

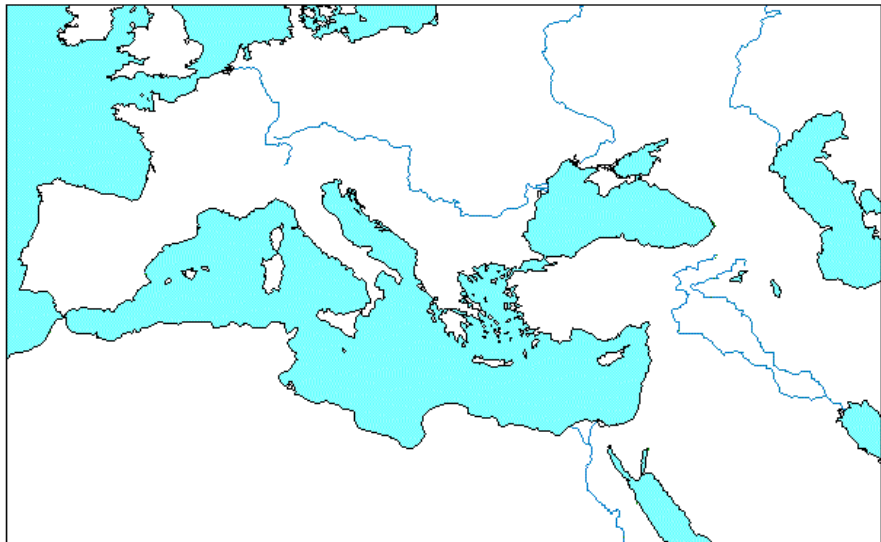
数学って何？

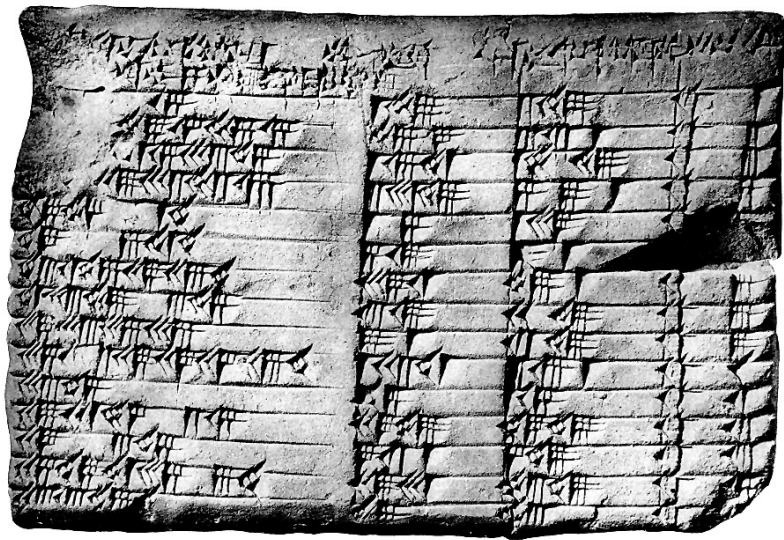
原岡喜重

城西大学 数理データサイエンスセンター

日本数学会年会 市民講演会
2025 年 3 月 21 日

数学の始まり：古代エジプト，バビロニア，ギリシア





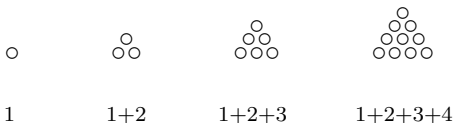
Plimpton 322: 古代バビロニア（BC 1900 - 1600）の、くさび形文字が書かれた粘土板. ピタゴラス・トリプルが書かれている ($a^2 + b^2 = c^2$)



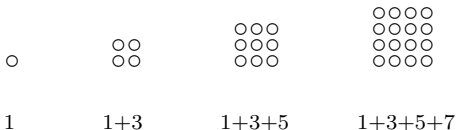
古代エジプト（BC 1650 頃）のлинд・パピルス．食料の配分などのための計算方法，長方形の面積などが書かれている．

ピタゴラス (BC 582 - 496)

数学を実用の具から思惟の対象にまで高めた
数と図形の間に成り立つ驚きの秩序



$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



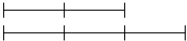
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

数と音楽の間に成り立つ驚きの秩序

長さが簡単な整数比となっている2弦の音は調和する

1 : 2  ⇒



2 : 3  ⇒



ピタゴラス

「万物は数である」

しかし...

