2021年3月16日

平均次元入門

塚本真輝

1　力学化（Dynamicalization）

Gromov (1999) の提案：

幾何学の概念・定理の力学系版を考えよ.

このアイデアの古典的な例：

- 点の個数　$\Longrightarrow$ 位相的エントロピー.
- 鳩ノ巣原理 $\Longrightarrow$ 記号力学系の埋め込み定理.

Gromov による新しい例：

- 次元論 $\Longrightarrow$ 平均次元論

2　力学系とは何?

(X, T):力学系 $\Longleftrightarrow$ X:コンパクト距離化可能空間，$T : X \to X$:同相写像.

言い換えると，

力学系 $=$ $\mathbb{Z}$作用付きのコンパクト距離化可能空間.

$\mathbb{Z}$を他の群に変える一般化も考えられるが，当面は上の定義で考える.

3　位相的エントロピー

コンパクト距離空間$(X, \mathbf{d})$と正数εに対して，Xを直径ε未満の開集合で覆う際に，必要な開集合の個数の最小値を$\#_\varepsilon(X, \mathbf{d})$と書く．

同相写像$T : X \to X$，自然数Nに対して

$$\mathbf{d}_N(x, y) := \max_{0 \le n < N} \mathbf{d}(T^n x, T^n y).$$

位相的エントロピーを次で定める：

$$h_{\mathrm{top}}(X, T) := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\lim_{N \to \infty} \frac{\log \#_\varepsilon(X, \mathbf{d}_N)}{N} \right).$$

4　記号力学系

有限集合 A に対して，

$$A^{\mathbb{Z}} = \cdots \times A \times A \times A \times \cdots ,$$

$$\sigma : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}} : \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

$(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ は力学系．

$$h_{\mathrm{top}}\left(A^{\mathbb{Z}}, \sigma\right) = \log |A|.$$

これが典型的な力学化の例である．

力学化のレシピ

通常の幾何学で，空間Kに対して不変量$q(K)$が定まっているとする．力学系(X,T)に対して，$q_{\text{力学}}(X,T)$をうまく定めて，

$$q_{\text{力学}}\left(K^{\mathbb{Z}}, \text{シフト}\right) = q(K)$$

となることを目指す．

エントロピーの場合は，$q(K) = \log|K|$ に対して，$q_{\text{力学}}(X,T) = h_{\text{top}}(X,T)$．

5　鳩ノ巣原理の力学化

有限集合 A, B に対して，$A \hookrightarrow B$ の必要十分条件は $|A| \leq |B|$．これの力学化は何？

二つの力学系 (X, T) と (Y, S) に対して，
$(X, T) \hookrightarrow (Y, S) :\Longleftrightarrow \exists f : X \to Y$：位相的埋め込み with $f \circ T = S \circ f$.

力学系 (X, T) と自然数 n に対して

$$P_n(X, T) := \{x \in X | T^n x = x\}.$$

もし$(X,T) \hookrightarrow (Y,S)$なら，

- $h_{\mathrm{top}}(X,T) \leq h_{\mathrm{top}}(Y,S)$.
- 全ての自然数nで，$|P_n(X,T)| \leq |P_n(Y,S)|$.

これの（ほぼ）逆が成立する場合がある.

記号力学系の部分力学系を**サブシフト**と呼ぶ．つまり，$A^{\mathbb{Z}}$の閉集合Xで$\sigma(X) = X$となるもの.

定理（Krieger 1982）

A と B を有限集合，$X \subset A^{\mathbb{Z}}$ を次を満たすサブシフトとする.

