

代数多様体と対称性

§1 K3曲面 $\times M_{24}$

§2 Enriques 曲面 $\times M_{12}$

§3 有限群から無限群へ

§4 Kummer 曲面の自己同型群

§5 Reid 曲面 mod p $\times M_{22} \text{ (?)}$

K3曲面とその関連と中心化

3/16/21 (火)

mini-history¹

Witt (30分)

Mathieu 群 M_{24} の確定

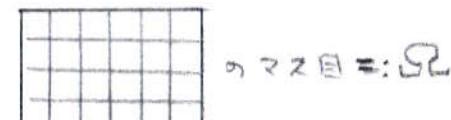
$S(4, 8, 24)$

----- $T_3 \subset P_8(\mathbb{R})$

Weil (1958)

K3の命名

Kummer-Kähler-1-平



$$|T_3| = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = 759$$

§1 K3曲面 $\times M_{24}$

コンパクト複素射影曲面 X

$K3 \Leftrightarrow$ 正則 symplectic 型式, 単連結

$$\omega_X \sim f(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$$

[13] (4) $\subset \mathbb{P}^3$, (2), (3) $\subset \mathbb{P}^4$, (2), (2), (1) $\subset \mathbb{P}^5, \dots$

[13] Fermat 4次曲面, Reid が 6次曲面

$$X: x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 0 \subset \mathbb{P}^3_{(x:y:z:t)}$$

$$Rd: \sum_{i=1}^6 x_i = \sum_{i < j} x_i x_j = \sum_{1 \leq i < j \leq k} x_i x_j x_k = 0$$

K3曲面とその仲間達を中心にして

mini-history 1

Witt (30年代)

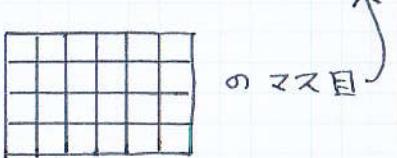
Mathieu群 M_{24} の確定

$S(4, 8, 24)$

Weil (1958)

K3の命名

Kummer-Kähler-水平



$$|\gamma_B| = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = 759$$

(Euler数=24)

§1 K3曲面と M_{24}

ユークリッド複素解析曲面 X

$K3 \Leftrightarrow$ 半正則 symplectic 型式, 半連続

$$\omega_X \sim +(\bar{z}_1, \bar{z}_2) dz_1 \wedge d\bar{z}_2$$

例) (4) $\subset \mathbb{P}^3$, (2), (3) $\subset \mathbb{P}^4$, (2), (2), (2) $\subset \mathbb{P}^5, \dots$

例) 例) Fermat 4次曲面, Reid 3種類の6次曲面

$$X : x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 0 \subset \mathbb{P}^3_{(x:y:z:t)}$$

$$Rd : \sum_1^6 x_i = \sum_{i < j} x_i x_j - \sum_{1 < i < k} x_i x_j x_k = 0$$

定理 (M. '88) 有限群 G についての同値

(1) G は symplectic ($G^* \omega = \omega$) にある K3 曲面 γ 作用である。

(2) G は $M_{24} = \{g \in \mathbb{S}_{24} \mid gB = B\}$ に

i) 互通固定点 $\gamma \in S$, ii) 軌道の個数 ≥ 5 となる γ が存在する。

(3) たとえば 111回の手足の γ の部分群と同型。

	$L_2(7)$	\mathbb{V}_6	\mathbb{G}_5	M_{24}	F_{384}	$H_{192} = N_{72} \cdot T_{48}$
位数	168	360	120	960		
構造	单纯	单纯	$2^4 \mathbb{V}_5$		可解	

§2 Fermat 4次曲面

$$(1) \text{ Aut}(X \subset \mathbb{P}^3) = \{[i^a, i^b, i^c, 1]\}, \mathbb{G}_4$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \text{symplectic} \\ \frac{a+b+c}{2} = \text{sgn } \sigma \end{matrix}$$

$$G = F_{384} = C_4^2 \cdot \mathbb{G}_4$$

(2)

1	2
3	
4	5

$$\{g \in M_{24} \mid g[i] = \boxed{i}, i = 1, \dots, 5\}$$

$$\cong F_{384} \quad (5 \text{番目の群})$$

$$\mathbb{D}^U \mathbb{I}^U \mathbb{I}^U \mathbb{I}^U \mathbb{I}^U \in \mathbb{S} \quad n=3$$

