

行列式点過程の諸相

白井 朋之¹

九州大学 IMI

September 4, 2024

¹2024 年度秋季日本数学会総合講演, 大阪大学.

Contents

- ① 動機: 量子カオス
- ② ランダム行列から行列式点過程へ
- ③ 行列式点過程とその例
- ④ 行列式点過程とそれにまつわる諸問題

量子カオス (Quantum Chaos)

- 古典系：可積分系 \iff カオス系 (“strong” mixing)
- 量子系：ハミルトニアンを用いて形式的に量子化すると、量子系のどこにカオス的な性質があらわれるか？

$$H\varphi_n = E_n\varphi_n, \quad 0 < E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \dots$$

とおくとき、 $n \rightarrow \infty$ での

- ① 固有値の性質 \implies エネルギー準位統計
- ② 固有関数の性質 \implies 量子エルゴード性

はどうか？

準位統計

可積分系：固有値が独立に近い - ポアソン点過程 (指数分布)

カオス系：固有値が相関 (反発) をもつ - 行列式点過程, パフィアン点過程 (準位反発)

量子カオス (Quantum Chaos)

量子カオス

- 準位統計—Berry-Tabor ('77), Sinai('90), 南
- 跡公式 (trace formula)—Gutzwiller ('60s-'70s),
- 量子エルゴード性—Snirelman ('74), Zeldtich, Colin de Verdiere, Heller, 砂田

量子カオスに関連する研究会など.

- ('90) 池田研介氏 集中講義@東大駒場
- ('92) Sinai 来日 (駒場, 林原フォーラム, 京都 RIMS)
- ('93) 5th Yukawa International Seminar:
Quantum and Chaos : How Incompatible?
- ('94) 第4回力学系研究集会「量子カオスと正則ベクトル場」(会津田島)

トーラス \mathbb{T}^1 上の点列の間隔分布

- 任意の $\alpha \in (0, 1)$ に対して,

$$P_{N,\alpha} := (\{n^\alpha\}, n = 1, 2, \dots, N) \subset \mathbb{T}$$

は一様分布列. $P_{N,\alpha}$ の間隔分布を考える. 間隔は $O(N^{-1})$.

- 数値シミュレーションでは, $\alpha \neq 1/2$ のとき指数分布が予想され, $\alpha = 1/2$ のとき (正規化した) 間隔分布の確率密度関数は

$$F(t) = \begin{cases} 6/\pi^2 & t \in [0, 1/2], \\ F_2(t) & t \in [1/2, 2], \\ F_3(t) & t \in [2, \infty). \end{cases}$$

に収束することが示されている. (Elkies-McMullen '04)

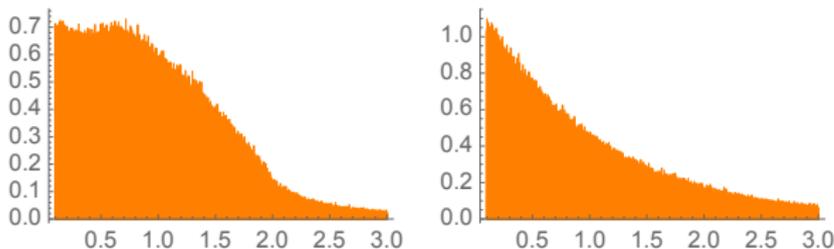


Figure: $\alpha = 1/2$ (left) and $\alpha = 1/3$ (right), $N = 1000000$

量子エルゴード性 vs. Scarring

- ビリアード流の量子化: $-\Delta\varphi_n = E_n\varphi_n$ on D とするとき, $E_n \nearrow \infty$ のときに

$$|\varphi_n(x)|^2 dx \xrightarrow{w} dx? \quad (\text{量子エルゴード性})$$

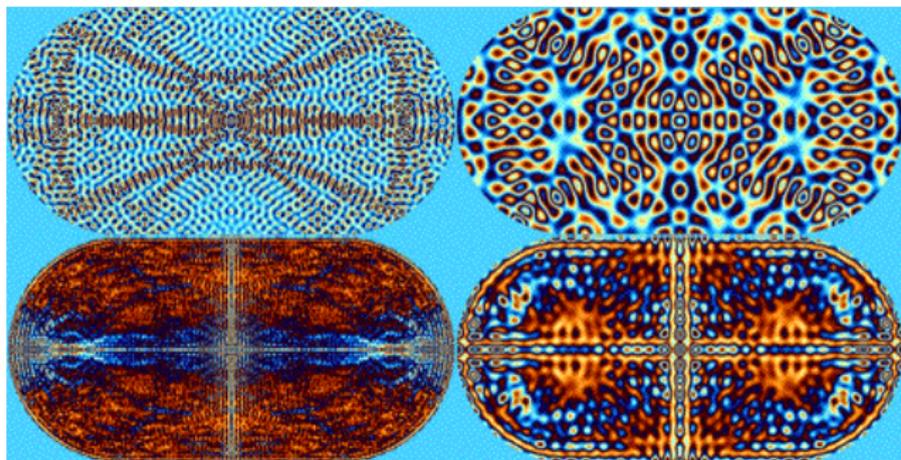


Figure: Borrowed from Chris King's homepage

- 量子一様エルゴード性 (QUE) が成立しないビリアード流が十分たくさん存在する. (A.Hassel '10)

非自明零点と Hilbert-Pólya's のアイデア

- リーマンゼータの非自明零点はある自己共役作用素の固有値と見なせるか?
- **Riemannium** (Bohigas) のエネルギー準位?

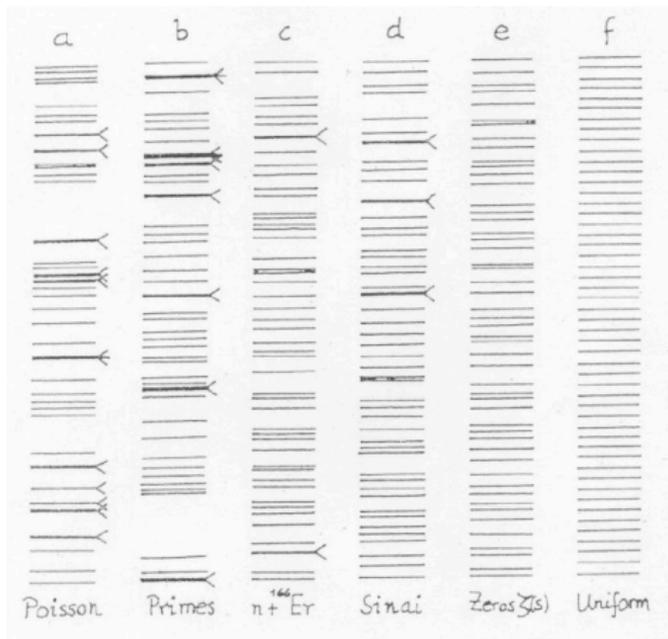


Figure: Borrowed from Bohigas et.al. (1983)

Montgomery のペア相関予想

- リーマン予想を仮定する. j 番目の零点を $\lambda_j = \frac{1}{2} + i\gamma_j$ とすると, $T \rightarrow \infty$ で

$$N(T) = \#\{j; \gamma_j \leq T\} \sim \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + O\left(\frac{\log T}{\log \log T}\right)$$

- 正規化した数列 $\{\hat{\gamma}_j := \frac{\gamma_j}{2\pi} \log \frac{\gamma_j}{2\pi}, j = 1, 2, \dots\}$ は平均間隔 1 となる.
- (Montgomery '73, Rudnick-Sarnak '96) 任意の滑らかな f が $\text{supp } \hat{f} \subset (-1, 1)$ をみたせば,

$$\frac{1}{T} \sum_{1 \leq i \neq j \leq T} f(\hat{\gamma}_j - \hat{\gamma}_i) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) \rho_2(x) dx,$$

ただし,

$$\rho_2(x) = 1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2.$$

さらに, n 点相関 ρ_n の場合も同様な結果が得られる.