プラトン (BC 427 - 347)

師であるソクラテスの刑死 – 国家をよりよくしようと生涯を捧げたソクラテスが、その国家によって殺された。国家とはいったい何だろうか？

『国家』

問：国家はどのように治められるべきか？国家を治める資質のある人を育成するにはどうすればよいのか？

プラトンの解答：政治には様々な利害が対立するが、真の善、真の正義をわきまえている人が国家の運営に当たるべきだ。

真の善、真の正義とは何か？それをわきまえたかどうかは、どうやって判断したらよいのか？

真の〇〇 = イデア

アイデア：我々が見たり触ったりしてわかるもののその奥にある本質

美のアイデアとは（『饗宴』より）

- ・表面上の「美」の奥にある，一種驚嘆すべき美
- ・一方から見れば美しく他方から見れば醜いというようなものでもなく
- ・時としては美しく時としては醜いということもなく
- ・ある者には美しく見え他の者には醜く見えるというものでもない
- ・顔とか手とか肉体に属するものとして顕れることなく
- ・独立自存し永久に独特無二の姿を保てる美そのもの

国家は，善とは何か（善のアイデア），正義と何か（正義のアイデア）を知る人が統治すべきだ。

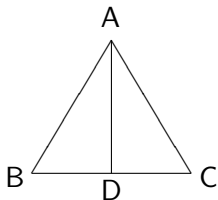
「アイデアを観得できる者が，国家の指導者になるべきだ」
そのような人を育てるため，学園「アカデメイア」を創設

ではどうすればアイデアを観得できるようになるか？
どうやってアイデアを観得したかがわかるのか？

定理

二等辺三角形の2つの底角は等しい

証明

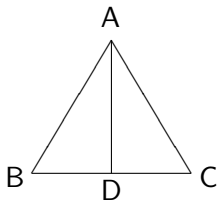


$$AB = AC, DB = DC, AD = AD \Rightarrow \triangle ABD \equiv \triangle ACD \Rightarrow \angle B = \angle C \quad \square$$

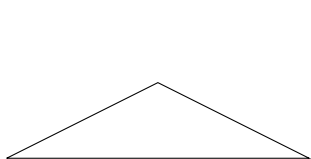
定理

二等辺三角形の2つの底角は等しい

証明



$$AB = AC, DB = DC, AD = AD \Rightarrow \triangle ABD \equiv \triangle ACD \Rightarrow \angle B = \angle C \quad \square$$



$\Rightarrow$ 二等辺三角形のアイデア

数学の概念はアイデアである.

数学を学ぶことでアイデアを観得する能力が養われる.

アカデメイアでの必修科目

1. 算術, 2. 幾何学, 3. 天文学



数学の概念はアイデアである。

数学を学ぶことでアイデアを観得する能力が養われる。

アカデメイアでの必修科目

1. 算術, 2. 幾何学, 3. 天文学



パラドックス

足の速いアキレスはいつまで経っても足の遅い亀に追いつけない
弓から放たれた矢はいつまで経っても的に達しない

こういったパラドックスは、論理に基づいて組み立てられた世界像を破壊する危険因子

「いつまで経っても」＝「無限」

論理の中に「無限」が登場することでおかしなことが起きる

アカデメイアで教えられた数学の内容は『ユークリッド原論』に集大成されている。

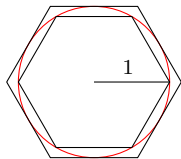
一つの特徴：無限の排除（取り尽くし法＝ ϵ - δ 論法）

アルキメデス (BC 287 - 212)

無理数のタブー（ピタゴラス）、無限のタブー（プラトン）をものともせず、逆に積極的に利用

無理数：有理数で上下から挟み、実質的に把握する … 現代の実数の把握の仕方

円周率を、内接正多角形と外接正多角形の周長で挟むことで求めた
半径 1 の円（円周は 2π ）を内接正 6 角形と外接正 6 角形で挟んだ場合、
 $6 < 2\pi < 4\sqrt{3} \Rightarrow 3 < \pi < 2\sqrt{3}$



さらに正 12 角形，正 24 角形，… と細分していくと、いくらでも（無限！）精密な評価が得られる

$\sqrt{3}$ の把握の仕方 :

$$\textcircled{1} \ a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a} \quad \textcircled{2} \ a - \frac{b}{2a-1} < \sqrt{a^2-b} < a - \frac{b}{2a}$$

