強非周期タイルってなんだろう？

下記、数理研講究録
もご覧ください

秋山茂樹　（筑波大学数理物質系）

2026 日本数学会　市民講演会　at
東京理科大学

タイル張りの定義

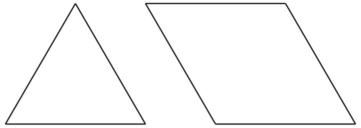
タイル　:　多角形

タイル集合 A:　有限個のタイル

G: 平行移動を含む平面の合同変換の集まり（等長変換群の部分群）

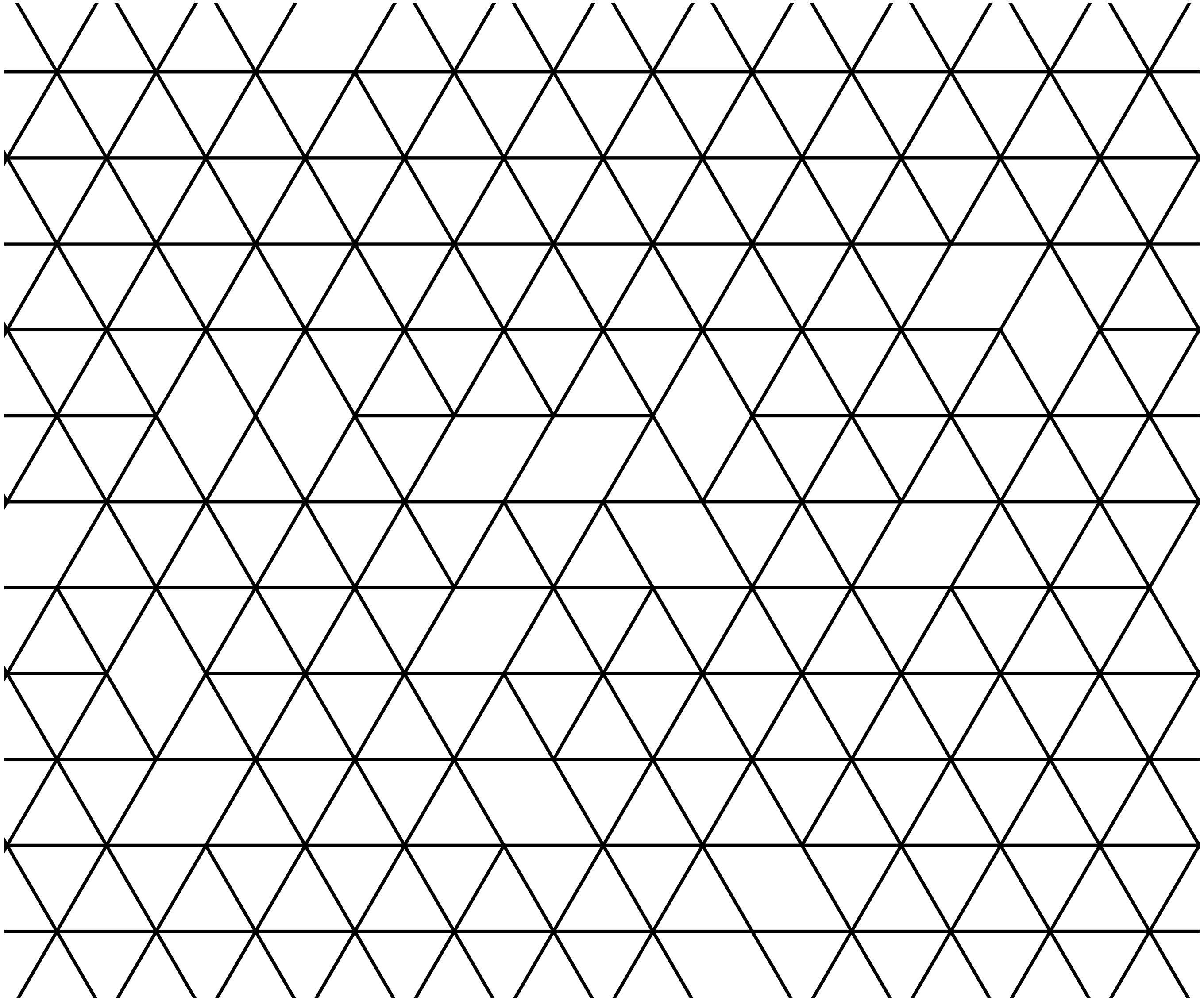
タイル張り T とはタイル集合A を G で動かし、平面を重なりなく隙間なく埋め尽くしたもの。

隣接タイルが多角形の辺を共有するとき**辺対辺**タイル張り

A＝{  }

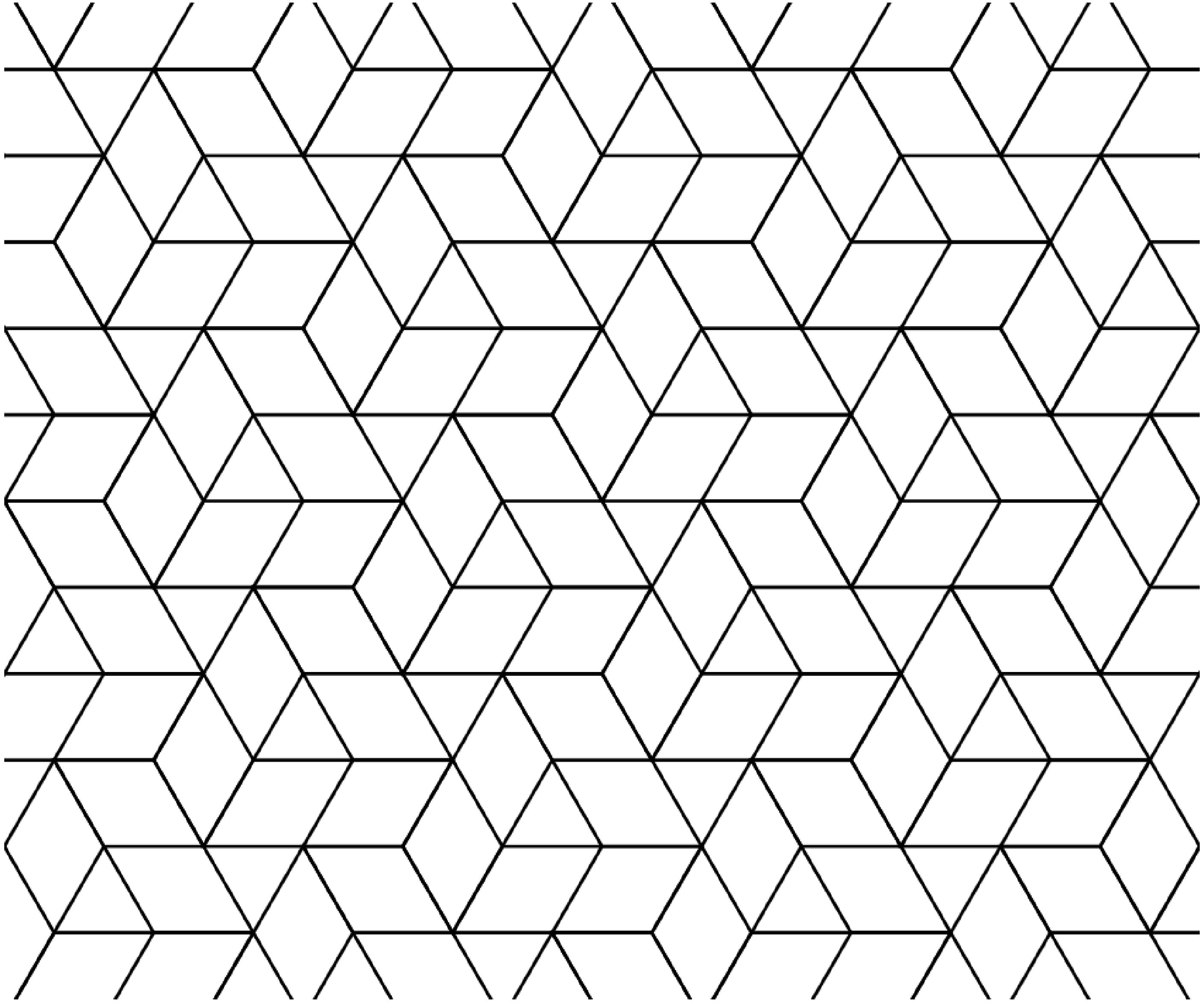
G＝＜平行移動、回転＞

周期は？



タイル張りの全体をベクトルτで平行移動して、全く同じタイル張りが現れたら、その平行移動を**周期**という。周期がτ=0しかないタイル張りを非周期的タイル張りという。

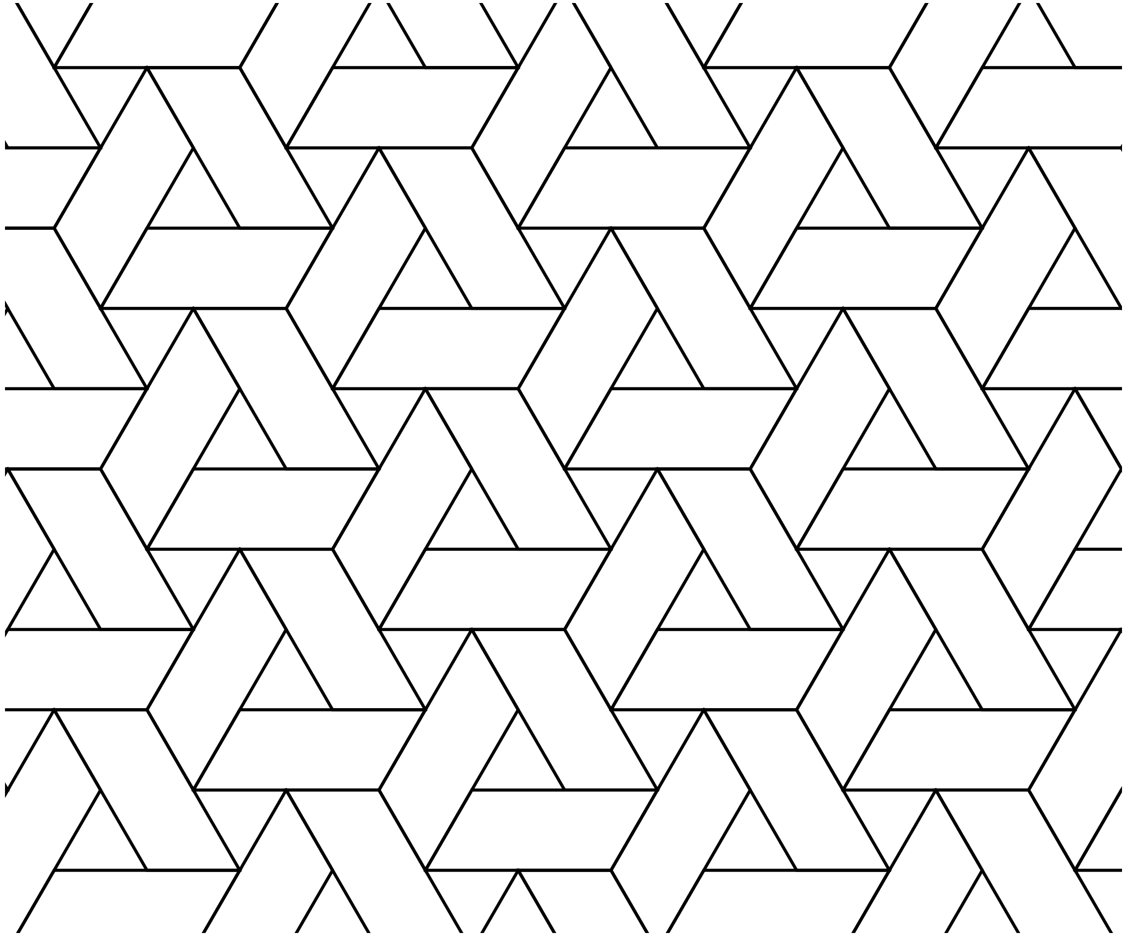
周期はありますか？



平行四辺形と正三角形

辺対辺でない例

平行四辺形の長辺を中点で分割すれば辺対辺



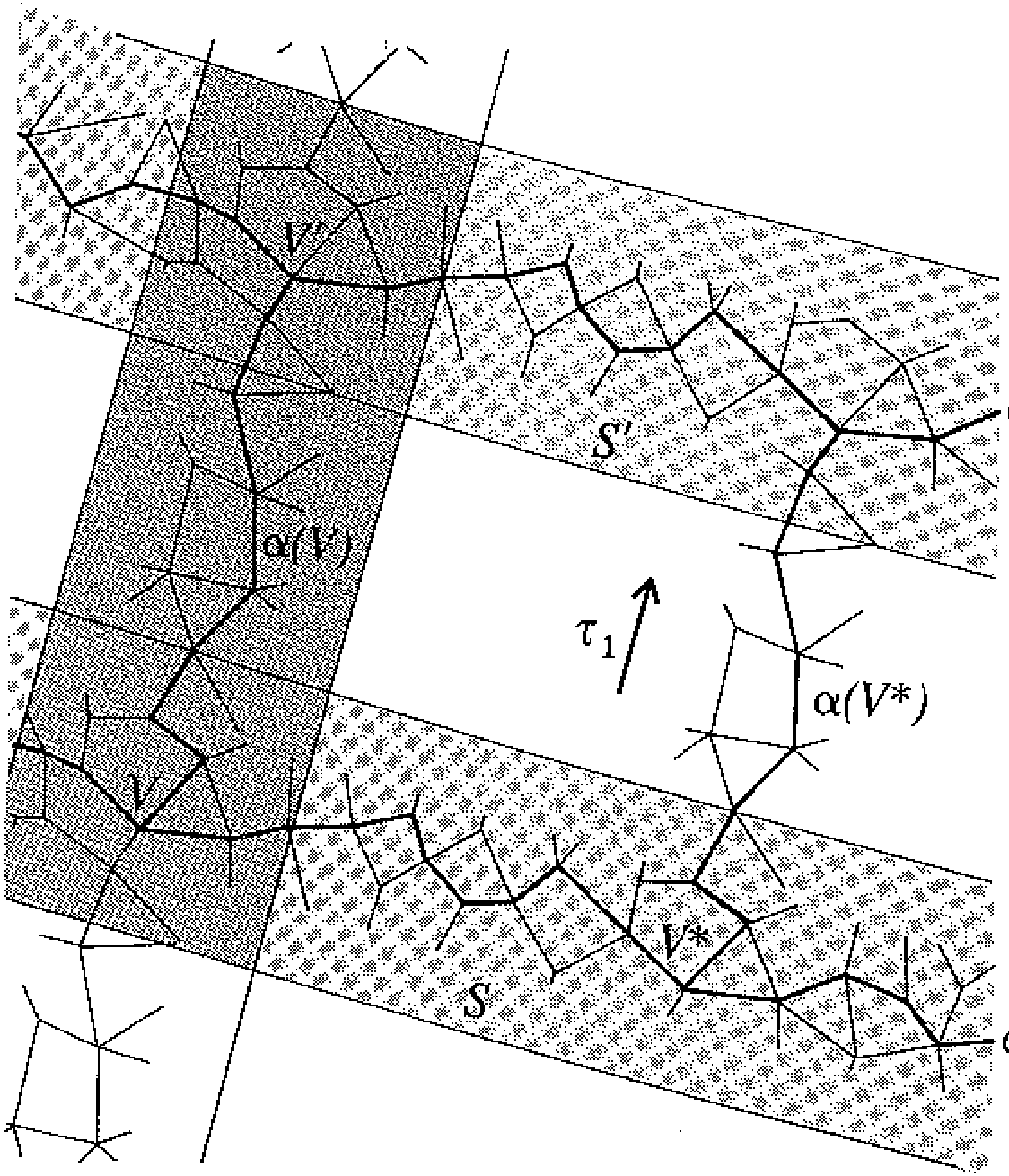
タイル張りの全体をベクトル τ で平行移動して、全く同じタイル張りが現れたら、その平行移動を**周期**という。周期が $\tau=0$ しかないタイル張りを非周期的タイル張りという。

タイル集合 A で周期 $\tau_1 \neq 0$ の辺対辺タイル張りが可能なら、A により一次独立な τ_1, τ_2 の周期をもつタイル張りも可能。

従ってタイル張りに周期があれば、平行四辺形パターン（基本領域）で埋め尽くすこともできる。

- タイル集合 A で周期 $\tau_1 \neq 0$ の辺対辺タイル張りが可能なら、A により一次独立な τ_1, τ_2 の周期をもつタイル張りも可能。

- Grünbaum　Shephard 図3.7.1



強非周期タイル集合の定義

1）タイル集合で平面がタイル張りできる。

2）出来上がったタイル張りはすべて非周期的である。

- 有名な強非周期タイル集合
  - ワンタイル (Berger, Robinson, Kari, Jeandel-Rao)
  - ペンローズタイル
  - アンマンタイル
  - テイラーソコラタイル
  - スミス帽
- 新しいアイデアの宝庫