リーマンゼータ関数の零点の2点相関関数

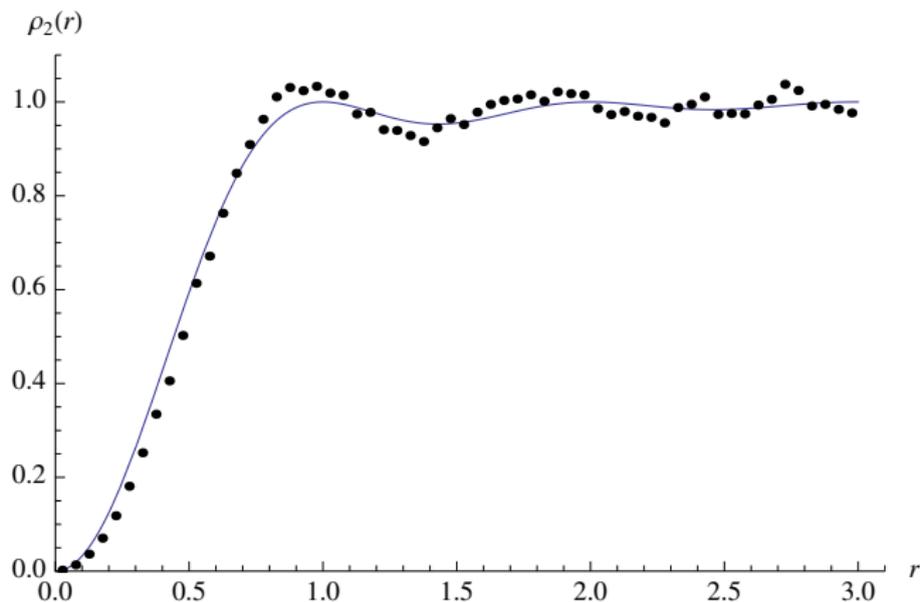


Figure: リーマンゼータ関数の 10^5 番目までの零点の経験 2 点相関関数 (Mathematica による数値実験).

$$\rho_2(r) = 1 - \left(\frac{\sin \pi r}{\pi r}\right)^2$$

リーマンゼータ関数の零点の間隔分布

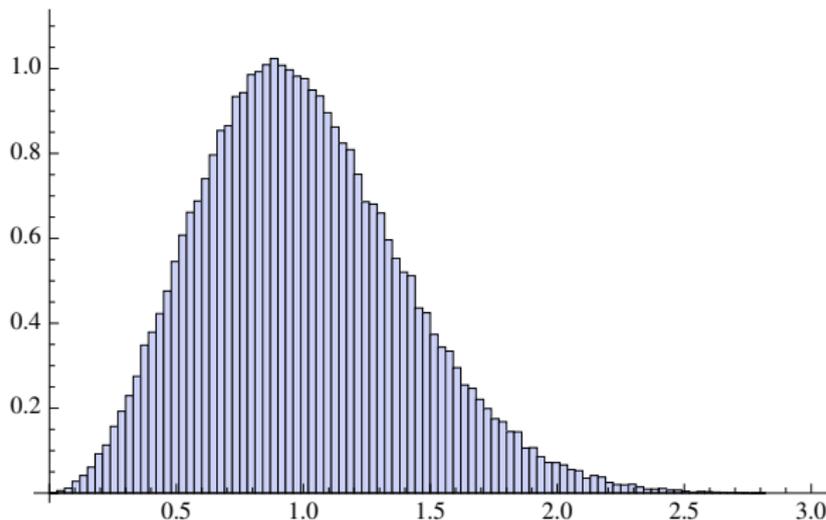


Figure: リーマンゼータ関数の 10^5 番目までの零点の間隔分布. (Mathematica による数値実験)

- (Gaudin-Mehta 分布)

$$f(s) = \frac{d^2}{ds^2} \text{Det}(I - \mathcal{K}_{\text{sinc}}|_{[0,s]})$$

GUE (Gaussian Unitary Ensemble)

- \mathcal{H}_N : $N \times N$ エルミート行列の全体 $\cong \mathbb{R}^{N^2}$

$$P_N(dX) = C_N^{-1} \exp(-\text{Tr} X^2/2) dX$$

C_N は正規化定数.

- 行列の上三角部分の成分が独立なガウス確率変数.
- 実固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ の結合確率密度関数は

$$\begin{aligned} p_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &\propto \prod_{1 \leq i < j \leq N} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2\right) \\ &= |\det(\varphi_{i-1}(\lambda_j)_{i,j=1}^N)|^2 \end{aligned}$$

ここで, $\varphi_i(x)$ は i 次エルミート関数.

- GUE の固有値の結合密度関数は, フェルミ統計に従う N 個の (自由) 調和振動子の固有関数 (Slater 行列式) と同じ.
- 確率 1 で $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i/\sqrt{N}}$ が半円分布に弱収束する (**Wigner の半円則**).

点過程 (point process)

- S : 可算基をもつ局所コンパクトハウスドルフ空間.
- 配置空間 $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(S)$: 非負整数に値をとる S 上の Radon 測度の全体, つまり, 任意のコンパクト集合 Λ に対して $\xi(\Lambda) < \infty$ をみたす測度 ξ の全体とする.
- 配置 $\xi \in \mathcal{Q}$ は,

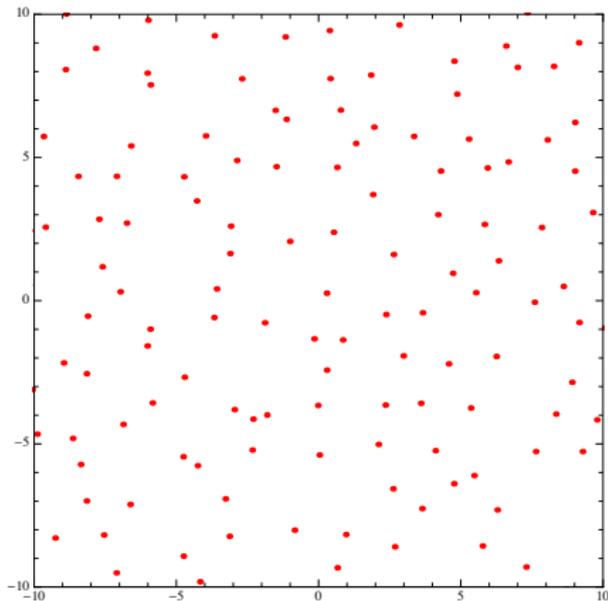
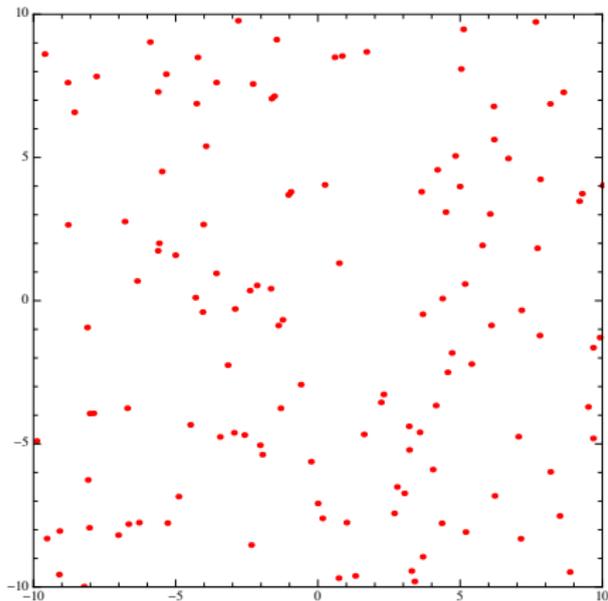
$$\xi = \sum_i \delta_{x_i} \quad (x_i \in S)$$

のように書ける. \mathcal{Q} の漠位相に関する Borel σ -field を $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$ と書く.

- 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ から $(\mathcal{Q}, \mathcal{B}(\mathcal{Q}))$ に値をとる確率変数 $\xi = \xi(\omega)$ を S 上の点過程という.
- しばしば, \mathcal{Q} 上に誘導される確率測度 $\mu = \mathbb{P} \circ \xi^{-1}$ (\mathcal{Q} 上の確率分布) のことも点過程とよぶ.

S 上の点過程 $\iff S$ 上のランダムな点配置

Which is more random?



Laplace 変換と相関関数

- (線形統計量 (linear statistics)) : $\xi = \sum_i \delta_{x_i} \in \mathcal{Q}(S)$ のとき,

$$\langle \xi, f \rangle = \sum_i f(x_i).$$

- 点過程 μ は以下の **Laplace 変換** によって特徴つけられる.

$$\mathcal{L}_\mu(f) := \int_{\mathcal{Q}} e^{-\langle \xi, f \rangle} \mu(d\xi), \quad f \in C_c^+(S).$$

- $\xi_n = \sum_{x_1, \dots, x_n \in \xi : \text{distinct}} \delta_{(x_1, \dots, x_n)}$ に対して,

$$\int_{\mathcal{Q}} \langle \xi_n, f_n \rangle \mu(d\xi) = \int_{S^n} f_n(x_1, \dots, x_n) \lambda_n(dx_1 \dots dx_n), \quad f_n \in C_c^+(S^n)$$

となる測度 λ_n が存在するとき n 次相関測度とよぶ. 特に λ_n が $m^{\otimes n}$ に関して絶対連続のときには,

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) := \frac{d\lambda_n}{dm^{\otimes n}}$$

を基礎測度 m に関する n 次相関関数という.

