

複雑な系の上を熱はどのように伝わるか？

熊谷 隆

早稲田大学理工学術院

2025年3月21日

日本数学会 市民講演会

1



熱の伝導

各々の粒子がランダムに振動することで熱が伝わる。

熱方程式（微分方程式）の解を調べることで解析できる。

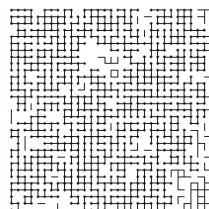
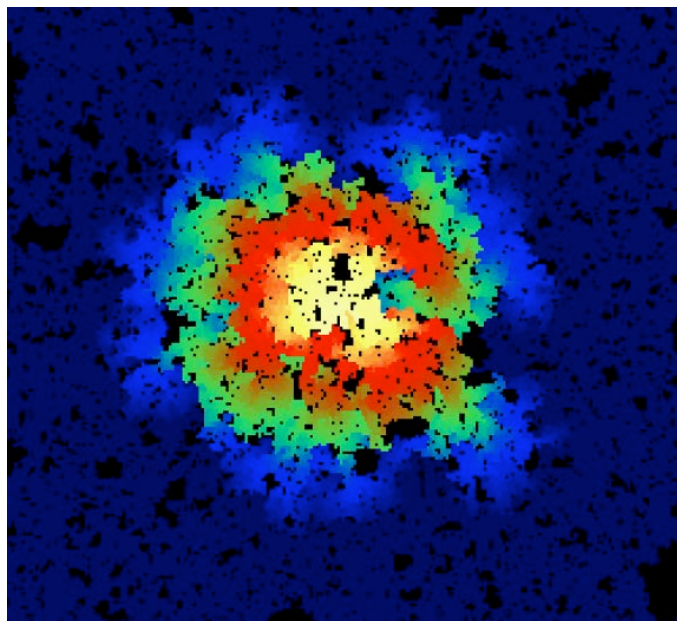
確率論を使った方法

