

最大正則性定理に基づく流体方程式の自由境界問題

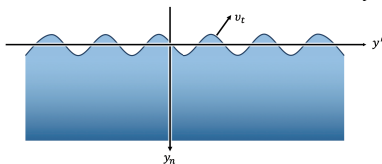
清水 扇丈 (京都大学大学院 理学研究科)

日本数学会年会 (東京理科大学)

2026.3.24

非圧縮性 Navier–Stokes 方程式の自由境界問題

$$\Omega(t) \equiv \left\{ (t, y', y_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; y_n > \bar{\eta}(t, y') \right\} \subset \mathbb{R}^n \quad (n \geq 2)$$

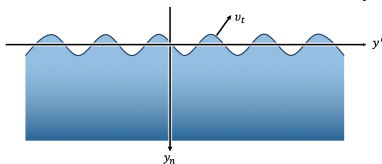


$\bar{u} = \bar{u}(t, y) : \mathbb{R}_+ \times \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 流速ベクトル
 $\bar{\eta} = \bar{\eta}(t, y') : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ 境界関数

$\bar{p} = \bar{p}(t, y) : \mathbb{R}_+ \times \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}$ 圧力

非圧縮性 Navier–Stokes 方程式の自由境界問題

$$\Omega(t) \equiv \left\{ (t, y', y_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; y_n > \bar{\eta}(t, y') \right\} \subset \mathbb{R}^n \quad (n \geq 2)$$



$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}(t, y) : \mathbb{R}_+ \times \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ 流速ベクトル} & \bar{p} &= \bar{p}(t, y) : \mathbb{R}_+ \times \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R} \text{ 圧力} \\ \bar{\eta} &= \bar{\eta}(t, y') : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R} \text{ 境界関数} \end{aligned}$$

$$\text{(FNS)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} - \operatorname{div} T(\bar{u}, \bar{p}) = 0, & t > 0, y \in \Omega(t), \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0, & t > 0, y \in \Omega(t), \\ T(\bar{u}, \bar{p}) \nu_t = 0, & t > 0, y \in \partial\Omega(t), \\ \frac{\partial_t \bar{\eta}}{\sqrt{1 + |\nabla' \bar{\eta}|^2}} = -\bar{u} \cdot \nu_t, & t > 0, y \in \partial\Omega(t), \\ \bar{u}(t, y)|_{t=0} = u_0(y), & y \in \Omega(0) = \mathbb{R}^n, \\ \bar{\eta}(t, y')|_{t=0} = \eta_0(y') \equiv 0, & y' \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ T(\bar{u}, \bar{p}) = (\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^\top) - \bar{p}I, & \nu_t = \frac{(\nabla' \bar{\eta}, -1)}{\sqrt{1 + |\nabla' \bar{\eta}|^2}}. \end{array} \right.$$

初期値問題とスケール不変性

Navier–Stokes 方程式の初期値問題 (Cauchy 問題): ▶ 自由境界問題は複雑であるため, ひとまず初期値問題を考察

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0, & & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

初期値問題とスケール不変性

Navier–Stokes 方程式の初期値問題 (Cauchy 問題): ▶ 自由境界問題は複雑であるため, ひとまず初期値問題を考察

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0, & & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

スケール変換

$$\begin{cases} u(t, x) \rightarrow u_\lambda(t, x) \equiv \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \\ p(t, x) \rightarrow p_\lambda(t, x) \equiv \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x), \end{cases} \quad \lambda > 0.$$

初期値問題とスケール不変性

Navier–Stokes 方程式の初期値問題 (Cauchy 問題): ▶ 自由境界問題は複雑であるため, ひとまず初期値問題を考察

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0, & & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

スケール変換

$$\begin{cases} u(t, x) \rightarrow u_\lambda(t, x) \equiv \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \\ p(t, x) \rightarrow p_\lambda(t, x) \equiv \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x), \end{cases} \quad \lambda > 0.$$

スケール不変空間

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}_p^s)} = \|u_\lambda\|_{L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}_p^s)}, \quad \forall \lambda > 0, \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 1 + s.$$

初期値問題とスケール不変性

Navier–Stokes 方程式の初期値問題 (Cauchy 問題): ▶ 自由境界問題は複雑であるため, ひとまず初期値問題を考察

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0, & & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

スケール変換

$$\begin{cases} u(t, x) \rightarrow u_\lambda(t, x) \equiv \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \\ p(t, x) \rightarrow p_\lambda(t, x) \equiv \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x), \end{cases} \quad \lambda > 0.$$

スケール不変空間

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}_p^s)} = \|u_\lambda\|_{L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}_p^s)}, \quad \forall \lambda > 0, \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 1 + s.$$

$$\begin{aligned} \because \|u_\lambda\|_{L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}_p^s)} &= \left(\int_0^\infty \|u_\lambda(t)\|_{\dot{H}_p^s}^r dt \right)^{1/r} \\ &= \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla|^s u_\lambda(t, x)|^p dx \right)^{r/p} dt \right)^{1/r} = \lambda^{1+s-\frac{2}{r}-\frac{n}{p}} \|u\|_{L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}_p^s)} \end{aligned}$$

初期値問題とスケール不変性

Navier–Stokes 方程式の初期値問題 (Cauchy 問題): ▶ 自由境界問題は複雑であるため, ひとまず初期値問題を考察

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0, & & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

スケール変換

$$\begin{cases} u(t, x) \rightarrow u_\lambda(t, x) \equiv \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \\ p(t, x) \rightarrow p_\lambda(t, x) \equiv \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x), \end{cases} \quad \lambda > 0.$$

スケール不変空間

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}_p^s)} = \|u_\lambda\|_{L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}_p^s)}, \quad \forall \lambda > 0, \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 1 + s.$$

$$\begin{aligned} \therefore \|u_\lambda\|_{L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}_p^s)} &= \left(\int_0^\infty \|u_\lambda(t)\|_{\dot{H}_p^s}^r dt \right)^{1/r} \\ &= \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla|^s u_\lambda(t, x)|^p dx \right)^{r/p} dt \right)^{1/r} = \lambda^{1+s-\frac{2}{r}-\frac{n}{p}} \|u\|_{L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}_p^s)} \end{aligned}$$

目標

スケール不変空間での自由境界問題 (FNS) の適切性

Navier–Stokes 方程式の初期値問題

Navier–Stokes 方程式の Cauchy 問題は半線形 PDE

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0, & & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Helmholtz 分解

▶ 圧力 p を消去し流速 u のみの方程式とするため

$$\begin{aligned} L^p(\mathbb{R}^n)^n &= L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) \oplus G^p(\mathbb{R}^n) \quad 1 < p < \infty, \\ L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) &= \overline{\{v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^n \mid \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n\}}^{\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}, \\ G^p(\mathbb{R}^n) &= \{\nabla \pi \in L^p(\mathbb{R}^n)^n \mid \pi \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)\}. \end{aligned}$$

Navier–Stokes 方程式の初期値問題

Navier–Stokes 方程式の Cauchy 問題は半線形 PDE

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0, & & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Helmholtz 分解

▶ 圧力 p を消去し流速 u のみの方程式とするため

$$\begin{aligned} L^p(\mathbb{R}^n)^n &= L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) \oplus G^p(\mathbb{R}^n) \quad 1 < p < \infty, \\ L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) &= \overline{\{v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^n \mid \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n\}}^{\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}, \\ G^p(\mathbb{R}^n) &= \{\nabla \pi \in L^p(\mathbb{R}^n)^n \mid \pi \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)\}. \end{aligned}$$

▶ Helmholtz–Weyl 分解 Kozono–Yanagisawa ('09 IUMJ) 有界領域

▶ Hieber–Kozono–Seyfolt–S–Yanagisawa ('21 JFA) 外部領域

Navier–Stokes 方程式の初期値問題

Navier–Stokes 方程式の Cauchy 問題は半線形 PDE

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0, & & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Helmholtz 分解

▶ 圧力 p を消去し流速 u のみの方程式とするため

$$\begin{aligned} L^p(\mathbb{R}^n)^n &= L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) \oplus G^p(\mathbb{R}^n) \quad 1 < p < \infty, \\ L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) &= \overline{\{v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^n \mid \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n\}}^{\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}, \\ G^p(\mathbb{R}^n) &= \{\nabla \pi \in L^p(\mathbb{R}^n)^n \mid \pi \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)\}. \end{aligned}$$

▶ Helmholtz–Weyl 分解 Kozono–Yanagisawa ('09 IUMJ) 有界領域

▶ Hieber–Kozono–Seyfolt–S–Yanagisawa ('21 JFA) 外部領域

$P : L^p(\mathbb{R}^n)^n \rightarrow L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$, $u = Pu$ より

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = -P[(u \cdot \nabla)u], & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = Pu_0, & & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$A = -P\Delta$, $\mathcal{D}(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ Stokes 作用素

Navier–Stokes 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = -\mathbf{P}[(u \cdot \nabla)u], & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = \mathbf{P}u_0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$u(t) = e^{-tA}\mathbf{P}u_0 - \int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbf{P}[(u \cdot \nabla)u](s) ds =: \Phi[u](t)$$

▶ 半群理論：藤田–黒田–伊藤「関数解析」，黒田「関数解析」

Navier–Stokes 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = -P[(u \cdot \nabla)u], & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = Pu_0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$u(t) = e^{-tA}Pu_0 - \int_0^t e^{-(t-s)A}P[(u \cdot \nabla)u](s) ds =: \Phi[u](t)$$

▶ 半群理論：藤田–黒田–伊藤「関数解析」，黒田「関数解析」

スケール不変空間 $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^n(\mathbb{R}^n))$

$$\text{▶ } \|u\|_{L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}_p^s)} \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 1 + s$$

Navier–Stokes 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = -P[(u \cdot \nabla)u], & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = Pu_0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$u(t) = e^{-tA}Pu_0 - \int_0^t e^{-(t-s)A}P[(u \cdot \nabla)u](s) ds =: \Phi[u](t)$$

▶ 半群理論：藤田–黒田–伊藤「関数解析」，黒田「関数解析」

スケール不変空間 $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^n(\mathbb{R}^n))$

▶ $\|u\|_{L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}_p^n)} \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 1 + s$

$$S = \{v \in X : \|v\|_X \leq M, \quad n < p < \infty\}$$

$$\|v\|_X := \sup_{0 < t < \infty} \|v(t)\|_{L^n} + \sup_{0 < t < \infty} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{p})} \|v(t)\|_{L^p} + \sup_{0 < t < \infty} t^{\frac{1}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^n}$$

Banach–Caccioppoli の不動点定理 (縮小写像の原理)

X : Banach 空間, S : X の閉部分集合.

