

遠アーベル幾何学の過去・現在・未来

玉川 安騎男（京都大学数理解析研究所）

2025 年 9 月 17 日

[スライド中では敬称略]

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

0. はじめに

遠アーベル幾何 (anabelian geometry) :

- 1980 年代前半 Grothendieck が提唱
- 1990 年代～ 内外で活発な研究 (日本が一つの中心)

本講演の計画：

0. はじめに [約 5 分]
1. 遠アーベル幾何とは何か [約 20 分]
 - 1.1. スキーム論
 - 1.2. エタール基本群
 - 1.3. 遠アーベル幾何
2. 遠アーベル幾何におけるいくつかの基本的な結果 [約 10 分]
 - 2.1. 代数曲線の遠アーベル幾何
 - 2.2. 双有理遠アーベル幾何
3. 遠アーベル幾何の進展と未来 [約 25 分]
 - 3.1. 高次元代数多様体の遠アーベル幾何
 - 3.2. 正標数における遠アーベル幾何
 - 3.3. エタール基本群の群論的商を用いた遠アーベル幾何
 - 3.4. 取り上げなかった話題

本講演の方針：

- ・ 遠アーベル幾何の研究成果の網羅的な概説はしない（cf. 「数学」論説：中村 1995、中村・玉川・望月 1998、星 2022）
- ・ いくつかの事例をお見せして遠アーベル幾何の本質やおもしろみをお伝えし、将来の展望について考えていきたい
- ・ 非専門家の方を想定し、なるべく平易な言葉で技術的に難しいところに入らずに説明したい

1. 遠アーベル幾何とは何か

1.1. スキーム論

代数幾何 $\approx$ 代数閉体上定義された代数多様体の研究

数論幾何 $\approx$ 「数論的な体」上定義された代数多様体の研究

代数多様体：

- ・「いくつかの（多変数）多項式の共通零点として表される図形（をはり合わせてできるもの）」
- ・基礎付けにはさまざまな流儀（があった）
- ・現在最も標準的な定義はスキーム論による

スキーム論：

- ・1950年代～Grothendieck らを中心に構築
- ・1960年代～1970年代初頭 EGA & SGA

任意の可換環 $A \rightsquigarrow$ アフィンスキーム $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} A})$

- $\mathrm{Spec}(A) := \{A \text{ の素イデアル全体} \}$
- $I: A \text{ のイデアル} \rightsquigarrow V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supset I\}$
- $\mathrm{Spec}(A)$ には $\{V(I) \mid I: A \text{ のイデアル}\}$ を閉集合全体とする位相が入る。
- $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$: 位相空間 $\mathrm{Spec}(A)$ 上の可換環の層 (定義は省略)
- 開集合 $U \subset \mathrm{Spec}(A)$ に対し、 $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ は、 U 上の「正則」関数全体の集合と考えることができる。
- $\Gamma(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ は A と同一視することができ、前者の関数としての和・積は後者の可換環としての和・積と対応

一般のスキーム $(X, \mathcal{O}_X)$ (X : 位相空間、 $\mathcal{O}_X$: X 上の可換環の層) は、アフィンスキームのはり合わせによって定義される (cf. 多様体の定義) $(X, \mathcal{O}_X)$ を X と略記することも多い

$(\mathbf{CRing}) := (\text{可換環全体のなす圏})$

$(\mathbf{AffSch}) := (\text{アフィンスキーム全体のなす圏})$

$(\mathbf{Sch}) := (\text{スキーム全体のなす圏})$

とすると、

$$(\mathbf{Sch}) \supset (\mathbf{AffSch}) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{CRing})$$

$$(X, \mathcal{O}_X) \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

$$(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}) \leftarrow A$$

X : スキーム、 Y : アフィンスキームに対し、

$$\mathrm{Hom}_{(\mathbf{Sch})}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(\mathbf{CRing})}(\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y), \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

- S : スキームに対し、「 S 上のスキーム」とは「スキーム X とスキームの射 $X \rightarrow S$ の組」のこと
- $(\text{Sch} / S) := (S \text{ 上のスキーム全体のなす圏})$
- A : 可換環に対し、「 $\text{Spec}(A)$ 上のスキーム」を「 A スキーム」、 $(\text{Sch} / \text{Spec}(A))$ を (Sch / A) と略記