空間の上にランダムウォークやブラウン運動を作り、熱伝導を解析する。

（メリット）●粒子の動きという具体的なイメージがつけやすい

●滑らかさのない空間の上でも、解析できる可能性あり

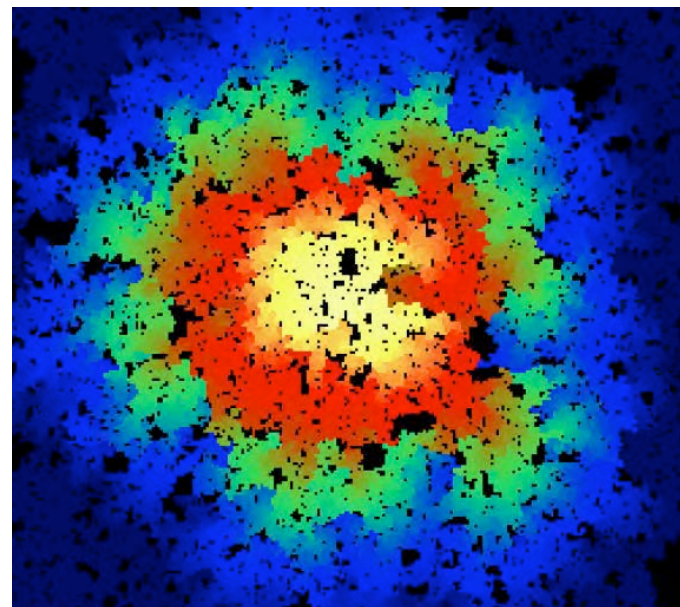
2



複雑な空間の例と
その上の熱伝導の
シミュレーション

© M.T. Barlow

3



© M.T. Barlow

4

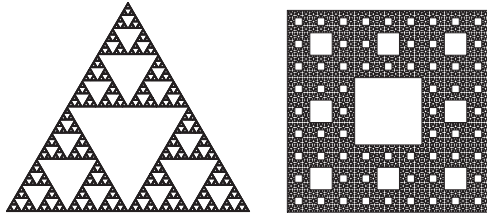


Figure 1: シェルピンスキーガasketとシェルピンスキーカーペット

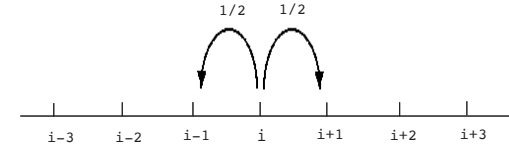
フラクタル

一部分と全体に自己相似性があるような図形のこと

マンデルブロ (フランスの数学者、20世紀後半) による造語

山の稜線やリアス式海岸などギザギザとして複雑な構造

5



§1 格子上的ランダムウォークとブラウン運動

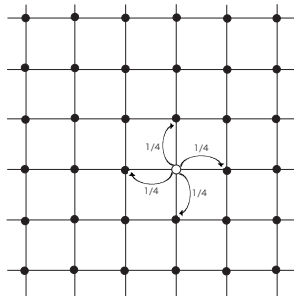
一次元の場合: $\{S_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ ランダムな粒子の動き

$$P(S_{n+1} = x + 1 | S_n = x) = 1/2, \quad P(S_{n+1} = x - 1 | S_n = x) = 1/2$$

1秒後に確率1/2で1歩右に、確率1/2で1歩左に動くようなランダムな動き

一次元 **シンプルランダムウォーク (酔歩)** と呼ぶ。

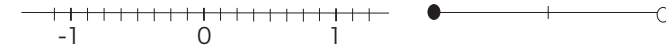
6



d 次元正方格子の上でも、シンプルランダムウォークを同様に定義できる。

例えば、二次元の場合、1秒後に確率1/4で一歩上 or 下 or 右 or 左に動く。

7



まず、自然数 m に対して $2^{-m}\mathbb{Z}$ 上のシンプルランダムウォーク $\{2^{-m}S_n\}$ を考える。

$m \rightarrow \infty$ の極限として、**実数上をランダムに動く粒子** を作りたい。

しかし、 $2^{-m}S_n$ で、単に $m \rightarrow \infty$ とすると粒子は動かなくなる。

そこで時間のスピードアップをする。

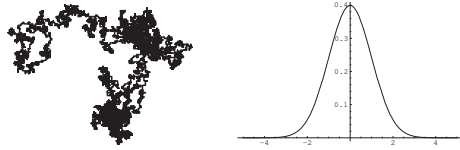
$2^{-1}S_n$ が $\{-1, 1\}$ に着くのにかかる平均時間は? $\rightarrow$ [答え] $4 (= 2^2)$

$2^{-m}S_{[4^m t]}$ とすると、 $\{-1, 1\}$ に着くのにかかる平均時間は 1。

$$2^{-m}S_{[4^m t]} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} B(t) \text{ (実数上のブラウン運動)}$$

*一般に d 次元のシンプルランダムウォークから、同様に d 次元ブラウン運動を作ることが出来る。

8



ブラウン運動のパスは、確率 1 で連続関数だが、すべての t において微分不可能！

●熱伝導との関係

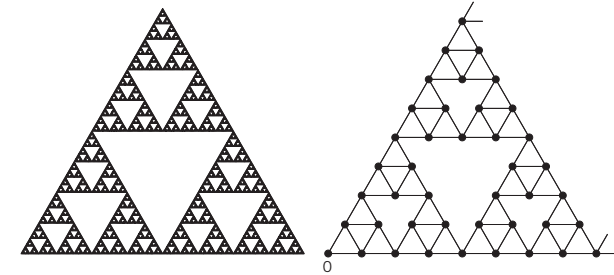
f を $\mathbb{R}^d$ (d 次元空間) 上のよい関数とする。

$$u(t, x) = \mathbf{E}[f(B(t)) | B(0) = x] = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) f(y) dy$$

とおくと、 u は以下の熱方程式の解である。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0 \quad (\text{ここで } \Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}) \\ \lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

