Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 49

Wiener展開の極限定理への応用

丸 山 儀 四 郎

9 8 0

セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

まえがき

ブラウン運動は，P. Lévy，N. Wiener が残した輝かしい業績の主要な部分に深くかかわっているが，両者の研究の傾向には顕著な違いが見られる。端的にいって，P. Lévy はブラウン運動の標本関数がもつ様々な性質を多面的な視野から追求したが，N. Wiener はブラウン運動が生成する関数空間上の測度の数理科学的応用を目標とした。

本稿は，ためらいなくいうなら，古典的な極限定理の研究において，後者の発想の具体化を試みたものである。対象とした極限定理は，中心極限定理とピリオドグラムに関する極限定理であるが，そのうち都合で，中心極限定理については，アウトラインを不充分に述べるにとどめた。

1979年12月　著者

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

目　次

頁

§1　序論 1
§2　Wiener展開 3
§3　多重Wiener積分による計算 5
§4　Wiener展開と極限定理 12
§5　諸定理と公式 20
§6　Wiener展開の掛け算 35
§7　$L^2(\beta)$ の種々の部分空間, CSDの表現 45
§8　CSDに関する評価 69
§9　$X(t)$ 有限のとき, $\xi_T(\varphi)$, $T\to\infty$ の行動 81
§10　$\xi_T(\lambda)$ の有限次元分布の収束 — 定理1の証明 95
§11　定理2の証明への準備 104
§12　定理2の証明 143

文献 149

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

Wiener展開の極限定理への応用

§1 序論

極限定理には,中心極限定理(CLT)から派生したものが少くない。CLTの研究は,大数の法則の研究についで古く,De Moivre以来独立確率変数の和を対象として進められた。今世紀の始Markovは CLTの適用限界を拡げる目的で,独立性をゆるめることを試み,マルコフ連鎖の概念に到達した。彼はこれをцепь とよんでいる(マルコフ選集)。一方近年になって,エルゴード理論との関連で,相関・混合性の量的把握を精密化することによって,定常過程に対するCLTの自然な定式化が行われるようになった[8]。その際利用される種々の混合性条件は,それぞれニュアンスを異にするが,何れもエルゴード理論の混合性の変形を精密化したものである。その意味でこれを強混合性とよぶ。

不変測度μを伴う力学系について。近年の一連の研究を通して,D. Ornsteinは,μ-保測変換が上に述べた混合性の一つをみたせば,それはベルヌイ系と同型であることを示した[13]。このことを用いると,力学系に附随する量の時間的経過$\{f_n\}_{-\infty}^{\infty}$はベルヌイ系列$x=(\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots)$のずらし$\theta$, $x\to\theta x$, $(\theta x)_n = x_{n+1}$, によって表わされ,$f_n=f(\theta^n x)$とかば,xはμのもとで,独立同分布系列である。更にfを適当にとることによって,x_iを$N(0,1)$(平均0,分散1)正規分布に従う変数として一般性を失わない。

確率論における解析の重要な足場としてInnovationがある。これを単純な形で定式化することはむつかしいが,代表的な例として,独立確率変数列$X_1, X_2, \cdots$から生れるσ-代数,$\mathcal{B}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n)$が与える情報(不確定性)の時間的発展$\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}_2\subset\cdots$がある。より複雑なInnovationの発現形式としてたとえばマルコフ性,マルチンゲールがある。何れにせよ,Innovationというのは,普通は,有限時間内に確率過程が状態空間上に生

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

成する情報の増大として把握される。これに対して，$\{\xi_n\}$を構成しているベルヌイ系列は，一般に確率過程が有限時間に経過する行動で完全に記述することができない内部構造としてのInnovationである。[13]の所論によってもxをξ_nの関数として表現することは不可能であり，Innovationについては初歩的段階に立っているといわねばならない。

以上離散時間を主に考えたが，連続時間，更に進んで連続空間径数（確率場）の場合となると，前記の事柄についてますます不明なことが多い。

これから，連続時間の場合をとりあげる。連続時間の場合，N(0,1)－ベルヌイ系列に形式的に対応するものとして，[illegible]白色雑音（ブラウン運動の微分）$\dot{B}_t$がある。前述のような状況下で，理論的根拠は充分でないが，強い混合性を示す力学系上の量の時間的変化f_tの主要なクラスを$\dot{B}_t$のずらしの汎関数$f_t=f(\theta_t\dot{B})$，$\dot{B}=(\dot{B}_t,\ -\infty<t<\infty)$で表わすことは自然であろう。確率場の場合，同様の趣旨でBの代りにBrownian Sheetを用いる。

前述の強混合性条件の一例としてつぎのようなものがある。$X(t)$を強定常過程とし

$$\mathcal{B}_a^{\infty}=\sigma(X(t),\ a\le t<\infty)$$

$$\mathcal{B}_{-\infty}^{a}=\sigma(X(t),\ -\infty<t\le a)$$

$$\alpha(\tau)=\sup_{A\in\mathcal{B}_{-\infty}^{0},\ B\in\mathcal{B}_{\tau}^{\infty}}|P(A\cap B)-P(A)P(B)|$$

とおき，$\alpha(\tau)\longrightarrow 0\ (\tau\longrightarrow\infty)$のとき，$X(t)$は強混合性をもつという。$\alpha(\tau)$が，$\tau\longrightarrow\infty$のとき，0に収束する速さに若干の附帯条件をつけると，

$$\int_0^T X(t)\,dt$$

は適当な尺度変換のもとで，$T\longrightarrow\infty$に対して，$N(0,1)$に法則収

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

束することが示される。$\alpha(\tau)\to 0\ (\tau\to\infty)$ は，重要なクラスを決定する自然な条件であるが，また比較的単純な確率過程でもこれをみたさない。たとえば，$X(t)$ が平均 0 の定常過程だとすると，$\alpha(\tau)\to 0\ (\tau\to\infty)$ ならば，予測理論でよく知られているように，$X(t)$ のスペクトル密度 $f(\lambda)$

$$E(X(t)X(0)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$$

は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda > -\infty$$

をみたさなければならない。この条件をみたさない具体例は，また，やはり上記混合条件をみたさない正規定常過程の簡単な汎関数として数多く存在する。この意味で，強混合性による方法には限界があるといわなければならない。

§2 Wiener 展開

白色雑音 $\dot{B}$ の可測汎関数 $X = f(\dot{B})$ という概念は N. Wiener によって創められた。彼はこの概念が数理科学の諸問題で重要な意味をもつとの認識[15]，[16]にたって，汎関数 $f(\dot{B})$ 解析の基礎を築いた。伊藤[9]，[10]は新しい概念多重ウィーナー積分を使って，$f(\dot{B})$ を一層明確，実質的な形 ―"$\dot{B}_t$ の直交多項式展開"に表現することによってこの領域に有力な研究方法をもたらした。それによれば，$E|X(t)|^2$ をみたす定常過程 $X(t) = f(\theta_t \dot{B})$ は

$$(2.1)\qquad X(t) = EX(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{R^k} \hat{C}_k(t_1+t, \cdots, t_k+t)\, d^k B$$

$$d^k B = dB(t_1)\, dB(t_2) \cdots dB(t_k)$$

ここに $\hat{C}_k(t) \in L^2(R^k)$ は対称関数 $C_k(\lambda) \in L^2(R^k)$ のフーリエ変換

$$\hat{C}_k(t) = (2\pi)^{-k/2} \int_{R^k} C_k(\lambda) \exp(-i\lambda\cdot t)\, d\lambda$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

である。従ってパーセバルの等式に相当して(2.1)を周波領域に変換すれば

$$(2.2)\qquad X(t)=EX(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{R^k}c_k(\lambda)\,e_k(\lambda,t)\,d^k\beta$$

$$e_k(\lambda,t)=\exp(i[\lambda_1+\cdots+\lambda_k]t),$$

$$(2.3)\qquad \dot\beta(\lambda)=\hat{\dot B}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\dot B(t)\,dt\ .$$

$\dot\beta(\lambda)$を$I=[\lambda_1,\lambda_2]$上で積分して得られる区間関数を$\beta(I)$とするとき，定義から容易に基本性質

$$(2.4)\qquad \overline{\dot\beta(\lambda)}=\dot\beta(-\lambda),\ E\left(\beta(I)\right)^2=0,\ E|\beta(I)|^2=\lambda_2-\lambda_1\ (0$$

$\le\lambda_1<\lambda_2$)が出る。$X(t)$が実数値のとき，$\hat c_k$が実数値であって，

$$(2.5)\qquad \overline{c_k(\lambda)}=c_k(-\lambda)\ .$$

(2.1),(2.2)の右辺の一般項は多重ウィーナー積分であって，それらは複測度d^kB, $d^k\beta$による対角線外領域($t_i-t_j\neq 0$, $\lambda_i\pm\lambda_j\neq 0$ $(1\le i<j\le k)$)上の積分である。これらを導くこと，展開の一意性，直交性など，基礎的部分の説明を省略し，§3に積分の直感的理解と，その有効な計算法則を解説する。

$\dot B$の代りに，連続スペクトルをもつ実正規定常過程

$$(2.6)\qquad X_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\,d\beta_0(\lambda)$$

を基礎におくことができる。このとき(2.4)に対応して，β_0は

$$(2.4)'\qquad \overline{\dot\beta_0(\lambda)}=\dot\beta_0(-\lambda),\ E\left(\beta_0(I)\right)^2=0,\ E|\beta_0(I)|^2=\sigma(I)\ (0\le\lambda_1<\lambda_2)$$

をみたす。ただし$d\sigma$は$(-\infty,\infty)$上の連続対称な有界測度。今後述べるほとんどの場合は，$d\sigma$が絶対連続

$$d\sigma=f(\lambda)\,d\lambda$$

となる場合である。このとき，$X_0(t)$, $\dot B(t)$何れとも定常として

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

と本質的な相違はない。$X_0(t)$, $-\infty<t<\infty$, が生成する流れ(保測変換群)は, 超汎函数的な変換 $d\beta_0(\lambda) \to \theta_t(d\beta_0(\lambda)) = e^{i\lambda t}d\beta_0(\lambda)$, をもとにする $\theta_t(d^k\beta_0) = e_k(\lambda,t)\,d^k\beta_0$ から生成される。

§3 多重ウィーナー積分による計算

今後は,便宜上主として(2.6)の$d\beta_0$から生成される確率過程を考え,β_0を単にβとかく。この$d\beta$による多重ウィーナー積分を用いて行う計算法に進む前に,二重積分を通してその具体的な理解について述べる。

基本になるR^2上の符号測度$d\gamma$は$d\beta(\lambda)$の直積$d\gamma(\lambda,\mu)=d\beta(\lambda)\cdot d\beta(\mu)$であり,従って対角線$\lambda=\mu$に関して対称になるべきものであるから,半空間($\lambda\ge\mu$)の長方形で定めればよい。

γを定める手続き。$A=I\times J$, $I=(\lambda_1\le\lambda<\lambda_2)$, $J=(\mu_1\le\mu<\mu_2)$に対して$\gamma(A)=\beta(I)\cdot\beta(J)$等と定める。つぎに,互に重ならないこのような長方形A_iの有限和$B=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$とかける図形Bの全体を$\mathcal{A}$とする。$\gamma(B)=\sum_{i=1}^{n}\gamma(A_i)$とおけば,この値は,$B$のこの表わし方によらず一意に定まる。コンパクト集合Kがあるとき,Kを$\mathcal{A}$の元により外から"近似"することによって,$\gamma(K)$が定まり,ボレル集合BをBに含まれるコンパクト集合の列K_nによって内側から"近似"することにより,$\gamma(K_n)$の極限として$\gamma(B)$が定まる。以上のことが可能であることは,$d\sigma$の直積$d\sigma(\lambda)d\sigma(\mu)=d^2\sigma$の性質を用いて示される。

以上の手続きに関連して注意すること。区間$[a,b]$の分割$\Delta: a=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=b$をとる。(2.4)'から

$$(3.1)\qquad \underset{|\Delta|\to 0}{p\lim}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\beta(I_i)\right)^2=0,\quad \underset{|\Delta|\to 0}{p\lim}\sum_{i=0}^{n-1}|\beta(I_i)|^2=\sigma(b)-\sigma(a)$$

$$|\Delta|=\max(\lambda_{i+1}-\lambda_i),\quad I_i=[\lambda_i,\lambda_{i+1}]$$

$$p\lim = \text{limit in probability}$$

この事実は,対角線$\lambda=\mu$, $\lambda+\mu=0$上に出来るγ測度が,それぞれnon-randomな0および$d\sigma$であることを示している。それ

故γを$\mathcal{D}=(\mu<\lambda,\ \lambda\pm\mu\neq0)$上で考えればよい。そうすると示した集合$A, B\subset\mathcal{D}$に対して

$$(3.2)\qquad E(\gamma(A)\overline{\gamma}(B))=m(A\cap B),\ dm=d\sigma\cdot d\sigma$$

が成立する。$d\gamma$を$d^2\beta$, dmを$d^2\sigma$とかく。

対角線外の領域上の測度$d^2\beta$から，$f(\lambda,\mu)\in L^2(d^2\sigma)$に対して二重積分

$$(3.3)\qquad I(f)=I_2(f)=\int_{R^2} f(\lambda,\mu)\,d^2\beta$$

が定まる。$d^2\beta$の台は$(\lambda\pm\mu\neq0)$であるから，$I(f)$を

$$\int_{\lambda\pm\mu} f(\lambda,\mu)\,d^2\beta$$

とかくべき所を，簡単のため，(3.3)で表わす。一般に$\{\lambda_i\pm\lambda_j\neq0,\ 1\leq i\neq j\leq n\}$上の測度$d^n\beta$が定義され，$f(\lambda)\in L^2(d^n\sigma)$, $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$を積分核とする

$$I(f)=I_n(f)=\int_{R^n} f(\lambda)\,d^n\beta$$

が定まる。写像$f\longrightarrow I_n(f)$は1-1ではない。即ち異る積分核f, gに対して$I_n(f)=I_n(g)$となりうる。然し積分核を対称関数の空間のみに限ると，この写像は1-1であって

$$(3.4)\qquad E|I_n(f)|^2=n!\,\|f\|_2^2\quad(\|\cdot\|_2=L^2(d^n\sigma)\text{のノルム})$$

（定義）$\xi_i\ (1\leq i\leq m)$は何れもm次モーメント有限な実確率変数とするとき，そのキュムラント(cumulant) $S(\xi_1,\cdots,\xi_m)$を

$$S(1,\cdots,m)\equiv S(\xi_1,\cdots,\xi_m)=i^{-m}\frac{\partial^m}{\partial\alpha_1\cdots\partial\alpha_m}\log E\exp(i\alpha_1\xi_1+\cdots+i\alpha_m\xi_m)$$

で定義する。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

特に $m=1$ のとき, $S(\xi_1)=E(\xi_1)$, $m=2$ のとき $S(\xi_1,\xi_2)$
$=\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)$。
$E(\xi_1\xi_2\cdots\xi_m)$ を $M(1,\cdots,m)$ で表わす。

キュランドの性質。
(i) $S(1,\cdots,m)$ は, $1,\cdots,m$ について対称
(ii) $\xi_1,\cdots,\xi_m$ のどれかが定数確率変数なら
$S(1,\cdots,m)=0$; c を定数とすれば

$$S(\xi_1+c,\xi_2,\cdots,\xi_m)=S(1,2,\cdots,m)$$

$$S(c\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)=c\,S(1,2,\cdots,m)$$

(iii) η_{ij} $(1\le i\le m,\ 1\le j\le l)$ は何れも m 次モーメント有限な実確率変数とし

$$\xi_i=\sum_{j=1}^{l}\eta_{ij}$$

とおけば, S は多重線形

$$S(1,\cdots,m)=\sum_{1\le j_1,\cdots,j_m\le l}S(\eta_{1j_1},\cdots,\eta_{mj_m}) \tag{3.5}$$

(iv) M は S で, S は M で表わされる。
変換 $M\to S$, $S\to M$ の一般公式が知られている[17]。その例として, $m=4$ の場合 $S\to M$ 変換公式は

$$\begin{aligned}M(1,2,3,4)&=S(1,2,3,4)+S(1)S(2,3,4)\\&+S(2)S(1,3,4)+S(3)S(1,2,4)+S(4)S(1,2,3)\\&+S(1,2)S(3,4)+S(1,3)S(2,4)+S(1,4)S(2,3)\\&+S(1)S(2)S(3,4)+S(1)S(3)S(2,4)\\&+S(1)S(4)S(2,3)+S(2)S(3)S(1,4)+S(2)S(4)S(1,3)\\&+S(3)S(4)S(1,2)+S(1)S(2)S(3)S(4)\end{aligned} \tag{3.6}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

右辺をかき下す手順は簡単である。それは，集合(1,2,3,4)のあらゆる分割を考えることに帰着する。この手順はあらゆるmに対して成り立つ。後に$m=8$の場合が必要になるが，ここにかき出す必要はあるまい。$M\to S$変換公式も，同様の手順に従い，形も(3.6)に類似している。

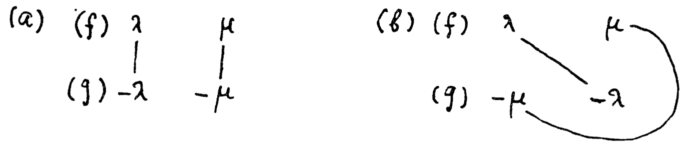
多重ウィーナー積分に関する公式

これから必要になる公式の核心は，(2.4)′を手みじかにいえば$(d\beta)^2\sim 0$，$|d\beta|^2\sim d\sigma$に要約される。今後現れる一切の積分において，領域を明示しないときは，積分は全空間でとるものとする。

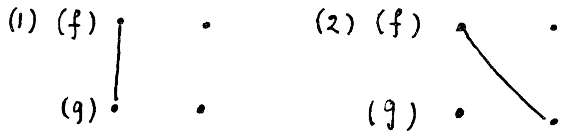
1° $f(\lambda,\mu),\ g(\lambda,\mu)\in L^2(d^2\sigma)$に対して

(3.7) $$\int f(\lambda,\mu)\,d^2\beta\int g(\lambda,\mu)\,d^2\beta$$

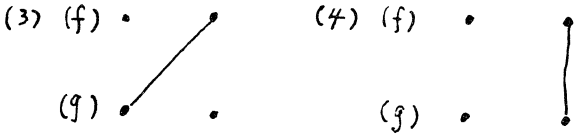
$$=\left(\int f(\lambda,\mu)g(-\lambda,-\mu)\,d^2\sigma+\int f(\lambda,\mu)f(-\mu,-\lambda)\,d^2\sigma\right)$$



$$+\int d^2\beta\left(\int f(\lambda,\cdot)g(-\lambda,\cdot)\,d\sigma+\int f(\lambda,\cdot)g(\cdot,-\lambda)\,d\sigma(\lambda)\right.$$



$$\left.+\int f(\cdot,\lambda)g(-\lambda,\cdot)\,d\sigma(\lambda)+\int f(\cdot,\lambda)g(\cdot,-\lambda)\,d\sigma(\lambda)\right)$$



Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$+\int f(\lambda,\mu)\,g(\lambda',\mu')\,d^2\beta,$$

f, g の自変数・は $d^2\beta$ による積分変数を示す。f, g が対称関数のときは $(a)=(b)$, $(1)=(2)=(3)=(4)$ であるから，加算の代りに，代表項をえらんだ上，4倍して右辺を簡単にすることができる。一般に $E(I_n(f))=0$ であるから

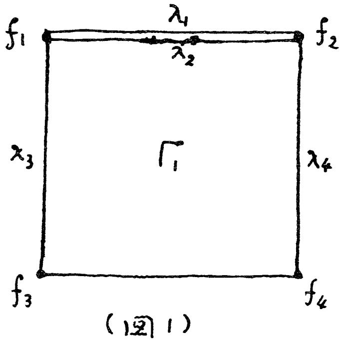
$$(3.8)\qquad E\big(I(f)\cdot I(g)\big)=(3.7)\text{の第一項}$$

この事実を一般化するための準備。

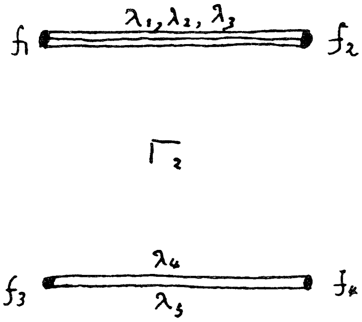
関数族 $F=(f_i(\lambda^{(i)}),\ 1\le i\le k)$，ベクトル $\lambda^{(i)}$ の次元 $\dim(\lambda^{(i)})=n_i$ が与えられている。$n_1+\cdots+n_k$ が偶数 $2m$ のとき，$\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(k)}$ の成分の全体を Λ とする。Λ を，Λ の二つの元から成る $2m$ 個のカップル (a_i,b_i), $1\le i\le m$ に組み合わせる。ただし a_i, b_i は異るベクトルの成分とする。積 $f_1\cdots f_k$ の自変数にかきかえ

$$\Gamma:\ a_1\to\lambda_1,\ b_1\to-\lambda_1,\ \cdots,\ a_m\to\lambda_m,\ b_m\to-\lambda_m$$

を行ってできる関数を $F(\Gamma)=F(\Gamma;\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ とかく。操作 Γ は，f_i の自変数間の結合を示すグラフと同等である。図1, 2は，$F=(f_i(\lambda^{(i)}),\ 1\le i\le 4)$, $\dim(\lambda^{(1)})=\dim(\lambda^{(2)})=3$, $\dim(\lambda^{(3)})=\dim(\lambda^{(4)})=2$ について二種類のグラフ Γ_1, Γ_2 を示す。



(図1)



(図2)

グラフは4頂点，f_i $(1\le i\le 4)$ と，変数を結合する線分＝稜から成る。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

図形として Γ が連結か非連結かに応じ、それぞれ Γ を連結、非連結グラフとよび、対応する $F(\Gamma)$ を連結、非連結核とよぶ。図の Γ_1, Γ_2 はそれぞれ連結、非連結グラフである。k 個の頂点をもつグラフを k ―グラフとよぶ。

(3.9) $$F(\Gamma_1,\lambda) = f_1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\, f_2(-\lambda_1,-\lambda_2,\lambda_4)\, f_3(-\lambda_3,\lambda_5)\, f_4(-\lambda_4,-\lambda_5)$$
（連結核）

$$F(\Gamma_2,\lambda) = f_1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\, f_2(-\lambda_1,-\lambda_2,-\lambda_3)\, f_3(\lambda_4,\lambda_5)\, f_4(-\lambda_4,-\lambda_5)$$
（非連結核）

F をもとにできる k ―グラフの全体を $\mathcal{G}_k(F)$，連結 k ―グラフの全体を $\mathcal{C}_k(F)$ で表わす。$\mathcal{C}_k(F) \subset \mathcal{G}_k(F)$． k ―グラフ，連結 k ―グラフの全体をそれぞれ $\mathcal{G}_k$, $\mathcal{C}_k$ で表わす。$\mathcal{C}_k(F)$，$\mathcal{G}_k(F)$ は空になることがある。$n_1+\cdots+n_k$ が奇数のとき，上の操作はできないので $\mathcal{C}_k(F)$，$\mathcal{G}_k(F)$ は空と考える。

2° 前記の F に対して

(3.10) $$E\big(I(f_1)\cdots I(f_k)\big) = \sum_{\Gamma\in\mathcal{G}_k(F)} \int F(\Gamma,\lambda)\, d^m\sigma$$
$$\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$$

(3.11) $\mathcal{G}_k(F)$ が空なら，右辺を 0 とおく。従って $n_1+\cdots+n_k$ が奇数なら，(3.10) の値は 0．

3° $I_n(f)$ は任意次数のモーメントをもつ

キュムラントに対して，つぎの有用な公式が成り立つ

4° （木下俊之）前記の F に対して

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(3.12)\quad S(I(f_1),\cdots,S(f_k))=\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_k(F)}\int F(\Gamma,\lambda)\,d^m\sigma$$

ただし $\mathcal{C}_k(F)$ が空のときは，右辺は 0 と考える。従って $n_1+\cdots+n_k$ が奇数のとき (3.12) の値は 0.

