多次元連分数展開と数の同時近似

藤田岳彦

一橋大学商学部

本論説では、1 次元 2 次元の力学系により近似分数をつくる方法とその収束について調べていく。とりあげる力学系として、10 進展開、1 次元連分数展開、2 次元連分数展開 (Jacobi-Perron Algorithm, Modified Jacobi-Perron Algorithm)、1 と 2 の間の収束指数を持つ 1 次元力学系など（新しい Example）を選び、具体的に解析をおこなう。勿論、近似分数を作るやり方は、もう少し一般のある条件を満たす力学系でできるのだが、とりあげた力学系たちと全く同じ formalism でできるということを注意しておく。

0 Introduction

Example 0.1 $x \in [0,1]$, $x = 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\alpha_{n+1}\cdots$ （10進展開）に対し $x_n = 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}(=\frac{p_n}{10^n})$ はxの近似有理数を与える。すると明らかに、

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| &= 0.\underbrace{0\cdots0}_{n}\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\cdots \\ &\le \frac{1}{10^n} = \frac{1}{q_n(x)} \quad \text{が成立する。}\end{aligned}$$

まずこれを、力学系を通して議論していこう。

1 1 次元の力学系と近似分数の作り方

Example 0.1 に対して、以下の様な力学系 T を定義する。

$$T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

$$Tx = 10x - [10x]$$

これより

$$\begin{aligned}10x &= [10x] + Tx \\ x &= \frac{[10x]}{10} + \frac{Tx}{10} \\ Tx &= \frac{[10Tx]}{10} + \frac{T^2x}{10} \\ T^2x &= \frac{[10T^2x]}{10} + \frac{T^3x}{10} \\ &\vdots\end{aligned}$$

代入のくり返しにより

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{[10x]}{10} + \frac{[10Tx]}{10^2} + \frac{[10T^2x]}{10^3} + \frac{T^3x}{10^3} \\
&= \frac{[10x]}{10} + \frac{[10Tx]}{10^2} + \cdots + \frac{[10T^{n-1}x]}{10^n} + \frac{T^nx}{10^n}
\end{aligned}
$$

を得る。ここで

$$x_n := T^nx$$

として、以上の話を行列を用いて考える。

$$x = \frac{x}{1} = \frac{[10x] + Tx}{10} = \frac{[10x] + x_1}{10} \ldots (1)$$

これを次のように変形する。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ [10x] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ [10x_1] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

代入をくり返すことにより

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ [10x] & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ [10x_1] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{10^n} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ [10x] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ [10x_1] & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ [10x_{n-1}] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

を得る。ここで

$$
\begin{aligned}
M(x) &:= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ [10x] & 1 \end{pmatrix} \\
M_n(x) &:= M(x)M(x_1)\cdots M(x_{n-1}) \\
&= \begin{pmatrix} q_n(x) & q'_n(x) \\ p_n(x) & p'_n(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

（但し、$M_0(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。）
と定義すると

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} &= \frac{1}{10^n} M_n(x) \begin{pmatrix} 1 \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10^n} \begin{pmatrix} q_n(x) & q'_n(x) \\ p_n(x) & p'_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{q_n(x) + q'_n(x)x_n}{10^n} \\
x &= \frac{p_n(x) + p'_n(x)x_n}{10^n}
\end{aligned}
$$

より

$$x = \frac{x}{1} = \frac{p_n(x) + p'_n(x)x_n}{q_n(x) + q'_n(x)x_n}$$

を得る。この時近似分数として、$\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ をとる。では、このようにして得た近似分数の誤差はどのくらいだろうか？

誤差の作り方は以下の通りである。

$$M_{n+1}(x) = M(x)M_n(x_1)$$

つまり

$$\begin{pmatrix} q_{n+1}(x) & q'_{n+1}(x) \\ p_{n+1}(x) & p'_{n+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ [10x] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n(x_1) & q'_n(x_1) \\ p_n(x_1) & p'_n(x_1) \end{pmatrix}$$

より、以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} q_{n+1}(x) &= 10q_n(x_1)\ (= 10^{n+1})\ \ldots(2) \\ p_{n+1}(x) &= [10x]q_n(x_1) + p_n(x_1)\ldots(3) \end{aligned}$$