9



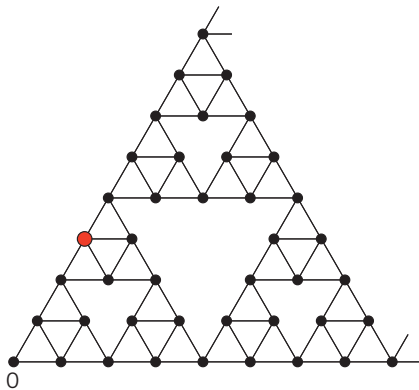
§2 フラクタルグラフ上のランダムウォークとブラウン運動

G : シェルピンスキーガスケットグラフ (上図右、無限に延びたグラフ)。

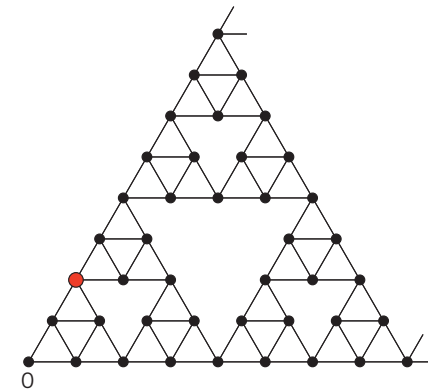
$\{S_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$: G 上のシンプルランダムウォーク

(1 秒後にボンドでつながった点に等確率で動くようなランダムな動き。)

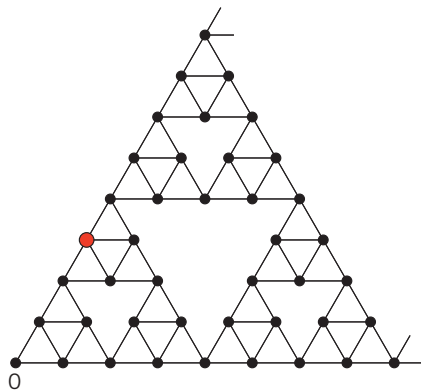
10



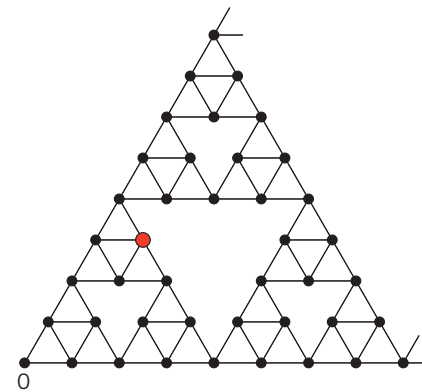
11



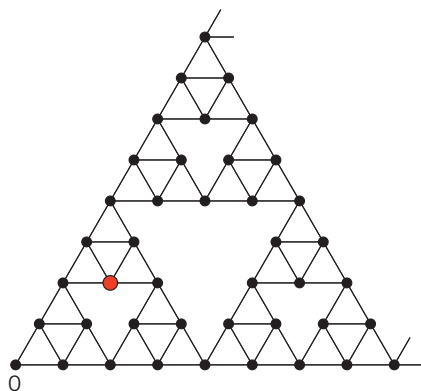
12



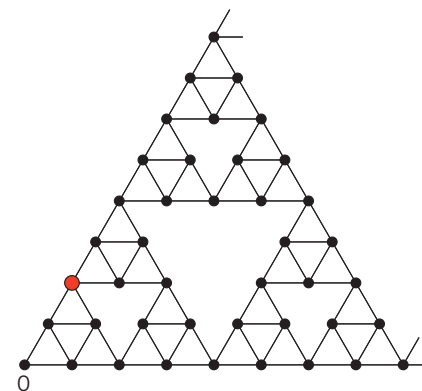
13



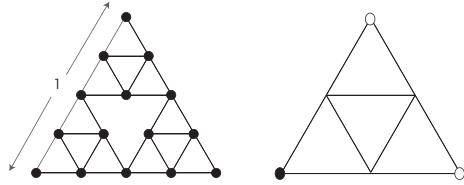
14



15



16



フラクタル上のブラウン運動

$2^{-m}G$ 上のシンプルランダムウォーク $\{2^{-m}S_n\}$ を考える。

$m \rightarrow \infty$ の極限として、**ガasket上をランダムに動く粒子**を作りたい。

$2^{-1}S_n$ が $\circ$ に着くのにかかる平均時間は？ $\rightarrow$ [答え] $5 (= 2^{\log 5 / \log 2})$

