ディリクレ形式と緊密性を持つ対称マルコフ過程

竹田雅好

関西大学・システム理工

2020/9

Outline

1. ディリクレ形式とは
2. ディリクレ形式と対称マルコフ過程
3. 緊密性を持つ対称マルコフ過程
   3.1 スペクトル的性質
   3.2 確率論への応用

ディリクレ形式 (Dirichlet form)

- 核でなく, エネルギー概念に基づくポテンシャル論構築のため

A. Beurling と **J. Deny** がディリクレ形式を導入 **(1958).**

- E : 局所コンパクト可分距離空間 (状態空間)
- m : 正のラドン測度, supp$[m] = E$ (対称化測度)
- $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: $L^2(E; m)$ 上の非負閉対称形式

$$\mathcal{E}(u,u) \geq 0, \quad \mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}(v,u), \; u, v \in \mathcal{F}.$$

$$(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1 := \mathcal{E}(\cdot,\cdot) + (\cdot,\cdot)_m) \text{ (ヒルベルト空間)}$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ がマルコフ的であるとは, $u \in \mathcal{F}$ に対し

$$u_1 = (0 \vee u) \wedge 1 \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{E}(u_1, u_1) \leq \mathcal{E}(u,u)$$

を満たすときをいう.

- マルコフ的である非負閉対称形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ をディリクレ形式という．非正の自己共役作用素 A が存在して

$$\mathcal{E}(u, v) = (\sqrt{-A}u, \sqrt{-A}v)_m, \quad \mathcal{D}(\sqrt{-A}) = \mathcal{F}.$$

対応する半群 $\{T_t = \exp(tA)\}_{t \geq 0}$ もマルコフ的, すなわち $u \in L^2(E; m)$ に対して

$$0 \leq u \leq 1, \ m\text{-a.e.} \Longrightarrow 0 \leq T_t u \leq 1, \ m\text{-a.e.}$$

- (マルコフ半群 $\{T_t\} \Longrightarrow$ ディリクレ形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$)

$$\mathcal{E}(u, v) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(u - T_t u, v)_m,$$
$$\mathcal{F} = \left\{ u \in L^2(E; m) : \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(u - T_t u, u)_m < \infty \right\}.$$

- $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ と $(C_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ の中で $\mathcal{F} \cap C_0(E)$ が稠密であるとき, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は正則であるという．

定理 (福島正俊)

正則ディリクレ形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対して対称マルコフ過程 $X = (\Omega, X_t, \mathrm{P}_x)$ が構成され，半群 T_t は推移確率 $p_t(x, dy) = \mathrm{P}_x(X_t \in dy)$ を用いて

$$T_t f(x) = p_t f(x) = \int_E p_t(x, dy) f(y), \quad m\text{-a.e. } x$$
$$f \in L^2(E; m) \cap b\mathcal{B}(E)$$

と表される．ここで，$b\mathcal{B}(E)$ は E 上の有界可測関数の全体.

例．$E = \mathbb{R}^d$: d-次元ユークリッド空間

$m = dx$: ルベーグ測度

$$\mathcal{E}(u, v) = (-\frac{1}{2}\Delta u, v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\mathbb{D}(u, v) \text{ (ディリクレ積分)}$$
$$\mathcal{F} = H^1(\mathbb{R}^d) \text{ (1 位のソボレフ空間)}$$

$(\frac{1}{2}\mathbb{D}, H^1(\mathbb{R}^d))$ に対応する対称マルコフ過程はブラウン運動

$$p_t(x, dy) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(|x-y|^2/2t\right) dy$$

- 対称マルコフ過程は, 強マルコフ性と経路の準左連続性をもつ **Hunt 過程**とよばれるクラスに属する.
- 確認が容易な正則性条件のもと，対称マルコフ過程が構成.
- 特段の空間構造を必要としない柔軟さが大きな利点.

- **1970** 年代中頃から様々な物理モデルとして，無限次元空間，フラクタル集合など特異な空間上にディリクレ形式が構成され，福島の定理を用いて構成されるマルコフ過程の確率解析が行われてきた.

