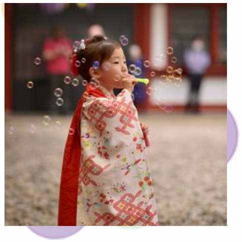
日本数学会市民講演会

i の発見と波面の幾何学

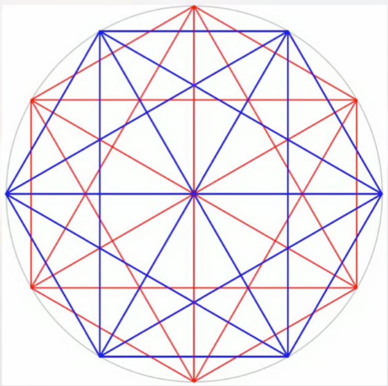
2023年9月23日

宮岡礼子（東北大学）

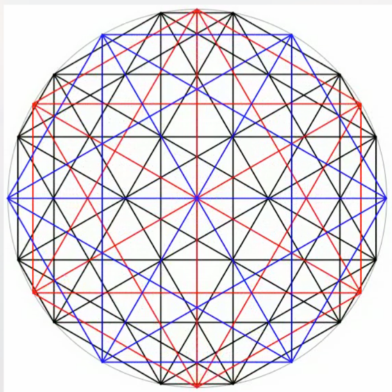
自己紹介



東京都出身　１男２女１孫
1969年 東工大入学：バリケード封鎖中，８月まで自宅待機.
男女比 5/850 (女子学生は各学年１桁→ 現在は３桁)
1975年修士課程終了，同年博士課程進学１年後に助手.
ドイツ ボン大学特別研究員（ 1978-1979 ）
博士号取得（1983年 論博 東工大）
イギリス ウォリック大学研究員（1983年3月-9月）
…… 2021年 東北大学退職



波面の幾何学



今日のお話のプラン

- 数の話
  1．0 の発見
  2．*i* の発見
  3．ハミルトンと四元数
  4．八元数
  5．クリフォード環

- 波面の話
  6．波面の幾何学
  7．球面の幾何へ
  8．等径超曲面
  9．Lie の球幾何

1．まず０の発見

- 中国では紀元前14世紀に十進法を使用開始し、紀元前4世紀にはゼロを空位で表現した位取り記数法を使用し、紀元前1世紀には小数を用いており、16世紀欧州の数学者はそれを学び使用した.
- BC 1800年 バビロニア人：
  60進法，桁が空く記号 ↖↖
- ギリシャ人 *o* (オミクロン)
  記号としてのみ使用
- 数字の０はインドで生まれた：
  ブラフマグプタ(628年)
  数字を抽象的に扱い，加減乗除のルールを負の数に拡張.
- イスラム（アッバース朝）：
  アル-フワーリズミ (780-850?)
  著作 アルジャブルはアルジェブラ（代数）の語源，アルゴリズムの語源にもなる.

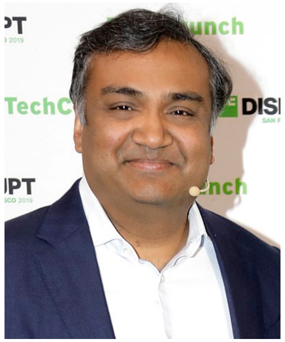
*Newton 虚数 (2020-1) より転載

余談：最近のインド人の活躍も素晴らしい

- 大企業のトップ：

アルファベット(Google) S.ピチャイCEO

YouTube N.モハン CEO



Microsoft S. ナディラ CEO

IBM A.クリシュナ CEO

シャネル L. ナイールCEO

グローバルサウスの立役者へ

- インドは1947年イギリスから独立
- 国土は日本の９倍，人口14億，(15-24歳：２億５千万)
- 30%大学進学，理工系(数物化医学)志向：トップはインド工科大学
- 多様性（20-100以上の言語：英語が共通言語）
- VUCA: Volatility, Uncertainty, Complexity, Ambiguity

<u>インド人はカオスで鍛えられる</u>.

2．いよいよ i の発見へ

- 身近な数から

  自然数：1, 2, 3,…

  整数：…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …

  有理数：$\frac{p}{q}$, p, qは整数，$q \neq 0$．有限少数か，循環少数．

  無理数：分数で表せない数，$\pi = 3.1415\ldots$, e = 2.7182…ネイピア数

以上はまとめて実数とよばれ，正でも負でも2乗すると非負である．
実数全体を $\mathbb{R}$ で表す．``Real number''

1次方程式：$ax + b = c$ $(a \neq 0)$はいつでも解ける．$x = \frac{c-b}{a}$

2次方程式：$ax^2 + bx + c = 0$ は $b^2 - 4ac \geq 0$のとき実解をもつ

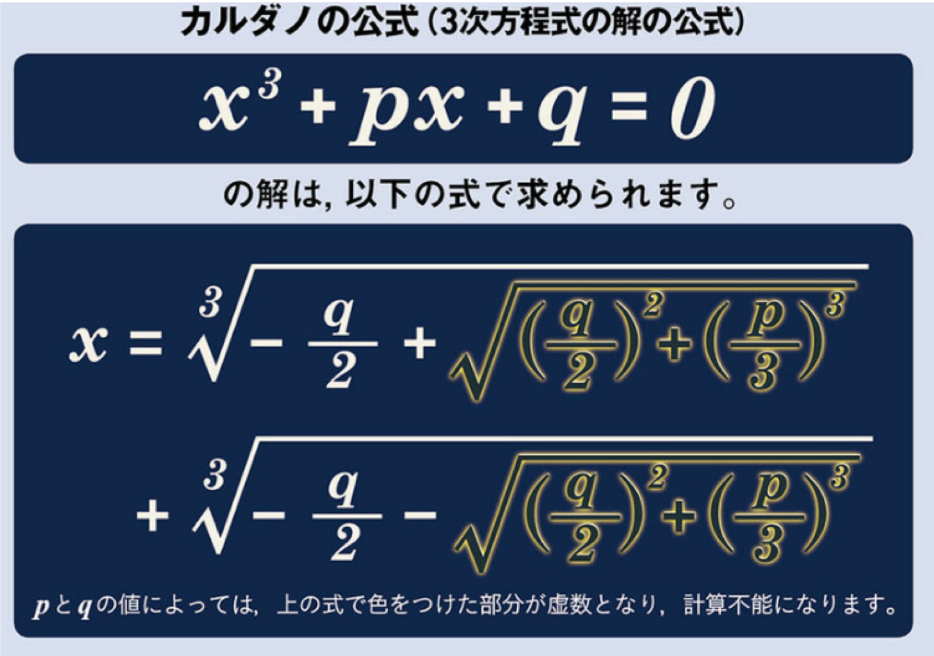
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

問題：x^2+1=0 は実解をもたない.

実は 虚数は 3 次方程式を解くために導入された.

- 3次方程式の解を2次方程式を経て得る方法がある.
  カルダノ(1501-1576)の方法
  (発見者はタルタリア(1499-1557)).

3次方程式の実解が，2次方程式の虚数解を経て得られることがある.



例　$x^3-15x-4=0$ は $x=4$ を解にもつ.
左の式で $\sqrt[3]{\ }$ は3乗根を表す.

そこに入っている黄色いルートの中身は

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(\frac{-4}{2}\right)^2+\left(\frac{-15}{3}\right)^3=4-125=-121<0$$

なので，$x^2=-1$ の解 $\sqrt{-1}$ を i と書けば

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i} \qquad (\text{計算略}) \\ &= (2+i)+(2-i)=4 \end{aligned}$$

となるのである.