$2^{-m}S_{[5^m t]}$ とすると、 $\circ$ に着くのにかかる平均時間は 1。

$$2^{-m}S_{[5^m t]} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} B(t) \text{ (ガasket上のブラウン運動)} \quad (\text{Goldstein, 楠岡 '87})$$

対応するラプラス作用素は $5^m \{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 f(x_m^i) - f(x) \} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}f(x)$ (木上 '89)

異常拡散： $\log 5 / \log 2 > 2$ **拡散のスピードが通常の空間より遅い。**

ディリクレ形式（エネルギー）による解析：福島・島 '92

ポイント：**空間が滑らかである必要はない。**

劣ガウス型熱核評価 Barlow-Perkins '88, K '93, Hambly-K '99,

(Carpet) Barlow-Bass '89, '92, '99 **注意:** $d_f = d, d_w = 2$ ならガウス型

$$c_1 t^{-\frac{d_f}{d_w}} \exp \left(-c_2 \left(\frac{d(x, y)^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_w-1}} \right) \leq p_t(x, y) \leq c_3 t^{-\frac{d_f}{d_w}} \exp \left(-c_4 \left(\frac{d(x, y)^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_w-1}} \right)$$

$$d_f = \frac{\log 3}{\log 2} \text{ (ハウスドルフ次元)}, \quad d_w = \frac{\log 5}{\log 2} \text{ (ウォーク次元)},$$

$$\frac{d_s}{2} := \frac{d_f}{d_w} \text{ (スペクトル次元)}.$$

他にも多くの性質が解析されている。

フラクタルグラフのランダムウォークでも、同じく**劣ガウス型熱核評価**が

成り立つ（ただし、グラフによっては $p_{2n+1}(0, 0) = 0$ となることもある）。

$x = y = 0$ の場合を見ると

$$c_1 (2n)^{-\frac{d_f}{d_w}} \leq p_{2n}(0, 0) \leq c_2 (2n)^{-\frac{d_f}{d_w}}, \quad p_n(0, 0) \leq c_2 n^{-\frac{d_f}{d_w}}.$$