式 (1)(2)(3) より

$$\begin{aligned} q_{n+1}(x)x - p_{n+1}(x) &= 10q_n(x_1)\frac{[10x] + x_1}{10} - ([10x]q_n(x_1) + p_n(x_1)) \\ &= q_n(x_1)x_1 - p_n(x_1) \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} q_n(x)x - p_n(x) &= q_{n-1}(x_1)x_1 - p_{n-1}(x_1) \\ &= \cdots \\ &= q_0(x_n)x_n - p_0(x_n) \\ &= x_n \end{aligned}$$

となる。ところで

$$x = 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\alpha_{n+1}\cdots \qquad (10\text{進展開})$$

とすると

$$q_n(x)x - p_n(x) = x_n = 0.\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\cdots$$

$$|q_n(x)x - p_n(x)| = |x_n| \leq 1$$

より

$$\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| \leq \frac{1}{q_n(x)}$$

となり、$q_n(x)$ は $q_n(x) = 10^n$ なので、$n \to \infty$ の時 $\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ は x に収束する。

Example 1.1 （一次元連分数とユークリッドの互除法の射影化）

a_0, a_1 を $a_0 > a_1$ となる自然数とする。

ユークリッドの互除法 ： $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 - [\frac{a_0}{a_1}]a_1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$ （ユークリッドの互除法を何回も繰り返すと最大公約数dに到達する）

これを射影化する $\Downarrow$ （但し、$d = a_0$とa_1の最大公約数 とする）

$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a_0}{a_1} - [\frac{a_0}{a_1}] \end{pmatrix}$

$x = \frac{a_1}{a_0}$, $0 < x < 1$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}] \end{pmatrix}$$

これをふまえて、以下のような力学系を定義する。

$$T : [0,1] \to [0,1]$$
$$Tx = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$$
$$x_n := T^n x$$

とする。これより

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{[\frac{1}{x}] + Tx} = \frac{1}{[\frac{1}{x}] + x_1} \ldots (4)$$

となり, これを次のように考える。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} &= \frac{1}{[\frac{1}{x}] + x_1} \begin{pmatrix} [\frac{1}{x}] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} [\frac{1}{x}] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} M(x) &:= \begin{pmatrix} [\frac{1}{x}] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ M_n(n) &:= M(x)M(x_1)\cdots M(x_{n-1}) \\ &= \begin{pmatrix} q_n(x) & q_n'(x) \\ p_n(x) & p_n'(x) \end{pmatrix} \qquad \text{（但し、} M_0(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{とする。）} \\ \theta_n(x) &:= x x_1 \cdots x_{n-1} \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} &= \theta_n(x) M_n(x) \begin{pmatrix} 1 \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \theta_n(x) \begin{pmatrix} q_n(x) & q_n'(x) \\ p_n(x) & p_n'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} 1 &= \theta_n(x)(q_n(x) + q_n'(x)x_n) \\ x &= \theta_n(x)(p_n(x) + p_n'(x)x_n) \end{aligned}$$

となり

$$x = \frac{p_n(x) + p'_n(x)x_n}{q_n(x) + q'_n(x)x_n}$$

を得る。この時近似分数として、 $\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ をとる。ここで、誤差の評価を行う。
$M_{n+1}(x) = M(x)M_n(x_1)$ より

$$\begin{pmatrix} q_{n+1}(x) \\ p_{n+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\frac{1}{x}] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n(x_1) \\ p_n(x_1) \end{pmatrix}$$

となるので

$$\begin{aligned} q_{n+1}(x) &= [\frac{1}{x}]q_n(x_1) + p_n(x_1) \ldots (5) \\ p_{n+1}(x) &= q_n(x_1) \qquad\qquad\qquad \ldots (6) \end{aligned}$$