Poisson 点過程

以下の二つの性質をみたす S 上の点過程 Π_λ を intensity 測度 λ の **Poisson 点過程** という。

- $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}(S)$ が互いに素な集合のとき, $\xi(A_1), \xi(A_2), \dots, \xi(A_n)$ は独立.
- ある S 上の Radon 測度 λ に対して,

$$\Pi_\lambda(\xi(A) = k) = \frac{\lambda(A)^k}{k!} e^{-\lambda(A)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

つまり, 確率変数 $\xi(A)$ は平均が $\lambda(A)$ の Poisson 分布に従う.

Remark

- ① $[-N/2, N/2]^d$ 上に CN^d 個 ($C > 0$) の点を独立に一様分布にしたがってばらまく. $N \rightarrow \infty$ とすると, intensity 測度 Cdx の \mathbb{R}^d 上の (定常)Poisson 点過程に弱収束する.
- ② intensity 測度 Cdx の \mathbb{R} 上の Poisson 点過程の点の間隔分布は平均 $1/C$ の **指数分布** で, それぞれの間隔は独立.

Laplace 変換と相関関数による Poisson 点過程の特徴付け

- (線形統計量 (linear statistics)) : $\xi = \sum_i \delta_{x_i} \in \mathcal{Q}(S)$ のとき,

$$\langle \xi, f \rangle = \sum_i f(x_i)$$

とあらわす.

- Laplace 変換: $f \in C_c^+(S)$ に対して,

$$\int_{\mathcal{Q}(S)} \Pi_\lambda(d\xi) e^{-\langle \xi, f \rangle} = \exp\left(-\int_S (1 - e^{-f(x)}) \lambda(dx)\right)$$

となる Π_λ は, S 上の intensity 測度 λ の Poisson 点過程.

$$\lambda \iff \text{Poisson 点過程}$$

- 定常 Poisson 点過程 ($\lambda = cdx$) の相関関数は

$$\rho_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = c^n \quad (c > 0).$$

行列式点過程

Theorem (A.Soshnikov, Y.Takahashi-T.S.)

$L^2(S, m)$ 上の自己共役な積分作用素 \mathcal{K} は局所トレース族で $0 \leq \mathcal{K} \leq I$ をみたすとする. このとき, $Q(S)$ 上の確率測度 $\mu = \mu_{\mathcal{K}, m}$ が存在して,

$$\int_{Q(S)} e^{-\langle \xi, f \rangle} \mu(d\xi) = \text{Det}(I - \sqrt{\varphi} \mathcal{K} \sqrt{\varphi}) \quad (f \in C_c^+(S))$$

をみだし, \mathcal{K} の積分核を $K(x, y)$ とすると, 基礎測度 m に関する n 次相関関数は,

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$$

となる. ここで, Det は Fredholm 行列式で, $\varphi(x) = 1 - e^{-f(x)}$.

ここで定義された $\mu_{\mathcal{K}, m}$ を相関核 K と測度 m に付随する S 上の行列式点過程 (determinantal point process, 以降 DPP) という.

$$(m, \mathcal{K}) \text{ or } (m, K) \iff \text{DPP}$$

行列式点過程

- $f \in C_c^+(S)$ とする. $\varphi(x) = 1 - e^{-f(x)} \in C_c^+(S)$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{Q}(S)} e^{-\langle \xi, f \rangle} \mu(d\xi) &= \text{Det}(I - \sqrt{\varphi} \mathcal{K} \sqrt{\varphi}) \\ &= \exp(\log \text{Det}(I - \sqrt{\varphi} \mathcal{K} \sqrt{\varphi})) \\ &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr}(\sqrt{\varphi} \mathcal{K} \sqrt{\varphi})^n\right)\end{aligned}$$

- $n = 1$ だけ取り出すと,

$$\begin{aligned}\exp(-\text{Tr}(\sqrt{\varphi} \mathcal{K} \sqrt{\varphi})) &= \exp\left(-\int_S \varphi(x) \mathcal{K}(x, x) m(dx)\right) \\ &= \exp\left(-\int_S (1 - e^{-f(x)}) \mathcal{K}(x, x) m(dx)\right)\end{aligned}$$

- $n = 1$ だけみると, $\lambda(dx) = \mathcal{K}(x, x) m(dx)$ を intensity 測度とする Poisson 点過程.

DPP の基本的な性質

- (1点相関関数) 基礎測度 m に対して,

$$\rho_1(x) = K(x, x)$$

- (2点相関関数) 基礎測度 $m^{\otimes 2}$ に対して,

$$\begin{aligned}\rho_2(x_1, x_2) &= \det(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^2 \\ &= K(x_1, x_1)K(x_2, x_2) - K(x_1, x_2)K(x_2, x_1) \\ &\leq K(x_1, x_1)K(x_2, x_2) = \rho_1(x_1)\rho_1(x_2)\end{aligned}$$

- 事象 $\{\xi(\Lambda) = k\}$ の確率は, \mathcal{K}_Λ の固有値がわかる場合は計算可能. 実際, 集合 $\Lambda \subset S$ 内に粒子が k 個ある確率は以下で与えられる.

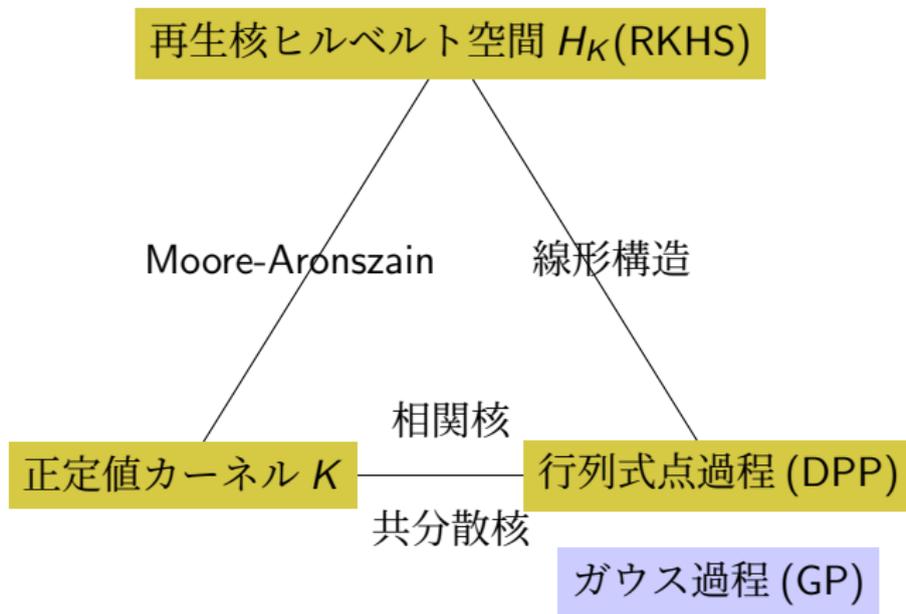
$$\mu_{\mathcal{K}}(\xi(\Lambda) = k) = \text{Det}(I - \mathcal{K}_\Lambda) \text{Tr}(\wedge^k \mathcal{K}_\Lambda).$$

ただし, $\mathcal{K}_\Lambda = \mathbf{1}_\Lambda \mathcal{K} \mathbf{1}_\Lambda$. 特に,

$$\mu_{\mathcal{K}}(\xi(\Lambda) = 0) = \text{Det}(I - \mathcal{K}_\Lambda).$$

- \mathcal{K} が rank n の射影作用素のときは, $\xi(S) = n$ a.s.

再生核 Hilbert 空間, DPP, ガウス過程



$$\delta_x \iff K(\cdot, x) \iff X(x)$$

$$L^2(\Omega, \mathbb{P}) \supset \overline{\{X(x)\}_{x \in S}} =: \mathcal{H}_X \iff H_K$$

例 1. GUE の固有値過程

- $\varphi_k^{(N)}(x)$ を適切にスケールした k 次の正規化エルミート関数すると,

$$K_{\text{GUE}_N}(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_k^{(N)}(x) \varphi_k^{(N)}(y)$$

は $L^2(\mathbb{R})$ 上のランク N の射影作用素を定義する.

