

日本数学会 2024 年度秋季総合分科会、大阪大学、9月4日

理論統計学の基礎数理における最近の進展 — 漸近展開と擬似尤度解析

吉田朋広

東京大学大学院数理科学研究科
JST CREST



漸近展開とはなにか

分布の正規近似

- 中心極限定理 (Central Limit Theorem)

ξ_j ($j \in \mathbb{N}$): 独立で同分布に従う確率変数列 (i.i.d.), $E[\xi_1] = 0$, $\text{Var}[\xi_1] = \sigma^2 < \infty$.
このとき,

$$Z_n := n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \xi_j \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \quad (n \rightarrow \infty)$$

すなわち, 任意の $f \in C_b(\mathbb{R})$ (有界連続関数) に対して,

$$E[f(Z_n)] \rightarrow \int f(z) \phi(z; 0, \sigma^2) dz \quad (n \rightarrow \infty).$$

ここで, $\phi(z; \mu, \sigma^2)$ は平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布の密度関数.

漸近展開：正規近似をより精密にする

- 中心極限定理 (Central Limit Theorem)

ξ_j ($j \in \mathbb{N}$) : 独立で同分布に従う確率変数列 (i.i.d.), $E[\xi_1] = 0$, $\text{Var}[\xi_1] = \sigma^2 < \infty$.
このとき,

$$Z_n := n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \xi_j \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \quad (n \rightarrow \infty)$$

すなわち, 任意の $f \in C_b(\mathbb{R})$ (有界連続関数) に対して,

$$E[f(Z_n)] \rightarrow \int f(z) \phi(z; 0, \sigma^2) dz \quad (n \rightarrow \infty).$$

ここで, $\phi(z; \mu, \sigma^2)$ は平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布の密度関数.

- 漸近展開

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in \mathcal{E}(M, \gamma)} \left| E[f(Z_n)] \right. \\ & \quad \left. - \int f(z) \left\{ \phi(z; 0, \sigma^2) + n^{-1/2} p_1(z) + \cdots + n^{-k/2} p_k(z) \right\} dz \right| \\ & = o(n^{-k/2}) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ここで, $\mathcal{E}(M, \gamma)$ は可測関数のあるクラス.

漸近展開

- 独立観測
- Tchebycheff, Edgeworth, Cramér, Bhattacharya,
- 統計学への応用
 - 多変量解析, 高次統計推測理論, ブートストラップ法・リサンプリング法, 統計的予測, モデル選択, 情報幾何
 - 漸近展開法は現代の統計理論を支えている要素の一つ

漸近展開

- 独立観測
- Tchebycheff, Edgeworth, Cramér, Bhattacharya,
- 統計学への応用
 - 多変量解析, 高次統計推測理論, ブートストラップ法・リサンプリング法, 統計的予測, モデル選択, 情報幾何
 - 漸近展開法は現代の統計理論を支えている要素の一つ
- 課題
 - 確率過程の汎関数に対する漸近展開
 - 雛形として, 摂動モデルにおける例を見る

例1. 摂動モデルによるオプション価格の漸近展開

- 確率微分方程式

$$\begin{cases} dX_t = (0.1(1 + X_t^2)^{1/2} + 0.05X_t)dt + 0.1(1 + X_t^2)^{1/2}dw_t \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

- ヨーロピアンコールオプション ($r = 0$)

$$C = E \left[\left(X_T - K \right)^+ \right]$$

- エイジアンオプション

$$C = E \left[\left(T^{-1} \int_0^T X_t dt - K \right)^+ \right]$$

- モンテカルロ法 (計算時間、統計的誤差の問題)
- 漸近展開 (高速、かなり高精度) — 渡辺理論

$$C \sim c_0 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \cdots + \epsilon^k c_k \quad (\epsilon \downarrow 0)$$

例1. 摂動モデルによるオプション価格の漸近展開

- 確率過程 $X^\epsilon = (X_t^\epsilon)_{t \in [0, T]}$

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = V_0(X_t^\epsilon, \epsilon)dt + \sum_{\alpha=1}^r V_\alpha(X_t^\epsilon, \epsilon)dw_t^\alpha, & t \in [0, T] \\ X_0^\epsilon = x_0 \end{cases}$$

- $X^\epsilon = (X_t^\epsilon)$ の汎関数

$$F^\epsilon = \sum_{\alpha=0}^r \int_0^T f_\alpha(X_t^\epsilon, \epsilon)dw_t^\alpha + F(X_T^\epsilon, \epsilon). \quad (w^0 = t)$$

- $V(x, 0) = 0$, 漸近展開

$$E[\mathbf{g}(F^\epsilon)] \sim c_0 + c_1\epsilon + c_2\epsilon^2 + \dots \quad (\epsilon \downarrow 0)$$

- Watanabe (1987), Y (1992), Kunitomo and Takahashi (2001)

$$\epsilon^{-1}(F^\epsilon - F^0) \sim f_0 + \epsilon f_1 + \dots \quad \text{in } \mathbb{D}_{s,p}$$

(分布論的漸近展開ではない)

- 数百次元の常微分方程式を生成し、解いて、 c_i を計算する
Emanuele Guidotti YUIMA 関数群

例 1 . 摂動モデルによるオプション価格の漸近展開. 漸近展開 vs. モンテカルロ法

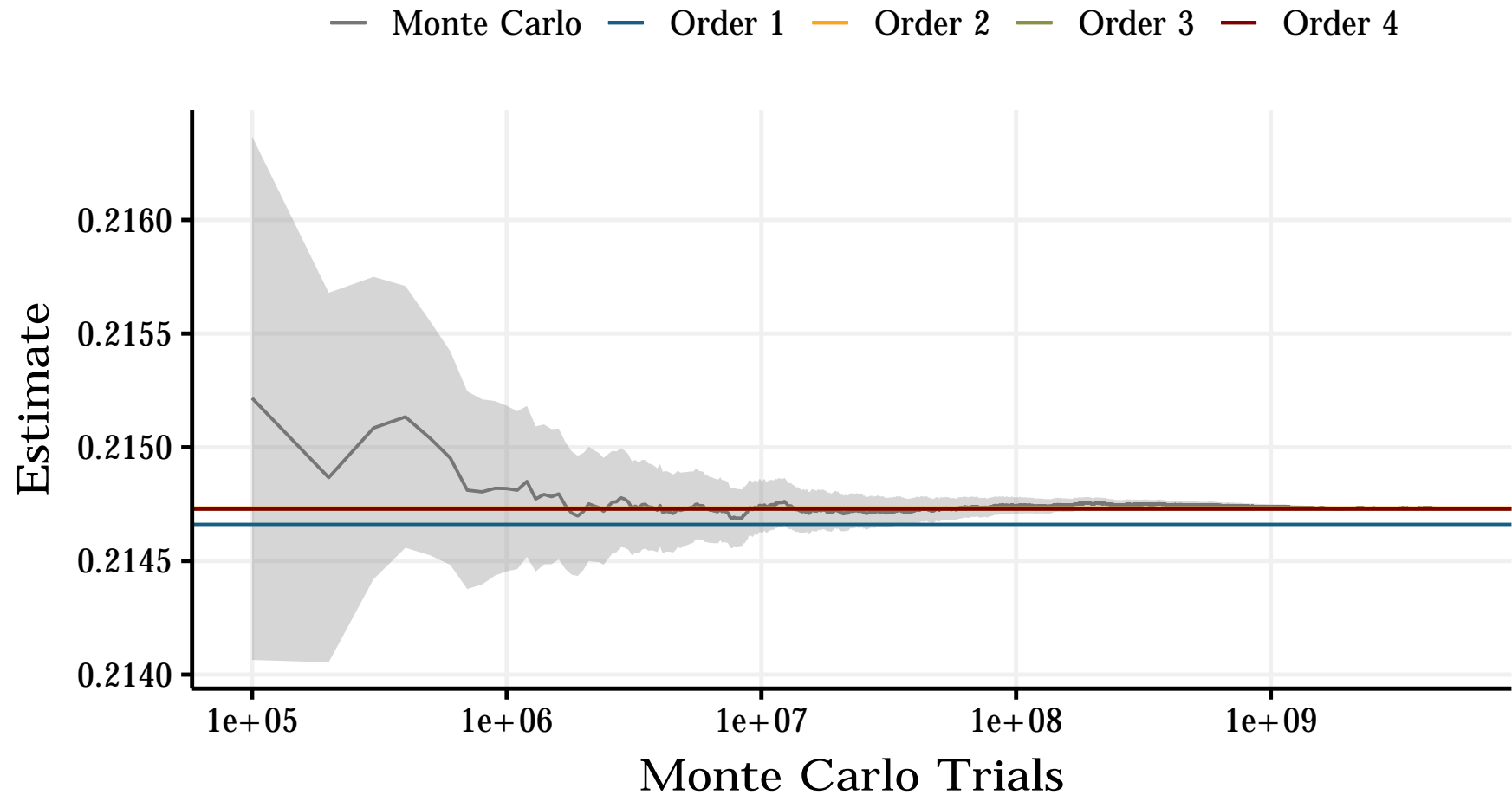
K	Order 1	Order 2	Order 3	Order 4	Monte Carlo
80	29.876	29.851	29.873	29.865	29.919 +- 0.030
90	22.496	22.420	22.424	22.419	22.470 +- 0.028
100	16.458	16.376	16.375	16.383	16.413 +- 0.025
110	11.779	11.698	11.698	11.711	11.721 +- 0.022
120	8.300	8.218	8.218	8.220	8.226 +- 0.019
130	5.770	5.707	5.698	5.690	5.701 +- 0.016
140	3.928	3.944	3.910	3.906	3.915 +- 0.014
150	2.583	2.729	2.663	2.672	2.670 +- 0.011
160	1.612	1.890	1.814	1.819	1.814 +- 0.010

Table 5: Evaluation of the expectation in (47) with the dynamics in (51) for several strike prices K . Comparison between the results of the 1st-4th order asymptotic expansion, using a grid of 10000 points to solve the scheme, and Monte Carlo, based on 1 million simulations.

by Emanuele Guidotti

例1. オプション価格の計算. 漸近展開 vs. モンテカルロ法

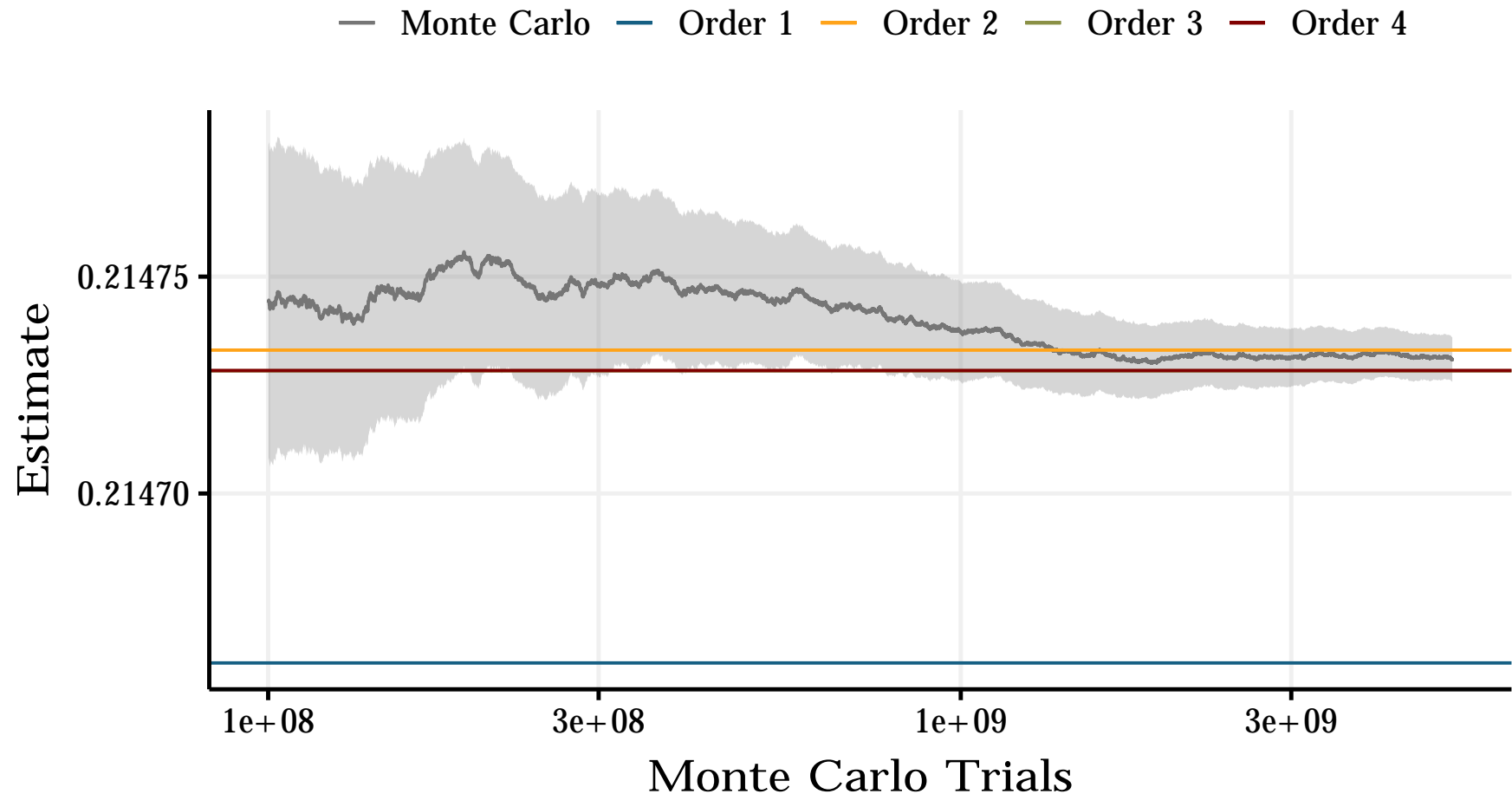
モンテカルロ法の誤差の方が問題！



ヨーロッパコールオプション, $K = 1.41$. Emanuele Guidotti氏による

例1. オプション価格の計算. 漸近展開 vs. モンテカルロ法

モンテカルロ法の誤差の方が問題！



ヨーロッパコールオプション, $K = 1.41$. Emanuele Guidotti氏による

確率過程に対する分布論的漸近展開

• 摂動法による漸近展開は分布論的漸近展開ではない。分布論的な例：

• 例 2 . エルゴード的拡散過程 $dX_t = b(X_t, \theta)dt + \sigma(X_t)dw_t$

- 2次不偏最尤推定量 $\hat{\theta}_T^*$ の Edgeworth 展開

$$P \left[\sqrt{IT}(\hat{\theta}_T^* - \theta) \leq x \right] = \Phi(x) + \frac{\Gamma^{(-1/3)}}{2I^{3/2}\sqrt{T}}(x^2 - 1)\phi(x) + o\left(T^{-1/2}\right)$$

- I : θ における Fisher 情報量 Φ : 標準正規分布関数

- $\Gamma^{(-1/3)}$: Chentsov-Aamari affine α -connection の係数, $\alpha = -1/3$

確率過程に対する分布論的漸近展開

- 摂動法による漸近展開は分布論的漸近展開ではない．分布論的な例：

- 例 2 . エルゴード的拡散過程 $dX_t = b(X_t, \theta)dt + \sigma(X_t)dw_t$

- 2次不偏最尤推定量 $\hat{\theta}_T^*$ の Edgeworth 展開

$$P \left[\sqrt{IT}(\hat{\theta}_T^* - \theta) \leq x \right] = \Phi(x) + \frac{\Gamma^{(-1/3)}}{2I^{3/2}\sqrt{T}}(x^2 - 1)\phi(x) + o\left(T^{-1/2}\right)$$