$p_{2n}(0, 0)$: 0 から出発した粒子が $2n$ 秒後に 0 に戻る確率

– ちょっと寄り道 –

- ある点から出発したランダムウォークが、**確率 1 で有限時間内に元の点に戻ってくる**とき、そのランダムウォークは**再帰的**という。

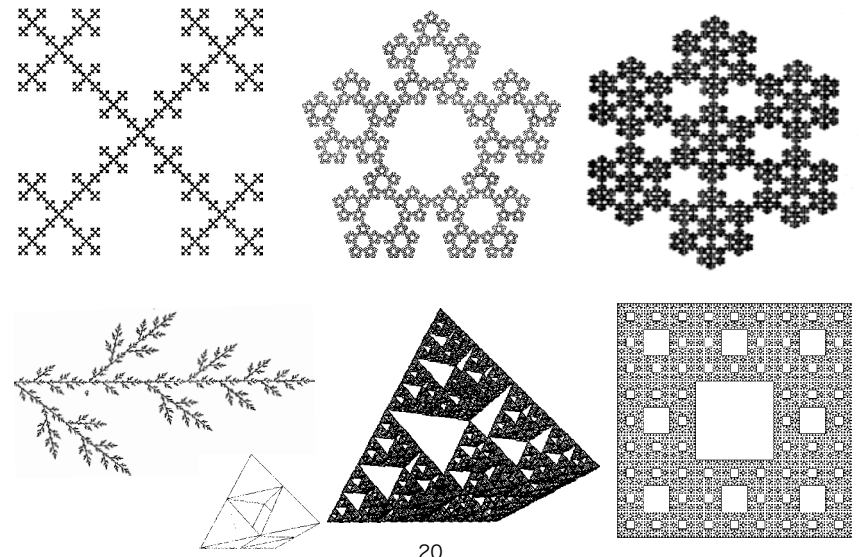
ランダムウォークは、いつ再帰的か？

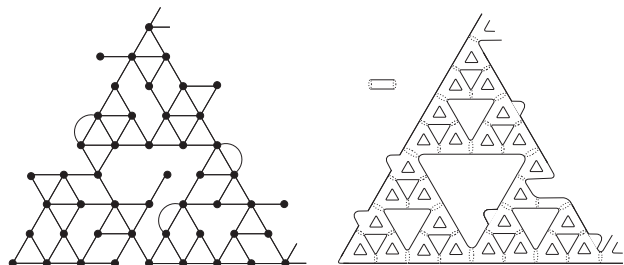
[事実] m を粒子が原点に戻る回数の平均とすると、「再帰的」 $\Leftrightarrow$ 「 $m = \infty$ 」

$$m = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(0, 0) \text{ だから, } m = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{d_f}{d_w}} = \infty \Leftrightarrow d_f \leq d_w$$

したがって、 $\mathbb{Z}^d$ の場合、「再帰的 $\Leftrightarrow d = 1, 2$ 」

解析が進んでいるフラクタルの例





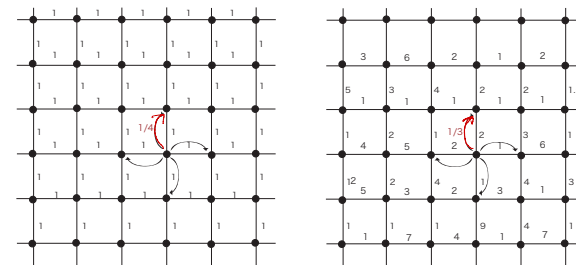
変形したフラクタルグラフ と フラクタル的多様体

安定性理論 (今世紀に入って進んだ)

図形の形や、ランダムウォークの推移確率を多少変化させ (摂動を加え) ても

長い時間での熱伝導の仕方に大きな変化はない。

• Barlow-Bass '03, Barlow-Coullhon-熊谷 '05, Barlow-Bass-熊谷 '06, Andres-Barlow '15, Grigor'yan-Hu-Lau '15 など



ボンドの「重み」 μ_e を $C_1 \leq \mu_e \leq C_2$ なる範囲で変えても、

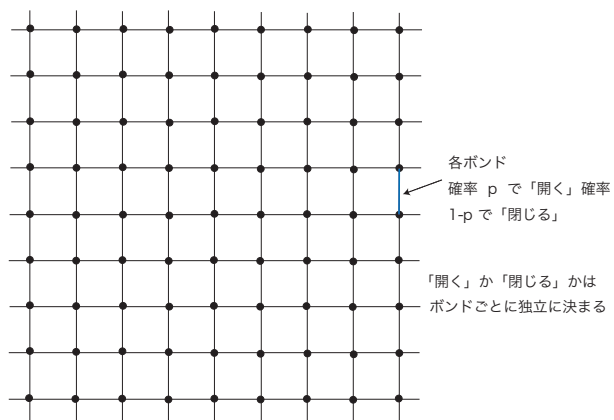
$$c_1 n^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-c_2 \frac{|x-y|^2}{n}\right) \leq p_{2n}(x, y) \leq c_3 n^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-c_4 \frac{|x-y|^2}{n}\right)$$

