

カラビ・ヤウ型多様体に対する解析的振率

吉川謙一

§1. 楕円曲線, Dedekind η -関数, ラプラシアン of 行列式

周期格子 $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ を持つ楕円曲線上で, 面積 1 に正規化した平坦 Kähler 計量を考えれば, $\bar{\partial}$ -ラプラシアンのスペクトル ζ -関数 $\zeta_\tau(s)$ は次を満たす

$$e^{-\zeta'_\tau(0)} = 2\text{Im } \tau \cdot |e^{2\pi i \tau} \prod_{n>0} (1 - e^{2\pi i n \tau})^{24}|^{\frac{1}{6}} \quad (\text{Kronecker 極限公式})$$

$\eta(\tau) = e^{\frac{2\pi i \tau}{24}} \prod_{n>0} (1 - e^{2\pi i n \tau})$ は **Dedekind η -関数** で, $q = e^{2\pi i \tau}$ と書けば

$$-\log \eta(\tau) = -\frac{1}{24} \log q + \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{k|d} \frac{k}{d} q^d = -\frac{1}{24} \log q + \sum_{d=1}^{\infty} N_1(d) q^d$$

が成り立ち, 楕円曲線の **Gromov-Witten 不変量** $N_1(d)$ の母関数である

目標 解析的振率を用いた Kronecker 極限公式の Calabi-Yau 型多様体への高次元化 (2-初等 K3 曲面, Enriques 曲面, Calabi-Yau 超曲面...)

§2. 解析的振率

(X, γ) : コンパクト Kähler 多様体

$\iota: X \rightarrow X$: γ を保つ正則対合

$\square_q = (\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)^2$: X 上の $(0, q)$ -形式の空間に作用するラプラシアン

$\zeta_q(s, \iota)$: $\square_q$ の同変スペクトル ζ -関数

$$\zeta_q(s, \iota) = \sum_{\lambda \in \sigma(\square_q) \setminus \{0\}} \lambda^{-s} \operatorname{Tr} [\iota^*|_{E(\square_q, \lambda)}]$$

$\sigma(\square_q)$: $\square_q$ の固有値の集合, $E(\square_q, \lambda)$: 固有値 λ に対する固有空間

Fact

$\zeta_q(s, \iota)$ は $\operatorname{Re} s > \dim X$ で収束, $\mathbb{C}$ に有理型に解析接続され, 原点で正則

有限次正定値 Hermite 行列 H に対し,

$$-\log \det H = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \text{Tr } H^{-s}$$

この類似として, $\exp(-\zeta'(0, \text{id}_X))$ を $\square_q$ の正則化された行列式と考える

Definition ((同変) 解析的振率 Ray-Singer, Bismut-Gillet-Soulé)

$$\tau_{\mu_2}(X, \gamma)(\iota) = \exp\left(-\sum_{q \geq 0} (-1)^q q \zeta'_q(0, \iota)\right)$$

$\iota = \text{id}_X$ の時 $\tau_{\mu_2}(X, \gamma)(\iota)$ を $\tau(X, \gamma)$ で表し, (X, γ) の**解析的振率**と言う

一般の正則 Hermite ベクトル束に対し, 同様に解析的振率が定義される

解析的振率はコホモロジーの行列式上の計量を与え (Quillen), アノマリー公式, 曲率公式, 埋込公式など **Quillen 計量**に関する様々な良い性質が知られている (Bismut-Gillet-Soulé, Bismut-Lebeau, Bismut, Ma...)

§3. 2-初等 $K3$ 曲面の解析的振率と Borcherds 積

格子 $\mathbb{Z}$ 値非退化双線型形式が付与された階数 $r(L)$ の自由 $\mathbb{Z}$ -加群 L

L : 2-初等 $\iff L^\vee/L \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\ell(L)}$, $L^\vee = \text{Hom}(L, \mathbb{Z}) \subset L \otimes \mathbb{Q}$

$\text{sign}(L) = (b^+(L), b^-(L))$: L の符号, $\sigma(L) = b^+(L) - b^-(L)$

$\mathbb{E}_8$: 負定値階数 8 偶ユニモジュラー格子, $\mathbb{U} = (\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$

$K3$ 曲面 コンパクト非特異複素曲面 X が $K3$ 曲面

$$\iff h^{0,1}(X) = 0, \quad K_X = \det T_X^* \cong \mathcal{O}_X$$

- 全ての $K3$ 曲面は複素構造の変形でうつり合い, 20 次元の族を成す
- $K3$ 曲面は Kähler. 各 Kähler 類は唯一の Ricci 平坦 Kähler 形式を含む
- $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{L}_{K3} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{U} \oplus \mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8$