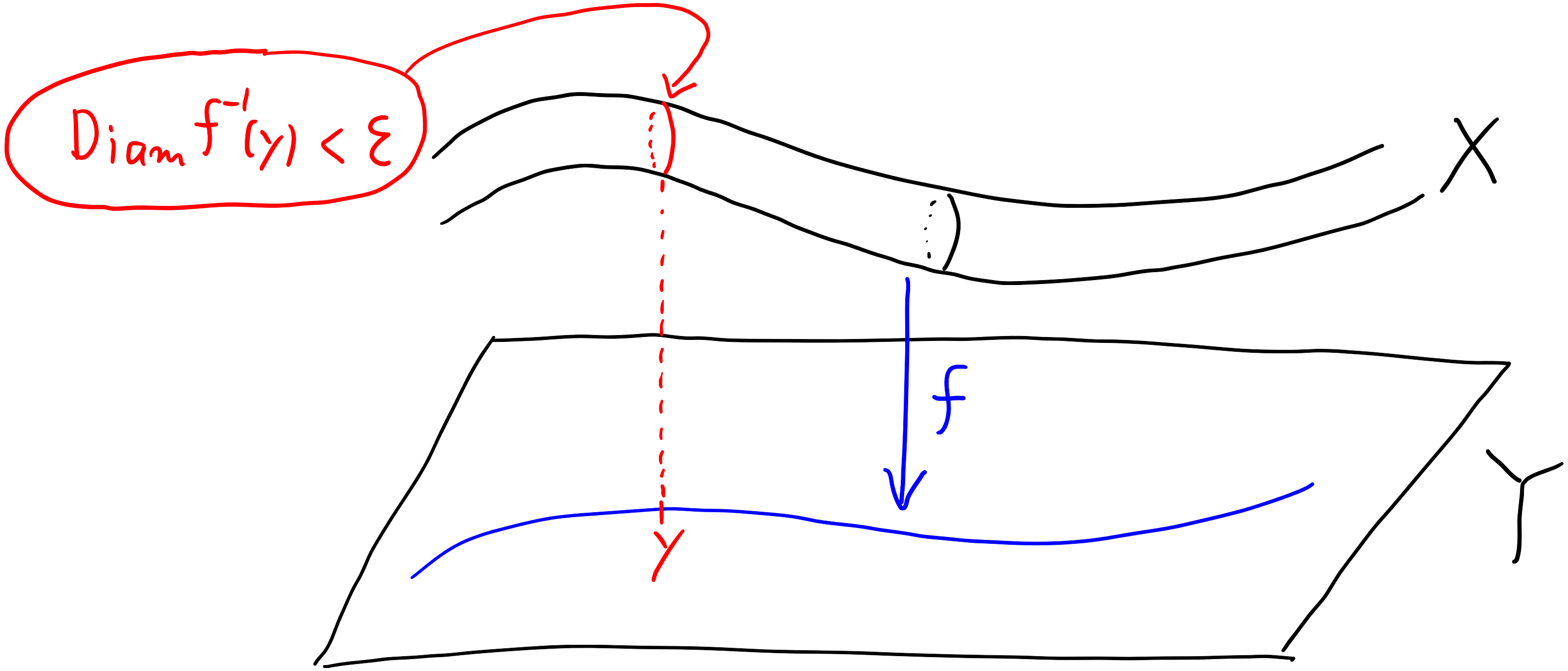
- $h_{\mathrm{top}}(X, \sigma) < \log |B|$.
- 全ての自然数 n で，$|P_n(X, \sigma)| \leq |B|^n$.

この時, X は力学系として $B^{\mathbb{Z}}$ に埋め込める.

6　古典次元論

(X, d)：コンパクト距離空間，$\varepsilon > 0$．連続写像 $f : X \to Y$ がε-**埋め込み**であるとは，

$$\forall y \in Y : \quad \mathrm{Diam}\, f^{-1}(y) < \varepsilon.$$



$(X, \mathbf{d})$ の ε-幅次元 $\mathrm{Widim}_\varepsilon(X, \mathbf{d})$ を，「X からの ε-埋め込み

$$f : X \to P$$

が存在する単体複体 P の次元の最小値」とする．

X の位相次元を次で定める．

$$\dim X = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{Widim}_\varepsilon(X, \mathbf{d}).$$