*以下，Hamilton まで図版は Newton 虚数 (2020-1) より転載 (オイラーを除く)

代数学の基本定理

驚くべき事実：i を導入すると2次，3次方程式ばかりでなく，
すべての n 次方程式：$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$
が解ける．
つまり次が成り立つ：

<u>代数学の基本定理</u> ガウス(1799)

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ とすると，

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

は重複度も込めてちょうど n 個の複素数解をもつ．

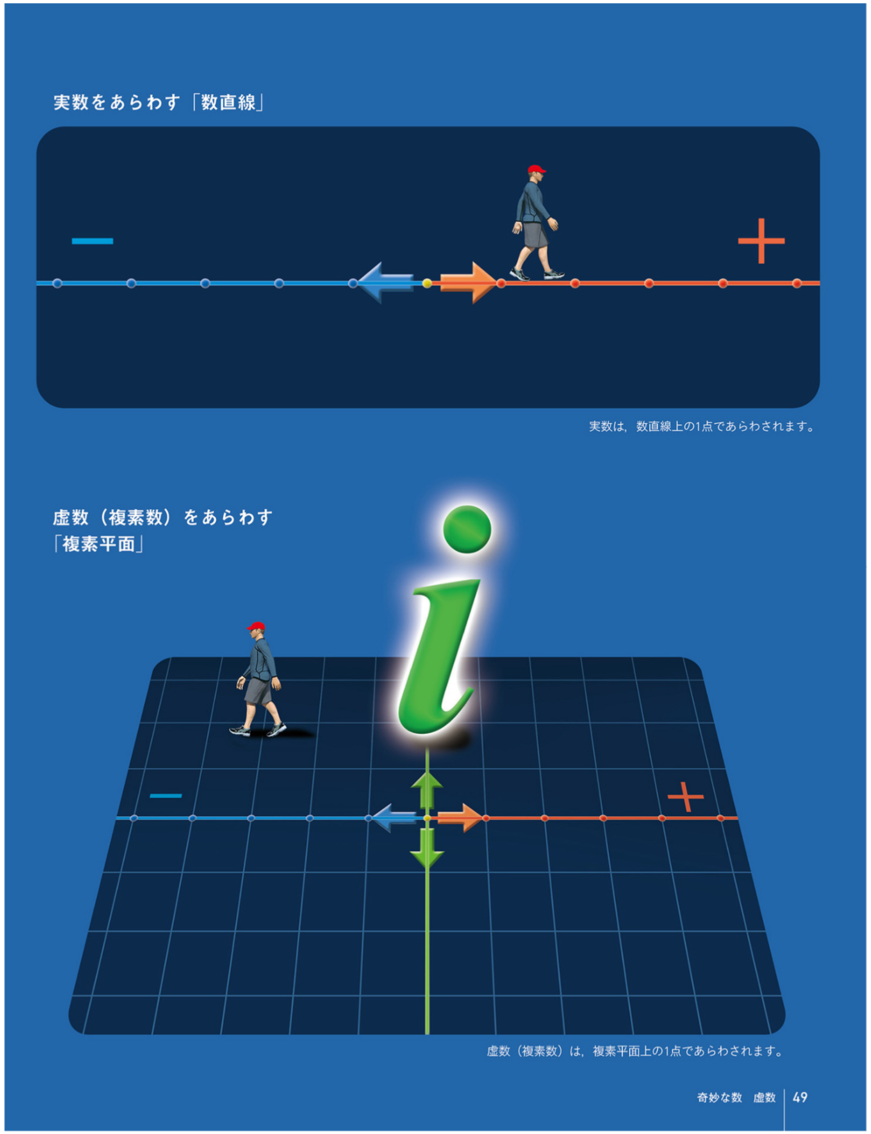
数直線と複素（ガウス）平面

17世紀：デカルトは (0 の導入にも) $\sqrt{-1}$ の導入に懐疑的で，これを ``Imaginary number''（虚数）と名付けた（幾何学的意味がない？）

一方，実数を数直線で表すと，0 や正負の数の様子が自然にわかる．

また数直線に垂直な方向を虚軸として追加することにより，複素数の様子も自然にわかる．
これを複素平面，または創始者のひとりガウス(1777-1855)にちなみ，ガウス平面という．

このように視覚的に表すことにより，0 も i も受け入れらるようになった．



オイラー (1707-1783)

1779年 オイラーは $x^2 = -1$ の解 $\sqrt{-1}$ を i と記し，重要な結果をいくつも導いた．

余談：

1738年ごろより視力が低下し、
1771年ごろ両目を完全に失明．
計算はすべて頭の中で行い，子供が口述筆記で論文にした．
現在，886編の論文が確認されており、5万ページを超える全集にまとめられ1911年から刊行されているが未完．

$z = x + yi$ $(x, y$ は実数$)$ と表される数を複素数という．複素数全体を $\mathbb{C}$ で表す．加減乗除に関して，複素数は実数と同じ性質をみたす．``Complex number''

オイラーの公式，オイラーの等式

- 複素数と指数関数，三角関数との関係：
  $e = 2.7182\ldots$をネイピア数*とするとき，指数関数 e^xは

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

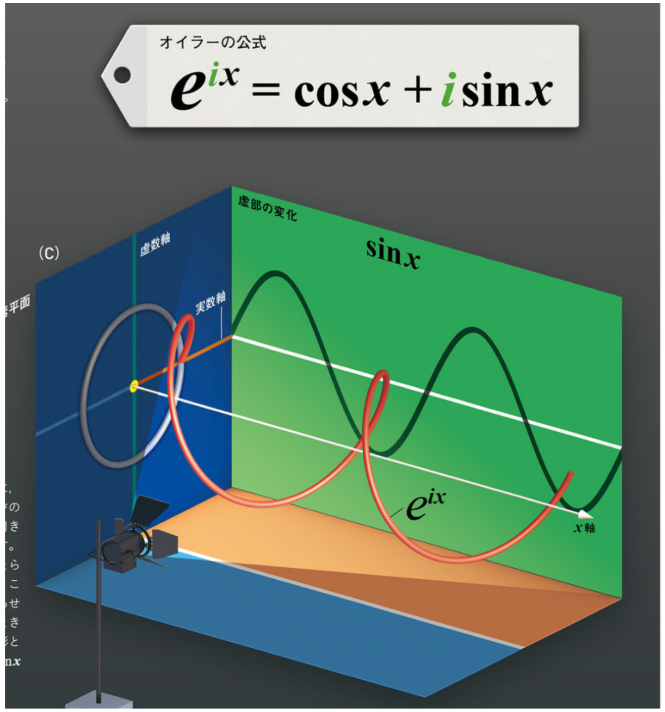
で与えられる．

このとき，三角関数の級数展開を用いて

オイラーの公式：$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

オイラーの等式：$e^{i\pi} = -1$ を得る．

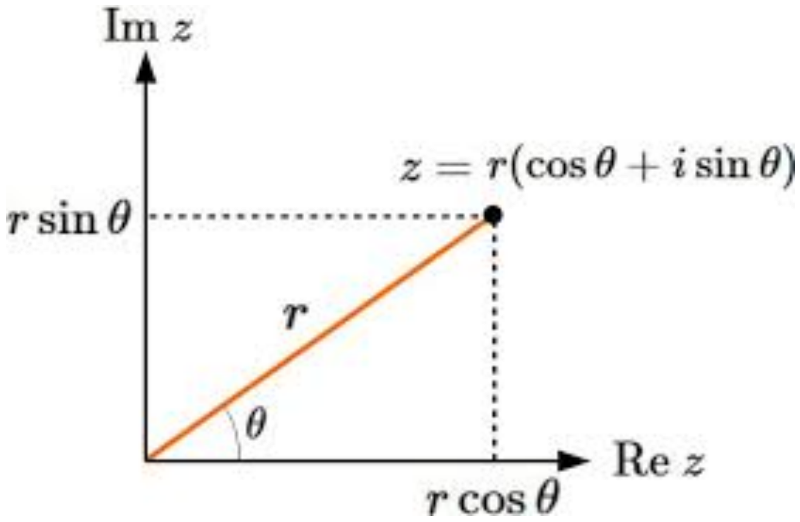
したがって $e^{\frac{i\pi}{2}} = \sqrt{-1} = i$