2-初等 $K3$ 曲面

Definition

$\iota: X \rightarrow X$: $K3$ 曲面 X 上の正則対合. $M \subset \mathbb{L}_{K3}$: $K3$ 格子の部分格子 (X, ι) が M 型 2-初等 $K3$ 曲面 $\iff$

$$(1) \quad \iota^* = -1 \text{ on } H^0(X, K_X) \qquad (2) \quad H^2(X, \mathbb{Z})_+ \cong M$$

$H^2(X, \mathbb{Z})_{\pm}$: ι -作用に関する ± 1 固有空間

Theorem (Nikulin)

- M は 2-初等 $K3$ 曲面の型 $\iff \mathbb{L}_{K3}$ の原始的 2-初等双曲型部分格子 $\mathbb{L}_{K3}/M$: 自由, $M^{\vee}/M \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\ell(M)}$, $\text{sign}(M) = (1, r(M) - 1)$
- 2-初等 $K3$ 曲面の変形同値類は型で決定され, 全部で 75 個存在

2-初等 $K3$ 曲面の周期領域

原始的 2-初等双曲型部分格子 $M \subset \mathbb{L}_{K3}$ に対し,

$$\Lambda = M^{\perp_{\mathbb{L}_{K3}}}$$

Λ は符合 $(2, r(\Lambda) - 2)$ の 2-初等格子

$$\Omega_{\Lambda} := \{[\eta] \in \mathbb{P}(\Lambda \otimes \mathbb{C}); \langle \eta, \eta \rangle_{\Lambda} = 0, \quad \langle \eta, \bar{\eta} \rangle_{\Lambda} > 0\}$$

$$\Omega_{\Lambda} = \Omega_{\Lambda}^{+} \amalg \Omega_{\Lambda}^{-}, \quad \Omega_{\Lambda}^{\pm} \cong r(\Lambda) - 2 \text{ 次元 IV 型有界対称領域}$$

Fact

$(X, \iota) : M$ 型 2-初等 $K3$ 曲面 $\implies$ (1) $H^0(X, K_X) \subset H^2(X, \mathbb{C})_{-}$,
(2) $\exists \alpha : H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{L}_{K3}$ s.t. $\alpha(H^2(X, \mathbb{Z})_{+}) = M$, $\alpha(H^2(X, \mathbb{Z})_{-}) = \Lambda$

$\alpha(H^0(X, K_X)) \in \Omega_{\Lambda}^{+}$ と選べる. Ω_{Λ}^{+} は M 型 2-初等 $K3$ 曲面の周期領域

2-初等 $K3$ 曲面のモジュライ空間

$O^+(\Lambda) : \Omega_\Lambda^\pm$ を保つ $O(\Lambda) = \text{Aut}(\Lambda)$ の部分群

M 型 2-初等 $K3$ 曲面 (X, ι) の**周期**を次で定める

$$\varpi_M(X, \iota) = [\alpha(H^0(X, K_X))] \in \mathcal{M}_\Lambda := O^+(\Lambda) \backslash \Omega_\Lambda^+$$

Theorem (Nikulin, Y.)

$\mathcal{M}_\Lambda^0 : M$ 型 2-初等 $K3$ 曲面のモジュライ空間 $\implies$

$$\varpi_M : \mathcal{M}_\Lambda^0 \cong \frac{\Omega_\Lambda^+ \setminus \mathcal{D}_\Lambda}{O^+(\Lambda)}, \quad \mathcal{D}_\Lambda = \bigcup_{d \in \Lambda, d^2 = -2} d^\perp$$

$\mathcal{M}_\Lambda^0$ は $20 - r(M)$ 次元直交型モジュラー多様体 $\mathcal{M}_\Lambda$ の *Zariski* 開集合

2-初等 $K3$ 曲面の解析的振率不変量

$(X, \iota) : M$ 型 2-初等 $K3$ 曲面

$X^\iota = \{x \in X; \iota(x) = x\} : \iota$ の固定点軌跡 (空集合または曲線の非交和)

$\gamma : X$ 上の ι 不変 Ricci 平坦 Kähler 形式

$\tau(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}), \text{Vol}(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}) : \text{連結成分への分解に関し乗法的に定める}$

Theorem (Y.)

$$\tau_M(X, \iota) = \text{Vol}(X, \gamma)^{\frac{14-r(M)}{4}} \tau_{\mu_2}(X, \gamma)(\iota) \text{Vol}(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}) \tau(X^\iota, \gamma|_{X^\iota})$$

は ι -不変 Ricci-平坦計量に依らず, (X, ι) の不変量を定める. 従って, τ_M は $\mathcal{M}_\Lambda^0$ 上の関数を定める

問題 $\mathcal{M}_\Lambda^0$ 上の関数 τ_M を決定せよ

τ_M の微分方程式と保型性

Theorem (Y.)

