

Navier-Stokes 方程式における非粘性極限問題と Prandtl 境界層展開

前川 泰則 (京都大学理学研究科)

2019 年度日本数学会年会 総合講演
(東京工業大学・2019 年 3 月 18 日)

水などの非圧縮性粘性流体の運動は非線形偏微分方程式である Navier-Stokes 方程式により記述される。

粘着境界条件下での固定壁近傍の流れでは、流体の粘性の影響によって速度場の勾配の大きい領域（境界層）が現れ、その解析は流体力学において重要な位置を占めている。

しかしながら、境界層に潜在する不安定性により、数学的に厳密な解析は一般に容易ではなく、(2次元の場合に限っても)未解決問題も多い。

本講演では Navier-Stokes 方程式の非粘性極限と Prandtl 境界層展開について紹介するとともに、近年の数学解析における進展を概観する。

非圧縮性粘性流体に対する Navier-Stokes 方程式

2次元半空間 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla q = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (\text{NS}_\nu)$$

- $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 又は $\mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$)
- $u = (u_1(x, y, t), u_2(x, y, t))$: 流体の速度場 (u_0 は初期速度場)
- $q = q(x, y, t)$: 流体の圧力場
- $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2, \quad \nabla = (\partial_x, \partial_y)$
- $u \cdot \nabla u = u_1 \partial_x u + u_2 \partial_y u, \quad \operatorname{div} u = \partial_x u_1 + \partial_y u_2$
- $\nu \in (0, 1]$: 流体の動粘性係数 (適宜十分小さいとする)
- $u|_{\partial\Omega} = 0$: 粘着境界条件

Navier-Stokes 方程式の非粘性極限問題

2次元半空間 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla q = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (\text{NS}_\nu)$$

非粘性極限問題

動粘性係数 ν の零極限における $u = u^\nu$ の漸近挙動を記述せよ.

Navier-Stokes 方程式の非粘性極限問題

2次元半空間 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla q = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (\text{NS}_\nu)$$

2次元半空間 Euler 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla u^0 + \nabla q^0 = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} u^0 = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ u^0|_{\partial\Omega} = 0, & u^0|_{t=0} = u_0^0 \end{cases} \quad (\text{E})$$

- Euler 方程式に対する境界条件は non-penetration(流出入無し) 条件
- (NS_ν) も (E) も十分良い初期値に対して時間大域的に滑らかな一意解が存在する.

Navier-Stokes 方程式の非粘性極限問題

2次元半空間 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla q = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (\text{NS}_\nu)$$

2次元半空間 Euler 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla u^0 + \nabla q^0 = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} u^0 = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ u^0|_{\partial\Omega} = 0, & u^0|_{t=0} = u_0^0 \end{cases} \quad (\text{E})$$

”適当な位相”で $u = u^\nu$ は u^0 に収束することが期待される。

- L^2 収束性
- L^∞ 収束性 (境界層展開)

Navier-Stokes 方程式の非粘性極限問題 (i) L^2 収束性

非粘性極限における L^2 収束問題

ν に依存しないある正数 T が存在して次が成り立つか：

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \sup_{0 < t < T} \|u(t) - u^0(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (1)$$

$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$: (NS $_{\nu}$) のエネルギー等式
後で述べる L^{∞} 収束性が保証されている枠組み以外, (1) は未解決. T. Kato による次の同値条件は知られている.

L^2 収束に対する Kato criterion; T. Kato (1983)

初期値 $u_0 = u_0^{\nu}$, $u_0^0 \in L^2_{\sigma}(\Omega)$ は十分滑らかで $\lim_{\nu \rightarrow 0} \|u_0^{\nu} - u_0^0\|_{L^2(\Omega)} = 0$ とする.
このとき, ある $T > 0$ に対して (1) が成り立つことと次は同値: 任意に固定した正定数 c について

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Gamma_{c\nu})}^2 dt = 0$$

が成り立つ. ただし, $\Gamma_{c\nu} = \{(x, y) \in \Omega \mid 0 < y < c\nu\}$.

Navier-Stokes 方程式の非粘性極限問題 (ii) L^∞ 収束性

2次元半空間 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla q = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (\text{NS}_\nu)$$

2次元半空間 Euler 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla u^0 + \nabla q^0 = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} u^0 = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ u_2^0|_{\partial\Omega} = 0, & u^0|_{t=0} = u_0^0. \end{cases} \quad (\text{E})$$

- 一般に $\lim_{\nu \rightarrow 0} \|u(t) - u^0(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$ は成り立たない。実際、粘着境界条件より $u_1|_{y=0} = 0$ であるが、Euler 方程式の解に対しては $u_1^0|_{y=0} = 0$ とは限らない。
- 境界条件の不一致を反映した境界層を考慮しなければならない。

境界層に関する簡単な例

$$f - \nu \partial_y^2 f = 0, \quad y > 0, \quad f|_{y=0} = a. \quad (A_\nu)$$

$$f = 0, \quad y > 0. \quad (A_0)$$

- (A_ν) の減衰解は $f(y) = e^{-\frac{y}{\sqrt{\nu}}} a$.
- 境界層の厚みは $O(\sqrt{\nu})$.
- 境界層変数は $Y = \frac{y}{\sqrt{\nu}}$.

L. Prandtl (1904)

(NS $_{\nu}$) の解 u は境界から離れた領域では (E) の解 u^0 (outer flow) で近似され、境界近傍では境界層 (boundary layer) の構造を持つ。境界層の厚みは $O(\sqrt{\nu})$ とも見積もられ、境界層は (NS $_{\nu}$) から導出される境界層方程式 (Prandtl 方程式) で記述される。

Prandtl 境界層方程式

Prandtl 方程式: 境界近傍で $u(x, y, t) \sim (U_1^P(x, \frac{y}{\sqrt{\nu}}, t), \sqrt{\nu} U_2^P(x, \frac{y}{\sqrt{\nu}}, t))$ と仮定

$$\begin{cases} \partial_t U_1^P + U_1^P \partial_x U_1^P + U_2^P \partial_Y U_1^P - \partial_Y^2 U_1^P = -\partial_x q^0, & t > 0, (x, Y) \in \Omega, \\ \partial_x U_1^P + \partial_Y U_2^P = 0, & t \geq 0, (x, Y) \in \Omega, \\ U^P|_{Y=0} = 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} U_1^P = u_1^0|_{y=0}, \quad U_1^P|_{t=0} = U_{0,1}^P. \end{cases} \quad (P)$$

- q^0 は outer flow (Euler 方程式の解) の圧力場であり, 実質的に既知関数となる.
- U_2^P は非圧縮性条件と境界条件より $U_2^P = -\int_0^Y \partial_x U_1^P dZ$ で与えられる.
- U_1^P の $Y \rightarrow \infty$ での条件は接合条件であり, 境界層が (NS_ν) の粘着境界条件と outer flow の接方向成分 u_1^0 の境界トレースとをつなぐことを要請する.

