代数多様体と対称性

§1 K3曲面と M_{24}

§2 Enriques曲面と M_{12}

§3 有限群から無限群へ

§4 Kummer曲面の自己同型群

§5 Reid曲面 mod p と M_{22}グラフ

K3曲面とその仲間達を中心にして

3/16/21(火)

mini-history 1

Witt (30's)

Mathieu群 M_{24} の構成

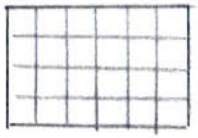
$S(4,8,24)$

$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}_8(\Omega)$

Weil (1958)

K3の命名

Kummer-Kähler-小平


のマス目 $=: \Omega$

$$|\mathcal{B}| = \frac{24\cdot23\cdot22\cdot21\cdot20}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4} = 759$$

§1 K3曲面と M_{24}

コンパクト複素解析曲面 X

K3 $\Longleftrightarrow$ ∃正則symplectic型式, 単連結

$$\omega_X \sim f(z_1, z_2)\, dz_1 \wedge dz_2$$

$\boxed{\text{例}}$ $(4) \subset \mathbb{P}^3$, $(2)\cap(3) \subset \mathbb{P}^4$, $(2)\cap(2)\cap(2) \subset \mathbb{P}^5$, ...

$\boxed{\text{例の例}}$ Fermat 4次曲面, Reid対称6次曲面

$X : x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 0 \subset \mathbb{P}^3_{(x:y:z:w)}$

$\mathrm{Rd} : \sum_{1}^{6} x_i = \sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = 0$

K3曲面とその仲間達を中心にして

mini-history 1　　Witt (30年代)

Mathieu群 M_{24} の確定

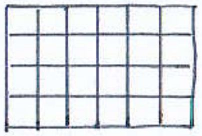
$S(4,8,24)$

------------　$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}_8(\Omega)$

Weil (1958)

K3の命名

Kummer・Kähler・小平



のマス目

$$|\mathcal{B}| = \frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4} = 759$$

(Euler数=24)

§1 K3曲面と M_{24}

コンパクト複素解析曲面　X

K3 $\Longleftrightarrow$ ∃ 正則 symplectic 型式, 単連結

$$\omega_X \sim f(z_1, z_2)\, dz_1 \wedge dz_2$$

$\boxed{\text{例}}$　$(4) \subset \mathbb{P}^3$, $(2)\cap(3) \subset \mathbb{P}^4$, $(2)\cap(2)\cap(2) \subset \mathbb{P}^5$, …

$\boxed{\text{例の例}}$　Fermat 4次曲面, Reid 対称6次曲面

$$X : x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 0 \subset \mathbb{P}^3_{(x:y:z:t)}$$

$$Rd : \sum_{1}^{6} x_i = \sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = 0$$

$\boxed{\text{定理}}$ (M.'88) 有限群 G に対して次は同値

(1) G は symplectic ($G^*\omega = \omega$) にある K3 曲面に作用できる。

(2) G は $M_{24} = \{ g \in \mathfrak{S}_{24} \mid g\mathcal{B} = \mathcal{B} \}$ に

i) 共通固定点をもち, ii) 軌道の個数 ≥ 5

となるように埋込める。

(3) 次の 11個の群のどれかの部分群と同型.

	$L_2(7)$	$\mathfrak{A}_6$	$\mathfrak{S}_5$	M_{20}	F_{384} H_{192} ・・ N_{72} ・ T_{48}
位数	168	360	120	960	
構造		単純		$2^4\mathfrak{A}_5$	可解

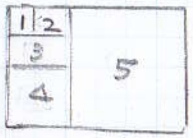
$\boxed{\text{例}}$ Fermat 4次曲面

(1) $\mathrm{Aut}(X \subset \mathbb{P}^3) = \{ [i^a, i^b, i^c, 1] \} . \mathfrak{S}_4$

symplectic

$\Longleftrightarrow i^{a+b+c} = \mathrm{sgn}\,\sigma$　　$G = F_{384} = C_4^2 . \mathfrak{S}_4$

(2)



$\{ g \in M_{22} \mid g\boxed{i} = \boxed{i},\ i = 1, \dots, 5 \}$

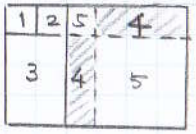
$\cong F_{384}$ (5番目の群)

$\boxed{1} \cup \boxed{2} \cup \boxed{3} \cup \boxed{4} \in \mathcal{B}$ に注意.