Reid 6次

$$\text{Aut}(Rd \subset \mathbb{P}^4) = \mathbb{G}_6 \supset \mathbb{V}_6$$

$$\mathbb{D}^U \mathbb{I}^U \mathbb{I}^U, \mathbb{D}^U \mathbb{I}^U \mathbb{I}^U \in \mathbb{B}$$

symplectic

1	2	5	-4
3	4	1	5

定理 (M.88) 有限群 G が巡回するとは同値

(1) G は symplectic ($G^* \omega = \omega$) である K_3 曲面に作用する。

(2) G は $M_{24} = \{g \in \mathbb{S}_{24} \mid gB = B\}$ に

i) 芽点固定点 ≤ 5 , ii) 軌道の個数 ≥ 5 となるように選ばれる。

(3) 以上の 111 個の群のうちの半分群と同型。

$L_2(7)$	\mathbb{V}_6	\mathbb{G}_5	M_{24}	F_{384}	$H_{192} = N_{72} \cdot T_{sp}$
位数	168	360	120	960	
構造	単純	$2^4 \mathbb{V}_5$		可解	

[13] Fermat 4 の問題

$$(1) \text{Aut}(x \subset \mathbb{P}^3) = \{[z^9, z^8, z^5, 1]\} \cdot \mathbb{G}_4$$

$$\Leftrightarrow \text{symplectic} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2} = \text{sgn } \sigma \quad G = F_{384} = C_4^2 \cdot \mathbb{G}_4$$

$$(2) \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \quad \left\{ g \in M_{24} \mid g[i] = i, i=1, \dots, 5 \right\} \cong F_{384} \quad (5 \text{番目の群})$$

① \cup ② \cup ③ \cup $\in \mathbb{B}$ の注意。

[13] Reid 6-2

$$\text{Aut}(Rd \subset \mathbb{P}^4) = \mathbb{G}_6 \supset \mathbb{V}_6$$

① \cup ② \cup ③, ④ \cup ② \cup ④ $\in \mathbb{B}$ symplectic

1	2	5	-4
3	4	5	

§2 Enriques 曲面 & M_{12}

代数曲線と周囲 Noether の問題

$$p_g = q = 0 \Rightarrow \text{有理的?}$$

Castelnuovo の答 (1896) $P_2 = q = 0 \Rightarrow$ 有理的
Enriques の反例: 6 面曲面が有名

例: \mathbb{P}^3

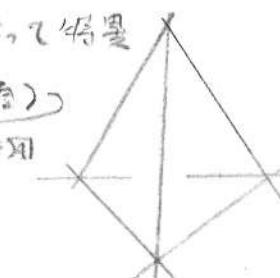
$$(x^2y^2z^2)$$

$$\bar{S} : xyzt(x^2+y^2+z^2+t^2) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2}\right) = 0$$

4 面体 $xyzt = 0$ の 6 面曲面 対象

正規化 $S \rightarrow \bar{S}, H_{192}$ (右側)

主成分の理解 (① 上) (方作用)



$$S = X/\varepsilon \quad K^3/\text{対称}$$

$$\text{Fix } \varepsilon = \emptyset$$

semi-symplectic 形式

$$\omega_S \sim f(z_1, z_2)(dz_1 \wedge dz_2)^{\otimes 2}$$

G 作用が semi-symplectic $\Leftrightarrow G^* \omega = \omega$

$\Leftrightarrow K_3$ 被覆 X が \mathbb{P}^3 上の symplectic

$$\text{Aut}^{\mathbb{P}} = \text{Cent}_{\text{Aut}^X}(\varepsilon) / \langle \varepsilon \rangle \quad \text{中心化群}$$

$$\text{Aut}^{so} = \frac{\text{Aut}^X}{\text{Aut}^X}$$

問題 111 個の極大群はすべて Enriques で用可能?

3.2 Enriques 曲面と M_{12}

代数曲面と関連する Noether の問題

$$p_g = q = 0 \Rightarrow \text{有理的?}$$

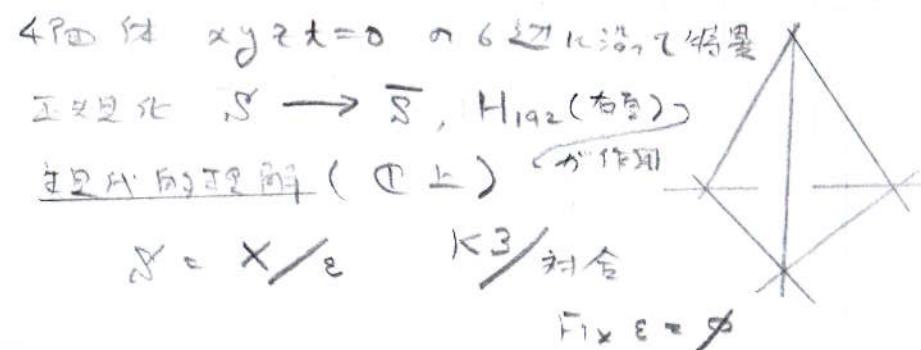
Castelnuovo の答 (1896) $P_2 = q = 0 \Rightarrow \text{有理的}$