- I : θ における Fisher 情報量 Φ : 標準正規分布関数

- $\Gamma^{(-1/3)}$: Chentsov-Aamari affine α -connection の係数, $\alpha = -1/3$

- 確率過程に対する分布論的漸近展開への2つのアプローチ

- マルチンゲール

Mykland (1992, 1993), Y (1997, 2001)

- ミキシングマルコフ過程

Götze and Hipp (1983,1994), Kusuoka and Y (2000), Y (2004)

- 2つの方法は相補的

ミキシングマルコフ過程に対する（分布論的）漸近展開

- 確率過程の汎関数に対する漸近展開が我々の課題であった.
- ミキシングは独立性の自然な拡張の一つ
- ミキシング+（近似的に）マルコフ性を持つ離散時間の確率過程
 - Götze and Hipp 1980年代～

ミキシングマルコフ過程に対する（分布論的）漸近展開

- 確率過程の汎関数に対する漸近展開が我々の課題であった.
- ミキシングは独立性の自然な拡張の一つ
- ミキシング+（近似的に）マルコフ性を持つ離散時間の確率過程
 - Götze and Hipp 1980年代～
- ミキシング+ (ϵ -) マルコフ性を持つ連続時間の確率過程，とくに確率解析のオブジェクト
 - Kusuoka and Y (2000), Y (2004)

ミキシングマルコフ過程に対する（分布論的）漸近展開

- 確率過程の汎関数に対する漸近展開が我々の課題であった。
- ミキシングは独立性の自然な拡張の一つ
- ミキシング+（近似的に）マルコフ性を持つ離散時間の確率過程
 - Götze and Hipp 1980年代～
- ミキシング+ (ϵ -) マルコフ性を持つ連続時間の確率過程，とくに確率解析のオブジェクト
 - Kusuoka and Y (2000), Y (2004)
- マルコフ性 \Rightarrow
 - マルコフ過程に対するエルゴード理論からミキシング
 - 加法的汎関数の特性関数を増分の条件付き特性関数の積に分解

$$\varphi \sim \prod \varphi_*$$

加法的汎関数の増分の Malliavin 共分散の局所非退化性から特性関数の減衰を保証

$$E[e^{iu \cdot Z_T}] = E \left[\prod_j E_{c_j} [e^{iu \cdot (Z_{T_j} - Z_{T_{j-1}})}] \right]$$

ミキシングマルコフ過程に対する（分布論的）漸近展開

- 確率過程の汎関数に対する漸近展開が我々の課題であった。
- ミキシングは独立性の自然な拡張の一つ
- ミキシング+（近似的に）マルコフ性を持つ離散時間の確率過程
 - Götze and Hipp 1980年代～
- ミキシング+ (ϵ -) マルコフ性を持つ連続時間の確率過程，とくに確率解析のオブジェクト
 - Kusuoka and Y (2000), Y (2004)
- マルコフ性 \Rightarrow
 - ・ マルコフ過程に対するエルゴード理論からミキシング
 - ・ 加法的汎関数の特性関数を増分の条件付き特性関数の積に分解

$$\varphi \sim \prod \varphi_*$$

加法的汎関数の増分の Malliavin 共分散の局所非退化性から特性関数の減衰を保証

- 拡散過程に対する高次統計推測論
 - Sakamoto and Y (2003,2004,2009), Uchida and Y (2001), ...

漸近展開の解析学的正当性 (validity の問題)

- i.i.d. の和 $Z_n = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \xi_j$ の場合
- ξ_j の分布の滑らかさがないと漸近展開は一般に正しくない。
- 例. Bernoulli trials ξ_j ($j \in \mathbb{N}$), i.e., 独立列で $P[\xi_j = -1] = P[\xi_j = 1] = 1/2$. F_n を $n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \xi_j$ の分布関数とすると、偶数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$F_n(0) - F_n(0-) = P\left[\sum_{j=1}^n \xi_j = 0\right] = \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sim \sqrt{2/\pi} n^{-1/2}$$

だから、任意の連続関数 Φ_n に対して、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi_n(x)| > 0.$$

したがって、1次以上の漸近展開 (Edgeworth 展開) は常に成り立たない。

漸近展開の解析学的正当性 (validity の問題)

- i.i.d. の和 $Z_n = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \xi_j$ の場合
- ξ_j の分布の滑らかさがないと漸近展開は一般に正しくない.
- 例. Bernoulli trials ξ_j ($j \in \mathbb{N}$), i.e., 独立列で $P[\xi_j = -1] = P[\xi_j = 1] = 1/2$. F_n を $n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \xi_j$ の分布関数とするととき, 偶数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$F_n(0) - F_n(0-) = P\left[\sum_{j=1}^n \xi_j = 0\right] = \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sim \sqrt{2/\pi} n^{-1/2}$$

だから, 任意の連続関数 Φ_n に対して,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi_n(x)| > 0.$$

したがって, 1 次以上の漸近展開 (Edgeworth 展開) は常に成り立たない.

- Cramér 条件 $\limsup_{|u| \rightarrow \infty} |\varphi_{\xi_1}(u)| < 1$

のもとで漸近展開が成立する.

- もし分布 $\mathcal{L}\{\xi_1\}$ の Lebesgue 分解が零でない絶対連続部分を持てば Cramér 条件が成り立つ.

漸近展開の解析学的正当性 (validity の問題)

- i.i.d. の和 $n^{-1/2} \sum_{j=1}^n X_j$ の場合
- X_j の分布の滑らかさがないと漸近展開は一般に成り立たない.
- 例. Bernoulli trials ξ_j ($j \in \mathbb{N}$), i.e., 独立列で $P[\xi_j = -1] = P[\xi_j = 1] = 1/2$. F_n を $n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \xi_j$ の分布関数とするととき, 偶数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$F_n(0) - F_n(0-) = P\left[\sum_{j=1}^n \xi_j = 0\right] = \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sim \sqrt{2/\pi} n^{-1/2}$$

だから, 任意の連続関数 Φ_n に対して,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi_n(x)| > 0.$$

したがって, 1 次以上の漸近展開 (Edgeworth 展開) は常に成り立たない.

- Cramér 条件 $\limsup_{|u| \rightarrow \infty} |\varphi_{\xi_1}(u)| < 1$

のもとで漸近展開が成立する.

- もし分布 $\mathcal{L}\{\xi_1\}$ の Lebesgue 分解が零でない絶対連続部分を持てば Cramér 条件が成り立つ.

- 確率過程の場合における Malliavin 解析の利用を示唆

非エルゴード的統計

拡散過程の2次変動

- 確率積分方程式： $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t), P)$ 上,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dw_s.$$

- X の2次変動

$$U_n = \sum_{j=1}^n c(X_{t_{j-1}}) (\Delta_j X)^2$$

ここで, $\Delta_j X = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$, $t_j = j/n$.

- e.g. $c(x) = 1$ のとき, U_n はリアライズドボラティリティ
- 収束

$$U_n \xrightarrow{p} U_\infty = \int_0^1 c(X_s) \sigma(X_s)^2 ds$$

U_n は U_∞ の推定に使える.

拡散過程の2次変動

- スケールされた誤差

$$Z_n = \sqrt{n}(U_n - U_\infty)$$

- 推定誤差 Z_n は一般に漸近混合正規：

$$Z_n = \sqrt{n}(U_n - U_\infty) \xrightarrow{d_s} G_\infty^{1/2} \zeta$$

ここで、 G_∞ は \mathcal{F} -可測非負確率変数、 $\zeta \sim N(0, 1) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}$

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dw_s.$$

$$U_n = \sum_{j=1}^n c(X_{t_{j-1}}) (\Delta_j X)^2 \xrightarrow{p} U_\infty = \int_0^1 c(X_s) \sigma(X_s)^2 ds$$

拡散過程の2次変動

- スケールされた誤差

$$Z_n = \sqrt{n}(U_n - U_\infty)$$

- 推定誤差 Z_n は一般に漸近混合正規：

$$Z_n = \sqrt{n}(U_n - U_\infty) \rightarrow^{d_s} G_\infty^{1/2} \zeta$$

ここで、 G_∞ は \mathcal{F} -可測非負確率変数、 $\zeta \sim N(0, 1) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}$

- 混合正規極限をもつマルチンゲール中心極限定理
- 非エルゴード的統計

- (通常の意味の) ミキシングはない
 - (定数に収束する意味の) 大数の法則はない
-

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dw_s.$$

$$U_n = \sum_{j=1}^n c(X_{t_{j-1}}) (\Delta_j X)^2 \rightarrow^p U_\infty = \int_0^1 c(X_s) \sigma(X_s)^2 ds$$

拡散過程の2次変動

- スケールされた誤差

$$Z_n = \sqrt{n}(U_n - U_\infty)$$

- 推定誤差 Z_n は一般に漸近混合正規:

$$Z_n = \sqrt{n}(U_n - U_\infty) \xrightarrow{d_s} G_\infty^{1/2} \zeta$$

ここで, G_∞ は \mathcal{F} -可測非負確率変数, $\zeta \sim N(0, 1) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}$

- 混合正規極限をもつマルチンゲール中心極限定理
- 非エルゴード的統計
 - (通常の意味の) ミキシングはない
 - (定数に収束する意味の) 大数の法則はない
- 有限時間高頻度観測 $(X_{t_j})_{j=0,1,\dots,n}$ ($t_j = j/n$) に基づく統計推測 e.g.
金融高頻度データ解析
- 混合正規極限をもつマルチンゲールに対する漸近展開

拡散過程の2次変動

- 参照変数 (reference variable) として,

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \beta(X_{t_{j-1}}) \quad \text{や} \quad F_n = F_\infty := \int_0^1 \beta(X_t) dt$$

を考える. e.g. Fisher 情報量

- 問題.

結合分布 $\mathcal{L}\{(Z_n, F_n)\}$ の漸近展開:

$$E[f(Z_n, F_n)] \sim \int f(z, x) \left(p_0(z, x) + \frac{1}{\sqrt{n}} p_1(z, x) \right) dz dx \\ + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

$$Z_n = \sqrt{n}(U_n - U_\infty), \quad U_n = \sum_{j=1}^n c(X_{t_{j-1}}) (\Delta_j X)^2$$

非エルゴード的統計でのマルチンゲールの漸近展開

混合正規極限をもつマルチンゲールの漸近展開

- $M^n = (M_t^n)_{t \in [0,1]}$ ($n \in \mathbb{N}$): continuous martingales
- $C_t^n = \langle M^n \rangle_t$, $C_1^n \xrightarrow{p} C_1^\infty$
- **Decomposition**

$$\begin{aligned} E[e^{iuM_1^n}] &= E[e^{-\frac{1}{2}C_1^\infty u^2}] \\ &\quad + E\left[e^{iuM_1^n} \left(1 - e^{\frac{1}{2}(C_1^n - C_1^\infty)u^2}\right)\right] \\ &\quad + E\left[\left(e^{iuM_1^n + \frac{1}{2}C_1^n u^2} - 1\right) e^{-\frac{1}{2}C_1^\infty u^2}\right] \end{aligned}$$

- $r_n^{-1}(C_1^n - C_1^\infty)$: Tangent vector of the energy
- Torsion in the martingale under $e^{-\frac{1}{2}C_1^\infty u^2} dP$

混合正規極限をもつマルチンゲールの漸近展開

- $M^n = (M_t^n)_{t \in [0,1]}$ ($n \in \mathbb{N}$): d 次元連続マルチンゲール
- $C_t^n = \langle M^n \rangle_t$, $C_1^n \xrightarrow{p} C_1^\infty$
- M_1^n の摂動

$$Z_n = M_1^n + r_n N_n, \quad r_n \rightarrow 0$$

on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}$.

- F_n : d_1 次元参照変数
- 問題: $\mathcal{L}\{(Z_n, F_n)\}$ の漸近展開
- $C_1^n \xrightarrow{p} C_1^\infty$, $F_n \xrightarrow{p} F_\infty$
- 接ベクトル

$$\overset{\circ}{C}_n = r_n^{-1}(C_1^n - C_1^\infty), \quad \overset{\circ}{F}_n = r_n^{-1}(F_n - F_\infty)$$

- 仮定

- $(M^n, N_n, \overset{\circ}{C}_n, \overset{\circ}{F}_n) \rightarrow^{d_s(\mathcal{F})} (M^\infty, N_\infty, \overset{\circ}{C}_\infty, \overset{\circ}{F}_\infty)$

- $M_t^\infty \sim N_d(0, C_t^\infty)$

- 極限確率変数は拡張確率空間上に定義されている：

$$(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P}) = (\Omega \times \overset{\circ}{\Omega}, \mathcal{F} \times \overset{\circ}{\mathcal{F}}, P \times \overset{\circ}{P})$$

- $\check{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \vee \sigma[M_1^\infty]$

- $\tilde{C}_\infty(z) = \tilde{C}_\infty(\omega, z)$ は次の関係を満たす行列値ランダム関数とする：

$$\tilde{C}_\infty(\omega, M_1^\infty) = E[\overset{\circ}{C}_\infty | \check{\mathcal{F}}].$$

- 同様に,

$$\tilde{F}_\infty(\omega, M_1^\infty) = E[\overset{\circ}{F}_\infty | \check{\mathcal{F}}], \quad \tilde{N}_\infty(\omega, M_1^\infty) = E[N_\infty | \check{\mathcal{F}}].$$

ランダムシンボル

- Adaptive random symbol (tangent): $u \in \mathbb{R}^d, v \in \mathbb{R}^{d_1}$ に対して,

$$\underline{\sigma}(z, iu, iv) = \frac{1}{2}\tilde{C}_\infty(z)[(iu)^{\otimes 2}] + \tilde{N}_\infty(z)[iu] + \tilde{F}_\infty(z)[iv]$$

- $\Psi_\infty(u, v) = \exp\left(-\frac{1}{2}C_\infty[u^{\otimes 2}] + iF_\infty[v]\right), \quad C_\infty := C_1^\infty$
- Anticipative random symbol (torsion)

$$\bar{\sigma}(iu, iv) = \sum_j c_j (iu)^{m_j} (iv)^{n_j} \quad (\text{multi-index})$$

は次の性質で特徴づけられるランダムシンボル：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^{-1} E[L_1^n(u) \Psi_\infty(u, v) \psi_n] = E[\Psi_\infty(u, v) \bar{\sigma}(iu, iv)].$$

ここで, $\psi_n \sim 1$,

$$L_t^n(u) = \exp\left(iM_t^n[u] + \frac{1}{2}C_t^n[u^{\otimes 2}]\right) - 1.$$

- 漸近正規の場合, $\bar{\sigma}(iu, iv)$ は消える (\Rightarrow 90年代のマルチンゲール展開)

漸近展開公式

- $\underline{\sigma}$: Adaptive random symbol
- $\bar{\sigma}$: Anticipative random symbol
- フルランダムシンボル $\sigma = \underline{\sigma} + \bar{\sigma}$
- 展開公式：渡辺のデルタ関数を用いて，

$$p_n(z, x) = E \left[\phi(z; 0, C_\infty) \delta_x(F_\infty) \right] \\ + r_n E \left[\sigma(z, \partial_z, \partial_x)^* \left\{ \phi(z; 0, C_\infty) \delta_x(F_\infty) \right\} \right]$$

- $\sigma(z, \partial_z, \partial_x)^*$ (次のスライド)
- 混合正規分布が現れている

漸近展開公式

- ランダムシンボルの随伴作用

- ランダムシンボル (係数はランダム)

$$\varsigma(z, iu, iv) = \sum_j c_j(z) (iu)^{m_j} (iv)^{n_j}$$

($z \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}^{d_1}$). (multi-index)