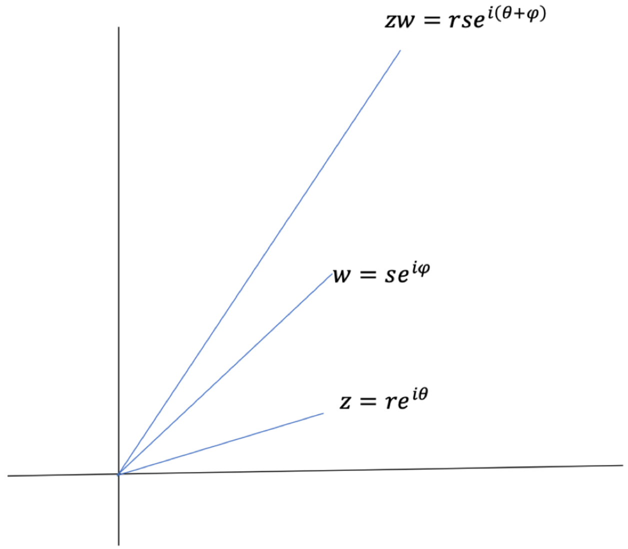


＊ネイピア数　$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

1618年，ネイピアにより自然対数の底として記述されたが，
元はベルヌーイが複利計算のために使った数のようである．

数 II の復習（知らなくてもOK)：複素数の極表示と掛け算





$$z = x + iy = re^{i\theta} = r\ (\cos\theta + i\sin\theta),\ \ r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

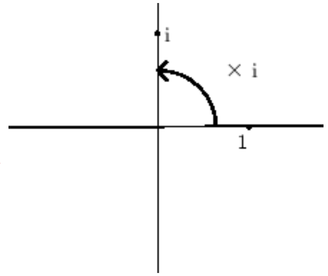
$|z|$を絶対値，　θを偏角という．

$z = re^{i\theta}$, $\mathrm{w} = se^{i\varphi}$ のとき $zw = (rs)e^{i(\theta+\varphi)}$

つまり絶対値は積，偏角は和になる．

＊特に $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ だから z に i をかけることは，

z を $\frac{\pi}{2}$ =90° だけ回転すること．

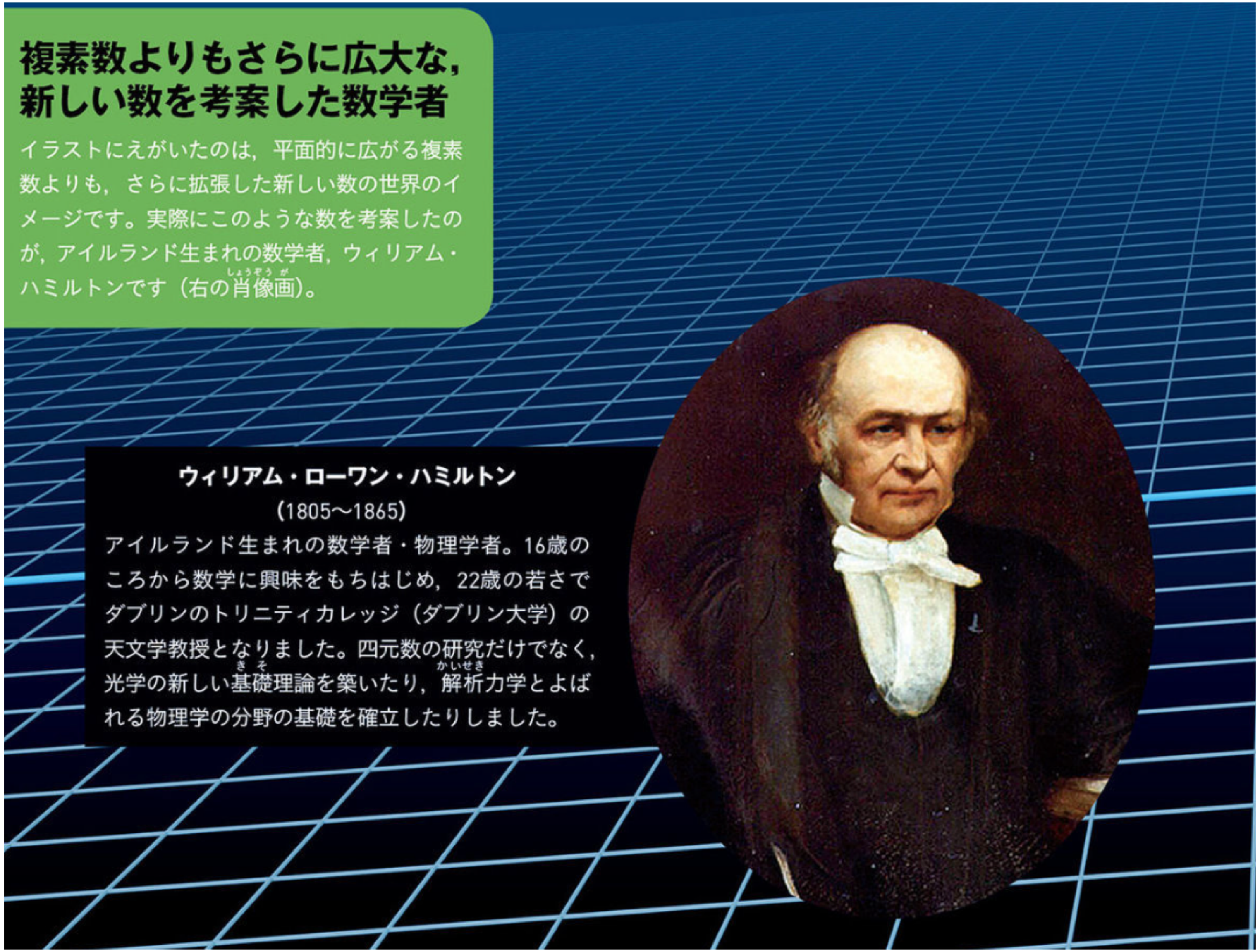


複素数の役割

数学的な役割に加え，複素数は多方面において大きな役割を果たす．

- 光学：物質による光の屈折率は実数，吸収率は虚数で表される．
- 天体力学：楕円軌道の周期は実数だが，双曲線軌道の周期は虚数で表される．
- 相対性理論：時間軸は通常の座標に i をかけたものと思える（アインシュタイン）
- 超光速粒子タキオンがあれば，その質量は虚数．
- トンネル効果　粒子の質量や速度が虚数（ホーキング）
- 量子力学：シュレディンガー方程式: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x,t)\right\}\psi(x,t)$
  確率論を導入して量子コンピューターに発展．

3. ハミルトン (1805-1865)



複素数よりもさらに広大な，新しい数を考案した数学者

イラストにえがいたのは，平面的に広がる複素数よりも，さらに拡張した新しい数の世界のイメージです。実際にこのような数を考案したのが，アイルランド生まれの数学者，ウィリアム・ハミルトンです（右の肖像画）。