(証明) 帰納法による。

(i) $k=1$ のとき成立，

$$S(I(f_1))=E(I(f_1))=0$$

(ii) $k\geq 2$ のとき，$k-1$ 個以下の場合に成立するとして，k個の場合を証明する。キムラントに関する公式から

$$\begin{aligned}(3.13)\quad E(I(f_1)\cdots I(f_k))&=S(I(f_1),\cdots,I(f_k))\\&+S(I(f_1))S(I(f_2),\cdots,I(f_k))+\cdots\\&+S(I(f_1),I(f_2))S(I(f_3),\cdots,I(f_k))+\cdots\\&+\cdots\end{aligned}$$

$n_1+\cdots+n_k=$奇数のとき，(3.13)の左辺$=0$，右辺の第二項以下は，帰納法の仮定から0，従って(3.12)の結果が成り立つ。$n_1+\cdots+n_k$ が偶数のとき，(3.13)の第二項以下の和の各項を帰納法の仮定を用いて連結核の積分の積で表わすことにより，(3.13)の第二項以下の和は

$$\sum_{\Gamma\in\mathcal{D}}\int F(\Gamma,\lambda)\,d^m\sigma$$

とかける。ただし $\mathcal{D}$ は $\mathcal{G}_k(F)$ の部分集合で，非連結 Γ より成る。それゆえ

$$S(I(f_1),\cdots,I(f_k))=\sum_{\Gamma\in\mathcal{G}_k(F)}\int F(\Gamma,\lambda)\,d^m\sigma-\sum_{\Gamma\in\mathcal{D}}\int F(\Gamma,\lambda)\,d^m\sigma$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$= \sum_{\Gamma \in \mathcal{C}_k(F)} \int F(\Gamma, \lambda)\, d^m\sigma \qquad \text{QED}$$

§4 Wiener展開と極限定理

CLTは種々の極限定理の基本である。ここでは，はじめにWiener展開のCLTへの応用を証明を省略して述べる。$d\sigma(\lambda) = f(\lambda)d\lambda$とし，$f$は有界として一般性を失わない。$\dot{B}$に従属する定常過程を，$f$が有界であるような$\dot{\beta}$から生成できるからである。$\dot{\beta}$から生成される実定常過程，即ち(2.2)の形のものの全体を$\mathfrak{S}(\beta)$で表わす。$c_k \in \hat{L}^2(d^k\sigma)$は(2.5)をみたす対称関数である。このような関数c_kの全体を$\mathcal{L}^2(d^k\sigma)$で表わす。$X(t)$は関数列$\{c_0, c_1 e_1(\lambda,t), \cdots\}$と同一視できるので，$X(t) = \{c_0, c_1 e_1(\lambda,t), \cdots\}$ともかく。

今後簡単のため$EX(0)=0$とする。

相関々数は

$$(4.1) \qquad R(t) = E\big(X(t)X(0)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} k! \int |c_k(\lambda)|^2 e_k(\lambda,t)\, d^k\sigma$$

$$= \int e^{i\lambda t} f_2(\lambda)\, d\lambda$$

ただし

$$f_2(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{2,k}(\lambda)$$

$$(4.2) \qquad f_{2,1}(\lambda) = c_1(\lambda) f(\lambda), \quad f_{2,k}(\lambda)$$

$$= k! \int |c_k(\lambda-\lambda_1-\cdots-\lambda_{k-1}, \lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1})|^2 f(\lambda_1)\cdots f(\lambda_{k-1})$$

$$\times f(\lambda-\lambda_1-\cdots-\lambda_{k-1})\, d\lambda_1 \cdots d\lambda_{k-1}$$

$$(k \geq 2)$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

また，$0<\delta<1$ として

(4.3) $$v(T)=v_X(T)=V\left(\int_0^T X(s)\,ds\right)=2\int_0^\infty\left(\frac{\sin\lambda T/2}{\lambda/2}\right)^2 f_2(\lambda)\,d\lambda$$

(4.4) $$=2T^{-1}\left(\int_0^{1/T}+\int_{1/T\le\lambda\le\delta}+\int_{\delta\le\lambda<\infty}\right)\left(\frac{\sin\lambda T/2}{\lambda/2}\right)^2 f_2(\lambda)\,d\lambda\ ,$$

$$V=分散$$

とおいて

$$\Phi(\lambda)=\int_0^\lambda f_2(x)\,dx\ ,\quad h=1/T\quad(T\to\infty)$$

とおけば，

(4.4)オ一項 $\asymp \Phi(h)/h$，即ち $0<c_1<c_2$ が存在して

$$c_1\frac{\Phi(h)}{h}<\text{(4.4)オ一項}<c_2\frac{\Phi(h)}{h}\ ,$$

(4.4)オ三項 $\le \dfrac{8}{T\delta^2}\|f\|_1 \qquad (\|\cdot\|_1=L^1\text{-ノルム})$

(4.4)オ二項 $\le 8T^{-1}\displaystyle\int_{T^{-1}\le\lambda\le\delta} f_2(\lambda)\lambda^{-2}\,d\lambda$

$$=\Phi(\lambda)\lambda^{-2}\Big]_{T^{-1}}^{\delta}\cdot 8T^{-1}+16T^{-1}\int_{T^{-1}}^{\delta}\Phi(\lambda)\lambda^{-3}\,d\lambda$$

$$=8\left(\Phi(\delta)/\delta^2\right)T^{-1}-8\Phi(h)/h+16\,\theta\left(1-\frac{1}{T\delta}\right)\sup_{0<\lambda<\delta}\lambda^{-1}\Phi(\lambda)$$

$$(0<\theta<1)$$

(4.5) $$v(T)/T\le \mathrm{const}\left(1/T\delta^2+\sup_{0<\lambda<\delta}\lambda^{-1}\Phi(\lambda)\right)$$

一方 (4.2) を用いて

$$\frac{1}{h}\int_0^h f_{2,k}(\lambda)\,d\lambda\le k!\int f(\lambda_1)\cdots f(\lambda_{k-1})\,d\lambda_1\cdots d\lambda_{k-1}$$

(4.6) $$\times\sup_{0<b-a<h}\frac{1}{b-a}\int_a^b|c_k(\lambda,\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1})|^2 f(\lambda)\,d\lambda\equiv\Phi_k(h),$$

$\Phi_k(h)$ は h について単調増加

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$X_n(t) = X(t)$ のWiener展開の第n項までの和, $\Delta_n(t) = X(t) - X_n(t)$

とおけば, (4.5), (4.6)より

(4.7) $$v_{\Delta_n}(T)/T = T^{-1} V\left(\int_0^T \Delta_n(t)\,dt\right) \le \text{const}\left(1/T\delta^2 + \sum_{k \ge n+1} \Phi_k(h)\right)$$

条件

(A) 自然数k_0と, 定数 $0 < \delta_0 < 1$ があって

(4.8) $$\sum_{k \ge k_0} \Phi_k(\delta_0) < \infty$$

をみたせば

$$\lim_{\substack{T \to \infty \\ n \to \infty}} T^{-1} v_{\Delta_n}(T) = 0,$$

nを大きくとっておけば $V\left(T^{-1/2}\int_0^T \Delta_n(t)\,dt\right)$ を小さくおさえることができる。このことを用いてつぎのことが証明される[12]。

(定理) $f(\lambda)$ 有界と仮定する。 $X(t)$ が条件

(i) 条件 (A)

(ii) (4.9) $v_X(T) \asymp T \quad (T \to \infty)$

(iii) 任意の $\varepsilon > 0$, k に対して

(4.10) $$\lim_{h \downarrow 0} \Phi(\delta(|c_k|^2), h)/h = 0,$$

ただし, $\Phi(\delta(|c_k|^2), h)$ は $|c_k|^2$ の関数

$$\Phi(|c_k|^2, h) = \int_0^h f_{2,k}(\lambda)\,d\lambda$$

の$|c_k|^2$ に $\delta(|c_k|^2) \equiv |c_k|^2 - |c_k|^2 \wedge (\varepsilon T^{1/3})$ を代入したもの, をみたせば ($a \wedge b = \min(a, b)$)

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\frac{1}{\sqrt{v(T)}}\int_0^T X(s)\,ds \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)\ , \quad T\to\infty .$$

$$\left(\xrightarrow{\mathcal{L}} = \text{法則収束}\right)$$

c_k は元来

$$\sum_{k\geq 1} k!\,\|c_k\|_2^2 < \infty \qquad (\|\cdot\|_2 = L^2\text{-ノルム})$$

をみたしているので，(A) はこれを少し強化したものである。c_k が有界なら (4.10) は自動的にみたされるし，非有界でも妥当な関数ならみたされる。また c_k が妥当な関数なら (4.9) も成り立つ。

$\xi \in R^k$ をパラメターとする定常確率場が，Brownian sheet noise $\dot{B}(t)$, $t\in R^k$ から生成されているとき，$\dot{B}$ の Fourier 変換 $\hat{B}$ を用いて

$$X(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\int c_k(\lambda)\exp(i[\lambda_1+\cdots+\lambda_k]\cdot\xi)\,d^k\hat{B}$$

とかき，前記と同様な定式化のもとで CLT が証明される。即ち

$$v(T)=V\left(\int_{D(T)} X(\xi)\,d\xi\right)\asymp T^n,\quad D(T)=[0,T]^n$$

のほか，前記と同様の条件のもとで

$$v(T)^{-1/2}\int_{D(T)} X(\xi)\,d\xi \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$

定常過程に関する既知の極限定理では，ほとんどの場合，§1 の強混合性を用いており，一見不可欠のような印象をあたえているが，必ずしもそうではない。それらの中には，エントロピー 0 の力学系 $\{T_t\}$ に附随した量 $X(t)=f(T_t\omega)$ — 従って白色雑音（ガウス非ガウス何れにせよ）から生成されないもの，について成り立つものがある。たとえば，正規過程 $X(t)$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

の相関関数 $R(t)$ がある小さな $\alpha>0$ について

$$R(t)=O(|t|^{-\alpha}) \quad (|t|\to\infty)$$

をみたしている場合である。ここではCLTについてのべる。

Wiener–Wintner によれば、$[-\pi,\pi]$ 上に、連続特異な対称測度を構成し

$$R(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,d\sigma(\lambda)=O(|t|^{-1/2+\varepsilon}),\quad \varepsilon>0$$

をみたすようにすることができ、$\varepsilon>0$ をどのようにも小さくとることができる。$R(t)$ を相関函数にもつガウス定常過程が生成する力学系は、エルゴード理論での普通の混合性をもち、可算ルベーグスペクトル(Hellinger–Hahn スペクトル)をもつ[11]が、そのエントロピーは0である。しかし、つぎの意味でこの力学系に附随した沢山の量がCLTに従う。$c_k(\lambda)$ がある程度なめらかで、$|\lambda|\to\infty$ に対し、ある程度の早さで $c_k(\lambda)\to 0$ であれば

$$X(t)=\sum_{k\ge 3}\int c_k(\lambda)\,e_k(\lambda,t)\,d^k\beta$$

に対して[12]

$$v(T)^{-1/2}\int_0^T X(t)\,dt \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$

つぎに、残りの節にわたって証明を行う、ピリオドグラムの極限定理について述べる。この定理は時系列のスペクトル解析の基礎をなすものであるが、中心極限定理から派生したものである。若干の準備をする。

$X(t)$ を m 次モーメントをもつ強定常過程とする。$(t_2,\dots,t_m)$ の関数 $S(X(t_m),\dots,X(t_3),X(t_2),X(0))$ が $f_m\in L^1(R^m)$ のフーリエ変換

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(4.11)\qquad S(X(t_m),\cdots,X(t_2),X(0)) = \int f_m(x)\exp\Big(i\sum_{k=1}^{m-1} t_{m-k+1}x_k\Big)dx$$

$$x=(x_1,\cdots,x_{m-1})$$

であるとき，f_m を $X(t)$ の m 次キュムラントスペクトル密度（CSD）— cumulant spectral density とよぶ。(4.11) の左辺が対称（$t_2,\cdots,t_m$ について）であることから，f_m も対称である。とくに f_2 は $X(t)$ の（通常の）スペクトル密度である。f_m の存在を保証する条件として普通考えられるものが強混合性である。$X(t)\in\mathfrak{S}(\beta)$ に対して f_2 が存在し，その具体的形が求まることはすでに (4.1)(4.2) で見たのであるが，Wiener展開はCSDが存在する $\mathfrak{S}(\beta)$ のクラスを決めるのに好都合なものであることがわかる。

$$(4.12)\qquad I(x)=\frac{1}{2\pi T}\left|\int_0^T X(t)e^{-ixt}dt\right|^2$$

を $X(t)$ のピリオドグラムとよぶ。相当一般な $X(t)$ のクラスについて

$$(4.13)\qquad \int_0^\lambda I(x)dx$$

がスペクトル分布

$$F(\lambda)=\int_0^\lambda f(x)dx$$

の推定量として適当なものであることが知られている。$I(x)\geq 0$ であるから

$$E\Big(\int_0^\infty I(x)dx\Big)<\infty$$

であることが容易にわかり，順序交換

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\int_0^\lambda I(x)\,dx\ ,\quad 0\le\lambda\le\infty$$

があたえられる。そして，$T\to\infty$ における極限定理がこれからの目標である。これからの議論で，∞ がパラメーター空間に入っているために技術的困難が生ずる。この問題に，離散時間，正規時系列の場合，Grenander — Rosenblatt によって[6]，始めてほぼ完全な解答が与えられた。それ以後に，種々のタイプの $X(t)$ — 線型過程，強混合過程，において，連続時間を含め研究され，その結果つぎのことが明らかになった。スケール変換した確率過程

$$(4.14)\quad \xi(\cdot)=\left\{\xi(\lambda)=\xi_T(\lambda)=\sqrt{T}\left(\int_0^\lambda I(x)\,dx-E\left(\int_0^\lambda I(x)\,dx\right)\right)\right\},\quad 0\le\lambda\le\infty$$

は確率1で $C[0,\infty]$ の値をとる。$T\to\infty$ において，$\xi(\cdot)$ は $C[0,\infty]$ の値をとる正規過程 $\xi_\infty(\cdot)=\{\xi_\infty(\lambda),\ 0\le\lambda\le\infty\}$ に法則収束する，ここに ξ_∞ の法則は

$$(4.15)\quad E(\xi_\infty(\lambda))=0,\qquad \mathrm{cov}(\xi_\infty(\lambda),\xi_\infty(\mu)) = 2\pi\left(\int_0^\lambda\int_0^\mu f_4(\alpha,-\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta+\int_0^{\lambda\wedge\mu}(f_2(\alpha))^2\,d\alpha\right),$$

ここに f_m は $X(t)$ の m 次 CSD.

混合性によらず，CSD を用いてこの問題を扱ったものの一つとして[2]，[3]がある。この稿の出発点はこの論文に負っている。しかしこれらの論文においては，CSD の存在を前提において，あれこれの有界性等の条件をつけ加える。たとえば前記の論文では，すべての次数の f_m の存在と有界性を仮定して，ξ_T の有限次元分布の収束を示している。しかし，この方法では，$\xi_T(\cdot)$ の法則収束を導くことは，ほとんど不可能と思われる。$X(t)$ の構造をふまえないで，自然な条件下でこの問題を扱うのは無理であろう。本稿の今後の目的

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

はつぎの定理1,2の証明である。

(定理1)(有限次元分布の収束)

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\int c_k(\lambda)\, e_k(\lambda,t)\, d^k\beta$$

はつぎの条件をみたすものとする。

(A) c_k ($k\ge 2$) は有界ボレル関数

(B) $f,\ fc_1^2\in L^2$

(C) (i)

$$\int\cdots\int_{|x_j|\le a}|c_n(x_1,\cdots,x_{n-1},x'-x_1-\cdots-x_k)-c_n(x_1,\cdots,x_{n-1},-x_1-\cdots-x_k)|\,dx_1\cdots dx_{n-1}$$

$$\to 0,\quad x'\to 0,\quad \forall a>0,$$

$$0\le\forall k\le n-2\quad (n\ge 2)$$

(ii)

$$\int_0^h|f(x)-f(0)|\,dx=o(h),\quad h\to+0$$

(D)

$$\sum_{k=0}^{\infty}k!\,3^k(b*b)_k^2<\infty,\quad b=(b_0,b_1,\cdots)$$

ここに $b_0=b_1=0$

$$b_k=\|c_k\|_\infty\|f\|_1^{k/2},\quad k\ge 2\quad (\|\cdot\|_1=L^1\text{-ノルム})$$

$* =$ convolution

このとき, $T\to\infty$ において, ξ_T のすべての有限次元分布は ξ_∞ の対応する有限次元分布に収束する。

(注意) 上記の仮定のたち方は, $X(t)$ が非正規過程を定めるために要求されたものである。c_1 には (B) 以外に制約がない。この範囲で c_1 を適当にとることによって, $X(t)$ の正規性には自由度がある。そのため, 定理1は正規過程

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

に対する[7]など既知の結果を含むものである。

(定理2) 定理1,(D)以外のすべての仮定に加えて,つぎの条件を仮定する

(i) f は有界であり,ある ε $(0<\varepsilon<1)$ が存在して

$$m(\varepsilon)=m_f(\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^{\varepsilon}f(\lambda)\,d\lambda<\infty$$

(ii)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,\gamma^n\,(b^{4*})_n^2<\infty$$

このとき,$C[0,\infty]$ 上の $\xi_T(\cdot)$, $T\geq 1$ の分布は相対コンパクトである。従って

$$\xi_T(\cdot)\xrightarrow{\mathcal{L}}\xi_\infty(\cdot),\quad T\to\infty$$

(注意) 仮定(ii)から,定理1,(D)が出るので,定理2の前半の結論と定理1とあわせると,定理2の後半の結論が出る。fは更に有界という制約をうけるが,G_n は尚自由度がある。その範囲でGを適当にとることによって,定理2は[7]など,正規過程に対する既知の結果を含む。

§5 諸定理と公式

後の節で必要な定理,公式をまとめる。領域を明示しない積分は全領域にわたるものとする。

I 積分に関するもの

1° $f_n(x)=\dfrac{(\log 2(1+x^2))^n}{(1+x^2)^{1/2}}$, $n=0,1,\cdots$

とおけば

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(5.1) \qquad f_0 * f_n(x) \asymp f_{n+1}(x), \qquad 0 \leq n < \infty$$

証明は，初等的な定積分の評価によるので省く。

2°

$$(5.2) \qquad (2\pi)^{-n} \int \prod_{k=1}^{n} D(x_k)\, D(x_1 + \cdots + x_n)\, dx = 1$$

$$(5.3) \qquad \int \prod_{k=1}^{n} |D(x_k)|\, |D(x_1 + \cdots + x_n)|\, dx < \infty,$$

ただし

$$D(x) = \frac{\sin x/2}{x/2} \qquad ([\text{c.f.}\ [2],\ [3]])$$

（証明） (5.3) について

$$|D(x)| \leq \text{num. const}\ f_0(x)$$

に注意して

$$(5.3)\text{左辺} \leq \text{num. const.} \int f_0^{n*}(x) \cdot f_0(x)\, dx < \infty$$

$$j(x) = \mathcal{J}[-1/2, 1/2] = [-1/2, 1/2] \text{ の特性関数}$$

とおく。そのフーリエ変換 $\hat{j}(x) = (2\pi)^{-1/2} D(x)$, $\hat{D} = (2\pi)^{1/2} j$ であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(x+y) D(y)\, dy = \int (\hat{D}(u))^2 e^{iux}\, du$$

$$= 2\pi \int j(u)\, e^{iux}\, du = 2\pi D(x),$$

$$(5.2)\text{左辺} = \frac{1}{2\pi} \int (D(x))^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = 1.$$

2°から，後に利用されるつぎの結果が導かれる。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

3°

(5.4) $\Psi(x) = \Psi_T^{(n)}(x)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n T} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin T x_k/2}{x_k/2} \, \frac{\sin T(x_1+\cdots+x_n)/2}{(x_1+\cdots+x_n)/2}$$