(1) $\tau_M \in C^\infty(\Omega_\Lambda^+ \setminus \mathcal{D}_\Lambda)^{O^+(\Lambda)}$ であり, 次の等式が Ω_Λ^+ 上で成り立つ

$$dd^c \log \tau_M = \frac{r(M) - 6}{4} \omega_{\Omega_\Lambda} + J_M^* \omega_{\mathcal{A}_g} - \frac{1}{4} \delta_{\mathcal{D}_\Lambda}$$

$\omega_{\Omega_\Lambda} : \Omega_\Lambda^+$ の Bergman-Kähler 形式

$J_M : \mathcal{M}_\Lambda^0 \ni (X, \iota) \rightarrow \text{Jac}(X^\iota) \in \mathcal{A}_g := \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{S}_g, \quad g = g(X^\iota)$

$\omega_{\mathcal{A}_g} : \text{Siegel}$ モジュラー多様体 $\mathcal{A}_g$ の Bergman-Kähler 形式

$\delta_{\mathcal{D}_\Lambda} : \mathcal{D}_\Lambda$ が定める Dirac δ -カレント

(2) 判別軌跡 $\mathcal{D}_\Lambda$ を特徴付ける Ω_Λ^+ 上の保型形式 Φ_M と $\nu \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$\tau_M = \|\Phi_M\|^{-\frac{1}{2\nu}}, \quad \text{div } \Phi_M = \nu \mathcal{D}_\Lambda$$

τ_M に関する Borchers 積

Λ : 2-初等格子

Definition (Weil 表現)

$$\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \sqrt{c\tau + d} \right); \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right\} = \langle S, T \rangle$$

$$S = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau} \right), T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \right) : \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z}) \text{ の生成元}$$

$\{\mathbf{e}_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda^\vee/\Lambda}$: 群環 $\mathbb{C}[\Lambda^\vee/\Lambda]$ の標準基底

$$\rho_\Lambda(T) \mathbf{e}_\gamma = e^{\pi i \gamma^2} \mathbf{e}_\gamma, \quad \rho_\Lambda(S) \mathbf{e}_\gamma = \frac{i^{-\sigma(\Lambda)/2}}{\sqrt{|\Lambda^\vee/\Lambda|}} \sum_{\delta \in \Lambda^\vee/\Lambda} e^{-2\pi i \gamma \cdot \delta} \mathbf{e}_\delta$$

$\implies$ 準同型 $\rho_\Lambda : \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}[\Lambda^\vee/\Lambda])$ に拡張

2-初等格子 Λ に対し, 関数 $\phi_\Lambda \in \mathcal{O}(\mathfrak{H})$ を次で定める ($\mathfrak{H}$: 上半平面)

$$\phi_\Lambda(\tau) = \eta(\tau)^{-8} \eta(2\tau)^8 \eta(4\tau)^{-8} \vartheta(\tau)^{8+\sigma(\Lambda)}, \quad \tau \in \mathfrak{H}$$

ただし, $\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$, $\vartheta(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}$ ($q = e^{2\pi i \tau}$)

$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し, $(f|_\gamma)(\tau) = (c\tau + d)^{-wt(f)} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ と定義

Fact

$$F_\Lambda(\tau) := \sum_{\gamma \in \tilde{\Gamma}_0(4) \backslash \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})} (\phi_\Lambda|_\gamma)(\tau) \rho_\Lambda(\gamma^{-1}) \mathbf{e}_0$$

は $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $\frac{\sigma(\Lambda)}{2}$ の ρ_Λ 型 $\mathbb{C}[\Lambda^\vee/\Lambda]$ 値有理型モジュラー形式

$$F_\Lambda\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{\frac{\sigma(\Lambda)}{2}} \rho_\Lambda\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \sqrt{c\tau+d}\right) \cdot F_\Lambda(\tau)$$