ウィリアム・ローワン・ハミルトン

(1805〜1865)

アイルランド生まれの数学者・物理学者。16歳のころから数学に興味をもちはじめ，22歳の若さでダブリンのトリニティカレッジ（ダブリン大学）の天文学教授となりました。四元数の研究だけでなく，光学の新しい基礎理論を築いたり，解析力学とよばれる物理学の分野の基礎を確立したりしました。

四元数の発見

- ハミルトン (1805-1865)は虚数単位をもう一つ付け加え，三元数の構成を試みて失敗したが，２つ付け加えることにより四元数を発見(1843)し，生涯の後半をこの研究に捧げた．

- i, j, k を $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ をみたすものとするとき，

$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ (a_0,\ a_1,\ a_2, a_3 \text{は実数})$$

を四元数，またはクオタニオンという．

- 四元数全体を $\mathbb{H}$ (Hamiltonの頭文字)で表す．

- 実数，複素数と異なり積は可換でない

$$ij = k = -ji \text{ など．}$$

$\mathbb{H}$ で考えると， x^2= -1 の解は無数にある．実際

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

なるすべての $a_1,\ a_2, a_3$ に対して $q = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ は q^2= -1 をみたす．

四元数の性質と役割

$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ の共役 $\bar{q}$ とノルム $|q|$をそれぞれ

$$\bar{q} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k,$$
$$|q|^2 = q\,\bar{q} = {a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2$$

とするとき，q の逆元は

$$q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

したがって $\mathbb{H}$ は割り算ができる：

$\mathbb{H}$ は多元体（ラフにいうと，加減乗除ができる）．

フロベニウスの定理 (1877)

$\mathbb{R}$ 上の有限次元結合的多元体は $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ のみ.

（積が $a(bc) = (ab)c$ をみたす）

四元数の役割

- 複素数のときのように，i, j, k をかけることは異なる3方向への回転を表すので3次元の回転群 SO(3) が深く関与する．
- 実際，3次元の回転は四元数計算を用いると容易に表現できる．
- そこで，四元数は，CG，コンピュータービジョン，ロボット工学，制御理論，物理，生物情報，分子動力学法，軌道力学... で使われている．

4. ハミルトンの友人グレイブズは八元数を発見した.

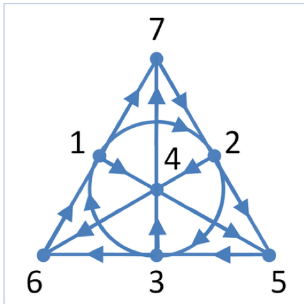
- グレイブスの発見（1843年）ケーリーも独立に発見(1845年).

i, j, k に代わり e_0=1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 を与えて,
$j > 0$ のとき, e_j^2= -1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 の間の積が下の図で与えられるとする.

例えば，ひとつの線分（円）上の３つ組は矢印方向に,

e_6e_1=e_7, e_1e_7=e_6, e_1e_4=e_5, e_5e_3=e_6, e_1e_2= e_3,

などをみたす（逆向きは符号が変わる）.



このとき

$$x = x_0e_0+x_1e_1+x_2e_2+ x_3e_3+ x_4e_4+x_5e_5+x_6e_6+x_7e_7$$

(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7は実数)

で与えられる x を八元数，またはオクトニオン，ケーリー数といい，
その全体を $\mathbb{O}$ で表す.

八元数の性質

- 八元数の積は非可換で，さらに結合法則をみたさない．

$$a(bc) \neq (ab)c$$

他方，四元数と同様に

$$x = x_0e_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4+x_5e_5+x_6e_6+x_7e_7$$

の共役とノルムをそれぞれ

$$\bar{x} = x_0e_0-x_1e_1-x_2e_2-x_3e_3-x_4e_4-x_5e_5-x_6e_6-x_7e_7,$$

$$|x|^2 = x\bar{x} = {x_0}^2+{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2+{x_5}^2+{x_6}^2+{x_7}^2$$

で定めるとき，x の逆元は

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$$

で与えられる．よって割り算ができる．

では，同様にして16元数とか32元数...ができるか？

ノルムが$|xy| = |x||y|$をみたす多元体をノルム多元体という．

フルヴィッツ(1859-1919)の定理 (1898)

$\mathbb{R}$ 上のノルム多元体は $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ のみである．

積の可換性や結合性はなくとも，上の性質をみたすノルムをもち，「加減乗除」ができる数は，$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ に限られるのである．

八元数の役割は近年宇宙理論に関連していることがわかってきた．この話は最後にしよう．

5. クリフォード環（おまけ）

- 四元数と関連して，その拡張ともいえるクリフォード環を簡単に紹介する．ここでは，例を挙げて紹介するに留める．
- $\mathbb{R}^n$ の内積に関する正規直交基底 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ から形式的に

$$e_1,\ e_2,\ \ldots\ ,\ e_n,\ e_i e_j,\ e_i e_j e_k,\ \ldots,\ e_1 e_2 \ldots e_n,\quad i < j < k \ldots$$

の線型結合を考え，次の積関係

$$(*)\qquad e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$$

をみたすものとしてクリフォード環を定める．
一般に割り算はできないので体ではなく環という．

ここで $n = 3$ として $i = e_2 e_3, j = e_3 e_1, k = e_1 e_2$ とおくと
(*)から $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ がいえて四元数を得る．

自己同型の話（あまり気にしなくて良いが重要）

- 自己同型：積の関係を保存する全単射写像
  A を多元体とするとき，$g : A \to A$ が

$$g(ab) = g(a)g(b)$$

をみたすとき，g をA の自己同型という．

$\mathbb{C}$ の自己同型で $\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ に移すものは複素共役のみ.

四元数の自己同型全体は SO(3)： 3 次元回転群.

八元数の自己同型全体は，例外リー群とよばれる 5 つのうちの一つの G_2である．これは 7次元回転群 SO(7)の部分群である.

クリフォード環からは Spin(n) というスピノル群が現れる.

6. さて，ここからは波面の幾何学

今まで登場したいろいろな``数”は幾何学と関係するのか？

・池に石を投げ込むと，同心円状の波が広がっていく.

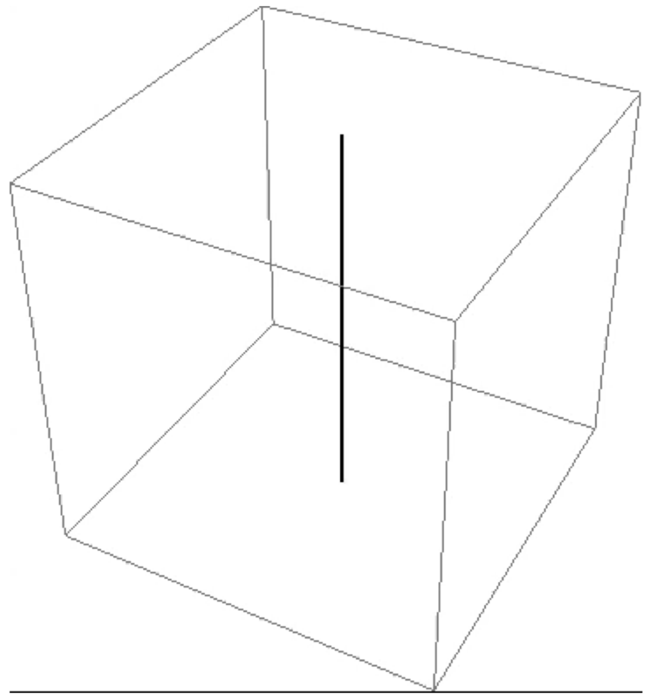
・針金から熱が出ると，円柱状の等温面が広がっていく.