- $\mu_{K_{\text{GUE}_N}}$ はサイズ N の GUE の固有値からなる DPP.
- $N \rightarrow \infty$ とすると, Christoffel-Darboux の公式とエルミート関数の漸近挙動により, 以下の \mathbb{R} 上広義一様収束がわかる.

$$K_{\text{GUE}_N}(x, y) \rightarrow K_{\text{sinc}}(x, y) = \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi(x-y)} d\xi$$

- 積分核 $K_{\text{sinc}}(x, y)$ は平行移動不変で, $L^2(\mathbb{R})$ 上で射影作用素 $\mathcal{K}_{\text{sinc}}$ を定義し, 対応する DPP $\mu_{\mathcal{K}_{\text{sinc}}}$ は GUE の固有値からなる点過程のスケール極限である.

リーマンゼータ関数の零点の DPP $\mu_{K_{\text{sinc}}}$

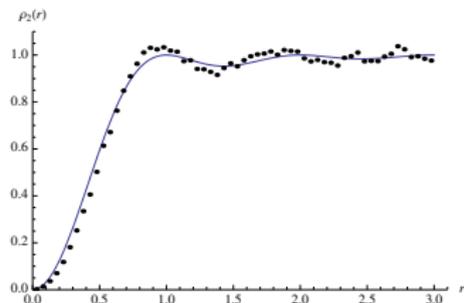


Figure: リーマンゼータ関数の 10^5 番目までの零点の経験 2 点相関関数 (Mathematica による数値実験).

$$\rho_2(r) = 1 - \left(\frac{\sin \pi r}{\pi r}\right)^2$$

- \mathbb{R} 上の DPP $\mu_{K_{\text{sinc}}}$ の 2 点相関は以下となる.

$$\rho_2(x, y) = \det \left(K_{\text{sinc}}(x_i, x_j) \right)_{i,j=1}^2 = 1 - \left(\frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)} \right)^2$$

例2. Airy DPP

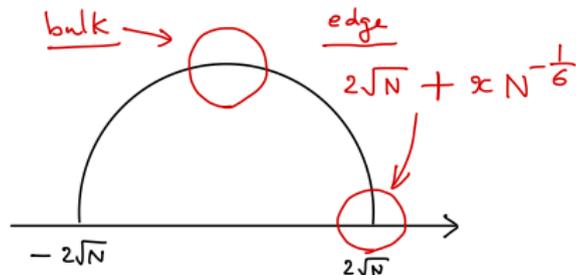
- $\xi_N = \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$ を μ_{GUE_N} からの実現として, 点過程

$$\eta_N = \sum_{i=1}^N \delta_{(\lambda_i - 2\sqrt{N})N^{1/6}}$$

$N \rightarrow \infty$ で, 以下の相関核の DPP $\mu_{K_{\text{Airy}}}$ に収束する.

$$K_{\text{Airy}}(x, y) = \int_0^{\infty} \text{Ai}(x+s)\text{Ai}(y+s)ds$$

- 最右端の点 (最大固有値 λ_1) が s 以下 $\iff (s, \infty)$ に点がない.
 $\mu_{K_{\text{Airy}}}(\lambda_1 \leq s) = \mu_{K_{\text{Airy}}}(\xi(s, \infty) = 0) = \text{Det}(I - (\mathcal{K}_{\text{Airy}})_{(s, \infty)}) = F_2(s)$
- $F_2(s)$ は **Tracy-Widom 分布** で, Painlevé II 型微分方程式に従う.



最長単調増加部分列に関する Ulam の問題とその後

- 置換 σ の最長単調増加部分列の長さ $L(\sigma)$ は (Ulam '61)?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_7, \quad L(\sigma) = 4$$

- n 次対称群 \mathcal{S}_n 上の一様分布のもと $L(\sigma_n)$ は確率変数となるが、 $n \rightarrow \infty$ で

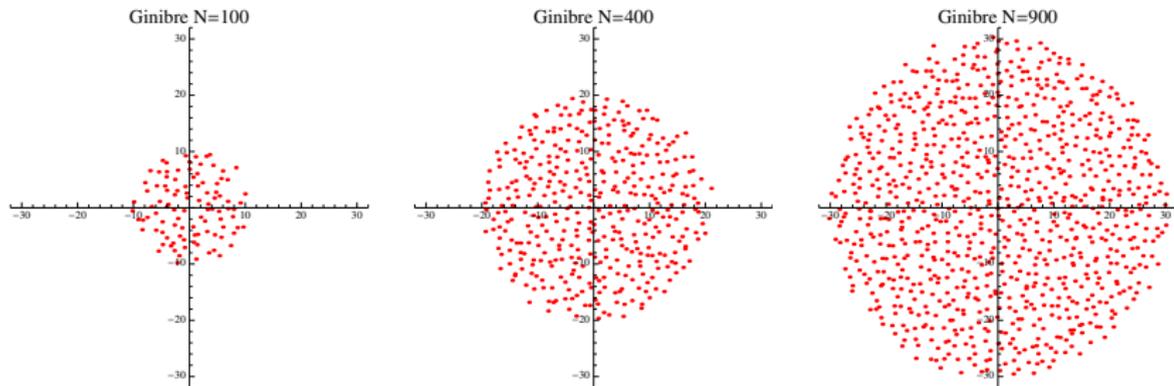
$$\mathbb{P}\left(\frac{L(\sigma_n) - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \leq s\right) \rightarrow F_2(s)$$

となることが示された (Baik-Deift-Johansson, '99).

- Airy DPP は以下のような多くの例で観察された. (**KPZ 普遍性**)
 - last passage パーコレーション
 - 排他過程
 - ランダムドミノタイリング
 - 界面成長モデル
 - KPZ 方程式
- 可積分確率論として大きく発展, ただ普遍性としての枠組みはまだ途中段階.

例3. Ginibre ランダム行列のランダム固有値

- すべての成分が i.i.d. 複素標準正規分布に従う**非エルミート** $N \times N$ 行列の N 個の固有値は複素平面上の有限点過程である.



- 確率 1 で $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{z_i/\sqrt{N}}$ が単位円板上の一様分布に収束する (Bai).
- n 個の複素固有値の結合分布は GUE と同じ形.

$$p_N(z_1, \dots, z_N) = C_N^{-1} \prod_{1 \leq i < j \leq N} |z_i - z_j|^2 e^{-\sum_{i=1}^N |z_i|^2}$$

例 3. Ginibre 点過程

- 複素標準正規 $\lambda(dz) = \pi^{-1} e^{-|z|^2} dz$ に関する相関核 $K_{\text{Gin},N}$ が

$$K_{\text{Gin},N}(z, w) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(z\bar{w})^k}{k!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{z\bar{w}}$$

の DPP となる.

- $N \rightarrow \infty$ とすると, 相関核が $K_{\text{Gin}}(z, w) = e^{z\bar{w}}$ の平行移動・回転に関して不変な DPP に弱収束する. これを **Ginibre 点過程** もしくは **Ginibre DPP** とよぶ.
- $K_{\text{Gin}}(z, w) = e^{z\bar{w}}$ に対応する再生核 Hilbert 空間は, $\lambda(dz)$ に関して二乗可積分な正則関数のなす $L^2(\mathbb{C}, d\lambda)$ の部分空間 (Bargmann-Fock 空間) である.
- 特別な温度に対応する対数ガス (2次元クーロンガス) のモデルや 1-component プラズマの物理モデルとして用いられる.

Which is more random?