簡単のため, 次の分解を仮定

$$\Lambda = \mathbb{U}(-1) \oplus L$$

このとき L は 2-初等双曲型格子で, $F_L(\tau) = F_\Lambda(\tau)$

$\mathcal{C}_L = \{x \in L \otimes \mathbb{R}; x^2 > 0\} : L \text{ の正錐} \implies \mathcal{C}_L = \mathcal{C}_L^+ \amalg \mathcal{C}_L^-$

F_L の Fourier 係数のデータ $\implies \mathcal{C}_L^+$ の部屋構造 (chamber structure)

$\mathcal{W} \subset \mathcal{C}_L^+ : (L, F_L) \text{ の Weyl 部屋}$

次の同型を通じて, $O^+(\Lambda)$ は $L \otimes \mathbb{R} + i\mathcal{C}_L^+$ に作用

$$\exp: L \otimes \mathbb{R} + i\mathcal{C}_L^+ \ni z \rightarrow \left[\left(1, z, \frac{\langle z, z \rangle}{2} \right) \right] \in \Omega_\Lambda^+$$

Theorem (Borcherds)

$$F_{\Lambda}(\tau) = \sum_{\gamma \in \Lambda^{\vee}/\Lambda} \mathfrak{e}_{\gamma} \sum_{m \in \mathbb{Z} + \gamma^2/2} c_{\gamma}(m) q^m$$

を $F_{\Lambda}(\tau)$ の *Fourier* 展開とする.

Borcherds 積 $\Psi_{\Lambda}(z, F_{\Lambda}) \in \mathcal{O}(L \otimes \mathbb{R} + i\mathcal{W})$ を次で定める

$$\Psi_{\Lambda}(z, F_{\Lambda}) = e^{2\pi i \langle \varrho, z \rangle} \prod_{\gamma \in L^{\vee}/L} \prod_{\lambda \in L + \gamma, \lambda \cdot \mathcal{W} > 0} \left(1 - e^{2\pi i \langle \lambda, z \rangle}\right)^{c_{\gamma}(\frac{\lambda^2}{2})}$$

($\varrho = \rho(L, F_L, \mathcal{W}) \in L \otimes \mathbb{Q}$: 三つ組 $(L, F_L, \mathcal{W})$ の *Weyl* ベクトル)

$\Psi_{\Lambda}(z, F_{\Lambda})$ は $(\operatorname{Im} z)^2 \gg 0$ のとき絶対収束し, $O^+(\Lambda)$ に関する Ω_{Λ}^+ 上の重さ $\frac{c_0(0)}{2}$ の (有理型かもしれない) 保型形式に解析接続される

テータ定数と Siegel モジュラー形式

$4^t ab$ が偶数である $a, b \in \{0, \frac{1}{2}\}^g$ と Siegel 上半空間の点 $\Omega \in \mathfrak{S}_g$ に対し,

$$\theta_{a,b}(\Omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i^t(m+a)\Omega(m+a) + 2\pi i^t(m+a)b)$$

$\theta_{a,b}^8$ の基本対称式 χ_g^8 と Υ_g を次で定める (g 次 Siegel モジュラー形式)

$$\chi_g(\Omega)^8 = \prod_{(a,b) \text{ even}} \theta_{a,b}(\Omega)^8, \quad \Upsilon_g(\Omega) = \chi_g(\Omega)^8 \sum_{(a,b) \text{ even}} \theta_{a,b}(\Omega)^{-8}$$

$F(\Omega)$: 重さ k の g 次 Siegel モジュラー形式に対し, Petersson ノルム

$\|F(\Omega)\|^2 = (\det \operatorname{Im} \Omega)^k |F(\Omega)|^2$ は $\mathfrak{S}_g$ 上の $\operatorname{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -不変関数

τ_M の明示公式と楕円モジュラー性

$\varpi_M(X, \iota) \in \mathcal{M}_\Lambda$: M 型 2-初等 $K3$ 曲面 (X, ι) の周期
 $\Omega(X^\iota) \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{S}_g$: (X, ι) の固定曲線 X^ι の周期, $g = g(X^\iota)$

Theorem (Y., 馬-Y.)