- このとき,

$$\begin{aligned} & \varsigma(z, \partial_z, \partial_x)^* \left\{ \phi(z; 0, C_\infty) \delta_x(F_\infty) \right\} \\ & := \sum_j (-\partial_z)^{m_j} (-\partial_x)^{n_j} \left\{ c_j(z) \phi(z; 0, C_\infty) \delta_x(F_\infty) \right\} \end{aligned}$$

- $E[\psi \delta_x(F)] = E[\psi | F = x] p^F(x)$

混合正規極限をもつマルチンゲールの漸近展開

- マルチンゲールの摂動

$$Z_n = M_1^n + r_n N_n, \quad r_n \rightarrow 0$$

- F_n : 参照変数
- $C_n := \langle M^n \rangle_1 \rightarrow^p C_\infty$
- $M_1^n \rightarrow^{d_s} \text{Mixed Normal}(0, C_\infty)$
- ランダムシンボル
 - $\underline{\sigma}$: Adaptive random symbol (tangent)
 - $\bar{\sigma}$: Anticipative random symbol (torsion)
- フルランダムシンボル $\sigma = \underline{\sigma} + \bar{\sigma}$
- $\mathcal{E}(M, \gamma) = \{f : \text{可測関数}, |f(z, x)| \leq M(1 + |z| + |x|)^\gamma (\forall z, x) \}$

混合正規極限をもつマルチンゲールの漸近展開

定理 ある非退化性の条件のもとで, 密度関数 $p_n(z, x)$ は分布 $\mathcal{L}\{(Z_n, F_n)\}$ への 1 次の漸近展開を与える: 正数 M, γ に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\sup_{f \in \mathcal{E}(M, \gamma)} \left| E[f(Z_n, F_n)] - \int f(z, x) p_n(z, x) dz dx \right| = o(r_n)$$

(Y 2013, updated by arXiv2012)

- 拡散型過程 X のウェイト付き 2 次変動 $U_n = \sum_{j=1}^n c(X_{t_{j-1}})(\Delta_j X)^2$ の漸近展開を導出できる。
 $p_n(z, x)$ を決めるランダムシンボルに関して詳細は省略する。
- 伊藤積分の漸近展開は伊藤解析に閉じておらず,
 σ の表現には C_∞ の Malliavin 微分が現れる。

$$Z_n = M_1^n + r_n N_n, \quad r_n \rightarrow 0, \quad F_n : \text{参照変数}$$

$$p_n(z, x) = E \left[\phi(z; 0, C_\infty) \delta_x(F_\infty) \right] + r_n E \left[\sigma(z, \partial_z, \partial_x)^* \left\{ \phi(z; 0, C_\infty) \delta_x(F_\infty) \right\} \right]$$

Quadratic form

- Quadratic form of Wiener process with strongly predictable kernel

$$\begin{aligned} M_t^n &= r_n^{-1} \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha, \beta} K_{\alpha, \beta}(t_{j-1}) \int_{t_{j-1} \wedge t}^{t_j \wedge t} \int_{t_{j-1}}^s dw_r^\alpha dw_s^\beta \\ &= r_n^{-1} \sum_{j=1}^n K(t_{j-1}) \left[\int_{t_{j-1} \wedge t}^{t_j \wedge t} \int_{t_{j-1}}^s dw_r \otimes dw_s \right] \end{aligned}$$

- For example. $t_j = j/n$, $r_n = n^{-1/2}$.
- F_n : a reference variable, e.g.,

$$F_n = F_\infty = \int_0^1 \beta(X_t) dt.$$

Quadratic form

- $C_\infty = C_1^\infty = \lim_n \langle M^n \rangle_1$ is

$$C_\infty = \frac{1}{2} \text{Tr}^* \int_0^1 K(t)^{\otimes 2} dt$$

- Anticipative random symbol for quadratic form

$$\bar{\sigma}(iu, iv) = \frac{1}{2} \text{Tr}^* \int_0^1 K(t)[iu] \otimes \sigma_{t,t}(iu, iv) dt.$$

The random symbol $\sigma_{t,t}(iu, iv)$ is given by

$$\begin{aligned} \sigma_{t,t}(iu, iv) = & \left(-\frac{1}{2} D_t C_\infty[u^{\otimes 2}] + i D_t F_\infty[v] \right) \\ & \otimes \left(-\frac{1}{2} D_t C_\infty[u^{\otimes 2}] + i D_t F_\infty[v] \right) \\ & + \left(-\frac{1}{2} D_t D_t C_\infty[u^{\otimes 2}] + i D_t D_t F_\infty[v] \right). \end{aligned}$$

Quadratic form

- Adaptive random symbol (every time):

$$\underline{\sigma}(z, iu, iv) = \frac{1}{2}\tilde{C}_\infty(z)[(iu)^{\otimes 2}] + \tilde{N}_\infty(z)[iu] + \tilde{F}_\infty(z)[iv]$$

for $u \in \mathbb{R}^d$ and $v \in \mathbb{R}^{d_1}$.

- Full random symbol $\sigma = \underline{\sigma} + \bar{\sigma}$
- Asymptotic expansion formula:

$$p_n(z, x) = E \left[\phi(z; 0, C_\infty) \delta_x(F_\infty) \right] \\ + r_n E \left[\sigma(z, \partial_z, \partial_x)^* \left\{ \phi(z; 0, C_\infty) \delta_x(F_\infty) \right\} \right]$$

with Watanabe's delta functional.

Quadratic form

Theorem 1. (Perturbed quadratic form) Under certain non-degeneracy conditions, for any positive numbers M and γ ,

$$\sup_{f \in \mathcal{E}(M, \gamma)} \left| E[f(Z_n, F_n)] - \int_{\mathbb{R}^{d+d_1}} f(z, x) p_n(z, x) dz dx \right| = o(r_n)$$

as $n \rightarrow \infty$.

NB

$$\begin{aligned} Z_n &= M_1^n + r_n N_n \\ M_t^n &= r_n^{-1} \sum_{j=1}^n K(t_{j-1}) \left[\int_{t_{j-1} \wedge t}^{t_j \wedge t} \int_{t_{j-1}}^s dw_r \otimes dw_s \right] \end{aligned}$$

混合正規極限をもつマルチンゲールの漸近展開の応用

- リアライズドボラティリティ (Y 2012, 2013)
- p-変動 (Podolskij and Y 2016)
- プレアベレージング推定量 (Podolskij, Velyev and Yoshida 2017)
- 確率微分方程式に対するオイラー・丸山近似 (Podolskij, Velyev and Yoshida 2020)

マルチンゲールの構造がなかったら

- ブラウン運動の anticipative な汎関数
- 非整数ブラウン運動 (fractional Brownian motion) の汎関数

マルチンゲールの構造がなかったら

- ブラウン運動の anticipative な汎関数
- 非整数ブラウン運動 (fractional Brownian motion) の汎関数
- マルチンゲール展開が適用できない

マルチンゲールの構造がなかったら

- ブラウン運動の anticipative な汎関数
- 非整数ブラウン運動 (fractional Brownian motion) の汎関数
- マルチンゲール展開が適用できない
- Skorohod 積分として捉えることができる

Malliavin calculus: Calculus on the probability space

- \mathfrak{H} : a real separable Hilbert space
- $(\mathbb{W}(h))_{h \in \mathfrak{H}}$: an isonormal Gaussian process on a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) , i.e., $\mathbb{W}(h)$ ($h \in \mathfrak{H}$) are centered Gaussian variables such that

$$E[\mathbb{W}(h_1)\mathbb{W}(h_2)] = \langle h_1, h_2 \rangle_{\mathfrak{H}}.$$

- DF : the Malliavin derivative of the functional $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 - a derivative of F along \mathfrak{H}

- $\delta = D^*$: the divergence operator: for $u \in \mathcal{D}(\delta)$,

$$E[\delta(u)F] = E[\langle u, DF \rangle_{\mathfrak{H}}] \quad (F \in \mathbb{D}_{1,2})$$

- e.g. In a finite-dimension,

$$\int F(x) \delta u(x) \phi(x; 0, I_p) dx = \int \langle DF(x), u(x) \rangle \phi(x; 0, I_p) dx$$

for $F \in C_{\uparrow}^{\infty}(\mathbb{R}^p)$ and $u = (u^i)_{i=1}^p \in C_{\uparrow}^{\infty}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^p)$,

$$\delta u(x) = -\operatorname{div} u(x) + \sum_{i=1}^p u^i(x) x^i$$

\Leftrightarrow Stein's identity in decision theory

- Asymptotic expansion

- $|E[e^{iuF}]| \lesssim (1 + |u|)^{-k} \Rightarrow$ Regularity of the distribution of F

- Discovery of formulas

Skorohod 積分の漸近展開

Skorohod 積分の漸近展開: 設定

- (Ω, \mathcal{F}, P) : 確率空間, \mathfrak{H} : 可分ヒルベルト空間
- $W = \{W(h)\}_{h \in \mathfrak{H}}$: \mathfrak{H} 上の isonormal Gaussian process, $\mathcal{F} = \sigma[w]$; i.e., W は平均 0 の確率変数 $W(h)$ ($h \in \mathfrak{H}$) のなすガウス系で, $E[W(h)W(g)] = \langle h, g \rangle_{\mathfrak{H}}$ ($h, g \in \mathfrak{H}$) を満たす.
- W によって Malliavin 解析が構成される.
 $D, \delta = D^*, L = -\delta D, \mathbb{D}^{s,p}$.
- $u_n \in \mathbb{D}^{\ell+1,p}(\mathfrak{H} \otimes \mathbb{R}^d)$, $\ell = 3, p = 5$ at least
- $N_n \in \mathbb{D}^{\ell,p}(\mathbb{R}^d)$, $X_n \in \mathbb{D}^{\ell,p}(\mathbb{R}^{d_1})$
- $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する正数列

$$Z_n = M_n + r_n N_n, M_n = \delta(u_n) \text{ (d-dim)}$$

$$X_n: \text{参照変数 (d}_1\text{-dim)}$$

\Rightarrow 分布 $\mathcal{L}\{(Z_n, X_n)\}$ の漸近展開

- $G_\infty \in \mathbb{D}^{\ell,p}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$, $d \times d$ 非負対称ランダム行列 (M_n のランダムな漸近分散に相当する)
 - non-martingale \cap non-ergodic

Skorohod 積分の漸近展開: ランダムシンボル

- ランダムシンボル \mathfrak{S} とは (iz, ix) のランダムな係数をもつ多項式:

$$\mathfrak{S}(iz, ix) = \sum_j c_j (iz)^{m_j} (ix)^{n_j}, \quad (z \in \mathbb{R}^d, x \in \mathbb{R}^{d_1}) \quad (\text{multi-index})$$

マルチンゲール展開での tangent と torsion の代わりに, 次のランダムシンボルを導入する.

- quasi-tangent (q-tangent):

$$\text{qTan}[(iz)^{\otimes 2}] = r_n^{-1} \left(\langle DM_n[iz], u_n[iz] \rangle_{\mathfrak{H}} - G_\infty[(iz)^{\otimes 2}] \right)$$

- quasi-torsion (q-torsion):

$$\text{qTor}[(iz)^{\otimes 3}] = r_n^{-1} \left\langle D \langle DM_n[iz], u_n[iz] \rangle_{\mathfrak{H}}, u_n[iz] \right\rangle_{\mathfrak{H}}$$

ブラケット [] は内積を表す.

$$M_n = \delta(u_n) \quad (\mathbf{d}\text{-dim})$$

Skorohod 積分の漸近展開: ランダムシンボルの近似

- Characteristic exponential

$$\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \exp \left(2^{-1} G_\infty[(i\mathbf{z})^{\otimes 2}] + X_\infty[i\mathbf{x}] \right) \quad (\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d_1})$$

$$X_n \xrightarrow{p} X_\infty.$$

- ランダムシンボル $\mathfrak{S}^{(3,0)}$, $\mathfrak{S}_0^{(2,0)}$, $\mathfrak{S}^{(1,1)}$, $\mathfrak{S}^{(1,0)}$, $\mathfrak{S}^{(0,1)}$, $\mathfrak{S}_1^{(2,0)}$, $\mathfrak{S}_1^{(1,1)}$ が存在して以下の性質が成り立つと仮定する.

- quasi-torsion of M_n

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \left\langle D \langle DM_n[i\mathbf{z}], u_n[i\mathbf{z}] \rangle_{\mathfrak{H}}, u_n[i\mathbf{z}] \right\rangle_{\mathfrak{H}} \psi_n \right] \\ &= r_n E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \mathfrak{S}^{(3,0)}(i\mathbf{z}, i\mathbf{x}) \right] + o(r_n). \end{aligned}$$

ここで, $\psi_n \in \mathbb{D}^{2,p_1}$ はある p_1 に対して $\|1 - \psi_n\|_{2,p_1} = o(r_n)$ を満たす.

- quasi-tangent, for $G_n[(i\mathbf{z})^{\otimes 2}] = \langle DM_n[i\mathbf{z}], u_n[i\mathbf{z}] \rangle_{\mathfrak{H}}$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \left(G_n[(i\mathbf{z})^{\otimes 2}] - G_\infty[(i\mathbf{z})^{\otimes 2}] \right) \psi_n \right] \\ &= r_n E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \mathfrak{S}_0^{(2,0)}(i\mathbf{z}, i\mathbf{x}) \right] + o(r_n), \end{aligned}$$

- その他のランダムシンボルに対して：

$$E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \langle DX_\infty[\mathbf{i}\mathbf{x}], u_n[\mathbf{i}\mathbf{z}] \rangle_{\mathfrak{H}} \psi_n \right] = r_n E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \mathfrak{S}^{(1,1)}(\mathbf{i}\mathbf{z}, \mathbf{i}\mathbf{x}) \right] + o(r_n),$$

$$r_n E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) N_n[\mathbf{i}\mathbf{z}] \psi_n \right] = r_n E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \mathfrak{S}^{(1,0)}(\mathbf{i}\mathbf{z}, \mathbf{i}\mathbf{x}) \right] + o(r_n),$$

$$r_n E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \overset{\circ}{X}_n[\mathbf{i}\mathbf{x}] \psi_n \right] = r_n E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \mathfrak{S}^{(0,1)}(\mathbf{i}\mathbf{z}, \mathbf{i}\mathbf{x}) \right] + o(r_n)$$

ここで, $X_n \xrightarrow{p} X_\infty$, $\overset{\circ}{X}_n = r_n^{-1}(X_n - X_\infty)$.

$$r_n E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \langle DN_n[\mathbf{i}\mathbf{z}], u_n[\mathbf{i}\mathbf{z}] \rangle_{\mathfrak{H}} \psi_n \right] = r_n E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \mathfrak{S}_1^{(2,0)}(\mathbf{i}\mathbf{z}, \mathbf{i}\mathbf{x}) \right] + o(r_n),$$

$$r_n E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \langle D \overset{\circ}{X}_n[\mathbf{i}\mathbf{x}], u_n[\mathbf{i}\mathbf{z}] \rangle_{\mathfrak{H}} \psi_n \right] = r_n E \left[\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \mathfrak{S}_1^{(1,1)}(\mathbf{i}\mathbf{z}, \mathbf{i}\mathbf{x}) \right] + o(r_n).$$

Skorohod 積分の漸近展開: フルランダムシンボル

- full random symbol $\mathfrak{S}(iz, ix)$ を次のように定義する :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(iz, ix) = & \mathfrak{S}^{(3,0)}(iz, ix) + \mathfrak{S}_0^{(2,0)}(iz, ix) \\ & + \mathfrak{S}^{(1,1)}(iz, ix) + \mathfrak{S}^{(1,0)}(iz, ix) + \mathfrak{S}^{(0,1)}(iz, ix) \\ & + \mathfrak{S}_1^{(2,0)}(iz, ix) + \mathfrak{S}_1^{(1,1)}(iz, ix). \end{aligned}$$

- $\mathfrak{S}_n := 1 + r_n \mathfrak{S}$.
- $\phi(z; \mu, \Sigma)$: 平均ベクトル μ , 共分散行列 Σ の正規確率密度関数
- $p_n(z, x)$ を次のように定義する :

$$p_n(z, x) = E \left[\mathfrak{S}_n(\partial_z, \partial_x)^* \left\{ \phi(z; 0, G_\infty) \delta_x(X_\infty) \right\} \right]$$

ここで, $\delta_x(X_\infty)$ は渡辺のデルタ関数, i.e., δ_x の X_∞ による引き戻し.