Prandtl 方程式: 境界近傍で $u(x, y, t) \sim (U_1^P(x, \frac{y}{\sqrt{\nu}}, t), \sqrt{\nu} U_2^P(x, \frac{y}{\sqrt{\nu}}, t))$ と仮定

$$\begin{cases} \partial_t U_1^P + U_1^P \partial_x U_1^P + U_2^P \partial_Y U_1^P - \partial_Y^2 U_1^P = -\partial_x q^0, & t > 0, (x, Y) \in \Omega, \\ \partial_x U_1^P + \partial_Y U_2^P = 0, & t \geq 0, (x, Y) \in \Omega, \\ U^P|_{Y=0} = 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} U_1^P = u_1^0|_{y=0}, \quad U_1^P|_{t=0} = U_{0,1}^P. \end{cases} \quad (\text{P})$$

Prandtl 方程式の解 U^P と Euler 方程式の解 u^0 を用いて

$$\begin{aligned} U_1^{BL}(x, Y, t) &= U_1^P(x, Y, t) - u_1^0(x, 0, t), \\ U_2^{BL}(x, Y, t) &= U_2^P(x, Y, t) - Y \partial_y u_2^0(x, 0, t) \end{aligned}$$

とおく.

Prandtl 方程式: 境界近傍で $u(x, y, t) \sim (U_1^P(x, \frac{y}{\sqrt{\nu}}, t), \sqrt{\nu} U_2^P(x, \frac{y}{\sqrt{\nu}}, t))$ と仮定

$$\begin{cases} \partial_t U_1^P + U_1^P \partial_x U_1^P + U_2^P \partial_Y U_1^P - \partial_Y^2 U_1^P = -\partial_x q^0, & t > 0, (x, Y) \in \Omega, \\ \partial_x U_1^P + \partial_Y U_2^P = 0, & t \geq 0, (x, Y) \in \Omega, \\ U_1^P|_{Y=0} = 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} U_1^P = u_1^0|_{y=0}, \quad U_1^P|_{t=0} = U_{0,1}^P. \end{cases} \quad (\text{P})$$

Prandtl 方程式の解 U^P と Euler 方程式の解 u^0 を用いて

$$\begin{aligned} U_1^{BL}(x, Y, t) &= U_1^P(x, Y, t) - u_1^0(x, 0, t), \\ U_2^{BL}(x, Y, t) &= U_2^P(x, Y, t) - Y \partial_y u_2^0(x, 0, t) \end{aligned}$$

とおく. このとき L^∞ 収束性の問題は次のように述べられる ($Y = \frac{y}{\sqrt{\nu}}$).

非粘性極限における L^∞ 収束問題: Prandtl 境界層展開

ν に依存しないある正数 T と $k > 0$ が存在して次が成り立つか: $t \in [0, T]$ で

$$u(x, y, t) = u^0(x, y, t) + (U_1^{BL}(x, Y, t), \sqrt{\nu} U_2^{BL}(x, Y, t)) + O(\nu^k) \quad \text{in } L^\infty \quad (1)$$

Prandtl 境界層展開

非粘性極限における L^∞ 収束問題 : Prandtl 境界層展開

ν に依存しないある正数 T と $k > 0$ が存在して次が成り立つか : $t \in [0, T]$ で

$$u(x, y, t) = u^0(x, y, t) + (U_1^{BL}(x, Y, t), \sqrt{\nu}U_2^{BL}(x, Y, t)) + O(\nu^k) \quad \text{in } L^\infty \quad (3)$$

Prandtl 境界層展開の正当化には以下の三つのステップが必要となる。

Step 1. Euler 方程式を解く (outer flow の主要部の構成)

Step 2. Prandtl 方程式を解く (境界層の主要部の構成)

Step 3. Remainder 項の評価 (境界層の安定性)

Prandtl 境界層展開

非粘性極限における L^∞ 収束問題 : Prandtl 境界層展開

ν に依存しないある正数 T と $k > 0$ が存在して次が成り立つか : $t \in [0, T]$ で

$$u(x, y, t) = u^0(x, y, t) + (U_1^{BL}(x, Y, t), \sqrt{\nu}U_2^{BL}(x, Y, t)) + O(\nu^k) \quad \text{in } L^\infty \quad (3)$$

Step 1. Euler 方程式を解く (outer flow の主要部の構成)

初期値が Sobolev クラスの十分よい正則性を持っていれば可能.

Step 2. Prandtl 方程式を解く (境界層の主要部の構成)

初期値等の付与データが「境界層領域に逆流が無く, 境界層の単調性を保証する条件」を満たせば Sobolev クラスの正則性で可能 : O. A. Oleinik (1960's)

Step 3. Remainder 項の評価 (境界層の安定性)

Prandtl 境界層展開

非粘性極限における L^∞ 収束問題 : Prandtl 境界層展開

ν に依存しないある正数 T と $k > 0$ が存在して次が成り立つか : $t \in [0, T]$ で

$$u(x, y, t) = u^0(x, y, t) + (U_1^{BL}(x, Y, t), \sqrt{\nu}U_2^{BL}(x, Y, t)) + O(\nu^k) \quad \text{in } L^\infty \quad (3)$$

Step 1. Euler 方程式を解く (outer flow の主要部の構成)

初期値が Sobolev クラス十分よい正則性を持っていれば可能.

Step 2. Prandtl 方程式を解く (境界層の主要部の構成)

初期値等の付与データが「境界層領域に逆流が無く, 境界層の単調性を保証する条件」を満たせば Sobolev クラスで可能 : O. A. Oleinik (1960's)

Step 3. Remainder 項の評価 (境界層の安定性)

K. Asano (1988) により解析的な正則性を持つ関数のクラスでの枠組みが提示され, このクラスでの Abstract Cauchy-Kowalewski の定理を用いた完全な証明が M. Sammartino-R. E. Caflisch (1998) により与えられた.

Prandtl 境界層展開

非粘性極限における L^∞ 収束問題 : Prandtl 境界層展開

ν に依存しないある正数 T と $k > 0$ が存在して次が成り立つか : $t \in [0, T]$ で

$$u(x, y, t) = u^0(x, y, t) + (U_1^{BL}(x, Y, t), \sqrt{\nu}U_2^{BL}(x, Y, t)) + O(\nu^k) \quad \text{in } L^\infty \quad (3)$$

M. Sammartino - R. E. Caflisch (1998)

初期値が解析的な正則性を持つならば, 十分小さな正数 T に対して Prandtl 境界層展開 (3) が $k = \frac{1}{2}$ として成り立つ.

M. Sammartino - R. E. Caflisch (1998)

初期値が解析的な正則性を持つならば, 十分小さな正数 T に対して Prandtl 境界層展開 (3) が $k = \frac{1}{2}$ として成り立つ.