型 M のみに依存する定数倍を除き, 次の等式が成り立つ

(1) $(r(M), \delta(M)) \neq (2, 0), (10, 0)$ のとき

$$\tau_M(X, \iota)^{-2^g(2^g+1)} = \|\Psi_\Lambda(\varpi_M(X, \iota), 2^{g-1}F_\Lambda)\| \|\chi_g(\Omega(X^\iota))^8\|$$

(2) $(r(M), \delta(M)) = (10, 0)$ のとき

$$\tau_M(X, \iota)^{-(2^g-1)(2^g+2)} = \|\Psi_\Lambda(\varpi_M(X, \iota), (2^{g-1} + 1)F_\Lambda)\| \|\Upsilon_g(\Omega(X^\iota))\|$$

ただし, $\|\Psi_\Lambda(z, F_\Lambda)\|^2 = \langle \mathrm{Im} z, \mathrm{Im} z \rangle^{c_0(0)/2} |\Psi_\Lambda(z, F_\Lambda)|^2$

注意 $(r, \delta) = (2, 0)$ の場合 (2 個存在) も同様の公式が成立

Borcherds 積だけを抽出するため, τ_M の変種 τ_M^{spin} を導入する

$$\tau_M^{\text{spin}}(X, \iota) := \prod_{L^2 = K_{X^\iota}, h^0(L)=0} \text{Vol}(X, \gamma)^{\frac{14-r(M)}{4}} \tau_{\mu_2}(X, \gamma)(\iota) \tau(X^\iota, L)^{-2}$$

γ は ι -不変 Ricci 平坦で, L には計量 $\sqrt{\gamma}|_{X^\iota}$ が付与されている

Theorem (馬-Y.)

- (1) $\tau_M^{\text{spin}}(X, \iota)$ は ι -不変 Ricci-平坦計量に依らず, (X, ι) の不変量を与える
- (2) 空でない $\mathcal{M}_\Lambda^0$ の或る Zariski 開集合上で次の等式が成り立つ

$$\tau_M^{\text{spin}} = C_M \left\| \Psi_\Lambda(\cdot, 2^{g-1} F_\Lambda + f_\Lambda) \right\|^{-\frac{1}{2}}$$

$(r, \delta) \neq (2, 0)$ のとき, $f_\Lambda = \delta_{\delta(\Lambda), 0} \delta_{r(\Lambda), 12} F_\Lambda$ である

問題 τ_M や τ_M^{spin} に現れるモジュラー形式 $2^{g-1} F_\Lambda + f_\Lambda$ の意味は何か?

§4. Enriques 曲面に対する種数 1 ミラー対称性

Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa は、種数 1 ミラー対称性に次の解析的振率を導入した

Definition (Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa)

(X, γ) : コンパクト Kähler 多様体

$\zeta_{p,q}(s)$: (p, q) -形式に作用するラプラシアンの特値 ζ -関数

(X, γ) の BCOV 振率を次式で定める

$$T_{\text{BCOV}}(X, \gamma) = \prod_{p \geq 0} \tau(X, \Omega_X^p, \gamma)^{(-1)^p p} = \exp\left(- \sum_{p, q \geq 0} (-1)^{p+q} p q \zeta'_{p,q}(0)\right)$$

注意 2 次元以下では BCOV 振率と $\mathcal{O}_X$ の解析的振率は等価である

Enriques 曲面と Borcherds Φ -関数

コンパクト非特異複素曲面 Y が **Enriques 曲面** $\iff$

$$h^{0,1}(Y) = 0, \quad K_Y \not\cong \mathcal{O}_Y, \quad K_Y^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}_Y$$

Enriques 曲面 Y の普遍被覆 X は $K3$ 曲面であり, 非自明な被覆変換を $\iota: X \rightarrow X$ とすれば, (X, ι) は $\mathbb{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(2)$ 型 2-初等 $K3$ 曲面

Theorem (Borcherds)

Enriques 曲面の判別軌跡を定める保型形式を **Borcherds Φ -関数**と呼ぶ.
Enriques 曲面の複素化 Kähler 錐 $L \otimes \mathbb{R} + i\mathbb{C}_L^+$ ($L := \mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8$) 上で,

$$\Phi(y) = \prod_{\lambda \in L \cap \bar{\mathbb{C}}_L^+ \setminus \{0\}} \left(\frac{1 - e^{2\pi i \langle \lambda, y \rangle}}{1 + e^{2\pi i \langle \lambda, y \rangle}} \right)^{8a(\frac{\lambda^2}{2})}, \quad (\text{Im } y)^2 \gg 0$$

ただし, $\sum_{n=-1}^{\infty} a(n)q^n = \eta(\tau)^{-16}\eta(2\tau)^8 \quad (q = e^{2\pi i \tau})$

Enriques 曲面の解析的振率

Theorem (Y.)