応用

- 無限次元空間上の拡散過程 **(Albeverio-Hoegh-Krohn,** 楠岡, **Ma-Röckner,** 長田,. . . **)**
- ランダム環境下のマルコフ過程 **(Deuschel,** 熊谷,. . . **)**
- フラクタル上の拡散過程 **(**楠岡, 福島, 木上, 熊谷, 日野,. . . **)**
- 測度距離空間上の拡散過程 **(Sturm,** 桑江-塩谷,. . . **)**

- ディリクレ形式は対称マルコフ過程を構成するためだけではなく，対称マルコフ過程を解析するための良い道具.

- ディリクレ形式の理論は L^2 理論.

X の経路や汎関数の確率論的な性質を導くためには, 更なる性質をマルコフ過程に仮定する必要.

- 例えば, ファインマン・カッツ汎関数の期待値の有界性を調べるために, マルコフ半群を L^∞-半群と見たときの増大度

$$\lambda_\infty = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|T_t\|_{\infty,\infty}$$

が重要である. λ_∞ が L^2-半群としての増大度と等しい (L^p-独立性) ことが示されれば, ディリクレ形式のスペクトル下限で有界性の条件が与えられる.

そのために, L^p-独立性が成立するための条件を見つけ, マルコフ過程に仮定する.

- 仮定すべき条件を一次元拡散過程の場合を参考にして探る.

一次元拡散過程

区間 $I=(r_1,r_2)$

$$\mathcal{L}=\frac{d^2}{dmds}\quad (\text{Feller の標準形}).$$

m : I 上の $\mathrm{supp}[m]=I$ となるラドン測度 (スピード測度)
s : I 上の狭義単調増大連続関数 (尺度関数).

$$\mathcal{E}(u,v)=\int_I \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}\,ds$$
$$\mathcal{F}=\{u\in L^2(I;m)\mid du/ds\in L^2(I;ds)\}$$

- r_1,r_2 に到達したらそこに留まるとする.
- 一次元拡散過程はスピード測度と尺度関数で決まる.
- 一次元拡散過程は対称マルコフ過程の典型例.

● 一次元拡散過程はスピード測度と尺度関数によって境界が 4 つに分類.

$r_1 < c < r_2$

$$\rho = \int_c^{r_2} \left(\int_c^y dm(x) \right) ds(y), \quad \sigma = \int_c^{r_2} \left(\int_c^y ds(x) \right) dm(y).$$

(Feller の境界分類)

$$\begin{aligned}
r_2 &: \text{正則} \iff \rho < \infty, \ \sigma < \infty, \\
r_2 &: \text{流出} \iff \rho < \infty, \ \sigma = \infty, \\
r_2 &: \text{流入} \iff \rho = \infty, \ \sigma < \infty, \\
r_2 &: \text{自然} \iff \rho = \infty, \ \sigma = \infty.
\end{aligned}$$

- r_1 についても同様に定義.
- スピード測度は L^2 空間を定める基礎の対称化測度としてディリクレ形式に対応物が存在.
- 尺度関数は一次元拡散過程に特有. 多次元のマルコフ過程に対応物が無い.
- **1**-レゾルベントの境界近傍での挙動が **Feller** の境界分類のそれぞれの場合に調べられている **(**伊藤清「確率過程」**(1957))**.

$$R_1 f(x) = \int_0^\infty e^{-t} p_t f(x) dt = \mathbf{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-t} f(X_t) dt \right].$$

- $R_1 1(x) \leq 1, \quad 1 = 1_{(r_1, r_2)}(x).$

(i) r_2 が正則または流出ならば

$$\lim_{x \to r_2} R_1 1(x) = 0.$$

(ii) r_2 が流入ならば, 任意の $r \in I$ に対して

$$\lim_{r \to r_2} \sup_{x \in I} R_1 1_{(r, r_2)}(x) = 0.$$

(iii) r_2 が自然ならば, 任意の $r \in I$ に対して

$$\lim_{x \to r_2} R_1 1_{(r, r_2)}(x) = 1,$$

従って, $\sup_{x \in I} R_1 1_{(r, r_2)}(x) = 1.$

一般のマルコフ過程に対する無限遠点の分類

- **(i), (ii)** と **(iii)** に分ける.
- **((i)⇒(ii))** $\sup_{x\in I} R_1 1_{(r,r_2)}(x) = \sup_{x\in(r,r_2)} R_1 1_{(r,r_2)}(x)$
$$\le \sup_{x\in(r,r_2)} R_1 1(x) \to 0,\ r \to r_2.$$
- **(i), (ii)** の性質をまとめて一般化すると