- 上の枠組みでは \mathbb{R}_+^2 で台がコンパクトであるようなテスト関数の初期値クラスは扱えない.
- 「流体領域内部の渦による流れが流体の非局所性と粘着境界条件により境界上で強い渦を生成し, 渦層 (境界層) が形成される」という描像を正当化したい.

Prandtl 境界層展開

非粘性極限における L^∞ 収束問題 : Prandtl 境界層展開

ν に依存しないある正数 T と $k > 0$ が存在して次が成り立つか :

$$u(x, y, t) = u^0(x, y, t) + (U_1^{BL}(x, Y, t), \sqrt{\nu}U_2^{BL}(x, Y, t)) + O(\nu^k) \quad \text{in } L^\infty \quad (3)$$

Y. M. (2014)

初期値は ν に依存しない ($u_0 = u_0^0$) とし, 初期渦度場 $\text{rot } u_0 = \partial_x u_{0,2} - \partial_y u_{0,1} \in W^{4,1}(\mathbb{R}_+^2) \cap W^{4,2}(\mathbb{R}_+^2)$ が $d_0 = \text{dist}(\text{supp rot } u_0, \partial\mathbb{R}_+^2) > 0$ を満たすならば, 十分小さな正数 T に対して Prandtl 境界層展開 (3) が $k = \frac{1}{2}$ として成り立つ. また, d_0 が小さいとき, $T = O(d_0)$ ととれる.



Euler vorticity

$$\text{rot } u \sim \text{rot } u^0 = \underline{\underline{O(1)}}$$



Exponentially small vorticity

$$\text{rot } u = \underline{\underline{O(e^{-\frac{c}{\sqrt{\nu}}})}}$$



$O(\sqrt{\nu})$



Boundary layer vorticity

$$\text{rot } u \sim \text{rot } v^{\text{BL}} = \underline{\underline{O(\nu^{-\frac{1}{2}})}}$$

- Euler 方程式の渦度場に対する有限伝播性より、境界近傍における接方向変数 x に関する解析的な正則性 (収束半径は $O(d_0)$) が保証され、Step 2 の Prandtl 方程式は解ける。



Euler vorticity

$$\text{rot } u \sim \text{rot } u^0 = \underline{\underline{O(1)}}$$



Exponentially small vorticity

$$\text{rot } u = \underline{\underline{O\left(e^{-\frac{c}{\sqrt{\nu}}}\right)}}$$



$$O(\sqrt{\nu})$$



Boundary layer vorticity

$$\text{rot } u \sim \text{rot } v^{\text{BL}} = \underline{\underline{O(\nu^{-\frac{1}{2}})}}$$

- **Step 3**において、境界層の強い渦度場と Euler 方程式で輸送される渦度場の相互作用を渦度方程式により直接解析する。

2次元半空間渦度方程式 ($\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$) ; Y. M. (2013, 2014)

$$\omega = \operatorname{rot} u = \partial_x u_2 - \partial_y u_1:$$

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \partial_y \omega = -(-\partial_x^2)^{\frac{1}{2}} \omega - \nu^{-1} J_1(u \cdot \nabla \omega) & t > 0, (x, y) \in \partial\Omega, \\ \omega|_{t=0} = \operatorname{rot} u_0. \end{cases} \quad (V_\nu)$$

ただし, $J_1(f) = \partial_y(-\Delta_D)^{-1} f$.

2次元半空間渦度方程式 ($\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$) ; Y. M. (2013, 2014)

$$\omega = \operatorname{rot} u = \partial_x u_2 - \partial_y u_1:$$

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \partial_y \omega = -(-\partial_x^2)^{\frac{1}{2}} \omega - \nu^{-1} J_1(u \cdot \nabla \omega) & t > 0, (x, y) \in \partial\Omega, \\ \omega|_{t=0} = \operatorname{rot} u_0. \end{cases} \quad (V_\nu)$$

ただし, $J_1(f) = \partial_y(-\Delta_D)^{-1}f$.

- 境界での接方向の解析性により, 渦度場の境界条件は非斉次 (非線形) Neumann 境界条件 $\partial_y \omega \sim -\nu^{-1} J_1(u \cdot \nabla \omega)$ のように扱える.

2次元半空間渦度方程式 ($\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$) ; Y. M. (2013, 2014)

$$\omega = \text{rot } u = \partial_x u_2 - \partial_y u_1:$$

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \partial_y \omega = -(-\partial_x^2)^{\frac{1}{2}} \omega - \nu^{-1} J_1(u \cdot \nabla \omega) & t > 0, (x, y) \in \partial\Omega, \\ \omega|_{t=0} = \text{rot } u_0. \end{cases} \quad (V_\nu)$$

ただし, $J_1(f) = \partial_y(-\Delta_D)^{-1} f$.

- 境界での接方向の解析性により, 渦度場の境界条件は非斉次 (非線形) Neumann 境界条件 $\partial_y \omega \sim -\nu^{-1} J_1(u \cdot \nabla \omega)$ のように扱える.
- ω を outer flow の渦度場 ω^E と境界層の渦度場 ω^{BL} に分解する際, ω^E は斉次 Neumann 境界条件下での輸送熱方程式の解として構成すればよいことがわかる.

2次元半空間渦度方程式 ($\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$) ; Y. M. (2013, 2014)

$$\omega = \text{rot } u = \partial_x u_2 - \partial_y u_1:$$

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \partial_y \omega = -(-\partial_x^2)^{\frac{1}{2}} \omega - \nu^{-1} J_1(u \cdot \nabla \omega) & t > 0, (x, y) \in \partial\Omega, \\ \omega|_{t=0} = \text{rot } u_0. \end{cases} \quad (V_\nu)$$

ただし, $J_1(f) = \partial_y(-\Delta_D)^{-1}f$.

- 境界での接方向の解析性により, 渦度場の境界条件は非斉次 (非線形) Neumann 境界条件 $\partial_y \omega \sim -\nu^{-1} J_1(u \cdot \nabla \omega)$ のように扱える.
- ω を outer flow の渦度場 ω^E と境界層の渦度場 ω^{BL} に分解する際, ω^E は斉次 Neumann 境界条件下での輸送熱方程式の解として構成すればよいことがわかる.
- ω^E の評価には E. A. Carlen - M. Loss (1995) の輸送項付き熱方程式の基本解各点評価を用いる.

2次元半空間渦度方程式 ($\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$) ; Y. M. (2013, 2014)

$$\omega = \operatorname{rot} u = \partial_x u_2 - \partial_y u_1:$$

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \partial_y \omega = -(-\partial_x^2)^{\frac{1}{2}} \omega - \nu^{-1} J_1(u \cdot \nabla \omega) & t > 0, (x, y) \in \partial\Omega, \\ \omega|_{t=0} = \operatorname{rot} u_0. \end{cases} \quad (V_\nu)$$

ただし, $J_1(f) = \partial_y(-\Delta_D)^{-1}f$.