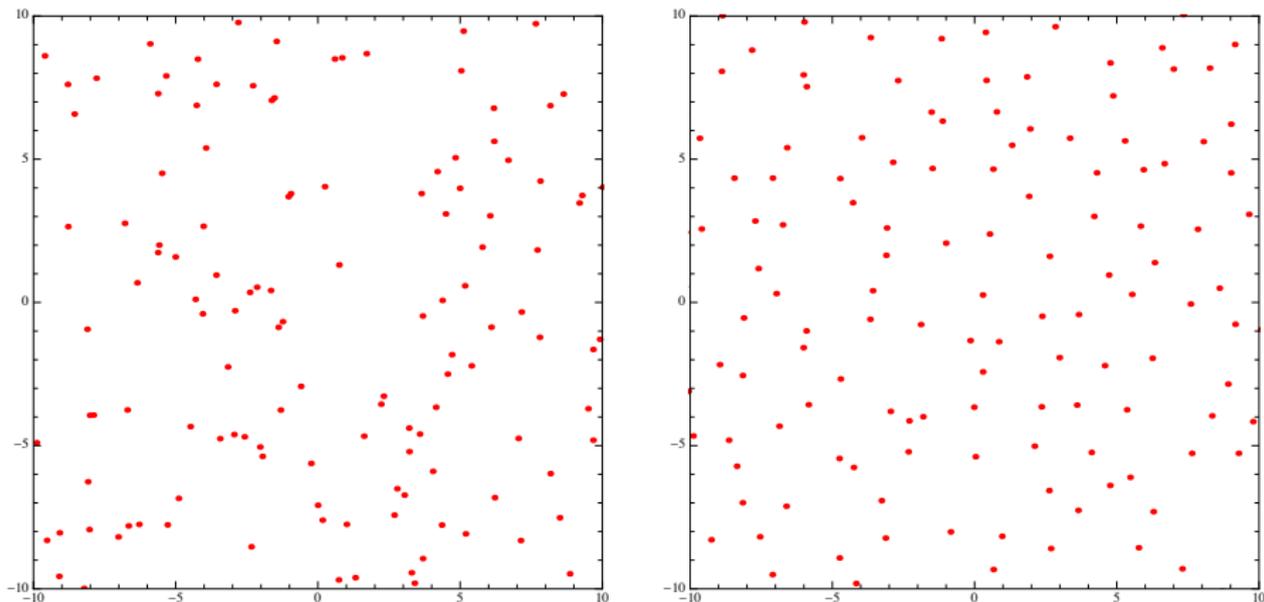


Figure: Poisson(左) and Ginibre(右). 左は点の集積が, 右は反発が見られる.

- 一般に, DPP には負の相関がある. $\rho_{n+m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \rho_n(\mathbf{x})\rho_m(\mathbf{y})$

例 4. ガウス型解析関数 (Gaussian analytic function, GAF) の零点

- $\{\zeta_k\}_{k=0}^{\infty}$ は $N_{\mathbb{C}}(0, 1)$ に従う独立同分布確率変数列とし, ランダムベキ級数は解析的なガウス過程で, 確率 1 で収束半径は 1.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k z^k \quad z \in \mathbb{D} = \{|z| < 1\} \quad \text{a.s.}$$

- ガウス過程としての共分散核は Szegő 核.

$$S(z, w) = \mathbb{E}[X(z)\overline{X(w)}] = \frac{1}{1 - z\bar{w}}.$$

- 単位円内にある零点のなす点過程は, 基礎測度 $m(dz) = \pi^{-1}dz$ on \mathbb{D} に関して, Bergman 核

$$K_{\text{Berg}}(z, w) = (1 - z\bar{w})^{-2}$$

を相関核とする DPP $\mu_{K_{\text{Berg}}}$ となる (Peres-Virag '05).

例 5. Poissonized Plancherel 測度

- (Plancherel 測度) \mathcal{Y}_n : n 個の箱からなる Young 図形.

$$p_n(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!} \quad (\lambda \in \mathcal{Y}_n).$$

- (Poissonized Plancherel 測度) $\mathcal{Y} = \sqcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{Y}_n$ とするとき,

$$\mathbb{P}_{\theta}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n e^{-\theta n}}{n!} p_n(\lambda)$$

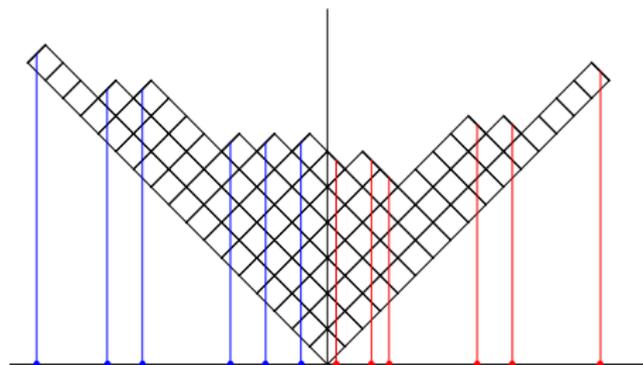


Figure: Frobenius 座標 $F(\lambda) = (p_i, q_i)_{i=1}^d$
 $p_j = -(\lambda_j - j + 1/2)$, $q_j = \lambda'_j - j + 1/2$.
 d は Durfee square のサイズ.

- 確率測度 \mathbb{P}_{θ} のもとで $\text{Fr}(\lambda) \subset \mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + 1/2$ は, \mathbb{Z}' 上の DPP $\mu_{K_{\theta}}$.

$$K_{\theta}(x, y) := \text{sgn}(x)^{x-\frac{1}{2}} \text{sgn}(y)^{y+\frac{1}{2}} \sqrt{\theta} \begin{cases} \frac{J_{x-\frac{1}{2}} J_{y+\frac{1}{2}} - J_{x+\frac{1}{2}} J_{y-\frac{1}{2}}}{x-y} & \text{if } x \neq y \\ J_{x-\frac{1}{2}} J_{x+\frac{1}{2}} - J_{x-\frac{1}{2}} J_{x+\frac{1}{2}} & \text{if } x = y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Z}')$$

例 6. 一様全域木および全域非輪体

- 離散空間 S の配置空間 $\mathcal{Q}(S) \simeq \{0, 1\}^S \simeq 2^S$.
- 有限連結グラフ $G = (V, E)$ に対して,

$$\ell^2(V) = \{f : V \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad \ell^2(E) = \{F : E \rightarrow \mathbb{R} ; F(y, x) = -F(x, y)\}$$

- コバウンダリ作用素 $d : \ell^2(V) \rightarrow \ell^2(E)$:

$$df(x, y) = f(y) - f(x).$$

- $\mathcal{P}_{\text{Im}d} : \ell^2(E) \rightarrow \ell^2(E)$ を像空間 $\text{Im}d \subset \ell^2(E)$ への射影作用素とする.
- $\mu_{\mathcal{P}_{\text{Im}d}}$ は G の一様全域木と同分布となる (Burton-Pemantle).



Figure: 一様全域木 (uniform spanning tree) $\mathcal{S}(G)$

DPP としての一様全域木

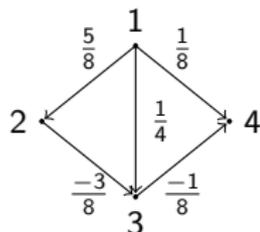
- $S = E$: グラフ $G = (V, E)$ の辺集合.
- $H = \text{Im}(d) \subset \ell^2(E)$: 像空間 (star space とも言う.)

Theorem (Burton-Pemantle ('93))

$\text{Im}(d)$ に付随する DPP の相関核 K は以下のインピーダンス行列 Y , つまり

$$Y(e, f) = i^e(f), \quad (e, f \in E)$$

に一致する. ただし, $i^e(f)$ はグラフを抵抗 1 の電気回路とみなして辺 e の始点 (source) から終点 (sink) へ単位電流が流れたときに辺 f 上で流れている電流をあらわす.



- 1 が始点 (source) で 2 が終点 (sink) の場合.

$$i^{(12)} = \begin{bmatrix} \langle 12 \rangle & \langle 13 \rangle & \langle 14 \rangle & \langle 23 \rangle & \langle 34 \rangle \\ \frac{5}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

インピーダンス行列と相関核

- 一様全域木 $S(G)$.



- インピーダンス行列 = $\text{Im}(d)$ への正射影行列.