Enriques の反例: 6次曲面が有名

例1と例2

$$(x^2y^2z^2t^2)$$

$$\overline{s} : xyzt(x^2+y^2+z^2+t^2) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2}\right) = 0$$



semi-symplectic 型式

$$\omega_S \sim f(z_1, z_2)(dz_1 \wedge dz_2)^{\otimes 2}$$

$$G \text{ が } S \text{ の semi-symplectic } \Leftrightarrow G^* \omega = \omega$$

$\Leftrightarrow K_3 \text{ 被覆 } X \wedge \omega_S \text{ 上の symplectic}$

$$\text{Aut } S = \text{Cent}_{\text{Aut } X}(\varepsilon) / \langle \varepsilon \rangle \quad \text{中心化群}$$

$$\text{Aut}^{ss} S = \frac{U}{\text{Aut}^s X}$$

問題 11次の極大群はどのくらいたい Enriques が作用可能?

13

14
5 $\frac{1}{6}$ 定理 (M.-Ohashi) 次の同値.

(1) G はある Enriques 曲面を semi-symp. で作用する.

(2) \overline{s} の 3-点の部分が部多群と同型.

~~$\overline{s}_6, \overline{s}_5, M_{20}, \overline{s}_{24}, H_{192}, N_{72}, \overline{s}_3$~~

但し, $M_{20} = 2^4 \overline{s}_5$ は指數の部分群で置き換える.

部分群由

$$G \in \mathcal{P}(S) = \mathbb{H}_2^{\oplus 24} \supset \langle S_3 \rangle =: G_0$$

$$A, B \in A \cup B \setminus A \cap B$$

でして $\Delta \cap \Gamma$ を除く

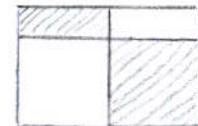
手数	0	8	12	16	24	$\frac{1}{6}$
個数	1	759	2576	759	1	2^{12}

symplectic な \overline{s} が M -A.A.

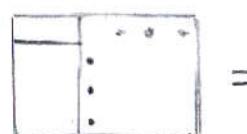
\Leftrightarrow 1-2-3-3 $G \curvearrowright S$ は 3-dodecad (Gal₁₂o₂)
で自身を 3-3-3. (小 Mathieu 群 M_{12} に \cong)

M-A.A. 定理

$$M\text{-A.A. で作用可} \Leftrightarrow \begin{cases} G \subset \overline{s}_6 \subset M_{12} \\ 24 \nmid |G| \end{cases}$$

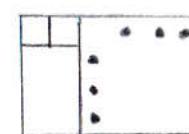


dodecad (24) の例

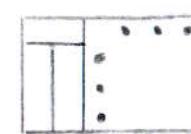


$$|\overline{s}_6| = 2^4 \cdot 45$$

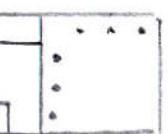
\Leftrightarrow 3-3-3-3 が M -A.A. で作用



$$|\overline{s}_6|$$



$$N_{72}$$



$$\overline{s}_5$$

3-Sylow
の正规化群

定理 (M-Oshikiri) 次の同値.

(1) G はある Enriques 曲面の semi-symp. 作用.

(2) Δ の 3 本の部分群と同型.

~~$\nabla_6, \mathfrak{S}_5, M_{24}$~~ ~~$\nabla_{4,4}, H_{12}, N_{12}$~~

但し, $M_{24} = 2^4 \nabla_6$ は指數の部分群で置換える.

部族空間						
重24	0	8	12	16	24	計
A, B	個数	1759	2576	259	1	2^{12}

$A \cup B \setminus A \cap B$
 \rightarrow 部族空間

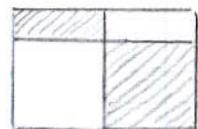
symplectic な $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{S}'$ が M -A.A.

\Leftrightarrow 3 本の $G \cong \mathfrak{S}'$ は dodecad (Gal₁₂ の 2)

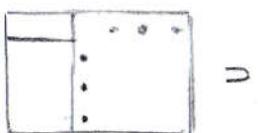
で構成される. (小 MacLane 群 M_{12} の $n > 3$)

M-A.O. 定理

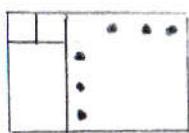
M -A.O. 作用可 $\Leftrightarrow \{G \subset \mathfrak{S}_6 \subset M_{12}\}$
 $24 \nmid |G|$