- 境界での接方向の解析性により, 渦度場の境界条件は非斉次 (非線形) Neumann 境界条件 $\partial_y \omega \sim -\nu^{-1} J_1(u \cdot \nabla \omega)$ のように扱える.
- ω を outer flow の渦度場 ω^E と境界層の渦度場 ω^{BL} に分解する際, ω^E は斉次 Neumann 境界条件下での輸送熱方程式の解として構成すればよいことがわかる.
- ω^E の評価には E. A. Carlen - M. Loss (1995) の輸送項付き熱方程式の基本解各点評価を用いる.
- 境界近傍での接方向の解析性を反映した適当な重み付き Banach scale において Abstract Cauchy Kowalewski 型の定理を用いる.

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

次のような (NS_ν) の初期速度場を考える.

$$u_0(x, y) = (U^E(y), 0) + (U(\frac{y}{\sqrt{\nu}}) - U^E(0), 0) + v_0(x, y)$$

$$U(0) = 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} U(Y) = U^E(0)$$

変数 x については周期境界条件 (周期 2π) を課すことにする.

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

次のような (NS_ν) の初期速度場を考える.

$$u_0(x, y) = (U^E(y), 0) + (U(\frac{y}{\sqrt{\nu}}) - U^E(0), 0) + v_0(x, y)$$

$$U(0) = 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} U(Y) = U^E(0)$$

変数 x については周期境界条件 (周期 2π) を課すことにする.

- $(U^E(y), 0)$: シア一型 outer flow
 U^E をどのように選んでも Euler 方程式の定常解となることに注意.
- $(U(Y), 0)$: シア一型境界層
- v_0 : 摂動 ($\nu \rightarrow 0$ において適当な位相で 0 に収束すると仮定)

$v_0 = 0$ のとき, (NS_ν) の解もシア一型 $(U_1^\nu(y, t), 0)$ となり, (NS_ν) は U_1^ν に対する 1 次元半空間線形熱方程式に帰着される.

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

次のような (NS_ν) の初期速度場を考える.

$$u_0(x, y) = (U^E(y), 0) + (U(\frac{y}{\sqrt{\nu}}) - U^E(0), 0) + v_0(x, y)$$

$$U(0) = 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} U(Y) = U^E(0)$$

変数 x については周期境界条件 (周期 2π) を課すことにする.

- $(U^E(y), 0)$: シア一型 outer flow
 U^E をどのように選んでも Euler 方程式の定常解となることに注意.
- $(U(Y), 0)$: シア一型境界層
- v_0 : 摂動 ($\nu \rightarrow 0$ において適当な位相で 0 に収束すると仮定)

$v_0 \neq 0$ が小さいとき, (NS_ν) の解 u を

$$u(x, y, t) = (U_1^\nu(y, t), 0) + v(x, y, t)$$

の形で求めることは自然である.

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

(NS $_{\nu}$) の解 u を $u(x, y, t) = (U_1^{\nu}(y, t), 0) + v(x, y, t)$ の形で求めるとき、 $v = v^{\nu}$ は次の摂動 Navier-Stokes 方程式を満たす。

2次元半空間摂動 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t v + U_1^{\nu} \partial_x v + v_2 \partial_y U_1^{\nu} \mathbf{e}_1 - \nu \Delta v + \nabla p = -v \cdot \nabla v, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, & v|_{t=0} = v_0. \end{cases} \quad (\text{PNS}_{\nu})$$

ただし、 $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$.

ここでの目的は v の時間局所的な評価であるので、本講演では話を簡単にするため U_1^{ν} を初期値と同じものとしてとることにする:

$$U_1^{\nu}(y, t) = U^E(y) + U\left(\frac{y}{\sqrt{\nu}}\right) - U^E(0).$$

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

2次元半空間摂動 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t v + U_1^\nu \partial_x v + v_2 \partial_y U_1^\nu \mathbf{e}_1 - \nu \Delta v + \nabla p = -v \cdot \nabla v, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, & v|_{t=0} = v_0. \end{cases} \quad (\text{PNS}_\nu)$$

ただし, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$.

シア一型境界層の安定性問題 (SP)

初期摂動 v_0 がある Banach 空間 $X(\Omega)$ (例えば Sobolev 空間 $H^s(\Omega)$) について, ある $m > 0$ に対して $\|v_0\|_{X(\Omega)} \leq \nu^m$ を満たすならば, ν に依らない正定数 T, k, C が存在して (PNS_ν) の解 v に対し $\sup_{0 < t < T} \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\nu^k$ のような評価が成り立つか.

これはシア一型境界層周りにおいて, どのようなクラスの摂動に対して Prandtl 境界層展開を正当化できるかという問題である (Step 3 に焦点を当てている).

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

シア一型境界層の安定性問題 (SP)

$X(\Omega)$ を Banach 空間 (例えば Sobolev 空間 $H^s(\Omega)$) とする. 初期摂動 v_0 がある $m > 0$ に対して $\|v_0\|_{X(\Omega)} \leq \nu^m$ を満たすならば, ν に依らない正定数 T, k, C が存在して (PNS $_\nu$) の解 v に対し $\sup_{0 < t < T} \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\nu^k$ が成り立つか.

空間 $X(\Omega)$ の設定は本質的である. E. Grenier はシア一型境界層の Sobolev 空間 $H^s(\Omega)$ における不安定性について以下を示した.

シア一型境界層の $H^s(\Omega)$ 摂動に対する不安定性; E. Grenier (2000)

U^E を正定数とし, シア一型境界層 $(U(Y), 0)$ が Euler 方程式の定常解として **線形不安定** であるとする. このとき, $X(\Omega) = H^s(\Omega)$ ならば, どのように s, m を大きくとったとしても (SP) で $k > \frac{1}{4}$ と取ることはできない.

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

シア一型境界層の安定性問題 (SP)

$X(\Omega)$ を Banach 空間 (例えば Sobolev 空間 $H^s(\Omega)$) とする. 初期摂動 v_0 がある $m > 0$ に対して $\|v_0\|_{X(\Omega)} \leq \nu^m$ を満たすならば, ν に依らない正定数 T, k, C が存在して (PNS $_\nu$) の解 v に対し $\sup_{0 < t < T} \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\nu^k$ が成り立つか.

空間 $X(\Omega)$ の設定は本質的である. E. Grenier はシア一型境界層の Sobolev 空間 $H^s(\Omega)$ における不安定性について以下を示した.

シア一型境界層の $H^s(\Omega)$ 摂動に対する不安定性; E. Grenier (2000)

U^E を正定数とし, シア一型境界層 $(U(Y), 0)$ が Euler 方程式の定常解として **線形不安定** であるとする. このとき, $X(\Omega) = H^s(\Omega)$ ならば, どのように s, m を大きくとったとしても (SP) で $k > \frac{1}{4}$ と取ることはできない.