K : 体に対し、 K 上の代数多様体の圏は、 (Sch / K) のある部分圏として定義される

特に、アフィン代数多様体は、 K 上有限生成な整域 A を用いて $\text{Spec}(A)$ と表される

1.2. エタール基本群

X : 弧状連結位相空間、 x : X 上の点

$\rightsquigarrow$ 群 $\pi_1^{\text{top}}(X) = \pi_1^{\text{top}}(X, x)$ (X の位相的基本群)

$\pi_1^{\text{top}}(X)$ は、 X の普遍被覆の被覆変換群ととらえられる
(X がさらに局所弧状連結かつ局所半単連結のとき)

スキーム論における類似：

X : 連結スキーム、 x : X 上の幾何的点

$\rightsquigarrow$ 位相群 $\pi_1(X) = \pi_1(X, x)$ (X のエタール基本群)

$\pi_1(X)$ は、 X の有限エタール被覆全体の被覆変換群ととらえられる

$\pi_1(X)$: 副有限群 (profinite group)

:= 有限 (離散) 群の射影極限として表される位相群

= コンパクト全不連結位相群

エタール基本群の例：

例 1. $K : \text{体} \implies$

$$\pi_1(\text{Spec}(K)) \simeq G_K = \text{Aut}(\overline{K}/K) \text{ (} K \text{ の絶対ガロア群)}$$

例 2. $X : \mathbb{C} \text{ 上の代数多様体} \rightsquigarrow X^{\text{an}} : \text{複素解析多様体} \implies$

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1^{\text{top}}(X^{\text{an}})^{\wedge}$$

$$(\Gamma^{\wedge} := \varprojlim_{N \triangleleft \Gamma, (\Gamma:N) < \infty} \Gamma/N \text{ (} \Gamma \text{ の副有限完備化)})$$

例 2'. $K = \overline{K} \subset \mathbb{C}$ 、 $X : K \text{ 上の代数多様体} \implies$

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(X_{\mathbb{C}}) \simeq \pi_1^{\text{top}}(X_{\mathbb{C}}^{\text{an}})^{\wedge}$$

例 3. K : 体、 X : K 上の代数多様体

$\rightsquigarrow$ 「基本完全列」 (ホモトピー完全列の類似)

$$1 \rightarrow \pi_1(X_{\overline{K}}) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(\mathrm{Spec}(K)) \rightarrow 1$$

- $\pi_1(\mathrm{Spec}(K)) \simeq G_K$ (例 1)
- $\overline{K} \subset \mathbb{C}$ のときは、 $\pi_1(X_{\overline{K}}) \simeq \pi_1(X_{\mathbb{C}}) \simeq \pi_1^{\mathrm{top}}(X_{\mathbb{C}}^{\mathrm{an}})^{\wedge}$ (例 2')
- しばしば $\pi_1(X)$ を X の「数論的基本群」、 $\pi_1(X_{\overline{K}})$ を X の「幾何的基本群」という

$\rightsquigarrow$ 「外ガロア表現」(モノドロミー表現の類似)

$$G_K = \pi_1(\mathrm{Spec}(K)) \rightarrow \mathrm{Out}(\pi_1(X_{\overline{K}}))$$

($\mathrm{Out}(\Delta) := \mathrm{Aut}(\Delta)/\mathrm{Inn}(\Delta)$ (Δ の外部自己同型群))

• 幾何的基本群の中心が自明のときは、基本完全列と外ガロア表現は等価

1.3. 遠アーベル幾何

遠アーベル幾何：

- Grothendieck が 1980 年代前半に提唱
- 3 つの有名文書
 - 「La Longue Marche à travers la théorie de Galois」
 - 「Esquisse d'un programme」
 - 「Faltings への手紙」
- 副有限位相群に基づく代数幾何の新しい基礎付けを目指す

スキーム論 (1.1 節) :

(o) スキーム (特に代数多様体) の理論を、可換環を基礎として構築 (和と可換な積の 2 演算)

(i) スキームはアフィンスキームのはり合わせ

(ii) $X \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ という (反変) 関手によりアフィンスキームの圏と可換環の圏は圏同値