定理（Menger–Nöbeling 1931）

$\dim X < \frac{N}{2}$ なら，X は N 次元立方体 $[0,1]^N$ に位相的に埋め込める．

この古典次元論の力学化を考えたい．

7　力学系の埋め込み問題

単位区間 $[0,1]$ に対して

$$[0,1]^{\mathbb{Z}} := \cdots \times [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times \cdots ,$$

$$\sigma : [0,1]^{\mathbb{Z}} \to [0,1]^{\mathbb{Z}}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

$\left([0,1]^{\mathbb{Z}}, \sigma\right)$ は力学系（Hilbert 立方体上のシフト）．

問題：　任意に力学系 (X,T) が与えられたとき，$\left([0,1]^{\mathbb{Z}}, \sigma\right)$ に埋め込めるか判定せよ．

埋め込みに対する明らかな障害（周期点）：もし (X,T) が $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ に埋め込めるなら，各 $n \geq 1$ に対して，$P_n(X,T)$ は $[0,1]^n$ に位相的に埋め込める．

定理（Jaworski 1974）

周期点を持たない有限次元力学系は $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ に埋め込める．

では「有限次元」の仮定を外すとどうなる？

Auslander (1988) の質問：任意の極小力学系は $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ に埋め込めるか？

ただし，力学系 (X,T) が極小であるとは，任意の $x \in X$ に対して，その軌道

$$\{\ldots,\, T^{-2}x,\, T^{-1}x,\, x,\, Tx,\, T^2x,\, \ldots\}$$

が X 内で稠密であることとする．

X が有限集合の場合を除いて，極小力学系 (X,T) は決して周期点を持たない．

8　平均次元（Gromov 1999）

(X,T)：力学系，$\mathbf{d}$：X 上の距離．
自然数 N に対して

$$\mathbf{d}_N(x,y) := \max_{0\le n<N} \mathbf{d}(T^n x, T^n y).$$

(X,T) の平均次元を次で定める．

$$\mathrm{mdim}(X,T) := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{Widim}_\varepsilon(X,\mathbf{d}_N)}{N}\right).$$

K が良い空間（例：位相多様体，単体複体）なら，

$$\mathrm{mdim}\left(K^{\mathbb{Z}}, \text{シフト}\right) = \dim K.$$

特に，

$$\mathrm{mdim}\left([0,1]^{\mathbb{Z}}, \sigma\right) = 1.$$

力学系 (X,T) が力学系 (Y,S) に埋め込めるなら，

$$\mathrm{mdim}(X,T) \leq \mathrm{mdim}(Y,S).$$

したがって，$\mathrm{mdim}(X,T) > 1$ なら，(X,T) は $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ に埋めこめない．

定理（Lindenstrauss–Weiss 2000）

任意の実数$c \geq 0$に対して，平均次元がcの極小力学系が存在する．
特に，$c > 1$とすることで，$[0,1]^{\mathbb{Z}}$に埋め込めない極小力学系が存在する．

Lindenstraussはさらに踏み込んで，
Menger–Nöbelingの定理の力学系版を目指した．

N 次元立方体 $[0,1]^N$ の無限直積

$$([0,1]^N)^{\mathbb{Z}} = \cdots \times [0,1]^N \times [0,1]^N \times [0,1]^N \times \cdots$$

を考える．これはシフト写像によって力学系となる．

定理（Lindenstrauss 1999）

平均次元が $\frac{N}{36}$ 未満の極小力学系は $([0,1]^N)^{\mathbb{Z}}$ に埋め込める．

これは素晴らしい定理だが，$\frac{N}{36}$ は最良ではない．

定理（Gutman-T. 2020）

平均次元が $\frac{N}{2}$ 未満の極小力学系は $\left([0,1]^N\right)^{\mathbb{Z}}$ に埋め込める．

$\frac{N}{2}$ は最良である：

定理（Lindenstrauss–T. 2014）

平均次元が $\frac{N}{2}$ に等しい極小力学系で，$\left([0,1]^N\right)^{\mathbb{Z}}$ に埋め込めないものが存在する．

「極小」の条件を外すとどうなるか？

予想（Lindenstrauss–T. 2014）

力学系(X,T)が次の二つを満たすとせよ．

- $\mathrm{mdim}(X,T) < \frac{N}{2}$．
- 任意の自然数nで，$\dim P_n(X,T) < \frac{nN}{2}$．

この時，(X,T)は$\left([0,1]^N\right)^{\mathbb{Z}}$に埋め込める．

9 Gromovの構想

Gromovは開多様体上の幾何解析に平均次元を使いたかった．

> . . . my hopes of setting some branches of the Nevanlinna theory into a dynamical casting.