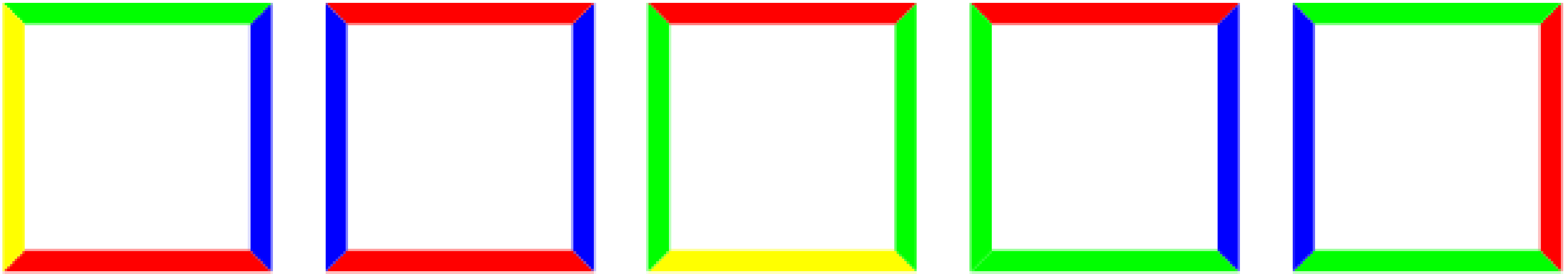
ワンタイル

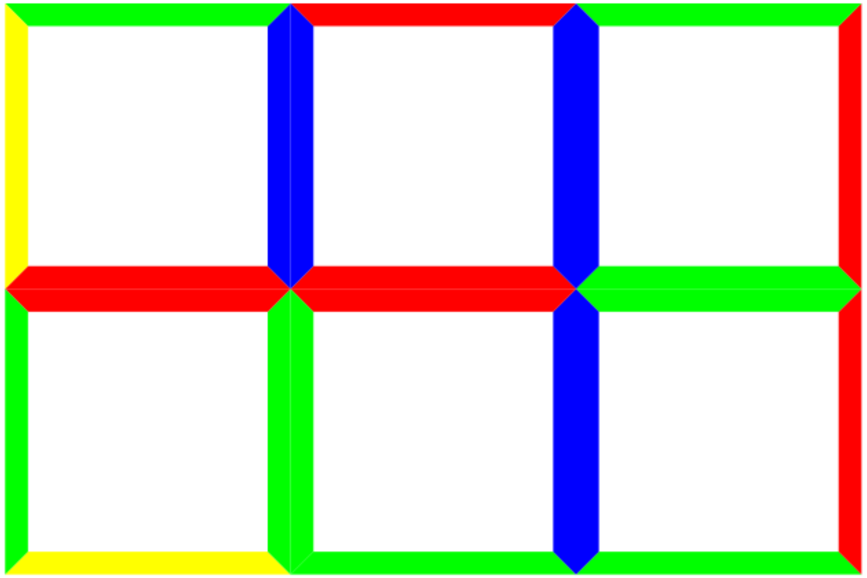
タイル集合 A は辺に色を塗った有限個の正方形

運動群は平行移動

二つのタイルは辺と辺がぴったり重なるように配置し、隣り合うタイルの辺は同色とする（マッチング規則）

ワンの予想（1961）。「このときタイル張りできるなら周期が二つあって、その長方形パターンの繰り返しとなる」。



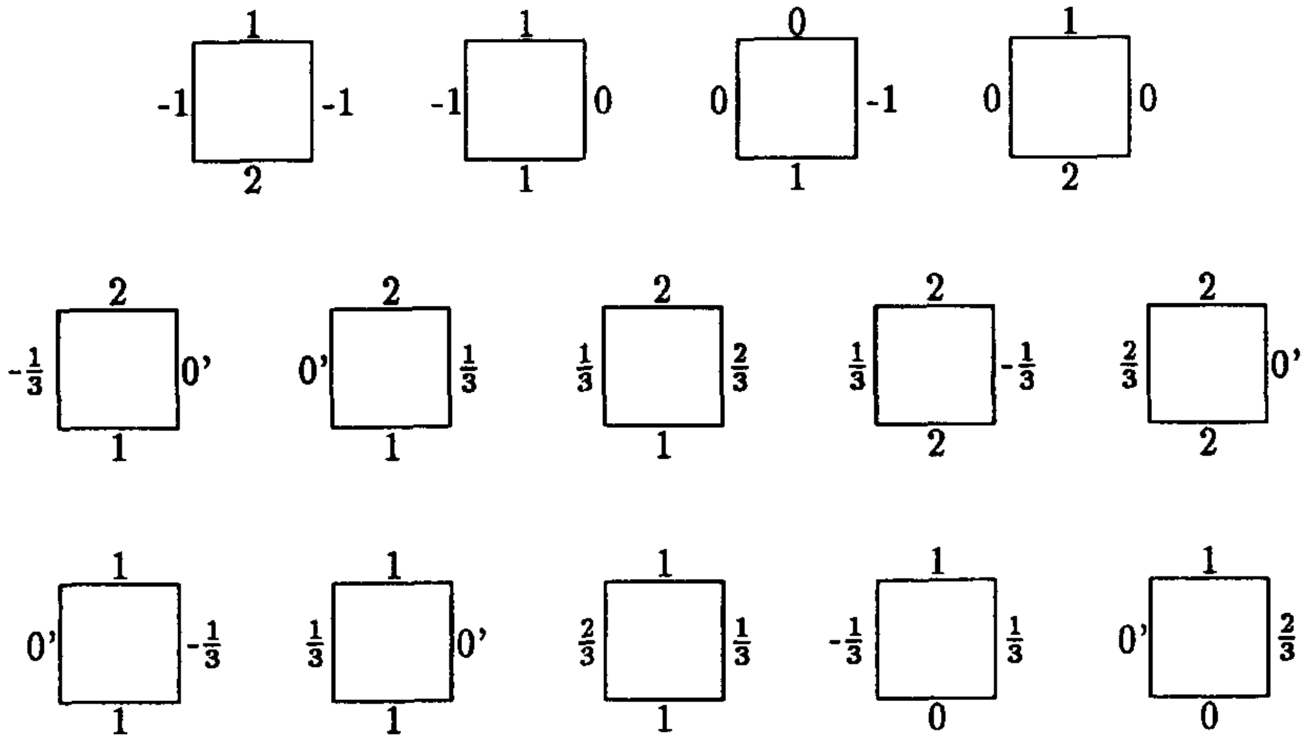


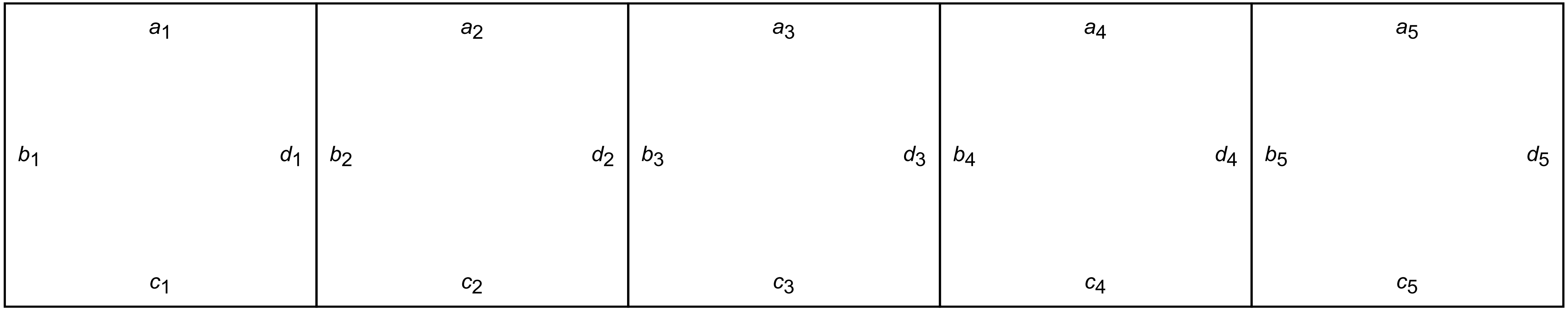
隣り合うタイルの辺は同色

ワンタイル（強非周期タイル集合）の歴史

Berger	（1964）	20426　104
Rauchiri	（1966）	40
Knuth	（1968）	92
Robinson	（1971）	56
Ammann	（1978）	16
Kari	（1996）	14
Culik	（1996）	13
Jeandel-Rao	（2021）	11

J. Kari（1996）のワンタイル





q=2 または q=2/3。上 a 左 b 下 c 右 dの辺の関係は q a+b= c+d。a に q をかけて c を出力。左右の b, d は左の余りを右に伝える。

$$q\ a_1+b_1-d_1 = c_1$$
$$q\ a_2+b_2-d_2 = c_2$$
$$q\ a_3+b_3-d_3 = c_3$$
$$.....$$
$$q\ a_n+b_n-d_n = c_n$$
$$q(a_1+a_2+.... +a_n)=c_1+c_2+... +c_n$$

タイル張りが非周期的であること

タイル張りが非周期的であること

$a_1+a_2+.... +a_n$ は正整数で q は 2 または 2/3
これが周期的になるならば

$$2^u (2/3)^v =1$$

となる。u=v=0 となるので矛盾。

タイル張り可能であること。

傾きα切片ρのスツルム列は次の式で得られる。

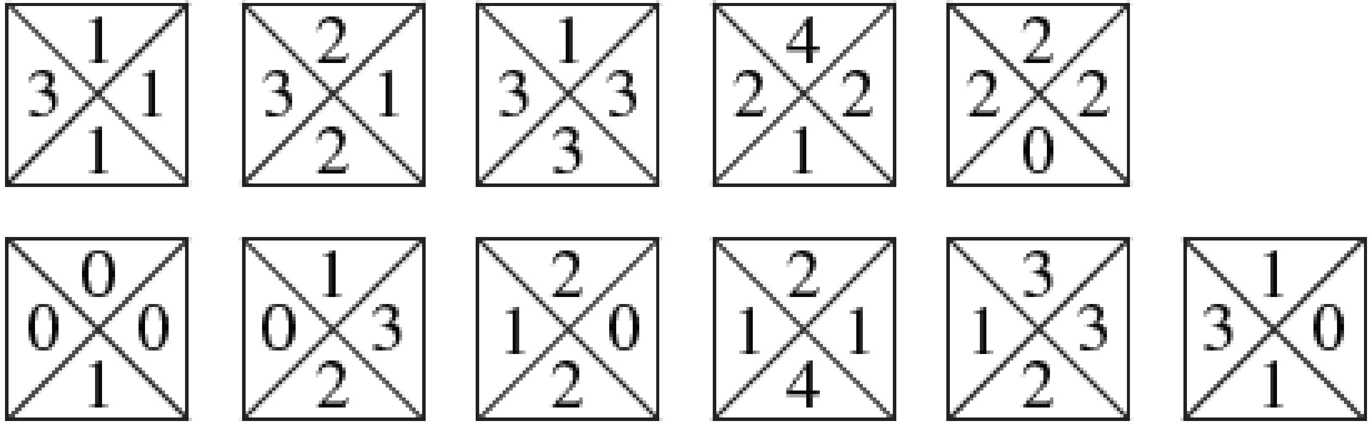
$$\lfloor \alpha(n+1)+\rho \rfloor - \lfloor \alpha n+\rho \rfloor$$

$$\lceil \alpha(n+1)+\rho \rceil - \lceil \alpha n+\rho \rceil$$

横向きの数列は傾き0< α<2、切片ρ=0のスツルム列がとれる。したがってタイル張りは存在する。

ジャンデル・ラオ
タイル （2021）

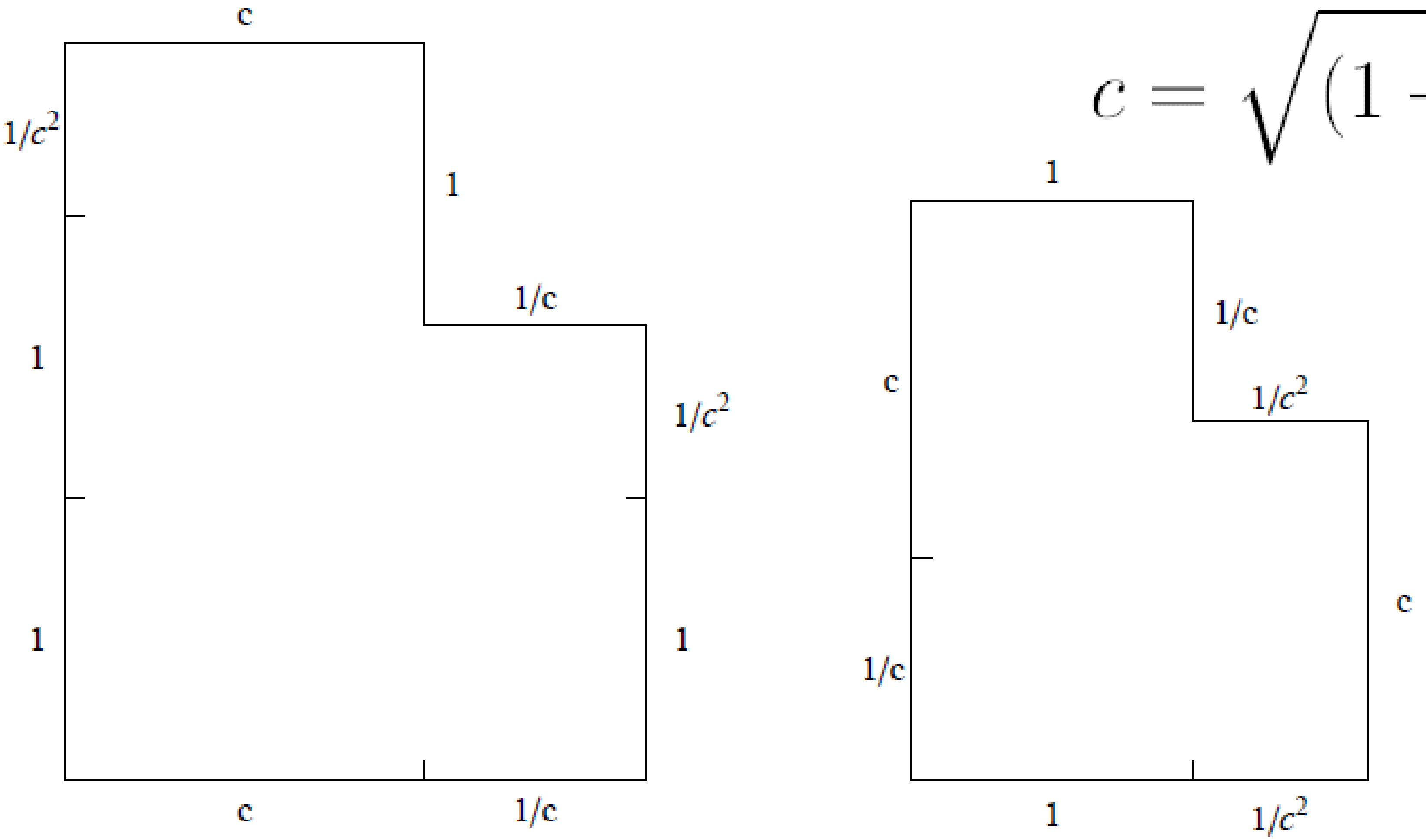
最小個数のワンタイルに到達した。



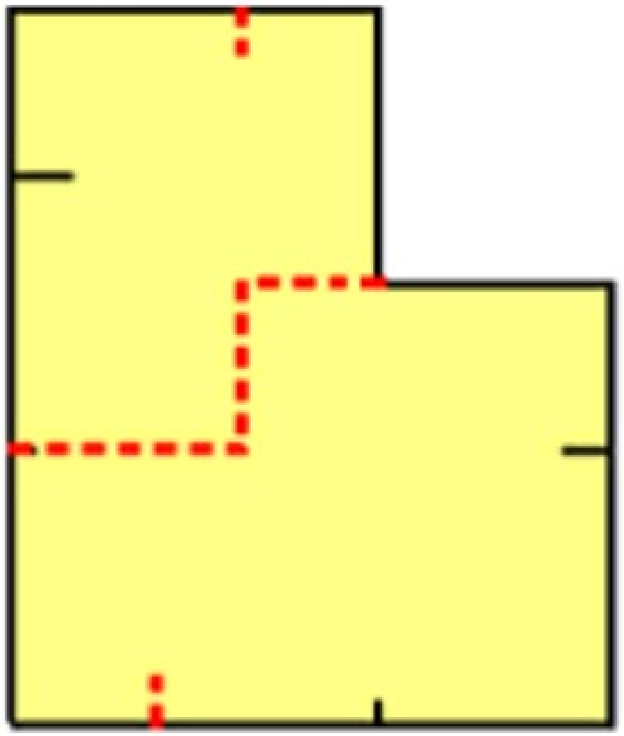
- 一般化の方向性
- １）タイルの形をもっと自由にする。
- ２）群が平行移動以外も含むように大きくする。
- などにより枚数を減らせる可能性がある。