を得る。式 (4)(5)(6) より

$$\begin{aligned} q_{n+1}(x)x - p_{n+1}(x) &= ([\frac{1}{x}]q_n(x_1) + p_n(x_1))\frac{1}{[\frac{1}{x}] + x_1} - q_n(x_1) \\ &= -\frac{1}{[\frac{1}{x}] + x_1}(q_n(x_1)x_1 - p_n(x_1)) \\ &= (-x)(q_n(x_1)x_1 - p_n(x_1)) \end{aligned}$$

ここで $|-x| < 1$ より、Example0.1 より良い近似を与えることがわかる。

$$\begin{aligned} q_n(x)x - p_n(x) &= (-x)(q_{n-1}(x_1)x_1 - p_{n-1}(x_1)) \\ &= (-x)(-x_1)(q_{n-2}(x_2)x_2 - p_{n-2}(x_2)) \\ &= \cdots \\ &= (-x)(-x_1)\cdots(-x_{n-1})(q_0(x_n)x_n - p_0(x_n)) \\ &= (-1)^n\theta_n(x)x_n \end{aligned}$$

となり

$$|q_n(x)x - p_n(x)| \leq |\theta_n(x)|x_n \leq \theta_n(x)$$

そして

$$\begin{aligned} 1 &= \theta_n(x)(q_n(x) + q'_n(x)x_n) \\ &\geq \theta_n(x)q_n(x) \end{aligned}$$

より

$$\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| \leq \frac{\theta_n(x)}{q_n(x)} \leq \frac{1}{q_n(x)^2}$$

これより $\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ は $n \to \infty$ の時、exponential に x に収束する。(exponential(指数的) に収束とは

$$\text{収束指数} = \sup\left\{\alpha > 0; \exists A > 0,\ \text{有限個の}n\text{を除いて}\ \left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| < \frac{A}{q_n(x)^\alpha}\right\} > 1$$

であること。)

ところで、r 進展開と連分数展開のそれぞれの誤差は

$$r\text{進展開} \ : \ \left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| < \frac{A}{q_n(x)^1} \qquad (\text{収束指数}1)$$

$$\text{連分数展開} \ : \ \left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| < \frac{A}{q_n(x)^2} \qquad (\text{収束指数}2)$$

また、$\theta_n(x)$ ($\doteqdot \frac{1}{q_n(x)}$) は almost everywhere で以下のような order であることに注意しておく。$f(x) = \log x$ とするとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\log\theta_n(x) &= \frac{\log x + \log x_1 + \cdots + \log x_{n-1}}{n} \\ &= \frac{f(x) + f(Tx) + \cdots + f(T^{n-1}x)}{n} \end{aligned}$$

T はエルゴード的なので、バーコフのエルゴード定理が使えて、$d\mu = \frac{dx}{(1+x)\log 2}$ より

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\theta_n(x) &= \int_0^1 \frac{\log x}{\log 2}\frac{dx}{1+x} \\ &= -\frac{\pi^2}{12}\log 2 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \theta_n(x) &\sim \exp(-\frac{\pi^2}{12}\log 2)n \\ q_n(x) &\sim \exp(\frac{\pi^2}{12}\log 2)n \qquad (\text{近似分数の分母の増大度})\text{がわかる。} \end{aligned}$$

2 力学系の収束指数

$c > 0,\ \delta > 0$ をとってきて、

$$B^{\delta.c} = \left\{x \in [0,1]; \exists p,\ \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^{2+\delta}} \quad infinitely \ \ often \ \ q\right\}$$

条件 $|x - \frac{p}{q}| < \frac{c}{q^{2+\delta}}$ は、$|qx - p| < \frac{c}{q^{1+\delta}}$ とも考えられる。つまり、p は qx の *nearest intger* となり

$$A_q^{\delta.c} = \left\{x \in [0,1]; \exists p,\ \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^{2+q}} \ \right\}$$

は最大 q 個の区間からなるので

$$B^{\delta.c} = \limsup_{q\to\infty} A_q^{\delta.c} = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{q\geq m}^{\infty} A_q^{\delta.c}$$

$$\left|\bigcup_{q\geq m}^{\infty} A_q^{\delta.c}\right| \leq \sum_{q=m}^{\infty}\frac{2c}{q^{1+\delta}} < \ +\infty$$

