

Categorifications and Quiver Hecke algebras

柏原 正樹

京都大学高等研究院・数理解析研究所

日本数学会秋季総合分科会（金沢）2019年9月18日

代数解析

特に,

- マイクロ関数,
- ホロノミー D 加群の Riemann-Hilbert 対応
- 層の超局所解析

表現論

特に,

- Helgason 予想 (Okamoto et al)
- Kazhdan-Lusztig 予想 (Brylinski, Tanisaki)
- 結晶基底
- 簾ヘッケ環と圏化

歴史的背景 (個人的な視点から)

↓ 2次元可解模型

量子群 (1985) (Drinfeld, Jimbo)

↓ 温度 $q = 0$

結晶基底 (1990) $q = 0$ における基底

↓ “ $q = 0$ ” から全 q 平面へ

大域基底

↓ LLTA 理論 (Lascoux-Leclerc-Thibon, Ariki)

↓ 乗法的性質

簾ヘッケ環 (Rouquier, Khovanov-Lauda)

団代数 Cluster algebras (Fomin-Zelevinsky)

cluster 代数のモノイダル圏化 (2018) (Seok-Jin Kang, K, Myungho Kim, Se-jin Oh)

結晶基底

量子群 $U_q(\mathfrak{g})$

は、2次元可解模型の研究の中から、Drinfeld と Jimbo によって独立に1985年頃に導入された。

結晶基底

量子群 $U_q(\mathfrak{g})$

は、2次元可解模型の研究の中から、Drinfeld と Jimbo によって独立に 1985 年頃に導入された。

この代数は、(温度の) パラメータ q を含み、 $q=0$ は絶対零度にあたる。

結晶基底

量子群 $U_q(\mathfrak{g})$

は、2次元可解模型の研究の中から、Drinfeld と Jimbo によって独立に 1985 年頃に導入された。

この代数は、(温度の) パラメータ q を含み、 $q=0$ は絶対零度にあたる。

したがって、 $q=0$ でなにかすばらしいことが起るのではないかという期待が、結晶基底導入の動機でした。

量子群の定義

$U_q(\mathfrak{g})$ は、
 e_i, f_i (単純ルート元) と $t_i^{\pm 1}$ ($i = 1, \dots, n$) から生成される $\mathbb{C}(q)$ -代数で、
 それらの定義関係式は:

$$\begin{aligned} t_i t_j &= t_j t_i, \\ t_j e_i t_j^{-1} &= q^{(\alpha_j, \alpha_i)} e_i, \\ t_j f_i t_j^{-1} &= q^{-(\alpha_j, \alpha_i)} f_i, \end{aligned}$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \quad \text{with } q_i := q^{(\alpha_i, \alpha_i)/2},$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^b (-1)^n e_i^{(n)} e_j e_i^{(b-n)} = 0 \\ \sum_{n=0}^b (-1)^n f_i^{(n)} f_j f_i^{(b-n)} = 0 \end{cases} \quad \text{for } i \neq j \quad (q\text{-Serre relations})$$

$$\text{with } b = 1 - \langle h_i, \alpha_j \rangle$$

$$e_i^{(n)} := e_i^n / [n]_i!, \quad f_i^{(n)} := f_i^n / [n]_i!.$$

$$[n]_i := \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad [n]_i! := [1]_i \cdots [n]_i,$$

まず最初は、代数 $U_q(\mathfrak{g})$ 自体が $q = 0$ で、何かよい構造を持っているかと探してみましたが、そのようなものはなかなか見つかりませんでした。

数ヵ月の苦闘の後に、 $U_q(\mathfrak{g})$ 自体ではなく、 $U_q(\mathfrak{g})$ -加群が $q = 0$ でよい構造を持っていることに気がついたのです。

$$\{ \text{既約加群} \} \simeq \{ \text{優整重み Dominant integral weights} \}$$

$\mathcal{O}_{\text{int}}$:= 可積 $U_q(\mathfrak{g})$ -加群のアーベル圏

$\mathcal{O}_{\text{int}}$ は半単純

$\{ \text{既約加群} \} \simeq \{ \text{優整重み Dominant integral weights} \}$

O_{int} := 可積 $U_q(\mathfrak{g})$ -加群のアーベル圏

O_{int} は半単純

$\lambda \in P^+ := \{ \lambda \in P : \langle h_i, \lambda \rangle \geq 0 \}$ (dominant integral weight)

$V(\lambda) := \lambda$ を最高重みとする既約 $U_q(\mathfrak{g})$ -加群

$= U_q(\mathfrak{g})u_\lambda$ で u_λ の定義関係式は

$$\begin{cases} t_i u_\lambda = q^{(\alpha_i, \lambda)} u_\lambda \\ e_i u_\lambda = 0 \\ f_i^{\langle h_i, \lambda \rangle + 1} u_\lambda = 0 \end{cases}$$

$\{ \text{既約加群} \} \simeq \{ \text{優整重み Dominant integral weights} \}$

O_{int} := 可積 $U_q(\mathfrak{g})$ -加群のアーベル圏

O_{int} は半単純

$\lambda \in P^+ := \{ \lambda \in P : \langle h_i, \lambda \rangle \geq 0 \}$ (dominant integral weight)

$V(\lambda) := \lambda$ を最高重みとする既約 $U_q(\mathfrak{g})$ -加群

$= U_q(\mathfrak{g})u_\lambda$ で u_λ の定義関係式は

$$\begin{cases} t_i u_\lambda = q^{(\alpha_i, \lambda)} u_\lambda \\ e_i u_\lambda = 0 \\ f_i^{\langle h_i, \lambda \rangle + 1} u_\lambda = 0 \end{cases}$$

$\{ \text{既約 } U_q(\mathfrak{g}) \text{ 加群の同型類} \} \simeq P^+$

$$O_{\text{int}} = \{ M; M \simeq \bigoplus_\nu V(\lambda_\nu) \}$$

結晶基底

$K = \mathbb{C}(q) \supset \mathbf{A}_0 = \{f \in K; f \text{ is regular at } q = 0\}$

V : a K -vector space

結晶基底

$$K = \mathbb{C}(q) \supset \mathbf{A}_0 = \{f \in K; f \text{ is regular at } q = 0\}$$

V : a K -vector space

定義

(L, B) が V の $q = 0$ における局所基底であるとは次の条件がなりたつこと

- L は V の自由 $\mathbf{A}_0$ -部分加群 で、 $V = K \otimes_{\mathbf{A}_0} L$.
- B は L/qL の $\mathbb{C}$ -vector space としての基底。

結晶基底

$$K = \mathbb{C}(q) \supset \mathbf{A}_0 = \{f \in K; f \text{ is regular at } q = 0\}$$

V : a K -vector space

定義

(L, B) が V の $q = 0$ における局所基底であるとは次の条件がなりたつこと

- L は V の自由 $\mathbf{A}_0$ -部分加群 で、 $V = K \otimes_{\mathbf{A}_0} L$.
- B は L/qL の $\mathbb{C}$ -vector space としての基底。

さて、 V を O_{int} に属する $U_q(\mathfrak{g})$ 加群.