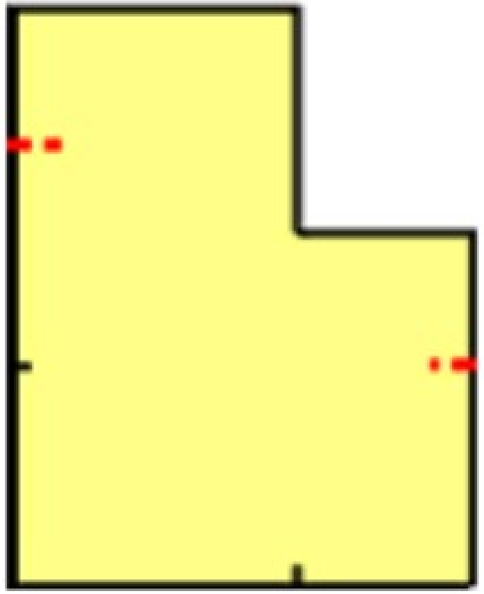
アンマンタイル（１９７７）

$$c = \sqrt{(1+\sqrt{5})/2} \simeq 1.272.$$

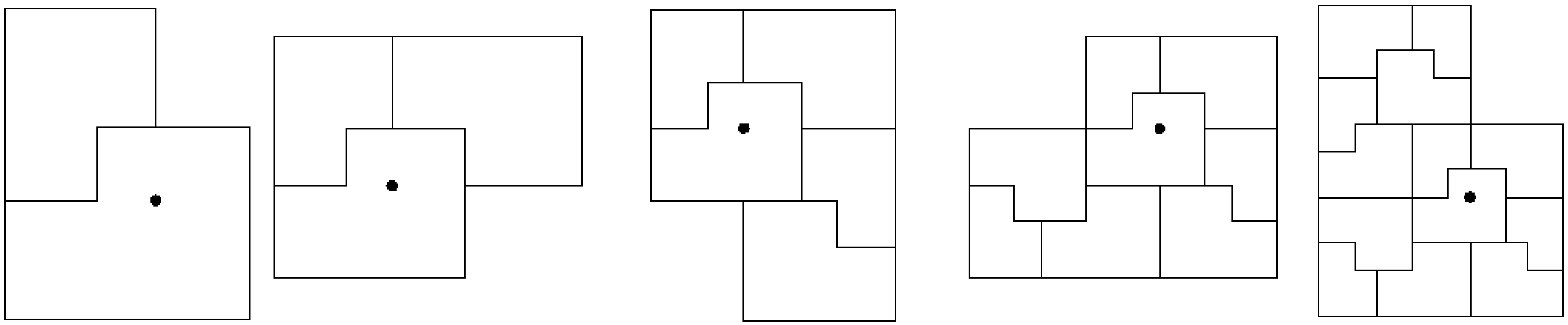


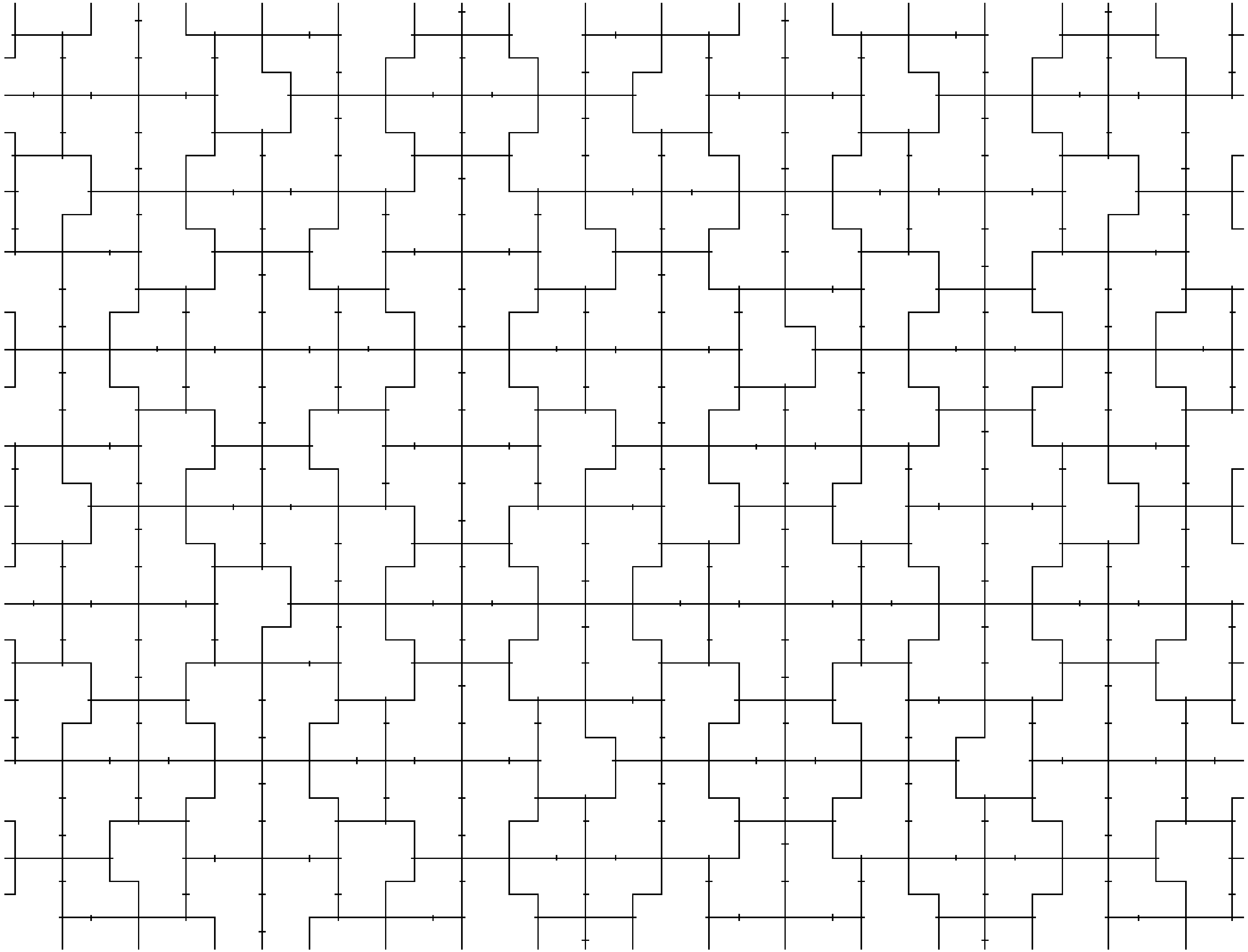
タイル張り可能であること





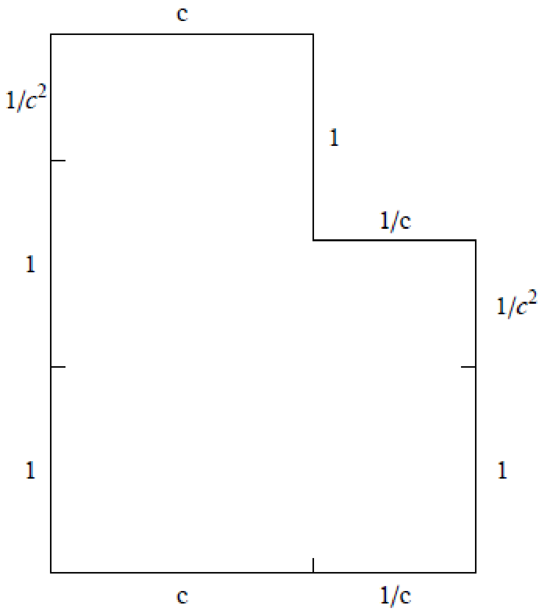
置換規則：c 倍に拡大して分割することを繰り返す

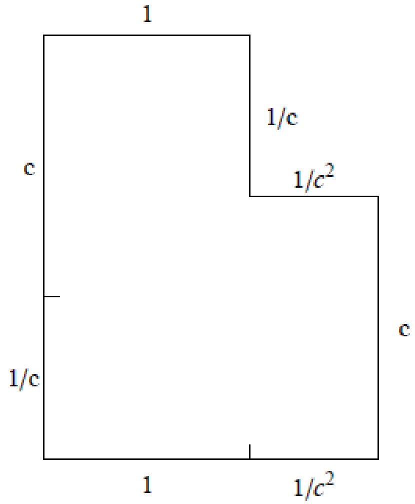


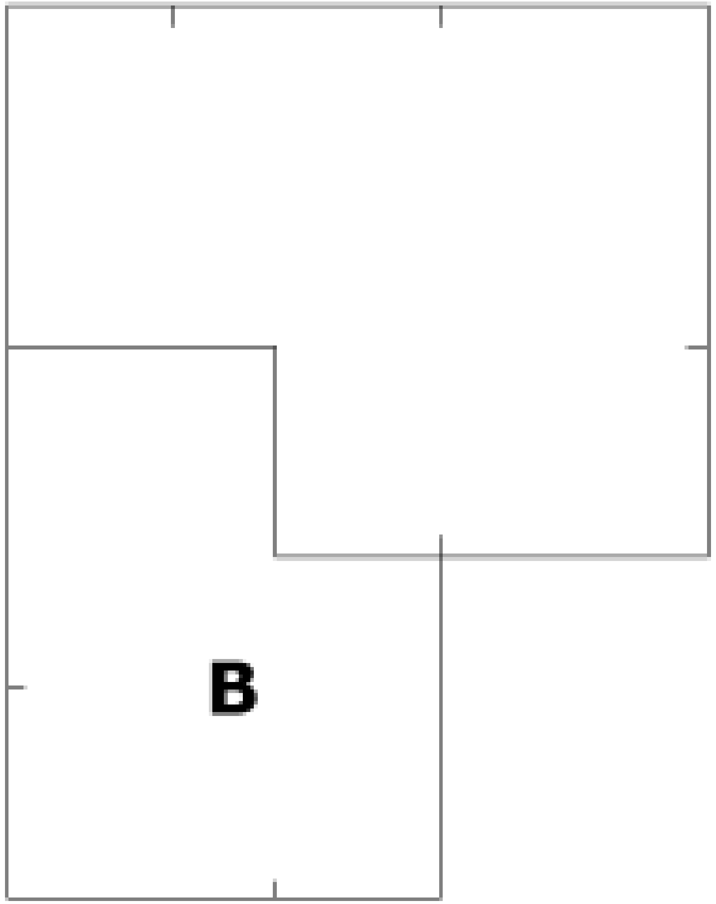


出来上がったタイリングには周期がないこと。

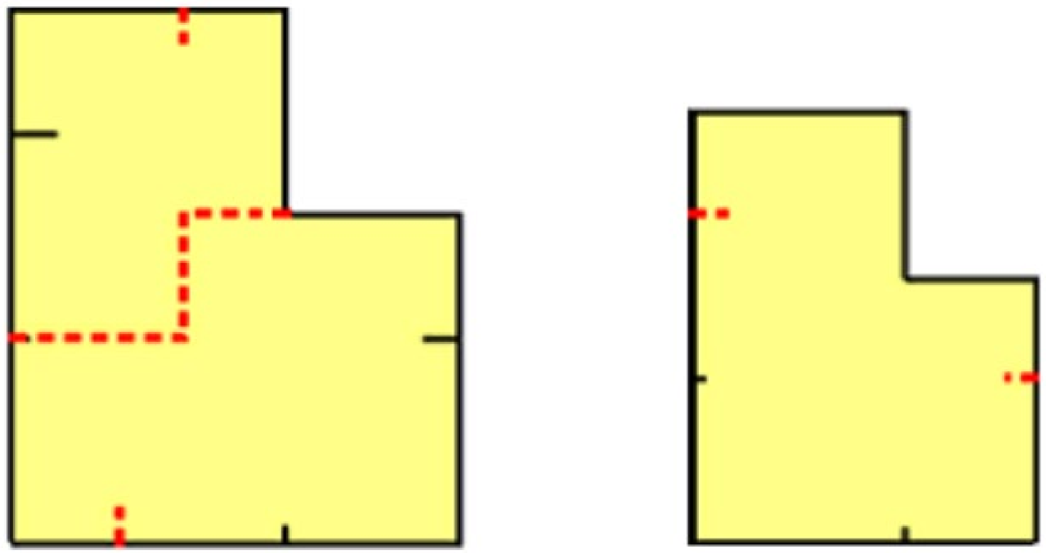
証明の第一段階:
A だけではタイル張りできない。さらにB の凹みを埋める方法は右図のみ。







A, B のタイル張りは cA, cB のタイル張りでもある



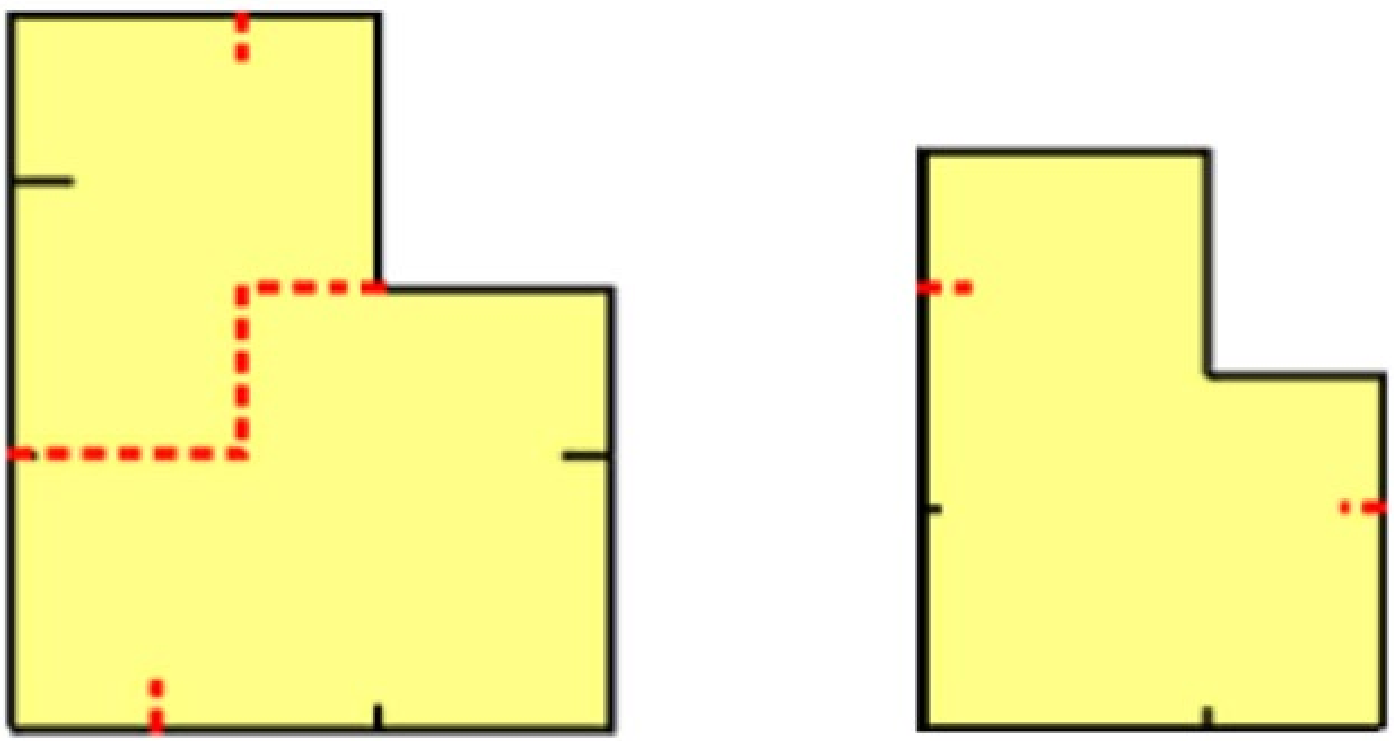
- 超タイル cA と cB が**一意的に定まり**A, B と**同じ働き**をすることを示す。 これが分かれば、A, B によるタイル張りは c^n A, c^n B によるタイル張りとみなせる。