よって、ボレル カンテリの補題より $\left|B^{\delta.c}\right| = 0$。つまり、$p_n(x),\ q_n(x)\ (n \to \infty$ のとき $q_n(x) \to \infty)$ が存在して

$$\delta > 0,\ \ \left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| < \frac{A}{q_n(x)^{2+\delta}}$$

となる x たちのルベーグ測度は 0 である。これは、絶対連続な不変測度を持つ 1 次元の力学系の収束指数は、決して 2 より大きくならないことを示している。だが、収束指数が 1 と 2 の間の力学系は存在するので例示してみよう。

Example 2.1 （収束指数が 1 と 2 の間の力学系の例）

$$T : [0,1] \to [0,1]$$
$$T(x) = \begin{cases} 2x & (0 \le x \le \frac{1}{2}) \\ \frac{1-x}{x} & (\frac{1}{2} < x \le 1) \end{cases}$$

ここで

$$\begin{aligned}
M(x) &:= \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (0 < x < \frac{1}{2}) \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & (\frac{1}{2} < x < 1) \end{cases} \\
\theta(x) &:= \max(\frac{1}{2}, x) \\
M_n(x) &:= M(x)M(Tx)\cdots M(T^{n-1}x) \\
&= \begin{pmatrix} q_n(x) & q_n'(x) \\ p_n(x) & p_n'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_n \end{pmatrix} \\
\theta_n(x) &:= \theta(x)\theta(Tx)\cdots\theta(T^{n-1}x)
\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} &= \theta_n(x) M_n(x) \begin{pmatrix} 1 \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \theta_n(x) \begin{pmatrix} q_n(x) & q_n'(x) \\ p_n(x) & p_n'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となり

$$q_n(x)x - p_n(x) = t_n(x)x_n$$

（ただし、$t(x) := \begin{cases} 1 & (0 < x < \frac{1}{2}) \\ -x & (\frac{1}{2} < x < 1) \end{cases}$ $\quad t_n(x) := t(x)t(x_1)\cdots t(x_{n-1})$ とする。）

よって

$$\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| \le \frac{t_n(x)}{q_n(x)}$$

ところで

$$2q_n(x)\theta_n(x) \ge 1 = \theta_n(x)(q_n(x) + q_n(x)x_n) \ge \theta_n(x)q_n'(x)$$

より

$$\frac{1}{2\theta_n(x)} \le q_n(x) \le \frac{1}{\theta_n(x)}$$
$$\frac{1}{n}\log\frac{1}{2} + (-\frac{1}{n}\log\theta_n(x)) \le \frac{\log q_n(x)}{n} \le \frac{-\log\theta_n(x)}{n}$$

エルゴード定理より、（不変測度 $d\mu(x)$は$d\mu(x) = \frac{\log 2}{1+x}dx$ であることはすぐにわかる：講演時の田中茂氏による注意）

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\theta_n(x) &= \int_0^1 \log(max(x, \frac{1}{2}))d\mu(x) \\
&= \mu([0, \frac{1}{2}])\log\frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \log x \, d\mu(x) \\
&= -A - B
\end{aligned}$$

（ただし、$A = -\mu([0,\frac{1}{2}])\log\frac{1}{2}$,　$B = -\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log x d\mu(x)$, $A, B > 0$ とする。）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\log t_n(x) = \int_0^1 \log t(x) d\mu(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\log x d\mu(x) = -B$$

$$q_n(x) \sim e^{(A+B)n}$$

$$t_n(x) \sim e^{-Bn}$$

$$\frac{t_n(x)}{q_n(x)} \sim \frac{e^{-Bn}}{e^{(A+B)n}} = \frac{1}{e^{(A+2B)n}} = \frac{1}{(e^{(A+B)n})^{\frac{A+2B}{A+B}}} \sim \frac{1}{q_n(x)^{\frac{A+2B}{A+B}}}$$

$$1 < \frac{A+2B}{A+B} < 2$$

よって、この力学系の収束指数は 1 と 2 の間である。つまり、この力学系は 10 進展開と連分数の間の収束指数を持つ新しい力学系の例である。

3　多次元の連分数

Example 3.1 二次元連分数アルゴリズム（*Jacobi Perron*：古典的なアルゴリズム）

a_0, a_1, a_2 を $a_0 > a_1, a_0 > a_2$ となる自然数とする。

ユークリッドの互除法 ：
$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 - [\frac{a_2}{a_1}]a_1 \\ a_0 - [\frac{a_0}{a_1}]a_1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