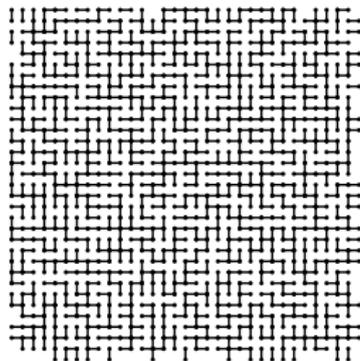
$$K = \frac{1}{8} \begin{array}{c} \langle 12 \rangle \\ \langle 13 \rangle \\ \langle 14 \rangle \\ \langle 23 \rangle \\ \langle 34 \rangle \end{array} \begin{array}{ccccc} \langle 12 \rangle & \langle 13 \rangle & \langle 14 \rangle & \langle 23 \rangle & \langle 34 \rangle \\ \left[\begin{array}{ccccc} 5 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & 5 \end{array} \right] \end{array}$$

- 単純ランダムウォーク (SRW) との関係:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\langle xy \rangle \in T) &= K(\langle xy \rangle, \langle xy \rangle) \\ &= \mathbb{P}_x(\text{SRW が } y \text{ に初めてヒットする直前の頂点が } x). \end{aligned}$$

\mathbb{Z}^d 上の一様全域木

- \mathbb{Z}^2 上の一様全域木.



$$H(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^2} \frac{1 - e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \theta}}{\varphi(\theta)} d\theta \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2),$$

$$\varphi(\theta) = 4 - 2 \cos 2\pi\theta_1 - 2 \cos 2\pi\theta_2,$$

$$K(e, f) = H(t(e) - t(f)) + H(o(e) - o(f)) \\ - H(o(e) - t(f)) + H(t(e) - o(f)).$$

- エントロピー.

$$h_{top}(UST) = \int_{\mathbb{T}^2} \log(4 - 2 \cos 2\pi\theta_1 - 2 \cos 2\pi\theta_2) d\theta_1 d\theta_2.$$

- 同じエントロピーをもつモデル達 (ベルヌイ系).
 - harmonic model (代数的力学系)
 - ダイマーモデル
 - Abelian sandpile

一様全域木 (spanning tree) から "一様" 全域非輪体 (spanning acycle) へ

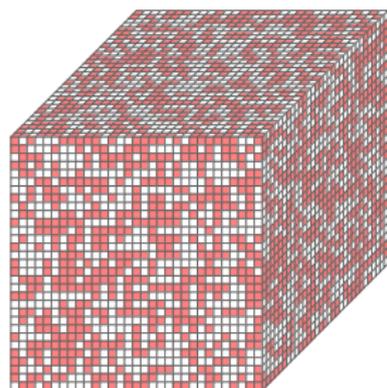
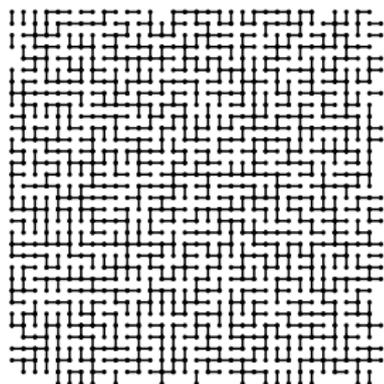


Figure: 全域木と全域非輪体

- 部分グラフ T が全域木である.
 - ① $\tilde{H}_0(T) = 0 \iff$ 連結
 - ② $\tilde{H}_1(T) = 0 \iff$ no cycle
- d 次元部分複体 T が**全域非輪体**である.
 - ① $\tilde{H}_{d-1}(T) =$ 有限群 (振れ群)
 - ② $\tilde{H}_d(T) = 0$
- 振れ群の位数の 2 乗をウェイトとした d 単体の集合上の DPP が定義できる!

Palm 測度

- S 上の点過程 μ に対して, $a \in S$ に点があるという条件のもとで, 他の点がどのように分布するかは, 条件付き確率測度として定義される (reduced) Palm 測度 $\mu^a(d\xi)$ によって定式化される.
- λ_1 を ξ の平均測度とすると, 任意の有界可測関数 $u(x, \xi)$ に対して,

$$\int_{Q(S)} \mu(d\xi) \int_S \xi(dx) u(x, \xi) = \int_S \lambda_1(da) \int_{Q(S)} \mu^a(d\xi) u(x, \xi + \delta_a).$$

- 帰納的に $\mu^{a_1, a_2, \dots, a_n}$ のような複数の点で条件つけた Palm 測度も定義可能.
- **Example.** Π が Poisson 点過程のとき, 任意の $a \in S$ に対して,

$$\Pi^a = \Pi$$

となる. a に点があることは周りの粒子には全く影響を与えない.

例 : Shifted \mathbb{Z}^d lattice

- d 次元整数格子 \mathbb{Z}^d 上の点のみからなる配置を $a \in [0, 1]^d$ だけ平行移動した配置.

$$\xi_a = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \delta_{x+a} \quad (a \in [0, 1]^d).$$

$d = 1$ のときは, clock 過程とよばれることもある.

- $\rho_1(x) = 1$.
- μ は $[0, 1]^d$ 上の一様分布に従って $a \in [0, 1]^d$ を選んで, ξ_a とする \mathbb{R}^d 上の定常点過程.
- Palm 測度 μ^b は, ξ_b にだけ台をもつ \mathcal{Q} 上のデルタ測度になる.

$$\mu^b \perp \mu \quad \forall b \in [0, 1]^d.$$

Theorem (Y.Takahashi-T.S.)

μ が K を相関核とする DPP のとき, $K(a, a) > 0$ となる a における Palm 測度 μ^a は,

$$K^a(x, y) := K(x, y) - \frac{K(x, a)K(a, y)}{K(a, a)}$$

を相関核とする DPP である. n 点の Palm 測度 μ^{a_1, \dots, a_n} についても同様に表示できる.

- DPP のクラスは Palm 測度を取る操作に関して閉じている.
- Palm 測度をとると, 粒子数密度は小さくなる.

$$K^a(x, x) = K(x, x) - \frac{|K(x, a)|^2}{K(a, a)}$$

- K を再生核とする再生核 Hilbert 空間を \mathcal{H}_K とすると, K^a は

$$\mathcal{H}_{K^a} := \{f \in \mathcal{H}_K : f(a) = 0\} = \mathcal{H}_K \ominus \langle K(\cdot, a) \rangle$$

の再生核である.

Palm 測度と絶対連続性

- μ を S 上の点過程とし, μ^a を点 a における Palm 測度とする.
- μ^a が μ に関して絶対連続であるとき, その Radon-Nikodym 密度を

$$\frac{d\mu^a}{d\mu}(\xi) = \frac{1}{\rho_1(a)} e^{-U(a|\xi)}$$

とあらわすと, $U(a|\xi)$ は点 $a \in S$ において配置 ξ から受けるエネルギーと解釈できる.

- この絶対連続性の条件は Gibbs 測度の一つの特徴づけとして知られている (Y.Takahashi '77)

Theorem (H.Osada-T.S.)

μ_{Gin} を Ginibre 点過程とする. このとき, 2つの Palm 測度 $\mu_{\text{Gin}}^{x_1, \dots, x_n}$ と $\mu_{\text{Gin}}^{y_1, \dots, y_m}$ は $n = m$ のとき互いに絶対連続, $n \neq m$ のとき互いに特異となる.

- 特に, μ と μ^x は互いに特異となり, μ の台をかえないまま一点 x を除くことは不可能であることを主張している.

“ ∞ ” と “ $\infty - 1$ ” を区別できている.

Palm 測度間の Radon-Nikodym 密度とある汎関数

Theorem (H.Osada-T.S.)

μ_{Gin} を Ginibre 点過程とする. このとき, 2つの Palm 測度 μ_{Gin}^z と μ_{Gin}^w は絶対連続で, その Radon-Nikodym 密度は以下で与えられる.

$$\frac{d\mu^z}{d\mu^w} = \frac{1}{Z_{zw}} \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{|x_i| < b_r} \left| \frac{z - x_i}{w - x_i} \right|^2 \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

ただし,

$$Z_{zw} = \frac{K(z, z)}{K(w, w)}$$

Theorem (H.Osada-T.S.)

$\mu_{\text{Gin}}^{z_1, \dots, z_m}$ を μ_{Gin} の Palm 測度とする.

$$F_T(\xi) := \frac{1}{T} \int_0^T \{\xi(\mathbb{D}_{\sqrt{r}}) - r\} dr \xrightarrow{T \rightarrow \infty} -m \quad \text{weakly in } L^2(\mathcal{Q}, \mu_{\text{Gin}}^{z_1, \dots, z_m})$$

点過程の剛性 (rigidity)

- $D \subset S$ を相対コンパクト集合とする.
- $\xi \in \mathcal{Q}$ を $\xi = \xi|_D + \xi|_{D^c}$ と D の内部の配置と外部の配置にわけることによって, 配置空間を

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_D \times \mathcal{Q}_{D^c}$$

- (Ghosh-Peres の意味の剛性) ある可測関数 $F_{\text{out}} : \mathcal{Q}_{D^c} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して,

$$\xi(D) = F_{\text{out}}(\xi|_{D^c}) \quad \mu\text{-a.e. } \xi$$

とあらわされるとき, μ は個数に関して剛性 (number rigidity) をもつという (Ghosh-Peres).