- ここで周期 τに対して n を大きくすると c^n A はτ より大きい半径の円を含む。すると超タイルが自分自身と交差して矛盾。

「同じ働き」の意味は？　論理記号で述べにくい。

強非周期性の証明の難読性を生む原因。

このcA, cB の場合には、赤い点線の働きを考える必要がある。この赤い点線があってもなくても実質が変わらないことを示す。



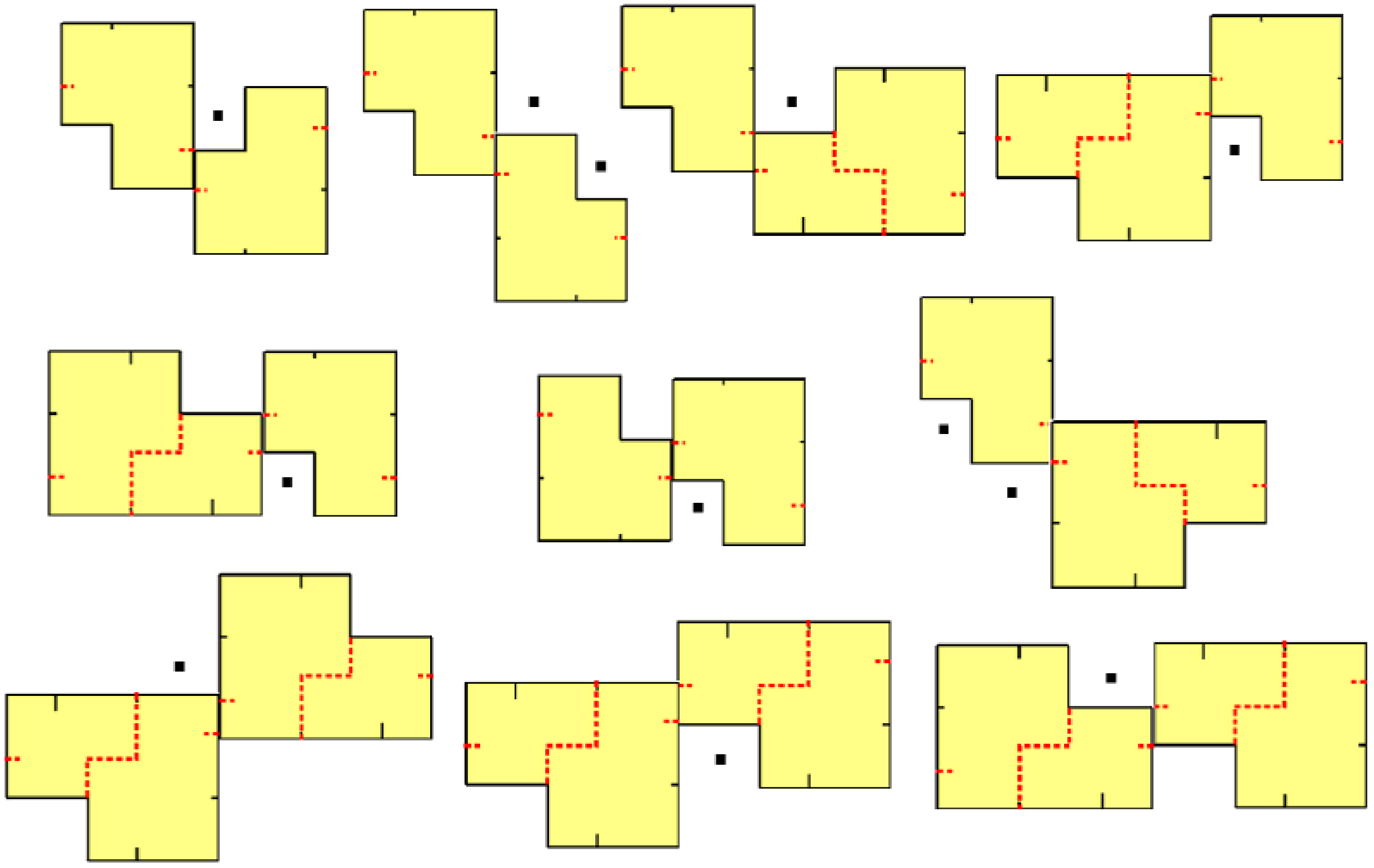


Figure 15: Illegal patches of the 1-st kind

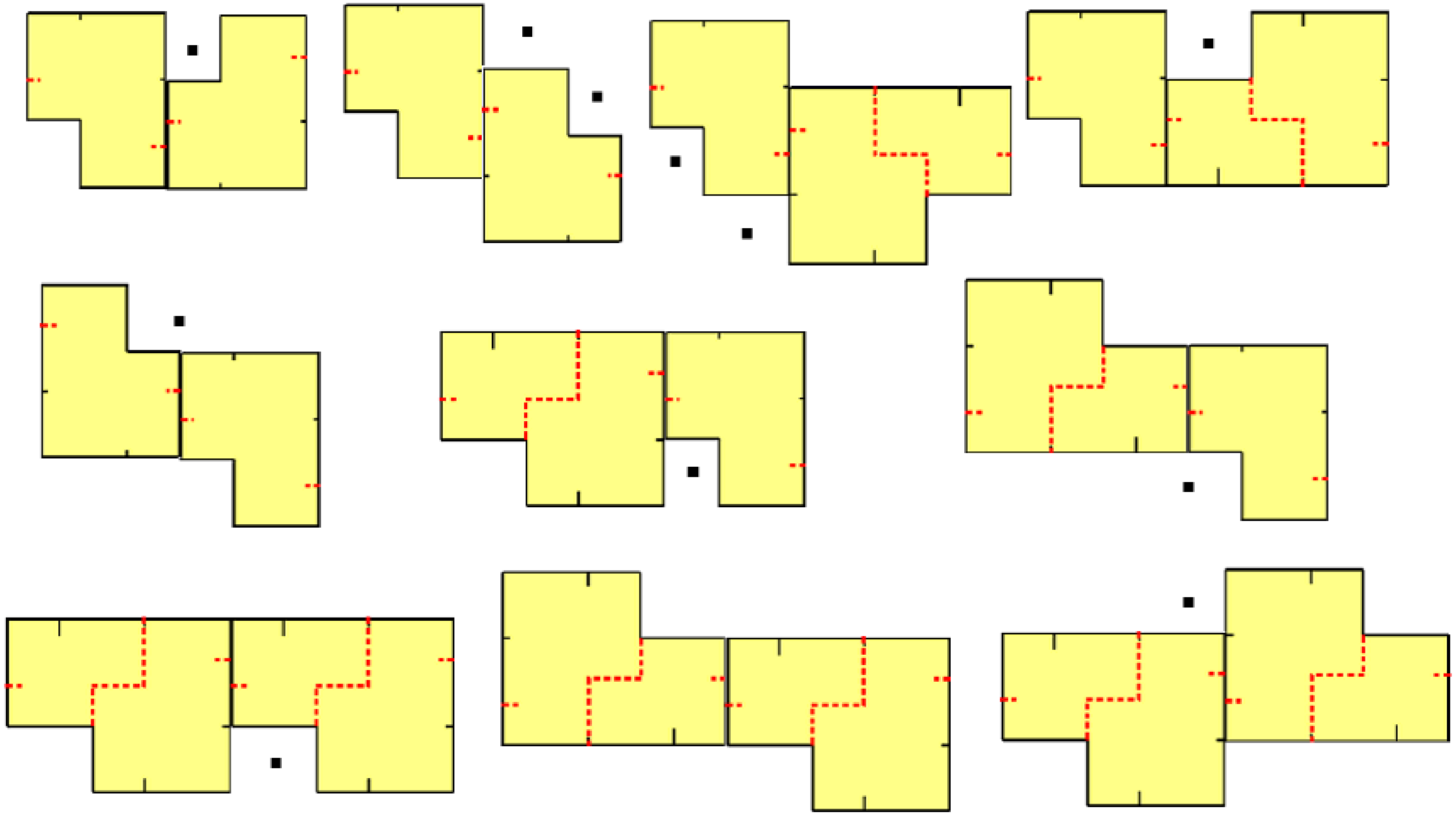


Figure 16: Illegal patches of the 2nd kind

スツルム列

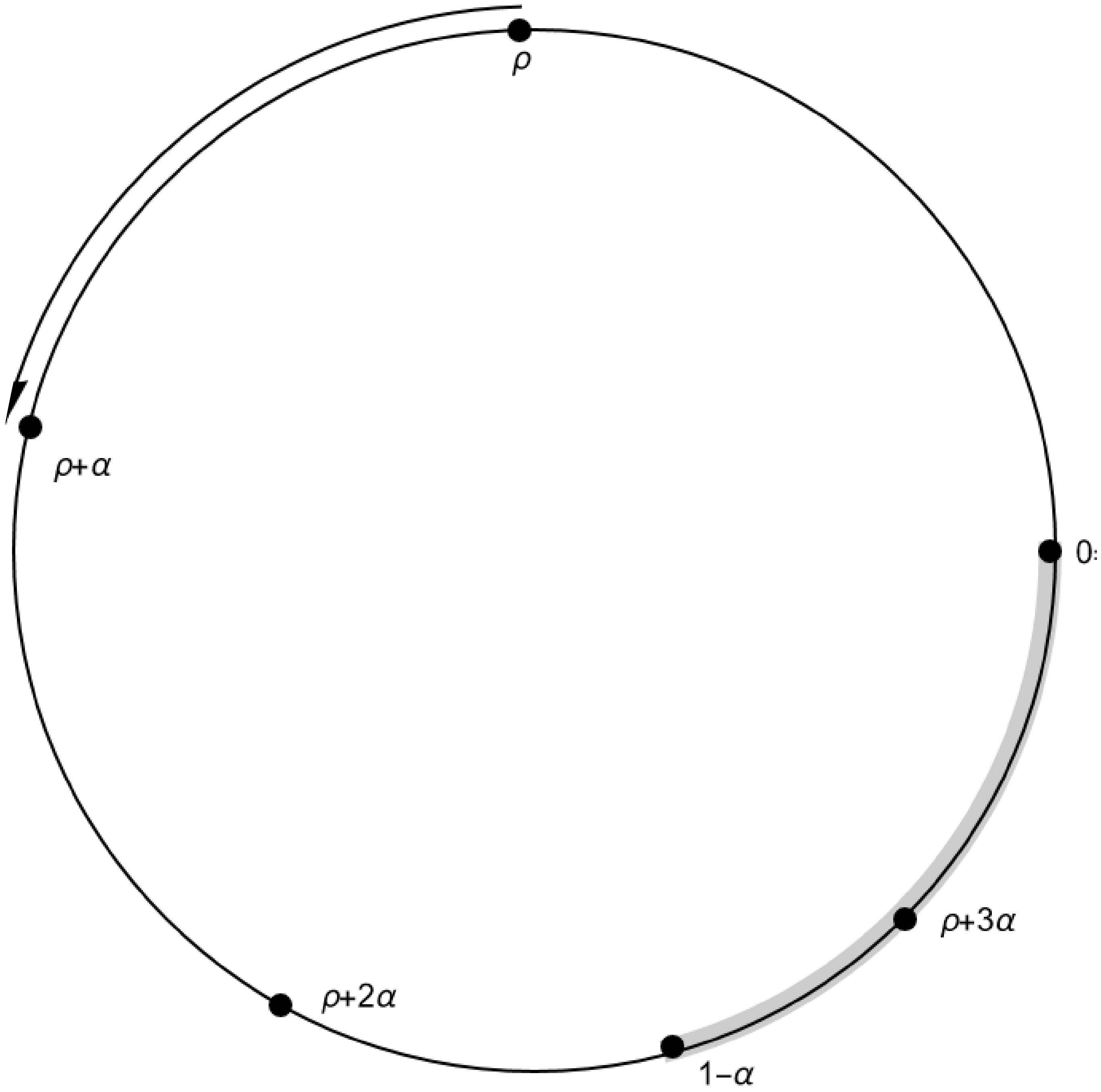
傾きα切片ρのスツルム列は次の式で得られる。

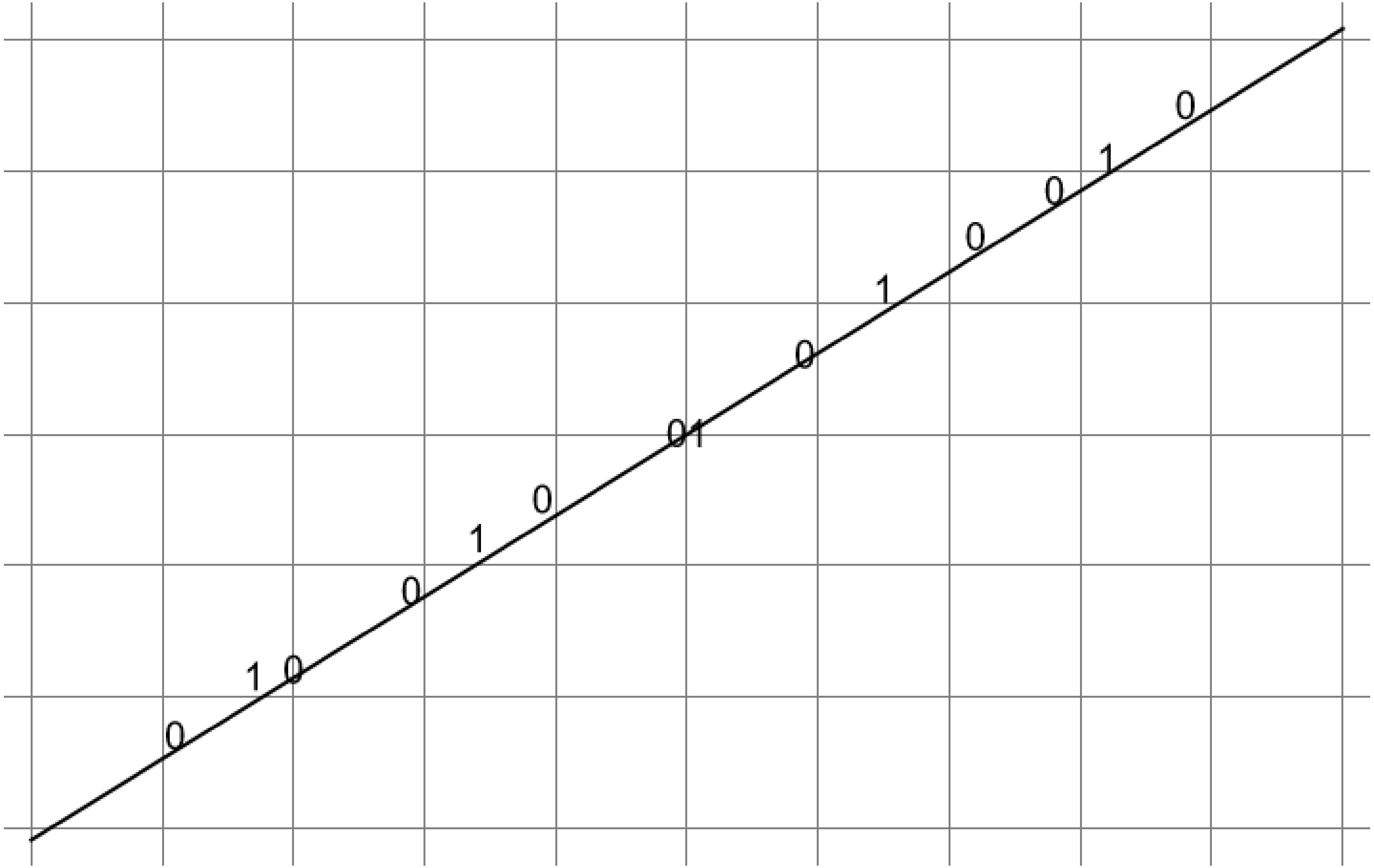
$$\lfloor \alpha(n+1)+\rho \rfloor - \lfloor \alpha n+\rho \rfloor$$

$$\lceil \alpha(n+1)+\rho \rceil - \lceil \alpha n+\rho \rceil$$

傾きαが無理数のとき、複雑度最小の非周期無限語となる

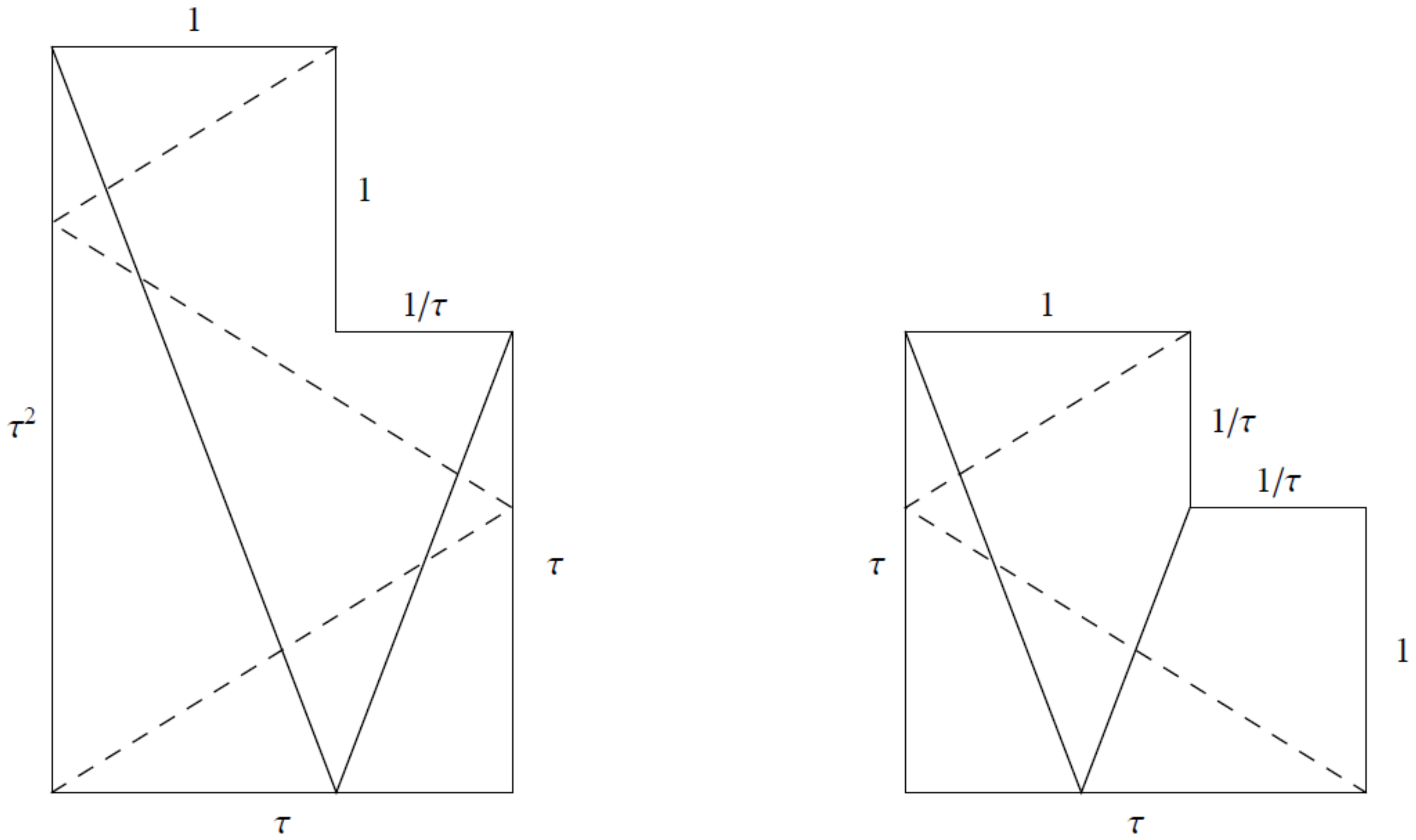
- 周囲長1の円での図形的な理解
- 灰色の領域に入ったら1、外では0
- 00010....