ある波源から出る光の波面を

等径超曲面

という．1920年代のイタリアの
幾何光学者による研究が起源.

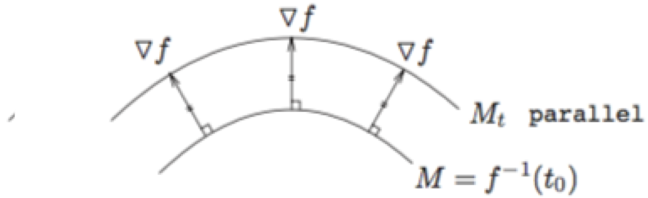
これらは平行超曲面族として現れる.



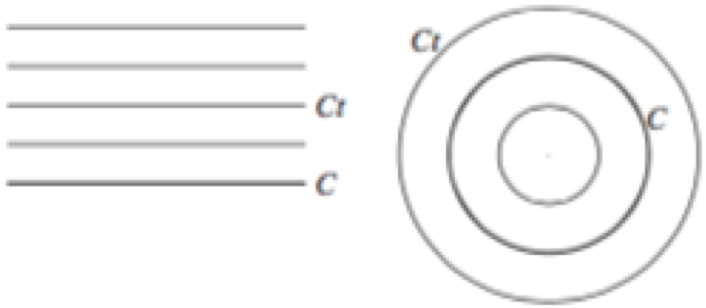
* pdfでは残念ながらアニメーションが表示できません.

平行

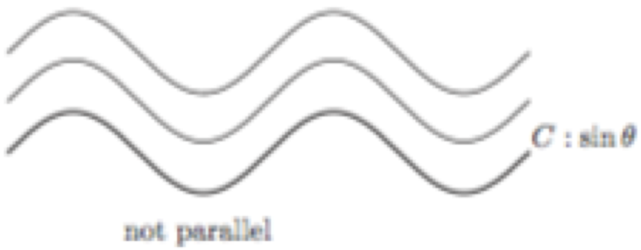
- 波面 M と M_t が平行 ⟺ M と M_t の距離が一定



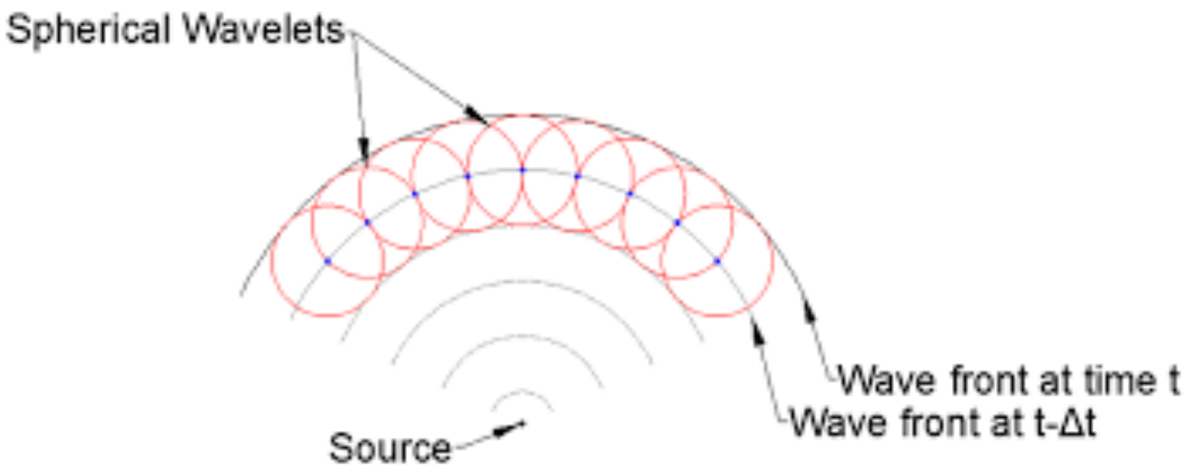
平行

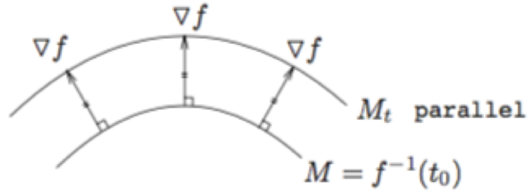


平行
でない



ホイヘンスの原理

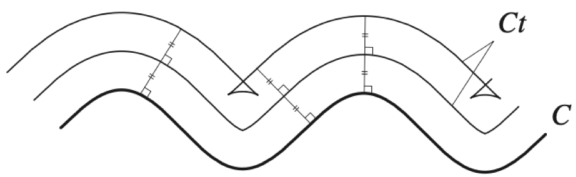




波面は波源の各点から<u>一定速度</u>で出る小波の包絡面

等径超曲面の数学的な定義には深入りしないことにして，<u>ホイヘンスの原理に従って進行する波面</u>であると考えよう.

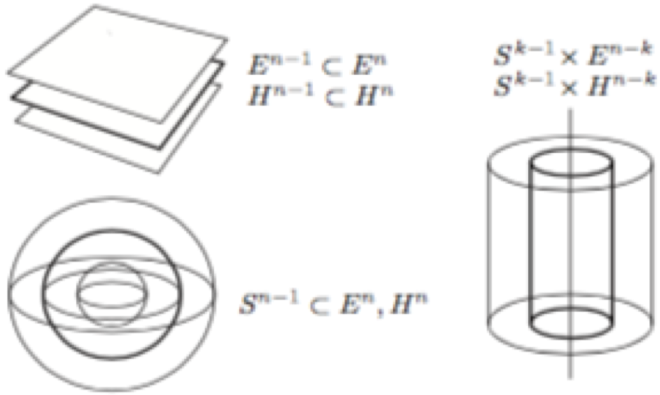
ただしどの波面も折れ曲がったり重なったりはしないものとする.



8．$\mathbb{R}^n, S^n, (H^n)$ の等径超曲面

実空間 $\mathbb{R}^n(=\ E^n)$, 球面 S^n, (双曲空間 H^n)を考える
(H^n にはふれない).

$\mathbb{R}^n$ の等径超曲面は,
同心超球面 $S^{n-1}(r)$ と
円柱面 $S^k\times \mathbb{R}^{n-k-1}$
のみであることが知られている.



ところが, 球面

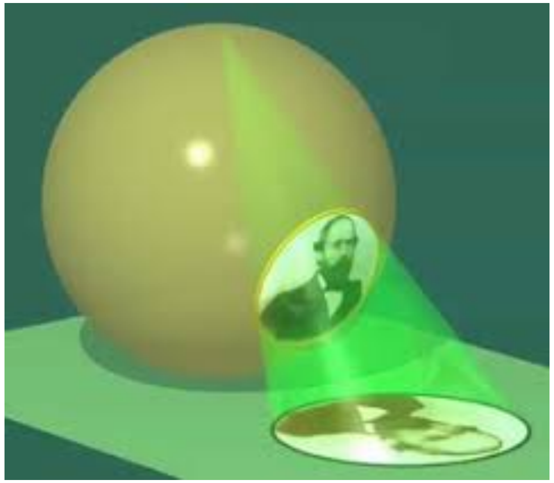
$$S^n = \{x = (x_1, \dots, x_n,\ x_{n+1}), |x| = 1\}$$

には，無限個の等径超曲面が存在する.

そこで以後 S^n の等径超曲面を考えよう.