$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i \in \text{End}(V)$ を e_i と f_i を修正して得られる V 上の作用素.

結晶基底

$$K = \mathbb{C}(q) \supset \mathbf{A}_0 = \{f \in K; f \text{ is regular at } q = 0\}$$

V : a K -vector space

定義

(L, B) が a V の $q = 0$ における局所基底であるとは次の条件がなりたつこと

- L は V の自由 $\mathbf{A}_0$ -部分加群 で、 $V = K \otimes_{\mathbf{A}_0} L$.
- B は L/qL の $\mathbb{C}$ -vector space としての基底.

さて、 V を O_{int} に属する $U_q(\mathfrak{g})$ 加群.

$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i \in \text{End}(V)$ を e_i と f_i を修正して得られる V 上の作用素.

定義

(L, B) が V の結晶基底 であるとは、

- (L, B) は V の $q = 0$ における V の局所基底,
- $\tilde{e}_i L \subset L$ 且つ $\tilde{f}_i L \subset L$,
- $\tilde{e}_i B \subset B \sqcup \{0\}$, $\tilde{f}_i B \subset B \sqcup \{0\}$,
- $b, b' \in B$ に対して $b' = \tilde{f}_i b \iff b = \tilde{e}_i b'$ が成り立つ.

結晶グラフ

B には色付向き付きグラフ (結晶グラフ) の構造が入る:

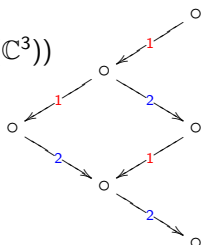
$$b \xrightarrow{i} b' \iff b' = \tilde{f}_i b \iff b = \tilde{e}_i b'$$

結晶グラフ

B には色付き向き付きグラフ (結晶グラフ) の構造が入る:

$$b \xrightarrow{i} b' \iff b' = \tilde{f}_i b \iff b = \tilde{e}_i b'$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ $B(2\Lambda_1) (S^2(\mathbb{C}^3))$

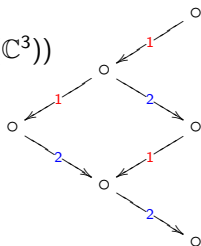


結晶グラフ

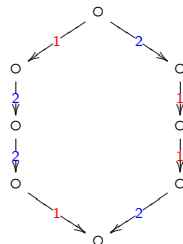
B には色付き向き付きグラフ (結晶グラフ) の構造が入る:

$$b \xrightarrow{i} b' \iff b' = \tilde{f}_i b \iff b = \tilde{e}_i b'$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ $B(2\Lambda_1) (S^2(\mathbb{C}^3))$



随伴表現 $B(\Lambda_1 + \Lambda_2)$



結晶基底 Crystal bases

定理

- ① O_{int} に属する $U_q(\mathfrak{g})$ 加群は結晶基底を持つ,
- ② 結晶基底は、同型を除いて一意である,
- ③ $U_q(\mathfrak{g})$ 加群にたいして、既約であることはその結晶グラフが連結なことと同値である,
- ④ 結晶基底は、テンソル積と相性がよい。

結晶基底 Crystal bases

定理

- ① O_{int} に属する $U_q(\mathfrak{g})$ 加群は結晶基底を持つ,
- ② 結晶基底は、同型を除いて一意である,
- ③ $U_q(\mathfrak{g})$ 加群にたいして、既約であることはその結晶グラフが連結なことと同値である,
- ④ 結晶基底は、テンソル積と相性がよい。

$U_q^-(\mathfrak{g}) = f_i$ で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}(q)$ 部分代数

定理

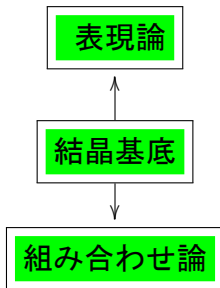
$U_q^-(\mathfrak{g})$ は結晶基底 $(B(U_q^-(\mathfrak{g})), L(U_q^-(\mathfrak{g})))$ をもつ。

結晶基底は、 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群や $U_q^-(\mathfrak{g})$ の $q = 0$ における局所基底である。

$q = 0$ において複雑な加群構造は凍結して簡単なグラフ構造となる。

結晶基底は、 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群や $U_q^-(\mathfrak{g})$ の $q = 0$ における局所基底である。

$q = 0$ において複雑な加群構造は凍結して簡単なグラフ構造となる。



大域基底

$$- : U_q^-(\mathfrak{g}) \rightarrow U_{\bar{q}}^-(\mathfrak{g})$$

を, $\bar{q} = q^{-1}$, $\bar{f}_i = f_i$ を満たす環自己同型

大域基底

$$- : U_q^-(\mathfrak{g}) \rightarrow U_q^-(\mathfrak{g})$$

を, $\bar{q} = q^{-1}$, $\bar{f}_i = f_i$ を満たす環自己同型

$U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} : f_i^{(n)} \ (n \in \mathbb{Z}_{>0})$ で生成される $U_q^-(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}[q^{\pm 1}]$ -部分代数

大域基底

$$- : U_q^-(\mathfrak{g}) \rightarrow U_q^-(\mathfrak{g})$$

を, $\bar{q} = q^{-1}$, $\bar{f}_i = f_i$ を満たす環自己同型

$U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} : f_i^{(n)} \ (n \in \mathbb{Z}_{>0})$ で生成される $U_q^-(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}[q^{\pm 1}]$ -部分代数

定理

$(B, L) : U_q^-(\mathfrak{g})$ の結晶基底.

$$\bullet \quad L \cap \bar{L} \cap U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} L/qL.$$

大域基底

$$- : U_q^-(\mathfrak{g}) \rightarrow U_q^-(\mathfrak{g})$$

を, $\bar{q} = q^{-1}$, $\bar{f}_i = f_i$ を満たす環自己同型

$U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} : f_i^{(n)} (n \in \mathbb{Z}_{>0})$ で生成される $U_q^-(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}[q^{\pm 1}]$ -部分代数

定理

$(B, L) : U_q^-(\mathfrak{g})$ の結晶基底.

$$\textcircled{1} \quad L \cap \bar{L} \cap U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} L/qL.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Let } L \cap \bar{L} \cap U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} L/qL$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{B}_{\text{low}}(U_q^-(\mathfrak{g})) & \xrightarrow{\sim} & B \end{array}$$

で $\mathbf{B}_{\text{low}}(U_q^-(\mathfrak{g}))$ を定義すると、これは

- $U_q^-(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}(q)$ -基底,
- $U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ の $\mathbb{C}[q^{\pm 1}]$ -基底,
- $L(U_q^-(\mathfrak{g}))$ の $\mathbf{A}_0$ -基底

となる.