- (1) *Enriques* 曲面 Y の **BCOV 不変量** (γ : *Ricci* 平坦 *Kähler* 計量)

$$\tau_{\text{BCOV}}(Y) = T_{\text{BCOV}}(Y, \gamma) \text{Vol}(Y, \gamma)^{-1}$$

は *Ricci* 平坦計量 γ に依らず, Y の不変量を定める.

- (2) Y の普遍被覆 2-初等 $K3$ 曲面を (X, ι) とすれば,

$$\tau_{\text{BCOV}}(Y) = \tau_{\mathbb{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(2)}(X, \iota)^{-2}$$

- (3) 普遍定数倍を除き, *Enriques* 曲面のモジュライ空間上で

$$\tau_{\text{BCOV}} = \|\Phi\|^{\frac{1}{2}}$$

ただし, $\|\Phi(y)\|^2 = \langle \text{Im } y, \text{Im } y \rangle^4 |\Phi(y)|^2$

$N_{1,\gamma}(Y) \in \mathbb{Q}$: Enriques 曲面の種数 1 次数 $\gamma \in H_2(Y, \mathbb{Z})$ GW 不変量
 $\beta \in L = H_2(Y, \mathbb{Z})/\text{Torsion}$ に対し $N_1(\beta) = \sum_{\bar{\gamma}=\beta} N_{1,\gamma}(Y)$ と定める
 ($\bar{\gamma}$ は γ の $H_2(Y, \mathbb{Z})/\text{Torsion}$ における類)

Theorem (Oberdieck)

$L \otimes \mathbb{R} + i\mathcal{C}_L^+$ の無限遠の近傍で, 次の等式が成り立つ

$$\exp\left(\sum_{\beta \neq 0} N_1(\beta) e^{2\pi i \langle \beta, y \rangle}\right) = \Phi(y)^{-\frac{1}{8}}$$

Corollary

普遍定数倍を除き, *Enriques* 曲面の種数 1 GW 不変量と *BCOV* 不変量は等価である. $y \in L \otimes \mathbb{R} + i\mathcal{C}_L^+$ を *Enriques* 曲面 Y の周期とすると,

$$\tau_{\text{BCOV}}(Y) = \left\| \exp\left(\sum_{\beta \neq 0} N_1(\beta) e^{2\pi i \langle \beta, y \rangle}\right) \right\|^{-4}$$

§5. Calabi-Yau 超曲面に対する種数 1 ミラー対称性

CY 多様体 コンパクト Kähler 多様体 X が **Calabi-Yau** $\iff$

$$K_X \cong \mathcal{O}_X, \quad h^{0,q}(X) = 0 \quad (0 < q < \dim X)$$

Theorem (Fang-Lu-Y., Eriksson-Freixas i Montplet-Mourougane)

CY 多様体 X の **BCOV 不変量** を次で定める (γ は Ricci 平坦 Kähler 計量)

$$\tau_{\text{BCOV}}(X) = T_{\text{BCOV}}(X, \gamma) \cdot \frac{\text{Vol}(X, \gamma)^{\frac{\chi(X)}{12}}}{\prod_{0 \leq k \leq 2 \dim X} \text{Vol}_{L^2}(H^k(X, \mathbb{Z}), \gamma)^{(-1)^{k+1} \frac{k}{2}}}$$

$\text{Vol}_{L^2}(H^k(X, \mathbb{Z}), \gamma) : H^k(X, \mathbb{R})$ の格子 $\text{Im}\{H^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(X, \mathbb{R})\}$
の基本領域の γ に関する体積

$\implies \tau_{\text{BCOV}}(X)$ は Ricci 平坦 Kähler 計量に依らず, X の不変量を定める.