$\Phi : S \rightarrow S$ が縮小写像 $\Rightarrow \exists ! v \in S$ s.t. $\Phi(v) = v$

L^p - L^q 評価 $1 < p \leq q < \infty$

$$\|\nabla^\alpha e^{-tA} f\|_{L^q} \leq C_{n,p} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \frac{|\alpha|}{2}} \|f\|_{L^p}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad f \in L^p_\sigma.$$

Navier–Stokes 方程式の初期値問題

- 鍵となる評価

L^p - L^q 評価 $1 < p \leq q < \infty$

$$\|\nabla^\alpha e^{-tA} f\|_{L^q} \leq C_{n,p} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}} \|f\|_{L^p}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad f \in L^p_\sigma.$$

$$\begin{aligned} \|\nabla\Phi\text{の第2項}\|_{L^n} &= \left\| \nabla \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbf{P}[(u \cdot \nabla)u](s) ds \right\|_{L^n} && 1 < q < n < p, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \\ &\leq C_{n,q} \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{n})-\frac{1}{2}} \|(u \cdot \nabla)u(s)\|_{L^q} ds \\ &\leq C_{n,p} \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2p}-\frac{1}{2}} s^{-1+\frac{n}{2p}} \cdot s^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{p})} \|u(s)\|_{L^p} \cdot s^{\frac{1}{2}} \|\nabla u(s)\|_{L^n} ds \\ &\leq C_{n,p} \|u\|_X^2 B\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2p}, \frac{n}{2p}\right) t^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^t (t-s)^{p-1} s^{q-1} ds = B(p, q) t^{p+q-1} \right) \end{aligned}$$

▶ Kato ('84,MZ), Giga–Miyakawa ('85,ARMA)

スケール不変空間

Q. なぜスケール不変空間で解くことが重要か？

藤田-加藤の原理

▶ Fujita-Kato ('64 ARMA), Kato-Fujita ('62 Rend. Sem. Mat. Univ. Padova)

▶ cf. Cazenave-Weissler ('98, MZ)

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = -\mathbf{P}[(u \cdot \nabla)u], & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = \mathbf{P}u_0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^q} &\leq \|Pu_0\|_{L^q} + \left\| \nabla \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbf{P}[u \otimes u](s) ds \right\|_{L^q} \\ &\leq \|u_0\|_{L^q} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}} \|[u \otimes u](s)\|_{L^{\frac{q}{2}}} ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^q} + CT^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2q}} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^q}^2 \end{aligned}$$

$$q \neq n \implies u \in L^\infty(0, T; L^q(\mathbb{R}^n)), \quad \frac{2}{\infty} + \frac{n}{q} \neq 1 + 0 \quad (\text{global に解けない})$$

▶ $q > n$ のときは, T のべきが正幂で $T \rightarrow \infty$ で発散

▶ $q < n$ のときは T のべきが負幂で $T = 0$ で解が作れない. 即ち global 解は存在しない

スケール不変空間

Q. なぜスケール不変空間で解くことが重要か？

藤田-加藤の原理

▶ Fujita-Kato ('64 ARMA), Kato-Fujita ('62 Rend. Sem. Mat. Univ. Padova)

▶ cf. Cazenave-Weissler ('98, MZ)

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = -P[(u \cdot \nabla)u], & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = Pu_0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^q} &\leq \|Pu_0\|_{L^q} + \left\| \nabla \int_0^t e^{-(t-s)A} P[u \otimes u](s) ds \right\|_{L^q} \\ &\leq \|u_0\|_{L^q} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}} \|[u \otimes u](s)\|_{L^{\frac{q}{2}}} ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^q} + CT^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2q}} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^q}^2 \end{aligned}$$

$$q \neq n \implies u \in L^\infty(0, T; L^q(\mathbb{R}^n)), \quad \frac{2}{\infty} + \frac{n}{q} \neq 1 + 0 \quad (\text{global に解けない})$$

▶ $q > n$ のときは, T のべきが正幂で $T \rightarrow \infty$ で発散

▶ $q < n$ のときは T のべきが負幂で $T = 0$ で解が作れない. 即ち global 解は存在しない

• $q \neq n$ のとき, $\|u_0\|_{L^q} \leq \varepsilon_0$ に対し時間大域解 $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; L^q(\mathbb{R}^n))$ が存在すると仮定すると, スケール変換により, 任意の大きなデータに対して (NS) の時間大域解 $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; L^q(\mathbb{R}^n))$ が存在することになり齟齬が生じる.

▶ Kozono (private communication)

Navier–Stokes 方程式–準線形の場合

- 半線形 PDE: 非線形項に未知関数の最高階の偏導関数を含まない
- 準線形 PDE: 最高階の偏導関数について線形で最高階の偏導関数が未知関数を含む

Navier–Stokes 方程式–準線形の場合

- 半線形 PDE: 非線形項に未知関数の最高階の偏導関数を含まない
- 準線形 PDE: 最高階の偏導関数について線形で最高階の偏導関数が未知関数を含む

▶ (FNS) で自由境界を固定境界に変換すると, 半線形の Navier–Stokes 方程式が準線形となる.

$$\partial_t u + Au = F(u, \nabla u) D^2 u, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0.$$

$$u(t) = e^{-tA} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} [F(u, \nabla u) D^2 u](s) ds$$

Navier–Stokes 方程式–準線形の場合

- 半線形 PDE: 非線形項に未知関数の最高階の偏導関数を含まない
- 準線形 PDE: 最高階の偏導関数について線形で最高階の偏導関数が未知関数を含む

▶ (FNS) で自由境界を固定境界に変換すると, 半線形の Navier–Stokes 方程式が準線形となる.

$$\partial_t u + Au = F(u, \nabla u) D^2 u, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0.$$

$$u(t) = e^{-tA} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} [F(u, \nabla u) D^2 u](s) ds$$

L^p - L^q estimate $1 < p = q < \infty$

$$\|\nabla^\alpha e^{-tA} f\|_{L^q} \leq C_{n,p} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}} \|f\|_{L^p}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad f \in L^p_\sigma.$$

$$\|D^2 u(t)\|_{L^p} \leq C t^{-1} \|u_0\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{-1} \|[F(u, \nabla u) D^2 u](s)\|_{L^p} ds$$

Navier–Stokes 方程式–準線形の場合

- 半線形 PDE: 非線形項に未知関数の最高階の偏導関数を含まない
- 準線形 PDE: 最高階の偏導関数について線形で最高階の偏導関数が未知関数を含む

▶ (FNS) で自由境界を固定境界に変換すると、半線形の Navier–Stokes 方程式が準線形となる.

$$\partial_t u + Au = F(u, \nabla u) D^2 u, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0.$$

$$u(t) = e^{-tA} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} [F(u, \nabla u) D^2 u](s) ds$$

L^p - L^q estimate $1 < p = q < \infty$

$$\|\nabla^\alpha e^{-tA} f\|_{L^q} \leq C_{n,p} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}} \|f\|_{L^p}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad f \in L^p_\sigma.$$

$$\|D^2 u(t)\|_{L^p} \leq C t^{-1} \|u_0\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{-1} \|[F(u, \nabla u) D^2 u](s)\|_{L^p} ds$$

右辺第 2 項が t^{-1} の特異性を持ち可積分性が得られず積分が意味をなさない.

Navier–Stokes 方程式–準線形の場合

- 半線形 PDE: 非線形項に未知関数の最高階の偏導関数を含まない
- 準線形 PDE: 最高階の偏導関数について線形で最高階の偏導関数が未知関数を含む

▶ (FNS) で自由境界を固定境界に変換すると、半線形の Navier–Stokes 方程式が準線形となる。

$$\partial_t u + Au = F(u, \nabla u) D^2 u, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0.$$

$$u(t) = e^{-tA} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} [F(u, \nabla u) D^2 u](s) ds$$

L^p - L^q estimate $1 < p = q < \infty$

$$\|\nabla^\alpha e^{-tA} f\|_{L^q} \leq C_{n,p} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}} \|f\|_{L^p}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad f \in L^p_\sigma.$$

$$\|D^2 u(t)\|_{L^p} \leq C t^{-1} \|u_0\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{-1} \|[F(u, \nabla u) D^2 u](s)\|_{L^p} ds$$

右辺第 2 項が t^{-1} の特異性を持ち可積分性が得られず積分が意味をなさない。

⇒ 最大正則性

最大 L^p -正則性

X : Banach 空間, $I = (0, T)$, $0 < T \leq \infty$, $f : I \rightarrow X$.

$$(AC) \quad u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = 0.$$

最大 L^p -正則性

X : Banach 空間, $I = (0, T)$, $0 < T \leq \infty$, $f : I \rightarrow X$.

$$(AC) \quad u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = 0.$$

定義 (最大 L^p -正則性)

A : 定義域 $\mathcal{D}(A)$ が X で稠密な閉作用素. A または (AC) が最大 L^p -正則性をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall f \in L^p(I; X), \exists ! u \text{ sol to (AC) a.a. } t \in I \text{ s.t. } u', Au \in L^p(I; X)$

$$\|u'(t)\|_{L^p(I; X)} + \|Au\|_{L^p(I; X)} \leq C \|f\|_{L^p(I; X)}$$

$C > 0$ は u と f に独立な定数.

最大 L^p -正則性

X : Banach 空間, $I = (0, T)$, $0 < T \leq \infty$, $f : I \rightarrow X$.

$$(AC) \quad u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = 0.$$

定義 (最大 L^p -正則性)

A : 定義域 $\mathcal{D}(A)$ が X で稠密な閉作用素. A または (AC) が最大 L^p -正則性をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall f \in L^p(I; X), \exists ! u \text{ sol to (AC) a.a. } t \in I \text{ s.t. } u', Au \in L^p(I; X)$

$$\|u'(t)\|_{L^p(I; X)} + \|Au\|_{L^p(I; X)} \leq C\|f\|_{L^p(I; X)}$$

$C > 0$ は u と f に独立な定数.

- $u(0) = u_0$ に対しては

$$\|u'(t)\|_{L^p(I; X)} + \|Au\|_{L^p(I; X)} \leq C(\|u_0\|_{(X, \mathcal{D}(A))_{1-1/p, p}} + \|f\|_{L^p(I; X)}).$$

最大 L^p -正則性

X : Banach 空間, $I = (0, T)$, $0 < T \leq \infty$, $f : I \rightarrow X$.

$$(AC) \quad u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = 0.$$

定義 (最大 L^p -正則性)

A : 定義域 $\mathcal{D}(A)$ が X で稠密な閉作用素. A または (AC) が最大 L^p -正則性をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall f \in L^p(I; X), \exists ! u \text{ sol to (AC) a.a. } t \in I \text{ s.t. } u', Au \in L^p(I; X)$

$$\|u'(t)\|_{L^p(I; X)} + \|Au\|_{L^p(I; X)} \leq C \|f\|_{L^p(I; X)}$$

$C > 0$ は u と f に独立な定数.