7．球面の幾何へ

- 複素平面 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を加えたものを $\hat{\mathbb{C}}$ で表す．
  $\hat{\mathbb{C}}$ は右図のように，２次元球面 S^2 と対応付けられる．
  この S^2 をリーマン球面とよぶ．



- 実際，立体射影を知っていれば
  図のように S^2 と複素平面が
  きれいに対応している．
  ちなみにこの写真の人物は
  リーマン(1826-1866)である．

この対応で複素平面上の円（半径 ∞ として直線を含む）はリーマン球面上の円に対応する．これを円円対応とよぼう．

同様に，n 次元 実空間 $\mathbb{R}^n$に無限遠点を加えて$\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \infty$と
すると，$\widehat{\mathbb{R}^n}$と n 次元球面 S^n を同一視することができる．

等径超曲面の波源 を 焦部分多様体 という

- S^n の等径超曲面 M は 必ず二つの 焦部分多様体 M_+ と M_-をもち，そこから発する波面として与えられる．

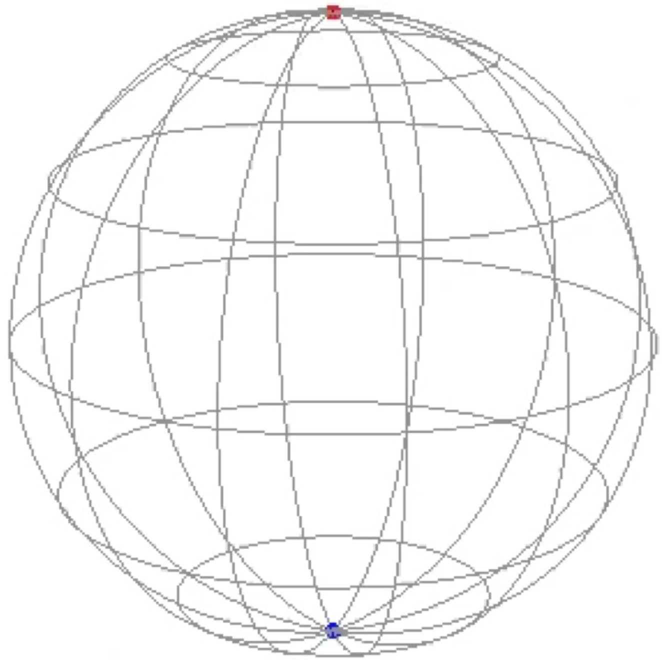
- 例

M_+ ：北極

M_- ：南極

$M = S^{n-1}(r)$ ：超球面

M_+ (M_-)を芯として、球面が膨らんで（縮んで）いく．
（ $\mathbb{R}^n$の同心超球面に対応）

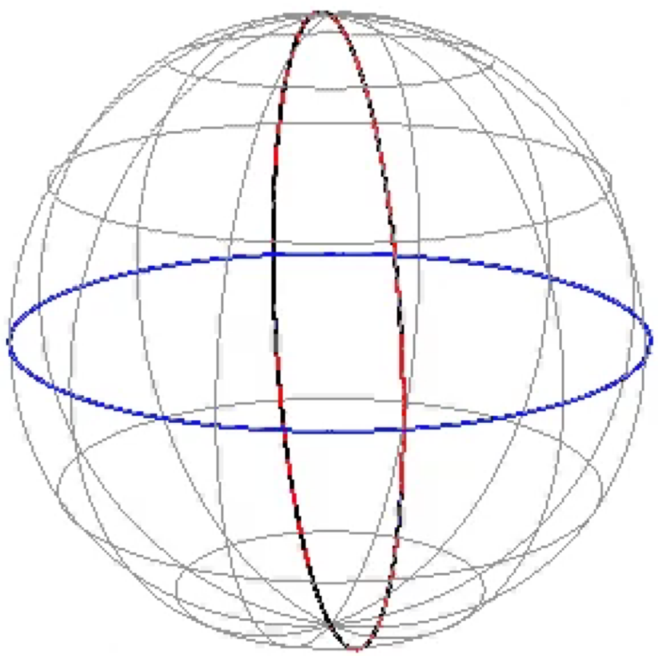


* 以下，pdfでは残念ながらアニメーションが表示できません．

クリフォード 超曲面 ：$\mathbb{R}^n$ の円柱面 $S^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}$ に対応.

- $M = S^k(r) \times S^{n-k-1}\left(\sqrt{1-r^2}\right)$ は S^n $(n \geq 3)$の等径超曲面

M_+ ： $S^k(1)$，M_- ： $S^{n-k-1}(1)$.



M_+の各点を中心とする球面が膨らんで行き，M_-の点につぶれる.

グラフィックの様に，平行超曲面族（黒で表示）は S^n を覆い尽くす.

鍵となる数 g = 相異なる主曲率の個数

- 主曲率は定義しないが，g は異なる曲がり方の種類を表す．$\mathbb{R}^n$ では $g = 1,2$ の場合しかない．

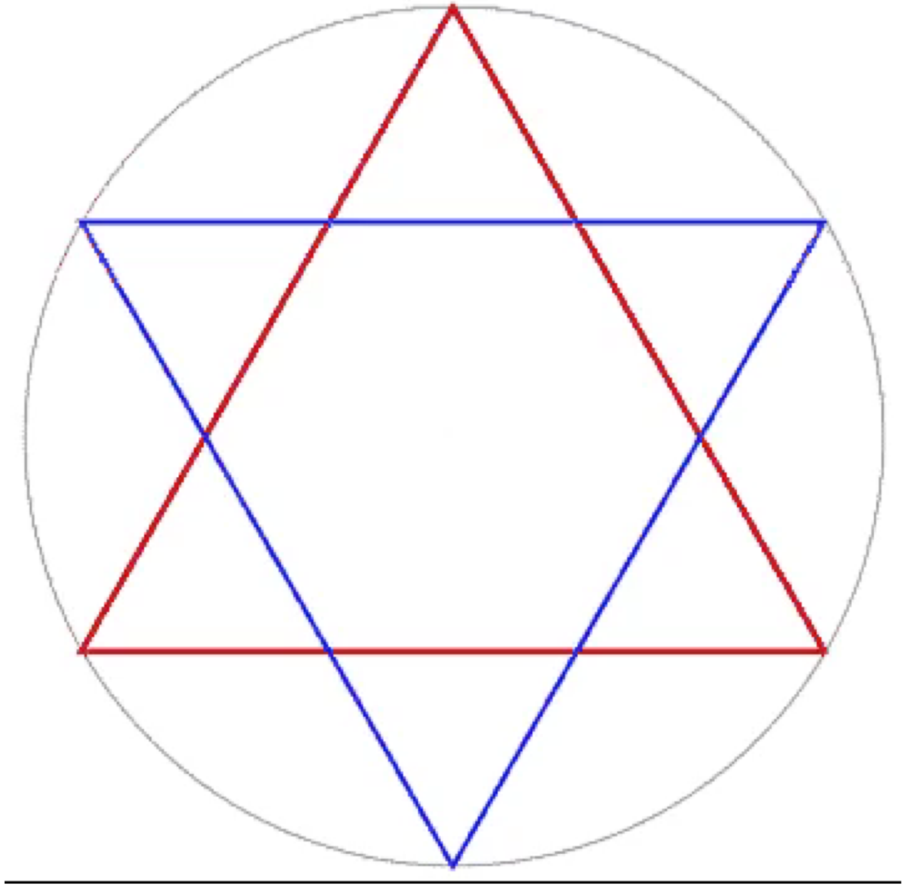
S^n内

- 超球面 $S^{n-1}(r)$： $g = 1$（曲がり方はどこも同じ）
- クリフォード超曲面 $S^k(r)\times S^{n-k-1}(\sqrt{1-r^2})$: $g = 2$（曲がり方は２種類）
- S^n には, さらに g=3,4,6 をもつ等径超曲面が存在する．
- グラフィックは藤森祥一広島大学教授による．

以後，超曲面の法線（ここでは大円=法測地線という）の乗っている平面に射影した図で表す．

$g = 3$

- 図の円は M の法測地線を表す.