（但し、$d = a_0, a_1, a_2$の最大公約数 とする）

これを射影化する。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a_1}{a_0} \\ \frac{a_2}{a_0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a_2}{a_1} - [\frac{a_2}{a_1}] \\ \frac{a_0}{a_1} - [\frac{a_0}{a_1}] \end{pmatrix}$$

$x = \frac{a_1}{a_0}$, $y = \frac{a_2}{a_0}$　$(0 < x < 1,\ 0 < y < 1)$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{x} - [\frac{y}{x}] \\ \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \{\frac{y}{x}\} \\ \{\frac{1}{x}\} \end{pmatrix}$$

これに対する力学系は

$$T : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]\times[0,1]$$

$$T((x,y)) = (\{\frac{y}{x}\}, \{\frac{1}{x}\})$$

$$(x_n, y_n) := T^n(x,y)$$

$$x_1 = \frac{y}{x} - [\frac{y}{x}]$$

$$y_1 = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$$

より

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{1} &= \frac{1}{[\frac{1}{x}]+y_1} \\ \frac{y}{1} &= \frac{[\frac{y}{x}]+x_1}{[\frac{1}{x}]+y_1} \end{aligned}\right\}\cdots(1)$$

となり、行列を用いて

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{[\frac{1}{x}]+y_1}\begin{pmatrix} [\frac{1}{x}] & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ [\frac{y}{x}] & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
&= x\begin{pmatrix} [\frac{1}{x}] & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ [\frac{y}{x}] & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{と変形する。}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
M(x,y) &:= \begin{pmatrix} [\frac{1}{x}] & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ [\frac{y}{x}] & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
M_n(x,y) &:= M(x,y)M(x_1,y_1)\cdots M(x_{n-1},y_{n-1}) \\
&= \begin{pmatrix} q_n(x,y) & q'_n(x,y) & q''_n(x,y) \\ p_n(x,y) & p'_n(x,y) & p''_n(x,y) \\ r_n(x,y) & r'_n(x,y) & r''_n(x,y) \end{pmatrix} \qquad \left(\text{但し}M_0(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\text{とする。}\right) \\
\theta_n(x,y) &:= xx_1\cdots x_{n-1}
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \theta_n(x,y)M_n(x,y)\begin{pmatrix} 1 \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
x = \frac{x}{1} &= \frac{p_n(x,y)+p'_n(x,y)x_n+p''_n(x,y)y_n}{q_n(x,y)+q'_n(x,y)x_n+q''_n(x,y)y_n} \\
y = \frac{y}{1} &= \frac{r_n(x,y)+r'_n(x,y)x_n+r''_n(x,y)y_n}{q_n(x,y)+q'_n(x,y)x_n+q''_n(x,y)y_n}
\end{aligned}
$$

となり $\left(\frac{p_n(x,y)}{q_n(x,y)}, \frac{r_n(x,y)}{q_n(x,y)}\right)$ を（n-step めの）(x,y) の同時近似分数という。また

$$
\begin{pmatrix} q_{n+1}(x,y) \\ p_{n+1}(x,y) \\ r_{n+1}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\frac{1}{x}] & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ [\frac{y}{x}] & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_n(x_1,y_1) \\ p_n(x_1,y_1) \\ r_n(x_1,y_1) \end{pmatrix}
$$