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, コンパクト集合 K が存在して
$\sup_{x\in E} R_1 1_{K^c}(x) \le \varepsilon$」

- 上の「」で囲まれた性質を緊密性と呼ぶ.
- X が保存的, $p_t 1 = 1 (R_1 1 = 1)$ ならば, 「」の性質は確率測度の族 $\{R_1(x,\cdot)\}_{x\in E}$ が **Prohorov** の意味で緊密 **(tight)** であること.
- 一次元拡散過程の場合, 境界がともに **Feller** の分類で自然でなければ緊密性は成立.

設定

E : 局所コンパクト可分距離空間

m : 正のラドン測度, $\mathrm{supp}[m] = E$

$X = (\Omega, \{X_t\}_{t\geq 0}, \mathrm{P}_x, \zeta)$: E 上の m-対称なマルコフ過程

m-対称 : $(p_t f, g)_m = (f, p_t g)_m$, $f, g \in b\mathcal{B}(E)$
$p_t f(x) = \mathrm{E}_x[f(X_t)]$.

ζ : X の生存時刻, $\zeta(\omega) = \inf\{s \geq 0 \mid X_s(\omega) \notin E\}$.

$\{R_\alpha\}_{\alpha\geq 0}$: X のレゾルベント

$$R_\alpha f(x) = \mathrm{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)dt\right], \quad f \in b\mathcal{B}(E).$$

対称マルコフ過程 X に対して次の３つの性質を仮定:

I. (既約性)　ボレル集合 A が任意の $t>0$ に対して $\int_A p_t \mathbf{1}_{A^c} dm = 0$ ならば, A は $m(A)=0$ または $m(A^c)=0$.
ここで, $\mathbf{1}_{A^c}$ は A の補集合の定義関数.

II. (レゾルベント強フェラー性)　$R_\alpha(b\mathcal{B}(E)) \subset bC(E)$, $\alpha > 0$.

III. (緊密性) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, コンパクト集合 K が存在して

$$\sup_{x\in E} R_1 \mathbf{1}_{K^c}(x) \le \varepsilon.$$

上の三つの性質を備えた対称マルコフ過程のクラスをクラス (T) と名づける.

緊密性について

(i) $\boldsymbol{R_1 1 \in C_\infty(E)}$ ならば緊密性を満たす．ここに，$\boldsymbol{C_\infty(E)}$ は無限遠点で **0** となる連続関数の全体．

従って，**Khas'minskii** テストで爆発が確認できる対称拡散過程は緊密性を満たすとみなせる．

(ii) $\boldsymbol{p_t(C_\infty(E)) \subset C_\infty(E)}$ ならば，$\boldsymbol{R_1 1 \in C_\infty(E)}$ と緊密性は同値．

従って，$\boldsymbol{X}$ が保存的で $\boldsymbol{p_t(C_\infty(E)) \subset C_\infty(E)}$ を満たすならば，緊密性を持たない．

特に，$\boldsymbol{\Delta - x \cdot \nabla}$ を生成作用素にもつ **Ornstein-Uhlenbeck** 過程 (以後，**OU** 過程と記す) は緊密性を持たない．

λ_p を半群 $\{p_t\}_{t\geq 0}$ の長時間 L^p-増大度:

$$\lambda_p = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|p_t\|_{p,p}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

定理 1

X がクラス **(T)** に属するとする.

(i) λ_p は $1 \leq p \leq \infty$ に依らない.

(ii) 半群 p_t は $L^2(E;m)$ 上のコンパクト作用素.

(iii) すべての固有関数は有界連続な変形を持つ.

(iv) 最小固有関数は $L^1(E;m)$ に属す.

- **(ii)** $\Longleftrightarrow$ $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ が $L^2(E;m)$ にコンパクトに埋め込まれている.
- **O-U** 過程の固有関数はエルミート多項式であり非有界.