$\boxed{\text{例}}$ Reid 6次

$\mathrm{Aut}(Rd \subset \mathbb{P}^4) = \mathfrak{S}_6 \supset \mathfrak{A}_6$

symplectic



$\boxed{1} \cup \boxed{2} \cup \boxed{3}$, $\boxed{1} \cup \boxed{2} \cup \boxed{4} \in \mathcal{B}$

$\boxed{\text{定理}}$ (M.'88) 有限群Gに対して次は同値

(1) Gはsymplectic ($G^*\omega=\omega$) にあるK3曲面に作用できる。

(2) Gは $M_{24}=\{g\in\mathfrak{S}_{24} \mid gB=B\}$ に

i) 共通固定点をもち, ii) 軌道の個数 ≥ 5

となるように埋込める。

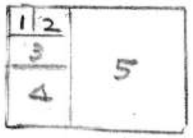
(3) 次の11個の群のどれかの部分群と同型.

	$L_2(7)$	$\mathfrak{A}_6$	$\mathfrak{S}_5$	M_{20}	F_{384} H_{192} ・・ N_{72} ・ T_{48}
位数	168	360	120	960	
構造		単純		$2^4\mathfrak{A}_5$	可解

$\boxed{\text{例}}$ Fermat 4次曲面

(1) $\mathrm{Aut}(X\subset\mathbb{P}^3)=\{[i^a,i^b,i^c,1]\}.\mathfrak{S}_4$

symplectic $\Leftrightarrow$ $i^{a+b+c}=\mathrm{sgn}\,\sigma$ $\qquad G=F_{384}=C_4^2.\mathfrak{S}_4$

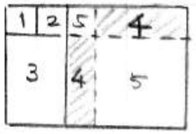
(2)  $\{g\in M_{22} \mid g\boxed{i}=\boxed{i},\ i=1,\dots,5\}$

$\cong F_{384}$ (5番目の群)

①$\cup$②$\cup$③$\cup$④ $\in\mathfrak{B}$ に注意.

$\boxed{\text{例}}$ Reid 6次

$\mathrm{Aut}(Rd\subset\mathbb{P}^4)=\mathfrak{S}_6\supset\mathfrak{A}_6$ symplectic



①$\cup$②$\cup$③, ①$\cup$②$\cup$④ $\in B$

§2 Enriques曲面と M_{12}

代数曲面に関するNoetherの問題

$p_g=q=0 \Rightarrow$ 有理的?

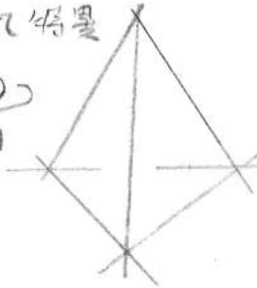
Castelnuovoの答 (1896) $P_2=q=0\Rightarrow$ 有理的

Enriquesの反例 $\qquad$ 6次曲面が有名

$\boxed{\text{例の例}}$

$\bar{S}: xyzt(x^2+y^2+z^2+t^2)+(x^2y^2z^2t^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}\right)=0$

4面体 $xyzt=0$ の6辺に沿って特異



正規化 $S\to\bar{S}$, H_{192}(有名)が作用

幾何的理解 (①上)

$S=X/\varepsilon$ $\qquad$ K3/対合

$\mathrm{Fix}\,\varepsilon=\emptyset$

semi-symplectic 型式

$\omega_S\sim f(z_1,z_2)(dz_1\wedge dz_2)^{\otimes 2}$

G作用がsemi-symplectic $\Leftrightarrow$ $G^*\omega=\omega$

$\Leftrightarrow$ K3被覆Xへの持ち上げがsymplectic

$\mathrm{Aut}\,S=\mathrm{Cent}_{\mathrm{Aut}X}(\varepsilon)/\langle\varepsilon\rangle$ 中心化群

$\mathrm{Aut}^{ss}S=\_\_\_\_\_\ \mathrm{Aut}^sX\ \_\_\_\_\_$

問題 11個の極大群はそれぞれEnriquesに作用可能か?

§2 Enriques 曲面と M_{12}

代数曲面に関するNoetherの問題

$p_g = q = 0 \Rightarrow$ 有理的？

Castelnuovo の答 (1896)　$P_2 = q = 0 \Rightarrow$ 有理的

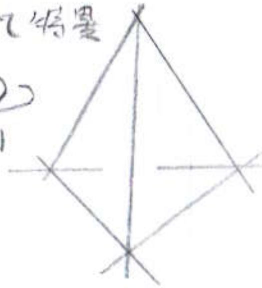
Enriques の反例　　6次曲面が有名

$\boxed{\text{例の例}}$

$$\bar{S}: xyzt(x^2+y^2+z^2+t^2) + \underbrace{x^2y^2z^2t^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}\right) = 0$$

4面体 $xyzt=0$ の6辺に沿って特異

正規化 $S \to \bar{S}$, H_{192} (有限) が作用



現代的理解 ($\mathbb{C}$上)

$S = X/\varepsilon$　　K3/対合

$\mathrm{Fix}\,\varepsilon = \emptyset$

semi-symplectic 形式

$$\omega_S \sim f(z_1,z_2)(dz_1\wedge dz_2)^{\otimes 2}$$

G作用が semi-symplectic $\Leftrightarrow G^*\omega = \omega$

$\Leftrightarrow$ K3被覆Xへの持ち上げが symplectic

$$\mathrm{Aut}\, S = \mathrm{Cent}_{\mathrm{Aut}\,X}(\varepsilon)/\langle\varepsilon\rangle \quad \text{中心化群}$$

$$\cup \qquad\qquad \cup$$

$$\mathrm{Aut}^{ss} S = \underline{\qquad}_{\mathrm{Aut}^s X}\underline{\qquad}$$

問題　11個の極大群はそれぞれEnriquesに作用可か？

$\boxed{5\tfrac{1}{6}}$ 定理 (M.-Ohashi)　次は同値.