大域基底

$$- : U_q^-(\mathfrak{g}) \rightarrow U_q^-(\mathfrak{g})$$

を, $\bar{q} = q^{-1}$, $\bar{f}_i = f_i$ を満たす環自己同型

$U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} : f_i^{(n)} (n \in \mathbb{Z}_{>0})$ で生成される $U_q^-(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}[q^{\pm 1}]$ -部分代数

定理

$(B, L) : U_q^-(\mathfrak{g})$ の結晶基底.

$$\textcircled{1} \quad L \cap \bar{L} \cap U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} L/qL.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Let } L \cap \bar{L} \cap U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} L/qL$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{B}_{\text{low}}(U_q^-(\mathfrak{g})) & \xrightarrow{\sim} & B \end{array}$$

で $\mathbf{B}_{\text{low}}(U_q^-(\mathfrak{g}))$ を定義すると、これは

- $U_q^-(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}(q)$ -基底,
- $U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ の $\mathbb{C}[q^{\pm 1}]$ -基底,
- $L(U_q^-(\mathfrak{g}))$ の $\mathbf{A}_0$ -基底

となる.

$\mathbf{B}_{\text{low}}(U_q^-(\mathfrak{g}))$ を **下大域基底** という. 大域基底は、結晶基底から決まる.

上大域基底

$U_q^-(\mathfrak{g})$ はある非退化な 2 次形式をもつ。

$B_{\text{up}}(A_q(n)) \subset U_q^-(\mathfrak{g})$ をその相対基底とする。

$B_{\text{up}}(A_q(n))$ の生成する $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 加群を $A_q(n) \subset U_q^-(\mathfrak{g})$ と置く。

- $A_q(n)$ は $U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ の相対,
- $A_q(n)$ は $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ -代数.

$B(A_q(n))$ を 上大域基底 upper global basis という。

上大域基底

$U_q^-(\mathfrak{g})$ はある非退化な 2 次形式をもつ。

$B_{\text{up}}(A_q(\mathfrak{n})) \subset U_q^-(\mathfrak{g})$ をその相対基底とする。

$B_{\text{up}}(A_q(\mathfrak{n}))$ の生成する $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 加群を $A_q(\mathfrak{n}) \subset U_q^-(\mathfrak{g})$ と置く。

- $A_q(\mathfrak{n})$ は $U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ の相対,
- $A_q(\mathfrak{n})$ は $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ -代数.

$B(A_q(\mathfrak{n}))$ を 上大域基底 upper global basis という。

$U_q^-(\mathfrak{g})$ の二つの $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ -型

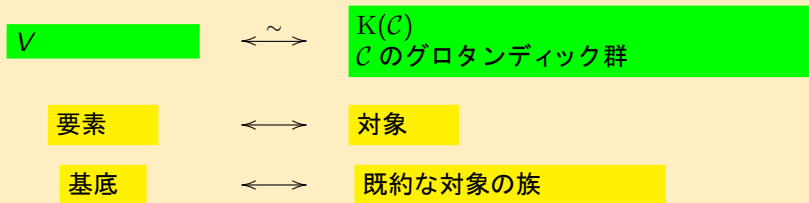
$$U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} \xrightarrow{q \rightarrow 1} U(\mathfrak{n})$$

$$A_q(\mathfrak{n}) \xrightarrow{q \rightarrow 1} \mathbb{C}[\mathfrak{n}]$$

dual

圏化 Categorification

アーベル圏 $\mathcal{C}$ が (ある構造を持つ) ベクトル空間 V の **圏化** であるとは,



$K(\mathcal{C}) : [M] \ (M \in \mathcal{C})$ で生成されるアーベル群で、

その定義関係式は: 完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ に対して
 $[M] = [L] + [N]$

圏化の好例：LLTA 理論 (Lascoux-Leclerc-Thibon-Ariki)

k : 基礎体,

$H_q(n)$: A 型のヘッケ環 (q をパラメータとしてもつ)

$H_q(n)\text{-mod}$: k 上有限次元の $H_q(n)$ -加群のつくるアーベル圏

$V(\Lambda_0)$: $U_q(A_{\ell-1}^{(1)})$ 上の基本的表現

予想 [Lascoux-Leclerc-Thibon(1996)]

q が 原始 ℓ 乗根のとき、 $H_q(n)$ の既約表現は、 $V(\Lambda_0)$ の上大域基底で記述される。

圏化の好例：LLTA 理論 (Lascoux-Leclerc-Thibon-Ariki)

$\mathbf{k}$: 基礎体,

$H_q(n)$: A 型のヘッケ環 (q をパラメータとしてもつ)

$H_q(n)\text{-mod}$: $\mathbf{k}$ 上有限次元の $H_q(n)$ -加群のつくるアーベル圏

$V(\Lambda_0)$: $U_q(A_{\ell-1}^{(1)})$ 上の基本的表現

予想 [Lascoux-Leclerc-Thibon(1996)]

q が 原始 ℓ 乗根のとき、 $H_q(n)$ の既約表現は、 $V(\Lambda_0)$ の上大域基底で記述される。

ヘッケ環

$$H_q(n) \xrightarrow{q \rightarrow 1} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$$

アフィンヘッケ環

$$H_q^{\text{aff}}(n) \xrightarrow{q \rightarrow 1} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \otimes \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$$

LLTA 理論

Ariki (1996) の証明したこと

$$U^-(A_{\ell-1}^{(1)}) = U_q^-(A_{\ell-1}^{(1)})|_{q=1}$$

上大域基底

$$V(\Lambda_0)$$

上大域基底

$$\longleftrightarrow \sim$$

$$\longleftrightarrow$$



$$\longleftrightarrow \sim$$

$$\longleftrightarrow$$

$$K(\mathcal{C})$$

$$\mathcal{C} = \oplus_{n \geq 0} H_q^{\text{aff}}(n)\text{-mod}$$

既約対象のつくる族

$$K(\oplus_{n \geq 0} H_q(n)\text{-mod})$$

既約対象のつくる族

LLTA 理論

Ariki (1996) の証明したこと

$$U^-(A_{\ell-1}^{(1)}) = U_q^-(A_{\ell-1}^{(1)})|_{q=1}$$

上大域基底

$$V(\Lambda_0)$$

上大域基底

$$\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow$$

$$K(\mathcal{C})$$

$$\mathcal{C} = \oplus_{n \geq 0} H_q^{\text{aff}}(n)\text{-mod}$$

既約対象のつくる族

$$K(\oplus_{n \geq 0} H_q(n)\text{-mod})$$

既約対象のつくる族

$\{H_q^{\text{aff}}(n)\text{-mod}\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ (アフィンヘッケ環) が $U^-(A_{\ell-1}^{(1)})$ を圏化する.