$3 = 2^2 - 1$ より $a = 2, b = 1$ として $\textcircled{2}$ を使うと $\frac{5}{3} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$,
 $\frac{5}{3} < \sqrt{3}$ より 3 は $(5/3)^2 = 25/9$ より少し大きい,
 $3 = \frac{27}{9} = \frac{5^2+2}{9}$, $a = 5, b = 2$ として $\textcircled{1}$ を使うと $\frac{57}{11} < \sqrt{5^2+2} < \frac{26}{5}$,
各辺を 3 で割って $\frac{19}{11} < \sqrt{3} < \frac{26}{15}, \dots$

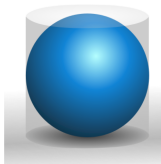
$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

こういった結果を用いてアルキメデスが求めた円周率

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$$

$3.140845 \dots < \pi < 3.142857 \dots$, これより $\pi = 3.14 \dots$ がわかった

- 球の表面積は，その球の大円の面積の 4 倍である ($4\pi r^2 = 4 \times \pi r^2$)
- 球の体積は，球の大円に等しい底面を持ち球の半径に等しい高さを持つ円錐の体積の 4 倍である ($\frac{4\pi r^3}{3} = 4 \times (\frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r)$)
- 球の体積は，球の大円を底面として直径を高さとする円柱の体積の $\frac{2}{3}$ 倍



アルキメデス

これらの性質は，図形の本性としてはじめから備わっていたものなのですが，私より前に幾何学を研究した人々の誰にも知られず，それらの図形にそのような関係があらうとは誰も思ってもみないことでした。

ガリレオ (1564 - 1642)



天空の星も目の前のボールも、すべての物体は**同じ法則**に従って運動するはずだ. その法則を見つけるためには、目の前のボールで**実験**すればよい.

落下する物体はだんだん速くなる - 「だんだん」を定量的に求めた.

「1, 3, 5, ... の法則」 $\rightsquigarrow$ 速度は時間に比例する

ガリレオ

これらのことはすべて僕らの友人（ガリレオのこと）によって見出され証明されたのです。僕たちはこれらすべてを非常に喜びまた驚きながら知り、また研究もしてみました。というのはそれを巡って何百巻という書物が書かれた主題（落下運動）について、全く新しい知識を呼び起こされたからです。この友人の書物のうちに述べられた数限りない驚くべき結論のどれ一つをとってみても、僕らの友人以前にはだれ一人としてそれを観察し理解したものはないのです。

ガリレオ

自然という書物は、数学の言葉で書かれている

ガリレオの自然哲学 = 現代科学文明の礎

ガリレオ

これらのことはすべて僕らの友人（ガリレオのこと）によって見出され証明されたのです。僕たちはこれらすべてを非常に喜びまた驚きながら知り、また研究もしてみました。というのはそれを巡って何百巻という書物が書かれた主題（落下運動）について、全く新しい知識を呼び起こされたからです。この友人の書物のうちに述べられた数限りない驚くべき結論のどれ一つをとってみても、僕らの友人以前にはだれ一人としてそれを観察し理解したものはないのです。

ガリレオ

自然という書物は、数学の言葉で書かれている

ガリレオの自然哲学 = 現代科学文明の礎

しかしガリレオは、万物の運動を支配する法則を発見することはできなかった。何が足りなかったのか？

ニュートン (1642 - 1727)

万物の運動を支配する法則を発見

ニュートンの運動法則

$$F = m\alpha$$

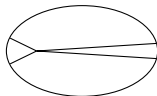
F = 外力, m = 質量, α = 加速度 = x'' (距離を表す関数の2回微分)

ガリレオになくてニュートンにあったもの = 速度 = 微分

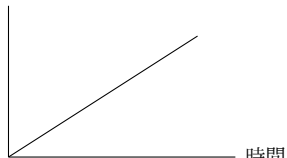
「1, 3, 5, ... の法則」: 速度が変化する様子を, 単位時間に進む距離の違いで表現