群Γが開多様体Mに作用しているとする．M上でΓ不変な偏微分方程式を考えて，解の空間をXとする．XはΓ作用を持つ．その平均次元を研究したい．

Γ作用に平均次元を定義しよう．$\Gamma = \mathbb{R}^k$とする．

$(X, \mathbf{d})$：コンパクト距離空間，$T : \mathbb{R}^k \times X \to X$：連続作用．部分集合$\Omega \subset \mathbb{R}^k$に対して

$$\mathbf{d}_\Omega(x, y) := \sup_{a \in \Omega} \mathbf{d}(T^a x, T^a y).$$

(X, T)の平均次元を次で定める．

$$\mathrm{mdim}(X, T) := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\lim_{L \to \infty} \frac{\mathrm{Widim}_\varepsilon \left(X, \mathbf{d}_{[0,L]^k}\right)}{L^k} \right).$$

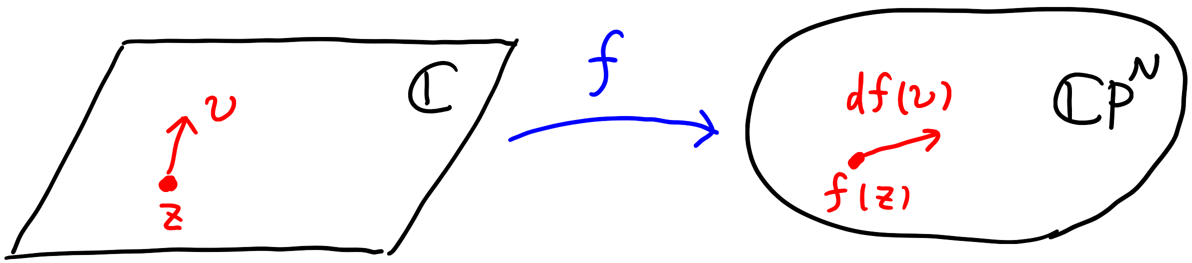
10　Brody 曲線の力学系

$\mathbb{C}P^N$：複素射影空間 with Fubini–Study 計量．

$$f = [f_0 : f_1 : \cdots : f_N] : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^N$$ ：正則写像.

$|df|(z)$：局所リプシッツ定数（$z \in \mathbb{C}$）．

$$|df|^2 = \frac{1}{4\pi} \Delta \log \left(|f_0|^2 + |f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2 \right).$$



$|df(v)| = |df|(z) \times |v|$

正則写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^N$ がBrody曲線であるとは，全ての点 $z \in \mathbb{C}$ で $|df|(z) \leq 1$ となること．

Brody曲線 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^N$ 全体を $\mathcal{B}_N$ とする．コンパクト開位相の下で，$\mathcal{B}_N$ はコンパクト距離化可能空間である．

$\mathcal{B}_N$ は自然な $\mathbb{C}$ 作用を持つ：

$$T : \mathbb{C} \times \mathcal{B}_N \to \mathcal{B}_N, \quad (a, f(z)) \mapsto f(z+a).$$

この作用の平均次元を調べたい．

Brody曲線 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^N$ に対して，エネルギー密度を次で定める．

$$\rho(f) := \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{\pi R^2} \sup_{a\in\mathbb{C}} \int_{|z-a|<R} |df|^2 \, dxdy \right).$$