- $u(0) = u_0$ に対しては

$$\|u'(t)\|_{L^p(I; X)} + \|Au\|_{L^p(I; X)} \leq C(\|u_0\|_{(X, \mathcal{D}(A))_{1-1/p, p}} + \|f\|_{L^p(I; X)}).$$

- 前ページの準線形問題では

$$\begin{aligned} \|\partial_t u\|_{L^p(I; X)} + \|Au\|_{L^p(I; X)} &\leq C \|F(u, \nabla u) D^2 u\|_{L^p(I; X)} \\ &\leq C \|F(u, \nabla u)\|_{L^\infty(I; Y)} \|D^2 u\|_{L^p(I; X)}. \end{aligned}$$

作用素値特異積分作用素

最大 L^p -正則性は $1 < p < \infty$ かつ **UMD Banach 空間 X** に対し 30-40 年間に理論が確立.

- ▶ Da Prato–Grisvard ('75), Dore–Venni ('87), Amann ('95), Kalton–Weis ('01), Weis ('01),
- ▶ Denk–Hieber–Prüss ('03, '07), Hytönen–van Neerven–Veraar–Weis ('23)

作用素値特異積分作用素

最大 L^p -正則性は $1 < p < \infty$ かつ **UMD Banach 空間** X に対し 30-40 年間に理論が確立.

▶ Da Prato–Grisvard ('75), Dore–Venni ('87), Amann ('95), Kalton–Weis ('01), Weis ('01),

▶ Denk–Hieber–Prüss ('03, '07), Hytönen–van Neerven–Veraar–Weis ('23)

定義 (\mathcal{R} -有界性)

X, Y : Banach 空間. $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ が \mathcal{R} -有界

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$\exists C > 0, \exists p \in [1, \infty)$ s.t. $\forall m \in \mathbb{N}, \forall T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}, \forall x_1, \dots, x_m \in X, \forall$ 独立対称な $\{-1, 1\}$ -値確率変数 r_j

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(t) T_j x_j \right\|_Y^p dt \leq \mathcal{R}(\mathcal{T}) \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(t) x_j \right\|_X^p dt$$

作用素値特異積分作用素

最大 L^p -正則性は $1 < p < \infty$ かつ **UMD Banach 空間 X** に対し 30-40 年間に理論が確立.

▶ Da Prato–Grisvard ('75), Dore–Venni ('87), Amann ('95), Kalton–Weis ('01), Weis ('01),

▶ Denk–Hieber–Prüss ('03, '07), Hytönen–van Neerven–Veraar–Weis ('23)

定義 (\mathcal{R} -有界性)

X, Y : Banach 空間. $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ が \mathcal{R} -有界

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$\exists C > 0, \exists p \in [1, \infty)$ s.t. $\forall m \in \mathbb{N}, \forall T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}, \forall x_1, \dots, x_m \in X, \forall$ 独立対称な $\{-1, 1\}$ -値確率変数 r_j

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(t) T_j x_j \right\|_Y^p dt \leq \mathcal{R}(\mathcal{T}) \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(t) x_j \right\|_X^p dt$$

定義 (UMD unconditionality of martingale differences)

Banach 空間 X は UMD $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ Hilbert 変換 H は $L^p(\mathbb{R}, X)$ で有界

$$Hf = \frac{1}{\pi} PV\left(\frac{1}{t}\right) * f = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|s| \geq \varepsilon} f(t-s) \frac{ds}{s}$$

作用素値特異積分作用素

最大 L^p -正則性は $1 < p < \infty$ かつ **UMD Banach 空間 X** に対し 30-40 年間に理論が確立.

▶ Da Prato–Grisvard ('75), Dore–Venni ('87), Amann ('95), Kalton–Weis ('01), Weis ('01),

▶ Denk–Hieber–Prüss ('03, '07), Hytönen–van Neerven–Veraar–Weis ('23)

定義 (\mathcal{R} -有界性)

X, Y : Banach 空間. $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ が \mathcal{R} -有界

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$\exists C > 0, \exists p \in [1, \infty)$ s.t. $\forall m \in \mathbb{N}, \forall T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}, \forall x_1, \dots, x_m \in X, \forall$ 独立対称な $\{-1, 1\}$ -値確率変数 r_j

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(t) T_j x_j \right\|_Y^p dt \leq \mathcal{R}(\mathcal{T}) \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(t) x_j \right\|_X^p dt$$

定義 (UMD unconditionality of martingale differences)

Banach 空間 X は UMD $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ Hilbert 変換 H は $L^p(\mathbb{R}, X)$ で有界

$$Hf = \frac{1}{\pi} PV\left(\frac{1}{t}\right) * f = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|s| \geq \varepsilon} f(t-s) \frac{ds}{s}$$

- UMD \Rightarrow 回帰的. $L^q, H^{s,q}$ は $1 < q < \infty$ に対して UMD, $q = 1, \infty$ では UMD ではない.

作用素値 Fourier-multiplier の定理

$$T_M f = \mathcal{F}^{-1}[M(\cdot)\mathcal{F}f(\cdot)], \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$$

作用素値 Fourier-multiplier の定理

$$T_M f = \mathcal{F}^{-1}[M(\cdot)\mathcal{F}f(\cdot)], \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$$

Weis ('01, MA)

X, Y : UMD Banach 空間, $1 < p < \infty$, $M \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathcal{B}(X, Y))$,

$$\mathcal{R}(\{M(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}) = R_0, \quad \mathcal{R}(\{\tau M'(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}) = R_1$$

$\implies T_M : L^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, Y)$, $\exists C = C(p, X, Y) > 0$ s.t.

$$\|T_M f\|_{L^p(\mathbb{R}, Y)} \leq C(R_0 + R_1)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}, X)}$$

作用素値 Fourier-multiplier の定理

$$T_M f = \mathcal{F}^{-1}[M(\cdot)\mathcal{F}f(\cdot)], \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$$

Weis ('01, MA)

X, Y : UMD Banach 空間, $1 < p < \infty$, $M \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathcal{B}(X, Y))$,

$$\mathcal{R}(\{M(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}) = R_0, \quad \mathcal{R}(\{\tau M'(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}) = R_1$$

$\implies T_M : L^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, Y)$, $\exists C = C(p, X, Y) > 0$ s.t.

$$\|T_M f\|_{L^p(\mathbb{R}, Y)} \leq C(R_0 + R_1)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}, X)}$$

- $M(\tau) = A(i\tau + A)^{-1}, \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に適用して $\|Au\|_{L^p(\mathbb{R}; X)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}; X)}$ を得る.
- $\{M(\tau)\}$ の \mathcal{R} -有界性は必要条件.
- X の UMD 性は $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$ に対する無条件収束 $\sum_{j \in \mathbb{Z}} P_j f$ のために用いられる.

作用素値 Fourier-multiplier の定理

$$T_M f = \mathcal{F}^{-1}[M(\cdot)\mathcal{F}f(\cdot)], \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$$

Weis ('01, MA)

X, Y : UMD Banach 空間, $1 < p < \infty$, $M \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathcal{B}(X, Y))$,

$$\mathcal{R}(\{M(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}) = R_0, \quad \mathcal{R}(\{\tau M'(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}) = R_1$$

$\implies T_M : L^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, Y)$, $\exists C = C(p, X, Y) > 0$ s.t.

$$\|T_M f\|_{L^p(\mathbb{R}, Y)} \leq C(R_0 + R_1)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}, X)}$$

- $M(\tau) = A(i\tau + A)^{-1}, \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に適用して $\|Au\|_{L^p(\mathbb{R}; X)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}; X)}$ を得る.
- $\{M(\tau)\}$ の \mathcal{R} -有界性は必要条件.
- X の UMD 性は $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$ に対する無条件収束 $\sum_{j \in \mathbb{Z}} P_j f$ のために用いられる.

Operator sum method (Dore-Venni ('87 MZ)), \mathcal{H}^∞ -calculus (Kalton-Weis ('01 MA)) : $1 < p < \infty$, UMD.

作用素値 Fourier-multiplier の定理

$$T_M f = \mathcal{F}^{-1}[M(\cdot)\mathcal{F}f(\cdot)], \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$$

Weis ('01, MA)

X, Y : UMD Banach 空間, $1 < p < \infty$, $M \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathcal{B}(X, Y))$,

$$\mathcal{R}(\{M(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}) = R_0, \quad \mathcal{R}(\{\tau M'(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}) = R_1$$

$\implies T_M : L^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, Y)$, $\exists C = C(p, X, Y) > 0$ s.t.

$$\|T_M f\|_{L^p(\mathbb{R}, Y)} \leq C(R_0 + R_1)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}, X)}$$

- $M(\tau) = A(i\tau + A)^{-1}, \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に適用して $\|Au\|_{L^p(\mathbb{R}; X)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}; X)}$ を得る.
- $\{M(\tau)\}$ の \mathcal{R} -有界性は必要条件.
- X の UMD 性は $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$ に対する無条件収束 $\sum_{j \in \mathbb{Z}} P_j f$ のために用いられる.

Operator sum method (Dore-Venni ('87 MZ)), \mathcal{H}^∞ -calculus (Kalton-Weis ('01 MA)) : $1 < p < \infty$, UMD.