とおけば

(5.5) (i) $\sup_T \int |\Psi(x)|\,dx = \|\Psi_1^{(n)}\|_1 < \infty$ (ii) $\int \Psi(x)\,dx = 1$

(iii) 有界連続関数の空間の汎関数として

$$\Psi_T^{(n)} \longrightarrow \delta_0 \quad (T \to \infty)$$

4° (E_i, σ_i), $1 \le i \le n$, を測度空間, $E = E_1 \times \cdots \times E_n$, x_i を E_i の代表元, A_i $(1 \le i \le k)$ を $(x_1, \ldots, x_n)$ の可測関数とする。積分

$$I = \int_E A_1 A_2 \cdots A_k \, d\sigma_1 \cdots d\sigma_n$$

の核 $A_1 A_2 \cdots A_k$ の変数の中に, x_i のおのおのが丁度2回現れるが, x_i は $A_1, \ldots, A_k$ のどれか二つに含まれて入っているものとする。そのとき, つぎの不等式が成り立つ

(5.6) $|I| \le \|A_1\|_2 \|A_2\|_2 \cdots \|A_k\|_2$,

ただし

$$\|A_i\|_2^2 = \int |A_i|^2 \qquad (1 \le i \le k)$$

であるが, 右辺は A_i に含まれる変数についてのみ, $d\sigma_j$ の直積で積分したものである。(5.6) は, これら $\|A_i\|_2^2$ が存在すれば, I が存在し, 不等号が成立するという意味である。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

（証明）$d\sigma_1, \cdots, d\sigma_n$ のリマン積分し，シュワルツの不等式を n 回適用すれば容易に出る。又は $d\sigma_1$ につき，シュワルツ不等式を適用すれば，$d\sigma_2 \cdots d\sigma_n$ に関する積分が出て，これが I と同じタイプになるから，帰納法により (5,6) が出る。

5° $a(x), b(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, $T>0$, に対して，$L_a(x) = Ta(Tx)$ とおけば

$$L_a * L_b(x) = L_{a*b}(x) \qquad (* \text{ convolution})$$

証明は直接計算より明らか

6° $0 \le h(x) \in L(-\infty, \infty)$ に対して，$h_0 = h/\|h\|_1$ とおく。このとき，$0<\varepsilon<1$, $q \ge 1$, $0 \le \lambda_1 < \lambda_2$, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \le 1$ に対して

$$\int_{\lambda_1^q}^{\lambda_2^q} h(x)\,dx \le K(\varepsilon, q)\|h\|_1 \left(\int (1+|x|^\varepsilon) h_0(x)\,dx\right)(\Delta\lambda)^{\varepsilon/2}$$

$$K(\varepsilon, q) = \max_{0 \le x < \infty} \left(\frac{q x^{q-1}}{1+x^q}\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}$$

（証明）

$$\int_{\lambda_1^q}^{\lambda_2^q} h_0(x)\,dx \le \left(\int_{\lambda_1^q}^{\lambda_2^q} \frac{dx}{1+x}\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|^\varepsilon) h_0(x)\,dx\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$$

$$\int_{\lambda_1^q}^{\lambda_2^q} \frac{dx}{1+x} \le \left(\max_{0 \le x < \infty} \frac{q x^{q-1}}{1+x^q}\right)\Delta\lambda, \quad \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2}$$

より所定の不等式が出る。

7° $g(x) \ge 0$ $(0 \le x < \infty)$, $\int_0^\infty g(x) x^{1/p}\,dx < \infty$ $(p>0)$ ならば

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\int_a^\infty d\lambda \int_{\lambda^p}^\infty g(x)\,dx \le \int_{a^p}^\infty g(x)\, x^{1/p}\,dx \quad (a \ge 0)$$

(証明) たとえば部分積分による。

II ピリオドグラムの関係式

平均0の実 $X^1(t), X^2(t) \in \mathfrak{G}(\beta)$ が与えられ、16ある次数のモーメント, CSDをもつとしたとき、混合ピリオドグラム I_{jk} とそのスケール変換 ξ_{jk} を定義する:

$$I^{jk}(\alpha) = \frac{1}{2\pi T}\int_0^T X^j(s)\, e^{-i\alpha s}\,ds \int_0^T X^k(t)\, e^{i\alpha t}\,dt \quad (j,k=1,2)$$

(5.7) $$\xi^{jk}(\lambda) = \sqrt{T}\left(\int_0^\lambda I^{jk}(\alpha)\,d\alpha - E\left(\int_0^\lambda I^{jk}(\alpha)\,d\alpha\right)\right),$$

(∞,∞) 上の実有界関数 φ をとり

(5.8) $$\xi^{jk}(\varphi) = \sqrt{T}\left(\int I^{jk}(\alpha)\varphi(\alpha) - E\left(\int I^{jk}(\alpha)\varphi(\alpha)\,d\alpha\right)\right)$$

とおく。 X's が実だから

$$I^{12}(-\alpha) = \overline{I^{12}(\alpha)} = I^{21}(\alpha),$$

また

(5.9) $$E(\xi^{12}(\varphi))^2 = T\int \mathrm{cov}\left(I^{12}(\alpha), I^{12}(\beta)\right)\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\,d\alpha\, d\beta$$

cov＝共分散

$$S_{ij}(s,t) = M_{ij}(s,t) = E(X^i(s)X^j(t))$$

(5.10) $$S_{1212}(s,t,u,v) = S(X_1(s), X_2(t), X_1(u), X_2(v))$$

$$M_{1212}(s,t,u,v) = E(X_1(s)\,X_2(t)\,X_1(u)\,X_2(v))$$ 等

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

とかくことにすると，（3.6）より（$EX^j(t)=0$）

$$
\begin{aligned}
&M_{1212}(s,t,u,v) - M_{12}(s,t)M_{12}(u,v)\\
(5.11)\qquad &= S_{1212}(s,t,u,v) + S_{11}(s,u)S_{22}(t,v)\\
&\qquad + S_{12}(s,v)S_{21}(t,u)
\end{aligned}
$$

であるから，（5.7）より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(I^{12}(\alpha), I^{12}(\beta))\\
&= E(I^{12}(\alpha)I^{12}(\beta)) - E(I^{12}(\alpha))E(I^{12}(\beta))\\
(5.12)\qquad &= (2\pi T)^{-2}\int_{D_4}\{M_{1212}(s,t,u,v) - M_{12}(s,t)M_{12}(u,v)\}e_2\,d^4w\\
&= (2\pi T)^{-2}\int_{D_4}\{S_{1212}(s,t,u,v) + S_{11}(s,u)S_{22}(t,v)\\
&\qquad + S_{12}(s,v)S_{21}(t,u)\}e_2\,d^4w
\end{aligned}
$$

$$
e_2 = \exp(i[-\alpha s+\alpha t-\beta u+\beta v]),\ D_4=[0,T]^4
$$

$$
d^4w = ds\,dt\,du\,dv
$$

一寸必要なだけのCSDの存在を仮定したから

$$
\begin{aligned}
&S_{1212}(s,t,u,v) = \int f_4^{1212}(x)\exp(i[(s-v)x_1+(t-v)x_2+(u-v)x_3])dx\\
(5.13)\qquad &S_{jk}(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2^{jk}(x)\exp(i(s-t)x)\,dx,\ 1\leq j,k\leq 2.
\end{aligned}
$$

f_2^{ii} を f_2^{i} とかくことにすれば

$$
\mathrm{Cov}(I^{12}(\alpha), I^{12}(\beta))
$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$
(5.14) \quad = (2\pi T)^{-2} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^3} f_4^{1212}(x)\,dx \int_{D_4} d^4 w
$$

$$
\times \exp\big(i[s(x_1-\alpha) + t(x_2+\alpha) + u(x_3-\beta) + v(\beta - x_1 - x_2 - x_3)]\big)
$$

$$
+ \int_{\mathbb{R}^2} f_2^{1}(x_1) f_2^{2}(x_2)\,dx \int_{D_4} d^4 w
$$

$$
\times \exp\big(i[s(x_1-\alpha) + t(x_2+\alpha) + u(-x_1-\beta) + v(\beta - x_2)]\big)
$$

$$
+ \int_{\mathbb{R}^2} f_2^{12}(x_1) f_2^{21}(x_2)\,dx \int_{D_4} d^4 w
$$

$$
\times \exp\big(i[s(x_1-\alpha) + t(x_2+\alpha) + u(-x_2-\beta) + v(\beta - x_1)]\big)
$$

$$
= \frac{2\pi}{T} \Big\{ \int \Psi(x_1-\alpha, x_2+\alpha, x_3-\beta) f_4^{1212}(x)\,dx
$$

$$
+ \int \Psi(x_1-\alpha, x_2+\alpha, -x_1-\beta) f_2^{1}(x_1) f_2^{2}(x_2)\,dx
$$

$$
+ \int \Psi(x_1-\alpha, x_2+\alpha, -x_2-\beta) f_2^{12}(x_1) f_2^{21}(x_2)\,dx \Big\},
$$

$$
\Psi(x) = \Psi_T^{(3)}(x).
$$

(5.14) を (5.9) に代入, 積分変数の簡単な変換ののち

$$
E\big(\xi^{12}(\varphi)\big)^2
$$

$$
(5.15) \quad = 2\pi \Big\{ \int \Psi(x) f_4^{1212}(x_1+\alpha, x_2-\alpha, x_3+\beta)\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\,dx\,d\alpha\,d\beta
$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$+\int \Psi(x) f_2^{1}(x_1+\alpha) f_2^{2}(x_2-\alpha)\, \varphi(\alpha)\, \varphi(-x_1-x_3-\alpha)\, dx\, d\alpha$$

$$+\int \Psi(x) f_2^{12}(x_1+\alpha) f_2^{21}(x_2-\alpha)\, \varphi(\alpha)\, \varphi(-x_2-x_3+\alpha)\, dx\, d\alpha \Big\}$$

また

$$E|\xi^{12}(\varphi)|^2 = T\int \operatorname{cov}\left(I^{12}(\alpha), \overline{I^{12}(\beta)}\right) \varphi(\alpha)\, \varphi(\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

$$= T\int \operatorname{cov}\left(I^{12}(\alpha), I^{12}(\beta)\right) \varphi(\alpha)\, \varphi(-\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

うち右辺は(5.9)において、$\varphi(\beta) \longrightarrow \varphi(-\beta)$ とおきかえたものだから

$$E|\xi^{12}(\varphi)|^2 = \text{(5.15)の右辺において、おきかえ} \tag{5.16}$$

$$\varphi(\beta) \longrightarrow \varphi(-\beta),\ \varphi(-x_1-x_3-\alpha) \to \varphi(x_1+x_3+\alpha)$$

$$\varphi(-x_2-x_3+\alpha) \longrightarrow \varphi(x_2+x_3-\alpha)$$

を行ったもの。

定理2の証明では、$E(\xi(\varphi))^4$, $E|\xi^{12}(\varphi)|^4$ が必要となる。そのための準備として

$$I(\alpha) = (2\pi T)^{-1}\int_0^T X(s_1) e^{-i\alpha s_1} ds_1 \int_0^T X(s_2) e^{i\alpha s_2} ds_2 \quad \text{等}$$

とかき、

$$E(\xi(\varphi))^4 = \int C(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\, dA \tag{5.17}$$

$$dA = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\, d\alpha \cdots d\delta$$

$$C = C(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = T^2 E\{ I(\alpha)\, I(\beta)\, I(\gamma)\, I(\delta) \tag{5.18}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$-\sum I(\alpha)I(\beta)I(\gamma)m(\delta)+\sum I(\alpha)I(\beta)m(\gamma)m(\delta)$$

$$-\sum I(\alpha)m(\beta)m(\gamma)m(\delta)+m(\alpha)m(\beta)m(\gamma)m(\delta)\Big\},$$

$m(\alpha)=E\,I(\alpha)$ 等, $\sum$ は同じタイプの項の和,

に代入すれば,

$$(5.19)\qquad \begin{aligned} C=\frac{1}{(2\pi)^4T^2}\int_{D_8}d^8w\Big\{&M(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2,v_1,v_2)\\ &-\sum M(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2)\,S(v_1,v_2)\\ &+\sum M(s_1,s_2,t_1,t_2)\,S(u_1,u_2)\,S(v_1,v_2)\\ &-3\,S(s_1,s_2)\,S(t_1,t_2)\,S(u_1,u_2)\,S(v_1,v_2)\Big\}\,e_4 \end{aligned}$$

ただし

$$e_4=\exp\left(-i[\alpha(s_1-s_2)+\beta(t_1-t_2)+\gamma(u_1-u_2)+\delta(v_1-v_2)]\right)$$

$$(5.20)\qquad D_8=[0,T]^8,\quad d^8w=\prod_{i=1}^{2}ds_i\,dt_i\,du_i\,dv_i$$

$$M(s_1,s_2,\ldots,v_2)=E\left(X(s_1)X(s_2)\cdots X(v_2)\right)\ 等.$$

(5.19) の右辺の { } 内を S→M 変換公式 (c.f. (3.6)) でかきかえる。そのとき簡単な組み合わせ論によって、キュムラントの相殺があり、$S(s_1,s_2),\ldots,S(v_1,v_2)$ のような同種の2つのペア —"丁度2つずつ"を含む2次キュムラントが消えることが分る [2][3][4].

結局

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(5.21)\quad C=\frac{1}{(2\pi)^4T^2}\int_{D_8}\Big[\sigma(8)+\{\sigma(2,6)+\sigma(3,5)+\sigma(4,4)\}$$
$$+\{\sigma(2,2,4)+\sigma(2,3,3)+\sigma(2,2,2,2)\}\Big]e_4\,d^8w$$

ただし

$$(5.22)\quad \sigma(8)=S(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2,v_1,v_2)$$
$$\sigma(2,6)=\sum S(s_1,t_1)\,S(s_2,t_2,u_1,u_2,v_1,v_2)$$
$$\sigma(3,5)=\sum S(s_1,s_2,t_1)\,S(t_2,u_1,u_2,v_1,v_2)$$
$$\sigma(4,4)=\sum S(s_1,s_2,t_1,t_2)\,S(u_1,u_2,v_1,v_2)$$
$$\sigma(2,2,4)=\sum S(s_1,t_1)\,S(s_2,t_2)\,S(u_1,u_2,v_1,v_2)$$
$$\sigma(2,3,3)=\sum S(s_1,t_1)\,S(s_2,u_1,u_2)\,S(t_2,v_1,v_2)$$
$$\sigma(2,2,2,2)=\sum S(s_1,t_2)\,S(t_1,u_2)\,S(u_1,v_2)\,S(v_1,s_2)$$

ここに

$$S(s_1,s_2,\cdots,v_2)=S(X(s_1),X(s_2),\cdots,X(v_2))$$ 等

また $\sum$ は、"丁度は対"の2次キュムラントを含む項を除外し、同じタイプの項の和を表わす。

補足の注意

(5.22)は§11以降で、φ を有界区間の特性関数にとり、$\sup_{T\geq1} E(\xi(\varphi))^4$ を評価するために使う。(5.22)の右辺各項の $E(\xi(\varphi))^4$ への寄与を考える。(1) $S(s_1,s_2,t_1,u_1)\,S(t_2,u_2,v_1,v_2)$ と (2) $S(s_1,t_1,v_1,v_2)\,S(s_2,t_2,u_1,u_2)$ は、(5.17), (5.20), (5.21)

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

を参照して，$E(\xi(\varphi))^4$ に同一値を与えることは容易になる。両者を同一クラスに入れる。同一クラスに入らないもので，前記の評価に実質的に同一寄与をするものがある。これを例示する。

$\sigma(3,5)$ の二つの元

$$(5.23)_i \qquad S(s_1,t_1,u_1)\,S(s_2,t_2,u_2,v_1,v_2)$$

$$(5.23)_{ii} \qquad S(s_1,t_2,u_2)\,S(s_2,t_1,u_1,v_1,v_2)$$

を比較する。両者は入れかえ，$t_1 \leftrightarrow t_2$，$u_1 \longleftrightarrow u_2$ によって，一方から他方が出る

$$(5.24)_i \qquad S(s_1,t_1,u_1) = \int f_3(x)\exp\big(i(s_1-u_1)x_1 + i(t_1-u_1)x_2\big)\,dx$$

$$S(s_2,t_2,u_2,v_1,v_2)$$
$$= \int f_5(y)\exp\big(i(s_2-v_2)y_1 + i(t_2-v_2)y_2$$
$$+ i(u_2-v_2)y_3 + i(v_1-v_2)y_4\big)\,dy$$

また

$$S(s_1,t_2,u_2) = \int f_3(x)\exp\big(i(s_1-u_2)x_1 + i(t_2-u_2)x_2\big)\,dx$$

$$(5.24)_{ii}$$

$$S(s_2,t_1,u_1,v_1,v_2)$$
$$= \int f_5(y)\exp\big(i(s_2-v_2)y_1 + i(t_1-v_2)y_2$$
$$+ i(u_1-v_2)y_3 + i(v_1-v_2)y_4\big)\,dy$$

であるから，(5.17)，(5.20)，(5.21) より $E(\xi(\varphi))^4$ への $(5.23)_i$，$(5.23)_{ii}$ の寄与はそれぞれ $(5.25)_i$，$(5.25)_{ii}$ に等しい，

$$(5.25)_i \qquad \frac{1}{(2\pi)^4 T^2}\int dA$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\times \int f_3(x)\, f_5(y)\, \mathcal{D}(x_1-\alpha)\, \mathcal{D}(y_1+\alpha)\, \mathcal{D}(x_2-\beta)\, \mathcal{D}(y_2+\beta)$$

$$\times\, \mathcal{D}(-x_1-x_2-\gamma)\, \mathcal{D}(y_3+\gamma)\, \mathcal{D}(y_4-\delta)\, \mathcal{D}(\delta-y_1-y_2-y_3-y_4)\, dx\, dy,$$

$$\mathcal{D}(x) = \frac{e^{ix}-1}{ix}.$$

$$(5.25)_{ii} \quad \frac{1}{(2\pi)^4 T^2} \int dA$$

$$\times \int f_3(x)\, f_5(y)\, \mathcal{D}(x_1-\alpha)\, \mathcal{D}(y_1+\alpha)\, \mathcal{D}(y_2-\beta)\, \mathcal{D}(x_2+\beta)$$

$$\times\, \mathcal{D}(y_3-\gamma)\, \mathcal{D}(-x_1-x_2+\gamma)\, \mathcal{D}(y_4-\delta)\, \mathcal{D}(\delta-y_1-y_2-y_3-y_4)\, dx\, dy$$

$(5.25)_i$, $(5.25)_{ii}$ において積分核は β, γ の符号だけが異なることを念頭におき，両者に変換

$$(5.26) \quad \begin{aligned} &\xi_1 = x_1-\alpha, \quad \xi_2 = y_1+\alpha, \quad \xi_3 = x_2-\beta, \quad \xi_4 = y_2+\beta \\ &\xi_5 = y_3+\gamma, \quad \xi_6 = y_4-\delta, \quad \xi_7 = -x_1-x_2-\gamma \end{aligned}$$

を行うと

$$(5.27)_i \quad \begin{aligned} (5.25)_i = \frac{(2\pi)^3}{T} \int & \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\delta)\varphi(-\xi_1-\xi_3-\xi_7-\alpha-\beta) \\ & \times f_3(\xi_1+\alpha, \xi_3+\beta)\, f_5(\xi_2-\alpha, \xi_4-\beta, \xi_1+\xi_3+\xi_5+\xi_7+\alpha+\beta, \xi_6+\delta) \\ & \times \Psi_T^{(7)}(\xi)\, d\xi\, d\alpha\, d\beta\, d\delta \end{aligned}$$

$(5.27)_{ii}$ $\quad (5.25)_{ii} = (5.27)_i$ の右辺でおきかえ

$$\varphi(\beta) \to \varphi(-\beta), \quad \varphi(-\xi_1-\xi_3-\xi_7-\alpha-\beta) \to \varphi(\xi_1+\xi_3+\xi_7+\alpha+\beta)$$

を行ったもの。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

§11, §12 の所論によれば、(5.27)i, (5.27)ii は同一ではないが、右辺積分核の類似性のゆえに、$\sup_{T \geq T} E(\xi(\varphi))^4$ に実質的に同一寄与をなす。(5.27)i, (5.27)ii の類似性は (5.23)i, (5.23)ii における変数の分布の類似性による。このことは (5.27)i, (5.27)ii に至る変数変換を通じてわかる。それゆえ、(5.22) の右辺の各項について、実質的に同一寄与をなすもののクラス中から代表だけを選ぶことにすれば、つぎのものが代表として残る。

$$\sigma(8);$$

$$S(s_1,t_1)S(s_2,t_2,u_1,u_2,v_1,v_2);$$

$$S(s_1,s_2,t_1)\,S(t_2,u_1,u_2,v_1,v_2),$$

$$S(s_1,t_1,u_1)\,S(s_2,t_2,u_2,v_1,v_2);$$

$$S(s_1,s_2,t_1,t_2)S(u_1,u_2,v_1,v_2), \tag{5.28}$$

$$S(s_1,s_2,t_1,u_1)S(t_2,u_2,v_1,v_2),$$

$$S(s_1,t_1,u_1,v_1)S(s_2,t_2,u_2,v_2);$$

$$S(s_1,t_1)S(u_1,v_1)S(s_2,t_2,u_2,v_2);$$

$$S(s_1,t_1)S(s_2,u_1,u_2)S(t_2,v_1,v_2),\ S(s_1,t_1)S(s_2,u_1,v_1)S(t_2,u_2,v_2),$$

$$S(s_1,t_1)S(u_1,u_2,v_1)S(s_2,t_2,v_2);$$

$$S(s_1,t_1)S(s_2,t_2)S(u_1,v_1)S(u_2,v_2).$$

III　$I(\tau)$ の分解

(i) $X(t) \in \mathfrak{S}(\beta)$ が、ある $X^i(t) \in \mathfrak{S}(\beta)$ によって $(i=1,2)$ 分解

$$X(t) = X^1(t) + X^2(t) \tag{5.29}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