- この " $k > \frac{1}{4}$ " の主張は, 最近 E. Grenier - T. T. Nguyen (2018) によって " $k > 0$ " に改良された.
- U が凸でない場合, 線形不安定という条件を満たす例が知られている.

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

E. Grenier (2000) や E. Grenier - T. T. Nguyen (2018) の結果は、本質的に次の摂動 Stokes 方程式での高周波不安定性に基づいている。

2次元半空間摂動 Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t v + U_1^\nu \partial_x v + v_2 \partial_y U_1^\nu \mathbf{e}_1 - \nu \Delta v + \nabla p = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, & v|_{t=0} = v_0. \end{cases} \quad (\text{PS}_\nu)$$

ただし、 $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$.

実際、彼らの結果は、 $(U(Y), 0)$ が Euler 方程式の定常解として線形不安定な場合、 (PS_ν) の解 v で、接方向変数 x に関する Fourier 周波数 n が $|n| \sim O(\nu^{-\frac{1}{2}})$ なる高周波数領域において v の n Fourier mode が $O(e^{c|n|t})$ のように増大するものがとれることを用いている。

この事実は、Prandtl 境界層展開には一般に境界付近での解析的な正則性の条件が必要となることを示唆している。

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

2次元半空間摂動 Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t v + U_1^\nu \partial_x v + v_2 \partial_y U_1^\nu \mathbf{e}_1 - \nu \Delta v + \nabla p = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, & v|_{t=0} = v_0. \end{cases} \quad (\text{PS}_\nu)$$

簡単なエネルギー計算だけでも、 (PS_ν) の解の増大を抑えることがなぜ難しいか垣間見ることができる。部分積分により $\langle U_1^\nu \partial_x v, v \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ および $\langle \nabla p, v \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ となることに注意すると

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\nu \|\nabla v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = -2 \langle v_2 \partial_y U_1^\nu, v_1 \rangle_{L^2(\Omega)}$$

を得る。ここで、 $\partial_y U_1^\nu \sim \partial_y U(\frac{y}{\sqrt{\nu}}) = O(\nu^{-\frac{1}{2}})$ in L^∞ であるので、単純な仕方で Gronwall の不等式を用いると

$$\|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{\frac{Ct}{\sqrt{\nu}}} \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

となる。この評価は前述の $|n| \sim O(\nu^{-\frac{1}{2}})$ のときの増大度 $O(e^{C|n|t})$ と整合する。

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

2次元半空間摂動 Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t v + U_1^\nu \partial_x v + v_2 \partial_y U_1^\nu \mathbf{e}_1 - \nu \Delta v + \nabla p = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, & v|_{t=0} = v_0. \end{cases} \quad (\text{PS}_\nu)$$

(PS_ν) の解に対する $O(e^{c|n|t})$ 型の増大の存在はシア一型境界層 $(U(Y), 0)$ が Euler 方程式の定常解として線形不安定であることに大きく依存している。

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

2次元半空間摂動 Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t v + U_1^\nu \partial_x v + v_2 \partial_y U_1^\nu \mathbf{e}_1 - \nu \Delta v + \nabla p = 0, & t > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0, & t \geq 0, (x, y) \in \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, & v|_{t=0} = v_0. \end{cases} \quad (\text{PS}_\nu)$$

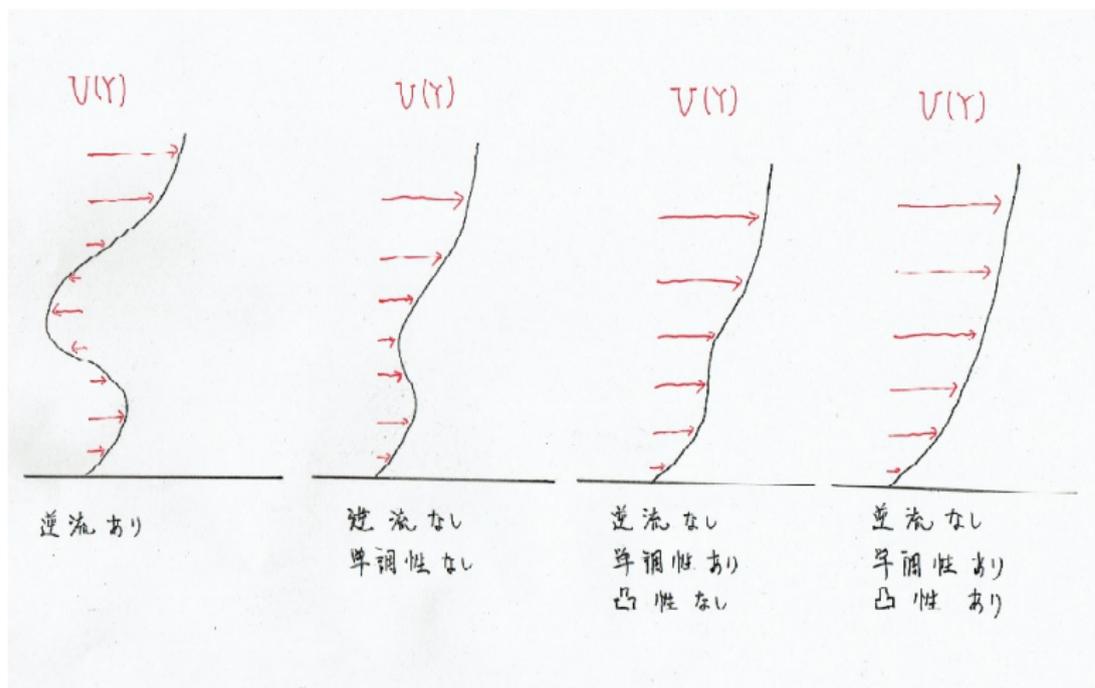
(PS_ν) の解に対する $O(e^{c|n|t})$ 型の増大の存在はシア一型境界層 $(U(Y), 0)$ が Euler 方程式の定常解として線形不安定であることに大きく依存している。

それではシア一型境界層が Euler 方程式の定常解として線形中立安定である場合はどうであろうか。 U に凸性があればこの条件が満たされる。

Lord Rayleigh (1880)

$(U(Y), 0)$ が Euler 方程式の定常解として線形不安定ならば、 U は inflection point ($\partial_Y^2 U$ の符号が変わる点) を持つ。

特に、 $U(Y) = U(0)(1 - e^{-Y})$ など、 \mathbb{R}_+ 上で $-\partial_Y^2 U \geq 0$ が成り立つ場合、 $(U(Y), 0)$ は Euler 方程式の定常解として線形中立安定である。



Euler 方程式の定常解としての安定性

- Euler 方程式の定常解として線形中立安定になることが保証されるのは 1 番右の場合のみ.