ガリレオは瞬間における速度をとらえる術を持っていなかった

ガリレオの同時代人ケプラーも, 惑星の運行に関する彼の第2法則 (面積速度一定の法則) で, 速度の違いを単位時間に描く面積で表現



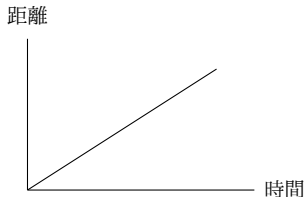
距離



等速運動の場合, (速度) = $\frac{(\text{距離})}{(\text{時間})}$

時刻 t における速度 = $\frac{t \text{ までに進んだ距離}}{t \text{ までに経過した時間}}$

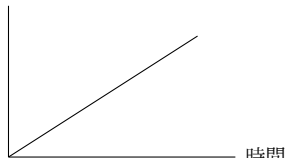
等速運動の場合、(速度) = $\frac{(\text{距離})}{(\text{時間})}$



$$\text{時刻 } t \text{ における速度} = \frac{t \text{ までに進んだ距離}}{t \text{ までに経過した時間}}$$

$$\text{時刻 } t \text{ における速度} = \frac{t \text{ という瞬間に進んだ距離}}{t \text{ という瞬間に経過した時間}}$$

距離

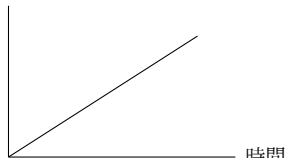


等速運動の場合, (速度) = $\frac{(\text{距離})}{(\text{時間})}$

$$\text{時刻 } t \text{ における速度} = \frac{t \text{ までに進んだ距離}}{t \text{ までに経過した時間}}$$

$$\text{時刻 } t \text{ における速度} = \frac{t \text{ という瞬間に進んだ距離}}{t \text{ という瞬間に経過した時間}} = \frac{0}{0}$$

距離



等速運動の場合、(速度) = $\frac{(\text{距離})}{(\text{時間})}$

時刻 t における速度 = $\frac{t \text{ までに進んだ距離}}{t \text{ までに経過した時間}}$

時刻 t における速度 = $\frac{t \text{ という瞬間に進んだ距離}}{t \text{ という瞬間に経過した時間}} = \frac{0}{0}$

ニュートンのアイデア：時間を少しだけ流す

時刻 t における速度の近似値 = $\frac{t \text{ から } t+h \text{ までの間に進んだ距離}}{h}$

$h \rightarrow 0$ とした極限が t という瞬間における速度

瞬間の速度を直接求めようとすると失敗する。

近似値から間接的に求める，という高度な発想によって成功した。

微分法のもたらしたもの

◇ ガリレオの自然哲学が実践されるようになった
物事が起こる前に、どうなるかがわかる – 帰納から演繹へ
人類の行動を根底から変えた

ピタゴラス：長さの比が簡単な整数比である 2 弦の音は調和する

ケプラー：惑星の運行に関する 3 法則

ガリレオ：自由落下の法則

これらすべてがニュートンの運動法則からの帰結

⇒ 現代の科学・技術社会へ

◇ 積分が微分と結びつくことで、面積や体積が簡単に求められるようになった

2000 年間、一人アルキメデスの天才のみに可能であった面積・体積の計算を、世界中の高校生ができるようになった！

オイラー (1707-1783)

オイラー

自然数のべきを持った級数は、今日それについて何か新しいことが発見されうるとはほとんど思えないほどに熟考され研究されてきた。実際、級数の和について考えた人は誰であれほとんど全員、この種の級数の和も求めようとしてきた。しかしその和をうまい具合に一つの方法で表現することができなかった。(中略) さて最近私は、全く思いがけず、

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

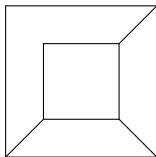
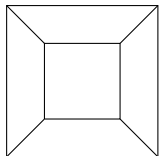
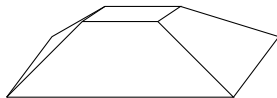
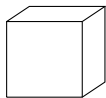
という級数の巧みな表現に到達した。...

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

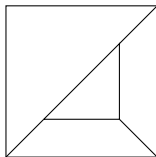
凸多面体について,

$$(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$$

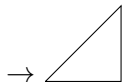
は一定である. この数のことを現代ではオイラー標数と呼ぶ.