(1) G はある Enriques 曲面に semi-symp. に作用する.

(2) 次のどれかの部分群と同型.

$\cancel{L_2(7)}$　$\mathfrak{A}_6$　$\mathfrak{S}_5$　M_{20}　$\cancel{F_{384}}$　$\mathfrak{A}_{4,4}$　$\cancel{T_{192}}$　H_{192}　N_{72}　$\cancel{M_9}$　$\cancel{T_{48}}$

但し, $M_{20} = 2^4\mathfrak{A}_5$ は指数6の部分群で置き換える。

部分空間

$$\mathcal{P}(\Omega) = \mathbb{F}_2^{\oplus 24} \supset \langle\mathcal{B}\rangle =: \mathrm{Gol}$$

$A, B \in$

$A \cup B \setminus A \cap B$

でもってベクトル空間

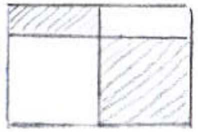
重み	0	8	12	16	24	計
個数	1	759	2576	759	1	2^{12}

symplectic 作用 $G \curvearrowright S$ が M-a.a.

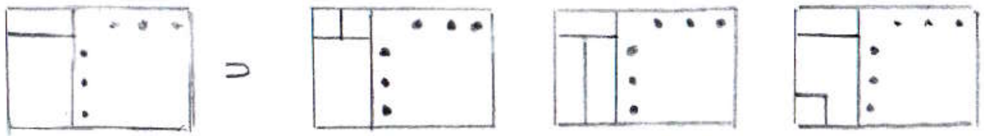
$\Leftrightarrow_{\text{def}}$ 対応する $G \curvearrowright \Omega$ はある dodecad (Gol_{12}の元) をそれ自身にうつす. (小Mathieu群 M_{12} に入る)

$\boxed{\text{M-a.a.定理}}$

M-a.a.に作用可 $\Leftrightarrow \begin{cases} G \subset \mathfrak{S}_6 \subset M_{12} \\ 2^4 \nmid |G| \end{cases}$



dodecad (対)の例



$|\mathfrak{S}_6| = 2^4\cdot 45$　　$\mathfrak{A}_6$　　N_{72}　　$\mathfrak{S}_5$

この3つの群がM-a.a.に作用　　3-Sylow の正規化群

$5\frac{1}{6}$ 定理 (M.-Ohashi) 次は同値.

(1) G はある Enriques 曲面に semi-symp. に作用.

(2) 次のどれかの部分群と同型.

$\cancel{L_2(7)}$ $\mathfrak{A}_6$ $\mathfrak{S}_5$ $\cancel{M_{20}}$ $\cancel{F_{384}}$ $\mathfrak{A}_{4,4}$ $\cancel{T_{192}}$ H_{192} N_{72} $\cancel{M_9}$ $\cancel{T_{48}}$

但し, $M_{20}=2^4\mathfrak{A}_5$ は指数6の部分群で置き換える。

部分空間

$$\underset{A,B}{\in}\ \wp(\Omega)=\mathbb{F}_2^{\oplus 24} \supset \langle \mathcal{B} \rangle =: \mathrm{Gol}$$

$A\cup B \setminus A\cap B$ でもってベクトル空間

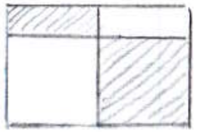
重さ	0	8	12	16	24	計
個数	1	759	2576	759	1	2^{12}

symplectic 作用 $G \curvearrowright S$ が M.-s.A.