されているとする。 I を $X(t)$ のピリオドグラム, I^{ij} を混合ピリオドグラムとし, I^{ii} を I^{i} とかく。 I の定義から

$$
\begin{aligned}
&I(x)\\
&= (2\pi T)^{-1}\left(\int_0^T X^1(p)\,e^{-ixp}dp + \int_0^T X^2(q)\,e^{-ixq}dq\right)\\
&\qquad \times \left(\int_0^T X^1(p)\,e^{ixp}dp + \int_0^T X^2(q)\,e^{ixq}dq\right) \qquad (5.30)\\
&= I^1(x) + I^2(x) + 2\,\mathcal{R}\,J(x),\\
&\qquad J(x) = I^{12}(x) \quad (\text{c.f. } (5.7)),
\end{aligned}
$$

対応して

$$
(5.31)\qquad
\begin{aligned}
\xi(\lambda) &= \xi^1(\lambda) + \xi^2(\lambda) + 2\,\mathcal{R}\,\eta(\lambda)\\
\xi(\varphi) &= \xi^1(\varphi) + \xi^2(\varphi) + 2\,\mathcal{R}\,\eta(\varphi),
\end{aligned}
$$

ただし

$$
(5.32)\qquad
\begin{aligned}
&\xi^i(\lambda) \equiv \xi^{ii}(\lambda), \quad \xi^i(\varphi) \equiv \xi^{ii}(\varphi)\\
&\eta(\lambda) \equiv \xi^{12}(\lambda), \quad \eta(\varphi) = \xi^{12}(\varphi) \quad (\text{c.f. } (5.7), (5.8)).
\end{aligned}
$$

(ii) 特殊な分解

§11, 12 のために, この分解を考える。それは (i) において, $X^1(t)$ を $X(t)$ のから3部分, 即ち展開の第一項, $X^2(t) = X(t) - X^1(t)$ としてとるのである。このときは, $E\,J(x) = 0$ であるから

$$
(5.33)\qquad
\begin{aligned}
&\eta(\lambda) = \sqrt{T}\int_0^\lambda J(x)\,dx, \quad \eta(\varphi) = \sqrt{T}\int J(x)\varphi(x)\,dx\\
&E\,(\mathcal{R}\,\eta(\varphi))^4 \le E\,|\eta(\varphi)|^4
\end{aligned}
$$

を考慮に入れて, $E(\xi(\varphi))^4$ の評価には, $E(\xi^i(\varphi))^4$ $(i=1,2)$ と $E|\eta(\varphi)|^4$ の評価を用いるのが有利である。これは技術的な理由によるも

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

ので，C_1の非有界性のゆえに，ガウス部分と非ガウス部分との交絡作用を少くするためである。

$E|\eta(\varphi)|^4$の形をみる。

(5.34) $$E|\eta(\varphi)|^4 = \int C_\eta(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,dA$$

$$C_\eta = C_\eta(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = T^2 E\left(J(\alpha)\overline{J(\beta)}J(\gamma)\overline{J(\delta)}\right)$$

(5.35) $$= \frac{1}{(2\pi)^4 T^2} E\Big(\int_0^T X^1(s_1)e^{-i\alpha s_1}ds_1 \int_0^T X^2(s_2)e^{i\alpha s_2}ds_2$$

$$\times \int_0^T X^1(t_1)e^{i\beta t_1}dt_1 \int_0^T X^2(t_2)e^{-i\beta t_2}dt_2$$

$$\times \int_0^T X^1(u_1)e^{-i\gamma u_1}du_1 \int_0^T X^2(u_2)e^{i\gamma u_2}du_2$$

$$\times \int_0^T X^1(v_1)e^{i\delta v_1}dv_1 \int_0^T X^2(v_2)e^{-i\delta v_2}dv_2\Big)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4 T^2}\int_{D_8} E\left(X^1(s_1)\cdots X^1(v_1)X^2(s_2)\cdots X^2(v_2)\right)e_\eta\,d^8w,$$

$$e_\eta = \exp\left(-i\left[\alpha(s_1-s_2)-\beta(t_1-t_2)+\gamma(u_1-u_2)-\delta(v_1-v_2)\right]\right).$$

(5.35)右辺の積モーメントをキムラントでかく。その際，ガウス過程の3次以上のキムラントが0，$X^1(t)$，$X^2(t)$の直交性から$S_\eta(s_1,s_2) = S(X^1(s_1), X^2(s_2)) = 0$等を利用する。

$$\sigma_\eta(11,11,2222) = \sum S_\eta(s_1,t_1)S_\eta(u_1,v_1,s_2,t_2,u_2,v_2)$$

(5.36) $$\sigma_\eta(11,112,222) = \sum S_\eta(s_1,t_1)S_\eta(u_1,v_1,s_2)S_\eta(t_2,u_2,v_2)$$

$$S_\eta(u_1,v_1,s_2) = S(X^1(u_1), X^1(v_1), X^2(s_2))$$

などの記号を使う，ただし$\sum$は同じタイプの項の和を示す。

すると

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$
\begin{aligned}
(5.37)\quad & E\Big(\prod_{i=1}^{2} X^i(s_i)X^i(t_i)X^i(u_i)X^i(v_i)\Big) \\
&= S_\eta(s_1,t_1,u_1,v_1,s_2,t_2,u_2,v_2) \\
&\quad + \sigma_\eta(11,112222) + \sigma_\eta(22,111122) \\
&\quad + \sigma_\eta(222,11112) + \sigma_\eta(112,11222) \\
&\quad + \sigma_\eta(122,11122) \\
&\quad + \sigma_\eta(112,1222) + \sigma_\eta(1122,1122) \\
&\quad + \sigma_\eta(1222,1112) \\
&\quad + \sigma_\eta(11,11,2222) + \sigma_\eta(11,22,1122) \\
&\quad + \sigma_\eta(11,112,222) + \sigma_\eta(11,122,122) \\
&\quad + \sigma_\eta(22,112,112) \\
&\quad + \sigma_\eta(11,11,22,22)
\end{aligned}
$$

§6 Wiener展開の掛け算

βから生成される，実数値2乗可積分な確率変数の全体を$L^2(\beta)$で表わす。$L^2(\beta)$の元の展開は§4で述べた$\mathcal{L}^2(d^k\sigma)$の関数列$(c_0, c_1, \cdots)$によるものとする。即ち，$k \geq 1$, $c_k(\lambda)$は，$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$の成分の対称関数，$\overline{c_k(\lambda)} = c_k(-\lambda)$, $c_k \in \mathcal{L}^2(d^k\sigma)$,

$$
(6.1)\qquad X = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \int c_k(\lambda)\, d^k\beta, \quad c_0 = EX.
$$

$L^2(\beta)$は $\sum_{k=0}^{\infty} \oplus \mathcal{L}^2(d^k\sigma)$ $(\mathcal{L}^2(d^0\sigma) = \mathbb{R})$ と同型だから，(6.1)を

$$
(6.1)'\qquad X = (c_0, c_1, c_2, \cdots)
$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

とかくこともできる。(6.1)の右辺が有限和であるような X を簡単に"有限"な X とよぶ。

$$(6.3)\qquad X^i \in L^2(\beta)\ (1 \le i \le 4),\ X^i = (c_0^i, c_1^i, \cdots)$$

が与えられたとき，積 $\prod_1^4 X^i$ の計算を，(6.1)の右辺のかけ算に公式(3.7)を適用して行い，同類項を形式的にまとめて

$$(6.4)\qquad \prod_{i=1}^4 X^i = \sum_{\ell=0}^{\infty} \int (X^1X^2X^3X^4)_\ell \, d^\ell \beta$$

$$\Big(\prod_1^4 X^i\Big)_\ell = \sum_{\substack{u_1+\cdots+u_4=\ell \\ u_i \ge 0}} \Big(\prod_1^4 X^i\,;\, u_1, \cdots, u_4\Big)$$

とかくことができる。ただし

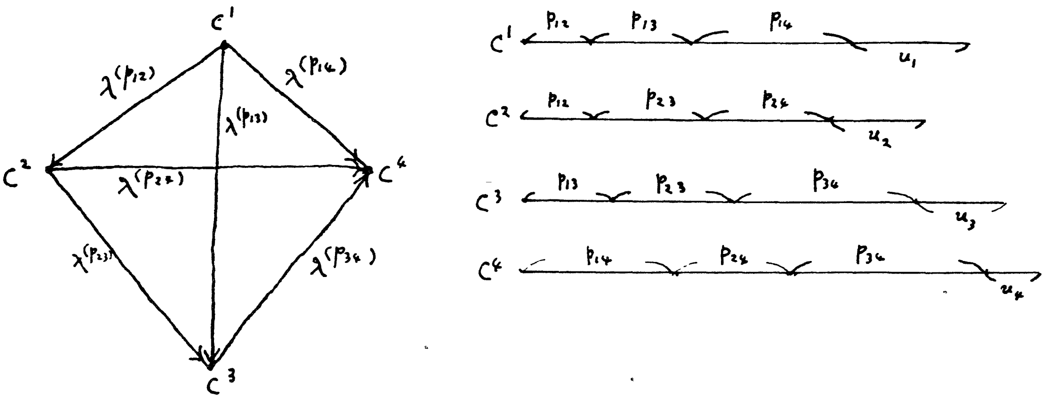
$$\begin{aligned}
&\Big(\prod_1^4 X^i\,;\, u_1, \cdots, u_4\Big) \\
&= \sum_{p_{ij} \ge 0} \prod_{1 \le i < j \le 4} p_{ij} \binom{u_1+p_1}{p_1} \frac{p_1!}{p_{12}!\,p_{13}!\,p_{14}!} \binom{u_2+p_2}{p_2} \frac{p_2!}{p_{12}!\,p_{23}!\,p_{24}!} \\
(6.5)\qquad &\qquad \times \binom{u_3+p_3}{p_3} \frac{p_3!}{p_{13}!\,p_{23}!\,p_{34}!} \binom{u_4+p_4}{p_4} \frac{p_4!}{p_{14}!\,p_{24}!\,p_{34}!} \\
&\times \int_{\mathbb{R}^n} C^1_{v_1}(\lambda^{(p_{12})}, \lambda^{(p_{13})}, \lambda^{(p_{14})}, \mu^{(u_1)})\, C^2_{v_2}(-\lambda^{(p_{12})}, \lambda^{(p_{23})}, \lambda^{(p_{24})}, \mu^{(u_2)}) \\
&\times C^3_{v_3}(-\lambda^{(p_{13})}, -\lambda^{(p_{23})}, \lambda^{(p_{34})}, \mu^{(u_3)})\, C^4_{v_4}(-\lambda^{(p_{14})}, -\lambda^{(p_{24})}, -\lambda^{(p_{34})}, \mu^{(u_4)}) \\
&\times d^n\sigma \quad ,
\end{aligned}$$

ただし，

$$v_i = u_i + p_i, \quad \int_{\mathbb{R}^0} d^0\sigma = 1, \quad p_i = \sum_{j=1}^4 p_{ij}, \quad p_{ii} = 0, \quad p_{ij} = p_{ji} \ge 0 \text{ 整数}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$k=\bar{p}/2\ ,\ \bar{p}=p_1+\cdots+p_4\ ,\ \mu^{(u_i)}\in\mathbb{R}^{u_i}$$



(6.5)の右辺は公式(3.7)によるのであるが、これに附随した変数の結合図を念頭におく。結合につける矢頭は便宜的である。$\lambda^{(p_{12})}$について、出発点c^1の変数を$\lambda^{(p_{12})}$、終点c^2の変数を$-\lambda^{(p_{12})}$とおくことを示す。(6.5)を積分表示するため測度$d\hat{\sigma}$を導入する。空間

$$E=\bigsqcup_{n=0}^{\infty}E_n\ ,\ E_n=\{n\}\times\mathbb{R}^n\ (n\geq 1),\ E_0=\{0\}$$

を考え、

$$x\in E_n\text{のとき},\ x=(n,\lambda^{(n)}),\ \lambda^{(n)}\in\mathbb{R}^n$$

とおく。射影

$$\pi:\quad x=(n,\lambda^{(n)})\longrightarrow \pi x=\lambda^{(n)}$$

を考え、$A\subset E$に対して

$$A_n=E_n\cap A$$

とおく。A_nは第一座標がnであるようなAの部分集合である。$\hat{\sigma}$をつぎのように分解して、構成する

(6.6) $\hat{\sigma}$がE_n上に誘導する測度 $=\displaystyle\int_{\pi A_n}d^n\sigma,\quad d^n\sigma(\lambda)=d\sigma(\lambda_1)\cdots d\sigma(\lambda_n)$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\widetilde{\sigma}(E_n) = n!\,(E_n \text{の重み})$$

6変数 $x_{ij}\in E$, $1\le i<j\le 4$, ただし $x_{ij}=(p_{ij},\lambda_{ij})$, $\lambda_{ij}\equiv\lambda^{(p_{ij})}\in R^{p_{ij}}$ を与え, $\lambda_{ji}=-\lambda_{ij}$ $(i<j)$ と約束する。すると x_{ji} は x_{ij} の関数になる $(i<j)$。この6変数の複合変数 $(x_{ij},\ 1\le i<j\le 4)\in E^6$ を (x_{ij}) で表わす。

$$(6.7)\quad A^1_{u_1} = A^1_{u_1}((x_{ij}), \mu^{(u_1)})$$

$$= \binom{u_1+p_1}{p_1}\frac{p_1!}{p_{12}!\,p_{13}!\,p_{14}!}C^1_{u_1+p_1}(\lambda_{12},\lambda_{13},\lambda_{14},\mu^{(u_1)})$$

$$A^2_{u_2} = A^2_{u_2}((x_{ij}), \mu^{(u_2)})$$

$$= \binom{u_2+p_2}{p_2}\frac{p_2!}{p_{21}!\,p_{23}!\,p_{24}!}C^2_{u_2+p_2}(\lambda_{21},\lambda_{23},\lambda_{24},\mu^{(u_2)})$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots$$

同様に

$A^3_{u_3}$, $A^4_{u_4}$ を定める。 すると

$$\left(\prod_1^4 X^k;\ u_1,\cdots,u_4\right)$$

$$(6.8)\qquad = \int_{E^6} A^1_{u_1}\cdots A^4_{u_4}\prod_{1\le i<j\le 4} d\widetilde{\sigma}(x_{ij})$$

とかくことができる。

(6.8)は4個の $L^2(\beta)$ の元に関する式であるが, $L^2(\beta)$ の m 個の元の積 $(m\ge 2)$, $\prod_1^m X^k$ に対して, 同様の式が得られる。それらは, X^k $(1\le k\le m)$ が有限であれば, 等式として実際成立する。

(6.4)より, 簡単な不等式を利用して

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

(6.9) $$\left|\left(\prod_1^4 X^k\right)_\ell\right|^2 \leq N_4(\ell) \sum_{u_1+\cdots+u_4=\ell} \left|\left(\prod_1^4 X^k;\, u_1, \cdots, u_4\right)\right|^2,$$

(6.10) $N_4(\ell)=$ 不定方程式 $u_1+\cdots+u_4=\ell$, $u_i \geq 0$ 整, の解の個数 $= \dfrac{(\ell+3)(\ell+2)(\ell+1)}{3!}$

一方(6.8)の右辺は, §5, 4°の I の形をしているので

$$\left|\left(\prod_1^4 X^k,\, u_1, \cdots, u_4\right)\right|^2 \leq \|A^1_{u_1}\|_2^2 \cdots \|A^4_{u_4}\|_2^2,$$

$$\|A^1_{u_1}\|_2^2 = \int_{E^3} |A^1_{u_1}(x_{12}, x_{13}, x_{14}, \mu^{(u_1)})|^2 d\widetilde{\sigma}(x_{12})\, d\widetilde{\sigma}(x_{13})\, d\widetilde{\sigma}(x_{14}),$$

$A^2_{u_2}$, $A^3_{u_3}$, $A^4_{u_4}$ に対しても同様。$\widetilde{\sigma}$ の定義から

(6.11) $$\|A^1_{u_1}\|_2^2$$
$$= \sum_{p_1 \geq 0} \sum_{p_{12}+p_{13}+p_{14}=p_1} \binom{u_1+p_1}{p_1}^2 p_1! \frac{p_1!}{p_{12}!\,p_{13}!\,p_{14}!} \int |C^1_{u_1+p_1}(\lambda^{(p_{12})}, \cdots, \mu^{(u_1)})|^2 d^{p_1}\sigma$$
$$= \sum_{p_1 \geq 0} 3^{p_1} p_1! \binom{u_1+p_1}{p_1}^2 \int |C^1_{u_1+p_1}(\lambda^{(p_{12})}, \cdots, \mu^{(u_1)})|^2 d^{p_1}\sigma$$

となり,

$$a^1(4, u_1) = \int \|A^1_{u_1}\|_2^2\, d^{u_1}\sigma$$

とおけば

(6.12) $$a^1(4, u_1) = \sum_{p_1 \geq 0} 3^{p_1} p_1! \binom{u_1+p_1}{p_1}^2 \|C^1_{u_1+p_1}\|_2^2$$

(6.9)より

$$\int \left|\left(\prod_1^4 X^k\right)_\ell\right|^2 d^\ell\sigma \leq N_4(\ell) \sum_{u_1+\cdots+u_4=\ell} \int \left|\left(\prod_1^4 X^k, u_1, \cdots, u_4\right)\right|^2 d^\ell\sigma$$

$$(6.13)\quad = N_4(\ell)\sum_{u_1+\cdots+u_4=\ell} a^1(4,u_1)\cdots a^4(4,u_4)$$

$$= N_4(\ell)\, a^1(4)*\cdots * a^4(4)(\ell) \quad ,$$

$*$ は数列 $a^i(4)=(a^i(4,0),\ a^i(4,1),\cdots)$ の convolution

が得られる。
全く同様の関係が $\prod_1^m X^k$ に対して成り立つ。
さて，(6.4)の右辺が実際に $L^2(\beta)$ の元を表すとすれば

$$(6.14)\qquad \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell!\int |(\prod_1^4 X^k)_\ell|^2 d^\ell\sigma <\infty$$

となる筈である。つぎにこれが成立する条件を上の評価式から求めてみる。

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell!\int |(\prod_1^4 X^k)_\ell|^2 d^\ell\sigma$$

$$(6.15)\qquad \le \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell!\,\frac{(\ell+3)(\ell+2)(\ell+1)}{3!}\, a^1(4)*\cdots * a^4(4)(\ell)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{3!}\int_0^\infty e^{-x}x^{\ell+3} a^1(4)*\cdots * a^4(4)(\ell)\,dx$$

$$= \frac{1}{3!}\int_0^\infty e^{-x}x^3\prod_{k=1}^4 g^k(4,x)\,dx$$

ただし

$$g^k(4,x) = \sum_{u=0}^{\infty} a^k(4,u)\,x^u$$

$$(6.16)\qquad = \sum_{f\ge 0} 3^f f!\sum_{u=0}^{\infty}\binom{u+f}{f}^2 \|C^k_{u+f}\|_2^2\, x^u$$

$$= \sum_{f\ge 0} f!\left(\frac{3}{x}\right)^f\sum_{u=0}^{\infty}\binom{u}{f}^2\|C^k_u\|_2^2\, x^u$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$=\sum_{u=0}^{\infty}\|C_u^k\|_2^2\, x^u \sum_{f=0}^{u}\left(\frac{3}{x}\right)^f f!\binom{u}{f}^2$$

これに関連して $z=3/x$ とおくと

$$\sum_{f=0}^{u} z^f f!\binom{u}{f}^2=\int_0^\infty e^{-t}dt\sum_{f=0}^{u}\binom{u}{f}^2(tz)^f$$

(6.17)
$$=\int_0^\infty e^{-t}dt\,(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{f=0}^{u}\binom{u}{f}\left(\sqrt{tz}\,e^{i\theta}\right)^f\right|^2 d\theta$$

$$=\int_0^\infty e^{-t}dt\,(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\left|1+\sqrt{tz}\,e^{i\theta}\right|^{2u}d\theta$$

また

(6.18)
$$\left|1+\sqrt{tz}\,e^{i\theta}\right|^2 x=p^2(3t,x,\theta)$$
$$p(t,x,\theta)=\sqrt{x+2\sqrt{tx}\cos\theta+t}$$

よって (6.16)−(6.18)より

(6.19)
$$g^k(4,x)=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}e^{-t}dt\,\frac{d\theta}{2\pi}\sum_{u=0}^{\infty}\|C_u^k\|_2^2\left(p^2(3t,x,\theta)\right)^u$$
$$=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}e^{-t}dt\,\frac{d\theta}{2\pi}\,(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\left|\Phi\left(e^{i\varphi}p(3t,x,\theta)\right)\right|^2 d\varphi$$

ただし

(6.20)
$$\Phi(\zeta)=\Phi(X^k,\zeta)=\sum_{u=0}^{\infty}\|C_u^k\|_2\,\zeta^u$$

は数列 $\{\|C_u^k\|_2,\ 0\le u<\infty\}$ の母関数で整関数である。

以上から，特に $X^1=\cdots=X^4$ とおくことによって，$L^2(P)$ のあるクラスを指定し，そのとき X に対しては

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(|||X|||'_8)^8 \equiv \int_0^\infty e^{-x}\frac{x^3}{3!}dx\left(\int_0^\infty\iint_0^{2\pi} e^{-t}dt\frac{d\theta d\varphi}{(2\pi)^2}\left|\Phi(p(3t,x,\theta)e^{i\varphi})\right|^2\right)^4$$

$$\Phi(\zeta)=\Phi(X,\zeta)$$

が有限であって

$$\{E(X^8)\}^{1/8} \le |||X|||'_8$$

が成立するであろう。更に $X^1,\cdots,X^m$ について同様に考えて

$$(6.21)_m \quad (|||X|||'_{2m})^{2m}$$
$$=\int_0^\infty d\mu_m(x)\left(\int_0^\infty\iint_0^{2\pi} e^{-t}dt\,\frac{d\theta d\varphi}{(2\pi)^2}\left|\Phi(p((m-1)t,x,\theta)e^{i\varphi})\right|^2\right)^m$$
$$d\mu_m(x)=\frac{e^{-x}x^{m-1}}{(m-1)!}dx \quad (m=2,3,\cdots)$$