- 補間法 (Nourdin, Nualart and Peccati AP2016) を 2 次の補間法に拡張する

Skorohod 積分の漸近展開

定理 (Nualart and Y 2019) ある非退化性の条件のもとで, 任意の正数 M, γ に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\sup_{f \in \mathcal{E}(M, \gamma)} \left| E[f(Z_n, X_n)] - \int_{\mathbb{R}^{\check{d}}} f(z, x) p_n(z, x) dz dx \right| = o(r_n).$$

- $Z_n = M_n + r_n N_n, M_n = \delta(u_n)$
- X_n : 参照変数
- $\mathfrak{S}_n = 1 + r_n \mathfrak{S}$

$$p_n(z, x) = E \left[\mathfrak{S}_n (\partial_z, \partial_x)^* \left\{ \phi(z; 0, G_\infty) \delta_x(X_\infty) \right\} \right]$$

- $\mathcal{E}(M, \gamma)$: $|f(z, x)| \leq M(1 + |z| + |x|)^\gamma$ ($(z, x) \in \mathbb{R}^{\check{d}}$) を満たす可測関数 $f : \mathbb{R}^{\check{d}} \rightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合.
- $\check{d} = d + d_1$

例: 非整数ブラウン運動のランダムな係数をもつ2次変動

- $B = (B_t)_{t \in [0,1]}$: 非整数ブラウン運動, Hurst 係数 H
- 共分散関数

$$R_H(t, s) = E[B_s B_t] = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

- 2次変動

$$Z_n = n^{2H - \frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n a_{t_{j-1}} ((\Delta B_{j,n})^2 - n^{-2H})$$

ここで

- $t_j = j/n$
- a はなめらかな関数, $a_t = a(B_t)$
- $\Delta B_{j,n} = B_{j/n} - B_{(j-1)/n}$

非整数ブラウン運動のランダムな係数をもつ2次変動

- Z_n の分解 :

$$\begin{aligned} Z_n &= n^{2H-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n a_{t_{j-1}} ((\Delta B_{j,n})^2 - n^{-2H}) \\ &= \delta(u_n) + r_n N_n =: M_n + r_n N_n, \quad \text{ここで} \end{aligned}$$

$$u_n(t) = n^{2H-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n a_{t_{j-1}} \Delta B_{j,n} 1_{I_j}(t),$$

$$r_n N_n = n^{2H-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n \Delta B_{j,n} \langle D a_{t_{j-1}}, 1_{I_j} \rangle \xi_j.$$

- $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ のとき $r_n = n^{2H-\frac{3}{2}}$,
 $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ のとき $r_n = n^{\frac{1}{2}-2H}$.
- 漸近展開: 可測関数 f に対して,

$$E[f(Z_n)] = \int f(z) p_n(z) dz + \bar{o}(r_n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

非整数ブラウン運動のランダムな係数をもつ2次変動

- $H > \frac{1}{2}$ の場合.

$$\begin{aligned}
 & E[\Psi(z)\mathfrak{S}^3(iz)] \\
 &= c_H^4(iz)^5 \int_{[0,1]^3} E[\Psi(z)(a^2)'(B_\theta)a(B_r)(a^2)'(B_t)] \frac{\partial R_H}{\partial r}(\theta, r) \frac{\partial R_H}{\partial r}(t, r) dt d\theta dr \\
 &\quad + H c_H^2(iz)^3 \int_{[0,1]^2} E[\Psi(z)a'(B_r)(a^2)'(B_t)] r^{2H-1} \frac{\partial R_H}{\partial r}(t, r) dt dr \\
 &\quad + c_H^2(iz)^3 \int_{[0,1]^2} E[\Psi(z)a(B_r)(a^2)''(B_t)] \left(\frac{\partial R_H}{\partial r}(t, r) \right)^2 dt dr.
 \end{aligned}$$

- $H < \frac{1}{2}$ の場合. $\mathfrak{S}^3(iz) = 0$.
- 同様の議論でランダムシンボル \mathfrak{S} の表現を得ることができ, Z_n の漸近展開が導かれる.

anticipative なウエイトをもつ p -変動の漸近展開

例. anticipative なウエイトをもつ 2 次変動

簡単な例

- $Z_n = \sqrt{n}(V_n - V_\infty),$

$$V_n = \sum_{j=1}^n a(w_{1-t_j})(\Delta_j w)^2, \quad t_j = j/n, \quad w : \text{ブラウン運動}$$

- Skorohod 積分として扱う
- 漸近展開

$$E[f(Z_n)] = \int f(z)p_n(z)dz + \bar{o}(n^{-1/2}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

ここで f は可測関数. 密度 p_n はすこし複雑.

- $p_n(z) = E[\mathfrak{S}_n(\partial_z)^* \phi(z; 0, G_\infty)], \quad \mathfrak{S}_n = 1 + n^{-1/2}\mathfrak{S},$
 $\mathfrak{S}(iz) = \mathfrak{S}^{(3,0)}(iz) + \mathfrak{S}^{(1,0)}(iz). \text{ E.g.}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^{(3,0)}(iz) &= \frac{4}{3} \int_0^1 a_{1-t}^3 dt (iz)^3 + 2 \int_{[0,1]^2} a^{(3,0)}(t, s, 2, 2) ds dt (iz)^3 \\ &\quad + \int_0^1 D_t G_\infty \left[\int_0^{1-t} a'_{1-s} a_{1-s} ds \right] a_{1-t} dt (iz)^5 \end{aligned}$$

anticipative なウエイトをもつ 2 次変動

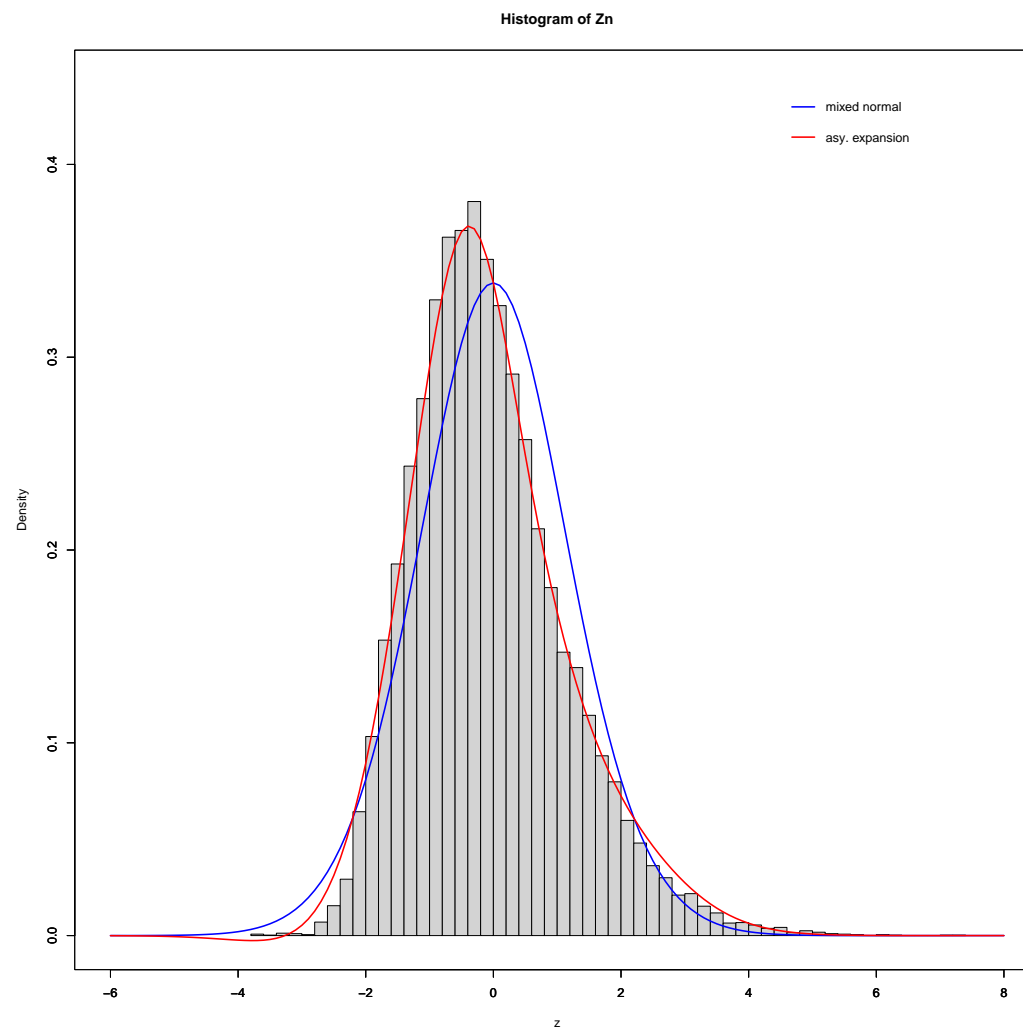


Figure 1: $a(x) = \cos x$, $n = 10$

anticipative なウエイトをもつ 2 次変動

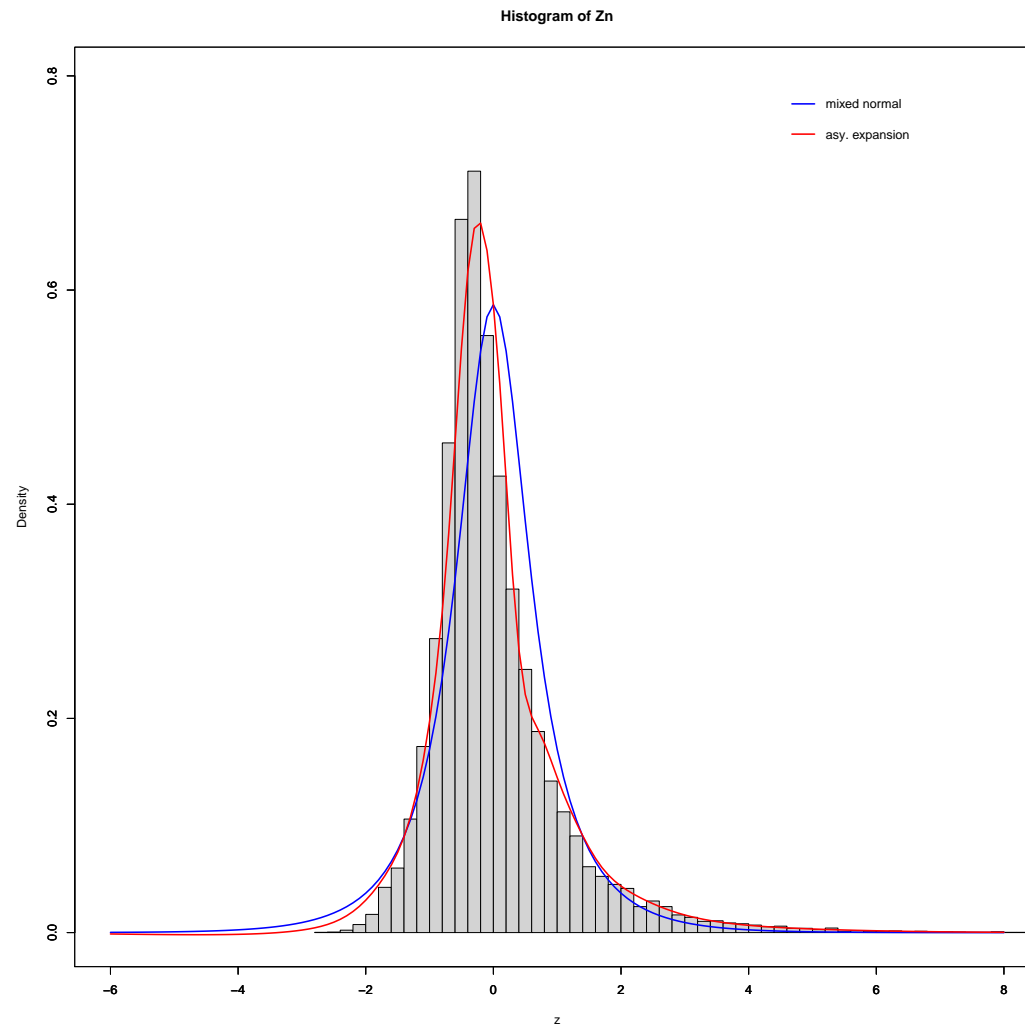


Figure 2: $a(x) = \sqrt{0.01 + x^2}$, $n = 16$

例. ロバストリアライズドボラティリティ

- stochastic differential equation

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)dw_t + b(X_t)dt, & t \in \mathbb{R}_+ \\ X_0 = x_0, \end{cases}$$

for a Brownian motion $w = (w_t)$.

- The realized volatility $U_n = \sum_{j=1}^n (\Delta_j X)^2$ on the interval $[0, 1]$, where $\Delta_j X = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ with $t_j = j/n$.
- It is well known that U_n is sensitive to jumps.
- A robust variation of the realized volatility we will consider is

$$\mathbb{V}_n = \sum_{j=1}^n \Phi(U_n, L_{n,j}) (\Delta_j X)^2,$$

where $\Phi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^2)$, and the functional $L_{n,j}$ is defined by

$$L_{n,j} = \eta_{n,j}^{-1} \sum_{k \in K_j} (\Delta_k X)^2$$

with $\eta_{n,j} = \#K_j/n$, where

$$K_j = K_{n,j} = \{k \in \mathbb{N}; \underline{K}_j \leq k \leq \overline{K}_j\}$$

and

$$\underline{K}_j = \underline{K}_{n,j} = (j - \lfloor n\lambda \rfloor + 1) \vee 1, \quad \overline{K}_j = \overline{K}_{n,j} = (j + \lfloor n\lambda \rfloor - 1) \wedge n$$

for the locality parameter $\lambda \in (0, 1)$.

ブラウン運動の anticipative なウエイトをもつ変動

- 上の例 $V_n = \sum_{j=1}^n a(w_{1-t_j}) (\Delta_j w)^2$ を一般化する.
- $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 上の \mathbb{R} -値関数のなす L^2 空間,

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \int_0^\infty h_1(t) h_2(t) dt \quad (h_1, h_2 \in \mathfrak{H})$$
- $\mathbb{W} = (\mathbb{W}(h))_{h \in \mathfrak{H}}$: \mathfrak{H} 上の isonormal Gaussian process
- $w_t := \mathbb{W}(1_{[0,t]})$ ($t \in \mathbb{R}_+$)
- このとき, $w = (w_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ は 1次元標準ブラウン運動

ブラウン運動の anticipative なウエイトをもつ変動

- $w_t := \mathbb{W}(1_{[0,t]})$ ($t \in \mathbb{R}_+$), ブラウン運動
- $t_j = t_j^n = j/n$ ($j = 0, 1, \dots, n$),
 $1_j := 1_{I_j}$, $I_j = [t_{j-1}, t_j]$
- \mathcal{Q} : $\{2, 3, 4, \dots\}$ の有限部分集合, $\mathcal{Q} \cap (\mathcal{Q} + 1) = \emptyset$
- 変動

$$V_n = \sum_{q \in \mathcal{Q}} n^{2^{-1}(q-1)} \sum_{j=1}^n a_j(q) I_q(1_j^{\otimes q}). \quad (1)$$

ここで, ランダムなウエイト $a_j(q) = a_j^n(q)$ は $j \in \mathbb{J}_n = \{1, \dots, n\}$ と $n \in \mathbb{N}$ に依存する.