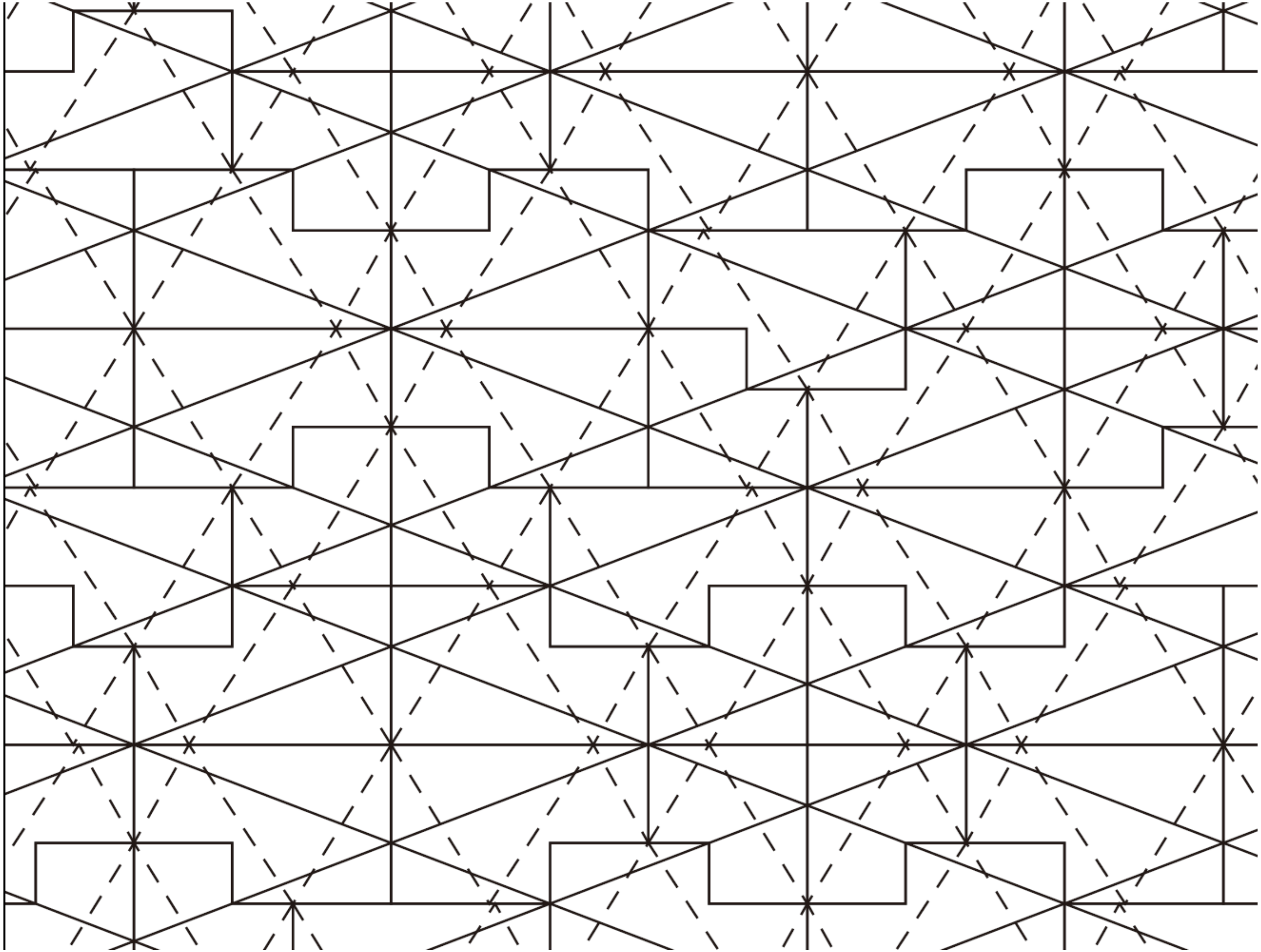



0
1 0
0
1
0
01
0
1
0
0
1
0

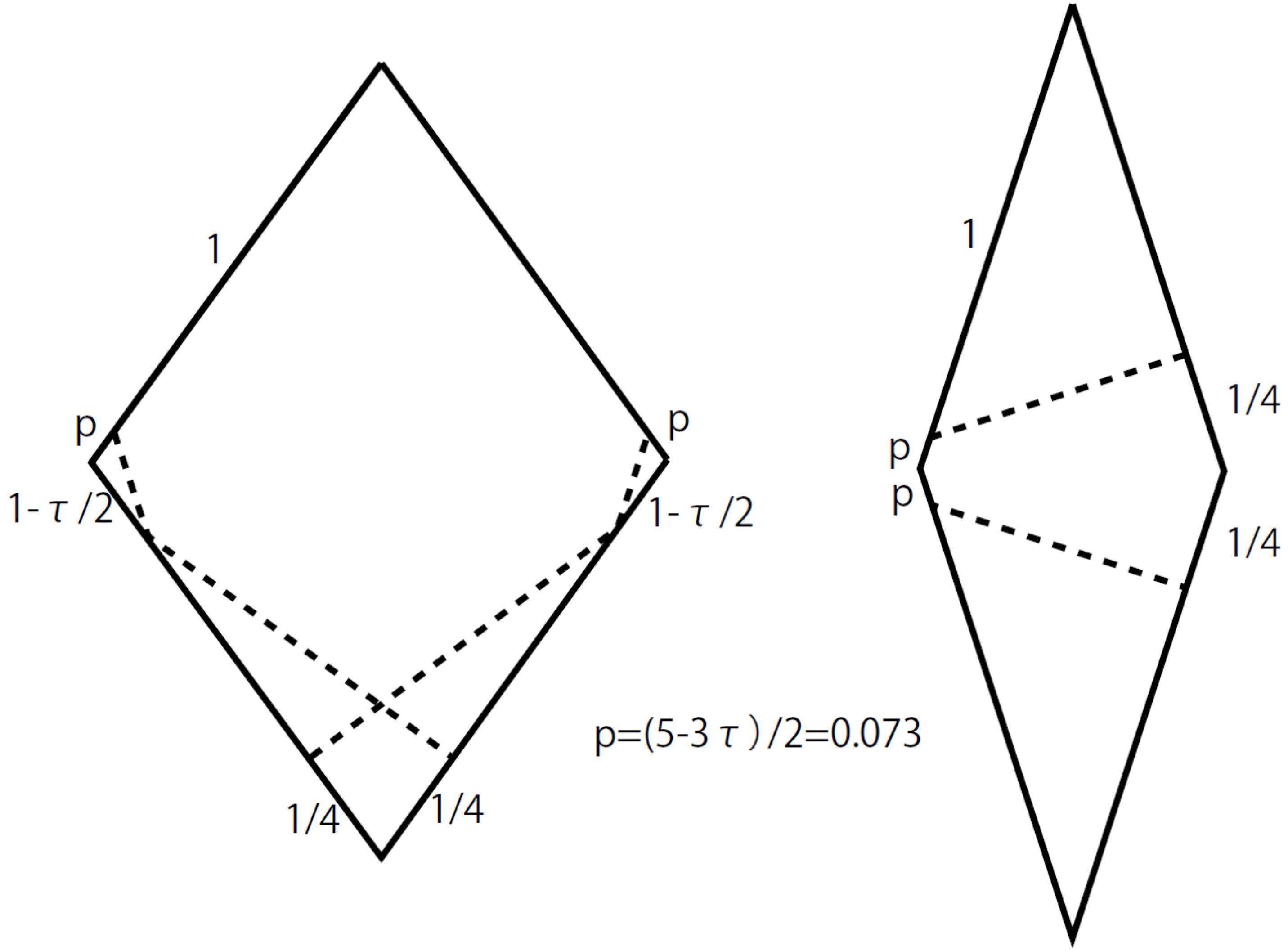
アンマン棒とスツルム列　τは黄金比。

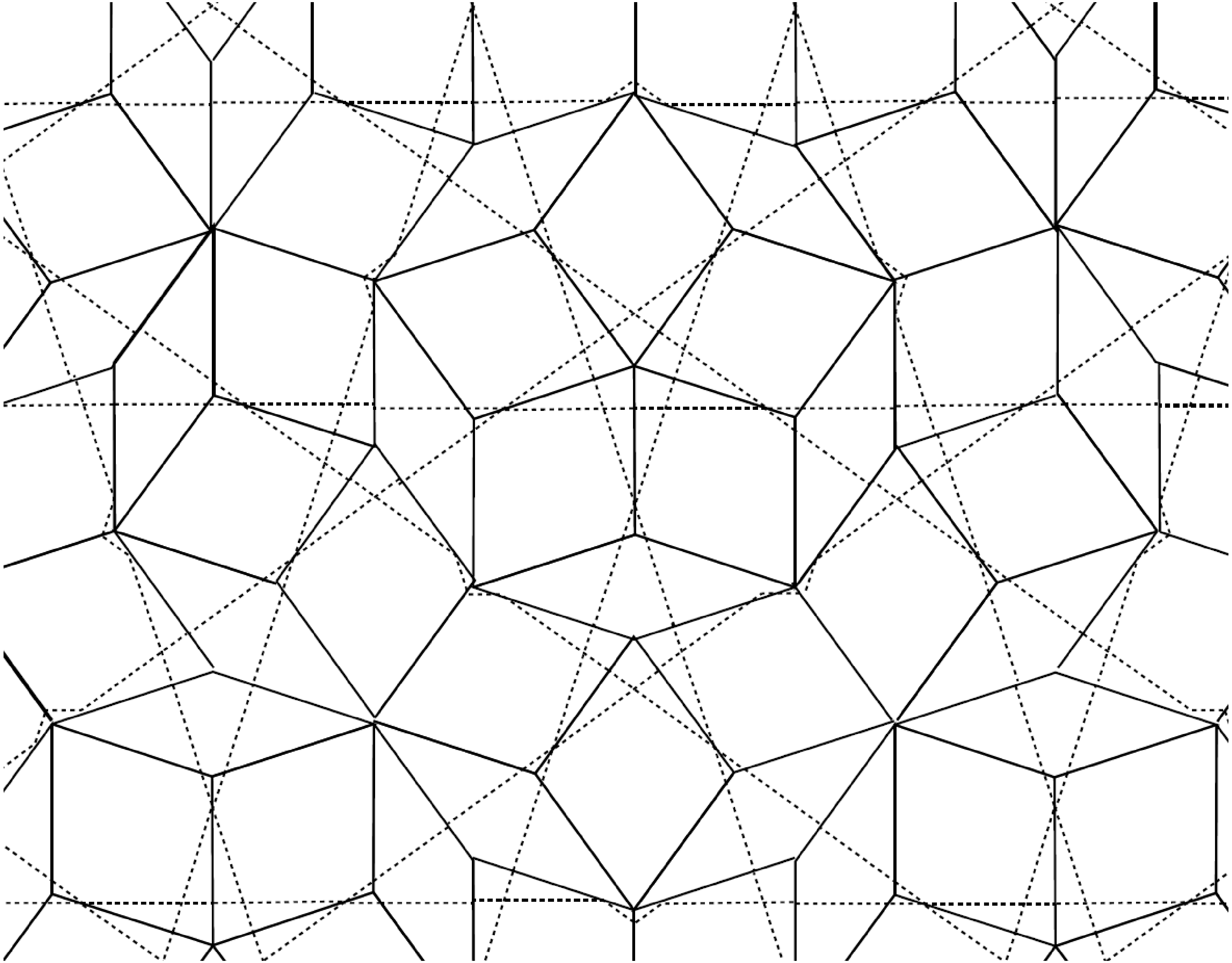
マッチング規則：辺対辺、線が直線的につながる

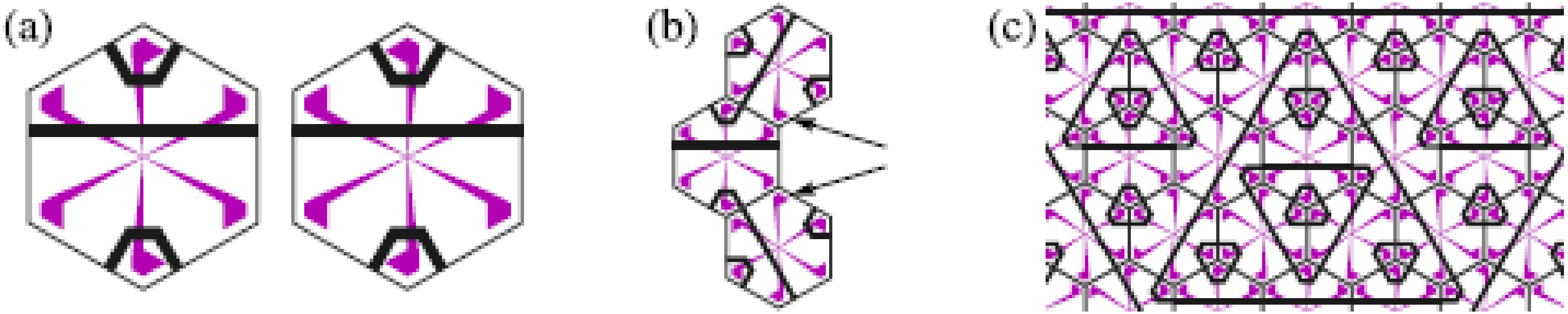




ペンローズタイル(1973)の太った凧、やせた凧のアンマン棒

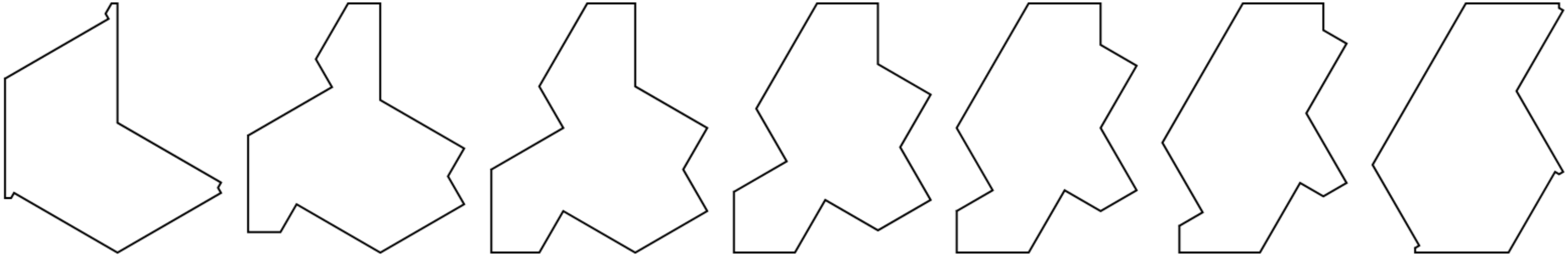






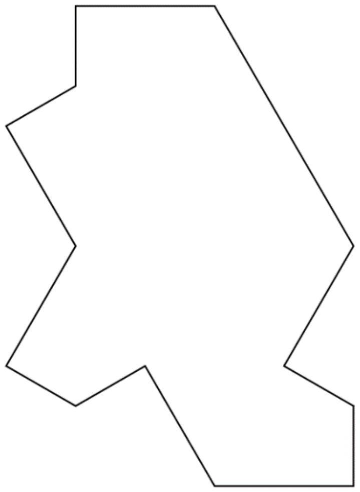
テイラーソコラ　タイル（2009）

スミス帽　幽霊　スミス亀



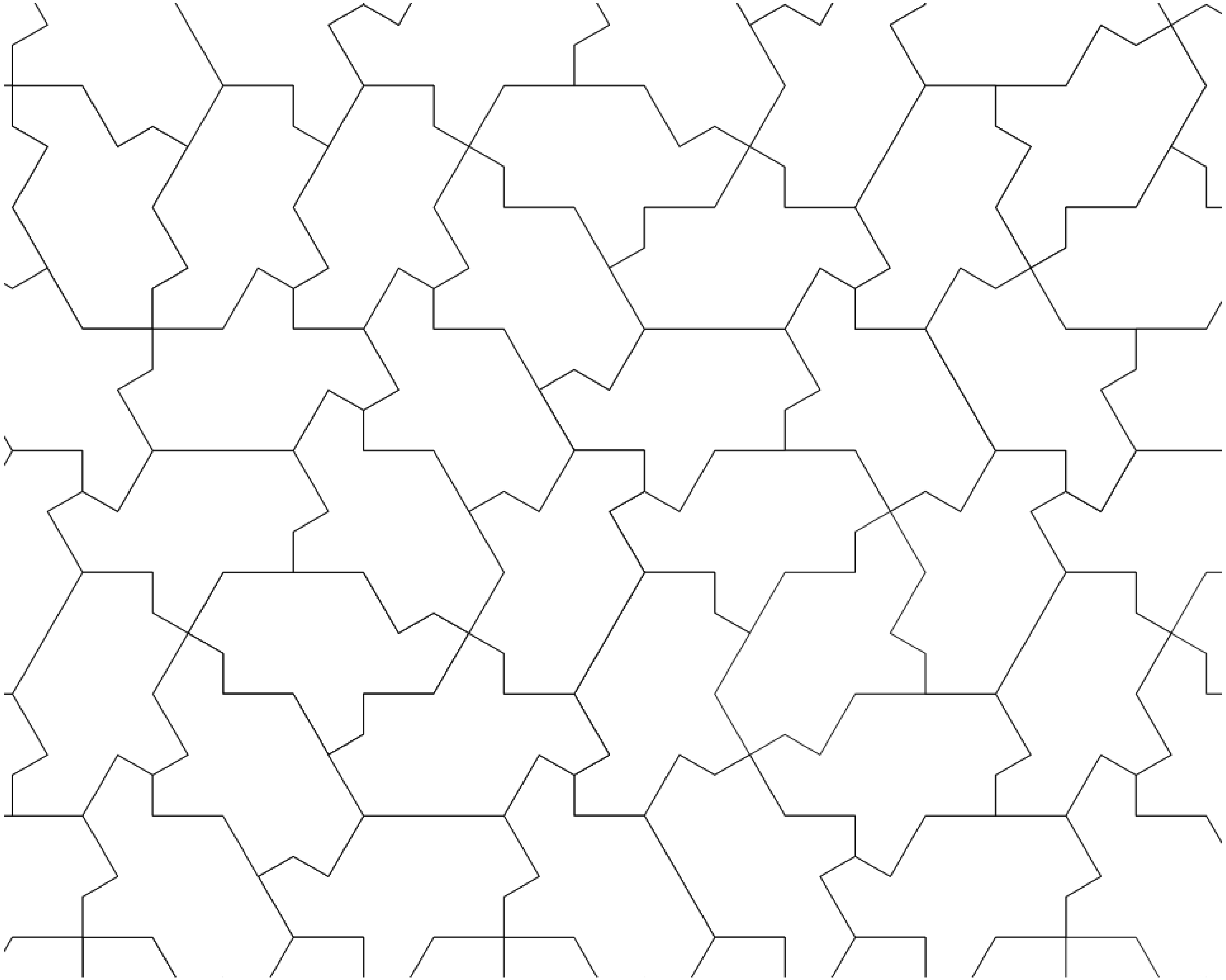
1 : √3　1:1　√3 : 1

スミス亀



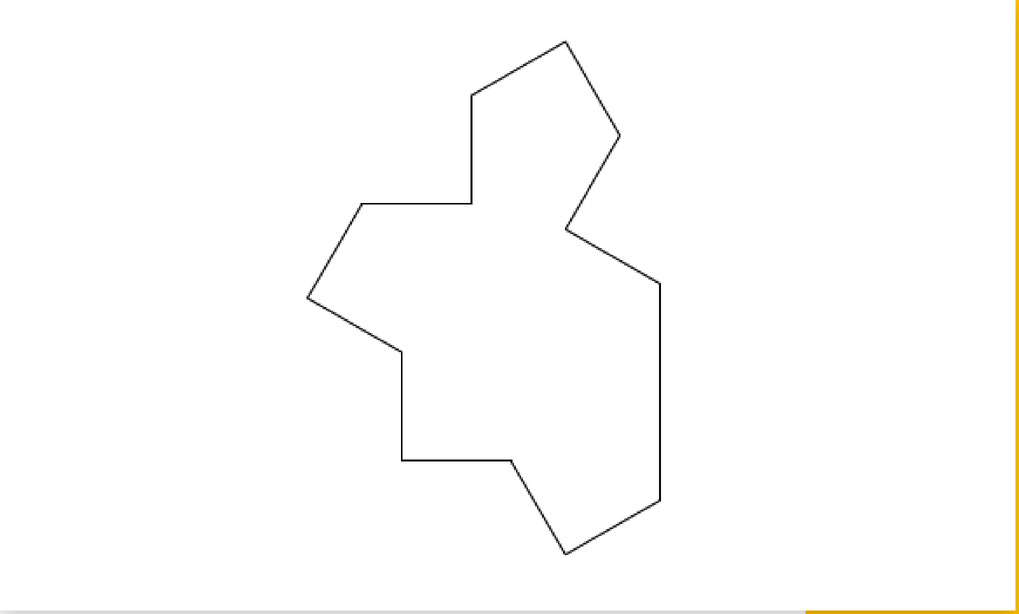
Aは一元集合

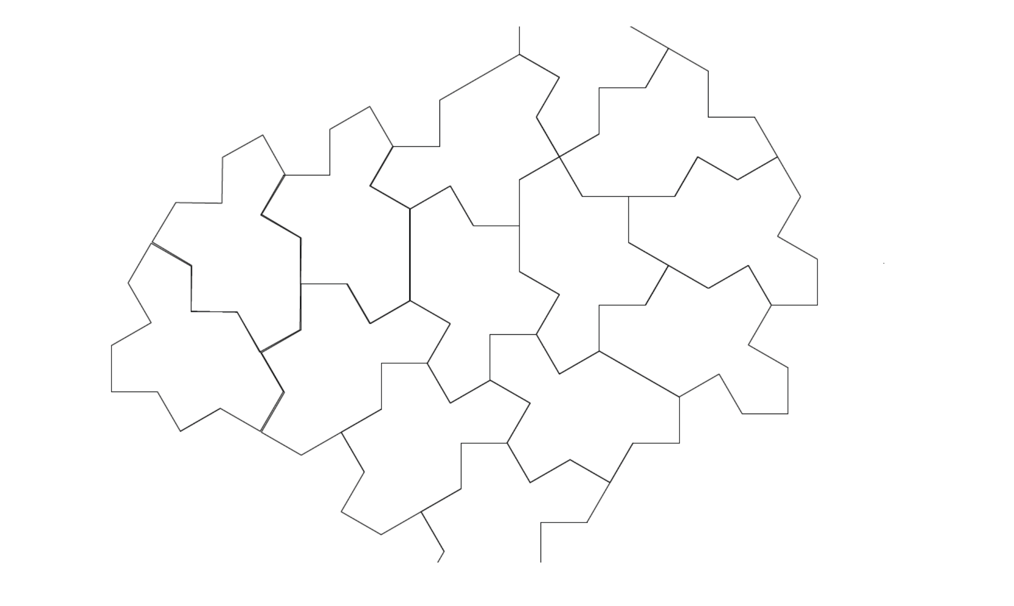
G=＜平行移動、回転、裏返し＞



幽霊（スペクター）

G=＜平行移動、回転＞