より、式(1)を代入して

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} q_{n+1}(x,y)x - p_{n+1}(x,y) \\ q_{n+1}(x,y)y - r_{n+1}(x,y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (q_n(x_1,y_1)[\frac{1}{x}]+r_n(x_1,y_1))\frac{1}{[\frac{1}{x}]+y_1} - q_n(x_1,y_1) \\ (q_n(x_1,y_1)[\frac{1}{x}]+r_n(x_1,y_1))\frac{[\frac{y}{x}]+x_1}{[\frac{1}{x}]+y_1} - (q_n(x_1,y_1)[\frac{y}{x}]+p_n(x_1,y_1)) \end{pmatrix} \\
&= \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 1 & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_n(x_1,y_1)x_1 - p_n(x_1,y_1) \\ q_n(x_1,y_1)y_1 - r_n(x_1,y_1) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$D(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 1 & -y \end{pmatrix}$ として、$D_n(x,y) = D(x,y)D(x_1,y_1)\cdots D(x_{n-1},y_{n-1})$ とすると

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} q_n(x,y)x - p_n(x,y) \\ q_n(x,y)y - r_n(x,y) \end{pmatrix} &= D_n(x,y)\begin{pmatrix} q_0(x_n,y_n)x_n - p_0(x_n,y_n) \\ q_0(x_n,y_n)y_n - r_0(x_n,y_n) \end{pmatrix} \\
&= D_n(x,y)\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\left\| \begin{pmatrix} q_n(x,y)x - p_n(x,y) \\ q_n(x,y)y - r_n(x,y) \end{pmatrix} \right\| \le \|D_n(x,y)\| \left\| \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\| \le \sqrt{2}\|D_n(x,y)\|$$

ただし、$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2+y^2}$, また$\|D_n(x,y)\|$ は行列のユークリッドノルムとする。

これより収束はすぐにわかるが、この場合不変測度の形が具体的にわからなく、これ以上の評価（例えば指数収束するかどうか調べる）をすることはできないので、不変測度の形が具体的にわかるような力学系を考えたい。

4 Perron-Frobenius 作用素と不変測度

Example3.1 の Perron-Frobenius 作用素 $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} : \boldsymbol{L}_1 \to \boldsymbol{L}_1$$

$$\mathcal{L}f(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0\le k_1,\ 1\le k_2,\ k_1\neq 0} f(\tfrac{1}{k_2+y}, \tfrac{k_1+x}{k_2+y}) \times \tfrac{1}{(k_2+y)^3} & (x<y\text{のとき}) \\ \displaystyle\sum_{0\le k_1,\ 1\le k_2,\ k_1=0} f(\tfrac{1}{k_2+y}, \tfrac{k_1+x}{k_2+y}) \times \tfrac{1}{(k_2+y)^3} & (y<x\text{のとき}) \end{cases}$$

ここで、$\mathcal{L}f(\vec{x}) := \sum_{\mathrm{T}\vec{y}=\vec{x}} f(\mathrm{T}\vec{y})\frac{1}{|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}}|}$ 。また、$\mathcal{L}f=f,\ f\ge 0,\ \int f dx = 1$ となる f は不変測度の密度関数であることに注意しておく。

＊1 次元連分数の場合の不変測度＊

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\frac{1}{k+x})\frac{1}{(k+x)^2}$$

となるが、$f(x)=\frac{1}{1+x}$を右辺に代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{k+x}}\frac{1}{(k+x)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1+x)(k+x)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+1+x}) \\ &= \frac{1}{1+x} = f(x) \end{aligned}$$

よって、$d\mu = \frac{dx}{(\log 2)(1+x)}$は不変測度。

$\mathcal{L}f=f$ となる f は、expanding なら存在することは知られているが、Jacobi-Perron の場合には具体的な形は分からない。

5 Subadditive ergodic theorem と新しい 2 次元連分数

Example 5.1 *Modified Jaccobi-Perron Algorithm* (不変測度の形が具体的にわかる自然な多次元連分数展開)

a_0, a_1, a_2を$a_0 \geq a_1 \geq a_2$となる自然数とする。

$$\text{ユークリッドの互除法}\quad : \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_0 - [\frac{a_0}{a_1}]a_1 \end{pmatrix} \quad \text{の射影化}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a_1}{a_0} \\ \frac{a_2}{a_0} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a_2}{a_1} \\ \frac{a_0}{a_1} - [\frac{a_0}{a_1}] \end{pmatrix} \quad \text{を考える。}$$