LLTA 理論

Ariki (1996) の証明したこと

$$U^-(A_{\ell-1}^{(1)}) = U_q^-(A_{\ell-1}^{(1)})|_{q=1}$$

上大域基底

$$V(\Lambda_0)$$

上大域基底

$$\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow$$

$$K(\mathcal{C})$$

$$\mathcal{C} = \oplus_{n \geq 0} H_q^{\text{aff}}(n)\text{-mod}$$

既約対象のつくる族

$$K(\oplus_{n \geq 0} H_q(n)\text{-mod})$$

既約対象のつくる族

$\{H_q^{\text{aff}}(n)\text{-mod}\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ (アフィンヘッケ環) が $U^-(A_{\ell-1}^{(1)})$ を圏化する.

これはすばらしい証明であったが、一つ不満な点があった。

LLTA 理論

Ariki (1996) の証明したこと

$$U^-(A_{\ell-1}^{(1)}) = U_q^-(A_{\ell-1}^{(1)})|_{q=1}$$

上大域基底

$$V(\Lambda_0)$$

上大域基底

$$\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow$$

$$K(\mathcal{C})$$

$$\mathcal{C} = \oplus_{n \geq 0} H_q^{\text{aff}}(n)\text{-mod}$$

既約対象のつくる族

$$K(\oplus_{n \geq 0} H_q(n)\text{-mod})$$

既約対象のつくる族

$\{H_q^{\text{aff}}(n)\text{-mod}\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ (アフィンヘッケ環) が $U^-(A_{\ell-1}^{(1)})$ を圏化する.

これはすばらしい証明であったが、一つ不満な点があった。

q がこの証明には現れない。

LLTA 理論

Ariki (1996) の証明したこと

$$U^-(A_{\ell-1}^{(1)}) = U_q^-(A_{\ell-1}^{(1)})|_{q=1}$$

上大域基底

$$V(\Lambda_0)$$

上大域基底

$$\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow$$

$$K(\mathcal{C})$$

$$\mathcal{C} = \oplus_{n \geq 0} H_q^{\text{aff}}(n)\text{-mod}$$

既約対象のつくる族

$$K(\oplus_{n \geq 0} H_q(n)\text{-mod})$$

既約対象のつくる族

$\{H_q^{\text{aff}}(n)\text{-mod}\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ (アフィンヘッケ環) が $U^-(A_{\ell-1}^{(1)})$ を圏化する.

これはすばらしい証明であったが、一つ不満な点があった。

q がこの証明には現れない。

q をこめて、**箭ヘッケ環 Quiver Hecke algebras** が $U_q^-(\mathfrak{g})$ を圏化することが Rouquier, Khovanov-Lauda によってしめされた。

箭ヘッケ環 Quiver Hecke algebras (or KLR-algebras)

箭ヘッケ環は、 $U_q^-(\mathfrak{g})$ を圏化するために
Rouquier と Khovanov-Lauda によって独立に導入された。

箭ヘッケ環 Quiver Hecke algebras (or KLR-algebras)

箭ヘッケ環は、 $U_q^-(\mathfrak{g})$ を圏化するために
Rouquier と Khovanov-Lauda によって独立に導入された。

I : index set

$$\begin{aligned} P_n &= (\mathbf{k}[x]^{\oplus I})^{\otimes n} = (\oplus_{i \in I} \mathbf{k}[x]e(i))^{\otimes n} \\ &= \bigoplus_{\nu=(\nu_1, \dots, \nu_n) \in I^n} \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]e(\nu) \end{aligned}$$

S_n は代数 P_n に作用する。

$$\text{但し, } e(\nu) = e(\nu_1) \otimes \cdots \otimes e(\nu_n)$$

箭ヘツケ環 Quiver Hecke algebras (or KLR-algebras)

箭ヘツケ環は、 $U_q^-(\mathfrak{g})$ を圏化するために
Rouquier と Khovanov-Lauda によって独立に導入された。

I : index set

$$\begin{aligned} P_n &= (\mathbf{k}[x]^{\oplus I})^{\otimes n} = (\oplus_{i \in I} \mathbf{k}[x]e(i))^{\otimes n} \\ &= \bigoplus_{\nu=(\nu_1, \dots, \nu_n) \in I^n} \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]e(\nu) \end{aligned}$$

S_n は代数 P_n に作用する。

$$\text{但し, } e(\nu) = e(\nu_1) \otimes \cdots \otimes e(\nu_n)$$

$$P_{ij}(u, v) \in \mathbb{C}[u, v] \quad (i \neq j \in I)$$

箭ヘッケ環 Quiver Hecke algebras (or KLR-algebras)

箭ヘッケ環は、 $U_q^-(\mathfrak{g})$ を圏化するために
Rouquier と Khovanov-Lauda によって独立に導入された。

I : index set

$$\begin{aligned} P_n &= (\mathbf{k}[x]^{\oplus I})^{\otimes n} = (\oplus_{i \in I} \mathbf{k}[x]e(i))^{\otimes n} \\ &= \bigoplus_{\nu=(\nu_1, \dots, \nu_n) \in I^n} \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]e(\nu) \end{aligned}$$

S_n は代数 P_n に作用する。

$$\text{但し, } e(\nu) = e(\nu_1) \otimes \cdots \otimes e(\nu_n)$$

$$P_{ij}(u, v) \in \mathbb{C}[u, v] \ (i \neq j \in I)$$

定義

$R(n)$ は、 P_n と τ_k ($1 \leq k \leq n-1$) で生成される $\text{End}(P_n)$ の部分代数 :

$$\tau_k(f(x_1, \dots, x_n)e(\nu)) = \begin{cases} P_{\nu_k, \nu_{k+1}}(x_{k+1}, x_k)s_k(fe(\nu)) & \text{if } \nu_k \neq \nu_{k+1}, \\ \frac{s_k f - f}{x_k - x_{k+1}} e(\nu) & \text{if } \nu_k = \nu_{k+1}. \end{cases}$$

但し、 $s_k \in S_n \subset \text{End}(P_n)$ は k と $k+1$ の互換

筋ヘツケ環 (続き)

$Q_{ij}(u, v) = P_{ij}(u, v)P_{ji}(v, u)$ と置く.