とおけば、$L^2(\beta)$ のあるクラスが設定され、その元に対して、$(6.21)_m$ が有限であり

$$(6.22)_m \qquad \{E(X^{2m})\}^{1/2m} \le |||X|||'_{2m}$$

が成立するだろう。$(6.21)_m$ の右辺の積分は、C_k のノルムを含む級数で具体的に書くことができるが、これからの議論で明らかなように、多くの場合この積分表示の方が便利である。$(6.21)_m$ が有限になるクラスにおいて、$\prod_1^m X^k$ の形式的展開が、実際に $\prod_1^m X^k$ の Wiener 展開になっていることは後に明らかにする。形式的展開が Wiener 展開になる別のクラスを定めてみる。

$d\mu_m$ および $e^{-t}dt\,d\theta\,d\varphi/(2\pi)^2$ は確率測度である。後者の性質を利用すれば、$(6.21)_m$ から

$$(6.23)_m \quad (|||X|||'_{2m})^{2m}$$
$$\le\int_0^\infty d\mu_m\int_0^\infty\iint_0^{2\pi} e^{-t}dt\frac{d\theta d\varphi}{(2\pi)^2}\left|\Phi(p((m-1)t,x,\theta)e^{i\varphi})\right|^{2m}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(m = 2, 3, \cdots \qquad).$$

この右辺は簡易化することができる。記号を簡単にするために、$m=4$ の場合を考える。$(6.23)_m$ の右辺は

$$\int_0^\infty d\mu_4(x)\int_0^\infty\iint_0^{2\pi} e^{-t}dt\,\frac{d\theta\, d\varphi}{(2\pi)^2}\left|\sum_{u=0}^\infty \gamma_u \left(p(3t,x,\theta)e^{i\varphi}\right)^u\right|^2$$

$$(6.23)_m' \qquad = \int_0^\infty d\mu_4 \int_0^\infty\iint_0^{2\pi} \frac{e^{-t}dt\,d\theta}{2\pi}\sum_{u=0}^\infty \gamma_u^2\, p^{2u}(3t,x,\theta),$$

$$\gamma_u = \| c_u \|^{4*} \quad (4\text{回 convolution})$$

この結果と(6.16), (6.19)と比較して
最後の式の右辺

$$= \int_0^\infty d\mu_4 \sum_{u=0}^\infty \gamma_u^2\, x^u \sum_{f=0}^u \binom{u}{f} 3^f f!\, x^{-f}$$

$$= \frac{1}{3!}\sum_{u=0}^\infty \gamma_u^2\, u! \sum_{f=0}^u \frac{u!\,3^f}{(u-f)!\,f!}(u-f+3)(u-f+2)(u-f+1)$$

$$(6.24) \qquad \leq \frac{1}{3!}\sum_{u=0}^\infty \gamma_u^2 (u+3)! \sum_{f=0}^u \frac{u!\,3^f}{(u-f)!\,f!}$$

$$(6.25) \qquad = \frac{1}{3!}\sum_{u=0}^\infty \gamma_u^2 (u+3)!\,4^u$$

(6.25)は、$(6.23)_m'$ の右辺を(6.24)で大きめに評価した結果であるが、こゝで小さめな評価をすれば

$$(6.23)' \asymp \frac{1}{3!}\sum_{u=0}^\infty \gamma_u^2 (u+3)!\,4^u$$

$\asymp$ は、ここでは両辺の比が正の数値ではさまれることを意味する。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

(6.25)を積分表示し

$$(6.25) = \int_0^\infty d\mu_4 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \sum_0^\infty \gamma_u (\sqrt{4x})^u e^{iu\varphi} \right|^2 d\varphi$$

$$= \int_0^\infty d\mu_4 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \Phi^4(\sqrt{4x}\, e^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi$$

即ち

$$(6.27)_4 \qquad (|||X|||'_8)^8 \le \int_0^\infty d\mu_4 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \Phi^4(\sqrt{4x}\, e^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi$$

いま

$$(6.26)_m \qquad (|||X|||_{2m})^{2m} \underset{def}{=} \int d\mu_m \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \Phi(\sqrt{mx}\, e^{i\varphi}) \right|^{2m} d\varphi$$

とおけば、$(6.26)_4$ は容易に一般化され

$$(6.27)_m \qquad (|||X|||'_{2m})^{2m} \le (|||X|||_{2m})^{2m}, \quad m = 2, 3, \cdots$$

となる。$(6.21)_m$, $(6.26)_m$ を、$m=1$ としても右辺の意味があるので、そこまで広げると

$$(6.28) \qquad (|||X|||'_2)^2 = |||X|||_2^2 = E(X^2)$$

となることが容易に確かめられる。

(6.15), (6.16) に相当することを、一般の m について考えると

$$(6.29) \qquad |||X|||'_{2m} = \left(\int_0^\infty d\mu_m\, g(m,x)^m \right)^{1/2m}$$

$$g(m,x) = \sum_{u=0}^\infty \|c_u\|_2^2 x^u \sum_{f=0}^u \left(\frac{m-1}{x}\right)^f f! \binom{u}{f}^2$$

が出る。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

§7 $L^2(\beta)$の種々の部分空間, CSDの表現

この節では, §6の $|||\cdot|||_{2m}$, $|||\cdot|||'_{2m}$ に関係するものを始めいくつかの $L^2(\beta)$ の部分空間を定め, Wiener展開の計算が形式的に実行できることを示す。

1° $|||\cdot|||_{2m}$, $|||\cdot|||'_{2m}$ $(m=1,2,\cdots)$ は何れも m の増加列で, ノルムになる。そして

$$(7.1)\qquad |||X|||'_{2m} \le |||X|||_{2m} \qquad (1\le m<\infty)$$

(6.1)', (6.20) のように

$$X=(c_0,c_1,\cdots),\quad \Phi(\zeta)=\Phi(X,\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\|c_k\|_2\,\zeta^k$$

とかく。また

$$(7.2)\quad M_{2m}=\{X: |||X|||_{2m}<\infty\},\quad M'_{2m}=\{X: |||X|||'_{2m}<\infty\},\quad (m=1,2,\cdots)$$

と定義する。

(1°の証明) $|||\cdot|||'_{2m}$ の劣加法性

$L^2(\beta)$ の元 $X=(a_0,a_1,\cdots)\equiv a$, $Y=(b_0,b_1,\cdots)\equiv b$ をとり, $\zeta=\rho e^{i\varphi}=\rho(\sqrt{(m-1)t},\,x,\,\theta)e^{i\varphi}$ とおけば

$$(7.3)\quad \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi(X+Y,\zeta)|^2d\varphi}=\sqrt{\sum_{u=0}^{\infty}\|(a+b)_u\|_2^2\,\rho^{2u}}$$

$$\le \alpha+\beta,\quad \alpha=\Big(\sum_{u=0}^{\infty}\|a_u\|_2^2\,\rho^{2u}\Big)^{1/2},\ \beta=\Big(\sum_{u=0}^{\infty}\|b_u\|_2^2\,\rho^{2u}\Big)^{1/2}$$

よって

$$\Big(\int_0^{\infty}\iint_0^{2\pi}|\Phi(X+Y,\rho e^{i\varphi})|^2e^{-t}dt\,\frac{d\theta\,d\varphi}{(2\pi)^2}\Big)^{1/2}$$

$$\le\Big(\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}(\alpha+\beta)^2e^{-t}dt\,\frac{d\theta}{2\pi}\Big)^{1/2}\le\alpha'+\beta'$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\alpha' = \left(\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \alpha^2 e^{-t} dt \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2}, \quad \beta' = \left(\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \beta^2 e^{-t} dt \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2}$$

これと $|||\cdot|||'_{2m}$ の定義を用いて

$$|||X+Y|||'_{2m} \leq \left(\int_0^\infty d\mu_m \, (\alpha' + \beta')^{2m} \right)^{1/2m}$$

$$(7.4) \qquad \leq \left(\int_0^\infty (\alpha')^{2m} d\mu_m \right)^{1/2m} + \left(\int_0^\infty (\beta')^{2m} d\mu_m \right)^{1/2m}$$

$$= |||X|||'_{2m} + |||Y|||'_{2m} \, .$$

つぎに

$$(7.5) \qquad |||X|||'_{2m} \leq |||X|||'_{2(m+1)} \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

を示す。

一般に，べキ級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty v_n x^n \, , \quad v_n \geq 0$$

に対して容易にわかるように

$$(7.6) \qquad \int_0^\infty f(x) d\mu_m \leq \int_0^\infty f(x) d\mu_{m+1}$$

(6.29) から明らかに

$$(7.7) \qquad g(m, x) \leq g(m+1, x) \, .$$

実確率変数の k 次絶対モーメントを β_k とかくと

$$(7.8) \qquad \beta_1 \leq \beta_1^{1/2} \leq \beta_3^{1/3} \leq \cdots \, .$$

(7.6) − (7.8) より

$$|||X|||'_{2m} = \left\{ \left(\int_0^\infty (g(m, x))^m d\mu_m \right\}^{1/2} \right.$$

$$\leq \left\{ \left(\int_0^\infty (g(m, x))^{m+1} d\mu_m \right)^{1/m+1} \right\}^{1/2}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\leq \left\{ \left(\int_0^\infty (g(m+1,x))^{m+1} d\mu_m \right)^{1/m+1} \right\}^{1/2}$$

$$\leq \left\{ \left(\int_0^\infty (g(m+1,x))^{m+1} d\mu_{m+1} \right)^{1/m+1} \right\}^{1/2} = |||X|||'_{2(m+1)}$$

$|||\cdot|||_{2m}$ に対する関係

(7.4)′ $\quad |||X+Y||| \leq |||X|||_{2m} + |||X|||_{2m}$

(7.5)′ $\quad |||X|||_{2m} \leq |||X|||_{2(m+1)}$

の証明と同様である。

つぎに $|||X|||_{2m}=0$ 又は $|||X|||'_{2m}=0$ であれば，(7.5), (7.5)′より $|||X|||_2=0$ 又は $|||X|||'_2=0$，従って(6.28)より $X\equiv 0$，即ち $|||\cdot|||_{2m}$, $|||\cdot|||'_{2m}$ はノルムである。

(7.1) は(6.27)$_m$ そのままである。

$X=(c_0, c_1, \cdots) \in L^2(\beta)$ のとき

(7.9) $\quad X^*=(|c_0|, |c_1|, \cdots)$

も $L^2(\beta)$ の元である。べキ級数にならい，この X^* を X の優級数とよぶ。X の n 部分和を X_n とかく，即ち

(7.10) $\quad X_n=(c_0, c_1, \cdots, c_n, 0, 0, \cdots)$

2° $X \in M'_{2m}$ (M_{2m}) ならば

(i) $X \in L^{2m}$, $\lim_{n\to\infty} \|X-X_n\|_{2m}=0$

(ii) $|||X^*|||'_{2m} = |||X|||'_{2m} \geq \|X\|_{2m}$

$\left(|||X^*|||_{2m} = |||X|||_{2m} \geq \|X\|_{2m} \right)$

$X^* \in M'_{2m}$ (M_{2m})

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

(証明) $|||X|||_{2m}$, $|||X|||'_{2m}$ は何れも $\{\|c_k\|_2\}$ によって定まるから, (ii)の等式および最後の命題は明らか。

$X^i = (c_0^i, c_1^i, \cdots) \in L^2(\beta)$, $1 \leq i \leq m$ が有限であれば, $X^i \in L^k$, $\forall k$, であり以前注意したように, 形式的計算による展開

$$\prod_{i=1}^{m} X^i = \Big(\prod_{i=1}^{m} X^i\Big)_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \int \Big(\prod_1^m X^i\Big)_l d^l\beta \quad (\text{有限和})$$

が成りたち, (6.15) の一般化

$$E\Big(\prod_1^m X^i\Big)^2 \leq \int_0^\infty d\mu_m \prod_{i=1}^{m} g^i(m,x)$$

$$(7.11) \qquad g^i(m,x) = \sum_{u=0}^{\infty} \|c_u^i\|_2^2 \sum_{f=0}^{u} \Big(\frac{m-1}{x}\Big)^f f! \binom{u}{f}^2$$

がいえる。 とくに, (7.11) において $X^i = X_n$ $(1 \leq i \leq m)$ とおいて (c.f. (6.29))

$$(7.12) \qquad E(X_n^{2m}) \leq \big(|||X_n|||'_{2m}\big)^{2m}$$

また $|||\cdot|||'_{2m}$ の表示から

$$(7.13) \qquad |||X_n|||'_{2m} \uparrow |||X|||'_{2m} \quad (n \to \infty)$$

$$P\big(\lim_{n' \to \infty} X_{n'} = X\big) = 1$$

をみたすnの部分列 n' をとると

$$E(X^{2m}) = E\big(\lim_{n' \to \infty} X_{n'}^{2m}\big) \leq \lim_{n' \to \infty} E(X_{n'}^{2m})$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \big(|||X_n|||'_{2m}\big)^{2m} = \big(|||X|||'_{2m}\big)^{2m}$$

これから (ii) の不等式が出る。

つぎに明らかに

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(7.14)\quad \int_0^{2\pi} |\Phi(X-X_n,\zeta)|^2 d\varphi \le \int_0^{2\pi} |\Phi(X,\zeta)|^2 d\varphi$$

$$\zeta = p(\sqrt{(m-1)t}, x, \theta)\, e^{i\varphi},$$

$$(7.15)\quad \int_0^{2\pi} |\Phi(X-X_n,\zeta)|^{2m} d\varphi \le \int_0^{2\pi} |\Phi(X,\zeta)|^{2m} d\varphi$$

$$\zeta = \sqrt{mx}\, e^{i\varphi}$$

そして ζ が前記何れの場合も

$$(7.16)\quad \lim_{n\to\infty} \Phi(X-X_n,\zeta) = 0.$$

(7.14)〜(7.16) を (6.21)m, (6.26)m に用いれば，積分の収束定理から (iii) が出る。(ii) の不等式を $X-X_n$ に適用して

$$\lim_{n\to\infty} \|X-X_n\|_{2m} = 0.$$

3° $$M'_{2m} = \{X\in L^2(\beta) : |||X|||'_{2m} < \infty\}$$

$$M_{2m} = \{X\in L^2(\beta) : |||X|||_{2m} < \infty\}, \quad m=1,2,\cdots$$

とおけば，$(M'_{2m}, |||\cdot|||'_{2m})$, $(M_{2m}, |||\cdot|||_{2m})$ は Banach 空間であって

$$M_{2m} \subset M'_{2m} \subset L^{2m}$$

$$(7.17)\quad M'_{2(m+1)} \subset M'_{2m},\quad M_{2(m+1)} \subset M_{2m}$$

$$L^2 = M'_2 = M_2$$

(証明) (7.17) はこれまでの結果のまとめにすぎない。M'_{2m} M_{2m} が Banach 空間になることは，特別な工夫なしに示される。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

4° $X^1, \cdots, X^m \in M'_{2m}$ ならば，形式的掛け算による展開

$$(7.18)\quad \prod_1^m X^i = \left(\prod_1^m X^i\right)_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \int \left(\prod_1^m X^i\right)_\ell d^\ell \beta$$

が成り立ち，右辺は Wiener 展開である。（2°(1) より，$\prod_1^m X^i \in L^2$）

（証明）(6.8) はただちに n, m 個の元の場合に一般化される。(7.10) の記号で n 部分和を表わす。

等式

$$(7.19)\quad \prod_1^m X_n^i = \left(\prod_1^m X_n^i\right)_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \int \left(\prod_1^m X_n^i\right)_\ell d^\ell \beta \quad (\text{有限和})$$

ただし

$$\left(\prod_1^m X_n^i\right)_\ell = \sum_{\substack{u_1+\cdots+u_m=\ell \\ u_i \geq 0}} \left(\prod_1^m X_n^i ; u_1, \cdots, u_m\right)$$

$$(7.20)\quad \left(\prod_1^m X_n^i ; u_1, \cdots, u_m\right) = \int \prod_1^m A_{u_i}^i \prod_{1\leq i<j\leq m} d\tilde{\sigma}(x_{ij})$$

$$k = \binom{m}{2}.$$

$A_{u_i}^i$ は (6.7) と全く同様であるが，ここでは後の便宜のため記号をかえて

$$(7.21)\quad A_{u_i}^i = A^i(X_n^i, (x_{ij}), \mu^{(u.)})$$

とかく，ただし (7.21) の右辺は

$$(7.22)\quad \begin{aligned} &A^i(X^i, (x_{ij}), \mu^{(u.)}) \\ &= \binom{u_i+p_i}{p_i} \frac{p_i!}{\prod_{k=1}^m p_{ik}!} C^i_{u_i+p_i}((\lambda_{ij}), \mu^{(u.)}) \end{aligned}$$

で定義した $A^i(X^i, \cdot, \cdot)$ に $X^i = X_n^i$ とおいたものである。(7.22) の右辺の記法は，(6.7) と同様であって，そこでの記法に従い，たとえば $(\lambda_{1j}) = (\lambda_{12}, \lambda_{13}, \cdots, \lambda_{1m})$, $(\lambda_{2j}) = (\lambda_{21}, \lambda_{23}, \cdots, \lambda_{2m})$ 等で

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

ある。すると X^i の優級数を用いるつぎの不等式が成りたつ。

$$A^i(X_n^i,\ (x_{ij}),\ \mu^{(u_i)}) \leq A^i((X_n^i)^*,\ (x_{ij}),\ \mu^{(u_i)})$$

$$(7.23)\qquad \int_{E^{m-1}} |A^i((X^i)^*,\ (x_{ij}),\ \mu^{(u_i)})|^2 \times d\hat{\sigma}(x_{1i})\cdots d\hat{\sigma}(x_{i-1,i})\,d\hat{\sigma}(x_{i,i+1})\cdots d\hat{\sigma}(x_{i,m}) < \infty$$

明らかに

$$\lim_{n\to\infty} A^i(X_n^i,\ (x_{ij}),\ \mu^{(u_i)}) = A^i(X^i,\ (x_{ij}),\ \mu^{(u_i)})$$

であるが，ここで (7.23) を考慮すれば，この収束は dominated convergence である。それ故

$$(7.24)\qquad \left(\prod_1^m X_n^i;\ u_1,\cdots,u_m\right) \longrightarrow \left(\prod_1^m X^i;\ u_1,\cdots,u_m\right)$$

$$\left(\prod_1^m X_n^i\right)_\ell \longrightarrow \left(\prod_1^m X^i\right)_\ell$$

ただし，最初の収束は $\mu^{(\ell)} \in R^\ell$ の関数の $d^\ell\sigma$ に関する概収束を示す。一方で

$$(7.25)_1\qquad \left|\left(\prod_1^m X_n^i\right)_\ell\right| \leq \left(\prod (X^i)^*\right)_\ell \quad (\text{dominated convergence 用}),$$

右辺は $\prod_1^m (X^i)^*$ の形式的掛算の ℓ 項の積分核である。また

$$(7.25)_2\qquad \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell! \int \left(\prod_1^m (X^i)^*\right)_\ell^2 d^\ell\sigma \leq \int \prod_1^m g^i(m, (X^i)^*, x)\, d\mu_m$$

$$\leq \left(\prod_1^m \int (g^i(m, (X^i)^*, x))^m d\mu_m\right)^{1/m} = \left(\prod_{i=1}^m |||X^i|||'_{2m}\right)^2 < \infty.$$

故に (7.24) 第二式と，$(7.25)_1$，$(7.25)_2$ を念頭において，適当な測度のもとで dominated convergence を適用すれば

$$(7.26)\qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell!\, \left\|\left(\prod_1^m X_n^i\right)_\ell - \left(\prod_1^m X^i\right)_\ell\right\|_2^2 = 0$$

$\|\cdot\|_2 = L^2(d^\ell\sigma)$ – ノルム.