Da Prato-Grisvard ('75 JMPA)

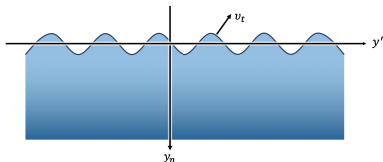
$1 \leq p \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, X : Banach 空間, A : X 上解析半群の生成作用素,
 $I = (0, T)$, $0 < T < \infty$ または $T = \infty$ かつ $0 \in \rho(A)$

\implies

$\forall f \in L^p(I; (X, \mathcal{D}(A))_{\theta, p})$, $\exists! u \in D(A)$ sol to (AC) s.t. u' , $Au \in L^p(I; (X, \mathcal{D}(A))_{\theta, p})$

非圧縮性 Navier–Stokes 方程式の自由境界問題

$$\Omega(t) \equiv \left\{ (t, y', y_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; y_n > \bar{\eta}(t, y') \right\} \subset \mathbb{R}^n \quad (n \geq 2)$$



$$(FNS) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} - \operatorname{div} T(\bar{u}, \bar{p}) = 0, & t > 0, y \in \Omega(t), \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0, & t > 0, y \in \Omega(t), \\ T(\bar{u}, \bar{p}) \nu_t = 0, & t > 0, y \in \partial\Omega(t), \\ \frac{\partial_t \bar{\eta}}{\sqrt{1 + |\nabla' \bar{\eta}|^2}} = -\bar{u} \cdot \nu_t, & t > 0, y \in \partial\Omega(t), \\ \bar{u}(t, y)|_{t=0} = u_0(y), & y \in \Omega(0), \\ \bar{\eta}(t, y')|_{t=0} = \eta_0(y') \equiv 0, & y' \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{array} \right.$$

$$T(\bar{u}, \bar{p}) = (\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T) - \bar{p}I, \quad \nu_t = \frac{(\nabla' \bar{\eta}, -1)}{\sqrt{1 + |\nabla' \bar{\eta}|^2}}.$$

(FNS) の先行研究

- 液滴問題 (bounded domain)

Solonnikov ('77, $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}$, '88, $W_p^{2,1}$), Denisova–Solonnikov ('91, '95, $W_2^{\ell, \ell/2}$),
Mucha–Zajączkowski ('00 $W_p^{2,1}$), Padula–Solonnikov ('02, '10, $W_2^{\ell, \ell/2}$),
Shibata–SS. ('07, '08, $W_{p,r}^{2,1}$), Köhne–Prüss–Wilke ('13, $W_p^{2,1}$)

- 外部, 一般領域

Shibata ('16, '20, $W_{p,r}^{2,1}$)



[Photo by SS]

- 海洋問題 (底あり)

Beale ('80, '84, $H_2^{\ell, \ell/2}$), Beale–Nishida ('85, $H_2^{\ell, \ell/2}$), Allain ('87 $H_2^{\ell, \ell/2}$),
Tani–Tanaka ('95, $W_2^{\ell, \ell/2}$), Tani ('96, $W_2^{\ell, \ell/2}$), Sylvester ('90, $H_2^{\ell, \ell/2}$),
Abels ('05, $W_p^{2,1}$), Guo–Tice ('13, $H_2^{\ell, \ell/2}$), Saito ('18, $W_{p,r}^{2,1}$)

- 海洋問題 (底なし)

Prüss–Simonett ('10, '16, $W_p^{2,1}$), SS ('11, $W_{p,r}^{2,1}$), Saito–Shibata ('24, $W_{p,r}^{2,1}$)

$$W_{p,r}^{2,1} = L^r(I; W^{2,p}) \cap W^{1,r}(I; L^p)$$

(FNS) の先行研究

スケール不変空間

$$u \in L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s,p}) \cap \dot{W}^{1,r}(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s-2,p}), \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 1 + s$$

(FNS) の先行研究

$$W_{p,r}^{2,1} = L^r(I; W^{2,p}) \cap W^{1,r}(I; L^p), \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 3$$

$$2 < r < \infty (B_{p,r}^{2-2/r} \subset W_p^1), \quad n < p < \infty (W^{1,p} \subset L^\infty)$$

(FNS) の先行研究

スケール不変空間

$$u \in L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s,p}) \cap \dot{W}^{1,r}(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s-2,p}), \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 1 + s$$

(FNS) の先行研究

$$W_{p,r}^{2,1} = L^r(I; W^{2,p}) \cap W^{1,r}(I; L^p), \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 3$$
$$2 < r < \infty (B_{p,r}^{2-2/r} \subset W_p^1), \quad n < p < \infty (W^{1,p} \subset L^\infty)$$

自由境界問題はスケール不変空間では解かれていなかった。

(FNS) の先行研究

スケール不変空間

$$u \in L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s,p}) \cap \dot{W}^{1,r}(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s-2,p}), \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 1 + s$$

(FNS) の先行研究

$$W_{p,r}^{2,1} = L^r(I; W^{2,p}) \cap W^{1,r}(I; L^p), \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 3$$
$$2 < r < \infty (B_{p,r}^{2-2/r} \subset W_p^1), \quad n < p < \infty (W^{1,p} \subset L^\infty)$$

自由境界問題はスケール不変空間では解かれていなかった。

目的: スケール不変空間での (FNS) の適切性

$$u \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}) \cap L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}) \cap \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}})$$

$$(\dot{B}_{p,1}^s \subset \dot{H}^{s,p}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq p \leq \infty)$$

Lagrange 変換

(Lag)
$$\frac{dy}{dt} = \bar{u}(t, y), \quad t > 0, \quad y|_{t=0} = x.$$

Euler 座標: $y \in \Omega(t)$ \iff Lagrange 座標: $x \in \Omega(0)$

$$y(t) = x + \int_0^t \bar{u}(s, y(s, x)) ds$$

Lagrange 変換

(Lag)
$$\frac{dy}{dt} = \bar{u}(t, y), \quad t > 0, \quad y|_{t=0} = x.$$

Euler 座標: $y \in \Omega(t)$ \iff Lagrange 座標: $x \in \Omega(0)$

$$y(t) = x + \int_0^t \bar{u}(s, y(s, x)) ds$$

$$u(t, x) := \bar{u}(t, y(t)),$$

$$p(t, x) := \bar{p}(t, y(t)),$$

$$\eta(t, x) := \bar{\eta}(t, y(t)').$$

Lagrange 変換

$$(Lag) \quad \frac{dy}{dt} = \bar{u}(t, y), \quad t > 0, \quad y|_{t=0} = x.$$

Euler 座標: $y \in \Omega(t)$ \iff Lagrange 座標: $x \in \Omega(0)$

$$y(t) = x + \int_0^t \bar{u}(s, y(s, x)) ds$$

$$u(t, x) := \bar{u}(t, y(t)),$$

$$p(t, x) := \bar{p}(t, y(t)),$$

$$\eta(t, x) := \bar{\eta}(t, y(t)').$$

$$\text{運動学の境界条件: } \frac{\partial_t \bar{\eta}}{\sqrt{1+|\nabla' \bar{\eta}|^2}} = -\bar{u} \cdot \nu_t = -\bar{u} \cdot \frac{(\nabla' \bar{\eta}', -1)^\top}{\sqrt{1+|\nabla' \bar{\eta}|^2}},$$

$$\partial_t \eta(t, x) = \partial_t \bar{\eta}(t, y') + \bar{u}' \cdot \nabla' \bar{\eta}(t, y') = \bar{u}_n(t, y) = u_n(t, x), \quad t > 0, \quad x_n \in \partial\Omega(0) = \partial\mathbb{R}_+^n,$$

$$0 < y_n - \bar{\eta}(t, y') = x_n + \int_0^t \bar{u}_n(s, y) dy - \int_0^t \bar{u}_n(s, y) dy = x_n.$$

$\Omega(t)$ は $\Omega(0) = \mathbb{R}_+^n$ に変換される.

Jacobi 行列

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = [J(Du)]_{i,j} = \delta_{ij} + \int_0^t \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(s, x) ds,$$

$$\frac{dx}{dy} = (J(Du)^{-1})^\top, \quad \nabla_y \bar{u} = (J(Du)^{-1})^\top \nabla_x u.$$

Jacobi 行列

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = [J(Du)]_{i,j} = \delta_{ij} + \int_0^t \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(s, x) ds,$$

$$\frac{dx}{dy} = (J(Du)^{-1})^\top, \quad \nabla_y \bar{u} = (J(Du)^{-1})^\top \nabla_x u.$$

余因子展開より

$$\frac{d}{dt} |J(Du)(t)| = |J(Du)(t)| \operatorname{div} \bar{u} = 0 \quad t > 0, \quad |J(Du)(0)| = 1.$$

Jacobi 行列

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = [J(Du)]_{i,j} = \delta_{ij} + \int_0^t \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(s, x) ds,$$

$$\frac{dx}{dy} = (J(Du)^{-1})^\top, \quad \nabla_y \bar{u} = (J(Du)^{-1})^\top \nabla_x u.$$

余因子展開より

$$\frac{d}{dt} |J(Du)(t)| = |J(Du)(t)| \operatorname{div} \bar{u} = 0 \quad t > 0, \quad |J(Du)(0)| = 1.$$

$$\det J(Du) = |J(Du)(t)| = 1$$

Jacobi 行列

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = [J(Du)]_{i,j} = \delta_{ij} + \int_0^t \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(s, x) ds,$$

$$\frac{dx}{dy} = (J(Du)^{-1})^\top, \quad \nabla_y \bar{u} = (J(Du)^{-1})^\top \nabla_x u.$$

余因子展開より

$$\frac{d}{dt} |J(Du)(t)| = |J(Du)(t)| \operatorname{div} \bar{u} = 0 \quad t > 0, \quad |J(Du)(0)| = 1.$$

$$\det J(Du) = |J(Du)(t)| = 1$$

$$(J(Du)^{-1})^\top = \operatorname{cof} J(Du) =: I + \Pi^{n-1} \left(\int_0^t Du ds \right)$$

$$J(Du) = \begin{pmatrix} 1 + \int_0^t \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(s) ds & \int_0^t \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(s) ds & \int_0^t \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(s) ds \\ \int_0^t \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(s) ds & 1 + \int_0^t \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(s) ds & \int_0^t \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(s) ds \\ \int_0^t \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(s) ds & \int_0^t \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(s) ds & 1 + \int_0^t \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(s) ds \end{pmatrix}, \quad n = 3.$$

Lagrange 変換後の問題

$$(TNS) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p = F_u(u) + F_p(u, p), & t > 0, x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \operatorname{div} v = G_{\operatorname{div}}(u), & t > 0, x \in \mathbb{R}_+^n, \\ T(u, p)\nu_n = H_u(u) + H_p(u, p), & t > 0, x \in \partial\mathbb{R}_+^n, \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}_+^n, \end{cases}$$

$$\nu_n = (0, \dots, 0, -1)^\top,$$

$$F_u(u) \equiv \operatorname{div} \left(J(Du)^{-1} (J(Du)^{-1})^\top \nabla u - \nabla u \right) = \Pi_u^{2n-2} \left(\int_0^t Du \, ds \right) D^2 u,$$

$$F_p(u, p) \equiv - (J(Du)^{-1} - I)^\top \nabla p = \Pi_p^{n-1} \left(\int_0^t Du \, ds \right) \nabla p,$$

$$\begin{aligned} G_{\operatorname{div}}(u) &\equiv - \operatorname{tr} \left((J(Du)^{-1} - I)^\top \nabla u \right) = \operatorname{tr} \left(\Pi_{\operatorname{div}}^{n-1} \left(\int_0^t Du \, ds \right) Du \right) \\ &= \operatorname{div} \left(\Pi_{\operatorname{div}}^{n-1} \left(\int_0^t Du \, ds \right) u \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_u(u) &\equiv - \left((J(Du)^{-1})^\top \nabla u + (\nabla u)^\top J(Du)^{-1} \right) (J(Du)^{-1} - I)^\top \nu_n, \\ &\quad - \left((J(Du)^{-1} - I)^\top \nabla u + (\nabla u)^\top (J(Du)^{-1} - I) \right) \nu_n \\ &= \Pi_{bu}^{2n-2} \left(\int_0^t Du \, ds \right) Du \nu_n, \end{aligned}$$

$$H_p(u, p) \equiv pI (J(Du)^{-1} - I)^\top \nu_n = \Pi_{bp}^{n-1} \left(\int_0^t Du \, ds \right) p \nu_n.$$