- 最小固有関数が $L^1(E;m)$ に属することは非自明．実際，$m(E)=\infty$ となり得る．

例えば，流出境界をもつ一次元拡散過程のスピード測度は非有界．

$$r_2 : \text{流出} \iff \begin{cases} \rho = \int_c^{r_2} \left(\int_c^y dm(x) \right) ds(y) < \infty, \\ \sigma = \int_c^{r_2} \left(\int_c^y ds(x) \right) dm(y) = \infty. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_c^{r_2} ds < \infty, \quad \int_c^{r_2} dm = \infty.$$

- 少しだけ強い条件

{ 半群強フェラー性 } + $\{R_1 1 \in C_\infty(E)\}$
+ { 局所 L^∞-コンパクト性 }

$\Longrightarrow$

(i) p_t は L^p-コンパクト, $1 \le p \le \infty$.

(ii) すべてのスペクトルは L^p-独立.

(iii) すべての固有関数は $\cap_{1\le p\le\infty} L^p$ に属す.

(松浦浩平).

(緊密性)： 任意の$\epsilon > 0$に対して，コンパクト集合Kが存在して

$$R_1 1_{K^c}(x) = \mathbf{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-t} 1_{K^c}(X_t) dt \right] \leq \epsilon.$$

クラス (T) に属する対称マルコフ過程は，次のいづれかの性質を持つことが考えられる．

a) コンパクト集合をすぐに脱出し早く爆発するもの (正則，流出境界の場合に対応)．

b) 保存的，$p_t 1 = 1$であれば，ほとんどの時間をコンパクト集合の上に滞在するエルゴード性の強いもの (流入境界の場合に対応)．

補題 1

X はクラス (T) に属し保存的でないとすると, 生存時間 ζ は指数可積分性をもつ:

$$\sup_{x \in E} \mathbf{E}_x \left[e^{\gamma \zeta} \right] < \infty \iff \gamma < \lambda_2.$$

ここで, $\lambda_2 = \inf\{\mathcal{E}(u, u) \mid u \in \mathcal{F}, \ \|u\|_2 = 1\}(> 0)$.

補題 2

X がクラス (T) に属し保存的ならば, 正再帰的 ($m(E) < \infty$) で次の性質を持つ:

(H) 任意の $\gamma > 0$ に対し, コンパクト集合 K が存在して $\sup_{x \in E} \mathbf{E}_x \left[e^{\gamma \sigma_K} \right] < \infty$ を満たす. ここで, $\sigma_K = \inf\{t > 0 \mid X_t \in K\}$.

a) の場合の応用例

$$\mathbf{P}_x(\zeta < \infty) = 1, \ \forall x \in E \text{ (almost surely killed)}.$$

- $\mu \in \mathcal{P}(E)$ が準定常分布とは

$$\mu(B) = \mathrm{P}_\mu(X_t \in B \mid t < \zeta) = \frac{\mathrm{P}_\mu(X_t \in B,\, t < \zeta)}{\mathrm{P}_\mu(t < \zeta)}, \quad B \in \mathcal{B}(E).$$

$\phi_0 > 0$ を最小固有関数とする,

定理 2

X が **Class (T)** に属し, 保存的でないとき, 唯一つの準定常分布

$$\nu^{\phi_0}(B) = \frac{\int_B \phi_0 dm}{\int_E \phi_0 dm}, \quad B \in \mathcal{B}(E)$$

を持つ.

- ν^{ϕ_0} の定義には $\phi_0 \in L^1(E, m)$ が必要.
- 一意性については ϕ_0 が有界連続修正を持つことが証明の鍵.

$X^{(\alpha)} = (\Omega, X_t, \mathrm{P}_x)$: $\mathbb{R}^d$ 上の対称 α-安定過程, $(-\Delta)^{\alpha/2}$ を生成作用素に持つ対称マルコフ過程, $0 < \alpha < 2$.