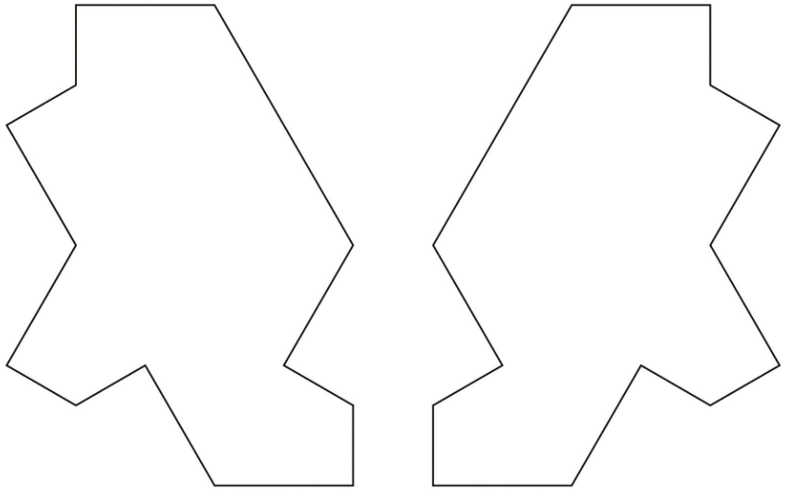




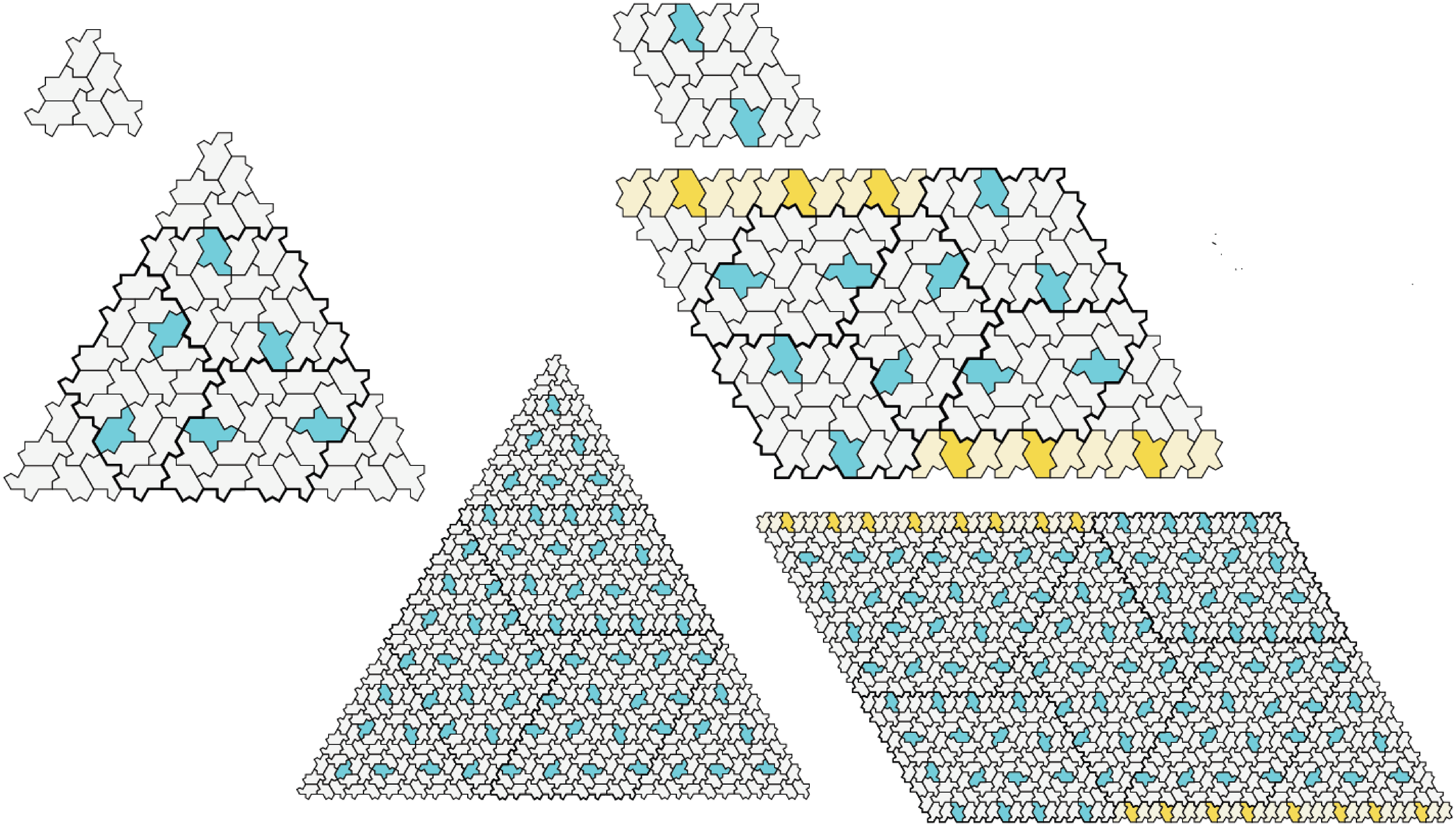
スミス亀

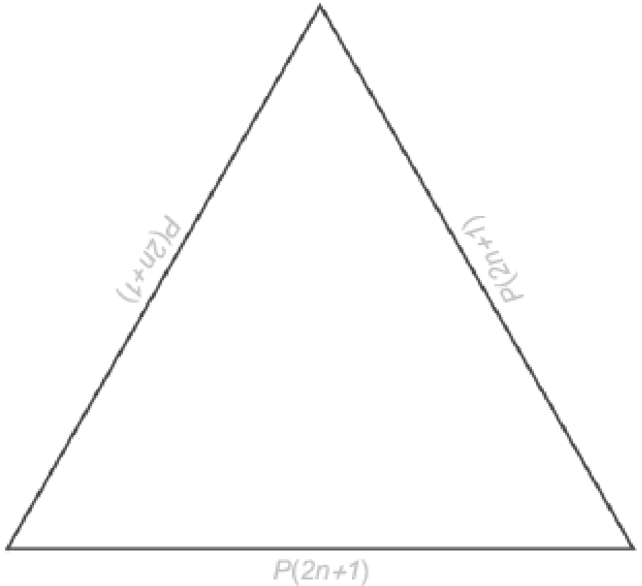
Aは一元集合

G=＜平行移動、回転、裏返し＞

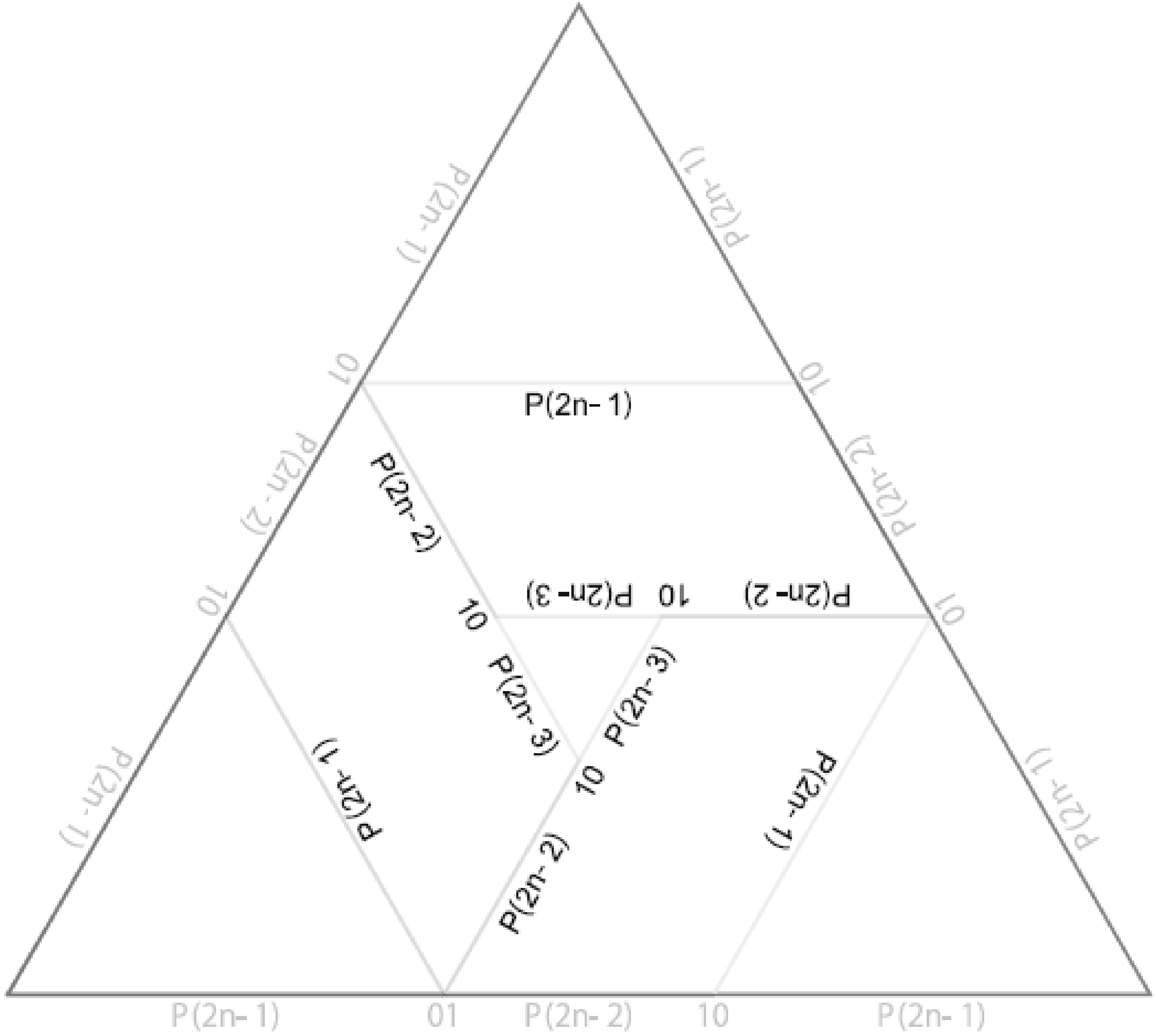


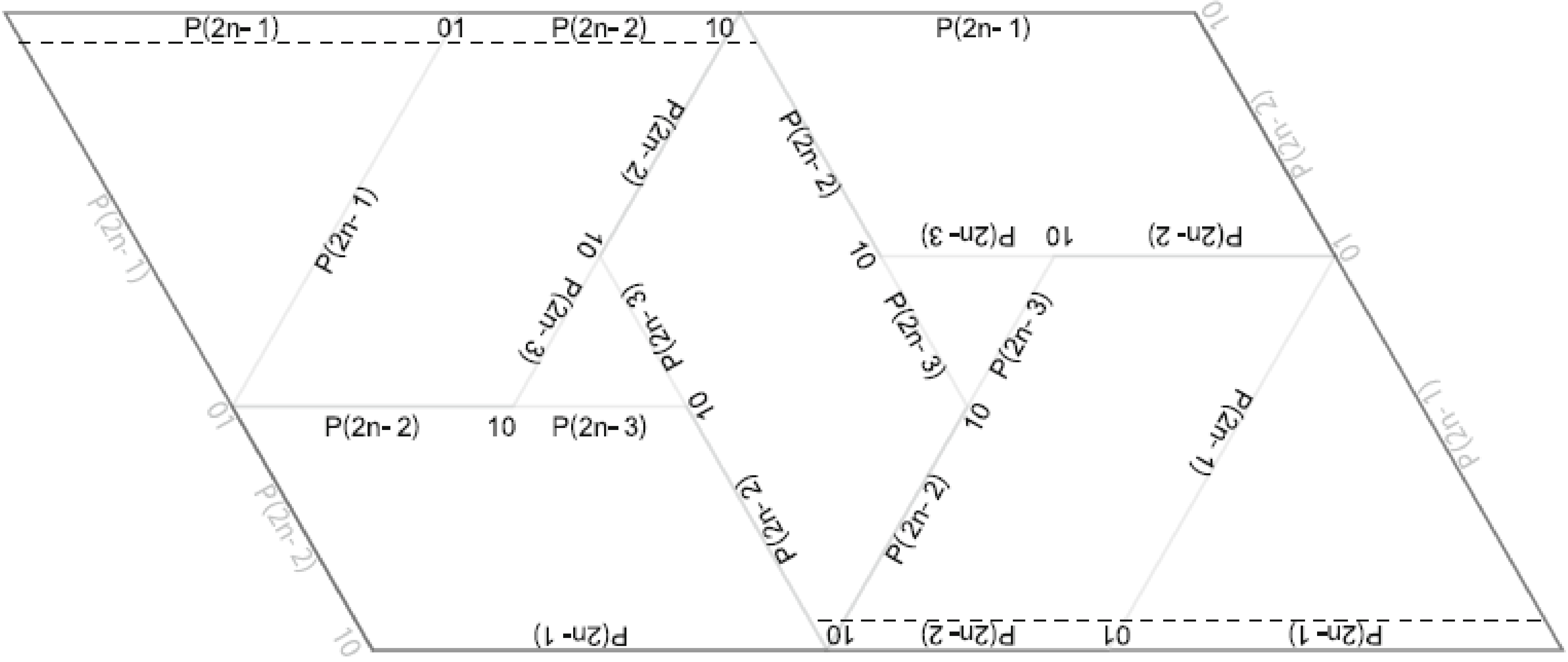
証明の第一段階：タイル張りできること。現論文のやり方は置換規則が毎回少しずつ異なる。もう少しやさしいやり方を荒木義明氏との共同研究（2025）で発表した。

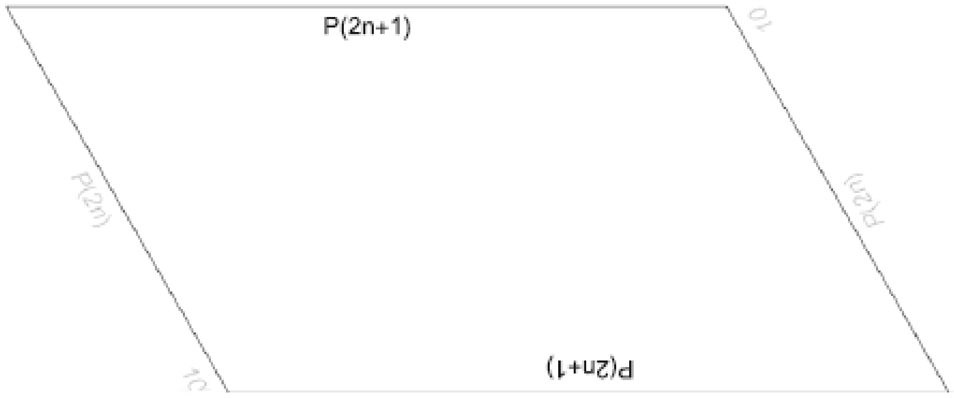



P(2n+1)
P(2n+1)
P(2n+1)

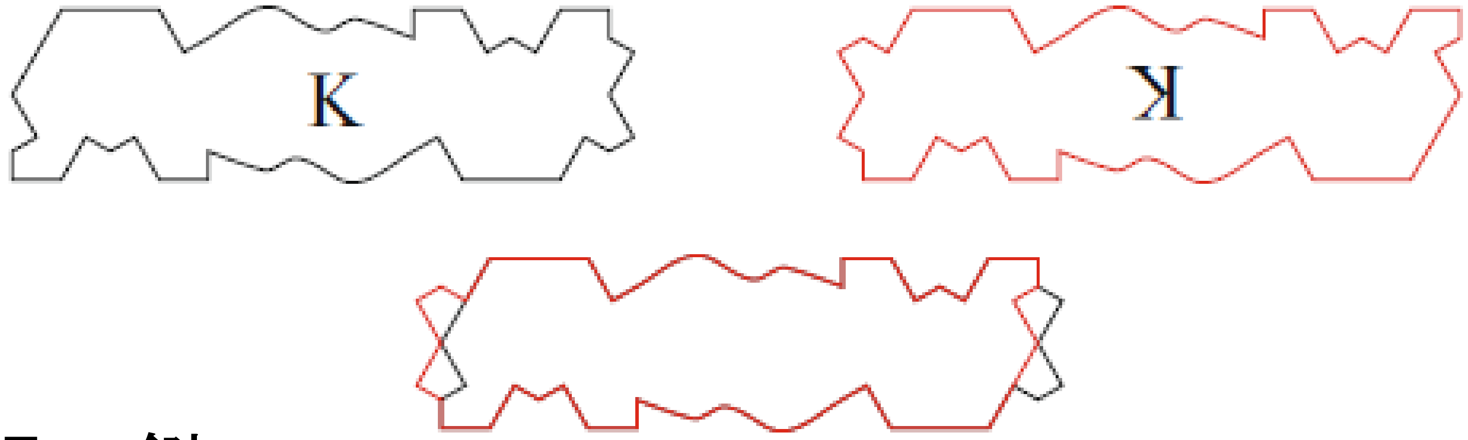
(a) T_n


P(2n- 1)
P(2n- 1)
10
10
P(2n- 1)
P(2n- 2)
P(2n- 2)
P(2n- 2)
10
P(2n- 3)
10
P(2n- 2)
10
10
P(2n- 3)
P(2n- 3)
10
P(2n- 1)
P(2n- 2)
P(2n- 1)
P(2n- 1)
P(2n- 1)
P(2n- 1)
01
P(2n- 2)
10
P(2n- 1)