斉次 Besov 空間 と 斉次 Lizorkin–Triebel 空間

$s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, \sigma < \infty.$

$\{\phi_j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$: Littlewood-Paley 2 進分解 for $x \in \mathbb{R}^n,$

$$\hat{\phi}(\xi) \geq 0, \text{ supp } \hat{\phi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{-1} < |\xi| < 2\}, \hat{\phi}_j(\xi) = \hat{\phi}(2^{-j}\xi), \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}_j(\xi) = 1(\xi \neq 0).$$

斉次 Besov 空間 と 斉次 Lizorkin–Triebel 空間

$s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, \sigma < \infty.$

$\{\phi_j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$: Littlewood-Paley 2 進分解 for $x \in \mathbb{R}^n,$

$$\hat{\phi}(\xi) \geq 0, \text{ supp } \hat{\phi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{-1} < |\xi| < 2\}, \hat{\phi}_j(\xi) = \hat{\phi}(2^{-j}\xi), \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}_j(\xi) = 1(\xi \neq 0).$$
$$\|\tilde{f}\|_{\dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)} \equiv \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{s\sigma j} \|\phi_j * \tilde{f}\|_p^\sigma \right)^{1/\sigma},$$

斉次 Besov 空間 と 斉次 Lizorkin–Triebel 空間

$s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, \sigma < \infty.$

$\{\phi_j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$: Littlewood-Paley 2 進分解 for $x \in \mathbb{R}^n,$

$\hat{\phi}(\xi) \geq 0, \text{supp } \hat{\phi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{-1} < |\xi| < 2\}, \hat{\phi}_j(\xi) = \hat{\phi}(2^{-j}\xi), \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}_j(\xi) = 1(\xi \neq 0).$

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)} \equiv \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{s\sigma j} \|\phi_j * f\|_p^\sigma \right)^{1/\sigma},$$

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}_+^n)} \equiv \inf \left\{ \begin{array}{l} \| \tilde{f} \|_{\dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)} < \infty; \\ \tilde{f} = \begin{cases} f(x', x_n) & (x_n > 0) \\ \text{a proper extension} & (x_n \leq 0) \end{cases}, \\ \tilde{f} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j * \tilde{f} \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \end{array} \right\}.$$

齊次 Besov 空間 と 齊次 Lizorkin–Triebel 空間

$s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, \sigma < \infty.$

$\{\phi_j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$: Littlewood-Paley 2 進分解 for $x \in \mathbb{R}^n,$

$\hat{\phi}(\xi) \geq 0, \text{supp } \hat{\phi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{-1} < |\xi| < 2\}, \hat{\phi}_j(\xi) = \hat{\phi}(2^{-j}\xi), \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}_j(\xi) = 1(\xi \neq 0).$

$$\|\tilde{f}\|_{\dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)} \equiv \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{s\sigma j} \|\phi_j * \tilde{f}\|_p^\sigma \right)^{1/\sigma},$$

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}_+^n)} \equiv \inf \left\{ \begin{array}{l} \|\tilde{f}\|_{\dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)} < \infty; \\ \tilde{f} = \begin{cases} f(x', x_n) & (x_n > 0) \\ \text{a proper extension} & (x_n \leq 0) \end{cases}, \\ \tilde{f} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j * \tilde{f} \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \end{array} \right\}.$$

$1 \leq p < \infty, 1 \leq \sigma < \infty, -1 + 1/p < s < 1/p \Rightarrow$

$$\overline{\{f \in \dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n); \text{supp } f \subset \mathbb{R}_+^n\}}^{\dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)} \simeq \dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}_+^n)$$

▶ Triebel ('78), Danchin–Mucha ('09)

齊次 Besov 空間 と 齊次 Lizorkin–Triebel 空間

$s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, \sigma < \infty$.

$\{\phi_j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$: Littlewood-Paley 2 進分解 for $x \in \mathbb{R}^n$,

$\hat{\phi}(\xi) \geq 0, \text{supp } \hat{\phi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{-1} < |\xi| < 2\}, \hat{\phi}_j(\xi) = \hat{\phi}(2^{-j}\xi), \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}_j(\xi) = 1 (\xi \neq 0)$.

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}_+^n)} \equiv \inf \left\{ \begin{array}{l} \|\tilde{f}\|_{\dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)} < \infty; \\ \tilde{f} = \begin{cases} f(x', x_n) & (x_n > 0) \\ \text{a proper extension} & (x_n \leq 0) \end{cases}, \\ \tilde{f} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j * \tilde{f} \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \end{array} \right\}.$$

$1 \leq p < \infty, 1 \leq \sigma < \infty, -1 + 1/p < s < 1/p \Rightarrow$

$$\overline{\{f \in \dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n); \text{supp } f \subset \mathbb{R}_+^n\}}^{\dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)} \simeq \dot{B}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}_+^n)$$

▶ Triebel ('78), Danchin–Mucha ('09)

$\{\psi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$: Littlewood-Paley 2 進分解 for $t \in \mathbb{R}$,

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}; X)} \equiv \inf \left\{ \begin{array}{l} \|\tilde{f}\|_{\dot{F}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}; X)} < \infty; \\ \tilde{f} = \begin{cases} f(t, x) & (t > 0) \\ \text{a proper extension} & (t \leq 0) \end{cases}, \\ \tilde{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k * \tilde{f} \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \end{array} \right\}.$$

主結果: (TNS) の時間大域的適切性

定理 1 (Global well-posedness of (TNS) (Ogawa-SS ('24 MA, '24 JMSJ)))

$n \geq 2$, $n - 1 < p < 2n - 1$. $\exists \varepsilon_0 \in (0, 1)$ s.t.

$$\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \varepsilon_0,$$

$\operatorname{div} u_0 = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n)$.

$\implies \exists 1(u, p)$ sol to (TNS)

$$u \in C_b(\overline{\mathbb{R}_+}; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)),$$

$$\begin{aligned} & \|\partial_t u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))} + \|D^2 u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))} \\ & + \|\nabla p\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))} + \|p|_{x_n=0}\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq \varepsilon_1 \end{aligned}$$

$D^2 u = \partial_i \partial_j u$ ($i, j = 1, \dots, n$), $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(n, p, \varepsilon_0)$ は正定数.

主結果: (FNS) の時間大域的適切性

$\mathcal{E} : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}_+^n (= \Omega(0))$ by (Lag).

- Theorem 1 $\Rightarrow \nabla_x u \in L^1(0, T; \dot{B}_{p,1}^{n/p}(\mathbb{R}_+^n))$
- $\dot{B}_{p,1}^{n/p}(\mathbb{R}_+^n) \subset C_v(\mathbb{R}_+^n)$
- $(J(Du)^{-1})^T \nabla_x u$ は有界で, $\bar{u} = u \circ \mathcal{E}^{-1}$ は a.a.t に対し Lipschitz 連続

\mathcal{E} は微分同相写像となり (Lag) は一意可解.

主結果: (FNS) の時間大域的適切性

$\mathcal{E} : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}_+^n (= \Omega(0))$ by (Lag).

- Theorem 1 $\Rightarrow \nabla_x u \in L^1(0, T; \dot{B}_{p,1}^{n/p}(\mathbb{R}_+^n))$
- $\dot{B}_{p,1}^{n/p}(\mathbb{R}_+^n) \subset C_v(\mathbb{R}_+^n)$
- $(J(Du)^{-1})^T \nabla_x u$ は有界で, $\bar{u} = u \circ \mathcal{E}^{-1}$ は a.a.t に対し Lipschitz 連続

\mathcal{E} は微分同相写像となり (Lag) は一意可解.

系 2 (Global well-posedness of (FNS) (Ogawa-SS ('24 MA, '24 JMSJ)))

$n \geq 2, n-1 < p < 2n-1$. 定理 1 と同じ ε_0 に対し

$$\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \varepsilon_0,$$

$\operatorname{div} u_0 = 0|_{t=0}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n)$.

\Rightarrow 定理 1 における (TNS) の時間大域的一意解 (u, p) の引き戻し $\bar{u} = u \circ \mathcal{E}^{-1}$, $\bar{p} = p \circ \mathcal{E}^{-1}$ は (FNS) の時間大域的一意解.

主結果: (FNS) の時間大域的適切性

$\mathcal{E} : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}_+^n (= \Omega(0))$ by (Lag).

- Theorem 1 $\Rightarrow \nabla_x u \in L^1(0, T; \dot{B}_{p,1}^{n/p}(\mathbb{R}_+^n))$
- $\dot{B}_{p,1}^{n/p}(\mathbb{R}_+^n) \subset C_v(\mathbb{R}_+^n)$
- $(J(Du)^{-1})^T \nabla_x u$ は有界で, $\bar{u} = u \circ \mathcal{E}^{-1}$ は a.a.t に対し Lipschitz 連続

\mathcal{E} は微分同相写像となり (Lag) は一意可解.

系 2 (Global well-posedness of (FNS) (Ogawa–SS ('24 MA, '24 JMSJ)))

$n \geq 2, n-1 < p < 2n-1$. 定理 1 と同じ ε_0 に対し

$$\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \varepsilon_0,$$

$\operatorname{div} u_0 = 0|_{t=0}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n)$.

\Rightarrow 定理 1 における (TNS) の時間大域的一意解 (u, p) の引き戻し $\bar{u} = u \circ \mathcal{E}^{-1}, \bar{p} = p \circ \mathcal{E}^{-1}$ は (FNS) の時間大域的一意解.

▶ Danchin–Hieber–Mucha–Tolksdorf ('25, AMS Memoirs)

▶ Shibata–Watanabe ('25, JDE)



主結果について

- ① 目的であったスケール不変空間

$$u \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}) \cap L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}) \cap \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}})$$

での (FNS) の適切性を示せた.

主結果について

① 目的であったスケール不変空間

$$u \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}) \cap L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}) \cap \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}})$$

での (FNS) の適切性を示せた.

②

$$u \in L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s,p}) \cap \dot{W}^{1,r}(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s-2,p}), \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 1 + s$$

において $r = 1$ でなくてもスケール不変空間であるが、特に $r = 1$ とした理由は次による.

主結果について

- ① 目的であったスケール不変空間

$$u \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}) \cap L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}) \cap \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}})$$

での (FNS) の適切性を示せた.