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) = \mathcal{A}(d,\alpha) \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \triangle} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{d+\alpha}} dxdy.$$

$D \subset \mathbb{R}^d$: 開集合

$$\lim_{x \in D, |x| \to \infty} m(D \cap B(x,1)) = 0.$$

X^D : D 上の吸収壁 α-安定過程:

$$X_t^D = X_t, \quad t < \tau_D, \quad X_t^D = \partial, \quad t \geq \tau_D.$$

X^D はクラス (T) に属す. さらに, $m(D) < \infty$ ならば

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{P}_\mu(X_t \in A \,|\, t < \tau_D) = \nu^{\phi_0}(A), \ \ A \in \mathcal{B}(D).$$

(ヤグロム極限)

b) の場合の応用例

- 性質 (H) は一様超指数再帰性 (uniform hyper-exponential recurrence) と呼ばれて，一様な Donsker-Varadhan 型大偏差原理成立の条件として導入された (L. Wu): $\mathcal{P}$ の開集合 G に対して

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \inf_{x\in E} \mathrm{P}_x(L_t \in G) \geq - \inf_{\mu\in G} I_{\mathcal{E}}(\mu).$$

- OU 過程は局所一様.

- クラス (T) に属し状態空間がコンパクトでないものが存在.
ホーン型領域 (体積無限の場合も許す) 上の反射壁ブラウン運動 (松浦浩平).

- 性質 (H) は"coming down from infinity" とも呼ばれ，流入境界を持つ一次元拡散過程がその性質を持つことは知られている.

時間変更過程

- スペクトル的性質の応用として,

i)　ファインマン・カッツ汎関数の可積分性,

ii) シュレディンガー作用素の基本解の安定性,

iii) シュレディンガー形式の臨界性に関する特徴づけ.

正の連続加法汎関数 (PCAF)

加法性： $A_s(\omega)+A_t(\theta_s(\omega)) = A_{s+t}(\omega),\ \theta_s(\omega)(t) = \omega(s+t).$

について調べることが重要.　例 $A_t = \int_0^t f(X_s)ds,$

- 時間変更過程を調べることで A_t を調べる.

S: $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の定める容量ゼロの集合に測度を持たない (smooth) 正のボレル測度の全体.

$\mathbf{A}_c^+$: 正の連続加法汎関数 (PCAF) の全体.

S と $\mathbf{A}_c^+$ の間には 1 対 1 対応 (Revuz 対応):

$$R_\alpha \mu = \int_E r_\alpha(x, y) d\mu(y) = \mathbf{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dA_t^\mu \right]$$

$$f \cdot m \in S \Leftrightarrow \int_0^t f(X_s) ds \in \mathbf{A}_c^+, \quad m \Leftrightarrow t$$

測度 $\mu \in S$ に対して, Y_t を A_t^μ による X の時間変更過程:

$$Y_t(\omega) = X_{\tau_t(\omega)}(\omega), \quad \tau_t(\omega) = \inf\{s > 0 \mid A_s^\mu(\omega) > t\}.$$

- Y は μ-対称なマルコフ過程となる $\Longleftrightarrow$ $(\check{\mathcal{E}}, \check{\mathcal{F}})$ on $L^2(F; \mu)$.

時間変更過程がクラス **(T)** に属する条件を求める.

X を既約性, レゾルベント強フェラー性, 過渡性 **(transient)** を持つ対称マルコフ過程

定義 1

(i) 測度 $\mu \in S$ が加藤クラス $\mathcal{K}$ に属するとは

$$\lim_{t \to 0} \sup_{x \in E} \mathbf{E}_x \left[A_t^{\mu} \right] = 0.$$

(ii) 測度 $\mu \in \mathcal{K}$ が $\mathcal{K}_\infty$ (グリーン緊密性を持つクラス) に属するとは, $\forall \varepsilon > 0$ に対してコンパクト集合 K が存在して

$$\sup_{x \in E} R(1_{K^c} \cdot \mu)(x) \left(= \sup_{x \in E} \int_{K^c} r(x,y) d\mu(y) \right) \leq \varepsilon.$$

- 緊密性は, 対称化測度 m が $r_1(x,y)$ に関して $\mathcal{K}_\infty$ を意味.

補題 3

X を既約性, レゾルベント強フェラー性, 過渡性をもつ対称マルコフ過程とするとき, $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対して Y_t はクラス **(T)** に属する.