M_+, M_- : Veronese 曲面
とよばれる射影平面
$\mathbb{F}P^2$ $(\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O})$の
S^4, S^7, S^{13}, S^{25} への
標準埋め込み.
ここにも　$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ が現れる.

特に, M は等質で,
Cartan 超曲面
とよばれる.

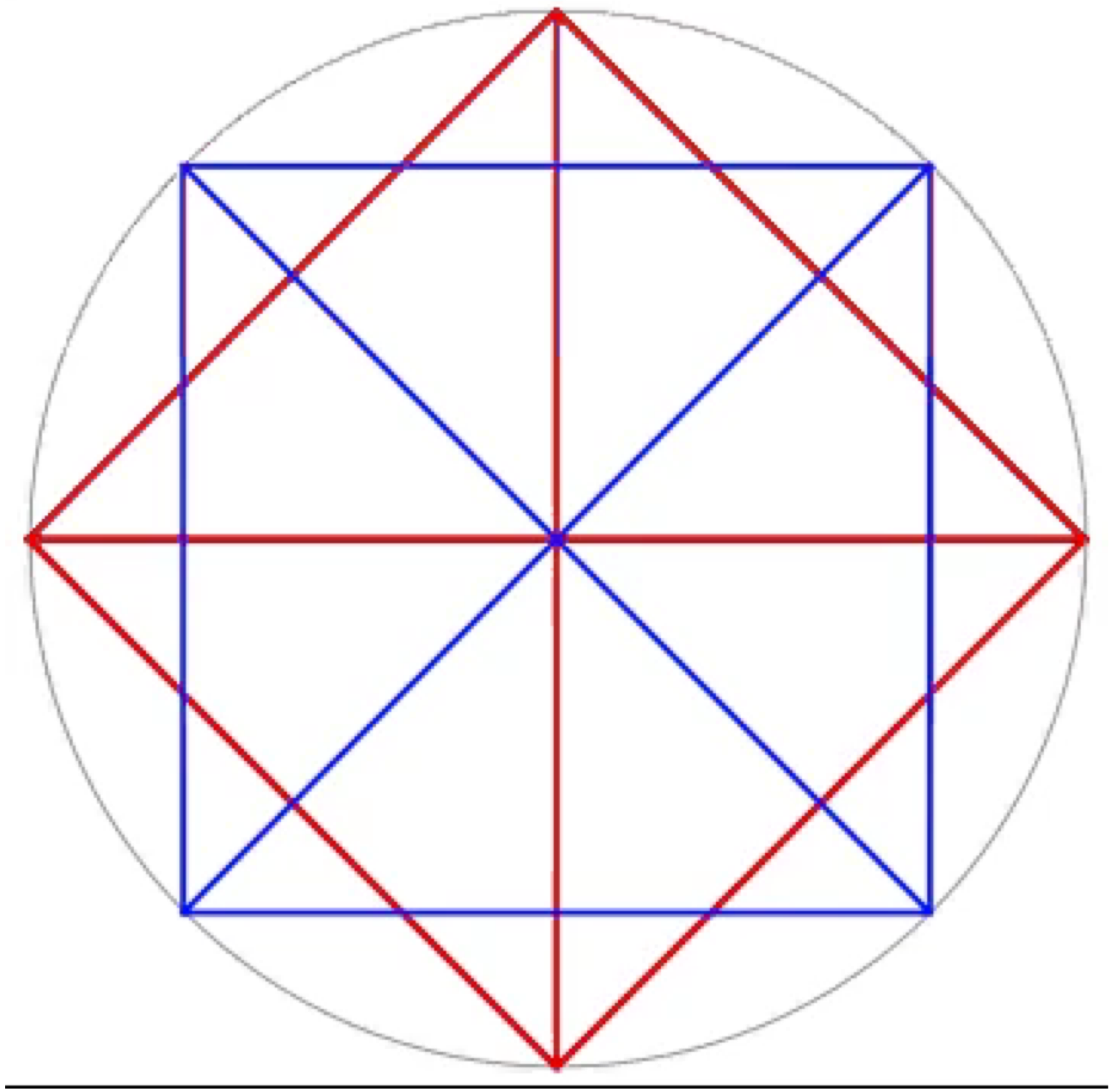
等質とは正確には群作用の軌道のことであるが,
ここではどこから見ても同じに見える図形であると思っておこう.
球面：等質　ラグビーボール：非等質

$g = 4$

- 最も面白い例が現れるケース：

- 無限個の等質，非等質な等径超曲面が現れ，これらは四元数やクリフォード環に関係している．

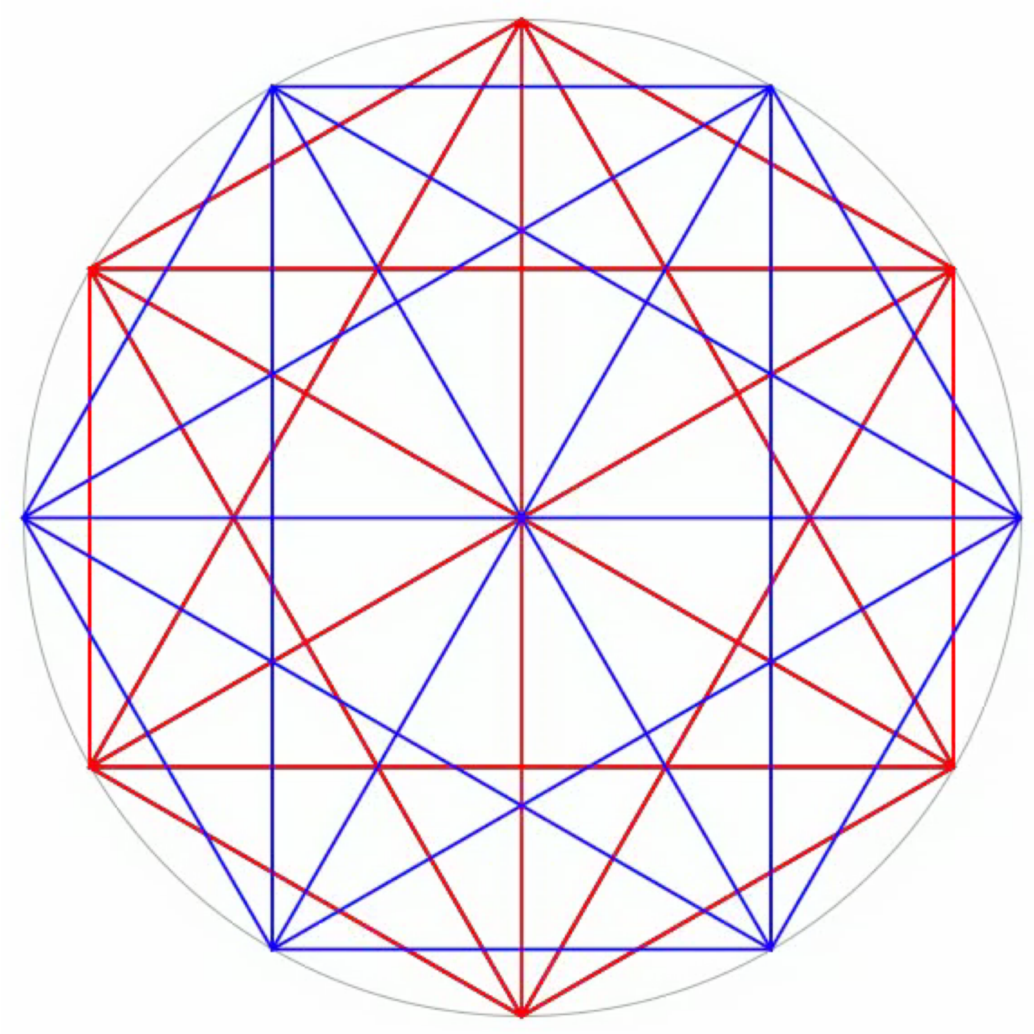
M_+, M_-の次元には無数の組み合わせがある．



$g = 6$

- 二つの等質超曲面が S^7, S^{13} 内に現れる.