(iii) アフィンスキームのはり合わせも可換環の間の射を用いて定義できる

(広義の) 遠アーベル幾何：

(o)' スキーム（特に代数多様体）の理論を、副有限位相群を基礎として再構築しよう（非可換な積の 1 演算のみ）

(i)' 「ある種のスキーム」は「遠アーベルスキーム」のはり合わせだろう

(ii)' $X \mapsto \pi_1(X)$ という（共変）関手により遠アーベルスキームの圏と「ある種の副有限位相群」の圏は圏同値だろう

(iii)' 遠アーベルスキームのはり合わせも副有限位相群の間の射を用いて定義できるだろう

(狭義の) 遠アーベル幾何：

((ii)' の弱形) 遠アーベルスキームの圏から副有限位相群の圏への（共変）関手 $X \mapsto \pi_1(X)$ は忠実充満だろう

Grothendieck の遠アーベル幾何の定式化の不明瞭な部分：

- (i)' の「ある種のスキーム」
- (i)'(ii)'(iii)' の「遠アーベルスキーム」
- (ii)' の「ある種の副有限位相群」

Grothendieck 自身の言及：

- ・「ある種のスキーム」については、とりあえず素体 ($\mathbb{Q}$ または $\mathbb{F}_p$) 上有限生成な体の上の非特異代数多様体を提案
- ・「遠アーベルスキーム」については、一般的な定義はわからないとしながらも、1 点、双曲的代数曲線、双曲的代数曲線の反復ファイブレーション、双曲的（標点付き）代数曲線のモジュライ空間 $M_{g,r}$ 、偏極アーベル多様体のモジュライ空間、などは遠アーベルスキームになるだろうと述べている
- ・「ある種の副有限位相群」に関連して、 $G_{\mathbb{Q}} = \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}))$ を、 $M_{g,r}$ の幾何的基本群の塔の上への外ガロア表現を通じて研究することを提案

双有理遠アーベル幾何 (体の遠アーベル幾何) :

- ・ 遠アーベル幾何で、代数多様体をその関数体に、エタール基本群を絶対ガロア群に変更 (こちらも Grothendieck が提案)
- ・ 実は、Grothendieck の遠アーベル幾何提唱のかなり前から実質的に研究されていた (cf. 2.2 節)

2. 遠アーベル幾何におけるいくつかの基本的結果

2.1. 代数曲線の遠アーベル幾何

K : 体

X : K 上の非特異代数曲線

g : X の非特異コンパクト化の種数

r : X の非特異コンパクト化に必要な (幾何的) 点の数

定義. $X : ((g, r)$ 型の) 双曲的代数曲線

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} 2 - 2g - r < 0 \text{ (i.e. } (g, r) \notin \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0)\})$$

$$\iff \text{幾何的基本群 } \pi_1(X_{\overline{K}}) \text{ が非可換 (} K \text{ の標数が } 0 \text{ のとき)}$$

$$\iff \text{位相的基本群 } \pi_1^{\text{top}}(X_{\mathbb{C}}^{\text{an}}) \text{ が非可換 (} K \subset \mathbb{C} \text{ のとき)}$$

$$\iff X_{\mathbb{C}}^{\text{an}} \text{ が複素解析的な意味で双曲的 (} K \subset \mathbb{C} \text{ のとき)}$$

定理 1.

(i) (望月 1999)

K : $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体 (より一般に「劣 p 進体」)

Y : K 上の双曲的代数曲線

X : K 上の非特異代数多様体

このとき

$$\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{dom}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}, \mathrm{Out}}(\pi_1(X), \pi_1(Y))$$

但し、

(左辺) : X から Y への K 上の射で非定値 ($\iff$ 像が稠密)
なもの全体の集合

(右辺) : $\pi_1(X)$ から $\pi_1(Y)$ への G_K 上の射で開写像なもの
全体の集合の $\pi_1(Y_{\overline{K}})$ の共役による商集合

(ii) (中村 1990、玉川 1997、望月 1996, 1999, 2003)

$K : \mathbb{Q}$ 上有限生成な体 (より一般に「一般化劣 p 進体」)

$X, Y : K$ 上の双曲的代数曲線

このとき

$$\mathrm{Isom}_K(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{G_K}^{\mathrm{Out}}(\pi_1(X), \pi_1(Y))$$

但し、

(左辺) : X から Y への K 上の同型射全体の集合

(右辺) : $\pi_1(X)$ から $\pi_1(Y)$ への G_K 上の同型射全体の集合の
 $\pi_1(Y_{\overline{K}})$ の共役による商集合

特に、

$$X \underset{K}{\simeq} Y \iff \pi_1(X) \underset{G_K}{\simeq} \pi_1(Y)$$

2.2. 双有理遠アーベル幾何

定理 2. (Neukirch 1969、内田 1973、Pop 1994)

$K, L : \mathbb{Q}$ 上有限生成な体

このとき

$$\mathrm{Isom}(L, K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}^{\mathrm{Out}}(G_K, G_L)$$