- ウエイト $a_j(q)$ はブラウニアンフィルトレーションに関して可予測とは仮定していない.
 - $a_j(q) = a(w_{1-j/n})$
 - $a_j(q) = \Phi(\text{global RV}, \text{local RV})$ (global filter)

ブラウン運動の anticipative なウエイトをもつ変動: V_n の分解

$$Z_n := V_n = M_n + n^{-1/2}N_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2)$$

ここで,

$$M_n = \delta(u_n) = \sum_{q \in \mathcal{Q}} M_n(q), \quad M_n(q) = \delta(u_n(q)),$$

$$u_n(q) = n^{2^{-1}(q-1)} \sum_{j=1}^n a_j(q) I_{q-1}(1_j^{\otimes(q-1)}) 1_j,$$

$$N_n = \sum_{q \in \mathcal{Q}} n^{q/2} \sum_{j=1}^n (D_{1_j} a_j(q)) I_{q-1}(1_j^{\otimes(q-1)}).$$

- 簡単のため, 参照変数として n に依存しない $X_n = X_\infty$ を考える.
- $a_j(q)$ に関する確率過程 $a(t, q)$ によって
 $G_\infty = \sum_{q \in \mathcal{Q}} q! \int_0^1 a(t, q)^2 dt$ と表される.

ブラウン運動の anticipative なウエイトをもつ変動：漸近展開

定理 (Y 2023) 任意の $(M, \gamma) \in (0, \infty)^2$ に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\sup_{f \in \mathcal{E}(M, \gamma)} \left| E[f(V_n, X_\infty)] - \int_{\mathbb{R}^2} f(z, x) p_n(z, x) dz dx \right| = o(r_n).$$

ここで密度 $p_n(z, x)$ は, 後述の (7) で与えられるランダムシンボル \mathfrak{S} に対して (3) で定義される.

- ランダムシンボル

$$\mathfrak{S}_n = 1 + n^{-1/2} \mathfrak{S}.$$

ここでランダムシンボル \mathfrak{S} は後述の (7) で定義される.

- 漸近展開公式

$$p_n(z, x) = E \left[\mathfrak{S}_n(\partial_z, \partial_x)^* \left\{ \phi(z; 0, G_\infty) \delta_x(X_\infty) \right\} \right]. \quad (3)$$

- $\mathcal{E}(M, \gamma)$: $|f(z, x)| \leq M(1 + |z| + |x|)^\gamma$ ($(z, x) \in \mathbb{R}^2$) を満たす可測関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合.

ブラウン運動の anticipative なウエイトをもつ変動：ランダムシンボル

$$\bar{q}(3) := q_1 + q_2 + q_3,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}^{(3,0)}(iz, ix) &:= \frac{1}{3} \sum_{q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{Q}} \mathbf{1}_{\{\bar{q}(3): \text{even}\}} (q_1 + q_2)(q_1 - 1) c_{0.5\bar{q}(3)-2}(q_1 - 2, q_2 - 1, q_3 - 1) \\ &\quad \times \int_0^1 a(t, q_1) a(t, q_2) a(t, q_3) dt (iz)^3 \\ &\quad + \sum_{q_1 \in \mathcal{Q}} \mathbf{1}_{\{2 \in \mathcal{Q}\}} q_1! \int_{[0,1]^2} a^{(3,0)}(t, s, q_1, q_1) ds dt (iz)^3 \\ &\quad + \sum_{q_1 \in \mathcal{Q}} \mathbf{1}_{\{2 \in \mathcal{Q}\}} q_1! \int_{t=0}^1 \left[\left(2^{-1} D_t G_\infty(iz)^5 + D_t X_\infty(iz)^3(ix) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^1 \overset{\circ}{a}(t, s, q_1) a(s, q_1) ds \right] a(t, 2) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで,

- (4) に現れる確率場 $a^{(3,0)}(t, s, q_1, q_2)$, $\overset{\circ}{a}(t, s, q_1)$, $a(s, q_1)$ は $a_j(q)$ に関係している.
- $c_\nu(q_1, q_2, q_3)$ は定数.

ブラウン運動の anticipative なウエイトをもつ変動：ランダムシンボル

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}^{(1,1)}(iz, ix) := 1_{\{2 \in \mathcal{Q}\}} & \left\{ \int_0^1 \ddot{X}_\infty(t) a(t, 2) dt(iz)(ix) \right. \\
& + \int_0^1 D_t X_\infty \dot{a}(t, 2) dt(iz)(ix) \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 (D_t G_\infty)(D_t X_\infty) a(t, 2) dt(iz)^3(ix) \\
& \left. + \int_0^1 (D_t X_\infty)^2 a(t, 2) dt(iz)(ix)^2 \right\}, \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}^{(1,0)}(iz) := 1_{\{2 \in \mathcal{Q}\}} & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 (D_t G_\infty) \dot{a}(t, 2) dt(iz)^3 \right. \\
& \left. + \int_0^1 (D_t X_\infty) \dot{a}(t, 2) dt(iz)(ix) + \int_0^1 \ddot{a}(t, 2) dt(iz) \right\}. \tag{6}
\end{aligned}$$

さらに,

$$\mathfrak{S}(iz, i, x) = \mathfrak{S}^{(3,0)}(iz, ix) + \mathfrak{S}^{(1,1)}(iz, ix) + \mathfrak{S}^{(1,0)}(iz, ix) \tag{7}$$

とする．ここで，ランダムシンボル $\mathfrak{S}^{(3,0)}(iz, ix)$, $\mathfrak{S}^{(1,1)}(iz, ix)$, $\mathfrak{S}^{(1,0)}(iz, ix)$ はそれぞれ (4), (5), (6) で与えられている． \square

証明の中で，多重ウィナー積分の多項式が現れる

第一射影において $D_{u_n(q_2)}M_n(q_1) = \langle DM_n(q_1), u_n(q_2) \rangle$,

$$\begin{aligned} D_{u_n(q_2)}M_n(q_1) &= D_{u_n(q_2)} \left(n^{2^{-1}(q_1-1)} \sum_{j=1}^n a_j(q_1) I_{q_1}(1_j^{\otimes q_1}) \right) \\ &\quad - D_{u_n(q_2)} \left(n^{2^{-1}(q_1-1)} \sum_{j=1}^n (D_{1_j} a_j(q_1)) I_{q_1-1}(1_j^{\otimes (q_1-1)}) \right) \\ &= \mathbb{1}_1 + \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_3 + \mathbb{1}_4, \quad \text{ここで} \end{aligned}$$

$$\mathbb{1}_1 = n^{2^{-1}(q_1+q_2)-1} \sum_{j,k} q_1 a_j(q_1) a_k(q_2) \langle 1_j, 1_k \rangle I_{q_1-1}(1_j^{\otimes (q_1-1)}) I_{q_2-1}(1_k^{\otimes (q_2-1)}),$$

$$\mathbb{1}_2 = n^{2^{-1}(q_1+q_2)-1} \sum_{j,k} (D_{1_k} a_j(q_1)) a_k(q_2) I_{q_1}(1_j^{\otimes q_1}) I_{q_2-1}(1_k^{\otimes (q_2-1)}),$$

$$\mathbb{1}_3 = -n^{2^{-1}(q_1+q_2)-1} \sum_{j,k} (q_1 - 1) (D_{1_j} a_j(q_1)) a_k(q_2) \langle 1_j, 1_k \rangle I_{q_1-2}(1_j^{\otimes (q_1-2)}) I_{q_2-1}(1_k^{\otimes (q_2-1)}),$$

$$\mathbb{1}_4 = -n^{2^{-1}(q_1+q_2)-1} \sum_{j,k} (D_{1_k} D_{1_j} a_j(q_1)) a_k(q_2) I_{q_1-1}(1_j^{\otimes (q_1-1)}) I_{q_2-1}(1_k^{\otimes (q_2-1)}).$$

quasi-torsion に対応する第二射影 $D_{u_n}^2 M_n$ は どの項が漸近展開式に残るか？

汎関数の指数

- 汎関数 \mathcal{I}_n

$$\mathcal{I}_n = n^\alpha \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n A_n(j_1, \dots, j_m) I_{q_1}(f_{j_1}^{(1)}) \cdots I_{q_m}(f_{j_m}^{(m)}) \quad (8)$$

ここで $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ and $(q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{Z}^m$.

- $f_{j_i}^{(i)} = f_{j_i}^{(i),n} \in \mathfrak{S}^{\otimes q_j}$ が, $\text{supp}(f_{j_i}^{(i)}) \subset I_{j_i}^{q_i}$, $I_j = [t_{j-1}, t_j]$, さらに, 定数 C_1 に対して

$$\max_{i=1, \dots, m} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j_i=1, \dots, n} \sup_{t_1, \dots, t_{q_i} \in [0,1]} |f_{j_i}^{(i)}(t_1, \dots, t_{q_i})| \leq C_1 \quad (9)$$

を満たすとする.

- 仮定

[S] $A_n(j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{D}^\infty$ for all $j_1, \dots, j_m \in \mathbb{J}_n$, $n \in \mathbb{N}$, and

$$C(i, p) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j_1, \dots, j_m \in \mathbb{J}_n} \sup_{t_1, \dots, t_i \in [0,1]} \|D_{t_1, \dots, t_i}^i A_n(j_1, \dots, j_m)\|_p < \infty$$

($i \in \mathbb{Z}_+$, $p > 1$), $\mathbb{J}_n = \{1, \dots, n\}$.

汎関数の指数

- $\bar{q}(m) := q_1 + \cdots + q_m$.
- $(q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{Z}^m$ に対して,

$$\mathbf{m}_1(q_1, \dots, q_m) := \#\{m' \in \{1, \dots, m\}; q_{m'} > 0\}$$

- 表現(8)をもつ汎関数 \mathcal{I}_n の指数(exponent) $e(\mathcal{I}_n)$ を定義する:

$$e(\mathcal{I}_n) = \alpha - \frac{1}{2}\bar{q}(m) + m - \frac{1}{2}\mathbf{m}_1(q_1, \dots, q_m) - \infty \mathbf{1}_{\{\min\{q_1, \dots, q_m\} < 0\}}.$$

定理 [S] を仮定する. このとき,

$$\mathcal{I}_n = O_{L^\infty}(n^{e(\mathcal{I}_n)}) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (10)$$

$$\mathcal{I}_n = n^\alpha \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n A_n(j_1, \dots, j_m) I_{q_1}(f_{j_1}^{(1)}) \cdots I_{q_m}(f_{j_m}^{(m)})$$

汎関数の指数

- 次の形の \mathcal{I}_n を考える：

$$\mathcal{I}_n = n^\alpha \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n A_n(j_1, \dots, j_m) I_{q_1}(1_{j_1}^{\otimes q_1}) \cdots I_{q_m}(1_{j_m}^{\otimes q_m}) \quad (11)$$

ここで, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $(q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{Z}^m$.

- $a_j(q) \in \mathbb{D}^\infty$ ($j \in \mathbb{J}_n$, $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathcal{Q}$),

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \in \mathbb{J}_n} \sup_{t_1, \dots, t_i \in [0,1]} \|D_{t_i} \cdots D_{t_1} a_j(q)\|_p < \infty \quad (12)$$

($i \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$, $p > 1$, $q \in \mathcal{Q}$.) ($a_j(q)$ は n に依存している.)

- 再掲

$$u_n(q) = n^{2^{-1}(q-1)} \sum_{j=1}^n a_j(q) I_{q-1}(1_j^{\otimes (q-1)}) 1_j. \quad (13)$$

- 上の定理を適用して,

作用素 $D_{u_n(q)}$ のもとでの指数の安定性と縮小性

命題 表現 (11) をもつ \mathcal{I}_n に対して,

(i) $(D_{u_n(q)}\mathcal{I}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L},$

$$e(D_{u_n(q)}\mathcal{I}_n) \leq e(\mathcal{I}_n).$$

(ii) もし $q_{m'} \neq q$ なる $m' \in \{1, \dots, m\}$ が存在すれば,

$$e(D_{u_n(q)}\mathcal{I}_n) \leq e(\mathcal{I}_n) - \frac{1}{2}.$$

- 同様に作用素 D^i のもとでの安定性が示される:

命題 表現 (11) をもつ \mathcal{I}_n と $i \in \mathbb{Z}_+$ に対して,

$$|D^i \mathcal{I}_n|_{\mathcal{S}^{\otimes i}} = O_{L^\infty}(n^{e(\mathcal{I}_n)}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

- このようにして, ランダムシンボルに現れるさまざまな多重積分の多項式のソボレフノルムのオーダーが評価できる.
-

$$\mathcal{I}_n = n^\alpha \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n A_n(j_1, \dots, j_m) I_{q_1}(1_{j_1}^{\otimes q_1}) \cdots I_{q_m}(1_{j_m}^{\otimes q_m})$$

非整数拡散過程の 2 次変動の漸近展開

- 非正数ブラウン運動で駆動される確率微分方程式の解 X を考える． $H \in (1/2, 3/4)$
- Skorohod 積分に対する漸近展開を用いて， X に対するリアライズドボラティリティの誤差分布の漸近展開を導出できる．
- このとき，ランダムな係数を持つ，(ヒルベルト空間 \mathfrak{h} を fBm に対応するものに設定したときの) 多重 Wiener 積分と $\langle 1_j, 1_k \rangle$ の複雑な多項式として表される汎関数に対する Sobolev ノルム評価および，射影と Malliavin 微分の下でのオーダーの安定性と変化を捉える必要がある．
- weighted graph を用いて汎関数の指数 (exponent) を定義し，それでノルムが評価できることを証明した．この道具を使って漸近展開を導出した (Yamagishi and Y 2023, 2024)．

Wiener 汎関数の一般展開定理

エルゴード的統計（中心極限の場合）に Wiener 汎関数の任意次の漸近展開が得られる。

Wiener 汎関数の高次展開

- $F_N = (F_N^{(1)}, \dots, F_N^{(d)})$, $N \in \mathbb{N}$: 中心化された d 次元 Wiener 汎関数の列
- $F = (F_1, \dots, F_d)$ のガンマファクター
 $\Gamma_{i_1}^{(1)}(F) = F_{i_1}$, $\Gamma_{i_1, \dots, i_p}^{(p)}(F) = \langle D(-L)^{-1} \Gamma_{i_1, \dots, i_{p-1}}^{(p-1)}(F), DF_{i_p} \rangle$.

