフ方程式の伏線の効力がなくなってしまいました．この記事はこうした割愛した箇所も含めたので講演会の内容とは少し違っています．最後に日本数学会広報委員会の皆様と金沢大学のスタッフの皆様，そして OPTi による描画をポスターに使用することを許可していただいた大阪大学の和田昌昭氏に感謝します．

追記：学会の期間中，講演会で紹介したのとは別の関孝和の墓（というより記念碑）がある立像寺を訪ねた．地元出身の横綱阿武松の墓も同じ境内にあり，こちらには案内札があって，すぐに見つけられるようになっているが，関の墓にはそうしたものはなく，立派な墓石があれば，これかな，これかなと随分探し回ったがとうとう見つけられず，お寺の方に聞いてようやく墓の場所がわかった．寺に併設の幼稚園の児童の元気な声を絶えず浴びていて，想像していた森閑とした地に佇む姿とは全然違った．

図 11　立像寺の「關先生之墓」

参考文献

[1] Aigner, *M., Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture*, Springer, 2013

[2] Cusick, T. W. and Flahive, M. E. *The Markov and Lagrange Spectra.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[3] 小林吹代,「マルコフ方程式」技術評論社，2017 年

[4] Wada, M., OPTi, A computer program to visualize quasiconformal deformations of once punctured torus groups, Mac App Store からダウンロード可