Example. Poisson 点過程については, $\xi|_D$ と $\xi|_{D^c}$ は独立なので, F_{out} のような関数は存在しない.

例：Shifted \mathbb{Z}^d lattice

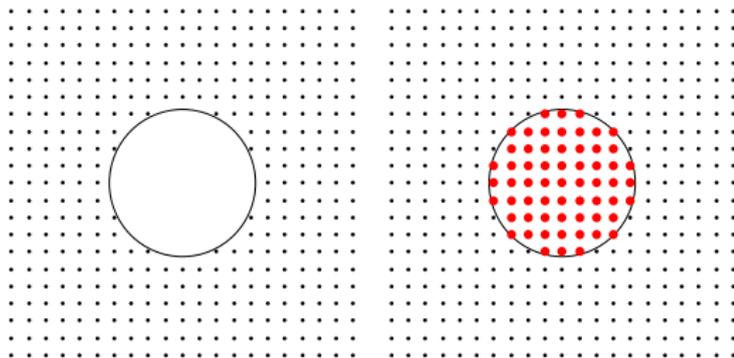
- d 次元整数格子 \mathbb{Z}^d 上の点のみからなる配置を $a \in [0, 1]^d$ だけ平行移動した配置.

$$\xi_a = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \delta_{x+a} \quad (a \in [0, 1]^d).$$

- μ は $[0, 1]^d$ 上の一様分布に従って, ξ_a を選ぶ \mathbb{R}^d 上の定常点過程.
- Palm 測度 μ^b は, ξ_b にだけ台をもつ \mathcal{Q} 上のデルタ測度になる.

$$\mu^b \perp \mu$$

- 個数のみならず D 内の配置が一意的に定まるという意味で, shifted-lattice は非常に強い剛性をもつ.



点過程の個数に関する剛性

- 個数に関する剛性は、 \mathbb{R} 上の DPP の場合、平面上の DPP についていくつか知られている.
- $S = \mathbb{R}$ のとき.
 - (Ghosh) DPP μ_{sinc} .
 - (Bufetov-T.S.) de Branges 空間に付随する DPP.
 - (Bufetov) Airy, Bessel, Gamma DPP.
- $S = \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ のとき.
 - (Ghosh) Ginibre 点過程 (= Bargmann-Fock 空間に付随する DPP).
 - (Bufetov-Qiu) 一般化された Bargmann-Fock 空間 $L^2(\mathbb{C}, e^{-2\Psi(z)})$ に付随する DPP. ここで, $\Psi(z)$ は C^2 級で, $0 < m \leq \Delta\Psi(z) \leq M$ をみたす. $\Psi(z) = |z|^2/2$ の場合が Ginibre.
- $S = \mathbb{R}^d$ ($d \geq 3$) のとき.
 - (Peres-Sly) $N(0, \sigma^2)$ -摂動格子: $\sigma_d > 0$ が存在して, $0 < \sigma < \sigma_d$ ならば rigid, $\sigma > \sigma_d$ ならば non-rigid.

完備性の問題

- Shannon のサンプリング定理： $\text{supp} \hat{f} \subset [-\pi, \pi]$ ならば,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) \frac{\sin \pi(t-j)}{\pi(t-j)} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}) \text{ and uniform on } \mathbb{R} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) K_{\text{sinc}}(t, j) \end{aligned}$$

つまり, $\{K_{\text{sinc}}(\cdot, j) : j \in \mathbb{Z}\}$ は正規直交基底. 実際, 再生性より

$$(K_{\text{sinc}}(\cdot, j), K_{\text{sinc}}(\cdot, k)) = K_{\text{sinc}}(k, j) = \delta_{kj}.$$

Question. $\{K_{\text{sinc}}(\cdot, x) : x \in \xi\}$ は完備か?

Theorem (Ghosh)

μ_K が rigid な DPP とする. $\{K(\cdot, x) : x \in \xi\} \subset \mathcal{H}_K$ は μ_K -a.s. ξ で完備となる.

点過程の剛性の一般化

- 一般に、可測関数 $F_{\text{in}} : \mathcal{Q}_D \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、ある可測関数 $F_{\text{out}} : \mathcal{Q}_{D^c} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$F_{\text{in}}(\xi|_D) = F_{\text{out}}(\xi|_{D^c}) \quad \mu\text{-a.e. } \xi$$

とあらわされるとき、点過程 μ と D に対して F_{in} は剛性をもつという。

Example. F_{in} の例としては、 n 次モーメントを考える。 $n = 0$ の場合は「個数」に対応する。

$$F_{\text{in}} \left(\sum_{i=1}^p \delta_{x_i} \right) = \sum_{i=1}^p x_i^n$$

GAF の零点の剛性

- $\{\zeta_k\}_{k=0}^{\infty}$ は $N_{\mathbb{C}}(0, 1)$ に従う i.i.d. 確率変数列とする. ランダムな整関数

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta_k}{(k!)^{1/2}} z^k$$

は共分散として指数核 $e^{z\bar{w}}$ をもつ \mathbb{C} 上解析的なガウス過程である.

- $f(z)$ の零点集合 Z は, 平行移動と回転に関して不変な \mathbb{C} 上の定常点過程を定める.

Theorem (Ghosh-Peres)

Z は個数と重心 (1次モーメント) に関する剛性をもつ.

GAFの零点の剛性

- ランダムな整関数

$$f_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta_k}{(k!)^{\alpha/2}} z^k$$

を α -GAF と呼ぶ。またその零点集合を Z_α とする。

- α -GAF の零点 Z_α は回転不変な \mathbb{C} 上の点過程となる。

Theorem (Ghosh-Krishnapur)

Z_α は $\alpha \in (\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}]$ ならば、はじめの k 個のモーメントについての剛性をもつ。

- 点過程 Z_α は $\alpha = 1$ 以外は平行移動・回転に関する不変性をもたない。

Question. k 個のモーメントまで剛性をもつ平行移動と回転に関して不変な \mathbb{R}^d 上の点過程が存在するかどうかは未解決である。

Ginibre 点過程と対数ガス

- 相互作用を持つ Gibbs 測度を

$$d\mu_{N,\beta} := \frac{1}{Z_{N,\beta}} e^{-\beta \mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N)} dx_1 \cdots dx_N$$

と定義する。ここに、 $Z_{N,\beta}$ は分配関数（正規化定数）、 \mathcal{H}_N はハミルトニアン

$$\mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N) := \sum_{1 \leq i < j \leq N} g(x_i - x_j) + N \sum_{i=1}^N V(x_i)$$

- 特に、 g が $\Delta g = -c_d \delta_0$ をみたす

$$g(x) = \begin{cases} |x|^{-(d-2)} & d \neq 2, \\ -\log |x| & d = 2, \end{cases}$$

のときには、Coulomb 型の有限点過程という。

- 特に、 $g(x) = -\log |x|$ のときには、

$$e^{-\beta \mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N)} = \prod_{1 \leq i < j \leq N} |x_i - x_j|^\beta e^{-\beta N \sum_{i=1}^N V(x_i)}.$$

Hyperuniformity (Small variance property)

- 定常点過程に対して点の個数 $\xi(B_r)$ の分散の漸近挙動は重要である。特に、

$$\frac{\text{var}(\xi(B_r))}{\mathbb{E}[\xi(B_r)]} \rightarrow 0$$

となるとき、点過程は hyperuniform であるという (Torquato).

- 0 への収束のオーダーで、Class I, II, III に分類されている。
- 定常 Poisson 点過程の場合は $\text{var}(\xi(B_r)) = \mathbb{E}[\xi(B_r)] = Cr^d$ となり、 $d \geq 1$ で hyperuniform でない。Coulomb 型点過程の場合は、以下の $d = 2, \beta = 2$ の場合のみ、hyperuniformity の厳密なオーダーが知られている。

Theorem (T.S., Osada-T.S., Matsui-Katori-T.S.)