の評価は保たれる ($c_1, \dots, c_4$ は C_1, C_2 に応じて変わる)。

よって、再帰性・非再帰性も保たれる。

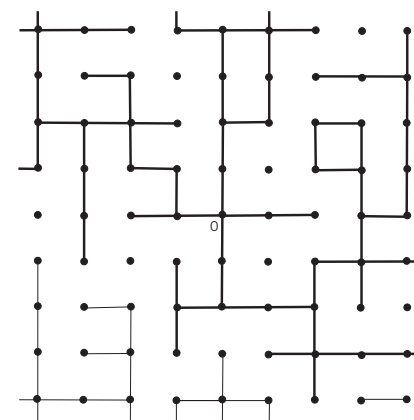
ランダムな媒質上のランダムウォークと異常拡散

格子上のパーコレーションクラスター上のランダムウォーク



ランダムな媒質上のランダムウォークと異常拡散

格子上のパーコレーションクラスター上のランダムウォーク



相転移: $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$) のとき、 $p_c \in (0, 1)$ (臨界確率) が存在して

$p > p_c$ (優臨界確率) なら確率 1 で無限クラスターが唯一存在する。

$p < p_c$ (劣臨界確率) なら確率 1 で無限クラスターは存在しない。

- 優臨界確率では、ランダムウォークの大域的な振舞いは正方格子のそれとあまり変わらない Barlow '04, Sidoravicius-Sznitman '04, Berger-Biskup '07, Mathieu-Piatnitski, '07

臨界確率ではどうか? $p_{2n}(0, 0)$: 0 から出発した粒子が $2n$ 秒後に 0 に戻る確率

$d_s = -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \log p_{2n}(0, 0) / \log n$: スペクトル次元 (つまり $p_{2n}(0, 0) \asymp n^{-d_s/2}$)

アレキサンダー・オーバッハ予想 '82: $d \geq 2$ の時 $d_s = 4/3$ (d ではなく)

25

実は、少なくとも $d = 2$ と $d \geq 11$ では $p = p_c$ では無限クラスターは存在しない。

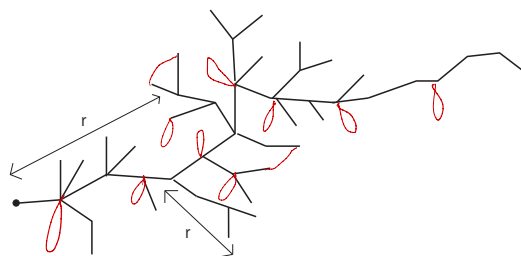
そこで、無限クラスターが存在すると条件付けた場合の、無限クラスターを考える。

(この上の物理現象は、元のクラスターの主要な現象を反映する)

アレキサンダー・オーバッハ予想の解決

- 樹木状パーコレーション Barlow-熊谷 '06
- 高次元有向パーコレーション Barlow-Járai-熊谷-Slade '08
- 高次元パーコレーション Kozma-Nachmias '09

26



大事な関係式 (強い再帰性をもつ確率過程の場合)

「図形の体積増大度 (ハウスドルフ次元): d 」と「有効抵抗増大度: ζ 」から
スペクトル次元が決まる! (この場合 $d = 2, \zeta = 1$ なので、 $d_s = 4/3$)

$$d_s = \frac{2d}{d + \zeta}$$

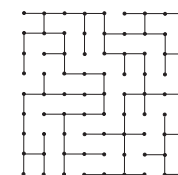
*アレキサンダー・オーバッハ予想は、低次元 ($d \leq 5$) では正しくないと考えられている。(未解決問題)

27

ランダムグラフ 二次元一様全域木 (UST)