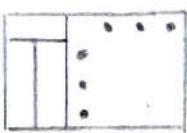
dodecad (24) の例



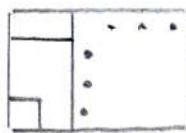
$$|\mathfrak{S}_6| = 2^9 \cdot 45$$



$$\nabla_6$$



$$N_{12}$$



$$\mathfrak{S}_5$$

$\therefore 3$ 本の群が M -A.O. 作用

3-Sylow
の正规化群

§4 有限群から無限離散群へ

驚き! $\nabla_6 \subset N_{12}$ の作用 3 本 Enriques 曲面は同じ

$\nabla_6, \mathfrak{S}_5 \subset \text{Aut}^{\text{ss}}(\mathcal{X})$

$$X \begin{cases} x^2 - xyz = u^2 - \mu uvw \\ y^2 - xyz = v^2 - \mu wuv \\ z^2 - xyz = w^2 - \mu uvw \end{cases} \subset \mathbb{P}_{(xyzuvw)}^5 \quad \lambda, \mu = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\mathcal{S} = X / [111-1-1-1] \quad \text{"Hesse-Godeaux"}$$

$$\text{定理 (M-O.) } \text{Aut}^{\text{ss}} \mathcal{S} = \nabla_6 *_{\frac{3}{2} C_4} N_{12} \quad \begin{matrix} \text{(相似)} \\ \text{アズレガム} \\ \text{(融合種)} \end{matrix}$$

$$\text{証明} \quad \text{SL}(2, \mathbb{Z}) = C_4 *_{C_2} C_6 \text{ を直積.}$$

格子

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) \oplus E_8$$

$$U + \langle -2 \rangle$$

$$U + (\oplus E_8) = H^2(S, \mathbb{Z}) / C_2$$

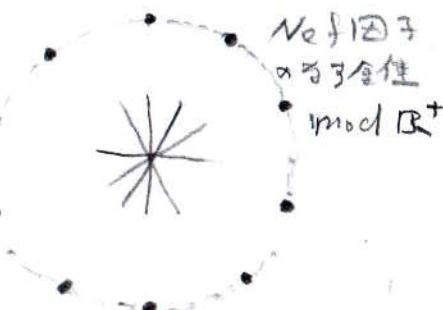
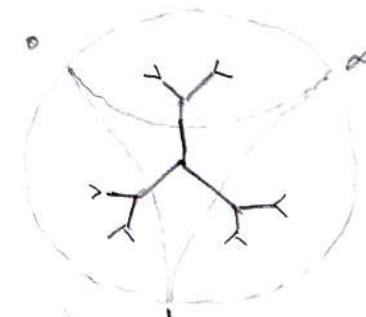
非 Indic

平面

3 棱柱木

9 棱柱木

10 棱柱木



Nef 因子
交叉結合

mod IR+

§4 有限群から無限離散群へ

15

驚き! $\mathcal{V}\mathcal{L}_6 \times \mathcal{N}_{72}$ の作用で Enriques 曲面は同じ

$$\mathcal{V}\mathcal{L}_6, \mathcal{N}_{72} \subset \text{Aut}^{\text{ss}}(\mathcal{S})$$

$$X \left\{ \begin{array}{l} x^2 - xyz = u^2 - \mu vw \\ y^2 - xz = v^2 - \lambda wu \\ z^2 - xy = w^2 - \mu uv \end{array} \right. \subset \mathbb{P}_{(xyzuvw)}^5$$

$$\mathcal{S} = X / [111-1-1-1] \quad \text{"Hesse-Godeanu型"}$$

の表示が見えた $3^2 C_4 = \mathcal{V}\mathcal{L}_6 \times \mathcal{N}_{72}$. 2通りの表現.

定理(M-0.) $\text{Aut}^{\text{ss}} \mathcal{S} = \mathcal{V}\mathcal{L}_6 *_{3^2 C_4} \mathcal{N}_{72}$ (相乗) アルゴリズム (融合計算)

証明) 1) $SL(2, \mathbb{Z}) = C_4 *_{C_2} C_6$ を真似る.

格子

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right)$$

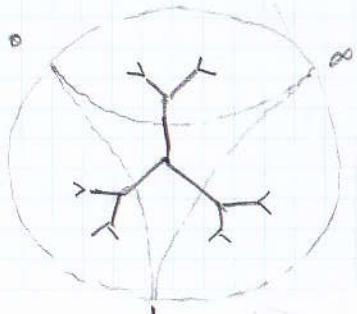
$$U + \langle -2 \rangle$$

$$U + (\mathbb{R} E_8) = H^2(S, \mathbb{Z}) / C_2$$

非Indic

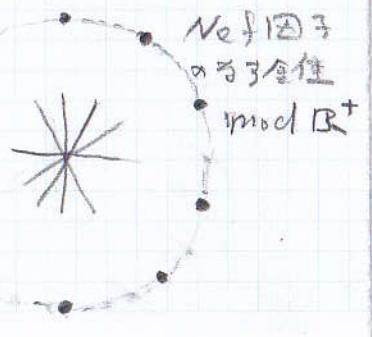
平面

3面樹木



9面空洞

10面樹木



樹木の泡点集合の Voronoi 胞体の分割

$SL(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright 3$ 面樹木 $\text{Aut} \mathcal{S} \curvearrowright 10$ 面樹木

$$\begin{array}{ccc} \text{undfold} & \stackrel{i}{\longrightarrow} & \stackrel{\omega}{\longrightarrow} \\ \text{商} & \stackrel{c_2}{\longrightarrow} & \stackrel{w}{\longrightarrow} \\ c_4 & & c_6 \\ \mathcal{V}\mathcal{L}_6 & \stackrel{3^2 C_4}{\longrightarrow} & \mathcal{N}_{72} \end{array}$$