但し、

(左辺) : L から K への同型射全体の集合

(右辺) : G_K から G_L への同型射全体の集合の G_L の共役による商集合

特に、

$$K \simeq L \iff G_K \simeq G_L$$

3. 遠アーベル幾何の進展と未来

3.1. 高次元代数多様体の遠アーベル幾何

高次元代数多様体が遠アーベルであることの一般的な定義は不明 (cf. 1.3 節)

以下、代数多様体のクラスに対して、定理 1(ii) 型の主張

$$\mathrm{Isom}_K(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{G_K}^{\mathrm{Out}}(\pi_1(X), \pi_1(Y))$$

が成り立つとき、便宜的に「遠アーベル的」と言うことにする

双曲的代数曲線の反復ファイブレーション：

= 初等的遠アーベル多様体 (Grothendieck)

= 双曲的多重曲線 (望月)

= 双曲的 Artin 近傍 (Schmidt-Stix?)

定理. $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体上の双曲的代数曲線の反復ファイブレーションは、次のいずれかの条件の下で「遠アーベル的」

(i) (望月 1998, 星 2014) 次元 ≤ 4

(ii) (Schmidt-Stix 2016) 「強双曲的 Artin 近傍」

(iii) (星 2014, 2020) 「狭義単調減少型」

系. $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体上の任意の非特異代数多様体に対し、「遠アーベル的」な開部分多様体は開基をなす

問題. 上記の定理を条件なしで証明できるか (cf. 澤田 2022)

双曲的代数曲線の配置空間：

- ・双曲的代数曲線の反復ファイブレーションの特別な場合
- ・一般に「遠アーベル的」(中村 1994、星・南出・望月 2022 など)

双曲的 (標点付き) 代数曲線のモジュライ空間 $M_{g,r}$ ：

- ・ $g \leq 2$ の場合は「遠アーベル的」(中村 1994、星・木下・中山 2017、高尾 2022)

問題. $g \geq 3$ の場合はどうか

偏極アーベル多様体のモジュライ空間：

- ・ Grothendieck は遠アーベルスキームであろうと予想
- ・ 否定的に解決 (伊原・中村 1997)

問題. 「遠アーベル的」な高次元代数多様体の新しい例を探せ

3.2. 正標数における遠アーベル幾何

$\mathbb{F}_p$ 上有限生成な体の場合：

- ・ 2.1 節の定理 1(ii) は、 $\mathbb{F}_p$ 上有限生成な体の上でも主張を若干修正することにより成立（玉川 1997、Stix 2002、望月 2007）
- ・ 2.2 節の定理 2 は、 $\mathbb{F}_p$ 上有限生成な無限体に対しても主張を若干修正することにより成立（内田 1977、Pop 1995）

問題. 2.1 節の定理 1 を正標数局所体 ($\mathbb{F}_p((T))$) の有限次拡大)の上で証明できるか

標数 0 の代数閉体上の場合 (cf. 1.2 節) :

・ $K = \overline{K} \subset \mathbb{C}$ 、 $X : K$ 上の代数多様体のとき、

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(X_{\mathbb{C}}) \simeq \pi_1^{\text{top}}(X_{\mathbb{C}}^{\text{an}})^{\wedge}$$

したがって、 $\pi_1(X)$ (の同型類) は、 $X_{\mathbb{C}}^{\text{an}}$ のホモトピー型 (特に位相型) のみで決定される変形不変量

・ 特に、 $X : (g, r)$ 型双曲的代数曲線のときは、 $\pi_1(X)$ (の同型類) は (g, r) のみで完全に決定される

正標数代数閉体の場合：

- ・ K ：正標数代数閉体、 X ： K 上の代数多様体のとき、 $\pi_1(X)$ (の同型類) は一般に変形不変量でない
- ・ 特に、 $X : (g, r)$ 型双曲的代数曲線のとき、 $\pi_1(X)$ (の同型類) は (g, r) のみでは一般に決定されない

定理. $K = \overline{\mathbb{F}}_p$ 、 $X, Y : K$ 上の (g, r) 型双曲的代数曲線

(i) (玉川 1999、更科 2020)

$g = 0$ または $(g, r) = (1, 1), p \neq 2$ のとき、

$$X \simeq Y \iff \pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$$

(ii) (Raynaud 2002、Pop-Saïdi 2003、玉川 2004)