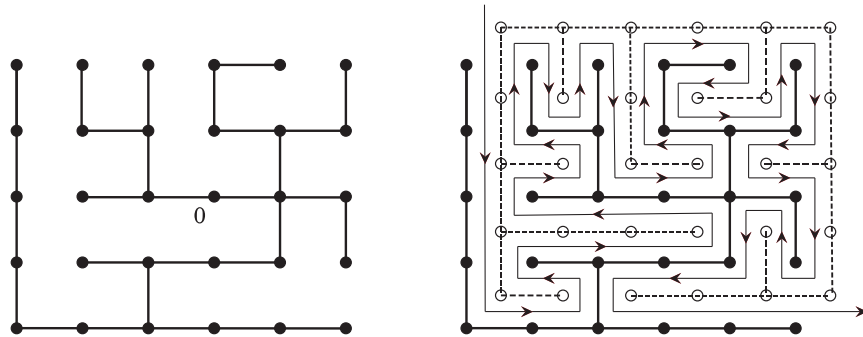
$\Lambda_n := [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, $\mathcal{U}^{(n)}$ を Λ_n 上の全域木 (全頂点を通り、連結、サイクルがない)

— すべての全域木から一様ランダムに選ぶ



$\mathcal{U}$: UST on $\mathbb{Z}^2$ は $\mathcal{U}^{(n)}$ の極限 (確率 1 で $\mathbb{Z}^2$ 上の全域木)

28



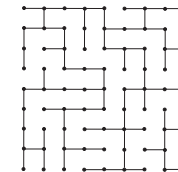
UST と UST ペアノ 曲線

29

ランダムグラフ 二次元一様全域木 (UST)

$\Lambda_n := [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, $\mathcal{U}^{(n)}$ を Λ_n 上の全域木 (全頂点を通り、連結、サイクルがない)

— すべての全域木から一様ランダムに選ぶ



$\mathcal{U}$: UST on $\mathbb{Z}^2$ は $\mathcal{U}^{(n)}$ の極限 (確率 1 で $\mathbb{Z}^2$ 上の全域木)

- **UST スケール極限**: [Schramm '00] 部分列スケール極限の位相的性質
[Lawler-Schramm-Werner '04] スケール極限の一貫性
- SLE (Schramm-Loewner evolution) 統計力学に関する離散モデルのスケール極限になることが示された。(2つのフィールズ賞)

30

我々が考えているのは、このようなランダムな空間の上のランダムウォークのスケール極限とその性質である。(その結果、熱伝導などの物理現象がわかる。)

[Barlow-Croydon-K '17, Holden-Sun '18] $\{\varepsilon Y_{\varepsilon^{-13/4}t}}^{\mathcal{U}}\}_{t \geq 0} \xrightarrow{d} \{B_t^T\}_{t \geq 0}$.

定理. $\exists p_t^{\mathcal{U}}(\cdot, \cdot)$: $B^{\mathcal{U}}$ の連続な熱核, $\exists T_0 > 0$ s.t. for $\mathbb{P}$ -a.e. $\omega \in \Omega$,

$$p_t^{\mathcal{U}}(x, y) \leq c_1 t^{-\frac{d_f}{d_w}} \ell(t^{-1}) \exp \left\{ -c_2 \left(\frac{d(x, y)^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_w-1}} \ell \left(\frac{d(x, y)}{t} \right)^{-1} \right\}$$

$$p_t^{\mathcal{U}}(x, y) \geq c_3 t^{-\frac{d_f}{d_w}} \ell(t^{-1})^{-1} \exp \left\{ -c_4 \left(\frac{d(x, y)^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_w-1}} \ell \left(\frac{d(x, y)}{t} \right) \right\}$$

for all $x, y \in \mathcal{U}, t \leq T_0$, ただし $\ell(x) := (1 \vee \log x)^\theta$, $(\exists \theta > 0)$.

UST では $d_f = 8/5, d_w = d_f + 1 = 13/5$ 。

[Barlow-Croydon-K '21] Annealed (媒質について平均をとったもの) の熱核評価

31

応用の可能性 (例)

- ネットワークにウイルスが侵入した時の伝播の仕方を調べる。
(例: エルデシュ・レーニイのランダムグラフなどの複雑系ネットワーク)
- 不均質な媒質からなる土壤に汚染物質が染み込む速さを解析する。
(分数冪時間微分熱方程式による解析: 確率論のアプローチ)

基礎理論と応用の両面において更なる発展が期待できる。

ご清聴ありがとうございました。

32