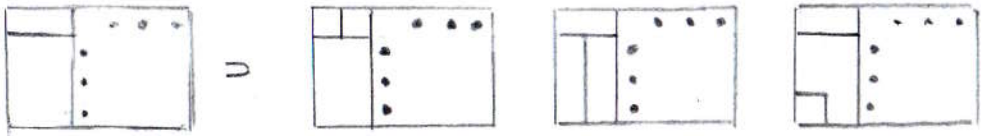
$\underset{def}{\Leftrightarrow}$ 対応する $G \curvearrowright \Omega$ はある dodecad (Gol_{12} の元) をそれ自身にうつす. (小Mathieu群 M_{12} になる)

M-s.o.定理

M-s.A.に作用可 $\Leftrightarrow \begin{cases} G \subset \mathfrak{S}_6 \subset M_{12} \\ 2^4 \nmid |G| \end{cases}$



dodecad (対)の例



$|\mathfrak{S}_6|=2^4\cdot 45$ $\mathfrak{A}_6$ N_{72} $\mathfrak{S}_5$

この3つの群が M-s.A.に作用

3-Sylow の正規化群

§4 有限群から無限離散群へ

驚き! $\mathfrak{A}_6$ と N_{72} の作用する Enriques 曲面は同じ

$$\mathfrak{A}_6,\ N_{72} \subset \mathrm{Aut}^{ss}(S)$$

$$X \begin{cases} x^2-\lambda yz = u^2-\mu vw \\ y^2-\lambda zx = v^2-\mu wu \\ z^2-\lambda xy = w^2-\mu uv \end{cases} \subset \mathbb{P}^5_{(xyzuvw)}$$

$\lambda, \mu = 1\pm\sqrt{3}$

"Hesse-Godeaux型"

$$S = X/[1\,1\,1\,-1\,-1\,-1]$$

この表示から見える $3^2C_4 = \mathfrak{A}_6 \cap N_{72}$. 2通りに拡張.

$\boxed{\text{定理(M-O.)}}$ $\mathrm{Aut}^{ss} S = \mathfrak{A}_6 *_{3^2C_4} N_{72}$ (相対) アマルガム (融合積)

証明は $SL(2,\mathbb{Z}) = C_4 *_{C_2} C_6$ を真似る.

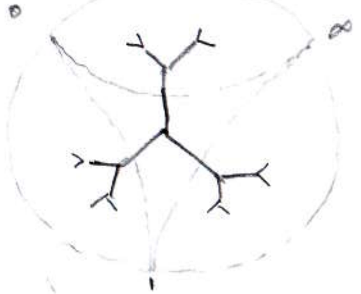
格子

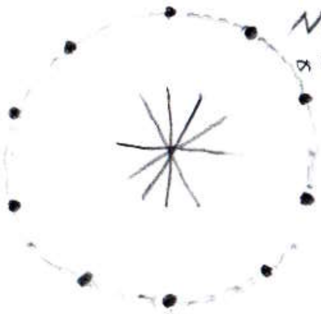
$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & -2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & 負E_8 \end{array}\right)$$

$U+\langle -2 \rangle$ $\qquad$ $U+(負E_8) = H^2(S,\mathbb{Z})/C_2$

非Euclid 平面 $\qquad$ 9次元空間

3価樹木 $\qquad$ 10価樹木





Ne有理因子の為す全体 mod $\mathbb{R}^+$

§4 有限群から無限離散群へ

驚き! $\mathfrak{N}_6$ と $\mathcal{N}_{72}$ の作用するEnriques曲面は同じ

$$\mathfrak{N}_6,\ \mathcal{N}_{72} \subset \mathrm{Aut}^{ss}(S)$$

$$X \begin{cases} x^2-\lambda yz = u^2-\mu vw \\ y^2-\lambda zx = v^2-\mu wu \\ z^2-\lambda xy = w^2-\mu uv \end{cases} \subset \mathbb{P}^5_{(xyzuvw)}$$

$\lambda, \mu = 1\pm\sqrt{3}$

$S = X/[1\,1\,1\,-1\,-1\,-1]$　"Hesse-Godeaux型"

この表示から見える $3^2C_4 = \mathfrak{N}_6 \cap \mathcal{N}_{72}$. 2通りに拡張.

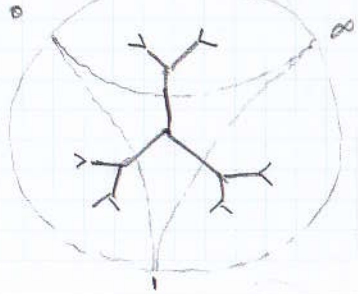
$\boxed{\text{定理(M-O.)}}$ $\mathrm{Aut}^{ss} S = \mathfrak{N}_6 *_{3^2C_4} \mathcal{N}_{72}$　(相対)アマルガム(融合積)

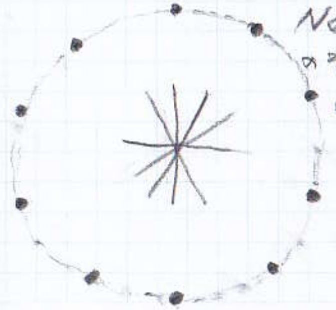
証明は $SL(2,\mathbb{Z}) = C_4 *_{C_2} C_6$ を真似る.