「どのような枠組みであれば解析的な正則性を課すことなく Prandtl 境界層展開を正当化できるか」という問題はこの分野の研究者にとって長年の課題であった。凸性を持つよい形状の境界層はその自然な候補であるが、この場合でも高周波不安定性自体は回避できない。

「どのような枠組みであれば解析的な正則性を課すことなく Prandtl 境界層展開を正当化できるか」という問題はこの分野の研究者にとって長年の課題であった。凸性を持つよい形状の境界層はその自然な候補であるが、この場合でも高周波不安定性自体は回避できない。

Tollmien - Schlichting 不安定性

- 粘着境界条件の下で Navier-Stokes 方程式のシア一型流れの周りでの線形化問題を考えた時、高 Reynolds 数において現れる線形不安定性。
- Euler 方程式の定常解として線形中立安定であったとしても現れる generic な不安定性で、この意味で微小粘性による拡散と粘着境界条件に起因する。
- 流体力学では 1920 年代頃には (完全に数学的に厳密とは言えないものの) 理論的に取り扱われるようになった; W. Tollmien (1929), H. Schlichting (1933), G. B. Schubauer - H. K. Skramstad (1947), ..., P. G. Drazin - W. H. Reid (2004)。
- シア一型流れが境界層の構造を持つとき、接方向変数 x の高周波数領域に現れる。

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

Tollmien-Schlichting 不安定性の数学的に厳密な証明は E. Grenier - Y. Guo - T. T. Nguyen (2016) によって与えられた。

空間 $L^2_\sigma(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$, における摂動 Stokes 作用素 \mathbb{L}_ν を

$$\begin{aligned} D(\mathbb{L}_\nu) &= H^2(\Omega)^2 \cap H_0^1(\Omega)^2 \cap L^2_\sigma(\Omega) \\ \mathbb{L}_\nu v &= -\nu \mathbb{P} \Delta v + \mathbb{P}(U_1^\nu \partial_x v + v_2 \partial_y U_1^\nu \mathbf{e}_1), \quad v \in D(\mathbb{L}_\nu) \\ U_1^\nu(y) &= U^E(y) + U\left(\frac{y}{\sqrt{\nu}}\right) - U^E(0) \end{aligned}$$

とおく. ここで $\mathbb{P} : L^2(\Omega)^2 \rightarrow L^2_\sigma(\Omega)$ は Helmholtz 射影作用素.

接方向変数 x に関する n Fourier mode への射影 \mathcal{P}_n を

$$(\mathcal{P}_n v)(x, y) = v^{(n)}(y) e^{inx}, \quad v^{(n)}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x, y) e^{-inx} dx$$

で定義する. U_1^ν は x に依存しないことに注意し, \mathbb{L}_ν の $\mathcal{P}_n L^2_\sigma(\Omega)$ への制限を $\mathbb{L}_{\nu, n}$ と書く.

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

Tollmien-Schlichting 不安定性; E. Grenier - Y. Guo - T. T. Nguyen (2016)

U^E を正定数とし, $U(Y)$ は

$$U(0) = 0, \quad \partial_Y U(0) > 0, \quad \sum_{k=0}^4 \sup_{Y>0} |e^{\eta_0 Y} \partial_Y^k (U(Y) - U^E)| < \infty$$

をある正数 η_0 に対して満たすとする. このとき, 十分小さな $\nu > 0$ と $|n| \sim O(\nu^{-\frac{3}{8}})$ を満たすある n に対して,

$$C_1 |n|^{\frac{2}{3}} \leq \Re(\lambda) \leq C_2 |n|^{\frac{2}{3}}$$

を満たすような $-\mathbb{L}_{\nu,n}$ の固有値 λ が存在する.

この定理において, U の凸性の有無は関係ない.

この不安定性により, $-\mathbb{L}_{\nu,n}$ が $\mathcal{P}_n L_\sigma^2(\Omega)$ で生成する半群 $e^{-t\mathbb{L}_{\nu,n}}$ は $|n| \sim O(\nu^{-\frac{3}{8}})$ なる高周波数領域で少なくとも $O(e^{c|n|^{\frac{2}{3}}t})$ なる増大を呈することになる.

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

Tollmien-Schlichting 不安定性による高周波数における半群 $e^{-t\mathbb{L}_{\nu,n}}$ の増幅 $O(e^{c|n|^{\frac{2}{3}}t})$ のため, Sobolev クラスでの Prandtl 境界層展開は期待できない.

しかし, ここでの微分損失のオーダーは Gevrey 指数 $\frac{3}{2}$ のクラスに該当し, 解析的な正則性 (Gevrey 指数 1) を要求する微分損失のオーダー $O(e^{c|n|t})$ よりも弱い.

Rem. $f(x)$ の n Fourier mode の減衰が $O(e^{-c|n|^{\frac{1}{\gamma}}}) \iff$ Gevrey 指数 γ のクラス

\implies 適当な Gevrey クラスでの安定性は期待できる.

しかし, Tollmien-Schlichting 不安定性はあくまでもある特定のスペクトル領域で確認される不安定性であり, これ以外の領域においてより強い微分損失オーダーを与えるような高周波不安定性が存在しないかどうかは非自明 (実際, U が凸でない場合はより強い微分損失が起こり得る).

$\gamma \in [1, \frac{3}{2}]$ とする. $U^E, U \in BC^2(\overline{\mathbb{R}_+})$ とし, さらに

$$U^E(0) > 0, \quad U(0) = 0, \quad \partial_Y U(0) > 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} U(Y) = U^E(0),$$

$$\sum_{k=0,1,2} \sup_{Y>0} |(1+Y^k)\partial_Y^k U(Y)| < \infty,$$

及びある $M > 0$ が存在して

$$-M\partial_Y^2 U \geq (\partial_Y U)^2, \quad Y \geq 0$$

が成り立つとする. このとき, 任意の $f_n \in \mathcal{P}_n L_\sigma^2(\Omega)$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \|e^{-t\mathbb{L}_{\nu,n}} f_n\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \begin{cases} C_1(1+|n|^{2(1-\frac{1}{\gamma})})e^{C_2|n|^{\frac{1}{\gamma}}t} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}, & 0 \leq |n| \leq C_3\nu^{-\frac{3}{4}}, \\ C_1 e^{-\frac{1}{4}\nu n^2 t} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}, & |n| \geq C_3\nu^{-\frac{3}{4}}. \end{cases} \end{aligned}$$

ここで C_1, C_2, C_3 は γ, ν, n, t, f_n に依存しない正定数.