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

がいえる。そこで(7.19)において

$$P\left(\lim_{n'\to\infty}\prod_{1}^{m}X_{n'}^{i}=\prod_{1}^{m}X^{i}\right)=1$$

となるnの部分列n′について極限をとれば

$$(7.27)\qquad \prod_{1}^{m}X^{i}=\sum_{l=0}^{\infty}\int\left(\prod_{1}^{m}X^{i}\right)_{l}d^{l}\sigma .$$

上記の極限移行とWiener展開の基本的性質から,(7.27)の右辺は形式的な計算によるものであると同時に,それ自体Wiener展開になっている。

バナッハ空間の級数$\sum x_i$が,加える順序にかかわらず一定の和をもつとき,無条件収束するという。

5° $f_{n,p}\in L^2(d^n\sigma)$, $0\le n<\infty$, $1\le p<\infty$, を複素数値対称関数とし, $f_n=(f_{n1},f_{n2},\cdots)$

$$(7.28)\qquad \mathcal{J}=\{\, I_n(f_{n,p}),\ 0\le n<\infty,\ 1\le p<\infty \}$$

とおく。これに対し,条件

$$(7.29)\qquad g_n(x)=\sum_{p=1}^{\infty}|f_{n,p}(x)|\in L^2(d^n\sigma)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!\,\|g_n\|_2^2<\infty$$

がみたされれば,

(i) $\mathcal{J}$の元を一般項とする級数は,$L^2(P)$において一定和$S(\mathcal{J})$に無条件収束する。

(ii) 集合$\mathcal{J}$の任意の分割$\{\mathcal{J}_n\}_1^\infty$, $\mathcal{J}_n\cap\mathcal{J}_m=\phi\ (n\ne m)$ $\mathcal{J}=\bigcup_{n\ge1}\mathcal{J}_n$に対して

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(\mathcal{J}_n) = S(\mathcal{J}) \quad (無条件収束)$$

(証明)

(7.30) $$S(\mathcal{J}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} I_n(f_{n,p})$$

とおく。実際，假定(7.29)から右辺の内側，外側の級数が$L^2(\beta)$で収束して$S(\mathcal{J})$が定まる。(7.30)の加え方を基準にとり，これと比較することによって(i)，(ii)が示される。

(例) $X^1, \cdots, X^m \in M'_{2m}$として，(7.18)について考える。右辺の展開の積分核は，(6.5)を一般化して，(7.20)をかきかえることによって

$$\left(\prod_1^m X^i\right)_\ell = \sum_{u_1+\cdots+u_m=\ell} \left(\prod_1^m X^i;\, u_1, \cdots, u_m\right)$$

(7.31)$_{\text{i}}$ $$= \sum_{\Gamma,\, u_1+\cdots+u_m=\ell} \gamma(\Gamma) f(\Gamma, u_1, \cdots, u_m)$$

ただし

(7.31)$_{\text{ii}}$ $$f(\Gamma, u_1, \cdots, u_m) = \int_{R^k} \prod_{i=1}^m c^i_{u_i+p_i}((\lambda_{\cdot j}), \mu^{(u_i)})\, d^k\sigma,$$

$$\gamma(\Gamma) = \left\{ \prod_{i=1}^m \binom{u_i+p_i}{p_i} \frac{p_i!}{\prod_{j=1}^m p_{ij}!} \right\} \prod_{1\le i<j\le m} p_{ij}!,$$

(7.31)$_{\text{iii}}$ $$\Gamma = (p_{ij}) \text{ 対称}, \quad p_{ii} = 0, \quad p_{ij} \ge 0 \text{ 整},$$

$$k = \overline{p}/2, \quad p_i = \sum_{j=1}^m p_{ij}, \quad \overline{p} = \sum_{i=1}^m p_i$$

とかくことができる。Γは，(7.31)$_{\text{iii}}$をみたすすべてのΓの集合上を動くものとする。

Γ，$u_i \ge 0$をパラメータとする多重ウィナー積分の集合

$$\mathcal{J} = \left\{ I_\ell(\gamma(\Gamma) f(\Gamma, u_1, \cdots, u_m));\ u_1+\cdots+u_m = \ell \right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

について，$\mathcal{M}'_{2m}$ を構成する際の議論から

$$g_\ell = \sum_{\Gamma,\, u_1+\cdots+u_m=\ell} \gamma(\Gamma)|f(\Gamma, u_1, \cdots, u_m)| \in L^2(d^\ell\sigma)$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell!\, \|g_\ell\|_2^2 \le \left(|||X^1|||'_{2m} \cdots |||X^m|||'_{2m} \right)^2 < \infty$$

が成りたち，(7.29)に相当する条件がみたされる。それ故，$\mathcal{M}'_{2m}$ においては，$X^1, \cdots, X^m$ の展開の右辺の項を形式的にかけ合わせて出来る項を，どんな順序で加えても，その和は $\prod_1^m X^i$ に等しい。この意味で M'_{2m} は都合のいい・クラスであるが，また空間 $L^2(\beta)$ で強い制約をうけたものの集りでもある。

6° $X, X^i \in M'_{2m}$ $(1 \le i \le 2m)$ に対して，$I^i_k = I(c^i_k)$，ただし，$X^i = (c^i_0, c^i_1, c^i_2, \cdots)$ とおけば，

(7.32)

(a) $$E\left(\prod_1^p X^i\right) = \sum_{k_i \ge 1} E\left(\prod_{i=1}^p I^i_{k_i}\right) \quad (\text{絶対収束})$$

(b) $$S(X^1, \cdots, X^p) = \sum_{k_1, \cdots, k_p \ge 1} S(I^1_{k_1}, \cdots, I^p_{k_p}) \quad (\text{仝上})$$

$$2 \le p \le 2m$$

X に対し，(7.9)，(7.10) の意味で X^*, X_n を考えると，

(7.33) $$E(X_n^*)^{2m} \uparrow E(X^*)^{2m} \quad (n \to \infty)$$

(注意1) (7.32) は $\mathcal{M}'_{2m}$ より広いクラスでも成りたつ (c.f 8°)

(証明) まず，$E(X_n^*)^{2m} \uparrow$ は，(3.10) より明らか，また 2° より $X_n^* \to X^*$ (L^{2m}) であるから，(7.33) がある。
(3.10)，(3.12) から容易にわかるように

(7.34) $$|E(X^1_{k_1}, \cdots X^p_{k_p})| \le E(I^{1*}_{k_1} \cdots I^{p*}_{k_p})$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$|S(I^1_{k_1},\cdots,I^p_{k_p})|\le S(I^{1*}_{k_1},\cdots,I^{p*}_{k_p})\le E(I^{1*}_{k_1}\cdots I^{p*}_{k_p})$$

だから，(7.33)と2°により

$$\sum_{1\le k_1,\cdots,k_p\le n}|E(I^1_{k_1}\cdots I^p_{k_p})|,\quad \sum_{1\le k_1,\cdots,k_p\le n}|S(I^1_{k_1},\cdots,I^p_{k_p})|$$

$$\le E(X^{1*}_n\cdots X^{p*}_n)\le\Big\{\prod_1^p E(X^{i*}_n)^{2m}\Big\}^{1/2m}\le\prod_1^p|||X^i|||'_{2m}<\infty$$

となり，(7.32)の右辺は絶対収束である。

更に

$$E(\prod_1^p X^i_n)=\sum_{1\le k_1,\cdots,k_p\le n}E(\prod_1^p I^i_{k_i})$$

$$S(X^1_n,\cdots,X^p_n)=\sum_{1\le k_1,\cdots,k_p\le n}S(I^1_{k_1},\cdots,I^p_{k_p})$$

とかき，$X^i_n\to X^i\ (L^{2m})$を用いれば，(7.32)が出る。

（注意2）積率とキュムラントの関係（c.f. §3）を用いれば，(7.32)(a)(b)のうち（絶対収束性も含め）一方から他方が出る。

6°と同一記号を用いて，つぎの関係は明らかである。$X\in L^2(\beta)$に対して

(7.35) $(X_p-X_q)^*=X_p^*-X_q^*,\ X_p^*=(X_p^*-X_q^*)+X_q^*\quad(p>q)$,

(7.36) $X^i\ (1\le i\le n)\in L^2(\beta)$が"有限"ならば

$$E(\prod_1^m X^i)\le E(\prod_1^m X^i)^*\le E(\prod_1^m X^{i*}),$$

とくに，X^iをすべて等しくX_nとした場合，$(X_n^k=(X_n)^k)$，X_nのべキにつき，

$$E(X_n^k)\le E(X_n^k)^*\le E((X_n^*)^k),\quad k\ge1\text{ 整}.$$

つぎに，M_{2m}，M'_{2m}と同様な役割をする$L^2(\beta)$の部分空間M''_{2m}

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

を考える。

(定義) $M''_{2m}=\{X\in L^2(\beta) \mid \sup_{1\le n<\infty} E(X_n^*)^{2m}<\infty\}$

7° $X\in M''_{2m} \Rightarrow X\in L^{2m},\ E(X-X_n)^{2m}\to 0 \quad (n\to\infty)$

(証明) (7.35)から

(7.37) $$(X_p^*)^{2m} = ((X_p-X_q)^*)^{2m} + \sum_{k=1}^{2m-1}\binom{2m}{k}((X_p-X_q)^*)^{2m-k}(X_q^*)^k + (X_q^*)^{2m}$$

一方

$$E\{((X_q-X_p)^*)^{2m-k}(X_q^*)^k\}\ge 0,\quad 0\le k\le 2m$$

だから

(7.38) $$E(X_p^*)^{2m}\ge E(X_q^*)^{2m}\quad (p>q).$$

同じ論法で一般に

$$E(X_p^*)^k \ge E(X_q^*)^k \quad (k=1,2,\cdots)$$

となる。$X\in M''_{2m}$の仮定により、$E(X_n^*)^{2m}$が有界なので、(7.38)から$\lim_{n\to\infty}E(X_n^*)^{2m}$の存在がいえる。更に(7.37)から

$$0\le \lim_{p,q\to\infty} E((X_p-X_q)^*)^{2m} \le \lim_{p,q\to\infty} (E(X_p^*)^{2m}-E(X_q^*)^{2m})=0 。$$

この事実に(7.36)の不等式を適用して

$$\lim_{p,q\to\infty} E(X_p-X_q)^{2m}=0 .$$

一方適当な部分列n'に対して$P(X_{n'}\to X)=1$であるから

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\lim_{n\to\infty} E(X-X_n)^{2m}=0, \quad X\in L^{2m}.$$

8° (i) $M'_{2m} \subset M''_{2m}$ $(m=1,2,\cdots)$

(ii) $X^i \in M''_{2m}$ $(1\le i\le 2m)$ に対しても (7.32) が成立する。

(証明)(i) $X\in M'_{2m}$ とすると,(7.33)より

$$\{E(X_n^*)^{2m}\}^{1/2m} \le \|X^*\|_{2m} \le |||X^*|||'_{2m} = |||X|||'_{2m} < \infty$$

であるから,$X\in M''_{2m}$.

(ii) 6°の証明から

$$\sum_{1\le k_1,\cdots,k_p\le n} |E(I^1_{k_1}\cdots I^p_{k_p})| \le \{\prod_1^p E(X_n^{i*})^{2m}\}^{1/2m}$$

であって,右辺は $n\to\infty$ に対して有界。それ故,(7.32)(a)の右辺は絶対収束する。一方7°により,$X_n^i\to X^i$ $(L^{2m})(n\to\infty)$ であるから6°の証明と全く同様に(7.32)(a)の等号の成立が示される。

(7.32)(b)は6°の証明の直後に述べた注意により,(7.32)(a)から導かれる。

CSDの表現について

話の方向をかえて,平均0の $X(t)\in \mathfrak{S}(\beta)$ について,CSDの表現を考える。高次CSDが確率過程にどんな制約をつけたとき,存在するかは一つの問題である。$X(t)$に特定の構造を与えない限りCSDの存在を保証することはできない。Wiener展開がCSDの存在を論ずるにふさわしい形をしていることは容易に理解される。

$$X(t)=\sum_{k\ge 1} I_k(c_k e_k(\lambda,t))$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

の右辺の形を利用して $E(X(t)X(0))$ を計算することによって
$f_2(\lambda)$ (=次のCSD=通常のスペクトル密度) は

$$f_2(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} k!\, f_{2,k}(\lambda)$$

(7.39)
$$f_{2,k}(\lambda) = \int |c_k(\lambda-\lambda_1-\cdots-\lambda_{k-1}, \lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1})|^2 f(\lambda-\lambda_1-\cdots-\lambda_{k-1})$$
$$\times f(\lambda_1)\cdots f(\lambda_{k-1})\, d\lambda_1 \cdots d\lambda_{k-1} \qquad (k \geq 2)$$

$$f_{2,1}(\lambda) = |c_1(\lambda)|^2 f(\lambda)$$

9° 次の(i)～(iii)は，何れも $f_2 \in L^2$ に対する充分条件である。

(i) $$\sum_{k=1}^{\infty} k! \int_{R^{k-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |c_k(\lambda)|^4 f^2(\lambda_1)\, d\lambda_1 \right)^{1/2} d^{k-1}\sigma(\lambda_2, \cdots, \lambda_k) < \infty$$

$$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k), \quad d^{k-1}\sigma(\lambda_2, \cdots, \lambda_k) = d\sigma(\lambda_2)\cdots d\sigma(\lambda_k)$$
$$d\sigma(\lambda) = f(\lambda)\, d\lambda$$

(ii) $$\|c_1^2 f\|_2 + \sum_{k=2}^{\infty} k!\, \|f\|_1^{k/2} \left(\int_{R^k} |c_k(\lambda)|^4 d^k\sigma \right)^{1/2} < \infty$$

(iii) $$\|c_1^2 f\|_2 + \sum_{k=2}^{\infty} k!\, \|c_k\|_\infty^2 \|f\|_1^k < \infty$$

(証明) (i) $$(f_2(\lambda))^2 = \sum_{k,l=1}^{\infty} k!\, l!\, f_{2,k}(\lambda) f_{2,l}(\lambda)$$

9°(i)の左辺の一般項を $k!\, d_k$ とかくと

$$\int f_{2k}(\lambda) f_{2l}(\lambda)\, d\lambda = \int d^{k-1}\sigma\, d^{l-1}\sigma$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} |c_k(\lambda - \sum_1^{k-1}\lambda_j, \lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1})|^2 |c_l(\lambda - \sum_1^{l-1}\mu_j, \mu_1, \cdots, \mu_{l-1})|^2$$
$$\times f(\lambda - \sum_1^{k-1}\lambda_j) f(\lambda - \sum_1^{l-1}\mu_j)\, d\lambda \leq d_k d_l$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\|f\|_2^2 \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} k!\, d_k \right)^2 < \infty$$

(ii) $f_2 \in L^2$ のための自明な十分条件は

$$\sum_{k=1}^{\infty} k!\, \|f_{2,k}\|_2 < \infty .$$

これをわかりやすい形にする。9°,(ii)の右辺の一般項を $k!\, e_k$ とかき、まず

$$\|f_{2,1}\|_2 = \|c_1^2 f\|_2 ,$$

また $k \ge 2$ のとき

$$\|f_{2,k}\|_2 \le \Big(\int f^{k*}(\lambda)\, d\lambda \int |c_1|^4 (\lambda - \sum_1^{k-1} \lambda_j, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \times f(\lambda - \sum_1^{k-1}\lambda_j)\, d^{k-1}\sigma \Big)^{1/2}$$

に注意する。 $f^{k*}(\lambda) \le \|f\|_1^{k-2} \|f\|_2^2$ であるから

$$\|f_{2,k}\|_2 \le \|f\|_1^{-1} \|f\|_2\, e_k$$

(iii) は (i) 又は (ii) からすぐ出る

(注意3) (a) $f_2 \in L^2$ となるためには, $c_1^2 f \in L^2$ が必要である。
(b) $X(t) \in L^2(\beta)$ であれば, 元来

$$\sum_{k=1}^{\infty} k!\, \|c_k\|_2^2 < \infty$$

であったが (iii) はこの条件を強化したものである。
(c) $X^i(t) \in \mathfrak{S}(\beta)$, $X^i(0) = (0, c_1^i, c_2^i, \cdots)$ $(i = 1, 2)$ が与えられたとき, 両者の相互相関スペクトル密度を $f^{12}(\lambda)$ とかくと

$$f^{12}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} k!\, f_{2,k}^{12}(\lambda), \qquad f_{2,1}^{12}(\lambda) = c_1^1(\lambda)\overline{c_1^2(\lambda)}\, f(\lambda)$$

$$f_{2,k}^{12}(\lambda) = \int c_k^1(\lambda - \sum_1^{k-1}\lambda_j, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \overline{c_k^2(\lambda - \sum_1^{k-1}\lambda_j, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})}\, f(\lambda - \sum_1^{k-1}\lambda_j)\, d^{k-1}\sigma$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

これからよく知られた不等式

$$|f_2^{12}(\lambda)| \le \sqrt{f_2^1(\lambda)}\,\sqrt{f_2^2(\lambda)}$$

があるが、従って $X^1(t)$, $X^2(t)$ が (i)〜(iii) のどれかをみたせば、$f_2^{12}(\lambda) \in L^2$.

いま関数族 $F=\left(c_{p_j}(\lambda^{(p_j)}),\ 1\le j\le n\right)$, $c_{p_j}\in \mathcal{L}^2(d^{p_j}\sigma)$, $p_j\ge 1$, から作った族 $(I^j = I_{p_j}(c_{p_j}),\ 1\le j\le n)$ において、(7.12)によれば

$$(7.40)\qquad S(I^1,\cdots,I^n)=\sum_{\Gamma\in \mathcal{C}_n(F)} \gamma_n(\Gamma)\,\delta_n(\Gamma)$$

これ右辺の各項は、(7.31)iiにおいて $u_i=0$ とおいてつぎのように求まる

$$(7.41)\qquad \gamma_n(\Gamma)=\left\{\prod_{k=1}^{n} \frac{p_k!}{\prod_{j=1}^{n} p_{kj}!}\right\}\prod_{1\le i<j\le n} p_{ij}! = \frac{\prod_{k=1}^{n} p_k!}{\prod_{1\le i<j\le n} p_{ij}!}\ ,$$

$$\delta_n(\Gamma)\equiv\delta(\Gamma,I^1,\cdots,I^n)$$

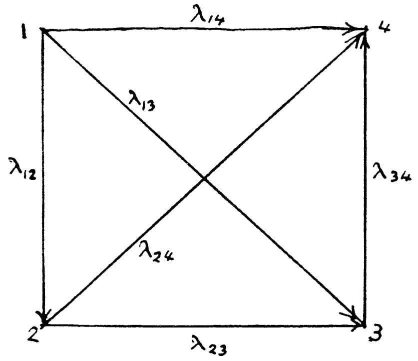
$$= \int_{R^k}\prod_{k=1}^{n} c_{p_k}(\lambda_{k1},\cdots,\lambda_{kk-1},\lambda_{kk+1},\cdots,\lambda_{kn})\,d^k\sigma$$

$$k=\bar{p}/2,\quad \bar{p}=\sum_{i=1}^{n} p_i\ ,\quad \lambda_{ji}=-\lambda_{ij}\ \ (i<j)$$

Γは変数の結合を示すグラフであるがこれは対称行列によって完全に定まる。以後Γはグラフと共にこの行列をも表わすものとする。

定理1の証明には、$n=4$ のときが必要になるので、この場合にΓをつぎに示す方法で分類する。一般のΓにつき、変数の結合を示すと図1のようになる。頂点 i には c_{p_i} が配置されており、$\lambda_{12}=\lambda^{(p_{12})}$ は $c_{p_1}(\lambda_{12},\cdots)$, $c_{p_2}(-\lambda_{12},\cdots)$ として、符号をかえて結合する c_{p_1}, c_{p_2} の変数を示す。測度 $d\sigma$ は原点対称であるから、c_{p_1}, c_{p_2} の変数のどちらに − をつけても結果は同じである。それゆえ

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150



(図 1)

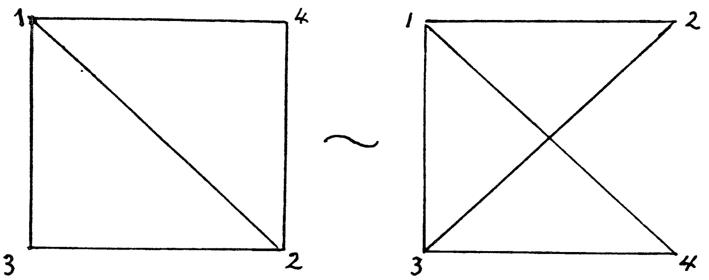
図で λ_{12} から $-\lambda_{12}$ にむけてひいた矢印つき線分で結合を示したが、矢印は便宜的である。ベクトル λ_{ij} の次元

$$(7.4.2) \quad \dim(\lambda_{ij}) = p_{ij}$$

であり、すべての $p_{ii} \geq 1$ であるが p_{ij} の中には 0 になるものがある。このとき対応する線分は図からなくなる。結局この図は、Γ のグラフにおいて、線 λ_{ij} の次元に関係なく、λ_{ij} を線分でおきかえたものである。この図を結合図とよぶ。

結合図を背景に、Γ 間に同値関係を設けて、Γ を分類する。$(1, 2, \cdots, n)$ のあらゆる順列 $\pi(1, 2, \cdots, n) = (\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n))$ を考え、$\pi(p_{ij}) = p_{\pi(i)\pi(j)}$, $\pi(\Gamma) = (\pi(p_{ij}))$ とおく。$\Gamma = (p_{ij})$, $\Gamma' = (p'_{ij}) \in \mathcal{C}_n(F)$ に対して、ある π があって、$p'_{ij} \cdot \pi(p_{ij}) = 0 \Longleftrightarrow p'_{ij} = 0$ かつ $\pi(p_{ij}) = 0$, $\forall i, j$ のとき $\Gamma \sim \Gamma'$（同値）と定める。そうすれば

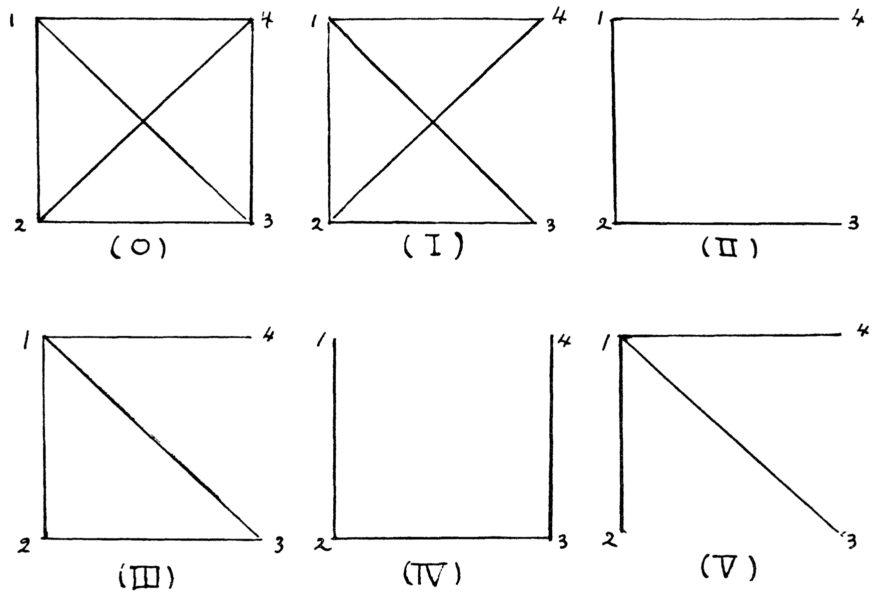
(図 2)



たとえば、図2のようになる。そうすれば $\mathcal{C}_4(F)$ は次に示す、異なる6個の型 0〜V に分類される。図3は各型の代表を一つづつ示したものである。

§3 で導入した $\mathcal{C}_n(F)$ において、F をかえてできる $\mathcal{C}_n(F)$ の全体、即ち可能な連結 n−グラフの集合を $\mathcal{C}_n$ で表わす。$X(t) \in \mathfrak{S}(3)$ が $X(0) \in M''_{2m}$ であることを単に $X(t) \in M''_{2m}$ で表わす。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150