格子　$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & -2 \end{array}\right)$　$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & \text{負}E_8 \end{array}\right)$

$U + \langle -2 \rangle$　　$U + (\text{負}E_8) = H^2(S,\mathbb{Z})/C_2$

非Euclid　平面　3価樹木　　9次元空間　10価樹木





Nef因子のなす錐体 mod $\mathbb{R}^+$

樹木の頂点集合のVoronoi胞体の和に分割

$SL(2,\mathbb{Z}) \curvearrowright$ 3価樹木　　$\mathrm{Aut}\, S \curvearrowright$ 10価樹木

orbifold商　$i \overset{e_2}{\circ\!\!-\!\!-\!\!\circ} \omega$ (C_4, C_6)　　$[h_{10}] \overset{3^2C_4}{\circ\!\!-\!\!-\!\!\circ} [h_{18}]$ ($\mathfrak{N}_6$, $\mathcal{N}_{72}$)

実質自由性　$\mathrm{Ker}[SL(2,\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow 2.\mathfrak{S}_3]$

$\cong F_2 = \pi_1(\text{Riemann球} \setminus \{0,1,\infty\})$

$\mathrm{Ker}[\mathrm{Aut}^{ss} S \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_6]$

$\cong F_9 = \pi_1(\text{Riemann球} \setminus \{10\text{点}\})$

$\boxed{\text{問題}}$ $\mathrm{Aut}\, S$ が実質自由なEnriques曲面を分類せよ. (v.c.d. = 1)

(参) 常に v.c.d. $(\mathrm{Aut}\, S) \leq 8$

v.c.d. = 0 (有限群) は Kondo(1986) が分類.

---

mini-history 2 (Kummerサイド)

Fresnel (1822)　光の波曲面
16特異点をもつ4次曲面

Hamilton (1833)　4本のtrope (2重2次曲線)

Göpel (1847), Cayley (1848)

Kummer (1864)　3パラメータ族, 一般型

Kleinの問題 (1885)　双有理自己同型群を求めよ

— — —

Kondo (1998)　解決

樹木の頂点集合のVoronoi胞体の和に分割

$SL(2,\mathbb{Z}) \curvearrowright$ 3価樹木　　$\mathrm{Aut}\, S \curvearrowright$ 10価樹木

orbifold商

$\underset{C_4}{\overset{i}{\circ}} \xrightarrow{\;C_2\;} \underset{C_6}{\overset{\omega}{\circ}}$　　$\underset{\mathfrak{A}_6}{\overset{[h_{10}]}{\circ}} \xrightarrow{\;3^2C_4\;} \underset{N_{72}}{\overset{[h_{18}]}{\circ}}$

実質自由性　$\mathrm{Ker}\,[\,SL(2,\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow 2.\mathfrak{S}_3\,]$

$\cong F_2 = \pi_1$(Riemann球 $\setminus \{0, 1, \infty\}$)

$\mathrm{Ker}\,[\,\mathrm{Aut}^{as}\, S \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_6\,]$

$\cong F_9 = \pi_1$(Riemann球 $\setminus$ {10点})

$\boxed{\text{問題}}$ Aut S が実質自由な Enriques 曲面を分類せよ。(v.c.d. = 1)

(参) 常に v.c.d. (Aut S) ≤ 8

v.c.d. = 0 (有限群) は Kondo (1986) が分類.

---

mini-history 2 (Kummer サイド)

Fresnel (1822)　光の波面
16特異点をもつ4次曲面

Hamilton (1833)　4本のtrope (2重2次曲線)

Göpel (1847), Cayley (1848)

Kummer (1864)　3パラメータ族, 一般型

Kleinの問題 (1885)　双有理自己同型群をもとめよ

— — —

Kondo (1998)　解決

mini-history 2 (群論サイド)

Mathieu (1861)　5重可移群 M_{12}, M_{24}

— — —

Janko (1968)　J_2　100次置換群として
新しい散在型単純群

Higman-Sims (1969)　別の100次置換群
Aut (HSグラフ)

Conway群 (1968, 69), Leechルート (1983)

§5 (古典) Kummer曲面の(無限)自己同型群

C　種数2のRiemann面

$\mathrm{Jac}\, C = \mathbb{C}^2/$(周期格子)

$\cup$

Θ　主偏極アーベル曲面

$|2\Theta|$ による射

$\Phi_{2\Theta} : \mathrm{Jac}\, C \xrightarrow{2:1} \overline{\mathrm{Km}}\, C \subset \mathbb{P}^3$

の像が(古典) Kummer 曲面. 16個の2分点の像で特異.

Kleinの問題(言換)　非特異化 Km C の複素多様体としての自己同型群をもとめよ.

mini-history 2 (群論サイド)

Mathieu (1861) 5重可移群 M_{12}, M_{24}

— — —

Janko (1968) J_2 100次置換群として
新しい散在型単純群

Higman-Sims (1969) 別の100次置換群
Aut (HSグラフ)

Conway群 (1968, 69), Leechルート (1983)

§5 (古典) Kummer曲面の(無限)自己同型群

C

種数2のRiemann面

$\mathrm{Jac}\, C = \mathbb{C}^2 /$(周期格子)

$\cup$

Θ 主偏極アーベル曲面

$|2\Theta|$による射

$$\Phi_{2\Theta} : \mathrm{Jac}\, C \xrightarrow{2:1} \overline{\mathrm{Km}}\, C \subset \mathbb{P}^3$$

の像が(古典) Kummer曲面. 16個の2分点の像で特異.