種数 1 ミラー対称性予想

種数 1 ミラー対称性予想 (Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa)

以下の (A), (B) は等価

(A) CY 多様体の種数 1 Gromov-Witten 不変量の母関数

(B) ミラー CY 族の BCOV 不変量 τ_{BCOV}

射影空間の CY 超曲面とそのミラー CY 多様体の種数 1 ミラー対称性を奇数次元に限定して説明する. 以降, 常に次を仮定する

CY 多様体の次元 $n - 1$ は奇数

射影空間のCY超曲面のミラー族

$\Phi_\psi(z) = \sum_{j=0}^n z_j^{n+1} - (n+1)\psi z_0 \cdots z_n$ とする. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1$ の超曲面 $\mathcal{X}$ を

$$\mathcal{X} = \{(z, \psi) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1; \Phi_\psi(z) = 0\} \quad \text{とする}$$

$h: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ はCY超曲面族 (Dwork ペンシル) で, 次の群 G が作用する

$$G = \{\text{diag}(g_0, \dots, g_n); g_i \in \mu_{n+1}, g_0 \cdots g_n = 1\} / \mu_{n+1}$$

$\mathcal{X}/G$ の射影的特異点解消 $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}/G$ で, 次を満たすものが存在する

$f = h \circ \pi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1$ を射影とし, $\psi \in \mathbb{P}^1$ に対し $Z_\psi = f^{-1}(\psi)$ と定めると,

$$\psi \in \mathbb{C} \setminus \mu_{n+1} \implies Z_\psi \text{ は非特異 } n-1 \text{ 次元 CY 多様体}$$

$f: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1$ をCY超曲面のミラー族という

Dwork 族の Hodge 束の切断 — Griffiths の方法

$V = \mathbb{P}^n \setminus X_\psi$ と定める. $\mathbb{C}^{n+1}$ 上で次のように定める

$$\Omega = \sum_{i=0}^n (-1)^{i-1} z_i dz_0 \wedge \cdots \widehat{dz_i} \cdots \wedge dz_n, \quad H(z) = z_0 z_1 \cdots z_n$$

$H^k \Omega / \Phi_\psi^{k+1}$ ($k \geq 0$) は V 上の正則 n 形式 $\implies H^k \Omega / \Phi_\psi^{k+1} \in H^n(V, \mathbb{C})$

Gysin 系列 $H^n(V, \mathbb{C}) \rightarrow H^{n-1}(X_\psi, \mathbb{C})$ によるコホモロジー類 $H^k \Omega / \Phi_\psi^{k+1}$ の像を $\text{Res}_{X_\psi}(H^k \Omega / \Phi_\psi^{k+1})$ で表す

$\psi \in \mathbb{C} \setminus \mu_{n+1}$ に対し (以下, $U = \mathbb{C} \setminus \mu_{n+1}$ と定める),

$$\theta_k(\psi) = \text{Res}_{X_\psi}(k! H^k \Omega / \Phi_\psi^{k+1}) \in H^{n-1}(X_\psi, \mathbb{C})^G$$

は $F^{n-1-k} H^{n-1}(X_\psi, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p \geq n-1-k, p+q=n-1} H^{p,q}(X_\psi, \mathbb{C})$ に含まれる

ミラー族の Hodge 束の切断

Fact

- (1) $\theta_k(\psi)^{(p,q)} : \text{Hodge 分解の } (p,q) \text{ 成分} \implies \theta_k(\psi)^{(n-1-k,k)} \neq 0$
- (2) 自然な包含 $H^{n-1-k,k}(X_\psi, \mathbb{C})^G \hookrightarrow H^{n-1-k,k}(Z_\psi, \mathbb{C})$ が存在し, 同型
- (3) $H^k(Z_\psi, \Omega_{Z_\psi}^{n-1-k}) \cong \mathbb{C}$ は原始コホモロジー類から成り, その L^2 計量は Z_ψ の Ricci 平坦計量に依らない. この計量を $\|\cdot\|_{L^2}$ で表す

同型 (2) と同型 $H^k(Z_\psi, \Omega_{Z_\psi}^{n-1-k}) \cong F^{n-1-k}H^{n-1}(Z_\psi)/F^{n-k}H^{n-1}(Z_\psi)$ の下, $R^k f_* \Omega_{Z/U}^{n-1-k}$ ($0 \leq k \leq n-1$) の切断 η_k を次で定める

$$\eta_k(\psi) := -(n+1)^{k+1} \psi^{k+1} [\theta_k(\psi)] \in H^k(Z_\psi, \Omega_{Z_\psi}^{n-1-k})$$

ミラー族の BCOV 不変量

Theorem (Eriksson-Freixas i Montplet-Mourougane)