$Q_{ij}(u, v) = Q_{ji}(v, u)$ を満たす.

定理

$R(n)$ は $\{Q_{ij}(u, v)\}_{ij}$ にのみ依存し,
 $e(\nu)$ ($\nu \in I^n$), x_k ($1 \leq k \leq n$), τ_l ($1 \leq l \leq n-1$) で生成され次の定義関係式で定義される代数である.

$$e(\nu)e(\nu') = \delta_{\nu, \nu'} e(\nu), \quad \sum_{\nu \in I^n} e(\nu) = 1, \quad x_k x_l = x_l x_k, \quad x_k e(\nu) = e(\nu) x_k,$$

$$\tau_l e(\nu) = e(s_l(\nu)) \tau_l, \quad \tau_k \tau_l = \tau_l \tau_k \quad \text{if } |k - l| > 1,$$

$$\tau_k^2 e(\nu) = Q_{\nu_k, \nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}) e(\nu),$$

$$(\tau_k x_l - x_{s_k(l)} \tau_k) e(\nu) = \begin{cases} -e(\nu) & \text{if } l = k, \nu_k = \nu_{k+1}, \\ e(\nu) & \text{if } l = k+1, \nu_k = \nu_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$(\tau_{k+1} \tau_k \tau_{k+1} - \tau_k \tau_{k+1} \tau_k) e(\nu) = \begin{cases} \frac{Q_{\nu_k, \nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}) - Q_{\nu_k, \nu_{k+1}}(x_{k+2}, x_{k+1})}{x_k - x_{k+2}} e(\nu) & \text{if } \nu_k = \nu_{k+2}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

筋ヘツケ環 (続き)

$Q_{ij}(u, v) = P_{ij}(u, v)P_{ji}(v, u)$ と置く.

$Q_{ij}(u, v) = Q_{ji}(v, u)$ を満たす.

定理

$R(n)$ は $\{Q_{ij}(u, v)\}_{ij}$ にのみ依存し,
 $e(\nu)$ ($\nu \in I^n$), x_k ($1 \leq k \leq n$), τ_l ($1 \leq l \leq n-1$) で生成され次の定義関係式で定義される代数である.

$$e(\nu)e(\nu') = \delta_{\nu, \nu'} e(\nu), \quad \sum_{\nu \in I^n} e(\nu) = 1, \quad x_k x_l = x_l x_k, \quad x_k e(\nu) = e(\nu) x_k,$$

$$\tau_l e(\nu) = e(s_l(\nu)) \tau_l, \quad \tau_k \tau_l = \tau_l \tau_k \quad \text{if } |k - l| > 1,$$

$$\tau_k^2 e(\nu) = Q_{\nu_k, \nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}) e(\nu)$$

$$(\tau_k x_l - x_{s_k(l)} \tau_k) e(\nu) = \begin{cases} -e(\nu) & \text{if } l = k, \nu_k = \nu_{k+1}, \\ e(\nu) & \text{if } l = k+1, \nu_k = \nu_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$(\tau_{k+1} \tau_k \tau_{k+1} - \tau_k \tau_{k+1} \tau_k) e(\nu) = \begin{cases} \frac{Q_{\nu_k, \nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}) - Q_{\nu_k, \nu_{k+1}}(x_{k+2}, x_{k+1})}{x_k - x_{k+2}} e(\nu) & \text{if } \nu_k = \nu_{k+2}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

籐ヘツケ環 (続き)

$\{R(n)\}$ は, $(Q_{ij})_{i,j \in I}$ に付随した籐ヘツケ環
quiver Hecke algebra (或は *KLR-algebra*)
と呼ばれる.

箴ヘッケ環 (続き)

$\{R(n)\}$ は, $(Q_{ij})_{i,j \in I}$ に付随した箴ヘッケ環
quiver Hecke algebra (或は *KLR-algebra*)
と呼ばれる.

$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を対称可能な一般カルタン行列

$Q_{ij}(u, v)$ ($i \neq j$) が $(\mathbf{k}[v]$ の元を係数とし、最高次の係数が定数となる)
 u の次数 $-a_{ij}$ の多項式で、 (u, v) について擬斉次多項式.

そのとき、 R_n は次数付代数.

畳み込み

$R(n)$ -gproj: 有限生成射影 $R(n)$ 加群の圏

畳み込み

$R(n)$ -gproj: 有限生成射影 $R(n)$ 加群の圏

$R(n)$ -gmod: $\mathbf{k}$ 上有限次元の $R(n)$ 加群の圏

畳み込み

$R(n)$ -gproj: 有限生成射影 $R(n)$ 加群の圏

$R(n)$ -gmod: $\mathbf{k}$ 上有限次元の $R(n)$ 加群の圏

$$R\text{-gproj} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R(n)\text{-gproj}, \quad R\text{-gmod} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R(n)\text{-gmod}$$

畳み込み

$R(n)$ -gproj: 有限生成射影 $R(n)$ 加群の圏

$R(n)$ -gmod: $\mathbf{k}$ 上有限次元の $R(n)$ 加群の圏

$$R\text{-gproj} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R(n)\text{-gproj}, \quad R\text{-gmod} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R(n)\text{-gmod}$$

We have $R(m) \otimes R(n) \twoheadrightarrow R(m+n)$

畳み込み

$R(n)$ -gproj: 有限生成射影 $R(n)$ 加群の圏

$R(n)$ -gmod: $\mathbf{k}$ 上有限次元の $R(n)$ 加群の圏

$$R\text{-gproj} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R(n)\text{-gproj}, \quad R\text{-gmod} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R(n)\text{-gmod}$$

We have $R(m) \otimes R(n) \twoheadrightarrow R(m+n)$

定義 (畳み込み)

$M \in R(m)\text{-gproj}$ と $N \in R(n)\text{-gproj}$ に対して、その畳み込みを次のように：

$$M \circ N := R(m+n) \bigotimes_{R(m) \otimes R(n)} (M \otimes N)$$

$R\text{-gproj}$ and $R\text{-gmod}$ は、モノイダル圏 (テンソル積を持つ圏) となる。

筋ヘッケ環による圏化

$K(R\text{-gmod})$: $R\text{-gmod}$ のグロタンディック群:

$[M]$ ($M \in R\text{-gmod}$) で生成されるアーベル群で、定義関係式は:

完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ に対して $[M] = [L] + [N]$

簇ヘッケ環による圏化

$K(R\text{-gmod})$: $R\text{-gmod}$ のグロタンディック群:

$[M]$ ($M \in R\text{-gmod}$) で生成されるアーベル群で、定義関係式は:

完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ に対して $[M] = [L] + [N]$

$K(R\text{-gmod})$ は $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 代数

積は モノイダル圏構造 (畳み込み) によって,
 q の作用は, 次数ずらしによって.