そして

$$\rho(\mathbb{C}P^N) := \sup_{f\in\mathcal{B}_N} \rho(f).$$

定理（Matsuo–T. 2015, T. 2018）

$\mathbb{C}P^N$ 内のBrody曲線がなす力学系$(\mathcal{B}_N, T)$の平均次元は次で与えられる．

$$\mathrm{mdim}\,(\mathcal{B}_N, T) = 2(N+1)\rho(\mathbb{C}P^N).$$

$\rho(\mathbb{C}P^N)$ の具体的な値は分かっていない．$N=1$ の時は次を予想している．

$$\rho(\mathbb{C}P^1) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}\right)^{-2} = 0.6150\ldots.$$

11　エルゴード理論とのつながり

$\mathcal{B}_N$ 上の T 不変確率測度全体を $\mathscr{M}^T(\mathcal{B}_N)$ と書く．
連続関数 $\varphi : \mathcal{B}_N \to \mathbb{R}$ を次で定める．

$$\varphi(f) := \frac{1}{\pi}\int_{|z|<1} |df|^2 \, dxdy.$$

すると，

$$\rho(\mathbb{C}P^N) = \sup_{\mu \in \mathscr{M}^T(\mathcal{B}_N)} \int_{\mathcal{B}_N} \varphi \, d\mu.$$

したがって

$$\mathrm{mdim}\,(\mathcal{B}_N, T) = 2(N+1) \sup_{\mu \in \mathscr{M}^T(\mathcal{B}_N)} \int_{\mathcal{B}_N} \varphi\, d\mu.$$

なぜ平均次元の計算に不変測度が表れるのか？
平均次元とエルゴード理論を結びつける構造が隠れているように見える．

そこで，一般論に戻って考え直すことにする．
次の節では，簡単のため，力学系とは$\mathbb{Z}$作用のこととする．

12　変分原理

エントロピー理論の場合：

力学系 (X, T) 上の不変確率測度全体を $\mathscr{M}^T(X)$ とする．この時，

$$h_{\mathrm{top}}(X, T) = \sup_{\mu \in \mathscr{M}^T(X)} h_\mu(T).$$

$h_\mu(T)$ は Kolmogorov–Sinai エントロピー：確率測度 μ にしたがって点 $x \in X$ をランダムにとり，その軌道 $\{T^n x\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を考える．これを記述するのに必要な単位時間あたりのビット数が $h_\mu(T)$．

平均次元の場合：
(X,T)を力学系，X上の距離関数全体を$\mathscr{D}(X)$とする．$\mathbf{d}\in\mathscr{D}(X)$，$\mu\in\mathscr{M}^T(X)$，$\varepsilon>0$をとる．

レート歪み関数（Shannon）：
測度μにしたがってランダムに点$x\in X$をとり，その軌道$\{T^n x\}_{n\in\mathbb{Z}}$を考える．これを距離$\mathbf{d}$に関して誤差$\varepsilon$未満で記述するのに必要な単位時間あたりのビット数を$R(\mathbf{d},\mu,\varepsilon)$と書く．

レート歪み次元（Kawabata–Dembo）：

$$\operatorname{rdim}(X, T, \mathbf{d}, \mu) := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{R(\mathbf{d}, \mu, \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

二重変分原理（Lindenstrauss–T. 2019）

極小力学系 (X, T) に対して

$$\operatorname{mdim}(X, T) = \min_{\mathbf{d} \in \mathscr{D}(X)} \sup_{\mu \in \mathscr{M}^T(X)} \operatorname{rdim}(X, T, \mathbf{d}, \mu).$$

13　ポテンシャル付き変分原理

Brody 曲線の場合の公式

$$\mathrm{mdim}\,(\mathcal{B}_N, T) = 2(N+1) \sup_{\mu \in \mathscr{M}^T(\mathcal{B}_N)} \int_{\mathcal{B}_N} \varphi\, d\mu$$

には特別な関数 $\varphi : \mathcal{B}_N \to \mathbb{R}$ が表れていた．
このような関数（ポテンシャル）の持つ情報を理論に取り込む必要がある．