Kleinの問題(言換) 非特異化 $\mathrm{Km}\, C$ の複素多様体としての自己同型群を求めよ.

$\overline{\mathrm{Km}}(C) \subset \mathbb{P}^3$ は16本のtrope (2重2次曲線)

$\mathrm{Km}(C)$ は $16+16=32$ 本の $\mathbb{P}^1$ をもつ. ベストモデルは (*) $\sum_1^6 x_i^2 = \sum_1^6 \lambda_i x_i^2 = \sum_1^6 \lambda_i^2 x_i^2 = 0$

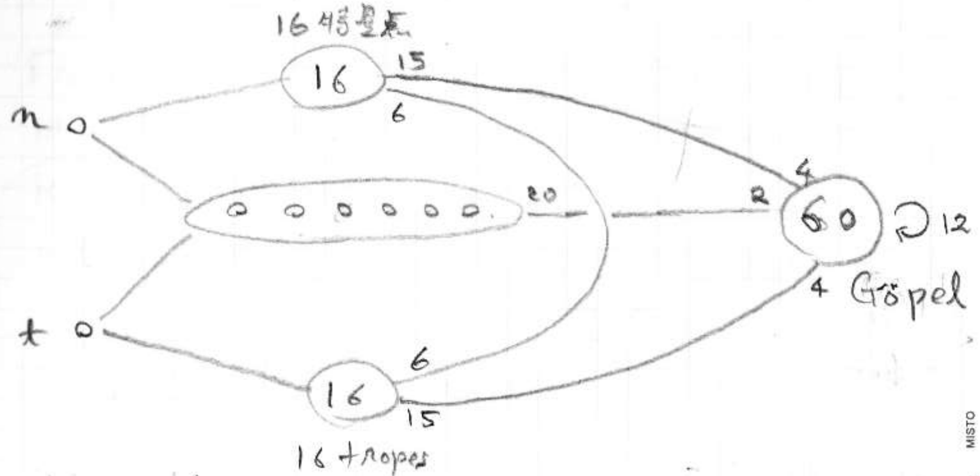
$\subset \mathbb{P}^5_{(x)}$

但し, $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ は $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ の Weierstrass点. $(16_6 - 16_6)$ 配置

定理 (金銅, 1998) (+ Ohashi (2009)の観察)

一般のKummer曲面の自己同型群は
16個のprojection, 16個のcorrelation,
60個のGöpel対合, 192個のWeber対合,
(*)で見えている 2^5 の作用
で生成される.

HSグラフ, パラメータ (100, 22, 0, 6) との関係



$(16_6 - 16_6)$ や Göpel を部分グラフとする強正則グラフ

$\overline{\mathrm{Km}}(C) \subset \mathbb{P}^3$ は 16本の trope (2重2次曲線)

$\mathrm{Km}(C)$ は $16+16=32$ 本の $\mathbb{P}^1$ をもつ。ベスト

モデルは (*) $\sum_1^6 x_i^2 = \sum_1^6 \lambda_i x_i^2 = \sum_1^6 \lambda_i^2 x_i^2 = 0$ $\subset \mathbb{P}^5_{(x)}$

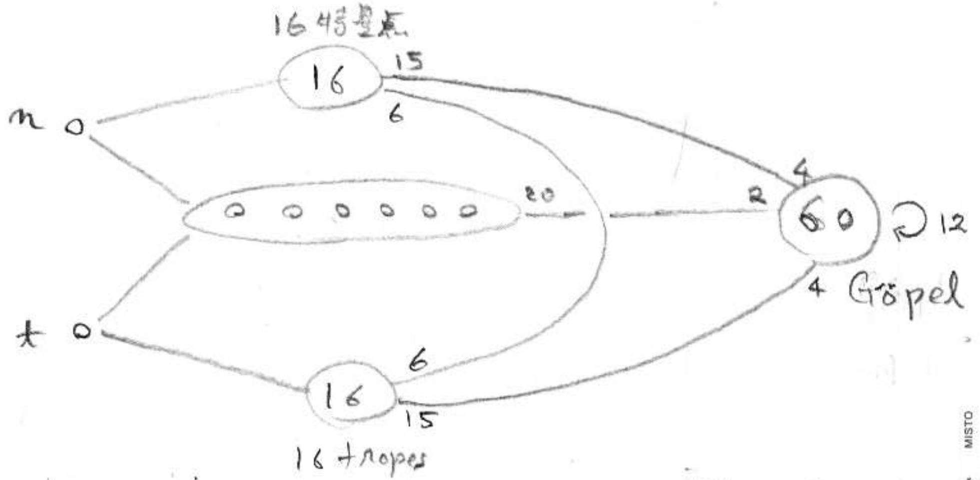
但し、$\lambda_1, \dots, \lambda_6$ は $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ の