実質自由性 $\text{Ker } [SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \cdot G_3]$

$\cong F_2 = \pi_1(\text{Riemann 球} \setminus \{0, 1, \infty\})$

$\text{Ker } [\text{Aut}^{\text{ss}} \mathcal{S} \rightarrow G_6]$

$\cong F_9 = \pi_1(\text{Riemann 球} \setminus \{10\text{点}\})$

問題 $\text{Aut} \mathcal{S}$ が実質自由な Enriques 曲面を分類せよ. (v.c.d. = 1)

(参考) 常 k v.c.d. ($\text{Aut} \mathcal{S}$) ≤ 8

v.c.d. = 0 (有限群) は Kondo (1986) が分類

mini-history 2 (Kummer サイト)

Fresnel (1822) 光の波曲面

16特異点を持つ 4-2曲面

Hamilton (1833) 4本の rope (2重2次曲線)

Göpel (1847), Cayley (1848)

Kummer (1864) 312ラテラル, 一般型

Kleinの曲面 (1885) 双有理自己同型群

正則曲面上

Kondo (1998) 解決

樹木の頂点集合の Voronoi 胞体の系に分割

$SL(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright 3$ 棵樹木 $\text{Aut } \mathcal{S} \curvearrowright 10$ 棵樹木

$$\begin{array}{c} \text{orbit} \\ \text{商} \end{array} \quad \begin{array}{c} i & e_2 & w \\ \circ \longrightarrow \circ & & \\ c_4 & & c_6 \end{array} \quad \begin{array}{c} [t_{10}] & & [t_{10}] \\ \circ \longrightarrow \circ & & \\ \mathbb{D}_6 & 3^2 c_4 & N_{12} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{実質自由性} \quad & \text{Ker } [SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}\mathbb{G}_3] \\ & \cong F_2 = \pi_1(\text{Riemann 球} \setminus \{0, 1, \infty\}) \\ \text{Ker } [\text{Aut } \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{G}_6] \\ & \cong F_9 = \pi_1(\text{Riemann 球} \setminus \{10 \text{ 点}\}) \end{aligned}$$

問題 $\text{Aut } \mathcal{S}$ が 実質自由な Enriques 曲面を 分類せよ. (v.e.d. = 1)

(参考) 常 κ v.e.d. ($\text{Aut } \mathcal{S}$) ≤ 8
 $v.e.d. = 0$ (有限群) は Kondo (1986) が 分類.

mini-history 2 (Kummer サイト)

Fresnel (1822) 光の波曲面
 16 特異点をもつ 4-2 曲面

Hamilton (1833) 4 本 + rope (2 重 2-2 曲線)

Göpel (1847), Cayley (1848)

Kummer (1864) 3 重 \times -タ旋後, 一般型

Klein の問題 (1885) 双有理自己同型群を求める

Kondo (1998) 解決

mini-history 2 (群論 サイト)

Mathieu (1861) 5 重可移群 M_{12}, M_{24}

Tanaka (1968) J_2 100 支置換群 $\times 12$
 新しい散在型算群

Higman-Sims (1969) 別の 100 支置換群
 $\text{Aut}(HS^{+3})$

Conway 群 (1968, 69), Leech 群 (1983)

§5 (古典) Kummer 曲面の(無限)自己同型群

C 種数 2 の Riemann



曲面

$$\text{Jac } C = \mathbb{P}^2 / (\text{固定點})$$

\cup ④ 主偏極アーベル曲面

12 ④ 16 つの

$$\Phi_{20}: \text{Jac } C \xrightarrow{\sim} \overline{K_m} \subset \mathbb{P}^3$$

の像が (古典) Kummer 曲面. 16 つの 2 点の像で構成.

Klein の問題 (誤謬) 非標準化 K_m の半葉を構成する 12 の自己同型群を求めよ.

mini-history 2 (群論サイト)

Mathieu (1861) 5重の移群 M_{12}, M_{24}

— — —
Tanko (1968) J_2 100の置換群と12
新しい散在型群

Higman-Sims (1969) 別の100の置換群
Aut(HSグラフ)

Conway群 (1968, 69), Leechルート (1973)

§5 (古典) Kummer曲面の(無限)自己同型群



種数2の Riemann曲面

$$\text{Jac } C = \mathbb{P}^2 / (\text{周期群})$$

(4)
主偏極アーベル曲面

12(12+2)個

$$\Phi_{20}: \text{Jac } C \xrightarrow{\cong} \overline{Km}(C) \subset \mathbb{P}^3$$

の像が(古典) Kummer 曲面. 16個の2点
の像で構成.