単体複体 P と点 $a \in P$ に対して，$\dim_a P$ を点 a における P の局所的な次元とする．

$(X, \mathbf{d})$：コンパクト距離空間，$\varphi : X \to \mathbb{R}$：連続関数．$\varepsilon > 0$．ポテンシャル付き ε-幅次元を次で定める．

$$\mathrm{Widim}_\varepsilon(X, \mathbf{d}, \varphi)$$
$$:= \inf_{\substack{f:X\to P \\ \varepsilon\text{-埋め込み}}} \left\{ \sup_{x\in X} \left(\dim_{f(x)} P + \varphi(x) \right) \right\}$$

ただし，P は単体複体を走る．

次に，(X,T)：力学系，$\varphi : X \to \mathbb{R}$：連続関数．$X$ 上の距離関数 $\mathbf{d}$ をとる．自然数 N に対して，

- $\mathbf{d}_N(x,y) := \max_{0\le n<N} \mathbf{d}(T^n x, T^n y)$,
- $S_N\varphi(x) := \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(T^n x)$.

ポテンシャル付き平均次元を次で定義する．

$$\begin{aligned} &\mathrm{mdim}(X,T,\varphi) \\ &:= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{Widim}_\varepsilon(X,\mathbf{d}_N,S_N\varphi)}{N}\right). \end{aligned}$$

ポテンシャル付き二重変分原理（T. 2020）

(X, T) が極小力学系なら，

$$\operatorname{mdim}(X, T, \varphi) = \min_{\mathbf{d}} \sup_{\mu} \left(\operatorname{rdim}(X, T, \mathbf{d}, \mu) + \int_X \varphi \, d\mu \right).$$

ここで，$\mathbf{d} \in \mathscr{D}(X)$，$\mu \in \mathscr{M}^T(X)$.

14　Brody曲線のエルゴード理論

$(\mathcal{B}_N, T)$：$\mathbb{C}P^N$ 内のBrody曲線のなす力学系．
次の関数 $\psi : \mathcal{B}_N \to \mathbb{R}$ を考える．

$$\psi(f) := -\frac{2(N+1)}{\pi} \int_{|z|<1} |df|^2 \, dxdy.$$

すると平均次元は

$$\mathrm{mdim}\,(\mathcal{B}_N, T) = \sup_{\mu \in \mathscr{M}^T(\mathcal{B}_N)} \int_{\mathcal{B}_N} (-\psi) d\mu.$$

予想

- $\mathrm{mdim}\,(\mathcal{B}_N, T, \psi) = 0$.
- 二重変分原理

$$\min_{\mathbf{d}} \sup_{\mu} \left(\mathrm{rdim}(\mathcal{B}_N, T, \mathbf{d}, \mu) + \int_{\mathcal{B}_N} \psi \, d\mu \right) = 0$$

が成り立ち，このミニマックスを達成する距離と測度$(\mathbf{d}, \mu) \in \mathscr{D}(\mathcal{B}_N) \times \mathscr{M}^T(\mathcal{B}_N)$が存在する．

ミニマックスを達成する$(\mathbf{d}, \mu)$をどうやって作るか？

- 距離は簡単である：$f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^N$に対して

$$\mathbf{d}(f, g) := \max_{|z| \le 1} d_{\mathbb{C}P^N}\left(f(z), g(z)\right).$$

- 格子$\Lambda \subset \mathbb{C}$に対して，作用$\Lambda \curvearrowright \mathcal{B}_N$の不動点集合を$\mathcal{B}_{N,\Lambda}$とする．これは有限次元空間．$\mathcal{B}_{N,\Lambda}$のハウスドルフ測度を$\mu_\Lambda$と書こう．

予想

- 格子 Λ を無限に大きくしていくときの，ハウスドルフ測度 μ_Λ の極限として，$(\mathcal{B}_N, T)$ 上の不変確率測度 μ が定まる．
- 先程の距離 d と，この測度 μ が，二重変分原理のミニマックスを与える．