辺の数 -1 , 面の数 -1



辺の数 -1 , 頂点の数 -1



この図形については

$$(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 3 - 3 + 2 = 2$$

すなわち凸多面体のオイラー標数は2

ここで考えた凸多面体は凸である必要はない．少しへこんだところがあっても構わない．しかし穴が空いてはいけいない．つまり連続的に球面に変形できるような多面体であればよい．



この図形については

$$(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 3 - 3 + 2 = 2$$

すなわち凸多面体のオイラー標数は2

ここで考えた凸多面体は凸である必要はない．少しへこんだところがあっても構わない．しかし穴が空いてはいけい．つまり連続的に球面に変形できるような多面体であればよい．

そこで、**球面のオイラー標数は2である**，という言い方ができる．



この図形については

$$(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 3 - 3 + 2 = 2$$

すなわち凸多面体のオイラー標数は2

ここで考えた凸多面体は凸である必要はない．少しへこんだところがあっても構わない．しかし穴が空いてはいけいない．つまり連続的に球面に変形できるような多面体であればよい．

そこで，**球面のオイラー標数は2である**，という言い方ができる．

球面のオイラー標数が2?!

球面には面が1つで辺も頂点もないではないか．



この図形については

$$(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 3 - 3 + 2 = 2$$

すなわち凸多面体のオイラー標数は2

ここで考えた凸多面体は凸である必要はない．少しへこんだところがあっても構わない．しかし穴が空いてはいけい．つまり連続的に球面に変形できるような多面体であればよい．

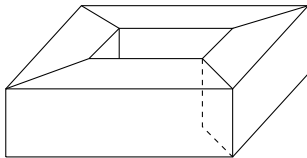
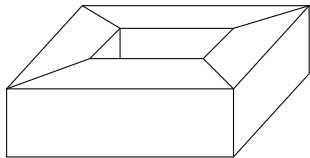
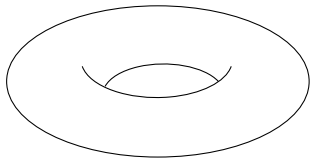
そこで、**球面のオイラー標数は2である**，という言い方ができる．

球面のオイラー標数が2?!

球面には面が1つで辺も頂点もないではないか．

球面＝アイデア，このアイデアから情報を引き出すには，球を粘土でできていると思って好きな多面体に整形し，頂点の数，辺の数，面の数を数えればよい．

トーラス



トーラスのオイラー標数 = 球面のオイラー標数 $-2 = 0$

世界を数学の見方で把握する方法

本当のもの（アイデア – 目に見えない）

同値類

「見える化」する

同値類の代表元を 1 つ選び出す

見えるようになったものを扱う

代表元に操作を施す

結果が見える化の仕方に依るか？

well-defined

依る → 本当のものについての結果ではない

依らない → 本当のものを扱えた

見えているものは「見える化」の結果ととらえ、その奥にある本当のものを意識することが大事

同値関係・同値類の例

集合 $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ に関係 $\sim$ を次のように入れる.

$$(a, m) \sim (b, n) \Leftrightarrow an = bm$$

同値なものをすべて集めた集合を同値類といい, $[\]$ で挟んで表す:

$$[(a, m)] = \{(a', m') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \mid (a', m') \sim (a, m)\}$$

同値類全体の集合を商集合といい, $X/\sim$ と表す.

$X/\sim$ に和と積を定義する.

$$[(a, m)] + [(b, m)] = [(a + b, m)], \quad [(a, m)] \times [(b, n)] = [(ab, mn)]$$

well-defined であることを確認する. (積について)

$(a', m') \sim (a, m), (b', n') \sim (b, n)$ とすると $a'm = am', b'n = bn'$.

このとき

$$a'b' \times mn = (a'm)(b'n) = (am')(bn') = ab \times m'n'$$

よって $(a'b', m'n') \sim (ab, mn)$ が成り立つ.

同値類の定義（再掲）

$$[(a, m)] = \{(a', m') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \mid (a', m') \sim (a, m)\}$$

$$[(a, m)] = \frac{a}{m} \text{ と書く.}$$

和の定義は $[(a, m)] + [(b, m)] = [(a + b, m)]$ であった.

今の書き方を使うと

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a + b}{m}$$

例：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3 + 2}{6} = \frac{5}{6}$$

$\frac{1}{2} = [(1, 2)]$ は見えない，扱えない．

見えているように思えるのは，代表元 $(1, 2)$ を持ってきているから．

見える化に用いた代表元 $(1, 2)$ は，この和の計算には適さないので，別の代表元 $(3, 6)$ に取り替えた．

超幾何関数

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n \quad \dots \textcircled{1}$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-xt)^{-b} dt \quad \dots \textcircled{2}$$

ゲルファント (1913-2009)

超幾何関数

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n \quad \dots \textcircled{1}$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-xt)^{-b} dt \quad \dots \textcircled{2}$$