- 加藤クラスが時間変更においても扱いやすいクラス. 時間変更で強フェラー性を保つ.
- $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ の意味で μ が小さいと,
$\tau_t(\omega) = \inf\{s > 0 \mid A_s^\mu(\omega) > t\}$ は早く無限大, $Y_t = X_{\tau_t}$ は早く爆発, 緊密性を満たす.

$$\mu \in \mathcal{K}_\infty \implies \mathrm{P}_x(A_\zeta^\mu < \infty) = 1.$$

- Y の生存時刻 $\check{\zeta} = A_\zeta^\mu$ となる.

- 上の補題から, Y_t は L^p-独立を満たす. Y_t の生成作用素の L^2-スペクトル下限 $\lambda(\mu)$ は

$$\begin{aligned}\lambda(\mu) &= \inf\left\{\check{\mathcal{E}}(u,u)\;\middle|\; u \in \check{\mathfrak{F}},\ \int_F u^2 d\mu = 1\right\} \\ &= \inf\left\{\mathcal{E}(u,u)\;\middle|\; u \in \mathfrak{F},\ \int_E u^2 d\mu = 1\right\}.\end{aligned}$$

- Y_t の生成作用素は形式的には $\frac{dm}{d\mu}A$.
- 以下, 必要十分条件が「$\lambda(\mu) > 1$」で与えられる性質のいくつかについて述べる.
- $\mu_1 \leq \mu_2 \implies \lambda(\mu_1) \geq \lambda(\mu_2)$. $\lambda(\mu) > 1$ は μ による摂動の小ささを表現している.

$p_t^\mu(x,y)$: **Feynman-Kac 半群の積分核**

$$\mathbf{E}_x\left[e^{A_t^\mu} f(X_t)\right] = \int_E p_t^\mu(x,y) f(y)\, dm(y),$$

$r^\mu(x,y)$: グリーン関数

$$r^\mu(x,y) = \int_0^\infty p_t^\mu(x,y)\, dt.$$

定理 3

X を既約性, レゾルベント強フェラー性, 過渡性を持つ対称マルコフ過程とする. $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対して次は同値:

(i) $\lambda(\mu) > 1$;

(ii) $\sup_{x\in E} \mathbf{E}_x\left[e^{A_\zeta^\mu}\right] < \infty$

ブラウン運動や対称 α 安定過程の場合は, 次とも同値.

(iii) $r^\mu(x,y) < \infty, x \neq y$.

補題 1

X はクラス (T) に属し保存的でないとすると，生存時間 ζ は指数可積分性をもつ:

$$\sup_{x\in E} \mathbf{E}_x\left[e^{\gamma\zeta}\right] < \infty \iff \gamma < \lambda_2.$$

ここで，$\lambda_2 = \inf\{\mathcal{E}(u,u) \mid u \in \mathcal{F},\ \|u\|_2 = 1\}(> 0)$.

$$\sup_{x\in E} \mathbf{E}_x\left[e^{\zeta}\right] < \infty \iff \lambda_2 > 1.$$

$$\sup_{x\in E} \check{\mathbf{E}}_x\left[e^{\check{\zeta}}\right] < \infty \iff \lambda(\mu) > 1.$$

$$\sup_{x\in E} \mathbf{E}_x\left[e^{A^{\mu}_{\zeta}}\right] < \infty \iff \lambda(\mu) > 1.$$

- $\tau_t(\omega) = \inf\{s > 0 \mid A^{\mu}_s(\omega) > t\}$ から $\check{\zeta} = A^{\mu}_{\zeta}$.

定理 4

X を $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$ 上のブラウン運動. $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対して次は同値.

(i) $\lambda(\mu) > 1$;

(ii) $p_t^\mu(x, y)$ のガウス型評価：正定数 C_1, c_1 が存在して

$$p_t^\mu(x, y) \leq \frac{C_1 \exp\left(-c_1 \frac{|x-y|^2)}{t}\right)}{t^{d/2}}.$$

- 加法汎関数 A_t

$$A_t = A_t^\mu + \sum_{s \leq t: X_s \neq X_{s-}} F(X_{s-}, X_s) + N_t^{[u]}$$

に対し, 乗法汎関数 $\exp(A_t)$ の場合に拡張 (金-桑江, 和田).