Ginibre-type 点過程 ($d = 2$) および d 次元 Ginibre 点過程のとき、 $\text{var}(\xi(B_r)) \sim Cr^{d-1}$ ($r \rightarrow \infty$), つまり、Class I の hyperuniform な点過程である。

- 最近、任意の $\beta > 0$ について $\mu_{N,\beta}$ が hyperuniform になるという報告がされているが (Leblé), まだ最適なオーダーからはかなり遠い。

Jancovici-Lebowitz-Manificat Law

- $\mu_{N,\beta}$ の下, $\xi(B_r)$ の平均からのずれ (偏差) はその観測するオーダーによって振る舞いが違う.
- (Jancovici-Lebowitz-Manificat 予想)

$$\log \mu_{N,\beta}(|\xi(B_r) - \mathbb{E}[\xi(B_r)]| > r^\alpha) \asymp -r^\varphi(\alpha)$$

ただし,

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} 2\alpha - 1 & \alpha \in (1/2, 1], \\ 3\alpha - 2 & \alpha \in (1, 2), \\ 2\alpha & \alpha \in [2, \infty). \end{cases}$$

- 現時点で, Coulomb 型点過程でこの予想が数学的に厳密に示されているのは, 以下の場合のみ.

Theorem (T.S., Fenzel-Lambert)

$d = 2, \beta = 2$, つまり Ginibre DPP の場合, 予想は成り立つ.

- ガウス型整関数 $f_1(z)$ (1-GAF) の零点過程については, JLM 予想が示されている (Nazarov-Sodin-Volberg).

行列式点過程の一般化

- DPP の相関関数は

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$$

で与えられた.

- 行列式の代わりに Pfaffian が相関関数にあらわれる点過程は, ランダム行列やランダム解析関数のモデルなどから自然にあらわれる.
- 良い十分条件 (Pfaffian の正値性) が得られていない.
- (α -行列式) $\sigma \in \mathcal{S}_n$ に対して, $d(\sigma)$ をすべての互換から生成される \mathcal{S}_n の Cayley グラフにおける単位元と σ との距離とし, α -行列式を

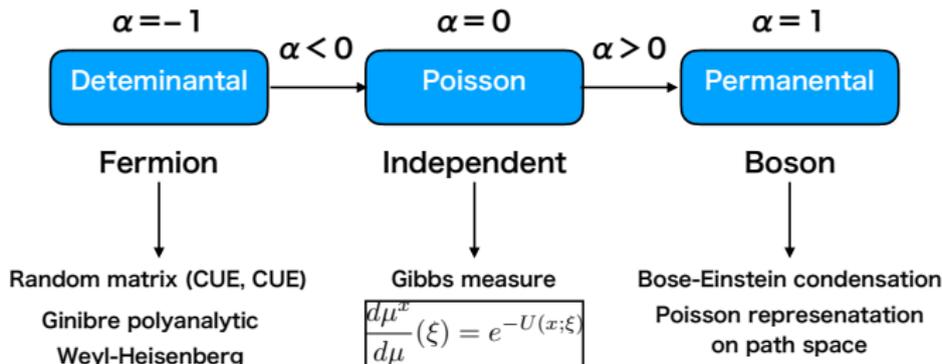
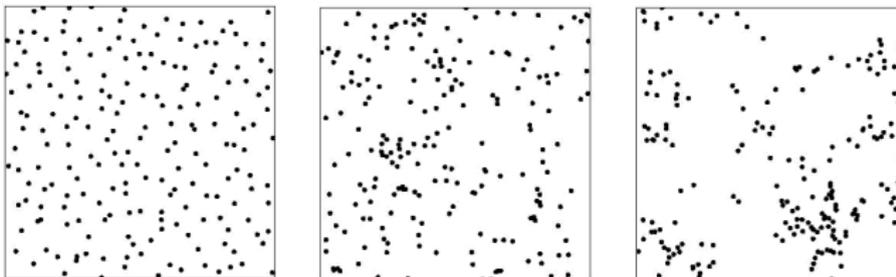
$$\det_{\alpha} A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \alpha^{d(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

は, 行列式 ($\alpha = -1$) とパーマネント ($\alpha = 1$) を 1-パラメータでつなぐ行列変数の関数.

- 相関関数が α -行列式によって表現できる点過程も考えられる.
 $\alpha = -1$ の場合は DPP で, $\alpha = 1$ の場合は統計物理で言う所の多体 Boson 系に相当する.

Determinantal-Poisson-Permanental

$$\mathcal{L}_\mu(f) := \det(I + \alpha K(1 - e^{-f}))^{-1/\alpha}$$



点過程の時間発展

- DPP を定常分布とする時間発展 (確率過程) を考えるのは自然な問題である. GUE の固有値の時間発展としてよく知られるのが, Dyson モデルである
- Dyson model = GUE_N の固有値の時間発展:

$$d\lambda_i(t) = dB_i(t) + \sum_{1 \leq j \neq i \leq N} \frac{\beta/2}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt \quad (1 \leq i \leq N)$$

- 有限点過程の時間発展で古典的な確率微分方程式の理論の範疇.
- $N \rightarrow \infty$ とした $\mu_{K_{\text{sinc}}}$ について, 無限粒子系の時間発展を考える問題はこれに比べて格段に難しい.
 - 時空間の相関関数から捉える方法 (Katori-Tanemura, Esaki).
 - Dirichlet 形式の理論や相互作用のある無限次元確率微分方程式の観点. (Osada, Osada-Tanemura).
- 点過程の剛性の観点から, 無限次元の部分多様体上の拡散過程としての理解も進みつつある.

シフト力学系としての DPP

- $0 \leq \widehat{k}(t) \leq 1$ とする. $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上の Toeplitz 作用素 K

$$K(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \widehat{k}(t) e^{it \cdot (x-y)} dt$$

に付随する DPP は \mathbb{Z}^d 作用に関して不変である.

- \mathbb{Z}^d 上の配置空間 $\mathcal{Q}(\mathbb{Z}^d)$ が $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ と同一視できるので, 自然に DPP を不変測度とする \mathbb{Z}^d 作用をもつ力学系として捉えることができる.
- 例えば, シフト力学系としての DPP のエルゴード論的研究としては,
 - 弱 Bernoulli 性 (Y.Takahashi-T.S.)
 - Bernoulli 性 (Lyons-Steif)
 - 末尾 (tail) 自明性 (H.Osada-S.Osada, Bufetov-Qiu-Shamov)
 - Bernoulli 系としての同型問題 (T.S.-Verbitskiy, S.Osada)

などが調べられている.

DPP の局所普遍性

- (M, g) を滑らかな d 次元コンパクト Riemann 多様体.
- Laplace-Beltrami 作用素 $-\Delta_g$ の固有値を

$$0 = \lambda_0^2 \leq \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \dots$$

その正規直交固有関数系を $\{\varphi_i\}_{i=0}^\infty$ とおく.

- 固有値 λ 以下の固有空間への正射影:

$$E_\lambda(x, y) = \sum_{\lambda_i \leq \lambda} \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}$$

- 相関核 $E_\lambda(x, y)$ に付随する M 上の DPP を Ξ_λ とすると,

$$N(\lambda) := \Xi_\lambda(M) = \sum_{\lambda_i \leq \lambda} \text{rank } E_\lambda = \int_M E_\lambda(x, x) \text{vol}_g(dx)$$

- 古典的な Weyl law より, $\lambda \rightarrow \infty$ で

$$N(\lambda) \sim (\lambda/(2\pi))^m |B_1^{(m)}| \text{vol}_g(M)$$

- (量子エルゴード性) M 上の測地流がエルゴード的ならば, $\lambda \rightarrow \infty$ で $N(\lambda)^{-1} E_\lambda(x, x) \text{vol}_g(dx)$ は $\text{vol}_g(dx)$ に弱収束する.

DPP の局所普遍性

Theorem (M.Katori-T.S.)

相関核 $E_\lambda(x, y)$ に付随する M 上の DPP を Ξ_λ とする. Ξ_λ を指数写像によって点 $p \in M$ における余接空間 $T_p^*(M)$ へ引き戻した DPP を $\tilde{\Xi}_\lambda$ とする. 適切なスケールのもと $\lambda \rightarrow \infty$ とすると, $\tilde{\Xi}_\lambda$ は

$$K_d(u, v) = (2\pi|u - v|_{g_p})^{-d/2} J_{d/2}(|u - v|_{g_p})$$

を相関核とする $T_p^*(M)$ 上の DPP に弱収束する. ここで, $J_\alpha(x)$ は α -次の第 1 種 Bessel 関数.

Remark. 1) 特に, $d = 1$ のときは

$$K_1(u, v) = \frac{\sin |u - v|}{\pi |u - v|}$$

となるので, DPP μ_{sinc} に一致する.

2) $K_d(u, v)$ は d 次元球の定義関数の Fourier 変換.

Thank you for your attention!