Weierstrass 点。 ($16_6 - 16_6$) 配置

定理 (金銅, 1998) (+ Ohashi (2009) の観察)

一般の Kummer 曲面の自己同型群は
16個の projection, 16個の correlation,
60個の Göpel 対合, 192個の Weber 対合,
(*) で見えている 2^5 の作用
で生成される。

HSグラフ、パラメタ (100, 22, 0, 6) との関係



($16_6 - 16_6$) + Göpel を部分グラフとする強正則グラフ

[証明] $X = \mathrm{Km}\,C$ の Picard 格子を格 Leech に(等長的に)埋込んで、Conway の Leech ルート、Borcherds 理論 (1987) を適用。

$$\mathrm{Pic}(\mathrm{Km}\,C) \hookrightarrow U + (\text{負 Leech})$$

符号数 (1, 16) (1, 25)

$16+16=32$ 本の $(-2)\,\mathbb{P}^1 \longmapsto 32$ 個の Leech ルート

(以下証明略)

Borcherds (1998) の試み

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Km}\,C) \underset{?}{=} (W.\ 2^5) * C_2^{*6}$$

但し、W は $(16+16+60)$ 個の対合で生成された群。

M. (最近) " $\mathrm{Aut}(\mathrm{Km}\,C) = W.\ \langle 192\ \text{Weber}, 2^5 \rangle$ "

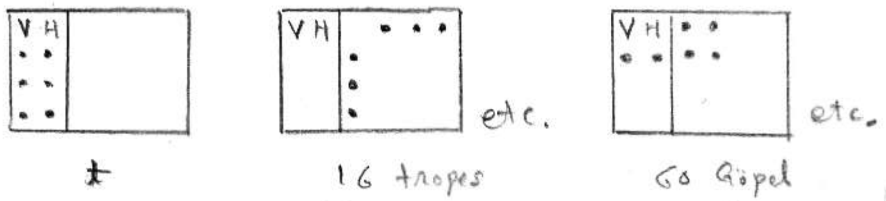
(参) HSグラフの頂点分解、あるいは、M_{22} からの構成

Ω_{22} $\quad B' \subset \mathcal{P}_6(\Omega_{22})$

$(1) — (22) — (77)$ $\quad 77 = \dfrac{22 \cdot 21 \cdot 20}{6 \cdot 5 \cdot 4}$

に出てくる "77" は M_{22} グラフ (S o—o S' $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $S \cap S' = \emptyset$)

$\mathfrak{A}_6 \subset M_{22}$ の作用で 3軌道



$n = (4\,4\,0^{22})$, 16特異点は $[00], \dots, [33]$.

証明 $X = \mathrm{Km}\,C$ の Picard 格子を拡大 Leech
K(等長的に)埋込んで, Conway の Leech ルート,
Borcherds 理論 (1987) を適用.

$$\mathrm{Pic}(\mathrm{Km}\,C) \hookrightarrow U + (\text{負 Leech})$$

符号数 $(1,16)$ $(1,25)$

$16+16=32$ 本の $(-2)\ \mathbb{P}^1 \longmapsto 32$ 個の Leech ルート

(以下証明略)

Borcherds (1998) の試み

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Km}\,C) \overset{?}{=} (W.\ 2^5) * C_2^{*6}$$

但し, W は $(16+16+60)$ 個の対合で生成された群.

M. (最近) "$\mathrm{Aut}(\mathrm{Km}\,C) = W.\ \langle 192\ \mathrm{Weber},\ 2^5\rangle$"

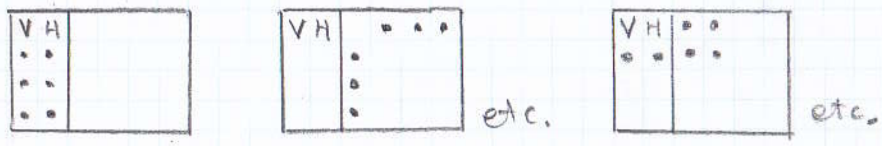
(参) HS グラフの頂点分解, あるいは, M_{22} からの構成

Ω_{22} $B' \subset \mathcal{P}_6(\Omega_{22})$

① —— (22) —— (77) $\quad 77 = \dfrac{22\cdot 21\cdot 20}{6\cdot 5\cdot 4}$

に出現する "77" は M_{22} グラフ (S o—o S' $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $S \cap S' = \phi$)

$\mathfrak{A}_6 \subset M_{22}$ の作用で 3軌道



$*$ 16 tropes 60 Göpel

$n = (4\,4\,0^{22})$. 16特異点は $[00], \cdots, [33]$.