②

$$u \in L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s,p}) \cap \dot{W}^{1,r}(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s-2,p}), \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 1 + s$$

において $r = 1$ でなくてもスケール不変空間であるが、特に $r = 1$ とした理由は次による.

- 系 2 で示されたように, (Lag) で定まる $\mathcal{E} : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}_+^n (= \Omega(0))$ が微分同相写像となり, Lagrange 変換前の (FNS) の時間大域的一意可解性が示されるため.

主結果について

① 目的であったスケール不変空間

$$u \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}) \cap L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}) \cap \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}})$$

での (FNS) の適切性を示せた.

②

$$u \in L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s,p}) \cap \dot{W}^{1,r}(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s-2,p}), \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 1 + s$$

において $r = 1$ でなくてもスケール不変空間であるが、特に $r = 1$ とした理由は次による.

- 系 2 で示されたように, (Lag) で定まる $\mathcal{E} : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}_+^n (= \Omega(0))$ が微分同相写像となり, Lagrange 変換前の (FNS) の時間大域的一意可解性が示されるため.
- 多重線形評価が必要で, $\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)$ が Banach 代数となるため.

主結果について

① 目的であったスケール不変空間

$$u \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}) \cap L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}) \cap \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}})$$

での (FNS) の適切性を示せた。

②

$$u \in L^r(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s,p}) \cap \dot{W}^{1,r}(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s-2,p}), \quad \frac{2}{r} + \frac{n}{p} = 1 + s$$

において $r = 1$ でなくてもスケール不変空間であるが、特に $r = 1$ とした理由は次による。

- 系 2 で示されたように, (Lag) で定まる $\mathcal{E} : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}_+^n (= \Omega(0))$ が微分同相写像となり, Lagrange 変換前の (FNS) の時間大域の一意可解性が示されるため。
- 多重線形評価が必要で, $\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)$ が Banach 代数となるため。
- 非線形項が

$$\sup_{t>0} \left\| \int_0^t Du \, ds \right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \sup_{t>0} \int_0^t \|D^2 u\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \, ds = \|D^2 u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))}$$

と評価されるが、時間について L^1 でなければ T の正冪が現れて大域解が作れなくなるため。

Stokes 方程式の初期値境界値問題に対する最大 L^1 -正則性

$$(S) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p = f, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \operatorname{div} u = g, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \\ (\nabla u + (\nabla u)^T - pI) \nu_n = h, & t > 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}_+^n. \end{cases}$$

Stokes 方程式の初期値境界値問題に対する最大 L^1 -正則性

$$(S) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p = f, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \operatorname{div} u = g, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \\ (\nabla u + (\nabla u)^T - pI) \nu_n = h, & t > 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}_+^n. \end{cases}$$

定理 3 (最大 L^1 -正則性 (Ogawa-SS ('24 MA, '24 JMSJ))

$1 < p < \infty$, $-1 + 1/p < s < 1/p$. $\exists 1(u, p)$ of (S)

$$u \in C_b(\overline{\mathbb{R}_+}; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n)), \quad \partial_t u, \Delta u, \nabla p \in L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n)),$$

$$p|_{x_n=0} \in \dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1})).$$

\iff

$$u_0 \in \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n), \quad f \in L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n)),$$

$$\operatorname{div} u_0 = g|_{t=0} \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n),$$

$$\nabla g \in L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n)), \quad \nabla(-\Delta)^{-1}g \in \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n)),$$

$$h \in \dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1})) \cap L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{s+1 - \frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})).$$

Stokes 方程式の初期値境界値問題に対する最大 L^1 -正則性

$$\begin{aligned}
 & \|\partial_t u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|D^2 u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \\
 & \quad + \|\nabla p\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|p|_{x_n=0}\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1}))} \\
 & \leq C \left(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \right. \\
 & \quad + \|\nabla g\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|\partial_t \nabla(-\Delta)^{-1} g\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \\
 & \quad \left. + \|h\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1}))} + \|h\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{s+1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \right).
 \end{aligned}$$

Stokes 方程式の初期値境界値問題に対する最大 L^1 -正則性

$$\begin{aligned}
 & \|\partial_t u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|D^2 u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \\
 & \quad + \|\nabla p\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|p|_{x_n=0}\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1}))} \\
 & \leq C \left(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \right. \\
 & \quad + \|\nabla g\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|\partial_t \nabla(-\Delta)^{-1} g\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \\
 & \quad \left. + \|h\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1}))} + \|h\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{s+1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \right).
 \end{aligned}$$

- ▶ Solonnikov ('87), Denk–Hieber–Prüss ('03,'07), Shibata–SS ('08), Danchin–Mucha ('09,'15), Prüss–Simonett ('10,'16).

Stokes 方程式の初期値境界値問題に対する最大 L^1 -正則性

$$\begin{aligned} & \|\partial_t u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|D^2 u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \\ & + \|\nabla p\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|p|_{x_n=0}\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1}))} \\ & \leq C \left(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \right. \\ & \quad + \|\nabla g\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|\partial_t \nabla(-\Delta)^{-1} g\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \\ & \quad \left. + \|h\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1}))} + \|h\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{s+1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \right). \end{aligned}$$

▶ Solonnikov ('87), Denk–Hieber–Prüss ('03,'07), Shibata–SS ('08), Danchin–Mucha ('09,'15), Prüss–Simonett ('10,'16).

- 最大 L^p -正則性 ($1 < p < \infty$) の一般理論で扱われていなかった最大 L^1 -正則性を初期値–境界値問題に対して導いた。特に、非斉次境界データ h の必要かつ十分条件を境界上で同定した。

Stokes 方程式の初期値境界値問題に対する最大 L^1 -正則性

$$\begin{aligned} & \|\partial_t u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|D^2 u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \\ & + \|\nabla p\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|p|_{x_n=0}\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1}))} \\ & \leq C \left(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \right. \\ & \quad + \|\nabla g\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|\partial_t \nabla(-\Delta)^{-1} g\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \\ & \quad \left. + \|h\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1}))} + \|h\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{s+1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \right). \end{aligned}$$

▶ Solonnikov ('87), Denk–Hieber–Prüss ('03,'07), Shibata–SS ('08), Danchin–Mucha ('09,'15), Prüss–Simonett ('10,'16).

- 最大 L^p -正則性 ($1 < p < \infty$) の一般理論で扱われていなかった最大 L^1 -正則性を初期値–境界値問題に対して導いた。特に、非斉次境界データ h の必要かつ十分条件を境界上で同定した。
- Banach 空間 X も UMD ではない $X = \dot{B}_{p,1}^s$ ($-1 + 1/p < s < 1/p$) を扱っている。

Stokes 方程式の初期値境界値問題に対する最大 L^1 -正則性

$$\begin{aligned} & \|\partial_t u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|D^2 u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \\ & + \|\nabla p\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|p|_{x_n=0}\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1}))} \\ & \leq C \left(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \right. \\ & \quad + \|\nabla g\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|\partial_t \nabla(-\Delta)^{-1} g\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \\ & \quad \left. + \|h\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1}))} + \|h\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{s+1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \right). \end{aligned}$$

▶ Solonnikov ('87), Denk–Hieber–Prüss ('03,'07), Shibata–SS ('08), Danchin–Mucha ('09,'15), Prüss–Simonett ('10,'16).

- 最大 L^p -正則性 ($1 < p < \infty$) の一般理論で扱われていなかった最大 L^1 -正則性を初期値–境界値問題に対して導いた。特に、非斉次境界データ h の必要かつ十分条件を境界上で同定した。
- Banach 空間 X も UMD ではない $X = \dot{B}_{p,1}^s$ ($-1 + 1/p < s < 1/p$) を扱っている。
- Da Prato–Grisvard 理論では $L^1(\mathbb{R}_+; (L_\sigma^p, \mathcal{D}(A_p))_{\theta,1})$ より負の正則性の空間を扱っていない。

Stokes 方程式の初期値問題に対する最大 L^1 -正則性

Step 1

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \tilde{g}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \phi|_{x_n=0} = 0, & t > 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$$

$\phi = (-\Delta)^{-1}\tilde{g} = G * \tilde{g}$. (G は Newton 核) $-\nabla \cdot \nabla\phi = -\operatorname{div} \nabla\phi = g$.

Stokes 方程式の初期値問題に対する最大 L^1 -正則性

Step 1

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \tilde{g}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \phi|_{x_n=0} = 0, & t > 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$$

$\phi = (-\Delta)^{-1}\tilde{g} = G * \tilde{g}$. (G は Newton 核) $-\nabla \cdot \nabla\phi = -\operatorname{div} \nabla\phi = g$.

Step 2 $\bar{f} = (f_1^o, \dots, f_{n-1}^o, f_n^e)^\top$, $\bar{u}_0 = (u_{0,1}^o, \dots, u_{0,n-1}^o, u_{0,n}^e)^\top$,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p = \bar{f}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \bar{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

▶ \bar{f} , \bar{u}_0 の拡張により $p|_{x_n=0} = 0$ となり, 圧力 p の境界評価が得やすくなる.

Stokes 方程式の初期値問題に対する最大 L^1 -正則性

Step 1

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \tilde{g}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \phi|_{x_n=0} = 0, & t > 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$$

$\phi = (-\Delta)^{-1}\tilde{g} = G * \tilde{g}$. (G は Newton 核) $-\nabla \cdot \nabla\phi = -\operatorname{div} \nabla\phi = g$.

Step 2 $\bar{f} = (f_1^o, \dots, f_{n-1}^o, f_n^e)^\top$, $\bar{u}_0 = (u_{0,1}^o, \dots, u_{0,n-1}^o, u_{0,n}^e)^\top$,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p = \bar{f}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \bar{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

▶ \bar{f} , \bar{u}_0 の拡張により $p|_{x_n=0} = 0$ となり, 圧力 p の境界評価が得やすくなる.

命題 4 (Ogawa-S ('16 MA))

$1 \leq p \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & \|\partial_t u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))} + \|\Delta u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))} + \|\nabla p\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))} \\ & \leq C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))}). \end{aligned}$$

初期値問題に対する最大 L^1 -正則性

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = \bar{f}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \bar{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\|\partial_t u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))} + \|\Delta u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))} \leq C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))}).$$

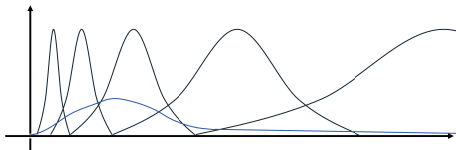
▶ Danchin ('01 Inv. Math.), Giga-Saal ('11 DCDS)

初期値問題に対する最大 L^1 -正則性

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = \bar{f}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \bar{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\|\partial_t u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))} + \|\Delta u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))} \leq C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))}).$$

► Danchin ('01 Inv. Math.), Giga-Saal ('11 DCDS)



$$\begin{aligned} c \sum_{m \leq \ell \leq k} \|\phi_\ell * u_0\|_p &\leq \sum_{m \leq \ell \leq k} \int_{[2^{-2\ell}, 2^{-2\ell+2})} \|\Delta e^{s\Delta} u_0\|_p ds \\ &\leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \min(2^{2(j-m)}, e^{-2^{2(j-k)-2}}) \|\phi_j * u_0\|_p. \end{aligned}$$

Stokes 方程式の境界値問題

Step 3 $f = g = u_0 \equiv 0$ の解表示.