(図 3)

10° 奇数の $X(t)\in M''_{2m}$ はつぎの形の CSD $f_n(x)$ $(2\leq n\leq 2m)$ をもつ

$$(7.43)\qquad f_n(x)=\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_n}\gamma_n(\Gamma)\,f_n(\Gamma,x)$$

これら右辺は, $\mathbb{R}^{n-1}$上のルベーグ測度についてほとんどすべてのxに対して絶対収束する。実際 $X^*(t)=(0,|c_1|e_1(\lambda,t),|c_2|e_2(\lambda,t),\cdots)$ がn次 CSD $f_n^*(x)$ をもち

$$(7.44)\qquad f_n^*(x)=\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_n}\gamma_n(\Gamma)\,f_n^*(\Gamma,x)$$

とかけ,

$$(7.45)\qquad |f_n(\Gamma,x)|\leq f_n^*(\Gamma,x),\quad 0\leq f_n^*(\Gamma,x)\in L^1(\mathbb{R}^{n-1};dx)$$

(証明) 記号の複雑さをさけるため, 一般性を失うことなく, $m=2$ の場合を考える。(7.32)によって

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(7.46)\quad S(X(t_4),X(t_3),X(t_2),X(0))=\sum_{p_i\geq 1} S(I_{p_1},I_{p_2},I_{p_3},I_{p_4})$$

ただし

$$(7.47)\quad \begin{aligned} &I_{p_1}(t_4)=I_{p_1}=I(c_{p_1}(\lambda_1)e_{p_1}(\lambda_1,t_4)),\ I_{p_2}(t_3)=I_{p_2}=I(c_{p_2}(\lambda_2)e_{p_2}(\lambda_2,t_3)) \\ &I_{p_3}(t_2)=I_{p_3}=I(c_{p_3}(\lambda_3)e_{p_3}(\lambda_3,t_2)),\ I_{p_4}(0)=I_{p_4}=I(c_{p_4}(\lambda_4)) \\ &\qquad \lambda_i\in R^{p_i}\ (1\leq i\leq 4).\quad (\text{c.f. } (2.2)), \end{aligned}$$

I_{p_1} は $X(t_4)$ の展開の一般項，等々.
(7.46) の右辺一般項は (7.40), (7.41) より

$$S(I_{p_1},\cdots,I_{p_4})=\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_4(F)}\gamma_4(\Gamma)S_4(\Gamma,t)$$

$$(7.48)\quad \begin{aligned} &S(\Gamma,t)=S(\Gamma,I_{p_1}(t_4),\cdots,I_{p_4}(0)),\quad t=(t_2,t_3,t_4) \\ &F=\{c_{p_1}(\lambda_1)e_{p_1}(\lambda_1,t_4),\cdots,c_{p_4}(\lambda_4)\},\ \gamma_4(\Gamma)=\frac{\prod_{i=1}^{4}p_i!}{\prod_{1\leq i<j\leq 4}p_{ij}!} \end{aligned}$$

とかくことができる。更に，(7.41) において c_{p_1} を $c_{p_1}(\lambda_1)e_{p_1}(\lambda_1,t_4)$ 等とおくことによって $S_4(\Gamma,t)$ を積分表示し，積分変数の変換をすれば，指定された Γ に対して，$f_4(\Gamma,x)$ が具体的な形で求まる。$f_4(\Gamma,x)$ の形を，Γ のあらゆる場合に通ずる統一的な形にまとめるのは困難なのでここでは代表的な一つの Γ について，$f_4(\Gamma,x)$ の形を求めるための変数変換の定め方を示す。代表的な Γ を O 型 (c.f. 図3) からとるが，変数変換の定め方は，Γ のあらゆる場合に適用可能である。

$\Gamma\in(O)$ のとき，$\dim(\lambda_{ij})>0,\ \forall i,j$ である。簡単のため

$$\lambda_{12}=(a,a'),\quad \lambda_{13}=(b,b'),\quad \lambda_{14}=(c,c')$$

$$\lambda_{23}=(d,d'),\quad \lambda_{24}=(e,e'),\quad \lambda_{34}=(f,f')$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

とおく。ここに $a, b, \cdots, f \in R^1$, $a', b', \cdots, f'$ は適当な次元のベクトル，たとえば a' が0次元で，実際には a' は存在せず，$\lambda_{12} = a \in R$ となる場合もある。(7.41) によって $S_4(\Gamma, t)$ を積分表示すると，

$$
\begin{aligned}
&S_4(\Gamma, t) \\
&= \int c_{p_1}(a, b, c, a', b', c')\, c_{p_2}(-a, d, e, -a', d', e') \\
(7.49) \qquad &\times c_{p_3}(-b, -d, f, -b', -d', f')\, c_{p_4}(-c, -e, -f, -c', -e', -f') \\
&\times \exp\{it_1(a+b+c+\bar{a}'+\bar{b}'+\bar{c}') + it_3(-a+d+e-\bar{a}'+\bar{d}'+\bar{e}') \\
&\qquad + it_2(-b-d+f-\bar{b}'-\bar{d}'+\bar{f}')\} W dV W' dV',
\end{aligned}
$$

ただし $W = W(a, \cdots, f) = f(a) \cdots f(f)$ ($f(x)$ から構成される $a, \cdots, f$ の密度関数)，$W' = W'(a', \cdots, f')$ は $a', \cdots, f'$ の密度関数で，W と同様 $a', \cdots, f'$ の成分における $f(x)$ の値の積として，W と同様に構成される，$dV = dV(a, \cdots, f)$ は $a, \cdots, f$ の体積要素，$dV' = dV'(a', \cdots, f')$ は $a', \cdots, f'$ の体積要素，$\bar{x}' = x'$ の成分の和，等々。

$S_4(\Gamma, t)$ に対する ESD の形を求めるために

$$
\begin{aligned}
&x_1 = a+b+c+\bar{a}'+\bar{b}'+\bar{c}' = a+b+c+l_1 \\
(7.50) \qquad &x_2 = -a+d+e-\bar{a}'+\bar{d}'+\bar{e}' = -a+l_2 \\
&x_3 = -b-d+f-\bar{b}'-\bar{d}'+\bar{f}' = -b+l_3,
\end{aligned}
$$

ここに l_1, l_2, l_3 は，a, b, c 以外のベクトルの成分の一次式。(7.50) の右辺が，a, b, c について一次独立であることに注目して，a, b, c を $x = (x_1, x_2, x_3)$ で表わすことができる。

$$a = -x_2 + l_2, \quad b = -x_3 + l_3, \quad c = x_1 + x_2 + x_3 - l_1 - l_2 - l_3$$

であるから，(7.49) はつぎのようにかける

$$
\begin{aligned}
&S_4(\Gamma, t) = \int \exp(it \cdot x) \\
(7.51) \qquad &\times c_{p_1}(-x_2+l_2, -x_3+l_3, x_1+x_2+x_3-l_1-l_2-l_3, a', b', c')
\end{aligned}
$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\times c_{p_2}(x_2-l_2,\ d,\ e,\ -a',\ d',\ e')\,c_{p_3}(x_3-l_3,\ -d,\ f,\ -b',\ -d',\ f')$$

$$\times c_{p_4}(-x_1-x_2-x_3+l_1+l_2+l_3,\ -e,\ -f,\ -c',\ -e',\ -f')$$

$$\times f(-x_2+l_2)f(-x_3+l_3)f(x_1+x_2+x_3-l_1-l_2-l_3)\,dx$$

$$\times W(d,e,f)\,W'(a',\cdots,f')\,dV(d,e,f)\,dV'(a',\cdots,f'),$$

$$dx = dV(x_1,x_2,x_3)\ ,\ t\cdot x = t_4x_1+t_3x_2+t_2x_3\ \ (\text{c.f. } (4.11))$$

従って

$$(7.52)\qquad S_4(r,t)=\int \exp(it\cdot x)\,f_4(r,x)\,dx$$

$f_4(r,x)$ はフーリエ積分(7.51)の核を x_1, x_2, x_3 以外の変数について積分したものである。(7.52)の表示はどの型の Γ においてもあてはまる。念のため $f_4(r,x)\in L^1$ をチェックする。いままでの変数変換の経過から

$$\int|f_4(r,x)|\,dx \le \int |c_{p_1}c_{p_2}c_{p_3}c_{p_4}|\,W(a,\cdots,f)W'(a',\cdots,f')\,dV\,dV'$$

となるが、右辺の積分は§5, 4°の適用条件をみたしているので

$$(7.53)\qquad \int|f_4(r,x)|\,dx \le \prod_{i=1}^{4}\|c_{p_i}\|_2 < \infty .$$

$X^*(t)\in M_4''$ であるから、(7.46)と同様に

$$(7.54)\quad S(X^*(t_4),\cdots,X^*(0)) = \sum_{p_i\ge 1} S(I^*_{p_1}, I^*_{p_2}, I^*_{p_3}, I^*_{p_4})$$

とかけ、右辺は絶対収束。(7.46)以降の議論が、c_{p_i} を $|c_{p_i}|$ でおきかえて進行し、$S(I^*_{p_1},\dots,I^*_{p_4})$ のフーリエ積分表示の核 $f_4^*(r,x)$ の積分表示が出るがそれは $f_4(r,x)$ の表示においておきかえ $c_{p_i}\longrightarrow|c_{p_i}|$ を行ったものである。それ故

$$(7.55)\qquad |f_4(r,x)| \le f_4^*(r,x)$$

(7.54)を $f_4^*(r,x)$ でフーリエ表示すると

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$S(X^*(t_4),\cdots,X^*(0))=\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_4}\gamma(\Gamma)\int f_4^*(\Gamma,x)e^{it\cdot x}dx$$

となるが，ここで $t=0$ とおくと

(7.56) $$\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_4}\gamma_4(\Gamma)\int f_4^*(\Gamma,x)dx=S(X^*(0),\cdots,X^*(0))<\infty$$

となり，

(7.57) $$f_4^*(x)=\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_4}\gamma_4(\Gamma)f_4^*(\Gamma,x)\in L^1(dx)$$

は $X^*(t)$ の4次CSDである。(7.46)に(7.52)を代入すると

$$S(X(t_4),\cdots,X(0))=\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_4}\gamma_4(\Gamma)\int f_4(\Gamma,x)e^{it\cdot x}dx.$$

(7.58) $$f_4(x)\equiv\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_4}\gamma_4(\Gamma)f_4(\Gamma,x)$$

とおけば，(7.55)〜(7.57)より右辺は，絶対・概収束する。(7.58)の右辺は(7.56)から絶対収束して，(7.58)の等式が成立しているのであるが，このことから $f_4(x)$ は $X(t)$ の4次CSDとなる。

(注意4) (7.47),(7.48)の記法に従うと，定常性により

(a) $S(\Gamma,I_{p_1}(t_4),\cdots,I_{p_4}(t_1))=S(\Gamma,I_{p_1}(t_4-t_1),\cdots,I_{p_3}(t_2-t_1),I_{p_4}(0))$.

これを用いて，CSDに関する関係式をみちびく。

まず，前記の記法によれば

(b) $$S(\Gamma,I_1(t_4),\cdots,I_4(0))=\int f_4(\Gamma,x)\exp(it\cdot x)dx$$
$$t\cdot x=t_4x_1+t_3x_2+t_2x_3,\quad I_i=I_{p_i}.$$

(b)の左辺において，$t_4,t_3,t_2,0$ を種々入れかえたとき，右辺のフーリエ核はどうなるか。たとえば

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

(c) $S(\Gamma, I_1(0), I_2(t_4), I_3(t_3), I_4(t_2))$

を考える。$(c) = S(\Gamma', I_1'(t_4), I_2'(t_3), I_3'(t_2), I_4'(0))$, $\Gamma' = \pi\Gamma$, $\pi(1,2,3,4) = (2,3,4,1)$, $I_i' = I_{\pi(i)}$ とかける。また定常性から

$$(c) = S(\Gamma, I_1(-t_2), I_2(t_4-t_2), I_3(t_3-t_2), I_4(0))$$

$$= \int f_4(\Gamma, x)\exp(ix_2t_4 + ix_3t_3 - \bar{x}t_2)\,dx,$$

$$\bar{x} = \sum_1^3 x_j$$

$$= \int f_4(\Gamma, -\bar{x}, x_1, x_2)\exp(it\cdot x)\,dx$$

また、(c)の Γ' による表現から

$$(c) = \int f(\pi\Gamma, x_1, x_2, x_3)\exp(it\cdot x)\,dx$$

であるから

(d) $\quad f(\pi\Gamma, x_1, x_2, x_3) = f(\Gamma, -\bar{x}, x_1, x_2)$.

一般にこのような関係式が成り立つ。(d)は結果的につぎのルールに従っている。いま(c)を一般に、考えているものが $S(\Gamma, I_1(*), I_2(*), I_3(*), I_4(*))$ とし、*は $t_4, t_3, t_2, 0$ の何れかを表わすとする。0が I_i $(1 \le i \le 3)$ に含まれているとき、$f(\Gamma, x_1, x_2, x_3)$ においておきかえ、$x_i \to -\bar{x}$ とする。残りの I_j に含まれるtが t_k のとき、$x_j \to x_\ell$ ただし $k+\ell=5$ とおきかえる。いずれにせよ、$f(\pi\Gamma, x)$ は $f(\Gamma, x)$ の自変数の一つを $-\bar{x}$ でおきかえ、残りの自変数を x_1, x_2, x_3 の相異なる文字でおきかえたものである。

(d)の利用。

これから $f_4(\Gamma, x)$ を計算するとき、図3の頂点に、(7.47)の I_{p_i} が配置されている場合だけ考える。それらの結果に、(d)を適用すれば、すべての場合がつくされる。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

（注意3）

$$(7.59) \qquad M_{2m} \subset M'_{2m} \subset M''_{2m} \subset L^{2m} \quad (m=1,2,\cdots)$$

$$M_2 = M_2' = M_2'' = L^2$$

であった。M''_{2m} の元に対して $2m$ 次までの CSD が存在する。後に具体的計算を行う段階では，M''_{2m} という制約だけでは不充分であり，M_{2m} のある部分族にまで制約しなければならない。そして，M_{2m} のノルムを定める積分表示が有効である。

$S_4(\Gamma,t)$ から $f_4(\Gamma,x)$ を求めるための (7.50) のような変換は一通りではない。

（例）10° の注明において，O型の Γ をひきあいに出した。O型は，図3において，どの二頂点も互に結ばれているという意味で，他の型に比べて最も"強い結合をもつ"。そのため，最も"弱い結合"の IV 型を考えよう。IV型の Γ のうち，最も弱い結合のものは

$$\dim(\lambda_{12}) = \dim(\lambda_{23}) = \dim(\lambda_{34}) = 1, \text{他の } \dim(\lambda_{ij}) = 0$$

である。これを用いて，(7.49) より

$$(7.60) \qquad S_4(\Gamma,t) = \int \exp\{it_4 e + it_3(-e+f) + it_2(-f+g)\}$$
$$\times c_1(e)c_2(-e,f)c_3(-f,g)c_1(-g)$$
$$\times f(e)f(f)f(g)\, dV(e,f,g).$$

(7.50) に相当する一次変換は唯一つ

$$(7.61) \qquad x_1 = e, \quad x_2 = -e+f, \quad x_3 = -f+g$$

である。(7.60) にこれを用いて

$$(7.62) \qquad f_4(\Gamma,x) = c_1(x_1)c_2(-x_1, x_1+x_2)c_2(-x_1-x_2, \bar{x})$$
$$\times c_1(-\bar{x}) f(x_1) f(x_1+x_2) f(\bar{x}), \quad \bar{x} = \sum_1^3 x_j$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

つぎに，IV となるが弱い結合をもつ V に属する Γ の中で最も弱い結合の Γ：$\dim(\lambda_{12})=\dim(\lambda_{13})=\dim(\lambda_{14})=1$，その他の $\dim(\lambda_{ij})=0$ ととると

$$S_4(\Gamma,t)$$

$$(7.63)\qquad =\int \exp\{it_4(e+f+g)+it_3(-e)+it_2(-f)\}$$
$$\times C_3(e,f,g)C_1(-e)C_1(-f)C_1(-g)$$
$$\times f(e)f(f)f(g)\,dV(e,f,g).$$

このとき一次変換は唯一つ

$$(7.64)\qquad x_1=e+f+g,\quad x_2=-e,\quad x_3=-f$$

である。これを用いて，(7.63)より

$$(7.65)\qquad f_4(\Gamma,x)=C_3(-x_2,-x_3,\bar{x})C_1(x_2)C_1(x_3)C_1(-\bar{x})$$
$$\times f(\bar{x})f(x_2)f(x_3).$$

以上にあげた IV，V 型の Γ 以外のものでは，$\bar{p}/2\geq 4$ であるので，$f_4(\Gamma,x)$ は積分表示で与えられる。(7.64)の e, f, g は，(7.50)の a, b, c に相当しており，(7.64)は(7.50)の特別な場合になっている。しかし，(7.61)は(7.50)の特別な場合にはならない。$f_4(\Gamma,x)$ を定める(7.50)のような変換は多様である。その特定の一つから，(7.61)が特別な場合として出る。このように O 型の特定の一次変換によって，すべての型に通ずる変換を統一することはできない。

§8 CSD に関する評価

この§では，$T\to\infty$ に対する，$E(\xi(\varphi))^2=E(\xi_T(\varphi))^2$ の行動を調べる。(5.15)から

$$(8.1)\quad E(\xi(\varphi))^2=2\pi\Big\{\int\Psi(x)f_4(x_1+a,x_2-a,x_3+b)\hat{\varphi}(a)\hat{\varphi}(b)\,dx\,da\,db$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$+\int \Psi(x) f_2(x_1+a) f_2(x_2-a)\varphi(a)\varphi(-x_1-x_3-a)\,dx\,da$$

$$+\int \Psi(x) f_2(x_1+a) f_2(x_2-a)\varphi(a)\varphi(-x_2-x_3+a)\,dx\,da \Big\}。$$

(8.1)の右辺第一項に関連して

(8.2) $$f_4(\Gamma,x,\varphi)=\int f_4(\Gamma,x_1+a,x_2-a,x_3+b)\varphi(a)\varphi(b)\,da\,db,$$

$$f_4(x,\varphi)=\sum_{\Gamma\in G_4}\gamma_4(\Gamma)f_4(\Gamma,x,\varphi)$$

とおく。

$E(\xi(\varphi))^2$ $(T\to\infty)$ の行動を知るためには，(8.2)の性質を知る必要がある。そのために，c_k，f に対して，定理1の仮定

(A) c_k は有界ボレル可測 $(k\geq 2)$

(B) $c_1^2(\lambda)f(\lambda)$ および $f(\lambda)\in L^2(-\infty,\infty)$

を設ける。

(7.52)の直後に述べた説明により

$$f_4(\Gamma,x)=\int c_{p_1}(-x_2+l_2,\,-x_3+l_3,\,\bar{x}-\bar{l},\,\alpha)$$

$$\times c_{p_2}(x_2-l_2,\beta)\,c_{p_3}(x_3-l_3,\gamma)\,c_{p_4}(-\bar{x}+\bar{l},\delta)$$

(8.3)

$$\times f(-x_2+l_2)f(-x_3+l_3)f(\bar{x}-\bar{l})\,W\,dV,$$

$$\bar{l}=\sum_1^3 l_j,$$

ここに $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は(*)の $d,e,f,a',\cdots,f'$ のいくつかの複合変数，W は(*)の密度関数，dV は対応する体積要素(c.f. (7.49))。$p_i\geq 2$ であるから，(8.2)，(8.3)より

$$|f_4(\Gamma,x,\varphi)|$$

(8.4) $$\leq \prod_1^4 \|c_{p_i}\|_\infty\cdot\|\varphi\|_\infty^2\int f(-x_2+a+l_2)f(-x_3-b+l_3)$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\times f(\bar{x}+b-\bar{l})\,W\,dV\,da\,db$$

$$\leq \prod_1^4 \|c_{p_i}\|_\infty \|\varphi\|_\infty^2 \|f\|_1^{\bar{p}/2} (\|f\|_2^2 \|f\|_1^{-2}), \quad \bar{p}=\sum_1^4 p_j$$

この際

$$\text{(8.5)} \qquad \int W\,dV = \|f\|_1^m, \quad m = 3+\dim(\alpha')+\cdots+\dim(f')$$

$$\int f(a+u) f(-b+v) f(b+w)\,da\,db \leq \|f\|_2^2 \|f\|_1$$

を用いた。

(8.4) は $f_4(\Gamma, x, \varphi)$ の有界性に関する評価であるが、この他に $f_4(\Gamma, x, \varphi)$ の x に関する連続性が必要である。そのため (8.3) から導かれる

$$f_4(\Gamma, x, \varphi)$$
$$= \int \hat{f}_4(\Gamma, x_1+x_2+a, -a, b)\,\varphi(a+x_2)\,\varphi(b-x_3)\,da\,db$$
$$= \int c_{p_1}(a+l_2, -b+l_3, x_1+x_2+b-\bar{l}, \alpha)\,c_{p_2}(-a-l_2, \beta)$$
$$\text{(8.6)} \qquad \times c_{p_3}(b-l_3, \gamma)\,c_{p_4}(-x_1-x_2-b+\bar{l}, \delta)$$
$$\times f(a+l_2) f(-b+l_3) f(x_1+x_2+b-\bar{l})\,W\,dV$$

を用いる。

0-型で最も弱い結合の Γ, 即ち $\dim(a')=\cdots=\dim(f')=0$ 従って $l_1=0$, $l_2=d+e$, $l_3=-d+f$, $p_i=3$ となるとき

$$\text{(8.6)}' \qquad \dot{f}_4(\Gamma, x, \varphi)$$
$$= \int c_3(a+d+e, -b-d+f, x_1+x_2-b-e-f)\,c_3(-a-d-e, d, e)$$
$$\times c_3(b+d-f, -d, f)\,c_3(-x_1-x_2-b+e+f, -e, -f)$$
$$\times f(a+d+e) f(b+d+f) f(x_1+x_2+b-e-f)$$
$$\times \varphi(a+x_2)\,\varphi(b-x_3)\,W(d,e,f)\,dV(d,e,f)\,da\,db,$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