[B] 各 $j \in \{2, \dots, p+1\}$ と $I_j \in \mathbb{I}^j$ に対して, ($k(I_j) \geq 1$ のとき) $k \in \{1, \dots, k(I_j)\}$ に対して, 実数 $(c(I_j, k))_{k=1, \dots, k(I_j)}$ と $(\gamma(I_j, k))_{k=1, \dots, k(I_j)}$ が存在して以下の条件が成り立つ:

- (i) $0 < \gamma(I_j, 1) < \dots < \gamma(I_j, k(I_j)) \leq \mathbf{q}$ ($k(I_j) \geq 1$ のとき).
- (ii) $I_2 \in \mathbb{I}^2$ に対して,

$$\mathbf{E}[\Gamma_{I_2}^{(2sym)}(F_N)] - C_{I_2} = \sum_{k=1}^{k(I_2)} c(I_2, k) N^{-\gamma(I_2, k)} + o(N^{-\mathbf{q}}).$$

- (iii) $j \in \{3, \dots, p+1\}$ と $I_j \in \mathbb{I}^j$ に対して,

$$\mathbf{E}[\Gamma_{I_j}^{(j)}(F_N)] = \sum_{k=1}^{k(I_j)} c(I_j, k) N^{-\gamma(I_j, k)} + o(N^{-\mathbf{q}}).$$

- (iv)

Wiener 汎関数の高次展開

\mathbb{R} -値密度関数 $\tilde{f}_{N,p,k,q}$ を次のように定める：

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{N,p,k,q}(x) &= \phi(x; 0, C) \\ &+ \sum_{j=1}^k \sum_{m_1=2}^{p+1} \cdots \sum_{m_j=2}^{p+1} \sum_{I_{m_1}^{(1)} \in \mathbb{I}^{m_1}} \cdots \sum_{I_{m_j}^{(j)} \in \mathbb{I}^{m_j}} \sum_{k_1=1}^{k(I_{m_1}^{(1)})} \cdots \sum_{k_j=1}^{k(I_{m_j}^{(j)})} \left\{ \frac{1}{j! m_1 \cdots m_j} \right. \\ &\quad \times c(I_{m_1}^{(1)}, k_1) \cdots c(I_{m_j}^{(j)}, k_j) H_{\alpha(I_{m_1}^{(1)}, \dots, I_{m_j}^{(j)})}(x; C) \phi(x; 0, C) \\ &\quad \left. \times \mathbf{1}_{\{\gamma(I_{m_1}^{(1)}, k_1) + \cdots + \gamma(I_{m_j}^{(j)}, k_j) \leq q\}} N^{-\{\gamma(I_{m_1}^{(1)}, k_1) + \cdots + \gamma(I_{m_j}^{(j)}, k_j)\}} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

- 汎関数 F_N の高次漸近展開はガンマファクター $E[\Gamma^{(p)}(F_N)]$ の展開係数で決定される。

定理 (Tudor and Yoshida 2023) 任意の $a, b > 0$ に対して,

$$\sup_{g \in \mathcal{E}(a,b)} \left| \mathbf{E}[g(F_N)] - \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \tilde{f}_{N,p,k,q}(x) dx \right| = o(N^{-q}) \quad (N \rightarrow \infty). \quad (15)$$

- 分布論的漸近展開であるが、機能的には、摂動論における渡辺理論 (Watanabe 1987) のスキームに近い。
 - 分布の滑らかさに関する非退化性の問題は行列 C の非退化性が満たされれば十分。

非整数 Ornstein-Uhlenbeck 過程

- 非整数 Ornstein-Uhlenbeck 過程 (fractional Ornstein-Uhlenbeck process)

$$\begin{cases} dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dB_t, & t \geq 0, \\ X_0 = x_0, \end{cases} \quad (16)$$

- x_0 : 定数
- $(B_t, t \geq 0)$: 非正数ブラウン運動, $H \in (1/2, 1)$.
- θ 未知パラメータ, パラメータ空間 Θ は \mathbb{R} の有界開集合で $\bar{\Theta} \subset (0, \infty)$,
- H, σ : 既知
- $(X_t)_{t \in [0, T]}$: データ
- $T \rightarrow \infty$

- Hu and Nualart (Stat Probab Lett 2010)

$$\tilde{\theta}_T = \left(\frac{1}{\sigma^2 H \Gamma(2H) T} \int_0^T X_t^2 dt \right)^{-\frac{1}{2H}}, \quad (17)$$

- より一般に, $\tilde{\theta}_T$ に高次バイアス修正を施したものを $\hat{\theta}_T$ とする.

The fractional Ornstein-Uhlenbeck process

- The second-order

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(H) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (H \in (\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]) \\ -4H + 3 & (H \in (\frac{5}{8}, \frac{3}{4})) \end{cases} \quad (18)$$

- Second-order bias correction

$$\widehat{\theta}_T^o = \widetilde{\theta}_T - T^{-\frac{1}{2}-\mathbf{q}}\beta(\widetilde{\theta}_T),$$

where $\beta = \beta_H \in C_B^\infty(\Theta)$, i.e., β is smooth on Θ and all its derivatives are bounded on Θ , and $\mathbf{q} = \mathbf{q}(H)$ is a number define by (18).

- The value of $\widehat{\theta}_T^o$ can exceed the boundary of Θ , the estimator $\widehat{\theta}_T$ we will consider is more precisely defined as

$$\widehat{\theta}_T = \begin{cases} \widehat{\theta}_T^o & \text{if } \widetilde{\theta}_T \in \Theta \text{ and } \widehat{\theta}_T^o \in \Theta, \\ \theta_* & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (19)$$

where θ_* is a prescribed value in Θ . The choice of the value θ_* will not affect asymptotically in any order of expansion.

The fractional Ornstein-Uhlenbeck process: strategy

- $\widehat{\theta}_T$ admits a stochastic expansion:

$$T^{1/2}(\widehat{\theta}_T - \theta) = \mathbb{S}_T + T^{-1/2}\kappa\mathbb{S}_T^2 + T^{-\mathfrak{q}}\mathfrak{d}_T + \mathbb{R}_T, \quad (20)$$

- \mathbb{S}_T is define by

$$\mathbb{S}_T = U_T + V_T + W_T, \quad (21)$$

where

$$U_T = I_2(u_T), \quad V_T = I_2(v_T) \quad \text{and} \quad W_T = I_1(w_T) \quad (22)$$

for

$$\begin{aligned} u_T(s, t) &= K_U T^{-1/2} e^{-\theta|s-t|} \mathbf{1}_{[0, T]^2}(s, t) \quad \text{with} \quad K_U = -\frac{\theta^{2H}}{4H^2\Gamma(2H)}, \\ v_T(s, t) &= K_V T^{-1/2} e^{-\theta(T-s)-\theta(T-t)} \mathbf{1}_{[0, T]^2}(s, t) \quad \text{with} \quad K_V = \frac{\theta^{2H}}{4H^2\Gamma(2H)}, \\ w_T(t) &= K_W T^{-1/2} (e^{-\theta t} - e^{-2\theta T + \theta t}) \mathbf{1}_{[0, T]}(t) \quad \text{with} \quad K_W = -\frac{x_0 \theta^{2H}}{2\sigma H^2\Gamma(2H)}. \end{aligned}$$

- $\mathfrak{d}_T = T^{-\frac{1}{2}+\mathfrak{q}}\mathbb{G}(\theta)^{-1}\bar{b}_T(\theta) - \beta(\theta)$.
- The expansion (20) is a perturbation of \mathbb{S}_T .

The fractional Ornstein-Uhlenbeck process: strategy

- Asymptotic expansion for \mathbb{S}_T

$$\sup_{g \in \mathcal{E}(a,b)} \left| E[g(\mathbb{S}_T)] - \int_{\mathbb{R}} g(x) p_{H,T}^*(x) dx \right| = o(T^{-\mathfrak{q}(H)}) \quad (23)$$

as $T \rightarrow \infty$.

- For this, find an expansion of the expected gamma factors $E[\Gamma^{(m)}(\mathbb{S}_T, \dots, \mathbb{S}_T)]$.
- This is reduced to the expansion of $E[\Gamma^{(m)}(U_T^{(1)}, \dots, U_T^{(m)})]$ for $U_T^{(1)}, \dots, U_T^{(m)} \in \{U_T, V_T, W_T\}$, e.g.,

$$E[\Gamma^{(2)}(U_T, U_T)] = C_U(2, H, \theta) + C_U''(2, H, \theta) T^{4H-3} + o(T^{4H-3})$$

as $T \rightarrow \infty$.

- Apply the perturbation method to obtain the asymptotic expansion of the estimator:

$$\sup_{g \in \mathcal{E}(a,b)} \left| E[g(T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta))] - \int_{\mathbb{R}} g(x) p_{H,T}(x) dx \right| = o(T^{-\mathfrak{q}(H)})$$

as $T \rightarrow \infty$. □

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(H) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (H \in (\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]) \\ -4H + 3 & (H \in (\frac{5}{8}, \frac{3}{4})) \end{cases}$$

非整数 Ornstein-Uhlenbeck 過程

- 密度関数

$$\begin{aligned}
 p_{H,T}(x) = \phi(x; 0, c_0) & \left(1 + 1_{\{H \in [\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]\}} 2^{-1} c_2 H_2(x; 0, c_0) T^{4H-3} \right. \\
 & + 1_{\{H \in (\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]\}} 3^{-1} c_3 H_3(x; 0, c_0) T^{-\frac{1}{2}} \\
 & \left. + c_1 H_1(x; 0, c_0) T^{-q(H)} \right). \tag{24}
 \end{aligned}$$

ここで, c_0, \dots, c_3 は H と θ に依存した定数.

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(H) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (H \in (\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]) \\ -4H + 3 & (H \in (\frac{5}{8}, \frac{3}{4})) \end{cases}$$

定理 (Tudor and Y arXiv2024) $H \in (1/2, 3/4)$ とする. このとき, 任意の $a, b > 0$ に対して, $T \rightarrow \infty$ のとき,

$$\sup_{g \in \mathcal{E}(a,b)} \left| E[g(T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta))] - \int_{\mathbb{R}} g(x) p_{H,T}(x) dx \right| = o(T^{-q(H)}).$$

- $a, b > 0$ に対して, $\mathcal{E}(a, b)$ は $|g(x)| \leq a(1 + |x|^b)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) を満たす可測関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の全体の集合を表す.
- 漸近展開公式では, 2次項 (1次の漸近展開) において, 長期記憶の効果が $H = 5/8$ 以上で現れる. それより小さい H に対しては古典的なレート $T^{-1/2}$ になっている.

The fractional Ornstein-Uhlenbeck process

Table 1: Estimated exponents of \mathbf{T} and [Rank]s

sequence\interval	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$	$(\frac{5}{8}, \frac{7}{12})$	$(\frac{7}{12}, \frac{2}{3})$	$(\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$
0th-order term of $\mathbf{E}[\Gamma^{(2)}(\mathbf{U}_T, \mathbf{U}_T)]$	0 [1]	0 [1]	0 [1]	0 [1]
1st-order term of $\mathbf{E}[\Gamma^{(2)}(\mathbf{U}_T, \mathbf{U}_T)]$	$4H - 3$ [3]	$4H - 3$ [2]	$4H - 3$ [2]	$4H - 3$ [2]
$\mathbf{E}[\Gamma^{(3)}(\mathcal{S}_T, \mathcal{S}_T, \mathcal{S}_T)]$	$-\frac{1}{2}$ [2]	$-\frac{1}{2}$ [3]	$-\frac{1}{2}$ [3]	$\frac{3}{2}(4H - 3)$ [3]
$\mathbf{E}[\tilde{\Gamma}^{(3)}(\mathbf{U}_T, \mathbf{U}_T, \mathbf{U}_T)]$	-1	-1	$\frac{3}{2}(4H - 3)$	$\frac{3}{2}(4H - 3)$
$\mathbf{E}[\tilde{\Gamma}^{(3)}(\mathbf{U}_T, \mathbf{U}_T, \mathbf{V}_T)]$	-1	-1	$\frac{3}{2}(4H - 3)$	$\frac{3}{2}(4H - 3)$
$\mathbf{E}[\tilde{\Gamma}^{(3)}(\mathbf{U}'_T, \mathbf{U}''_T, \mathbf{W}_T)]$	-1	-1	-1	-1