▶ Shibata-SS ('03 DIE, '08 Crelle)

$$\begin{aligned} & \hat{u}_n(\tau, \xi', x_n) \\ &= \frac{|\xi'|}{(B - |\xi'|)D(\tau, \xi')} (2|\xi'|^2 - (B^2 + |\xi'|^2)) \begin{pmatrix} B|\xi'|^{-1}e^{-|\xi'|x_n} & e^{-Bx_n} \\ e^{-Bx_n} & e^{-|\xi'|x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i\xi'}{|\xi'|} \cdot \hat{h}' \\ \hat{h}_n \end{pmatrix} \\ &= \hat{G}(\tau, \xi', x_n) \hat{h}(\tau, \xi'), \end{aligned}$$

$$B(\tau, \xi') = \sqrt{i\tau + |\xi'|^2}, \quad \operatorname{Re} B(\tau, \xi') > 0.$$

Stokes 方程式の境界値問題

Step 3 $f = g = u_0 \equiv 0$ の解表示.

▶ Shibata-SS ('03 DIE, '08 Crelle)

$$\begin{aligned} & \hat{u}_n(\tau, \xi', x_n) \\ &= \frac{|\xi'|}{(B - |\xi'|)D(\tau, \xi')} (2|\xi'|^2 - (B^2 + |\xi'|^2)) \begin{pmatrix} B|\xi'|^{-1}e^{-|\xi'|x_n} & e^{-Bx_n} \\ e^{-Bx_n} & e^{-|\xi'|x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i\xi'}{|\xi'|} \cdot \hat{h}' \\ \hat{h}_n \end{pmatrix} \\ &= \hat{G}(\tau, \xi', x_n) \hat{h}(\tau, \xi'), \end{aligned}$$

$$B(\tau, \xi') = \sqrt{i\tau + |\xi'|^2}, \quad \operatorname{Re} B(\tau, \xi') > 0.$$

Lopatinski 行列式

$$\begin{aligned} D(\tau, \xi') &= B(\tau, \xi')^3 + |\xi'|B(\tau, \xi')^2 + 3|\xi'|^2B(\tau, \xi') - |\xi'|^3, \\ D(\lambda, \xi') &\neq 0 \quad \text{for } \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; -\frac{\pi}{2} - \epsilon < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} + \epsilon \right\}, \quad 0 < \epsilon < \pi/2. \end{aligned}$$

Stokes 方程式の境界値問題

Step 3 $f = g = u_0 \equiv 0$ の解表示.

▶ Shibata-SS ('03 DIE, '08 Crelle)

$$\begin{aligned} & \hat{u}_n(\tau, \xi', x_n) \\ &= \frac{|\xi'|}{(B - |\xi'|)D(\tau, \xi')} (2|\xi'|^2 - (B^2 + |\xi'|^2)) \begin{pmatrix} B|\xi'|^{-1}e^{-|\xi'|x_n} & e^{-Bx_n} \\ e^{-Bx_n} & e^{-|\xi'|x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i\xi'}{|\xi'|} \cdot \hat{h}' \\ \hat{h}_n \end{pmatrix} \\ &= \hat{G}(\tau, \xi', x_n) \hat{h}(\tau, \xi'), \end{aligned}$$

$$B(\tau, \xi') = \sqrt{i\tau + |\xi'|^2}, \quad \operatorname{Re} B(\tau, \xi') > 0.$$

Lopatinski 行列式

$$\begin{aligned} D(\tau, \xi') &= B(\tau, \xi')^3 + |\xi'|B(\tau, \xi')^2 + 3|\xi'|^2B(\tau, \xi') - |\xi'|^3, \\ D(\lambda, \xi') \neq 0 & \text{ for } \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; -\frac{\pi}{2} - \epsilon < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} + \epsilon \right\}, \quad 0 < \epsilon < \pi/2. \end{aligned}$$

$$\partial_t u_n(t, x', x_n) = \partial_t G(t, x', x_n) \underset{(t, x')}{*} h(t, x').$$

凱旋門型 Littlewood-Paley 分解

$\{\widehat{\Phi}_m(x)\}_{m \in \mathbb{Z}}$: Littlewood-Paley 2進分解 for $x = (x', x_n)$ (cf. O-S ('22 JEE))

$$\widehat{\zeta}_m(\xi_n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\xi_n| \leq 2^m, \\ \text{smooth}, & 2^m \leq |\xi_n| \leq 2^{m+1}, \\ 0, & 2^{m+1} \leq |\xi_n|, \end{cases} \quad \widehat{\zeta}_m(\xi_n) = \widehat{\zeta}_{m-1}(\xi_n) + \widehat{\phi}_m(\xi_n)$$

凱旋門型 Littlewood-Paley 分解

$\{\widehat{\Phi}_m(x)\}_{m \in \mathbb{Z}}$: Littlewood-Paley 2進分解 for $x = (x', x_n)$ (cf. O-S ('22 JEE))

$$\widehat{\zeta}_m(\xi_n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\xi_n| \leq 2^m, \\ \text{smooth}, & 2^m \leq |\xi_n| \leq 2^{m+1}, \\ 0, & 2^{m+1} \leq |\xi_n|, \end{cases} \quad \widehat{\zeta}_m(\xi_n) = \widehat{\zeta}_{m-1}(\xi_n) + \widehat{\phi}_m(\xi_n)$$

$$\widehat{\Phi}_m(\xi) \equiv \widehat{\phi}_m(\xi') \otimes \widehat{\zeta}_{m-1}(\xi_n) + \widehat{\zeta}_m(|\xi'|) \otimes \widehat{\phi}_m(\xi_n),$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{\Phi}_m(\xi) \equiv 1, \quad \xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

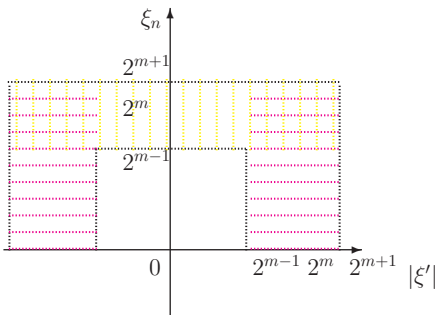
凱旋門型 Littlewood-Paley 分解

$\{\widehat{\Phi}_m(x)\}_{m \in \mathbb{Z}}$: Littlewood-Paley 2進分解 for $x = (x', x_n)$ (cf. O-S ('22 JEE))

$$\widehat{\zeta}_m(\xi_n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\xi_n| \leq 2^m, \\ \text{smooth}, & 2^m \leq |\xi_n| \leq 2^{m+1}, \\ 0, & 2^{m+1} \leq |\xi_n|, \end{cases} \quad \widehat{\zeta}_m(\xi_n) = \widehat{\zeta}_{m-1}(\xi_n) + \widehat{\phi}_m(\xi_n)$$

$$\widehat{\Phi}_m(\xi) \equiv \widehat{\phi}_m(\xi') \otimes \widehat{\zeta}_{m-1}(\xi_n) + \widehat{\zeta}_m(|\xi'|) \otimes \widehat{\phi}_m(\xi_n),$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{\Phi}_m(\xi) \equiv 1, \quad \xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$



境界データの分割

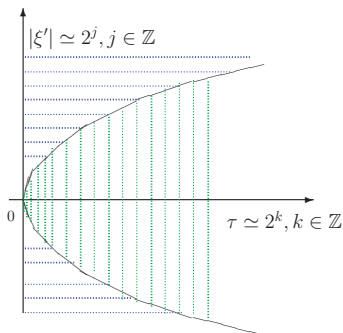
$$\left\| \|\partial_t u_n(t)\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L^1(\mathbb{R}_t)} = \left\| \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{sm} \|(\overline{\Phi}_m * \partial_t G * h)(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L^1(\mathbb{R}_t)} \leq M(t) + Y(t).$$

境界データの分割

$$\left\| \|\partial_t u_n(t)\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L^1(\mathbb{R}_t)} = \left\| \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{sm} \|(\overline{\Phi}_m * \partial_t G * h)(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L^1(\mathbb{R}_t)} \leq M(t) + Y(t).$$

境界データ h を時間優先領域 と空間優先領域 に分割する.

$$h(t, x') = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \geq 2^j} + \sum_{k < 2^j} \right) \psi_k(t) \underset{(t)}{*} \phi_j(x') \underset{(x')}{*} h(t, x').$$



概直交評価

$$\begin{aligned} \|\|\partial_t u_n(t)\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)}\|_{L^1(\mathbb{R}_t)} &= \left\| \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{sm} \|(\overline{\Phi}_m * \partial_t G * h)(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L^1(\mathbb{R}_t)} \leq M(t) + Y(t). \\ M(t) &= \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{sm} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \|\phi_m(x')\|_{(x')}^* \sum_{|j-m| \leq 1} \left(\sum_{k \geq 2m} + \sum_{k < 2m} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \partial_t G(t, x', x_n) \right\|_{(t, x')}^* \psi_k(t) \right\|_{(t, x')}^* \phi_j(x') \right\|_{(x')}^* h(t, x') \left\|_{L^p(\mathbb{R}_{x'}^{n-1})}^p dx_n \right\|_{L^1(\mathbb{R}_t)}^{1/p}. \end{aligned}$$

概直交評価

$$\begin{aligned} \|\|\partial_t u_n(t)\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)}\|_{L^1(\mathbb{R}_t)} &= \left\| \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{sm} \|(\overline{\Phi}_m * \partial_t G * h)(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L^1(\mathbb{R}_t)} \leq M(t) + Y(t). \\ M(t) &= \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{sm} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \|\phi_m(x')\|_{(x')}^* \sum_{|j-m| \leq 1} \left(\sum_{k \geq 2m} + \sum_{k < 2m} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \partial_t G(t, x', x_n) \right\|_{(t, x')}^* \psi_k(t) \right\|_{(t, x')}^* \phi_j(x') \right\|_{(x')}^* h(t, x') \left\|_{L^p(\mathbb{R}_{x'}^{n-1})}^p dx_n \right\|_{L^1(\mathbb{R}_t)}^{1/p}. \end{aligned}$$