§6 Reid 曲面 mod 3, 5 と M_{22} グラフ

$$\mathrm{Rd}:\ \sum_1^6 x_i = \sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = 0 \quad \subset \mathbb{P}^5_{(x)}$$

Rd mod p $\quad p \neq 2,3,5 \Rightarrow$ 非特異

$p = 2,3,5 \Rightarrow$ 特異だが 有理2重点のみ
非特異化 Rd_p は $\mathbb{F}_p$ 上の K3曲面

	mod 3	mod 5
特異点	$(111-1-1-1)$ 等の10点で A_2	(011111) 等の6点で A_1
他	15本の conic	36 直線 (Sylvester配置)
Rd_p 上の基本 $\mathbb{P}^1$ 配置	$20+15=35$ 本 4価奇グラフ $\binom{[7]}{4}$	$6+36=42$ 本 無名グラフ

M_{22} グラフの2分割 $\quad 4 \circlearrowleft (35) \overset{12\qquad 10}{――――} (42) \circlearrowright 6$

定理 Rd_3, Rd_5 は 7次対称群 $\mathfrak{S}_7$ が作用 (!)

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Rd}_3) = \langle \sigma_4, \sigma_7, \mathfrak{S}_7 \rangle$$
$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Rd}_5) = \langle \sigma_3, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_{12}, \sigma_{15}, \mathfrak{S}_7 \rangle$$
$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Rd}_2) \cong (\mathfrak{S}_6.2) *_{3^2 C_4} 3^2 D_8$$

$O_2(1,20)$ の非鏡映部分と一致 (Borcherds アマルガム)

§6 Reid 曲面 mod 3, 5 と M_{22} グラフ

$$Rd : \sum_{1}^{6} x_i = \sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = 0 \subset \mathbb{P}^5_{(x)}$$

Rd mod p $p \neq 2, 3, 5 \Rightarrow$ 非特異

$p = 2, 3, 5 \Rightarrow$ 特異だが有理2重点のみ
非特異化 Rd_p は $\mathbb{F}_p$ 上の K3 曲面

	mod 3	mod 5
特異点	(111−1−1−1) 等の10点で A_2	(011111) 等の6点で A_1
他	15本の conic	36 直線 (Sylvester配置)
Rd_p 上の基本配置	20+15=35本 4価奇グラフ $\binom{[7]}{4}$	6+36=42本 無名グラフ

M_{22} グラフの2分割

$$4 \circlearrowleft 35 \overset{12 \qquad 10}{\text{———}} 42 \circlearrowright 6$$

定理 Rd_3, Rd_5 は7次対称群 $\mathfrak{S}_7$ が作用(!)

$\mathrm{Aut}(Rd_3) = \langle \sigma_4, \sigma_7, \mathfrak{S}_7 \rangle$

$\mathrm{Aut}(Rd_5) = \langle \sigma_3, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_{12}, \sigma_{15}, \mathfrak{S}_7 \rangle$

$\mathrm{Aut}(Rd_2) \cong (\mathfrak{S}_6.2) *_{3^2 C_4} 3^2 D_8$

$O_2(1, 20)$ の非鏡映部分と一致 (Borcherds アマルガム)

まとめ

① Golay 符号や Mathieu 群は K3 をよく知っている。

② Leech 格子や Conway 群はもっとよく知っている。ただし、K3 を選り好みする。

③ 頂点作用素代数 $V^\natural$ や モンスター群は……

まとめ

① Golay符号やMathieu群はK3もよく知っている。

② Leech格子やConway群はもっとよく知っている。ただし，K3を選り好みする。

③ 頂点作用素代数 $V^\natural$ やモンスター群は……

話せなかったこと，まだ出来てないこと，…

- K3曲面上のベクトル束のモジュライ
  高次元正則symplectic多様体
  今日の話の高次元版？
- 3次元Fano多様体，特に，
  種数12の V_{22}.
  Debarre–Voisin多様体を介して
  M_{22}と関係？

ご清聴ありがとうございました!

テーマと文献

主題：$K3$ 曲面の対称性と有限単純群の（いくつかの）関係

参考にした文献

[R] Mark Ronan, Symmetry and the monster: one of the greatest quests of mathematics, 2006, Oxford Univ. Press.
(邦訳「シンメトリーとモンスター 数学の美を求めて」)

[K] E. Kummer, Über die Flmachen vierten Grades mit sechzehn singulärten Punkten, Monat. d. König. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1864.
(16 個の特異点をもつ 4 次曲面について)

訂正 (3 箇所)

- p.1, l.4: S(5, 8, 24)
- p.3, l.7: 定義式の係数に虚数単位を挿入.

$$\bar{S} : xyzt(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + \sqrt{-1}x^2y^2z^2t^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2}\right) = 0$$

- p.7, l.3–4: Janko (1966) J_1 を挿入.