Kleinの問題(誤謬) 非標準化 $\overline{Km}(C)$
の半葉多様体と12の自己同型群を求めよ.

L7

$\overline{Km}(C) \subset \mathbb{P}^3$ は 16本の直線 (2重2次曲線)

$\overline{Km}(C)$ は $16+16=32$ 本の \mathbb{P}^1 もつ. さて

$$\text{モデルは } (*) \sum_1^6 x_i^2 = \sum_1^6 \lambda_i x_i^2 = \sum_1^6 \lambda_i^2 x_i^2 = 0$$

但し, $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ は $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ の

Weierstrass 方程, $(16_c - 16_o)$ で置

定理 (金剛, 1998)

(+ Ohashi (2009) の備考)

- 一般的の Kummer 曲面 の自己同型群は

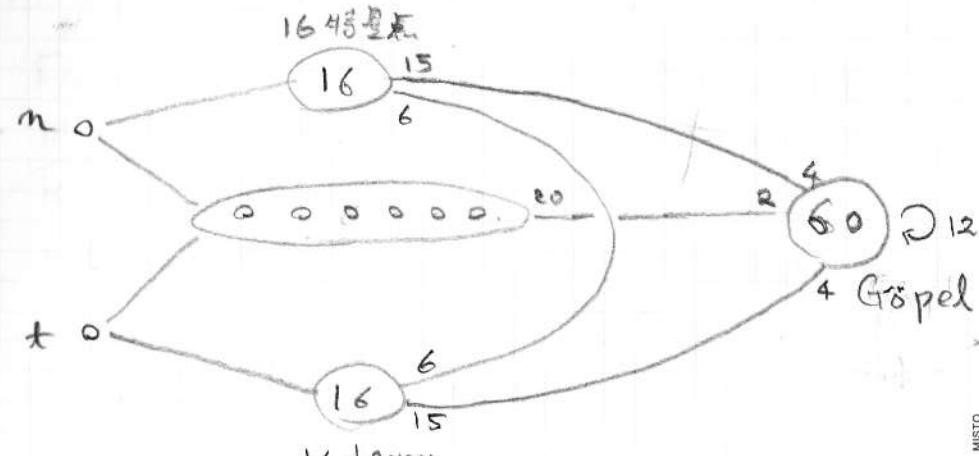
16個の projection, 16個の correlation,

60個の Göpel 対合, 192個の Weber 対合,

(+) 7つの星で $\mathbb{Z}/2^5$ の作用

で生成される.

HSグラフ, ヘテラメタ $(100, 22, 0, 6)$ の関係



$(16_c - 16_o)$ の Göpel 部分 $2^{12} \times 335$ 個 正則グラフ

$Km(C) \subset \mathbb{P}^3$ は 16 本の trope (2重2次曲線)

$Km(C)$ は $16+16=32$ 本の \mathbb{P}^1 もつ。ベクトル

$$\text{モデルは } (*) \quad \sum_1^6 x_i^2 = \sum_1^6 \lambda_i x_i^2 = \sum_1^6 \lambda_i^2 x_i^2 = 0$$

但し, $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ は $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ の
Weyl's theorem. $(16_6 - 16_6)$ 配置

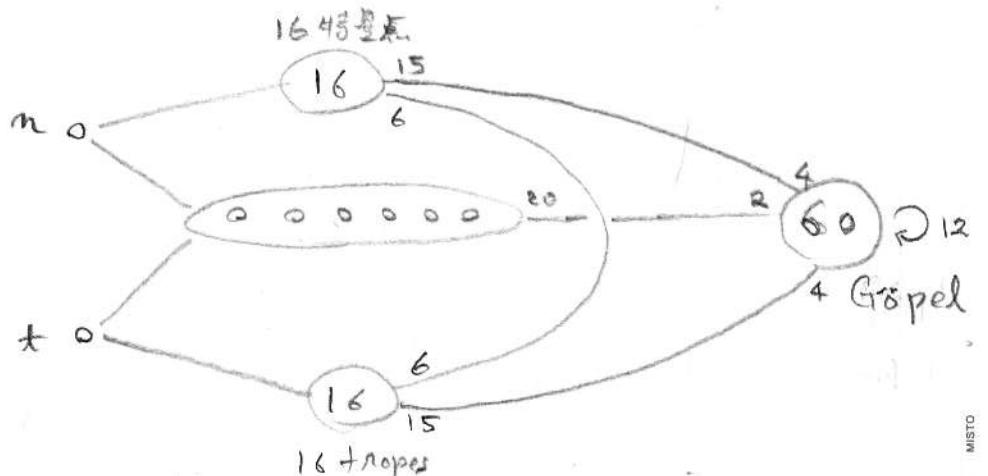
定理 (金銅, 1998) (+ Ohashi (2009) の観察)