補題 5 (Almost (psuedo) orthogonarity $\Psi_{[\partial_t u]}$)

$\forall t, x_n \in \mathbb{R}_+, \exists C_n > 0$ s.t.

$$\|(\partial_t G * \psi_k * \phi_m)(t, \cdot, x_n)\|_{L^{1'}_{x'}} \leq \begin{cases} C_n 2^{\frac{k}{2}} (1 + (2^{\frac{k}{2}} x_n)^{n+2}) e^{-2^{\frac{k}{2}-1} x_n} \frac{2^k}{\langle 2^k t \rangle^2}, & k \geq 2m, \\ C_n 2^m (1 + (2^m x_n)^{n+2}) e^{-2^{m-1} x_n} \frac{2^k}{\langle 2^k t \rangle^2}, & k < 2m. \end{cases}$$

概直交評価

$$\begin{aligned} \|\|\partial_t u_n(t)\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)}\|_{L^1(\mathbb{R}_t)} &= \left\| \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{sm} \|(\overline{\Phi}_m * \partial_t G * h)(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L^1(\mathbb{R}_t)} \leq M(t) + Y(t). \\ M(t) &= \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{sm} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \|\phi_m(x')\|_{(x')}^* \sum_{|j-m| \leq 1} \left(\sum_{k \geq 2m} + \sum_{k < 2m} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \partial_t G(t, x', x_n) \right\|_{(t, x')}^* \psi_k(t) \right\|_{(t, x')}^* \phi_j(x') \right\|_{(x')}^* h(t, x') \left\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p dx_n \right\|_{L^1(\mathbb{R}_t)}^{1/p}. \end{aligned}$$

補題 5 (Almost (psuedo) orthogonarity $\Psi_{[\partial_t u]}$)

$\forall t, x_n \in \mathbb{R}_+, \exists C_n > 0$ s.t.

$$\|(\partial_t G * \psi_k * \phi_m)(t, \cdot, x_n)\|_{L_{x'}^1} \leq \begin{cases} C_n 2^{\frac{k}{2}} (1 + (2^{\frac{k}{2}} x_n)^{n+2}) e^{-2^{\frac{k}{2}-1} x_n} \frac{2^k}{\langle 2^k t \rangle^2}, & k \geq 2m, \\ C_n 2^m (1 + (2^m x_n)^{n+2}) e^{-2^{m-1} x_n} \frac{2^k}{\langle 2^k t \rangle^2}, & k < 2m. \end{cases}$$

$$\|(\partial_t G * \psi_k * \phi_m)(t, \cdot, x_n) x_n\|_{L_{x'}^1} \leq C_n 2^{\frac{k}{2}} x_n (1 + (2^{\frac{k}{2}} x_n)^{n+2}) e^{-2^{\frac{k}{2}-1} x_n} \frac{2^k}{\langle 2^k t \rangle^2}$$

$$(x_n = 2^{-\ell}) \leq C_n 2^{-|\frac{k}{2}-\ell|} \frac{2^k}{\langle 2^k t \rangle^2}, \quad k \geq 2m.$$

▶ 命題 8 は一見概直交に見えないが, x_n をかけると $k/2$ と ℓ が交換される評価となっている。

概直交評価

$$\|(\partial_t G * \psi_k * \phi_m)(t, \cdot, x_n)\|_{L^1_{x'}} \leq C n 2^{\frac{k}{2}} (1 + (2^{\frac{k}{2}} x_n)^{n+2}) e^{-2^{\frac{k}{2}-1} x_n} \frac{2^k}{\langle 2^{kt} \rangle^2}, \quad k \geq 2m.$$

$$\begin{aligned} & M(t)^T (= \| \|\partial_t u_n(t)\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} \|_{L^1(\mathbb{R}_t)}) \\ & \leq C \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{sm} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left\{ \sum_{k \geq 2m} \int_{\mathbb{R}_+} \|\partial_t G_{k,m}(t-s, \cdot, x_n)\|_{L^1_{x'}} \|\widetilde{\psi}_k(s) *_{(s)} h_m(s, \cdot)\|_{L^p_{x'}} ds \right\}^p dx_n \right)^{1/p} \right\|_{L^1_t(\mathbb{R}_+)} \\ & \leq C \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{sm} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left\{ \sum_{k \geq 2m} (2^{\frac{k}{2}} e^{-2^{\frac{k}{2}-1} x_n}) \int_{\mathbb{R}} \frac{2^k}{2^{k(t-s)/2}} \|\psi_k *_{(s)} h_m(s, \cdot)\|_{L^p_{x'}} ds \right\}^p dx_n \right)^{1/p} \right\|_{L^1_t(\mathbb{R}_+)} \\ & = C \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{sm} \left\{ \sum_{k \geq 2m} 2^{\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{2^k}{2^{k(t-s)/2}} \|\psi_k *_{(s)} h_m(s, \cdot)\|_{L^p_{x'}} ds \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-p 2^{\frac{k}{2}-1} x_n} dx_n \right)^{1/p} \right\} \right\|_{L^1_t(\mathbb{R}_+)} \\ & \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p})k} \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{sm} \left\| \int_{\mathbb{R}} \frac{2^k}{2^{k(t-s)/2}} \|\psi_k *_{(s)} h_m(s, \cdot)\|_{L^p_{x'}} ds \right\|_{L^1_t(\mathbb{R}_+)} \\ & \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p})k} \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{sm} \left\| \|\psi_k *_{(s)} h_m(s, \cdot)\|_{L^p_{x'}} \right\|_{L^1_t(\mathbb{R}_+)} \\ & \leq C \|h\|_{\dot{F}_{1,1}^{1/2-1/2p}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_{x'}^{n-1}))}. \end{aligned}$$

トレース評価

命題 6 (Sharp boundary trace)

$1 < p < \infty$, $-1 + 1/p < s < 1/p$.

$$\begin{aligned} \sup_{x_n \in \mathbb{R}_+} & \left(\|f(\cdot, \cdot, x_n)\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1}))} + \|f(\cdot, \cdot, x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{s+1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \right) \\ & \leq C \left(\|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|\partial_t \nabla(-\Delta)^{-1} f\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \right). \end{aligned}$$

トレース評価

命題 6 (Sharp boundary trace)

$$1 < p < \infty, \quad -1 + 1/p < s < 1/p.$$

$$\begin{aligned} \sup_{x_n \in \mathbb{R}_+} & \left(\|f(\cdot, \cdot, x_n)\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1}))} + \|f(\cdot, \cdot, x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{s+1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \right) \\ & \leq C \left(\|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|\partial_t \nabla(-\Delta)^{-1} f\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \right). \end{aligned}$$

特に

$$\begin{aligned} & \|Du|_{x_n=0}\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^{n-1}))} + \|Du|_{x_n=0}\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{s+1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \\ & \leq C \left(\|\Delta u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} + \|\partial_t u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}_+^n))} \right). \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}, \quad j = 1, \dots, n$ は $\dot{B}_{p,\sigma}^s$ ($1 \leq p, \sigma \leq \infty, s \in \mathbb{R}$) 上の有界作用素.

双線形評価

命題 7 (bilinear estimates)

(1) $1 \leq p < \infty$

$$\|fg\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \|g\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)}.$$

(2) $1 \leq p < 2n$

$$\|fg\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \|g\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)}.$$

双線形評価

命題 7 (bilinear estimates)

(1) $1 \leq p < \infty$

$$\|fg\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \|g\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)}.$$

(2) $1 \leq p < 2n$

$$\|fg\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \|g\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)}.$$

$$\begin{aligned} \|F_p(u, p)\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))} &= \|\Pi_p^{n-1} \left(\int_0^t Du ds \right) \nabla p\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))} \\ &\leq C \|\nabla p\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))} \|\Pi_p^{n-1} \left(\int_0^t Du ds \right)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))} \\ &\leq C \|\nabla p\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))} \sup_{t>0} \left\| \int_0^t Du ds \right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} \|\Pi_p^{n-2} \left(\int_0^t Du ds \right)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))} \\ &\leq C \sum_{k=1}^{n-1} \|D^2 u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))}^k \|\nabla p\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))}. \end{aligned}$$

境界非線形評価

$$H_u(u) = \Pi_{bu}^{2n-2} \left(\int_0^t Du ds \right) Du \nu_n,$$

$$H_p(u, p) = \Pi_{bp}^{n-1} \left(\int_0^t Du ds \right) p \nu_n.$$

命題 6 (トレース評価) + 命題 8 (境界双線形評価) \Rightarrow

$$\begin{aligned} & \|H_u(u)\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \\ & \leq C \left(\|Du|_{x_n=0}\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} + \|Du|_{x_n=0}\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{\frac{n-1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \right) \\ & \quad \times \sum_{k=1}^{2n-2} \left(\|Du|_{x_n=0}\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} + \|Du|_{x_n=0}\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{\frac{n-1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \right)^k \\ & \leq C \sum_{k=2}^{2n-1} \left(\|\partial_t u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))} + \|D^2 u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))} \right)^k. \end{aligned}$$

Banach–Caccioppoli の不動点定理（縮小写像の原理）

$$X = \left\{ \begin{array}{l} u \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)) \cap \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)), \\ (\Delta u, \nabla p) \in L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)), \\ p|_{x_n=0} \in \dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})), \quad \|(u, p)\|_X \leq M \end{array} \right\},$$

$$\|(u, p)\|_X \equiv \|\partial_t u, D^2 u, \nabla p\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))} + \|p|_{x_n=0}\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))}.$$

Banach–Caccioppoli の不動点定理 (縮小写像の原理)

$$X = \left\{ \begin{array}{l} u \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)) \cap \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)), \\ (\Delta u, \nabla p) \in L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)), \\ p|_{x_n=0} \in \dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})), \quad \|(u, p)\|_X \leq M \end{array} \right\},$$

$$\|(u, p)\|_X \equiv \|\partial_t u, D^2 u, \nabla p\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n))} + \|p|_{x_n=0}\|_{\dot{F}_{1,1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))}.$$

Given $(v, q) \in X$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \Delta u + \nabla p = F_u(v) + F_p(v, q), & t > 0, x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \operatorname{div} v = G_{\operatorname{div}}(v), & t > 0, x \in \mathbb{R}_+^n, \\ T(u, p)\nu_n = H_u(v) + H_p(v, q), & t > 0, x \in \partial\mathbb{R}_+^n, \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}_+^n. \end{array} \right.$$

$\Phi : X \ni (v, q) \rightarrow (u, p) = \Phi[v, q] \in X$

$$\|\Phi[v, q]\|_X \leq C \left(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{k=1}^{2n-1} M^{k+1} \right).$$

ご清聴ありがとうございました.