一般に、 X の同型類は、 $\pi_1(X)$ の同型類によって有限個の可能性を除いて決定される

問題. 定理 (i) を一般化せよ。また、定理をより一般の正標数代数閉体の場合に示せ

3.3. エタール基本群の群論的商を用いた遠アーベル幾何

遠アーベル幾何や体の遠アーベル幾何において、副有限群 $\pi_1(X)$ や G_K を、それらのさまざまな群論的な商取り替えても成立する、という現象がしばしばある。スキーム論のほうでは適切な類似の現象が見付からない、遠アーベル幾何独自の現象だが、複素射影代数多様体の圏から複素解析多様体の圏への関手 $X \mapsto X^{\text{an}}$ が充満忠実である (GAGA) という現象と少し似ているかもしれない

以下では、2つの典型的な例を挙げる

副 Σ 遠アーベル幾何 (Σ : 素数の集合):

- ・有限 Σ 群: 位数が Σ の元の冪積で書ける有限群
- ・副 Σ 群: 有限 Σ 群の射影極限として書ける副有限群
- ・副有限群 Γ に対し、最大副 Σ 商 Γ^Σ が存在する
- ・ X : 体 F 上の代数多様体、 K : X の関数体とする。 $\Gamma = \pi_1(X)$ あるいは $\Gamma = G_K$ とし、 $\Delta = \pi_1(X_{\overline{F}})$ あるいは $\Delta = G_{K\overline{F}}$ をその幾何的部分とする。このとき Γ の最大幾何的副 Σ 商 $\Gamma^{(\Sigma)}$ (Γ の中で Δ の部分だけを Δ^Σ に取り替えたもの) が存在する

・ $\Sigma \supset \{p\}$ とすると、2.1 節の定理 1 は、 $\pi_1(X)$ を $\pi_1(X)^{(\Sigma)}$ に取り替えても成立 (望月 1999, 2003)

・ Σ : 「余有限」 (より一般に「 J -large」) とすると、有限体上の双曲的代数曲線に対する定理 1 (の類似) は、 $\pi_1(X)$ を $\pi_1(X)^{(\Sigma)}$ に取り替えても成立 (Saïdi・玉川 2018)

・ Σ : 密度 > 0 とすると、 K, L : 代数体のとき、定理 2 は G_K, G_L を G_K^Σ, G_L^Σ に取り替えても成立 (清水 2023)

・ Σ : 「余有限」 (より一般に「large + ϵ 」) とすると、 K, L : 有限体上の 1 変数代数関数体に対する定理 2 (の類似) は、 G_K, G_L を $G_K^{(\Sigma)}, G_L^{(\Sigma)}$ に取り替えても成立 (Saïdi・玉川 2017)

問題. より小さい Σ に対してはどうなるか

m 次可解遠アーベル幾何 ($m \geq 2$: 整数):

- m 次可解群: 導来列の第 m 次項が自明な群
(1 次可解 = アーベル、2 次可解 = メタアーベル)
- m 次可解副有限群: m 次可解有限群の射影極限として書ける副有限群
- 副有限群 Γ に対し、最大 m 次可解商 Γ^m が存在する
- X : 体 F 上の代数多様体とする。 $\Gamma = \pi_1(X)$ とし、 $\Delta = \pi_1(X_{\overline{F}})$ をその幾何的部分とする。このとき Γ の最大幾何的 m 次可解商 $\Gamma^{(m)}$ (Γ の中で Δ の部分だけを Δ^m に取り替えたもの) が存在する

・ $m \gg 0$ (例えば $m \geq 5$ で十分) ならば、素体上有限生成な体上の双曲的代数曲線 X に対し、定理 1 は $\pi_1(X)$ を $\pi_1(X)^{(m)}$ に取り替えても成立 (中村 1990、望月 1999、山口 2023, 2024)

・ $m \gg 0$ (例えば $m \geq 9$ で十分) ならば、素体上有限生成な体 K に対し、定理 2 は G_K 、 G_L を G_K^m 、 G_L^m に取り替えても成立 (Saïdi・玉川 2022～)

問題. $m \geq 2$ で示せるか

3.4. 取り上げなかった話題（の中にも大きな進展と未来）

- ・ セクション予想
- ・（相対版遠アーベル幾何と）絶対版遠アーベル幾何
- ・（双遠アーベル幾何と）単遠アーベル幾何
- ・ 組合せ論的遠アーベル幾何
- ・ 「取り上げなかった話題」でも取り上げなかった話題がさらに多数あり