$x = \frac{a_1}{a_0}$, $y = \frac{a_2}{a_0}$とすると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{x} \\ \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{x} \\ \{\frac{1}{x}\} \end{pmatrix} & (y < x\text{のとき}) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{y} - [\frac{1}{y}] \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \{\frac{1}{y}\} \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix} & (x < y\text{のとき}) \end{cases} \quad \text{となり}$$

これに対する力学系 T は

$$T(x,y) = \begin{cases} (\frac{y}{x}, \{\frac{1}{x}\}) & (y < x\text{のとき}) \\ (\{\frac{1}{y}\}, \frac{x}{y}) & (x < y\text{のとき}) \end{cases}$$

$$(x_n, y_n) := T^n(x,y)$$

を考えるのが自然である。

$y < x$のとき

$$x_1 = \frac{y}{x}, \quad y_1 = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$$

より

$$\begin{cases} x = \frac{1}{[\frac{1}{x}]+y_1} \\ y = \frac{x_1}{[\frac{1}{x}]+y_1} \end{cases}$$

$x < y$の時も同様にすると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} x \begin{pmatrix} [\frac{1}{x}] & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} & (y < x) \\ y \begin{pmatrix} [\frac{1}{y}] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} & (x < y) \end{cases}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
M(x,y) &:= \begin{cases} \begin{pmatrix} [\frac{1}{x}] & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (y<x) \\ \\ \begin{pmatrix} [\frac{1}{y}] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (x<y) \end{cases} \\
M_n(x,y) &:= M(x,y)M(x_1,y_1)\cdots M(x_{n-1},y_{n-1}) \\
&= \begin{pmatrix} q_n(x,y) & q'_n(x,y) & q''_n(x,y) \\ p_n(x,y) & p'_n(x,y) & p''_n(x,y) \\ r_n(x,y) & r'_n(x,y) & r''_n(x,y) \end{pmatrix} \\
\theta(x,y) &:= max(x,y) \\
\theta_n(x,y) &:= \theta(x,y)\theta(x_1,y_1)\cdots\theta(x_{n-1},y_{n-1})
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \theta_n(x,y)M_n(x,y)\begin{pmatrix} 1 \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix}
$$

これより

$$
x = \frac{x}{1} = \frac{p_n(x,y)+p'_n(x,y)x_n+p''_n(x,y)y_n}{q_n(x,y)+q'_n(x,y)x_n+q''_n(x,y)y_n}
$$

$$
y = \frac{y}{1} = \frac{r_n(x,y)+r'_n(x,y)x_n+r''_n(x,y)y_n}{q_n(x,y)+q'_n(x,y)x_n+q''_n(x,y)y_n}
$$

を得る。この時 (x,y) の近似分数として、 $(\frac{p_n(x,y)}{q_n(x,y)}, \frac{r_n(x,y)}{q_n(x,y)})$ をとる。

$$
\begin{pmatrix} q_{n+1}(x,y)x - p_{n+1}(x,y) \\ q_{n+1}(x,y)y - r_{n+1}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 1 & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_n(x_1,y_1)x_1 - p_n(x_1,y_1) \\ q_n(x_1,y_1)y_1 - r_n(x_1,y_1) \end{pmatrix} & (y<x) \\ \\ \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_n(x_1,y_1)x_1 - p_n(x_1,y_1) \\ q_n(x_1,y_1)y_1 - r_n(x_1,y_1) \end{pmatrix} & (x<y) \end{cases}
$$

$$
D(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 1 & -y \end{pmatrix} & (y<x) \\ \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -y & 0 \end{pmatrix} & (x<y) \end{cases}
$$

$$
D_n(x,y) = D(x,y)D(x_1,y_1)\cdots D(x_{n-1},y_{n-1})
$$

とおくと

$$
\begin{pmatrix} q_n(x,y)x - p_n(x,y) \\ q_n(x,y)y - r_n(x,y) \end{pmatrix} = D_n(x,y)\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}
$$ となる。

この場合 invariant measure の形が具体的にわかることが、以下の評価で重要となる。

Perron-Frobenius operator $\mathcal{L}$ は、

$$
\mathcal{L}f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\frac{1}{k+y}, \frac{x}{k+y})\frac{1}{(k+y)^3} + \sum_{k=1}^{\infty} f(\frac{y}{k+x}, \frac{1}{k+x})\frac{1}{(k+x)^3}
$$