- 一般の Kummer 曲面の自同型群は

16 つの projection, 16 つの correlation,
60 つの Gopel 対合, 192 つの Weber 対合,
 $(+)$ 7 つ星までの 2^5 の作用

で生成される。

HS グラフ, パラメータ $(100, 22, 0, 6)$ の関係



$(16_6 - 16_6)$ が Gopel を部分 $2^{22} \times 3^3$ 強正則グラフ

証明 $X = Km(C)$ の Picard 等子を拡大 Leech
群 (等長的 κ) に埋め込み, Conway & Leech κ -L,
Borcherds 理論 (1987) を適用.

$\text{Pic}(Km(C)) \hookrightarrow U + (\text{負 Leech})$

符号数 $(1, 16)$ $(1, 25)$

$16+16=32$ 本の $(-2)\mathbb{P}^1 \mapsto$ 32 本の Leech 群
(以下 証略)

Borcherds (1998) の式

$$\text{Aut}(Km(C)) = (W. 2^{25}) * C_2^{*6}$$

但し, W は $(16+16+60)$ の対合が生成された群.

M. (最近) "Aut(Km(C)) = W. \langle 192 \text{ Weber}, 2^5 \rangle"

(参) HS グラフの頂点を削除, そして M_{22} がその構成

$$① \longrightarrow \begin{matrix} 22 \\ 77 \end{matrix} \quad B' \subset \mathcal{O}_6(S_{22}) \quad 77 = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{6 \cdot 5 \cdot 4}$$

$n=22 \times 77$ は M_{22} グラフ ($\begin{matrix} S & S' \\ 0 & 0 \end{matrix}$)
 $\Leftrightarrow S_0 S' = \emptyset$
def.

$U_6 \subset M_{22}$ が 4 用いて 3 軌道

V	H	
•		
•		
•		

V	H	•	•
•			
•			
•			

etc.

V	H	•	•
•			
•			

etc.

*

16 tropes

60 Gopel

$n = (440^{22})$, 16 特異点は $[00], \dots, [33]$.

証明 $X = \text{Km } C \text{ or Picard 格子を拡大 Leech}$

κ (等長的 κ) 増大 κ^2 , Conway & Leech 1-1-1,
Borcherds 理論(1997) を適用.

$\text{Pic}(\text{Km } C) \hookrightarrow U^+(\text{更 Leech})$

符号数 $(1, 16)$ $(1, 25)$

$16+16=32$ 本の $(-2)D^4$ $\mapsto 32$ 本の Leech ハーフ
(以下証明)

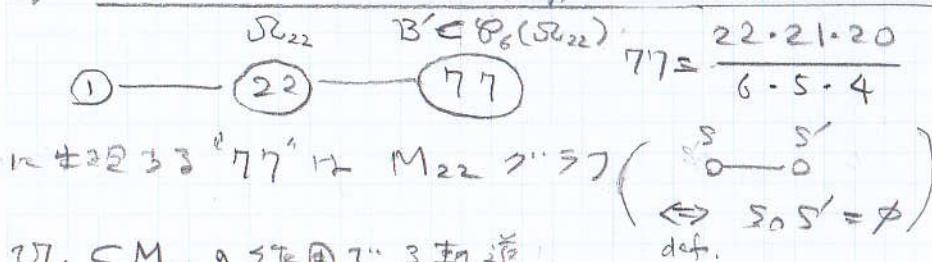
Borcherds (1998) の証明

$$\text{Aut}(\text{Km } C) = (W, 2^5) * C_2^{*6}$$

但し, W は $(16+16+6)$ 本の対合が生成された群.

M. (最近) " $\text{Aut}(\text{Km } C) = W, \langle 192 \text{ Weber}, 2^5 \rangle$ "

(参) HS グラフの頂点多面体と M_{22} からの構成



$U_6 \subset M_{22}$ の作用する 3 軌道

V	H
•	
•	
•	

V	H
•	• •
•	•
•	•

etc.