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

半群評価; D. Gérard Varet - Y. M. - N. Masmoudi (2018)

$$\begin{aligned} & \|e^{-t\mathbb{L}_{\nu,n}} f_n\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \begin{cases} C_1(1 + |n|^{2(1-\frac{1}{\gamma})})e^{C_2|n|^{\frac{1}{\gamma}}t} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}, & 0 \leq |n| \leq C_3\nu^{-\frac{3}{4}}, \\ C_1e^{-\frac{1}{4}\nu n^2 t} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}, & |n| \geq C_3\nu^{-\frac{3}{4}}. \end{cases} \end{aligned}$$

- 条件 $\gamma \leq \frac{3}{2}$ は Tollmien-Schlichting 不安定性によって optimal である。
- 条件 $-M\partial_Y^2 U \geq (\partial_Y U)^2$ は凸性の定量的な条件である。
 $U(Y) = U^E(0)(1 - e^{-Y})$ が典型例。
一般の $-\partial_Y^2 U \geq 0$ の条件下でも成り立つことを確認している (未発表)。
- $O(\nu^{-\frac{3}{4}})$ より高い周波数領域では境界層の形状に依らず常に粘性による消散が卓越する。

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

証明の鍵はレゾルベント問題の解析であり、高周波数領域 ($|n| \gg 1$) における次の Orr-Sommerfeld 方程式の可解性と解の評価に帰着される。

Orr-Sommerfeld 方程式

$$\begin{cases} OS[\phi] := \frac{i}{n}(\partial_Y^2 - \alpha^2)^2\phi + (V - c)(\partial_Y^2 - \alpha^2)\phi - (\partial_Y^2 V)\phi = h, & Y > 0, \\ \phi|_{Y=0} = \partial_Y\phi|_{Y=0} = 0. \end{cases} \quad (OS)$$

ここで、 $\alpha = n\sqrt{\nu}$, $c = \frac{i\lambda}{n}$, $V(Y) = U^E(\sqrt{\nu}Y) - U(Y) + U^E(0)$.
 $\lambda \in \mathbb{C}$ はレゾルベントパラメータ。

未知関数 ϕ は速度場の stream function に対応する。

$\partial_Y^2 V \sim \partial_Y^2 U$ であり、 U の凸性は 0 階項の符号を本質的に定める。例えば $-\partial_Y^2 V \geq 0$ の時、 $\frac{i}{n}(\partial_Y^2 - \alpha^2)^2\phi$ を取り除いた 2 階の方程式は $\Im(c) \neq 0$ (つまり $\Re(\lambda) \neq 0$) のとき L^2 の枠組みで一意的可解。

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

摂動 Navier-Stokes 方程式 (PNS_ν) の積分方程式は

$$v(t) = e^{-tL_\nu} v_0 - \int_0^t e^{-(t-s)L_\nu} \mathbb{P}(v \cdot \nabla v) \, ds$$

正数 γ, l, K に対してノルム $\|v\|_{X^{\gamma, l, K}(\Omega)}$ を以下のように定義する.

$$\|v\|_{X^{\gamma, l, K}(\Omega)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|^l) e^{K|n|^{\frac{1}{\gamma}}} \|v^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

非線形安定性; D. Gérard Varet - Y. M. - N. Masmoudi (2018)

U^E, U は前述の定理の条件をみたすとする. このとき, 十分大きな正数 l, m と任意の正数 K に対して, ある正数 C, T, K' が存在し, 次が成り立つ. 初期値 $v_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ が $\|v_0\|_{X^{\frac{3}{2}, l, K}(\Omega)} \leq \nu^m$ を満たすならば, (PNS_ν) の解 $v \in C([0, T]; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1_0(\Omega)^2)$ で次の評価を満たすものが唯一つ存在する.

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t < T} (\|v(t)\|_{X^{\frac{3}{2}, l, K'}(\Omega)} + (\nu t)^{\frac{1}{4}} \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + (\nu t)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^2(\Omega)}) \\ & \leq C \|v_0\|_{X^{\frac{3}{2}, l, K}(\Omega)}. \end{aligned}$$

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

Tollmien-Schlichting 不安定性は接方向変数 x の周波数だけでなく、時間変数の周波数とも関わる不安定性である。

そのため、この高周波不安定性は、**定常** Navier-Stokes 方程式におけるシア一型境界層の Sobolev クラスでの安定性を否定するものではない。

定常 Prandtl 方程式については 1960 年代の O.A. Oleinik による「逆流の無い」状況下における局所可解性や S. Matsui - T. Shirota (1984) などによる剥離点の研究があったが、境界層の非粘性極限での安定性 (Prandtl 境界層展開の正当化) についてはやはり未解決であった。

シア一型境界層の非粘性極限における安定性

定常問題でのシア一型境界層の安定性については最近 D. Gérard Varet - Y. M. (2018) により次が考察された。 U^E を正定数とし，外力が

$$-\left((\partial_Y^2 U)\left(\frac{y}{\sqrt{\nu}}\right), 0\right) + f \quad (f \text{ は摂動})$$

であるような 2 次元半空間定常 Navier-Stokes 方程式を考えると，その解として

$$u(x, y) = \left(U\left(\frac{y}{\sqrt{\nu}}\right), 0\right) + v(x, y) \quad (2)$$

の形のを求めることになる。ここで， v は外力の摂動部分 f を反映したシア一型境界層からの摂動を記述することになり，これは非定常問題 (PNS $_{\nu}$) を定常問題の場合に考えることに他ならない。

$$\begin{cases} U^{\nu} \partial_x v + v_2 \partial_y U^{\nu} \mathbf{e}_1 - \nu \Delta v + \nabla p = -v \cdot \nabla v + f, & (x, y) \in \Omega_{\kappa}, \\ v|_{y=0} = 0, & \operatorname{div} v = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{\kappa}. \end{cases} \quad (\text{SPNS}_{\nu})$$

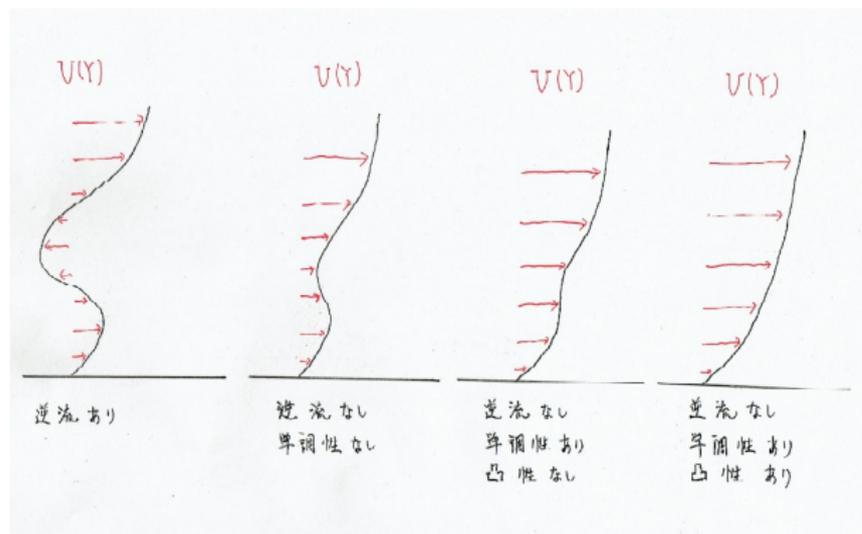
ただし， $U^{\nu}(y) = U\left(\frac{y}{\sqrt{\nu}}\right)$, $\Omega_{\kappa} = \mathbb{R}/2\pi\kappa\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+$ であり， κ は十分小さな正定数とする。

$$\begin{cases} U^\nu \partial_x v + v_2 \partial_y U^\nu \mathbf{e}_1 - \nu \Delta v + \nabla p = -v \cdot \nabla v + f, & (x, y) \in \Omega_\kappa, \\ v|_{y=0} = 0, & \operatorname{div} v = 0, \quad (x, y) \in \Omega_\kappa. \end{cases} \quad (\text{SPNS}_\nu)$$