シミュレーション: $H = 0.55$

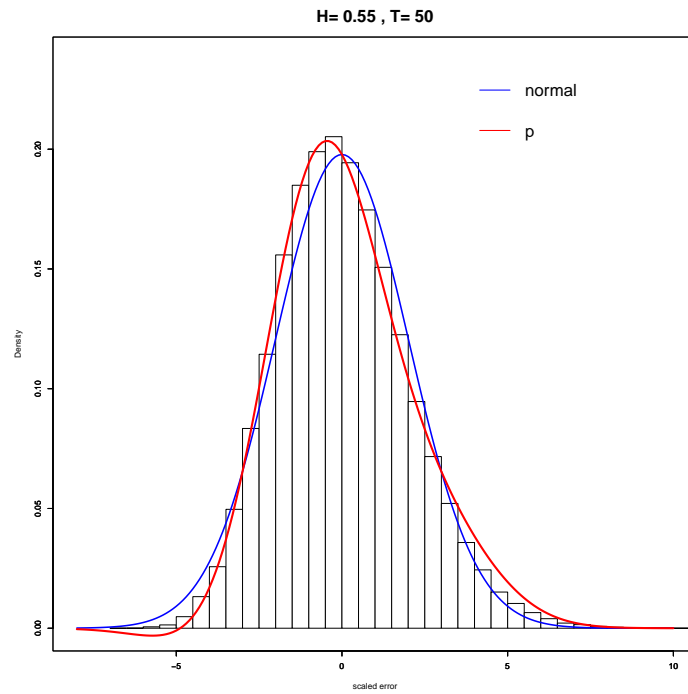


Figure 3: $N(0, c_0)$ and $p_{0.55,50}$

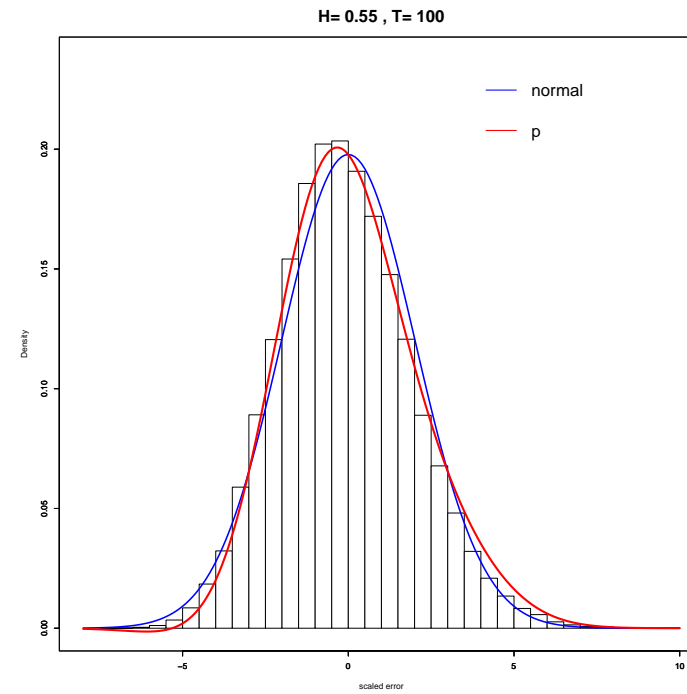


Figure 4: $N(0, c_0)$ and $p_{0.55,100}$

シミュレーション $H = 5/8 = 0.625$

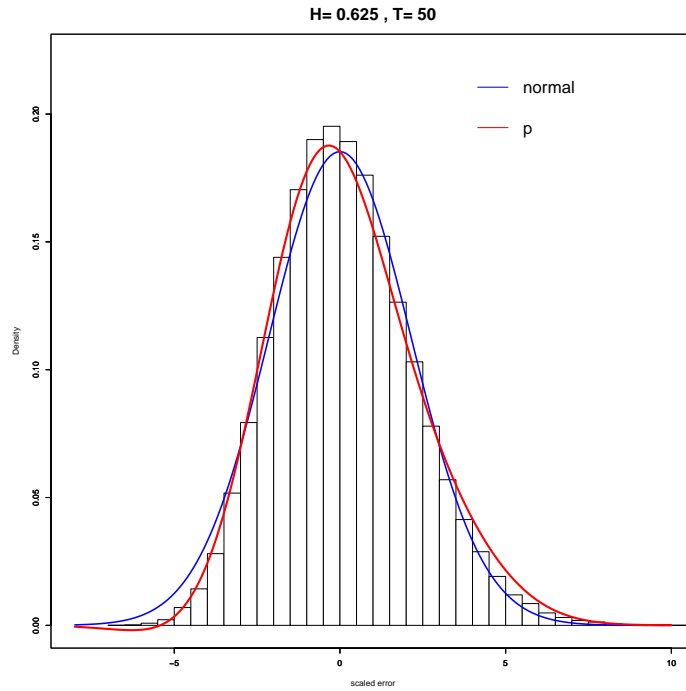


Figure 5: $N(0, c_0)$ and $p_{0.625,50}$

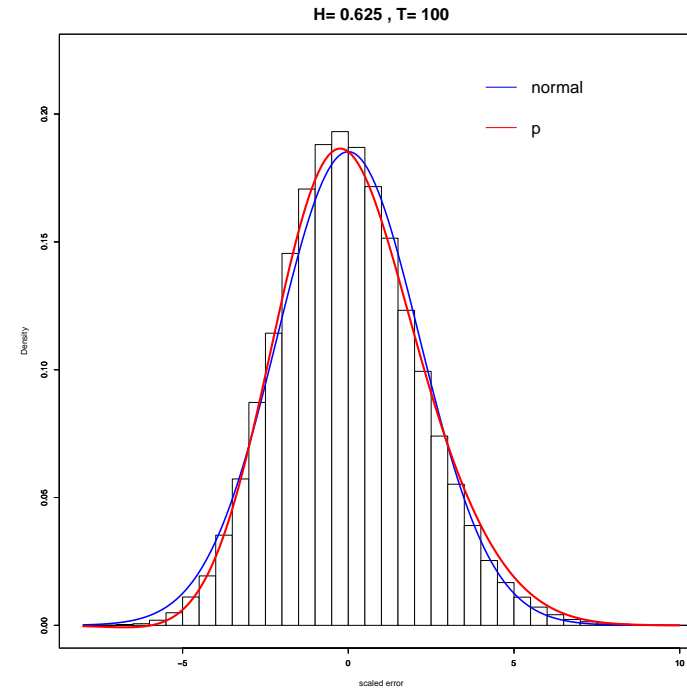


Figure 6: $N(0, c_0)$ and $p_{0.625,100}$

シミュレーション: $H = 0.70$

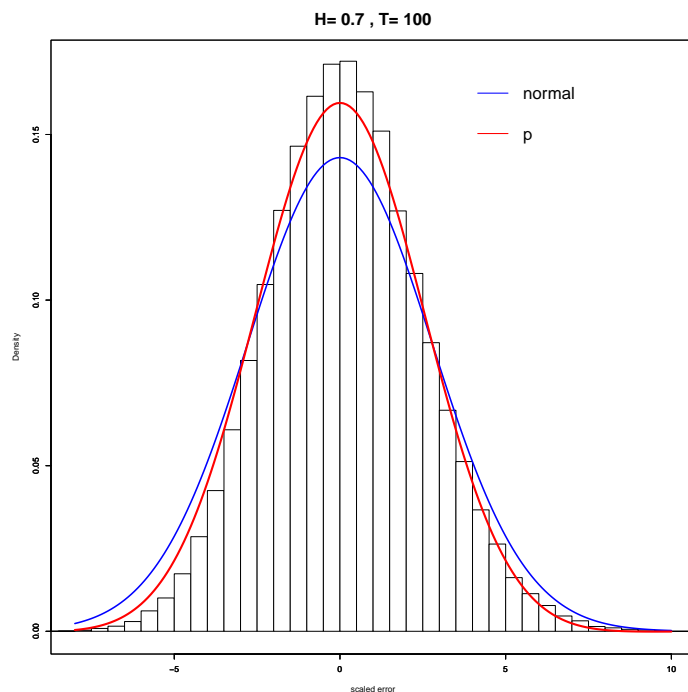


Figure 7: $N(0, c_0)$ and $p_{0.7,100}$

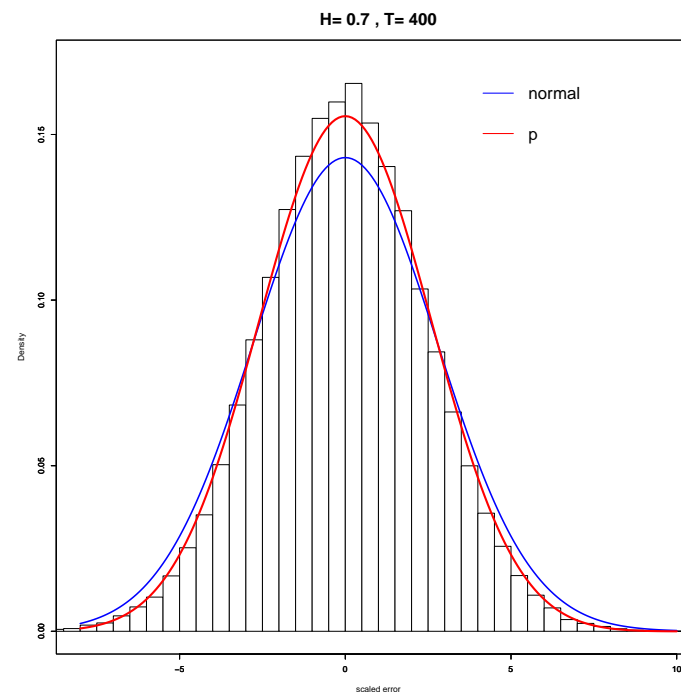


Figure 8: $N(0, c_0)$ and $p_{0.7,400}$

- $H = 3/4$ においては極限は正規分布であるが、収束率は $T^{1/2} / \sqrt{\log T}$ であり、 H が $3/4$ を超えると収束率 T^{2-2H} の Rosenblatt 分布が現れることが知られている。
- 図7と図8において、 T が比較的大きいにもかかわらず $T^{1/2}$ の収束率の中心極限定理による正規近似はあまり機能していなが、漸近展開はその近似を改善しようとしていることがわかる。

Wiener 汎関数の一般展開定理の応用

- Hurst 係数の推定 (Mishura, Yamagishi and Y 2023)
- 混合非整数ブラウン運動の2次変動 (Tudor and Y 2020)
- 確率偏微分方程式 (Tudor and Y 2023)
- 非整数 Ornstein-Uhlenbeck 過程 (Tudor and Y arXiv2024)

擬似尤度解析 (Quasi-Likelihood Analysis)

例. ボラティリティのパラメトリック推定量の漸近展開

- パラメトリックモデル

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, \theta) dw_s \quad (t \in [0, T]), \quad \text{E.g. } X = Y.$$

- データ (X_{t_j}, Y_{t_j}) , $t_j = jT/n$ ($j = 0, 1, \dots, n$), T は固定 (finite time-horizon)
- 擬似対数尤度関数 (quasi-log likelihood function)

$$\mathbb{H}_n(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left\{ \log \det S_{t_{j-1}}(\theta) + h^{-1} S_{t_{j-1}}(\theta)^{-1} [(\Delta_j Y)^{\otimes 2}] \right\}, \quad S_t(\theta) = \sigma(X_t, \theta)^{\otimes 2}$$

- 擬似最尤推定量 (QMLE) $\hat{\theta}_n^M$ と擬似ベイズ推定量 (QBE) $\hat{\theta}_n^B$ のスケールされた誤差 $\hat{u}_n^A = n^{1/2}(\hat{\theta}_n^A - \theta^*)$ ($A \in \{M, B\}$)
- $\Gamma_* : \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^p$ と汎関数 $F = \int_0^T \beta(X_t) dt$ (ある $\beta \in C_p^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d_1})$) に対して $\Gamma = \Gamma_*(F)$ であるとする.

定理 $A \in \{M, B\}$ に対して, 関数 $p_n^A(z, x)$ が存在して, 任意の正数 M, γ に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\sup_{f \in \mathcal{E}_{p+d_1}(M, \gamma)} \left| E[f(\hat{u}_n^A, F)] - \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{d_1}} f(\Gamma_*(x)^{-1} z, x) p_n^A(z, x) dz dx \right| = o(n^{-1/2}).$$

マルチンゲール展開あるいは Skorohod 積分展開による. その際,

例. ボラティリティのパラメトリック推定量の漸近展開

- QMLE $\hat{\theta}_n^M$ and QBE $\hat{\theta}_n^B$, The error $\hat{u}_n^A = n^{1/2}(\hat{\theta}_n^A - \theta^*)$ for $A \in \{M, B\}$
- 漸近展開の導出には, L^p 評価

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\hat{u}_n^A\|_p < \infty \quad (p > 1) \quad (25)$$

が必須.

例. ボラティリティのパラメトリック推定量の漸近展開

- QMLE $\hat{\theta}_n^M$ and QBE $\hat{\theta}_n^B$, The error $\hat{u}_n^A = n^{1/2}(\hat{\theta}_n^A - \theta^*)$ for $A \in \{M, B\}$
- 漸近展開の導出には, L^p 評価

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\hat{u}_n^A\|_p < \infty \quad (p > 1) \quad (26)$$

が必須.

- 漸近有効性の理論. 漸近ミニマックスリスクバウンド (Hájek bound) を達成する推定量 $\hat{\theta}_T$ が漸近有効である:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \theta^*| < \delta} E_{\theta} [|\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)|^p] = \mathbb{E}[|\hat{u}|^p].$$

- 情報量規準. 赤池の修正項を導出するためには, $\hat{u}_T \rightarrow^d \hat{u} \sim N_p(0, I(\theta^*)^{-1})$ のみならず, 期待値の収束

$$\mathbb{E}[\hat{u}_T'^* I(\theta^*) \hat{u}_T] \rightarrow E[\hat{u}'^* I(\theta^*) \hat{u}] = \text{パラメータ数}$$

を示す必要がある.

例. ボラティリティのパラメトリック推定量の漸近展開

- QMLE $\hat{\theta}_n^M$ and QBE $\hat{\theta}_n^B$, The error $\hat{u}_n^A = n^{1/2}(\hat{\theta}_n^A - \theta^*)$ for $A \in \{M, B\}$
- 漸近展開の導出には, L^p 評価

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\hat{u}_n^A\|_p < \infty \quad (p > 1) \quad (27)$$

が必須.

- 漸近有効性の理論. 漸近ミニマックスリスクバウンド (Hájek bound) を達成する推定量 $\hat{\theta}_T$ が漸近有効である:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \theta^*| < \delta} E_{\theta} [|\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)|^p] = \mathbb{E}[|\hat{u}|^p].$$

- 情報量規準. 赤池の修正項を導出するためには, $\hat{u}_T \rightarrow^d \hat{u} \sim N_p(0, I(\theta^*)^{-1})$ のみならず, 期待値の収束

$$\mathbb{E}[\hat{u}_T'^* I(\theta^*) \hat{u}_T] \rightarrow E[\hat{u}'^* I(\theta^*) \hat{u}] = \text{パラメータ数}$$

を示す必要がある.

- 漸近決定理論における Ibragimov-Khasminskii-Kutoyants のプログラム
 + 多項式型大偏差評価 (擬似尤度解析)
 ⇒ 誤差の L^p 評価 (27)

擬似尤度解析 (Quasi-Likelihood Analysis)

- (Ω, \mathcal{F}, P) : 確率空間, $\Theta: \mathbb{R}^p$ の有界開集合
- $\mathbb{H}_T: \Omega \times \bar{\Theta} \rightarrow \mathbb{R}$: 確率場, すなわち $\mathcal{F} \times \mathbb{B}(\bar{\Theta})$ に関して可測な関数であるとする. たとえば尤度解析においては \mathbb{H}_T は対数尤度関数である.
- $\mathbb{T}: \sup \mathbb{T} = \infty$ なる $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ の部分集合
- 確率場 \mathbb{H}_T は $\bar{\Theta}$ 上連続であり C^2 -級, すなわち, 各 $\omega \in \Omega$ に対して, 関数 $\Theta \ni \theta \mapsto \mathbb{H}_T(\theta) \in \mathbb{R}$ が C^2 -級であり, \mathbb{H}_T は連続的に $\partial\Theta$ に拡張されていると仮定する.
- 等式

$$\mathbb{H}_T(\hat{\theta}_T^M) = \max_{\theta \in \bar{\Theta}} \mathbb{H}_T(\theta). \quad (28)$$

を満たす任意の可測写像 $\hat{\theta}_T^M: \Omega \rightarrow \bar{\Theta}$ を \mathbb{H}_T に対する擬似最尤推定量 (quasi-maximum likelihood estimator, QMLE) と呼ぶ. スケールされた QMLE の誤差を $\hat{u}_T^M = a_T^{-1}(\hat{\theta}_T^M - \theta^*)$ で表す.

- ランダムベクトル

$$\hat{\theta}_T^B = \left(\int_{\Theta} \exp(\mathbb{H}_T(\theta)) \varpi(\theta) d\theta \right)^{-1} \int_{\Theta} \theta \exp(\mathbb{H}_T(\theta)) \varpi(\theta) d\theta \quad (29)$$

を事前密度関数 ϖ に対する擬似ベイズ推定量 (quasi-Bayesian estimator, QBE) と呼ぶ. $\hat{u}_T^B = a_T^{-1}(\hat{\theta}_T^B - \theta^*)$ と表す.

擬似尤度解析 (Quasi-Likelihood Analysis)

- $\theta^* \in \Theta$,
- $a_T \in GL(\mathbb{R}^p)$: $|a_T| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) なるスケーリングマトリックス,

$$\Delta_T = \partial_{\theta} \mathbb{H}_T(\theta^*) a_T, \quad \Gamma_T(\theta) = -a_T^* \partial_{\theta}^2 \mathbb{H}_T(\theta) a_T \quad (30)$$

- $\mathcal{U}_T = \{u \in \mathbb{R}^p; \theta^* + a_T u \in \Theta\}$
- $\mathcal{V}_T(r) = \{u \in \mathcal{U}_T; |u| \geq r\}$, $r > 0$
- 確率場 $Z_T : \Omega \times \mathcal{U}_T \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$Z_T(u) = \exp(\mathbb{H}_T(\theta^* + a_T u) - \mathbb{H}_T(\theta^*)) \quad (u \in \mathcal{U}_T)$$

で定める.

- Γ : $p \times p$ 対称ランダム行列

擬似尤度解析 (Quasi-Likelihood Analysis)

- $\theta^* \in \Theta$
- $a_T \in GL(\mathbb{R}^p)$: $|a_T| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) なるスケーリングマトリックス,

$$\Delta_T = \partial_{\theta} \mathbb{H}_T(\theta^*) a_T, \quad \Gamma_T(\theta) = -a_T^* \partial_{\theta}^2 \mathbb{H}_T(\theta) a_T \quad (31)$$

- $\mathcal{U}_T = \{u \in \mathbb{R}^p; \theta^* + a_T u \in \Theta\}$
- $\mathcal{V}_T(r) = \{u \in \mathcal{U}_T; |u| \geq r\}$, $r > 0$
- 確率場 $\mathbb{Z}_T : \Omega \times \mathcal{U}_T \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定める：

$$\mathbb{Z}_T(u) = \exp(\mathbb{H}_T(\theta^* + a_T u) - \mathbb{H}_T(\theta^*)) \quad (u \in \mathcal{U}_T)$$

- Γ : $p \times p$ 対称ランダム行列
- 擬似尤度解析 (Quasi-Likelihood Analysis, QLA) は \mathbb{Z}_T の大偏差評価を, それが由来する確率過程の統計モデルの個別の構造によらず, 一般的に証明した.