χ を Z_ψ ($\psi \in U$) の位相的 Euler 数とし, 有理数 a, b を次で定める

$$a = (-1)^{n-1} \frac{n(n-1)}{6} - \frac{\chi}{12(n+1)}, \quad b = (-1)^{n-1} \frac{n(3n-5)}{24}$$

n のみに依る定数を除き, $U = \mathbb{C} \setminus \mu_{n+1}$ 上で次の等式が成り立つ

$$\tau_{\text{BCOV}}(Z_\psi) = \left| \frac{(\psi^{n+1})^a}{(1 - \psi^{n+1})^b} \right|^2 \frac{\|\eta_0\|_{L^2}^{\chi/6}}{(\prod_{k=0}^{n-1} \|\eta_k\|_{L^2}^{2(n-1-k)}) (-1)^{n-1}}$$

一方, ミラー対称性で必要な Hodge 束 $R^q f_* \Omega_{Z/U}^p$ の自明化は η_k でなく, $\psi = \infty$ の近傍で定義された別の局所切断である

ミラー対称性で必要な Hodge 束の自明化

Fact

(1) ∞ の小近傍 D_∞ を固定し, ミラー族 $f: \mathcal{Z} \rightarrow D_\infty^* = D_\infty \setminus \{\infty\}$ のモノドロミーの対数 (冪零変換) から定まる $R^{n-1}f_*\mathbb{Q}$ の重さフィルトレーションを $W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{2(n-1)}$ とすれば, 次の自然な同型が存在

$$R^k f_* \Omega_{\mathcal{Z}/D_\infty^*}^{n-1-k} \cong (W_{2(n-1-k)} / W_{2(n-2-k)}) \otimes \mathcal{O}_{D_\infty^*}$$

(2) $(W_{2(n-1-k)} / W_{2(n-2-k)}) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$ の基底を適切に選べば, その基底と上の同型が定める $R^k f_* \Omega_{\mathcal{Z}/D_\infty^*}^{n-1-k}$ の切断 $\tilde{\eta}_k$ は次で与えられる

$$\tilde{\eta}_k(\psi) := \frac{(-1)^k}{(n+1)^k} \frac{\eta_k(\psi)}{\prod_{p=0}^k I_{p,p}(z)}, \quad z = \psi^{-(n+1)}$$

$I_{p,q}(z)$: ミラー族 $f: \mathcal{Z} \rightarrow D_\infty^*$ の *Picard-Fuchs* 方程式の解が定める関数

ミラー族の Picard-Fuchs 方程式と関数 $I_{p,p}(z)$

(1) $\{I_{0,q}(z)\}_{q=0,\dots,n-1}$ はミラー族 $f: \mathcal{Z} \rightarrow D_\infty^*$ の Picard-Fuchs 方程式

$$D = \left(z \frac{d}{dz} \right)^n - z \prod_{j=1}^n \left(z \frac{d}{dz} + \frac{j}{n+1} \right)$$

の解であり, $e^t = (n+1)^{-(n+1)} z$ として t を定めれば, 次が成り立つ

$$\sum_{q=0}^{\infty} I_{0,q}(z) w^q = e^{wt} \sum_{d=0}^{\infty} e^{dt} \frac{\prod_{r=1}^{(n+1)d} ((n+1)w + r)}{\prod_{r=1}^d (w + r)^{n+1}}$$

(2) $I_{p,q}(z)$ は漸化式 $I_{p,q}(z) = z \frac{d}{dz} \left(\frac{I_{p-1,q}(z)}{I_{p-1,q-1}(z)} \right)$ で与えられ,
 $p = q$ のとき $I_{p,p}(z)$ は z の一価関数

CY 超曲面の種数 1 ミラー対称性

Theorem (Zinger, Eriksson-Freixas i Montplet-Mourougane)

n だけに依存する定数を除き, ∞ の小近傍で次式が成り立つ

$$\tau_{\text{BCOV}}(Z_\psi) = \left| \exp \left((-1)^{n-1} F_1^B(\psi) \right) \right|^4 \frac{\|\tilde{\eta}_0\|_{L^2}^{\chi(Z_\psi)/6}}{\left(\prod_{k=0}^{n-1} \|\tilde{\eta}_k\|_{L^2}^{2(n-1-k)} \right) (-1)^{n-1}}$$

ここで, $F_1^A(T)$ を $n+1$ 次 CY 超曲面の GW 不変量の母関数とすると,

$$F_1^B(\psi) = F_1^A(T) := N_1(0)T + \sum_{d=1}^{\infty} N_1(d)e^{dT}$$

ただし, 変数 $z = \psi^{-(n+1)}$ と T は次のミラー変換により関係付けられる

$$T = I_{0,1}(z)/I_{0,0}(z)$$