定理 (Khovanov-Lauda, Rouquier)

$\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -代数として

$$\begin{array}{ccc} K(R\text{-gproj}) & \xrightarrow{\sim} & U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \\ \uparrow \text{dual} & & \uparrow \text{dual} \\ K(R\text{-gmod}) & \xrightarrow{\sim} & A_q(\mathfrak{n}) \end{array}$$

簇ヘッケ環による圏化

$K(R\text{-gmod})$: $R\text{-gmod}$ のグロタンディック群:

$[M]$ ($M \in R\text{-gmod}$) で生成されるアーベル群で、定義関係式は:

完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ に対して $[M] = [L] + [N]$

$K(R\text{-gmod})$ は $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 代数

積は モノイダル圏構造 (畳み込み) によって,
 q の作用は, 次数ずらしによって.

定理 (Khovanov-Lauda, Rouquier)

$\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -代数として

$$\begin{array}{ccc} K(R\text{-gproj}) & \xrightarrow{\sim} & U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \\ \uparrow \text{dual} & & \uparrow \text{dual} \\ K(R\text{-gmod}) & \xrightarrow{\sim} & A_q(\mathfrak{n}) \end{array}$$

$R\text{-gmod}$ は $U_q^-(\mathfrak{g})$ を圏化する.

圏化

定義

箭ヘッケ環 R が 対称的

$\iff$ 定数倍を除いて $Q_{ij}(u, v) = (u - v)^{-a_{ij}}$

圏化

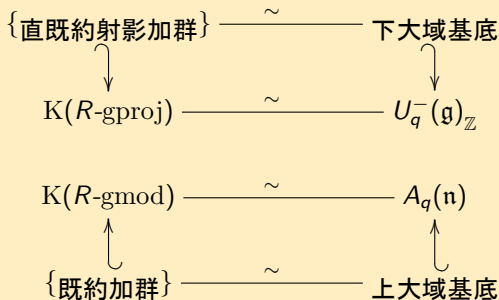
定義

簇ヘッケ環 R が **対称的**

$\iff$ 定数倍を除いて $Q_{ij}(u, v) = (u - v)^{-a_{ij}}$

定理 (Varagnolo-Vasserot, Rouquier)

R が対称的で、基礎体が標数 0 のとき,



dual

系 (正值性)

$b_1, b_2 \in \mathbf{B}(A_q(n))$ に対して,

$$b_1 \cdot b_2 = \sum_{b \in \mathbf{B}(A_q(n))} C_{b_1, b_2}^b(q) b$$

と展開せよ. その時, *Cartan* 行列が対称なら, $C_{b_1, b_2}^b(q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q^{\pm 1}]$.

Cartan 行列が対称でない場合は、正值性は成り立つとは限らない.
(山根重紀がの G_2 の場合に最初にみつける.)

Cluster 代数: 動機

$U_q^-(\mathfrak{g})$ の二つの $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ -型

$$U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} \xrightarrow{q \rightarrow 1} U(\mathfrak{n})$$

↑
下大域基底

$$A_q(\mathfrak{n}) \xrightarrow{q \rightarrow 1} \mathbb{C}[\mathfrak{n}]$$

↑
上大域基底

↕
dual

$\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ は可換であるから, 上大域基底は乘法に関してよい性質を持つと期待される.



Fomin-Zelvinski による
cluster algebra の導入

Cluster 代数: 動機

予想 (Berenstein-Zelevinsky)

$B(A_q(n))$ の有限部分集合の族 $\mathcal{F}$ で次の性質を満たすものがある.

Cluster 代数: 動機

予想 (Berenstein-Zelevinsky)

$B(A_q(n))$ の有限部分集合の族 $\mathcal{F}$ で次の性質を満たすものがある.

- ① $C \in \mathcal{F}$ の任意の元 x, y は, q -可換 ($xy = q^n yx$ がある $n \in \mathbb{Z}$ にたいしてなりたつ),

Cluster 代数: 動機

予想 (Berenstein-Zelevinsky)

$\mathbf{B}(A_q(n))$ の有限部分集合の族 $\mathcal{F}$ で次の性質を満たすものがある.

- ① $C \in \mathcal{F}$ の任意の元 x, y は, q -可換 ($xy = q^n yx$ がある $n \in \mathbb{Z}$ にたいしてなりたつ),
- ② 任意の $C \in \mathcal{F}$ に対して, C -monomial は $q^{\mathbb{Z}}\mathbf{B}(A_q(n))$ に属する,

C -monomial: $x_1 \cdots x_n$ for some $x_1, \dots, x_n \in C$

$$q^{\mathbb{Z}}\mathbf{B}(A_q(n)) = \{q^n b; n \in \mathbb{Z}, b \in \mathbf{B}(A_q(n))\}$$

Cluster 代数: 動機

予想 (Berenstein-Zelevinsky)

$\mathbf{B}(A_q(n))$ の有限部分集合の族 $\mathcal{F}$ で次の性質を満たすものがある.

- ❶ $C \in \mathcal{F}$ の任意の元 x, y は, q -可換 ($xy = q^n yx$ がある $n \in \mathbb{Z}$ にたいしてなりたつ),
- ❷ 任意の $C \in \mathcal{F}$ に対して, C -monomial は $q^{\mathbb{Z}}\mathbf{B}(A_q(n))$ に属する,
- ❸ (maximality) もし $b \in \mathbf{B}(A_q(n))$ が $C \in \mathcal{F}$ の任意の元と q -可換なら、 b は C -monomial である,

C -monomial: $x_1 \cdots x_n$ for some $x_1, \dots, x_n \in C$

$$q^{\mathbb{Z}}\mathbf{B}(A_q(n)) = \{q^n b; n \in \mathbb{Z}, b \in \mathbf{B}(A_q(n))\}$$

Cluster 代数: 動機

予想 (Berenstein-Zelevinsky)

$\mathbf{B}(A_q(n))$ の有限部分集合の族 $\mathcal{F}$ で次の性質を満たすものがある.