P(2n- 1)
01
P(2n- 2)
10
P(2n- 1)
P(2n- 1)
P(2n- 2)
P(2n- 2)
10
P(2n- 3)
P(2n- 3)
P(2n- 3)
P(2n- 2)
10
P(2n- 3)
10
P(2n- 2)
10
P(2n- 2)
P(2n- 1)


P(2n+1)
P(2n)
P(2n)
P(2n+1)

(b) Π_n



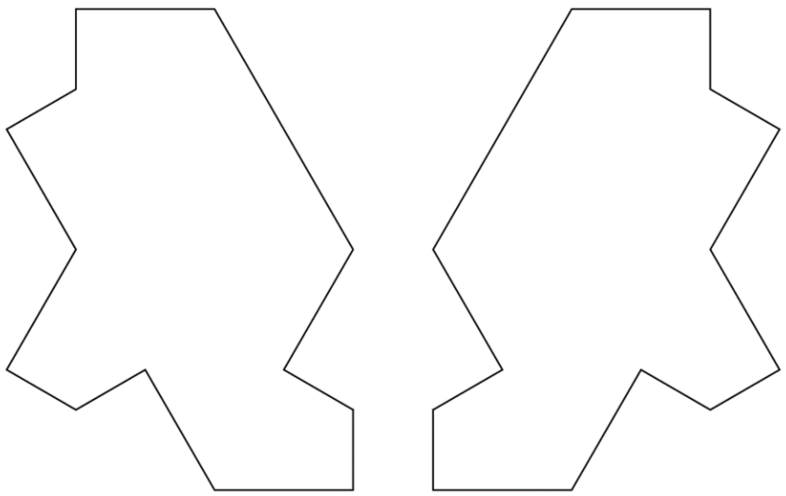
証明の鍵

P(n) はスツルム語に現れる回文。回文のパッチとしての実現は、ほぼ点対称なパッチとなる。

スミス亀

Aは一元集合

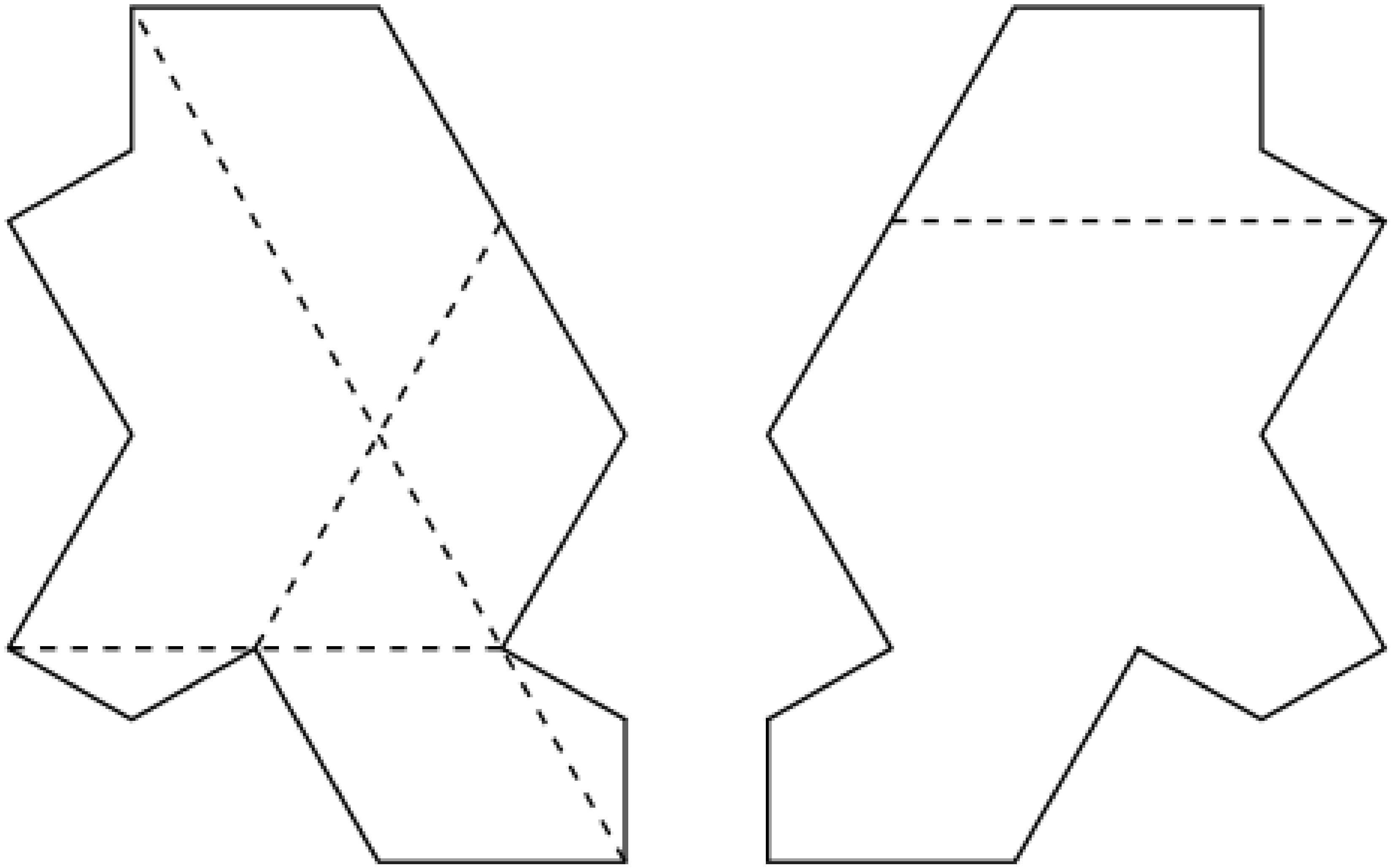
G=＜平行移動、回転、裏返し＞

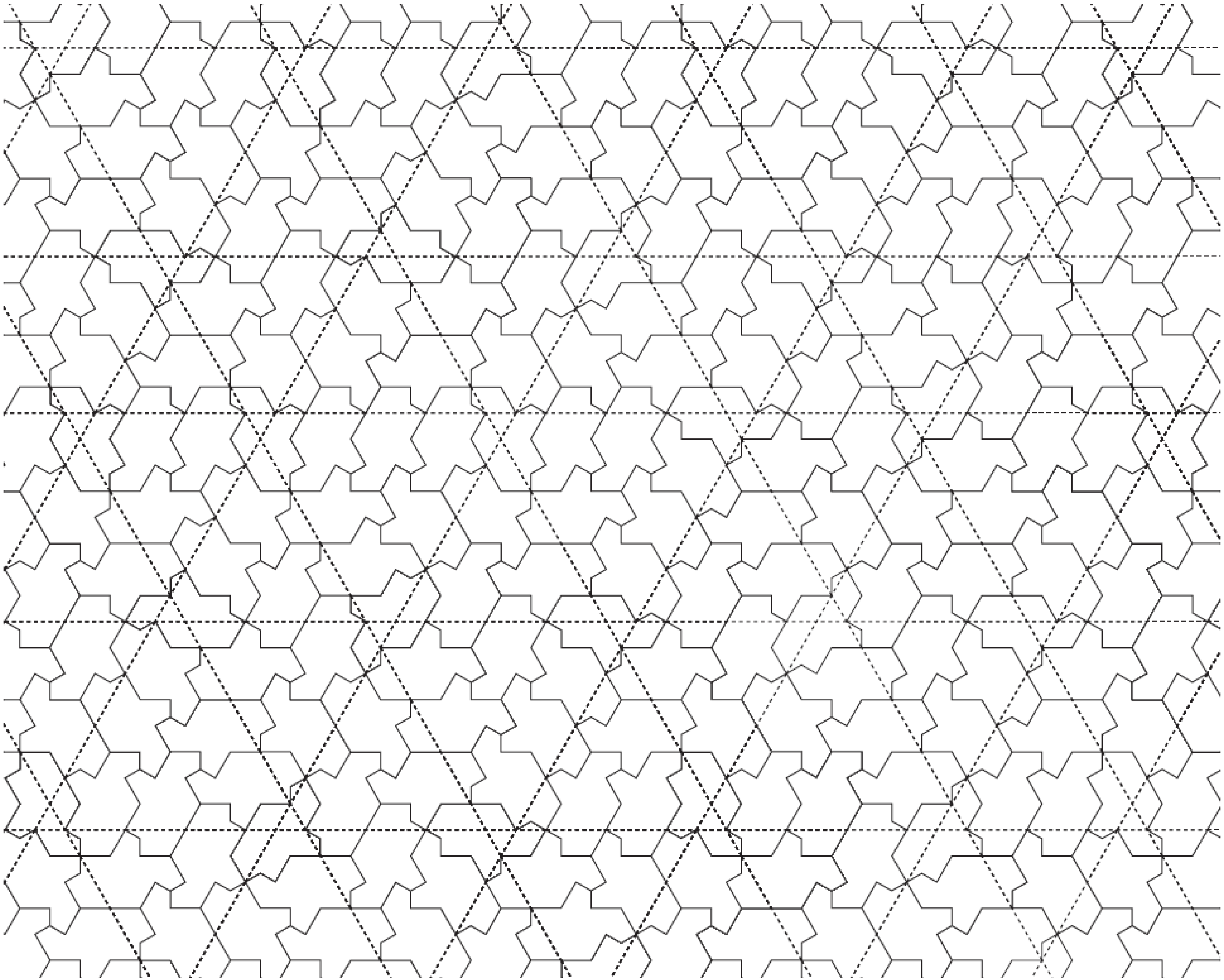


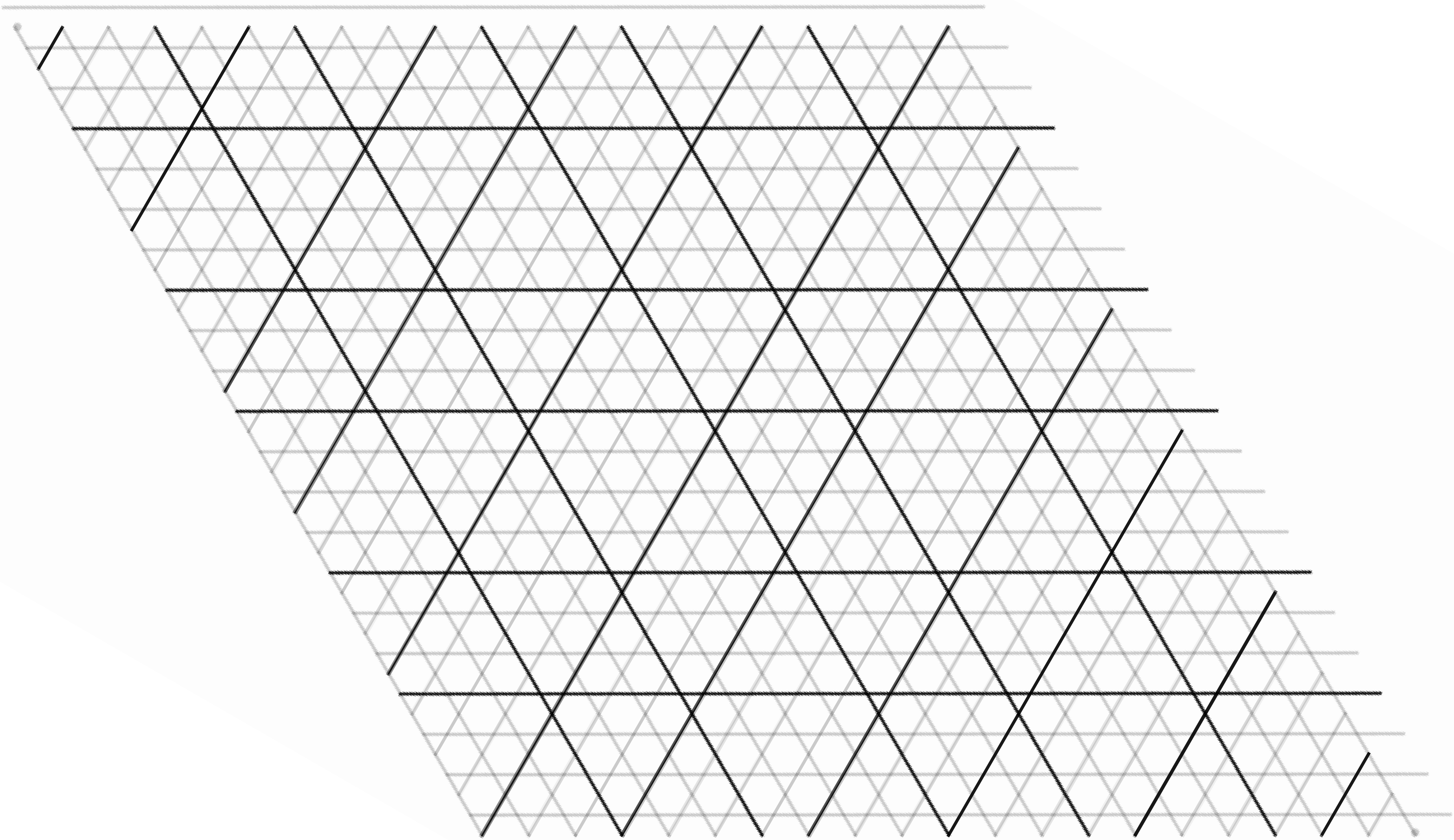
証明の第二段階:できあがったタイル張りには周期がないこと。

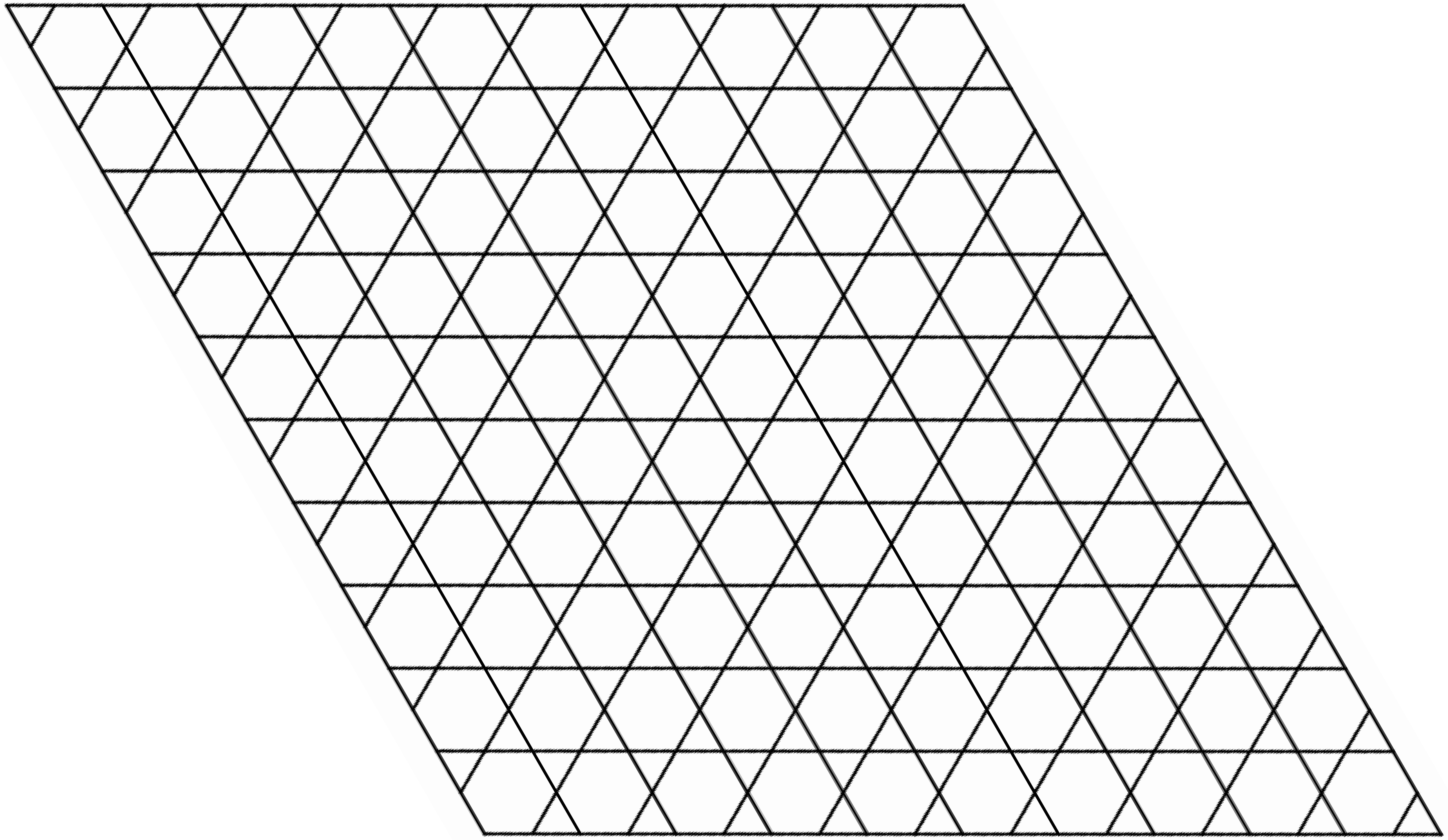
右図のアンマン棒を引く。

このアンマン棒は、実質的な変更ではない。









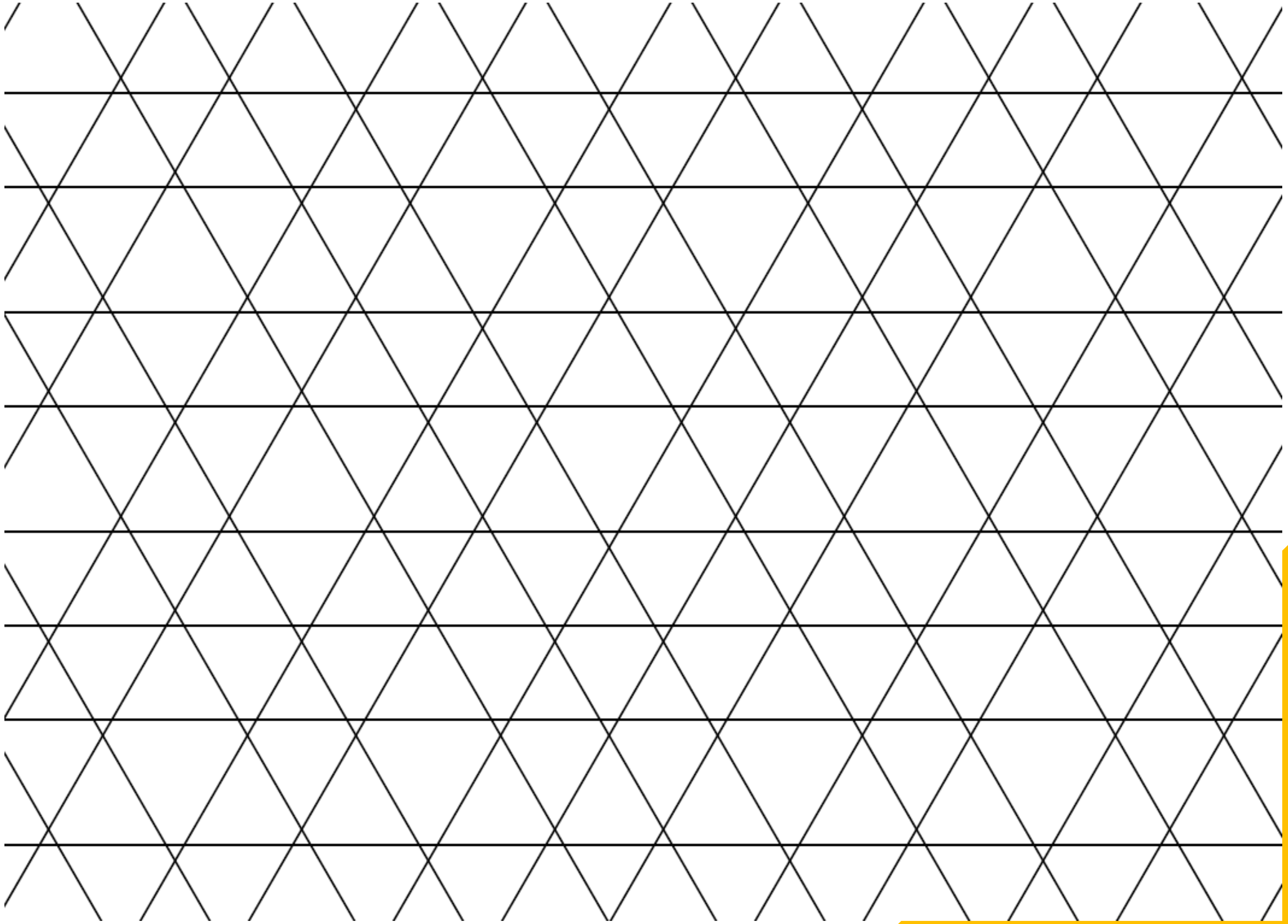
タイリングに周期がない

- 表と裏のアンマン棒の長さは 1: 4 。
- 二つの傾きを固定すると、アンマン棒の交わりと裏タイルが一対一に対応する。
- アンマン棒の頻度は (5±√5)/10 になる。

公理化:

スツルム格子

構造を分類したい。



Definition 1. A *Sturmian lattice* is defined as a collection

$$\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C} := \{a = a(i) \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{b = b(j) \mid j \in \mathbb{Z}\} \cup \{c = c(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

of infinitely many lines in the plane determined by three functions $a, b, c\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ with

$$a(i+1) - a(i) \geq 1, \quad b(j+1) - b(j) \geq 1, \quad c(k+1) - c(k) \geq 1 \tag{1}$$