$\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対し

$$\mathcal{E}^\mu(u,u) = \mathcal{E}(u,u) - \int_E u^2 d\mu, \quad \mathfrak{F}^\mu = \mathfrak{F}.$$

$(\mathcal{E}^\mu, \mathfrak{F}^\mu)$ は非負, $\mathcal{E}^\mu(u,u) \geq 0$ を仮定する．対応する半群 p_t^μ:

$$p_t^\mu f(x) = \mathbf{E}_x\left[e^{A_t^\mu} f(X_t)\right].$$

定義 2

a) $(\mathcal{E}^\mu, \mathfrak{F}^\mu)$ が劣臨界的とは
$\exists g \in L^1(E;m) \cap b\mathcal{B}(E)$, $g > 0$ m-a.e. s.t.

$$\int_E |u| g dm \leq \sqrt{\mathcal{E}^\mu(u,u)}, \quad \forall u \in \mathfrak{F}.$$

b) $(\mathcal{E}^\mu, \mathfrak{F}^\mu)$ が臨界的とは $\exists \phi \in \mathfrak{F}_e^\mu$, $\phi > 0$ m-a.e. s.t. $\mathcal{E}^\mu(\phi,\phi) = 0$.

- $u \in \mathfrak{F}_e^\mu \iff \mathcal{E}^\mu$-コーシー列 $\{u_n\} \subset \mathfrak{F}$ で $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ m-a.e. となるものが存在.

定理 5

$\mu \in \mathcal{K}_\infty$.
(i) $\lambda(\mu) > 1$ ならば, $(\mathcal{E}^\mu, \mathcal{F}^\mu)$ は劣臨界的;
(ii) $\lambda(\mu) = 1$ ならば, $(\mathcal{E}^\mu, \mathcal{F}^\mu)$ は臨界的;

- 定理 **5 (ii)** の証明において, 定義 **2 b)** における $\phi \in \mathcal{F}_e^\mu$ の構成には次の定理を用いる.

定理 6

$\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対し, $(\mathcal{F}_e, \mathcal{E})$ は $L^2(E;\mu)$ にコンパクトに埋め込まれている. 特に, $\lambda(\mu)$ は, Y_t の $L^2(E;\mu)$-生成作用素の最小固有値.

- 過渡的な正則ディリクレ形式 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ の拡張ディリクレ形式は $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$. $m \in \mathcal{K}_\infty(R_1)$ であるから, 定理 **6** は定理 **1(ii)** を意味する.

半群 p_t^μ に対応する超過関数の空間

$$\mathcal{H}^+(\mu) = \{h \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \cap C(E) \mid h > 0,\ p_t^\mu h \le h\}.$$

$h \in \mathcal{H}^+(\mu)$ に対して，$L^2(E; h^2 m)$ 上の正則ディリクレ形式 $(\mathcal{E}^{\mu,h}, \mathcal{F}^{\mu,h})$ を，Doob の h-変換をとおして

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{\mu,h}(u,u) = \mathcal{E}^\mu(hu, hu) \\ \mathcal{F}^{\mu,h} = \{u \in L^2(E; h^2 m) \mid hu \in \mathcal{F}^\mu\}. \end{cases}$$

で定義する．$\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対しては，定義 2 と次の定義は同値．

定義 3

a) $(\mathcal{E}^\mu, \mathcal{F}^\mu)$ が劣臨界的とは，$h \in \mathcal{H}^+(\mu)$ が存在して $(\mathcal{E}^{\mu,h}, \mathcal{F}^{\mu,h})$ が過渡的．

b) $(\mathcal{E}^\mu, \mathcal{F}^\mu)$ が臨界的とは，$h \in \mathcal{H}^+(\mu)$ が存在して $(\mathcal{E}^{\mu,h}, \mathcal{F}^{\mu,h})$ が再帰的．

最大値原理, Liouville 性を次で定義する.

(MP) $h \in \mathcal{B}(E)$ が上に有界で $p_t^{\mu} h \geq h$ ならば $h \leq 0$.

(L) $h \in b\mathcal{B}(E)$ が $p_t^{\mu} h = h$ ならば $h(x) = 0$.

定理 7

$\mathrm{P}_x(\zeta < \infty) = 1$ を仮定する. そのとき $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対して

(i) $\lambda(\mu) > 1 \iff$ (MP),

(ii) $\lambda(\mu) > 1 \implies$ (L).