- ❶ $C \in \mathcal{F}$ の任意の元 x, y は, q -可換 ($xy = q^n yx$ がある $n \in \mathbb{Z}$ にたいしてなりたつ),
- ❷ 任意の $C \in \mathcal{F}$ に対して, C -monomial は $q^{\mathbb{Z}}\mathbf{B}(A_q(n))$ に属する,
- ❸ (maximality) もし $b \in \mathbf{B}(A_q(n))$ が $C \in \mathcal{F}$ の任意の元と q -可換なら、 b は C -monomial である,
- ❹ $\mathbf{B}(A_q(n))$ は、 C -monomials の合併である. 但し、 C はすべての $\mathcal{F}$ の元を動く.

C -monomial: $x_1 \cdots x_n$ for some $x_1, \dots, x_n \in C$

$$q^{\mathbb{Z}}\mathbf{B}(A_q(n)) = \{q^n b; n \in \mathbb{Z}, b \in \mathbf{B}(A_q(n))\}$$

Cluster 代数: 動機

予想 (Berenstein-Zelevinsky)

$\mathbf{B}(A_q(n))$ の有限部分集合の族 $\mathcal{F}$ で次の性質を満たすものがある.

- ❶ $C \in \mathcal{F}$ の任意の元 x, y は, q -可換 ($xy = q^n yx$ がある $n \in \mathbb{Z}$ にたいしてなりたつ),
- ❷ 任意の $C \in \mathcal{F}$ に対して, C -monomial は $q^{\mathbb{Z}}\mathbf{B}(A_q(n))$ に属する,
- ❸ (maximality) もし $b \in \mathbf{B}(A_q(n))$ が $C \in \mathcal{F}$ の任意の元と q -可換なら、 b は C -monomial である,
- ❹ $\mathbf{B}(A_q(n))$ は、 C -monomials の合併である. 但し、 C はすべての $\mathcal{F}$ の元を動く.

C -monomial: $x_1 \cdots x_n$ for some $x_1, \dots, x_n \in C$

$$q^{\mathbb{Z}}\mathbf{B}(A_q(n)) = \{q^n b; n \in \mathbb{Z}, b \in \mathbf{B}(A_q(n))\}$$

Leclerc は, imaginary vector が存在することを見いだした.

$b \in \mathbf{B}(A_q(n))$ が **real** $\iff b^2 \in q^{\mathbb{Z}}\mathbf{B}(A_q(n))$.

そうでないとき, b は **imaginary** という.

Cluster 代数: 動機

予想 (Berenstein-Zelevinsky)

$\mathbf{B}(A_q(n))$ の有限部分集合の族 $\mathcal{F}$ で次の性質を満たすものがある.

- ❶ $C \in \mathcal{F}$ の任意の元 x, y は, q -可換 ($xy = q^n yx$ がある $n \in \mathbb{Z}$ にたいしてなりたつ),
- ❷ 任意の $C \in \mathcal{F}$ に対して, C -monomial は $q^{\mathbb{Z}}\mathbf{B}(A_q(n))$ に属する,
- ❸ (maximality) もし $b \in \mathbf{B}(A_q(n))$ が $C \in \mathcal{F}$ の任意の元と q -可換なら, b は C -monomial である,
- ❹ ~~$\mathbf{B}(A_q(n))$ は, C -monomials の合併である. 但し, C はすべての $\mathcal{F}$ の元を動く.~~

$\mathbf{B}(A_q(n))$ は, 代数として C -monomials で生成される. 但し, C はすべての $\mathcal{F}$ の元を動く.

C -monomial: $x_1 \cdots x_n$ for some $x_1, \dots, x_n \in C$

$$q^{\mathbb{Z}}\mathbf{B}(A_q(n)) = \{q^n b; n \in \mathbb{Z}, b \in \mathbf{B}(A_q(n))\}$$

Leclerc は, imaginary vector が存在することを見いだした.

$b \in \mathbf{B}(A_q(n))$ が **real** $\iff b^2 \in q^{\mathbb{Z}}\mathbf{B}(A_q(n))$.

そうでないとき, b は **imaginary** という.

Cluster 代数

K : 体

Seed, cluster, exchange 行列

- K の cluster C とは、代数的独立な A の元の有限集合 $\{x_i\}_{i \in J}$. 但し、 $J = J_{\text{ex}} \sqcup J_{\text{fr}}$.
- exchange 行列 とは $\tilde{B} = (b_{ij})_{(i,j) \in J \times J_{\text{ex}}}$. ここでは、 $b_{ij} = -b_{ji}$ ($i, j \in J_{\text{ex}}$) を仮定する.
- seed S とは、cluster と exchange 行列の組 $(C, \tilde{B})$.

Cluster 代数

K : 体

Seed, cluster, exchange 行列

- K の cluster C とは、代数的独立な A の元の有限集合 $\{x_i\}_{i \in J}$. 但し、 $J = J_{\text{ex}} \sqcup J_{\text{fr}}$.
- exchange 行列 とは $\tilde{B} = (b_{ij})_{(i,j) \in J \times J_{\text{ex}}}$. ここでは、 $b_{ij} = -b_{ji}$ ($i, j \in J_{\text{ex}}$) を仮定する.
- seed S とは、cluster と exchange 行列の組 $(C, \tilde{B})$.

Mutation

$k \in J_{\text{ex}}$ における seed $S = (C, \tilde{B})$ の mutation とは、seed $S' := (C', \tilde{B}')$. ただし、

$$C' = (x'_i)_{i \in J} \quad x'_i = \begin{cases} x_i & (i \neq k) \\ \frac{\prod_{b_{jk} > 0} x^{b_{jk}} + \prod_{b_{jk} < 0} x^{-b_{jk}}}{x_k} & (i = k) \end{cases}$$

$$\tilde{B}' = (b'_{ij})_{i \in J, j \in J_{\text{ex}}} \quad b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ か } j = k, \\ b_{ij} + (-1)^{\delta(b_{ik} < 0)} \max(b_{ik} b_{kj}, 0) & i, j \neq k. \end{cases}$$

$\mu_k(S) = S'$ と書く.

Cluster algebras

cluster $C = \{x_i\}_{i \in J}$ に対して,
 x_i を **cluster 変数**, $\prod_{i \in J} x_i^{m_i}$ を **cluster 単項式** という.

定義

cluster algebra とは、
体 K のある与えられた seed からすべての可能な mutation を繰り返して得られる
seed の cluster 変数で生成される部分環である。

GLS の結果と予想

カルタン行列 $(a_{ij})_{ij}$ は, 対称と仮定する.