V	H
•	•
•	•
•	•

etc.

$$n = (440^{22}), 16 \text{ 特異点} \in [00], \dots, [33].$$

§ 6 Reid 曲面 mod 3, 5 $\in M_{22}$ グラフ

$$Rd : \sum_{i=1}^6 x_i = \sum_{i,j} x_i x_j = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k = 0 \subset \mathbb{P}_{(2)}^5$$

$Rd \bmod p \quad p \neq 2, 3, 5 \Rightarrow$ 非特異

$p = 2, 3, 5 \Rightarrow$ 特異ながり有理 2 重点のみ
非特異化 Rd_p は \mathbb{F}_p 上の K_3 曲面

mod 3

特異点 $(111-1-1-1)$

等の 10 点 $\cong A_2$

他

15 本の conic

mod 5

$(\square 11111)$ 等

76 点 $\cong A_1$

36 直線

(symmetric 配置)

Rd_p 上の $20+15=35$ 本

基本 内配置 4 価奇数

$$\binom{[7]}{4}$$

M_{22} グラフ
92 会員

$$4 G \circledcirc 35 \xrightarrow{12} \circledcirc 42 \circledcirc$$

定理 Rd_3, Rd_5 は 7 つの反射 σ が作用 (1)

$$\text{Aut}(Rd_3) = \langle \sigma_4, \sigma_7, \sigma_7 \rangle$$

$$\text{Aut}(Rd_5) = \langle \sigma_3, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_{12}, \sigma_{15}, \sigma_7 \rangle$$

$$\text{Aut}(Rd_2) \cong (\mathbb{G}_6.2) * \frac{3^2 D_8}{3^2 C_4}$$

$O_2(1, 20)$ の外鏡映部分と一致 (Borcherds 実用化)

§ 6 Reid 曲面 mod 3, 5 & M_{22} グラフ

10

$$Rd: \sum_{i=1}^6 x_i = \sum_{i,j} x_i x_j = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k = 0 \\ \subset \mathbb{P}_{(x)}^5$$

$Rd \bmod p \quad p \neq 2, 3, 5 \Rightarrow$ 非帰墨

$p=2, 3, 5 \Rightarrow$ 星をか有理2重点のみ
非帰墨化 Rd_p は \mathbb{F}_p 上の K_3 曲面

$\bmod 3$

$\bmod 5$

帰墨点 $(111-1-1-1)$

等の 10 点 $\cong A_2$

(011111) 等

76 点 $\cong A_1$

他

15 本の conic

36 直線
(symmetries)

Rd_p 上の $20+15=35$ 本

$6+36=42$ 本

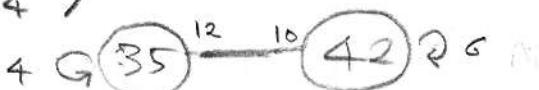
基本 内配置

4 四奇グラフ

無名グラフ

$\binom{[7]}{4}$

M_{22} グラフ
の 2 分割



定理 Rd_3, Rd_5 は 7 つの軌道群が作用 (!)

$$\text{Aut}(Rd_3) = \langle \sigma_4, \sigma_7, \sigma_7 \rangle$$

$$\text{Aut}(Rd_5) = \langle \sigma_3, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_{12}, \sigma_{15}, \sigma_7 \rangle$$

$$\text{Aut}(Rd_2) \cong (\mathbb{Z}/2) * \frac{3^2 D_8}{3^2 C_4}$$

$O_2(1, 20)$ の外鏡映部分と一致 (Borchens TRUTH)

まとめ

① Galaxy 符号や Mathieu 群は $K_3 + 5$ が欠けてる。

② Leech 符号や Conway 群は もともと欠けてる。ただし, K_3 は 2 通りやうなさる。

③ 固定点、作用素代数 $\sqrt[4]{\cdot}$ や \pm スターワークは

まとめ

① Galay 符号 や Mathieu 群は
K₃ とよく似ている。

② Leech 符号 や Conway 群は
もともとよく似ている。ただし, K₃
と違う点が 3 つある。

③ 固定点、作用素代数 V^{\natural} や
モースターワーク群は

言葉せなかたこと、また出来てないこと、...

- K₃ 曲面上のベクトル束のモジュライ
高次元正則 symplectic 多様体
今日の講義の高次元版?
- 3 次元 Fano 多様体、特に,
種類数 12 の V_{22} .
Debarre-Voisin 多様体を介して
 M_{22} と関係?

ご清聴ありがとうございました!

テーマと文献

主題： $K3$ 曲面の対称性と有限単純群の（いくつかの）関係

参考にした文献

[R] Mark Ronan, Symmetry and the monster: one of the greatest
quests of mathematics, 2006, Oxford Univ. Press.

（邦訳「シンメトリーとモンスター 数学の美を求めて」）

[K] E. Kummer, Über die Flächen vierten Grades mit sechzehn
singulären Punkten, Monat. d. König. Preuss. Akad. Wiss.
Berlin, 1864.

（16 個の特異点をもつ 4 次曲面について）

訂正 (3箇所)

- p.1, l.4: S(5, 8, 24)
- p.3, l.7: 定義式の係数に虚数単位を挿入.

$$\bar{S} : xyzt(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + \sqrt{-1}x^2y^2z^2t^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} \right) = 0$$

- p.7, l.3–4: Janko (1966) J_1 を挿入.