②は、可換群 $(\mathbb{C}^*)^4$ の指標のラドン変換（変数に1次式を代入して積分すること）である。

$(\mathbb{C}^*)^n$ の指標に k 変数1次式を代入して積分

→ グラスマン多様体 $\text{Gr}(n, k)$ 上の超幾何関数

「超幾何関数はグラスマン多様体に住んでいるべきだ！」（Gelfand）

可換群 $(\mathbb{C}^*)^n$ を他の可換群に取り替える（たとえば $\mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^{n-2}$ ）

→ 一般合流型超幾何関数

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) & (n \geq 1) \end{cases} = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

($\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ に注意)

①は, $x = x_3 x_4 / x_1 x_2$ とおき,

$$A_n = \frac{(-1)^n \Gamma(a+n)}{x_1^{a+n}}, \quad B_n = \frac{(-1)^n \Gamma(b+n)}{x_2^{b+n}}, \quad C_n = \frac{x_3^{c-1+n}}{\Gamma(c+n)}, \quad D_n = \frac{x_4^n}{\Gamma(1+n)}$$

と定めると, $\frac{\partial A_n}{\partial x_1} = A_{n+1}$, $\frac{\partial B_n}{\partial x_2} = B_{n+1}$, $\frac{\partial C_n}{\partial x_3} = C_{n-1}$, $\frac{\partial D_n}{\partial x_4} = D_{n-1}$

$$\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n B_n C_n D_n = \frac{x_3^{c-1}}{x_1^a x_2^b} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b, c; x)$$

φ は次の微分方程式をみたす.

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_4} \right) \right] \varphi = 0$$

一般に $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T \in \mathbb{Z}^4$ を

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{b} = 0$$

をみたすように取ると,

$$\left[\prod_{j; b_j > 0} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{b_j} - \prod_{j; b_j < 0} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right)^{-b_j} \right] \varphi = 0$$

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ がガンマ関数の入り方を規定している.

A をある条件をみたすように一般化すると [A-超幾何関数](#) ([GKZ 超幾何関数](#)) が得られる.

$\rightsquigarrow$ hyperdeterminant, 保型関数, ミラー対称性

ゲルファント

ある年老いた配管工が、ヒーターの修繕に来た。彼はヒーターの周りを歩き回り、しばし考え、そしてヒーターをハンマーで一度たたいた。ヒーターはたちまち動き始めた。配管工は200ルーブルを請求した。持ち主が「でもおまえはちょうど2分だけいてほかに何もしてないじゃないか」と言うと、配管工は次のように答えた。「3ルーブルがヒーターをたたいた分で、残りはどこをたたけばよいかを知っていることに対する分だ。そのことを知るために私は40年学んだのだ！」

Zelevinsky: 私は彼のように「big picture」を描き、不要な技術的詳細にとらわれず常に核心に到達する数学者を見たことがない。彼は「正しい」問を立て、異なる数学の領域の間に思いもよらない関係を見つけ出す、尋常ではない能力を備えていた。

出典・参考文献

- [1] http://www.yk.rim.or.jp/~kimihira/map/bizantz_6cent.htm (地中海の地図)
- [2] <https://ja.wikipedia.org/wiki/プリンプトン> 322
- [3] <https://ja.wikipedia.org/wiki/リンド数学パピルス>
- [4] 吉田洋一「零の発見」岩波新書, 1979.
- [5] プラトン (久保勉訳)「饗宴」岩波文庫, 1952.
- [6] プラトン (藤沢令夫訳)「国家 (上・下)」岩波文庫, 1979.
- [7] 上垣渉「アルキメデスを読む」日本評論社, 1999.
- [8] <https://ja.wikipedia.org/wiki/球と円柱について>
- [9] <https://www.museogalileo.it/en/galileo/instruments-en.html>
- [10] 朝永振一郎「物理学とは何だろうか 上」岩波新書, 1979.
- [11] S. G. ギンディキン「ガリレイの 17 世紀」シュプリンガー・フェアラーク東京, 1996.
- [12] オイラー「逆級数の和について」(馬場郁訳) 数学セミナー 1988 年 10 月号.
- [13] 原岡喜重「超幾何関数」朝倉書店, 2002.
- [14] V. Retakh (Ed.), Israel Moiseevich Gelfand, Part I, Notices of AMS, **60** No.1 (2013), 24-49.

ご清聴ありがとうございました