such that there exists a non-empty set $V \subset \mathbb{Z}^3$ satisfying the following properties:

(SL-0) $(0,0,0) \in V$.

(SL-1)
- $\forall j, k \in \mathbb{Z}$, $\exists! i \in \mathbb{Z}$ such that $(i,j,k) \in V$.
- $\forall i, k \in \mathbb{Z}$, $\exists! j \in \mathbb{Z}$ such that $(i,j,k) \in V$.
- $\forall i, j \in \mathbb{Z}$, $\exists! k \in \mathbb{Z}$ such that $(i,j,k) \in V$.

(SL-2) For any $(i,j,k) \in V$,

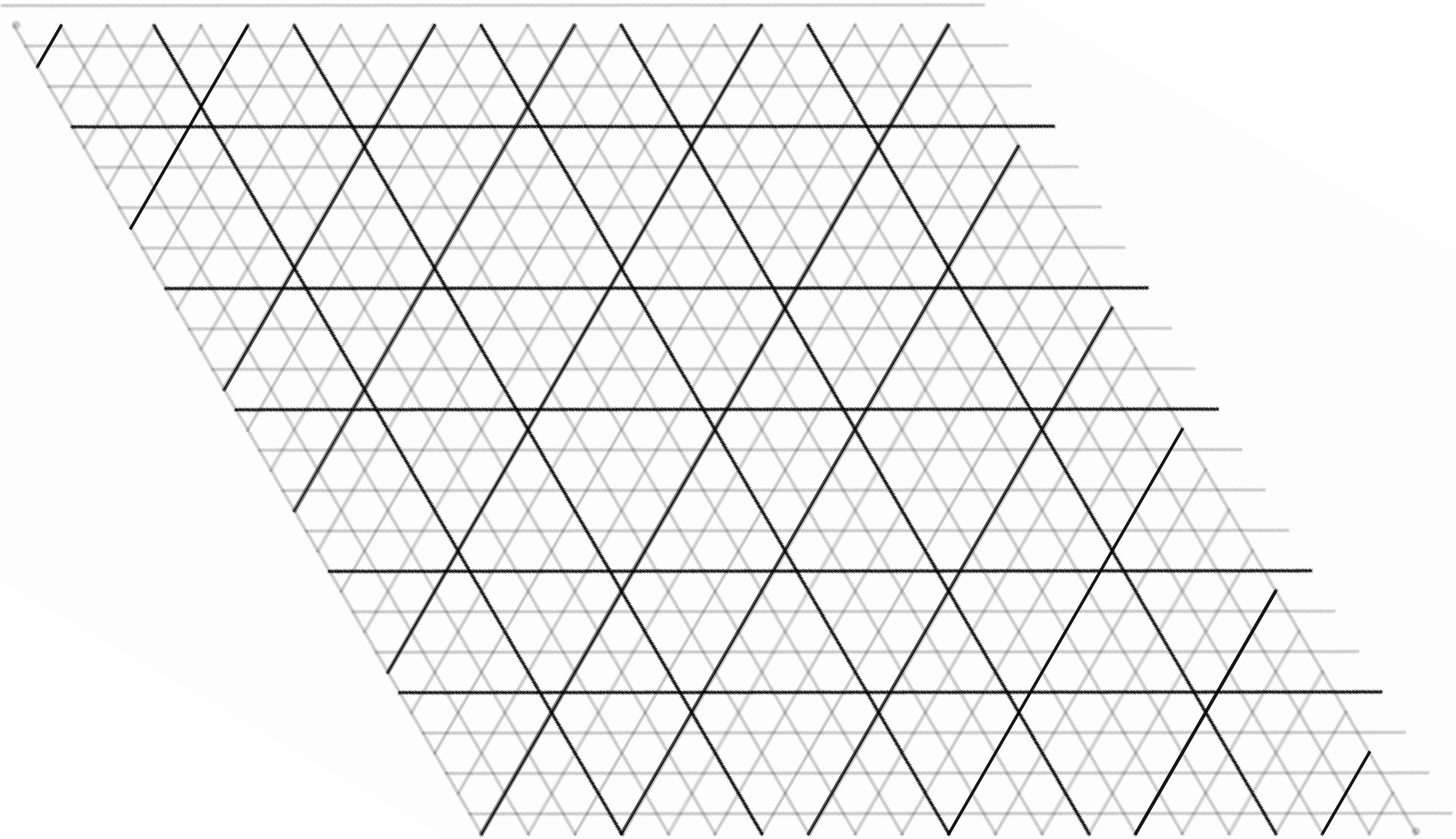
$$\big|a(i) + b(j) + c(k)\big| = \frac{1}{2}.$$

スツルム格子の分類

- スツルム格子にも傾きαが定義できる。
- 定理（秋山　浜田　伊藤

２０２６－）　傾きが無理数のときは3方向とも同じ傾きのスツルム語が対応する。さらに、切片ρ_1,ρ_2,ρ_3 の和が整数ならば、傾きαの３スツルム語によりスツルム格子を構成できる。和が整数でなければスツルム格子にはならない。

- https://arxiv.org/abs/2506.19362



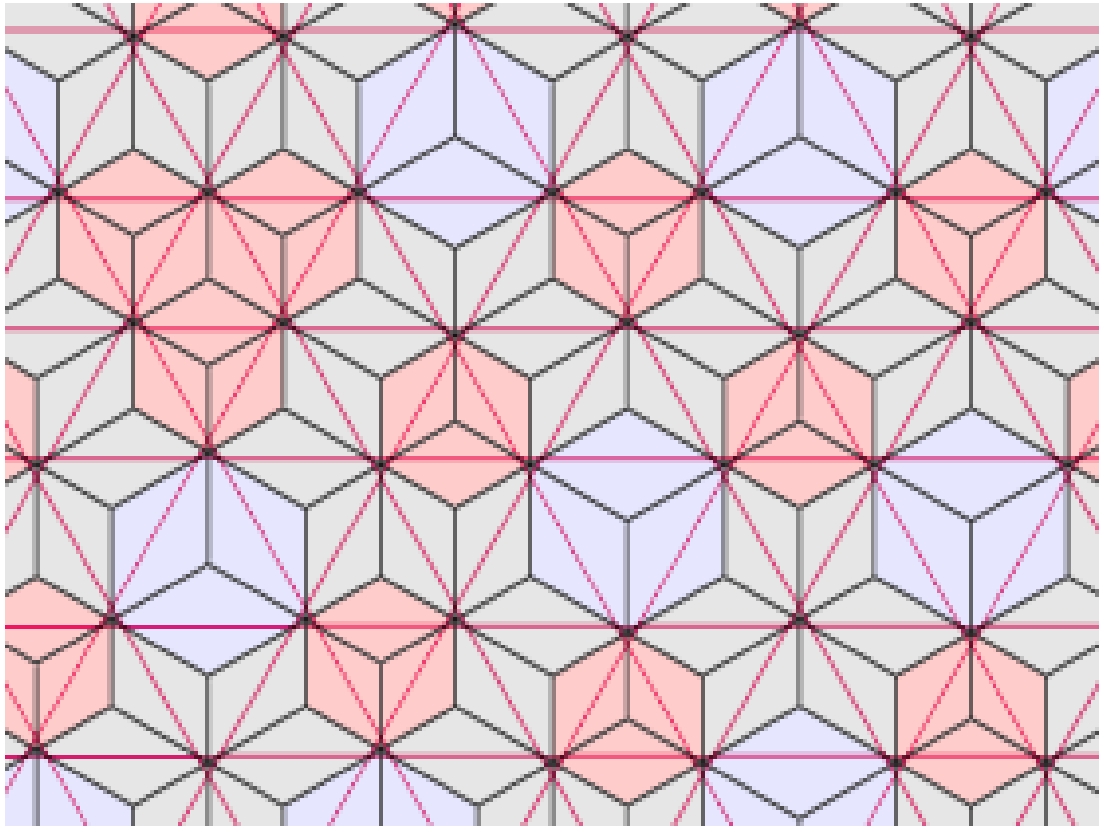
強非周期タイル集合の構成。

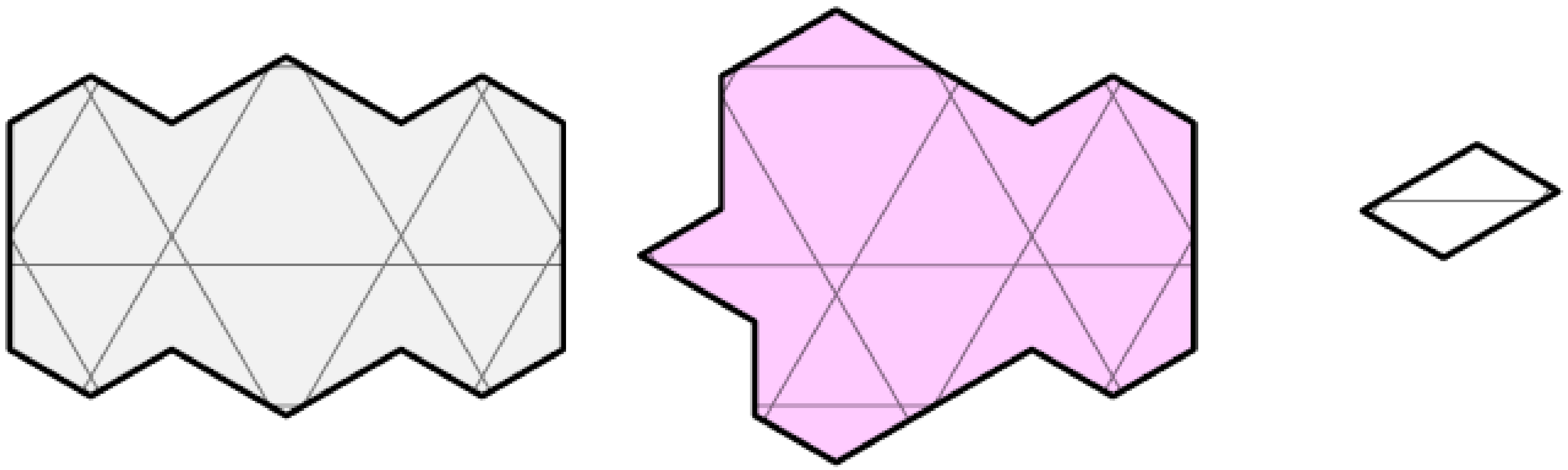
- 定理（秋山, 浜田, 伊藤　2026－）

任意の実二次無理数について、その傾きのスツルム格子からできるボロノイタイルを組み替えて強非周期タイル集合を作ることができる。

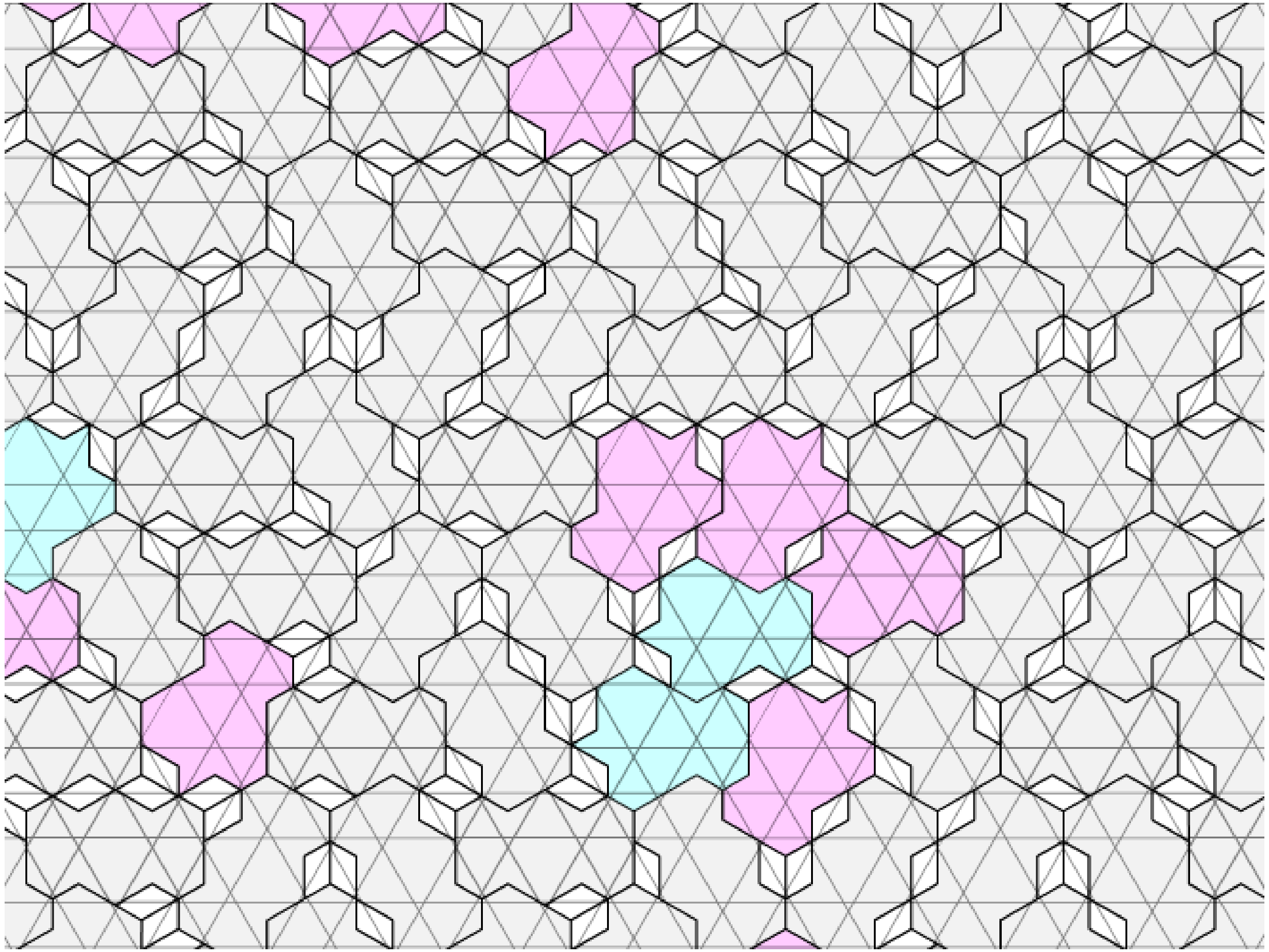
https://arxiv.org/abs/2506.19362

スツルム格子に対応するボロノイタイリング





$$\alpha = \sqrt{2} - 1$$



証明のポイント

ボロノイ胞をうまく組み合わせるため、準結晶の研究で使われる Delone 集合の Bounded Displacement equivalence というアイデアを用いる。

ご清聴ありがとうございました。

より詳しく知りたい方は数理研講究録をご覧ください