境界層 $U \in BC^2(\overline{\mathbb{R}_+})$ に対する仮定は以下の「逆流のない」条件：

$$U(0) = 0, \quad \partial_Y U(0) > 0, \quad U > 0 \text{ for } Y > 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} U = U^E > 0$$

$$\sum_{k=1,2} \sup_{Y>0} (1+Y)^3 |\partial_Y^k U(Y)| < \infty$$



$$\begin{cases} U^\nu \partial_x v + v_2 \partial_y U^\nu \mathbf{e}_1 - \nu \Delta v + \nabla p = -v \cdot \nabla v + f, & (x, y) \in \Omega_\kappa, \\ v|_{y=0} = 0, & \operatorname{div} v = 0, \quad (x, y) \in \Omega_\kappa. \end{cases} \quad (\text{SPNS}_\nu)$$

境界層 $U \in BC^2(\overline{\mathbb{R}_+})$ に対する仮定は以下の「逆流のない」条件：

$$U(0) = 0, \quad \partial_Y U(0) > 0, \quad U > 0 \text{ for } Y > 0, \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} U = U^E > 0$$

$$\sum_{k=1,2} \sup_{Y>0} (1+Y)^3 |\partial_Y^k U(Y)| < \infty$$

定常問題における Sobolev 安定性 ; D. Gérard-Varet and Y. M. (2018)

次を満たす正定数 $\kappa_0, \nu_0, \epsilon, C$ が存在する : $\kappa \in (0, \kappa_0], \nu \in (0, \nu_0]$ とする. 外力 f が $\mathcal{P}_0 f = 0$ かつ $\|f\|_{L^2} \leq \epsilon \nu^{\frac{3}{4}} |\log \nu|^{-1}$ を満たすならば, (SPNS_ν) の解 $(v, \nabla p) \in W_{loc}^{2,2}(\Omega_\kappa)^2 \times L^2(\Omega_\kappa)^2$ で次の評価を満たすものが唯一つ存在する. $\mathcal{Q}_0 = I - \mathcal{P}_0$ とおく.

$$\begin{aligned} & \|v_1^{(0)}\|_{L^\infty} + \nu^{\frac{1}{4}} \|\partial_y v_1^{(0)}\|_{L^2} \\ & + \sum_{n \neq 0} \|v^{(n)}\|_{L^\infty} + \nu^{-\frac{1}{4}} \|\mathcal{Q}_0 v\|_{L^2} + \nu^{\frac{1}{4}} \|\nabla \mathcal{Q}_0 v\|_{L^2} \leq \frac{C |\log \nu|^{\frac{1}{2}}}{\nu^{\frac{1}{4}}} \|f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

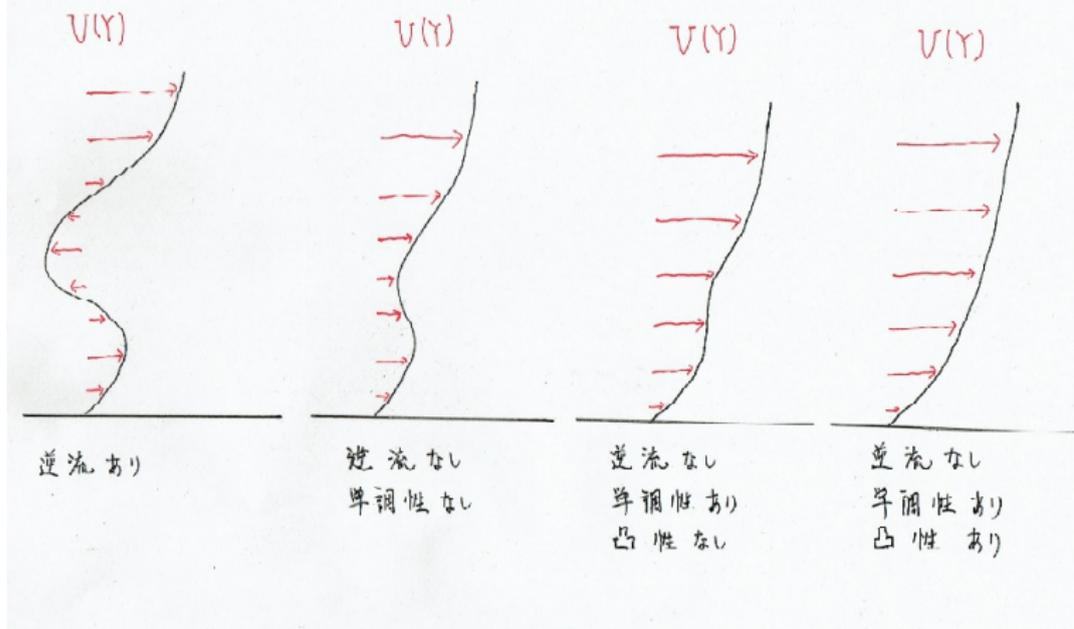
シア一型境界層の非粘性極限における安定性

定常問題については、境界層の主要部として Blasius 境界層を考え、 x に関する境界条件も適当な inflow-outflow 条件とするのが物理的により意味がある。この枠組みでの Sobolev クラスでの Prandtl 境界層展開については、その後 Y. Guo - S. Iyer (2018) により確立された。

もともと L. Prandtl が 1904 年に境界層理論を提示し境界層方程式を導出したのは定常問題に対してであった。

D. Gérard-Varet and Y. M. (2018), Y. Guo - S. Iyer (2018)

は、Prandtl 境界層展開の Sobolev クラスでの数学的な裏付けを与えるものである。



シア型境界層の非粘性極限における安定性 (本講演のまとめ)

- 定常問題については、1番左の場合を除き、Sobolev クラスで安定。
- 非定常問題については、1番右の場合は Gevrey 指数 $\frac{3}{2}$ のクラスで安定，その他の場合は Gevrey 指数 1 のクラスで安定。

- (シアー型ではない) 一般の境界層の場合への拡張
- 3次元の場合
- 半空間以外の一般の領域での境界層展開の正当化
- L^2 収束の条件 $\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Gamma_{c\nu})}^2 dt = 0$ の成立と L^∞ 収束の成立との間にどの程度の gap があるか.