だから、$f(x,y)=\frac{2+x+y}{(1+x)(1+y)(1+x+y)}$ は $\mathcal{L}f=f$, $f\geq 0$ を満たし $\frac{f}{\iint f\,dx\,dy}$ は不変測度の密度関数となる。
ここで

Subadditive ergodic Theorem 力学系 $T:X\to X$ はエルゴード的であるとし、

$$f_{n+m}(x)\leq f_n(x)+f_m(T^n x) \quad \text{とする。}$$

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}f_n(x)=\inf_n\frac{1}{n}\int_X f_n(x)d\mu$$

以下のようにこの定理を使う。
$f_n(\vec{x}):=\|D(\vec{x})D(T\vec{x})\cdots D(T^{n-1}\vec{x})\|=\|D_n(x,y)\|$ とおくと

$$\begin{aligned}
f_{n+m}(\vec{x}) &= \|D(\vec{x})D(T\vec{x})\cdots D(T^{n-1}\vec{x})D(T^n\vec{x})\cdots D(T^{n+m-1}\vec{x})\|\\
&\leq \|D(\vec{x})D(T\vec{x})\cdots D(T^{n-1}\vec{x})\|\|D(T^n\vec{x})\cdots D(T^{n+m-1}\vec{x})\|\\
&= f_n(\vec{x})f_m(T^n\vec{x})
\end{aligned}$$

(ただし、$\|A\|:=\max_{\vec{x}}\frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$ とし、この時 $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$ となる。)

$$\log f_{n+m}(\vec{x})\leq\log f_n(\vec{x})+\log f_m(T^n\vec{x})$$

より、Subadditive ergodic theorem が使えて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|D_n(x,y)\|=\inf_n\frac{1}{n}\iint_{[0,1]\times[0,1]}\log\|D_n(x,y)\|\frac{2+x+y}{(1+x)(1+y)(1+x+y)}dxdy\cdots(*)$$

以下、(*) の定積分< 0 (n=2 の場合) がシリンダーの定積分の評価 ([1],[2] 参照) により証明できる。

Theorem (*Modified Jacobi-Perron Algorithm* の指数収束、つまり収束指数 >1)
$\exists\delta>0$ *Lesbesgue a.e.* の $(\alpha,\beta)\in[0,1]\times[0,1]$ に対して、$\exists n_0=n_0(\alpha,\beta)$
$\forall n\geq n_0$

$$\begin{aligned}
\left|x-\frac{p_n(x,y)}{q_n(x,y)}\right| &< \frac{1}{q_n(x,y)^{1+\delta}}\\
\left|y-\frac{p_n(x,y)}{q_n(x,y)}\right| &< \frac{1}{q_n(x,y)^{1+\delta}}
\end{aligned}$$

略証: エルゴード定理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log q_n=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}\log\theta_n=-\iint_{[0,1]\times[0,1]}\log\theta\frac{2+x+y}{(1+x)(1+y)(1+x+y)}\,dx\,dy=c>0$$

だから

$$q_n\sim e^{nc}$$

これと

$$\left\|\begin{pmatrix}x-\frac{p_n(x,y)}{q_n(x,y)}\\ y-\frac{p_n(x,y)}{q_n(x,y)}\end{pmatrix}\right\|\leq\frac{\sqrt{2}\|D_n\|}{q_n(x,y)},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|D_n\|<0$$

を合わせれば上の定理が得られる。（詳しくは [1],[2] を参照）

References

[1] Fujita,T., Ito,S., Keane,M., and Ohtsuki,M. On almost everywhere exponential convergence of the modified Jacobi-Perron algorithm: a corrected proof. Ergod. Th. & Dynam.Sys. **16**, (1996), 1345-1352.

[2] Ito,S., Keane,M., and Ohtsuki,M. Almost everywhere exponential convergence of the modified Jacobi-Perron algorithm Ergod. Th. & Dynam.Sys. **13**, (1993), 319-334.