S^{13}に現れるのは
八元数の自己同型群である例外群 G_2の軌道
（等質）



等径超曲面の分類

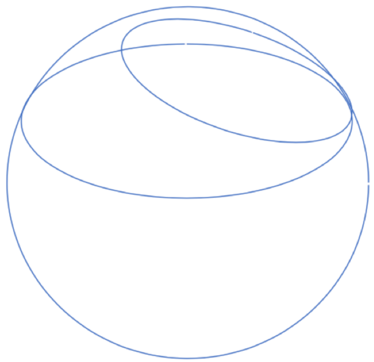
- 等径超曲面は1930年代後半に，E. Cartanが統一的に研究を始め，代数，トポロジー，微分幾何，解析を総動員して，球面内での分類は2020年にようやく完成した (Cartan, Cecil-Chi-Jensen, Dorfmeister-Neher, Chi, 宮岡).
  すなわち球面内では上に述べたもので尽くされる.

- $g = 1, 2, 3, 4, 6$ のみであることにあわせて，四元数，クリフォード環，八元数の自己同型群などが現れることは決して偶然とは思われない.

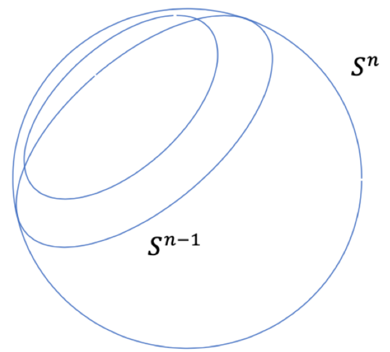
- 波面の幾何学は本来は物理の問題であり，研究対象として興味深い．四元数や八元数に関わるものが現れるという意味でも深淵である.

9. リー接触変換

- 超球面を超球面に移す（円円対応）変換には，角を保つ共形変換のほかに，半径を縮めたり伸ばしたりする膨張変換がる．これらを合わせてリーの接触変換という．



共形変換

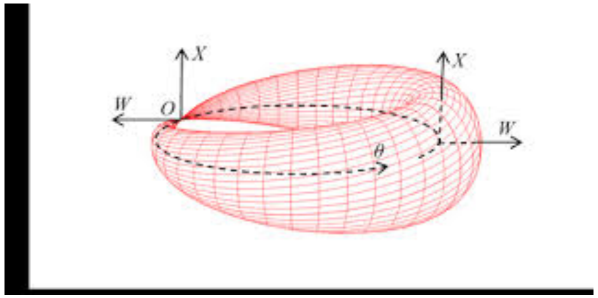


膨張変換

ただし数学的に正確に述べるには，球面 S^n の単位接空間 US^nが必要となり，今日の話の範囲をこえるので，ここでは直感的に考えておく．

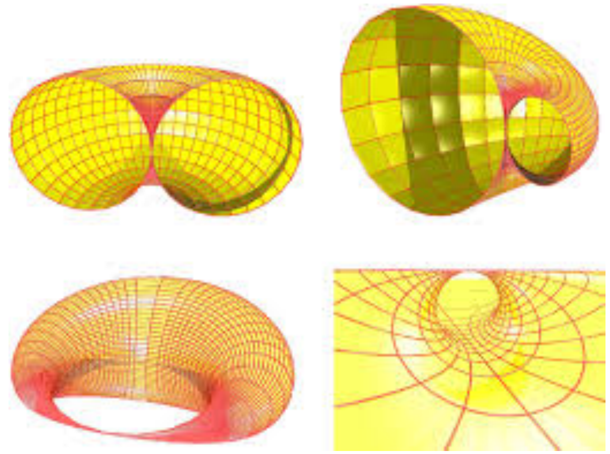
少し一般の波面

- 等径超曲面にリー接触変換を施すとどうなるだろうか？
- 例えばドーナツの表面にリー接触変換を施すと，右図のように歪む.
  *ドーナツは等径超曲面ではないが.



- このような超曲面をDupin 超曲面という.
- これは一定でない速度で進行する波面の幾何学と言って良い.

Lie の球幾何はあまり知られていないが，円円対応を引き起こす変換として興味深い.



少し専門的な話（波面の幾何の役割）

- 完備非コンパクト多様体上のRicci平坦計量は数理物理において重要で，Stenzel 計量，Bryant-Salamon 計量などが知られ，一部の等径超曲面の位相と関係する．

- 例えば $S^7 \setminus S^3$ や，Cartan超曲面の焦部分多様体の一つを取り去った空間 $S^7 \setminus \mathbb{C}P^2$ にはそのような計量が存在する(Bryant-Salamon計量）．

- これらは特殊ホロノミー G_2 を持ち，G_2 多様体とよばれる7次元多様体である．

- さらに焦部分多様体の余法束や，そのGauss写像の像は，対応する空間の特殊Lagrange部分多様体となる．

余談：宇宙理論

- ハミルトン：我々は4次元の時空に住んでいる．四元数はこのことに関連している．
- 超弦理論：点粒子 →実は 弦（ひも）が最小単位？

我々の住む時空は10次元．ここで

$$10 = 4 + 6$$

の 6 次元に当たるものはカラビ-ヤウ多様体とよばれる．

・M 理論：弦→ 実は面が最小単位？

我々の住む時空は11次元である．ここで

$$11 = 4 + 7$$

の 7次元分は ？？？

理論には例外リー群 E_8， G_2 などが登場するが，

まだまだ謎は多くどの理論も未完成である．

2012年のヒッグス粒子の発見，さらなる未知の素粒子の存在も議論されている(2023年8月13日付日経新聞)

まとめ

０の発見，i の発見，四元数の発見，八元数の発見と数の歴史は発展してきた.

「虚数」と名付けられて，始め無意味な数とも思われていた複素数は，代数学の基本定理で述べられたような，数学における土台を築く数となった上に，物理学の進展にも大きな寄与をして，量子力学に本質的に結びついた.

さらに四元数，八元数及びその自己同型群は，波面の幾何学どころではなく，近年，弦理論，超弦理論，超対称性理論，ミラー対称性，M理論などの最先端の宇宙物理学を論じる上で，大きな役割を担い始めている．これらはまだ研究途上であるが，今後の発展が大いに楽しみである.

本講演で参考にした文献等

- 吉田洋一　零の発見 (岩波新書 1979)
- Newton　虚数　(2020-1)
- 植田一石「複素数を超えて-四元数と八元数-」 (2018)
- 横田一郎　群と表現 (裳華房 1973)
- 日経サイエンス　八元数と超ひも理論 (2011-8)
- 宇宙物理に関しては次のYouTubeが興味深い.

NHKスペシャル　神の数式 完全版 (2013年放送)

第１回 この世は何からできているのか

第２回 宇宙はどこから来たのか

第３回 宇宙はなぜ始まったのか

第４回 異次元宇宙は存在するか 超弦理論革命

ご清聴ありがとうございました.