定理 (Geiß-Leclerc-Schröer)

$A_q(n(w))$ は *cluster* 代数の構造を持つ.

w は Weyl 群の元,

$A_q(n(w)) \subset A_q(n)$ は, ある部分環で上大域基底

$\mathbf{B}(A_q(n(w))) := A_q(n(w)) \cap \mathbf{B}(A_q(n))$ をもつ.

GLS の結果と予想

カルタン行列 $(a_{ij})_{ij}$ は, 対称と仮定する.

定理 (Geiß-Leclerc-Schröer)

$A_q(n(w))$ は *cluster* 代数の構造を持つ.

w は Weyl 群の元,

$A_q(n(w)) \subset A_q(n)$ は, ある部分環で上大域基底
 $\mathbf{B}(A_q(n(w))) := A_q(n(w)) \cap \mathbf{B}(A_q(n))$ をもつ.

予想 (GLS)

$A_q(n(w))$ の任意の *cluster* 単項式は上大域基底に属する.

したがって、任意の *cluster* 単項式は real である.

$$b \in \mathbf{B}(A_q(n(w))) \text{ が real} \Leftrightarrow b^2 \in q^{\mathbb{Z}} \mathbf{B}(A_q(n(w))).$$

Cluster algebra のモノイダル圏化

$(\mathcal{C}, \otimes)$: モノイダルアーベル圏

定義

既約対象 $S \in \mathcal{C}$ が real $\iff S \otimes S$ が既約.

Cluster algebra のモノイダル圏化

$(\mathcal{C}, \otimes)$: モノイダルアーベル圏

定義

既約対象 $S \in \mathcal{C}$ が *real* $\iff S \otimes S$ が既約.

$\{M_i\}_{i \in J}$ が **モノイダル cluster**:

$\mathcal{C}$ の有限個の *real* 既約で, $M_i \otimes M_j \simeq M_j \otimes M_i$ がなりたつ.

Cluster algebra のモノイダル圏化

$(\mathcal{C}, \otimes)$: モノイダルアーベル圏

定義

既約対象 $S \in \mathcal{C}$ が *real* $\iff S \otimes S$ が既約.

$\{M_i\}_{i \in J}$ が **モノイダル cluster**:

$\mathcal{C}$ の有限個の *real* 既約で, $M_i \otimes M_j \simeq M_j \otimes M_i$ がなりたつ.

$k \in J_{\text{ex}}$ における *mutation* :

$$\mu_k(\{M_i\}_{i \in J}) = \{M'_i\}_{i \in J}$$

但し, $M'_i = M_i$ ($i \neq k$) 且つ, M'_k は次の完全列をみたす.

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow M_k \otimes M'_k \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow M'_k \otimes M_k \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$\text{但し, } A = \bigotimes_{i; b_{ik} < 0} M_i^{-b_{ik}}, \quad B = \bigotimes_{i; b_{ik} > 0} M_i^{b_{ik}}.$$

$$X_k X'_k = \prod_{i; b_{ik} > 0} X_i^{b_{ik}} + \prod_{i; b_{ik} < 0} X_i^{-b_{ik}} \quad \text{と対比せよ.}$$

定理 (K^3O : Seok-Jin Kang, K, Myungho Kim, Se-jin Oh)

$A_q(n(w))$ の与えられた *seed* の第一段階の *mutation* が可能なら、任意の引き続いた *mutation* が可能である.

系

任意の *cluster* 単項式は上大域基底に属する *real* な元である.

定理 (K^3O : Seok-Jin Kang, K, Myungho Kim, Se-jin Oh)

$A_q(n(w))$ の与えられた *seed* の第一段階の *mutation* が可能なら、任意の引き続いた *mutation* が可能である.

系

任意の *cluster* 単項式は上大域基底に属する *real* な元である.

予想

$\{\text{cluster 単項式}\} = \{\text{real な上大域基底の元}\}$

Real objects

$(\mathcal{C}, \otimes)$: $R\text{-gmod}$ かアフィン量子群の有限次元表現のつくるモノイダル圏.

Real objects

$(\mathcal{C}, \otimes) : R\text{-gmod}$ かアフィン量子群の有限次元表現のつくるモノイダル圏.

定理 (K³O ;Kang, K., Kim, Oh)

M と N を $\mathcal{C}$ の既約対象. さらに, M か N は *real* と仮定する. その時,

Real objects

$(\mathcal{C}, \otimes) : R\text{-gmod}$ かアフィン量子群の有限次元表現のつくるモノイダル圏.

定理 (K³O ;Kang, K., Kim, Oh)

M と N を $\mathcal{C}$ の既約対象. さらに, M か N は *real* と仮定する. その時,

● $\text{Hom}(M \otimes N, M \otimes N) = \mathbf{kid}_{M \otimes N},$

Real objects

$(\mathcal{C}, \otimes) : R\text{-gmod}$ かアフィン量子群の有限次元表現のつくるモノイダル圏.

定理 (K³O ; Kang, K., Kim, Oh)

M と N を $\mathcal{C}$ の既約対象. さらに, M か N は *real* と仮定する. その時,

① $\text{Hom}(M \otimes N, M \otimes N) = \mathbf{k} \text{id}_{M \otimes N},$

② ある零でない $r: M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ があって,

$$\text{Hom}(M \otimes N, N \otimes M) = \mathbf{k} r$$

がなりたつ.

Real objects

$(\mathcal{C}, \otimes) : R\text{-gmod}$ かアフィン量子群の有限次元表現のつくるモノイダル圏.

定理 (K³O ;Kang, K., Kim, Oh)

M と N を $\mathcal{C}$ の既約対象. さらに, M か N は *real* と仮定する. その時,

① $\text{Hom}(M \otimes N, M \otimes N) = \text{kid}_{M \otimes N},$

② ある零でない $r: M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ があって,

$$\text{Hom}(M \otimes N, N \otimes M) = \mathbf{k}r$$

がなりたつ.

③ $\text{Im}(r)$ は既約で, $M \otimes N$ の *head* でありまた $N \otimes M$ の *socle* である.

歴史的背景 (個人的な視点から)

↓ 2次元可解模型

量子群 (1985) (Drinfeld, Jimbo)

↓ 温度 $q = 0$

結晶基底 (1990) $q = 0$ における基底

↓ “ $q = 0$ ” から全 q 平面へ

大域基底

↓ LLTA 理論 (Lascoux-Leclerc-Thibon, Ariki)

↓ 乗法的性質

箆ヘッケ環 (Rouquier, Khovanov-Lauda)

団代数 Cluster algebras (Fomin-Zelevinsky)

団代数のモノイダル圏化 (2018)

Thank You