定理 (Y 2011, 2024) L を正数とする. このとき, ある仮定のもとで, 定数 C_L が存在して, 不等式

$$P \left[\sup_{u \in \mathcal{V}_T(r)} \mathbb{Z}_T(u) \geq \exp(-2^{-1} r^{2-(\rho_1 \vee \rho_2)}) \right] \leq \frac{C_L}{r^L} \quad (r > 0, T \in \mathbb{T})$$

が成り立つ. ここで, $\sup \emptyset = -\infty$ と読む.

擬似尤度解析 (Quasi-Likelihood Analysis)

- 多項式型大偏差不等式 (polynomial type large deviation (PLD) inequality)

$$P \left[\sup_{u \in \mathbb{V}_T(r)} \mathbb{Z}_T(u) \geq \exp \left(- 2^{-1} r^{2 - (\rho_1 \vee \rho_2)} \right) \right] \leq \frac{C_L}{r^L} \quad (r > 0, T \in \mathbb{T}) \quad (32)$$

- 確率場 \mathbb{Z}_T に対する大偏差評価は \mathbb{Z}_T の裾 ($|u| \rightarrow \infty$) の軽さを評価するものであるが、これは統計的確率場の u つまり統計的パラメータに関する大偏差であって、確率論で通常いうところの大偏差とは異なる。
- 基本統計量の積率母関数がクローズドフォームをもち、統計的パラメータの影響が見える形になるときは大偏差評価が可能になるが、そのような状況は限定的である。
- 現代の確率過程の統計学は非線形、非定常、非エルゴード、離散非同期観測といった複雑なモデルを扱うため、大偏差評価は容易でなく、理論のボトルネックになっていた。
- 多項式型大偏差不等式 \Rightarrow

$$\sup_{T \geq T_0} P \left[|\hat{u}_T^A| \geq r \right] \leq C_L r^{-L} \quad (r > 0) \quad (\mathbf{A} = M, B).$$

擬似尤度解析 (Quasi-Likelihood Analysis)

- 多項式型大偏差不等式 (polynomial type large deviation (PLD) inequality)

$$P \left[\sup_{u \in \mathbb{V}_T(r)} \mathbb{Z}_T(u) \geq \exp \left(- 2^{-1} r^{2 - (\rho_1 \vee \rho_2)} \right) \right] \leq \frac{C_L}{r^L} \quad (r > 0, T \in \mathbb{T}) \quad (33)$$

- 確率場 \mathbb{Z}_T に対する大偏差評価は \mathbb{Z}_T の裾 ($|u| \rightarrow \infty$) の軽さを評価するものであるが、これは統計的確率場の u つまり統計的パラメータに関する大偏差であって、確率論で通常いうところの大偏差とは異なる。
- 基本統計量の積率母関数がクローズドフォームをもち、統計的パラメータの影響が見える形になるときは大偏差評価が可能になるが、そのような状況は限定的である。
- 現代の確率過程の統計学は非線形、非定常、非エルゴード、離散非同期観測といった複雑なモデルを扱うため、大偏差評価は容易でなく、理論のボトルネックになっていた。
- 多項式型大偏差不等式 \Rightarrow

$$\sup_{T \geq T_0} P \left[|\hat{u}_T^A| \geq r \right] \leq C_L r^{-L} \quad (r > 0) \quad (\mathbf{A} = M, B).$$

- 問題は、定理の“仮定”がどのくらい緩い条件であるかである。
- 擬似尤度解析は、この“仮定”を、確率論的に扱いやすい加法的汎関数とその検証が容易な L^p 評価に帰着している。Y (2024) で与えた簡単な十分条件を挙げる:

擬似尤度解析 (Quasi-Likelihood Analysis)

• $\Upsilon_T(\theta) := \frac{1}{b_T} \{ \mathbb{H}_T(\theta) - \mathbb{H}_T(\theta^*) \}$ ($\theta \in \Theta, T \in \mathbb{T}$), $\Upsilon: \Omega \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ とする.

[T1] (i) $(0, \infty)$ -値確率変数 χ_0 が存在して, 以下の条件が成り立つ:

$$(i-1) \Upsilon(\theta) = \Upsilon(\theta) - \Upsilon(\theta^*) \leq -\chi_0 |\theta - \theta^*|^2 \quad (\theta \in \Theta).$$

(i-2) 任意の $L > 0$ に対して定数 C が存在して,

$$P[\chi_0 \leq r^{-1}] \leq \frac{C}{rL} \quad (r > 0).$$

(ii) 任意の $L > 0$ に対して定数 C が存在して,

$$P[\lambda_{\min}(\Gamma) < r^{-1}] \leq \frac{C}{rL} \quad (r > 0)$$

[T2] 正数 ϵ_1, ϵ_2 が存在して, 任意の $p > 1$ に対して以下の条件が満たされる:

$$(i) \sup_{T \in \mathbb{T}} \|\Delta_T\|_p < \infty.$$

$$(ii) \sup_{T \in \mathbb{T}} \left\| \sup_{\theta \in \Theta} b_T^{\epsilon_1} |\Upsilon_T(\theta) - \Upsilon(\theta)| \right\|_p < \infty.$$

$$(iii) \sup_{T \in \mathbb{T}} \left\| \sup_{u \in \delta^{-1}(\Theta - \theta^*), |u| \leq 1} |\Gamma_T(\theta^* + \delta u) - \Gamma_T(\theta^*)| \right\|_p = O(\delta) \quad (\delta \downarrow 0).$$

$$(iv) \sup_{T \in \mathbb{T}} \left\| b_T^{\epsilon_2} |\Gamma_T(\theta^*) - \Gamma| \right\|_p < \infty.$$

擬似尤度解析 (Quasi-Likelihood Analysis)

- 条件 [T1] は統計的確率場 \mathbb{H}_T に対する識別可能条件である。[T1] (ii) は多くの場合に [T1] (i) から導ける。
- 非エルゴード統計において χ_0 はランダムになる。その場合でも [T1] は検証可能である。たとえば、有限時間高頻度観測に基づく確率微分方程式の拡散パラメータ推定に対して Uchida-Yoshida (SPA2013) は [T1] を証明している。
- エルゴード的な場合、 χ_0 は定数になり、[T1] はほぼ自明な条件になる。
- 条件 [T2] は通常加法的汎関数の L^p 評価に帰着され、それは個々の確率過程に対して確立しているため、[T2] の検証が可能である。
- [T2] (i) には、マルチンゲールに対する Burkholder-Davis-Gundy 不等式や、ミキシング過程に対する Rothenthal 型不等式などが使える。[T2] (iv) も同様である。[T2] (ii), (iii) はパラメータに関する sup を含むが、これは Sobolev の不等式や Garsia-Rodemich-Rumsey 不等式、Kolmogorov の tightness 判定条件のための不等式などによって検証できる。

擬似尤度解析: 統計量の漸近挙動

- \mathcal{G} を $\sigma[\Gamma] \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ なる σ -加法族とする.
- 収束

$$\Delta_T \rightarrow^{d_s(\mathcal{G})} \Delta \quad (T \rightarrow \infty) \quad (34)$$

を仮定する. すなわち, 任意の \mathcal{G} -可測確率変数 Φ に対して, $(\Delta_T, \Phi) \rightarrow^d (\Delta, \Phi) \quad (T \rightarrow \infty)$ である.

定理 (Y 2024) 条件 [T1] と [T2], および収束 (34) を仮定する. このとき,

(a) $\mathbf{A} \in \{M, B\}$ に対して,

$$\hat{u}_T^{\mathbf{A}} - \Gamma^{-1} \Delta_T \rightarrow^p 0 \quad (T \rightarrow \infty). \quad (35)$$

(b) 任意の $\mathbf{A} \in \{M, B\}$, $f \in C_p(\mathbb{R}^p)$, $\Phi \in \cup_{p>1} L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$ に対して,

$$E[f(\hat{u}_T^{\mathbf{A}})\Phi] \rightarrow E[f(\hat{u})\Phi] \quad (T \rightarrow \infty). \quad (36)$$

ここで $\hat{u} = \Gamma^{-1} \Delta$ である.

擬似尤度解析を利用した研究

- エルゴード的統計では,
 1. 離散観測されたエルゴード的拡散過程 (Yoshida (AISM2011))
 2. 離散観測されたエルゴード的拡散過程に対する適応的推定アルゴリズム (Uchida and Yoshida (SPA2012))
 3. 適応的ベイズ型推定 (Uchida and Yoshida (SISP2014))
 4. 離散観測されたエルゴード的Ornstein-Uhlenbeck過程の近似的自己重み調整 LAD 推定 (Masuda (EJS2010))
 5. Lévy 過程のパラメトリック推定 (Masuda (LNM2015))
 6. Lévy 過程で駆動されるエルゴード的 SDE に対するガウス型擬似尤度 (Masuda (AS2013))
 7. リミットオーダーブックのモデリングのためのエルゴード的点過程 (Clinet and Yoshida (SPA2017))
 8. 偏擬似尤度解析 (Yoshida (JJSDS2018))
- その普遍性によって, QLA は非エルゴード的統計にも適用できる:
 9. 有限時間高頻度観測でのボラティリティパラメータの推定 (Uchida and Yoshida (SPA2013))
 10. 非同期観測によるボラティリティパラメータの推定 (Ogihara and Yoshida (SPA2014))
 11. 非エルゴード的点過程回帰モデル (Ogihara and Yoshida (arXiv2015))

擬似尤度解析を利用した研究

- そのユニバーサルデザインによって, QLA は複雑なアルゴリズムの解析に利用できる:
 12. ハイブリッド-マルチステップ推定量 (Kamatani and Uchida (SISP2014))
 13. 離散サンプリングでの摂動拡散モデルのベイズおよびハイブリッド推定 (Nomura and Uchida (2016))
 14. 退化拡散過程に対する QLA (Gloter and Yoshida arXiv2024)
- 情報量規準, スパース推定と正則化法は QLA の枠組みで理解することができる:
 15. 拡散過程に対するコントラスト関数に基づく情報量規準 (Uchida (AISM2010))
 16. 非凸罰則付き尤度法に対する AIC (Umezu et al. (AISM2019))
 17. LAQ モデルに対する Schwarz 型モデル比較と QBIC (Eguchi and Masuda (Bernoulli2018))
 18. 線形回帰モデルに対する正則化最小 2 乗推定におけるモーメント収束 (Shimizu (AISM2017a))
 19. 多重および混合収束率での正則化推定量の積率収束
 20. 正則化法と多項式型大偏差不等式 (Kinoshita and Yoshida (arXiv2019)) と関連する Suzuki and Yoshida (JJSDDS2020)
- ジャンプフィルター:
 21. ジャンプ拡散過程の QLA (Ogihara and Yoshida (SISP2011))
 22. 小さなノイズのある確率過程に対する閾値法 (Shimizu (SJS2017b))
 23. 大域的ジャンプフィルター (Inatsugu and Yoshida (AISM2021)).

擬似尤度解析の深化：非正則モデル

例. GABモデル

- 識別可能性がないモデルの例
- 確率基底 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$
- 1次元計数過程 $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ N_t の \mathbb{F} -強度過程が

$$\lambda_t(g, \alpha, \beta) = g + \sum_{j=1}^a \alpha_j e^{\beta_j X_t^j} \quad (37)$$

- $g \in [0, M_g]$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_a) \in [0, M_\alpha]^a$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_a) \in [-L_\beta, M_\beta]^a$ は未知パラメータ
- $\{X_t^j\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ($j = 1, \dots, a$) は \mathbb{R} -値 \mathbb{F} -可予測過程. エルゴード的.
- $M_g, M_\alpha > 0$, $L_\beta, M_\beta \geq 0$ は既知の定数で $M_\beta + L_\beta > 0$ とする.
- $\{1, \dots, a\}$ の部分集合 \mathcal{A} があって, 真の強度過程がある
 $g^* \in (0, M_g)$, $\alpha_i^* \in (0, M_\alpha)$, $\beta_i^* \in (-L_\beta, M_\beta) \setminus \{0\}$ ($i \in \mathcal{A}$)
 に対して $\lambda_t^* = g^* + \sum_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i^* e^{\beta_i^* X_t^i}$ ($t \geq 0$) と表されるとする.
- $\mathcal{A} \neq \{1, \dots, a\}$ のときはこのモデルは識別可能ではない.

例. GABモデル

- 推定関数

$$\begin{aligned} \Psi_T(g, \alpha, \beta) = & \int_0^T \log \lambda_t(g, \alpha, \beta) dN_t - \int_0^T \lambda_t(g, \alpha, \beta) dt - \kappa_g T^{\frac{r}{2}} |g|^q \\ & - \kappa_\alpha T^{\frac{r}{2}} \sum_{j=1}^a |\alpha_j|^q \\ & (g \in [0, M_g], \alpha \in [0, M_\alpha]^a, \beta \in [-L_\beta, M_\beta]^a) \end{aligned}$$

- $\kappa_g, \kappa_\alpha, r, q \geq 0$ はチューニングパラメータ, $0 < q < r \leq 1$
- $(\hat{g}_T, \hat{\alpha}_T, \hat{\beta}_T) = (\hat{g}_T, \hat{\alpha}_{1,T}, \dots, \hat{\alpha}_{a,T}, \hat{\beta}_{1,T}, \dots, \hat{\beta}_{a,T})$ を Ψ_T を $[0, M_g] \times [0, M_\alpha]^a \times [-L_\beta, M_\beta]^a$ 上で最大にする確率変数 (PQMLE) であるとする.
- 条件の詳細はここでは省略するが, $\kappa_g < \kappa_\alpha$ などの条件を仮定する.
 $\mathcal{A}^c = \{1, \dots, a\} \setminus \mathcal{A}$ とする.

例. GABモデル

定理 (Junichiro Yoshida and Y 2024)

$$T^{\frac{1}{2}} \left(\hat{g}_T - g^*, (\hat{\beta}_{i,T} - \beta_i^*)_{i \in \mathcal{A}}, (\hat{\alpha}_{i,T} - \alpha_i^*)_{i \in \mathcal{A}} \right) \xrightarrow{d} \bar{\Gamma}^{-1} \bar{\Delta}^\dagger, \quad (38)$$

$$T^{\frac{r}{2q}} (\hat{\alpha}_{k,T})_{k \in \mathcal{A}^c} \xrightarrow{P} 0. \quad (39)$$

(39) はより詳しくは, $\lim_{T \rightarrow \infty} P[\hat{\alpha}_{k,T} = 0 \quad (k \in \mathcal{A}^c), \quad \hat{\alpha}_{i,T} \neq 0 \quad (i \in \mathcal{A})] = 1$ である.

非正則モデルへの擬似尤度解析の一般化

- 非正則モデル
 - 境界真値問題
ネットワーク推定
 - 識別可能性がないモデル
混合モデル, ニューラルネット・ディープラーニング
- 正則化法を取り込んだ擬似尤度解析
(Junichiro Yoshida and Y 2024, 2024)
 - スパース推定 + 擬似尤度解析 \Rightarrow 確率過程のスパース推定論
 - 真値集合の合理的な点 (the most parsimonious value) への収束
によって一致性が回復
 - 正確な誤差評価を伴う統計的予測
 - ニューラルネット・ディープラーニングによる予測の (収束率だけでない) 誤差評価と, 方法の低次元統計学的理解