どの c_3 に含まれる積分変数の一次式――たとえば

$$(8.7)\qquad \xi_1 = a+d+e,\quad \xi_2 = -b-d+f,\quad \xi_3 = -b-e-f$$

も一次独立であることに注意する。

記号を設ける；ユークリッド空間上の複素数値関数 $g(x)$ に対して

$$(8.8)\qquad [g]_n(x) = \begin{cases} g(x), & |x|\le n,\ |g(x)|\le n \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他の } x。\end{cases}$$

つぎに $f_4(\Gamma,x,\varphi)$ が x につき連続であることを示す。$f_4(\Gamma,x,\varphi)$ は f の汎関数なので

$$f_4(\Gamma,x,\varphi) = f_4(\Gamma,x,\varphi,f)$$

とかく。(8.4), (B) によって、x につき一様に

$$(8.9)\qquad f_4(\Gamma,x,\varphi,[f]_n) \longrightarrow f_4(\Gamma,x,\varphi,f)\quad (n\to\infty)$$

であるから、一般性を失うことなく、f は有界、その台はコンパクトであるとする。そうすると、(8.6)′ の積分域は、一定有界域に含まれる。いま、(8.6)′ において、(8.7) を一部として含む一次変換 $(d,e,f,a,b) \longrightarrow (\xi_i,\ 1\le i\le 5)$ を行った上で、(8.6)′ の積分核の第一因子で、変数のおきかえ $x_1\longrightarrow x_1'$, $x_2\longrightarrow x_2'$ を行ったものと (8.6)′ 自身との差を考える。その絶対値は、次の値をこえない

$$\|f\|_\infty^6 \|\varphi\|_\infty^2 \|c_3\|_\infty^3 \int_D |c_3(\xi_1,\xi_2,x+\xi_3) - c_3(\xi_1,\xi_2,x_1'+\xi_3)|\, d\xi$$

$$x = x_1+x_2,\quad x' = x_1'+x_2',$$

ここに $\overline{D}\subset R^3$ はコンパクト。$x'\longrightarrow x$ に対して、右辺は 0 に収束する。かくして、(8.6)′ は x につき有界連続である。

以上の論拠は、(8.7) の一次独立性にある。一般の場合

(8.6)において，この性質が維持されるので，$\Gamma \in$ O型のとき，$f_4(\Gamma, x, \varphi)$は有界連続である。O型のみならず，I，II型に対しても同じ論法が適合するので結論として

$\Gamma \in \mathrm{O} \cup \mathrm{I} \cup \mathrm{II}$ の場合，$f_4(\Gamma, x, \varphi)$はxについて有界連続であり，とくに

(8.10)
$$|f_4(\Gamma, x, \varphi)| \leq K_1 \prod_1^4 \|\varphi_i\|_\infty \|f\|_1^{p/2}.$$
$$K_1 = \|\varphi\|_\infty^2 (\|f\|_2^2 \|f\|_1^{-2}).$$

(注意1) 今後，O，I，II以外の型に対して，(8.10)と同様の事実を示すが，その際利用するΓは§7，図3のような頂点の配置に限る。O型の場合，結合について対称なので，他の配置を考える必要はない。O型以外の場合，頂点の結合は非対称なので，論理的には，図3のΓと共に頂点の異る順列πを考えなければならない。即ち$f(\Gamma, x)$と共に$f(\pi\Gamma, x)$を考えなければならない。しかし，$f(\Gamma, x)$と$f(\pi\Gamma, x)$の間には§7，注意4．の関係(d)があるので，$f(\Gamma, x)$に対する所論は，何等変更の要なく，$f(\pi\Gamma, x)$にもあてはまることが観察によってよる。

III〜V型のとき事情がやや異る。

$\Gamma \in$ IIIのとき

代表的につぎの場合を考えなければならない。$\lambda_{12} = (a, a')$，$\lambda_{13} = (b, b')$，$\lambda_{14} = (c, c')$，$\lambda_{23} = (d, d')$，$a, b, c, d \in R$，$\dim(a'), \cdots, \dim(d') \geq 0$，これ以外の$\dim(\lambda_{ij}) = 0$。(7.49)に相当するこの場合の表現から，(7.50)と全く同じ変換により，(8.3)と同じ形の$f_4(\Gamma, x)$の表示が求まる。ただし，この際は

(8.11) $\ell_1 = \bar{a}' + \bar{b}' + \bar{c}'$; $\ell_2 = d - \bar{a}' + \bar{d}'$; $\ell_3 = -d - \bar{b}' - \bar{d}'$

となる。これを用い，$f_4(\Gamma, x, \varphi)$を評価する。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

・(i) $\dim(c')>0$ のとき

すべての $p_i\geq 2$ であるので，(8.10) と同じ結果になる：

$$|f_4(\Gamma,x,\varphi)|\leq K_1\prod_1^4\|c_{p_i}\|_\infty\|f\|_1^{\bar{p}/2},\quad K_1=(8.10)\text{の}K_1$$

(8.12)
$$f_4(\Gamma,x,\varphi)\text{ は }x\text{ につき連続}$$

(ii) $\dim(c')=0$ のとき

(8.13)
$$|f_4(\Gamma,x,\varphi)|\leq K_2\prod_1^3\|c_{p_i}\|_\infty\cdot\|f\|_1^{\bar{p}/2}$$
$$K_2=\|\varphi\|_\infty^2\left(\|f\|_2^{3/2}\|f\|_1^{-2}\right)\|c_1^2 f\|_2^{1/2},$$
$$f_4(\Gamma,x,\varphi)\text{ は }x\text{ につき連続}$$

となることを示す。

$\dim(c')=0$ のとき，$p_4=1$ となる。(8.11)，(A)，(B) を考慮して，(8.3) にヘルダー不等式を適用して

(8.14)
$$\begin{aligned}|f_4(\Gamma,x,\varphi)|&\leq\|\varphi\|_\infty^2\prod_1^3\|c_{p_i}\|_\infty\\&\quad\times\int f(x_2-a-d+\bar{a}'-\bar{d}')f(x_3+b+d+\bar{a}'+\bar{d}')\\&\quad\times f(\bar{x}+b)|c_1(\bar{x}+b)|\,da\,db\,W(*)\,dV(*)\\&\leq\|\varphi\|_\infty^2\left(\|f\|_2^{3/2}\|f\|_1^{-2}\right)\|c_1^2 f\|_2^{1/2}\prod_{i=1}^3\|c_{p_i}\|_\infty\|f\|_1^{\bar{p}/2},\\&\quad *=(d,a',b',d').\end{aligned}$$

$f_4(\Gamma,x,\varphi)$ の連続性について。$\Gamma\in\mathcal{O}$ のときのように，最低結合度の Γ について連続性が示されれば，より高い結合度の Γ についても連続性が維持される。$\dim(a')=\cdots=\dim(d')=0$ のとき，Γ の結合度は最低である。このとき，$\ell_1=0$，$\ell_2=d$，$\ell_3=-d$，$p_1=3$，$p_2=p_3=2$，$p_4=1$ であるから，(7.51)，(8.3) より

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$f_4(\Gamma,x,\varphi)=\int c_3(a+d,-b-d,x_1+x_2+b)\,c_2(-a-d,d)$$
$$\times c_2(b+d,-d)\,c_1(-b-x_1-x_2)$$
$$\times f(a+d)\,f(-b+d)\,f(x_1+x_2+b)$$
$$\times \varphi(a+x_2)\,\varphi(b-x_3)\,dV(a,b,d)$$

右辺の積分核を構成する各関数について，それぞれ含まれる，a, b, d の一次式は一次独立である。(8.10) を導いたと同じ論法で，$f_4(\Gamma,x,\varphi)$ は x につき連続である。

$\Gamma\in\mathrm{IV}$ のとき。

これまでと同一記法で，$\lambda_{12}=(e,e')$，$\lambda_{23}=(f,f')$，$\lambda_{34}=(g,g')$ その他の $\dim(\lambda_{ij})=0$ とする。(7.49) より

$$\begin{aligned} S_4(\Gamma,t)=\int & c_{p_1}(e,\alpha)\,c_{p_2}(-e,f,\beta)\\ & \times c_{p_3}(-f,g,\gamma)\,c_{p_4}(-g,\delta)\\ & \times \exp\{it_4(e+l_1)+it_3(-e+f+l_2)\\ & \quad +it_3(-f+g+l_3)\}\,f(e)f(f)f(g)\,dV(e,f,g)\\ & \times W(e',\cdots,g')\,dV(e',\cdots,g'), \end{aligned} \tag{8.15}$$

$$\alpha=e',\ \beta=(-e',f'),\ \gamma=(-f',g'),\ \delta=-g',\ l_1=\bar{e}',$$
$$l_2=-\bar{e}'+\bar{f}',\ l_3=-\bar{f}'+\bar{g}'.$$

変換

$$\begin{aligned} & x_1=e+l_1,\quad x_2=-e+f+l_2,\quad x_3=-f+g+l_3\\ & e=x_1-\bar{e}',\quad f=x_1+x_2-\bar{f}',\quad g=\bar{x}-\bar{g}' \end{aligned} \tag{8.16}$$

を用いて

$$
\begin{aligned}
&f_4(r, x, \varphi) \\
(8.17)\quad &= \int c_{p_1}(x_1+a-\bar{e}', \alpha)\, c_{p_2}(-x_1-a+\bar{e}', x_1+x_2-\bar{f}', \beta) \\
&\quad \times c_{p_3}(-x_1-x_2+\bar{f}', \bar{x}+b-\bar{g}', \gamma)\, c_{p_4}(-\bar{x}-b+\bar{g}', \delta) \\
&\quad \times f(x_1+a-\bar{e}')\, f(x_1+x_2-\bar{f}')\, f(\bar{x}+b-\bar{g}') \\
&\quad \times \varphi(a)\, \varphi(b)\, W(e', f', g')\, dV(e', f', g')\, da\, db
\end{aligned}
$$

e', f', g' が実存するか否かによって，IVを6つの類に分ける。

(i) $\dim(e')\cdot\dim(f')\cdot\dim(g') \neq 0$ のとき

すべての $p_i \geq 2$ であって，(8.12)に至ると同様の考察で，(8.16)から $f_4(r, x, \varphi)$ は (8.12) と同じ不等式をみたすことが分る。

$f_4(r, x, \varphi)$ の連続性については，これまでと様子が違う。それはつぎの理由による。(8.17)の積分核を構成する因子関数に含まれる積分変数の一次式に着目する。$\alpha, \dots, \delta$ に $e', \dots, g'$ を代入して，c_{p_1}, c_{p_4} に含まれる一次式は一次独立であるのに対して，c_{p_2}, c_{p_3} に含まれる一次式は従属である。後の積分因子を"欠損因子"とよぶ。そのため $f_4(r, x, \varphi)$ の連続性を導くのに，定理1の条件(C)を仮定しなければならない。

前と同様，f を $[f]_n$ で近似することにより，一般性を失うことなく，f は有界で，その台はコンパクトとしてよい。その結果，(8.17)において，e', f', g', a, b はある有界域 D に制限される。e' 等の成分をあらわにかいて，$e' = (e_1, \dots, e_k)$, $f' = (f_1, \dots, f_l)$, $g' = (g_1, \dots, g_m)$ とおく。非欠損因子のあつかいは前と同様である。

欠損因子の処理。一例に c_{p_3} をとり，(8.17)において，c_{p_3} に含まれる $-x_1-x_2+\bar{f}'$ を $-x_1'-x_2'+\bar{f}'$ でおきかえたものと，(8.17)自身の差の絶対値は次の値をこえない:

$$
C(D)\,\|\varphi\|_\infty^2 \prod_{i\neq 3} \|c_{p_i}\|_\infty \|f\|_1^{p/2}
$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\times \int_{\mathfrak{D}} |c_{\ell+m+2}(y-f_1-\cdots-f_\ell, b, f_1, \cdots, f_\ell, g_1, \cdots, g_m)$$
$$- c_{\ell+m+2}(-f_1-\cdots-f_\ell, b, f_1, \cdots, f_\ell, g_1, \cdots, g_m)|$$
$$\times df_1 \cdots dg_m\, db,$$
$$\mathfrak{D} = \{|b| \le C(D), |f_i| \le C(D), |g_i| \le C(D)\},$$

$y = (x_1 - x_1') + (x_2 - x_2')$, $C(D)$ は D に依存する定数.

$(x_1', x_2') \longrightarrow (x_1, x_2)$ のとき, 定理1の条件(C)のもとで, 右辺の積分は0に収束する。このような処理を, c_{p_2}, c_{p_3} に含まれる x_i について行うことにより, (C)のもとで $f_4(r, x, \varphi)$ が x について連続になることが分る。即ち

$\dim(e')\cdot\dim(f')\cdot\dim(g') > 0$ のとき, 条件(C)のもとで,

(8.18) $\quad |f_4(r, x, \varphi)| \le K_1 \prod_1^4 \|c_{p_i}\|_\infty \|f\|_1^{p/2}$, $K_1 = (8.10)$ の K_1

$f_4(r, x, \varphi)$ は x について連続。

(ii) $\dim(e') = 0$, $\dim(f')\cdot\dim(g') > 0$ のとき。

$f_4(r, x, \varphi)$ の上限評価は (8.13) と同様. (i) と同様に, $f_4(r, x, \varphi)$ の積分表示に c_{p_i} の欠損因子が存在する。これを (i) 同様に処理して

条件(C)のもとで

(8.19) $\quad |f_4(r, x, \varphi)| \le K_3 \prod_{i=2}^4 \|c_{p_i}\|_\infty \|f\|_1^{p/2}$,

$$K_3 = \|\varphi\|_\infty^2 (\|f\|_2^2 \|f\|_1^{-5/2}) \|c_1^2 \varphi\|_2^{1/2}$$

$f_4(r, x, \varphi)$ は x について連続

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

(iii) $\dim(f')=0,\ \dim(e')\cdot\dim(g')>0$ のとき
$f_4(\Gamma,x,\varphi)$ はつぎのように表わされる (c.f. (8.17))

$$f_4(\Gamma,x,\varphi)=f(x_1+x_2)J_1(\Gamma,x,\varphi)$$

(8.20)
$$\begin{aligned}J_1(\Gamma,x,\varphi)=\int & c_{p_1}(x_1+a-\bar{e}',e')c_{p_2}(-x_1-a+\bar{e}',x_1+x_2-e')\\ &\times c_{p_3}(-x_1-x_2,\bar{x}+b-\bar{g}',g')c_{p_4}(-\bar{x}-b+\bar{g}',-g')\\ &\times f(x_1+a-\bar{e}')f(\bar{x}+b-\bar{g}')\varphi(a)\varphi(b)\\ &\times W(e',g')\,dV(e',g')\,da\,db。\end{aligned}$$

すべての $p_i\geq 2$ であるから, J_1 に対して (8.12) の $f_4(\Gamma,x,\varphi)$ と同様の上限評価ができ, (8.19) と同様に処理して

$$|f_4(\Gamma,x,\varphi)-f_4(\Gamma,0,\varphi)|\leq\kappa_1|f(x_1+x_2)-f(0)|+\lambda_1(x)f(0)$$

(8.21)
$$\kappa_1=\sup_x|J(\Gamma,x,\varphi)|\leq K_4\prod_1^4\|c_{p_i}\|_\infty\|f\|_1^{p/2},\quad K_4=\|\varphi\|_\infty^2\|f\|_1^{-1},$$
$$\lambda_1(x)=|J_1(\Gamma,x,\varphi)-J_1(\Gamma,0,\varphi)|,$$

(C)のもとで $J_1(\Gamma,x,\varphi)$ は x について連続。

(iv) $\dim(e')=\dim(f')=0,\ \dim(g')>0$ のとき

$$f_4(\Gamma,x,\varphi)=f(x_1+x_2)J_2(\Gamma,x,\varphi)$$
$$\begin{aligned}J_2(\Gamma,x,\varphi)=\int & c_1(x_1+a)c_2(-x_1-a,x_1+x_2)\\ &\times c_{p_3}(-x_1-x_2,\bar{x}+b-\bar{g}',g')c_{p_4}(-\bar{x}-b+\bar{g}',-g')\\ &\times f(x_1+a)f(\bar{x}+b-\bar{g}')\varphi(a)\varphi(b)\\ &\times W(g')\,dV(g')\,da\,db.\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

(iii)と同様に処理して

$$|f_4(\Gamma,x,\varphi)-f_4(\Gamma,0,\varphi)|\leq \kappa_2|f(x_1+x_2)-f(0)|+\lambda_2(x)f(0)$$

(8.22)
$$\kappa_2=\sup_x|J_2(\Gamma,x,\varphi)|\leq K_5\prod_{i=2}^{4}\|c_{p_i}\|_\infty\|f\|_1^{\bar{p}/2}$$

$$K_5=\|\varphi\|_\infty^2\|f\|_1^{-3/2}\|c_1^2f\|_1^{1/2}$$

$$\lambda_2(x)=|J_2(\Gamma,x,\varphi)-J_2(\Gamma,0,\varphi)|,$$

(C)のもとで；$J_2(\Gamma,x,\varphi)$ は x につき連続。

(v) $\dim(e')=\dim(g')=0$, $\dim(f')>0$ のとき

$$f_4(\Gamma,x,\varphi)=\int c_1(x+a)\,c_{p_2}(-x_1-a,\,x_1+x_2-\bar{f}';f')$$
$$\times c_{p_3}(-x_1-x_2+\bar{f}',\,\bar{x}+b,\,-f')\,c_1(-\bar{x}-b)$$
$$\times f(x_1+a)\,f(x_1+x_2-\bar{f}')\,f(\bar{x}+b)$$
$$\times\varphi(a)\,\varphi(b)\,W(f')\,dV(f')\,da\,db$$

よつ

(8.23)
$$|f_4(\Gamma,x,\varphi)|\leq K_6\prod_2^3\|c_{p_i}\|_\infty\|f\|_1^{\bar{p}/2}$$

$$K_6=\|\varphi\|_\infty^2\left(\|f\|_2^2\|f\|_1^{-3}\right)\|c_1^2f\|_1$$

(C)のもとで $f_4(\Gamma,x,\varphi)$ は x につき連続。

最後に，唯一つしか起らない特異な場合として

(vi) $\dim(e')=\dim(f')=\dim(g')=0$ のとき

$$f_4(\Gamma,x,\varphi)=f(x_1+x_2)J_3(\Gamma,x,\varphi)$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

J_3 は J_2 の表式の右辺で $g'=0$ として得られる。

$$|f_4(\Gamma,x,\varphi)-f_4(\Gamma,0,\varphi)|\le \kappa_3|f(x_1+x_2)-f(0)|+\lambda_3(x)f(0)$$

(8.24) $$\kappa_3=\sup_x|J_3(\Gamma,x,\varphi)|\le K_7\prod_2^3\|c_{p_i}\|_\infty^2\|f\|_1^{\bar{p}/2}$$

$$K_7=\|\varphi\|_\infty^2\|f\|_1^{-2}\|c_1^2f\|_1$$

(C)のもとで $J_3(\Gamma,x,\varphi)$ は x につき連続。

$\Gamma\in V$ のとき

$\lambda_{12}=(e,e')$, $\lambda_{13}=(f,f')$, $\lambda_{14}=(g,g')$, その他の $\dim(\lambda_{ij})=0$ とする。e',f',g' が実存するかどうかで、IV のときと同様に、V を4つの類に分ける。IV とちがい、$J_i(\Gamma,x,\varphi)$ を含む形は起らない。これまでと全く同様に処理して

$$|f_4(\Gamma,x,\varphi)|\le K\prod_{i=1}^4 a_{p_i}$$

(8.25) $$a_k=\|c_k\|_\infty\|f\|_1^{k/2}\ (k\ge 2),\quad a_1=\|c_1^2f\|_2^{1/2}+\|c_1^2f\|_1^{1/2}$$

K は K_i と同様、φ, $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ で具体的にかけるが、一般につぎの形をしている

$$K=K(f,\varphi)=\|\varphi\|_\infty^2\|f\|_1^{-\alpha}\|f\|_2^{\beta},$$

$\alpha,\beta\ge 0$, $\bar{p}/2-\alpha\ge 1$.

(C)のもとで $f_4(\Gamma,x,\varphi)$ は x につき連続。

(8.25)はこれまでとやや違うが、それは単に形式上のことにすぎない。つぎに述べる総括に適する形にしたものである。

以上を総括して

(8.26)a　IV の (iii), (iv), (vi) を除いて

$$|f_4(\Gamma,x,\varphi)|\le K(f,\varphi)L(\Gamma)$$

$K(f,\varphi)=\|\varphi\|_\infty^2\|f\|_1^{-\alpha}\|f\|_2^{\beta}$, $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, $\bar{p}/2-\alpha\geq 1$,

α,β は Γ に依存せず，Γ の属する型（0～V）のみに依存する。$L(\Gamma)=\prod_{i=1}^{4}a_{p_i}$，ただし

$$a_k=\|c_k\|_\infty\|f\|^{k/2}\ (k\geq 2),\quad a_1=\|c_1^2f\|_2^{1/2}+\|c_1^2f\|_1^{1/2}$$

(C) のもとで，$f_4(\Gamma,x,\varphi)$ は x につき連続.

(8.26)b　IV の (iii), (iV), (Vi) について

$$f_4(\Gamma,x,\varphi)=f(x_1+x_2)J(\Gamma,x,\varphi)$$

$$|J(\Gamma,x,\varphi)|\leq K(f,\varphi)L(\Gamma),$$

$K(f,\varphi)$，$L(\Gamma)$ は上と同じ。

$$|f_4(\Gamma,x,\varphi)-f_4(\Gamma,0,\varphi)|\leq\kappa|f(x_1+x_2)-f(0)|+\lambda(x)f(0)$$

$$\kappa=K(f,\varphi)L(\Gamma),\ \lambda(x)=|J(\Gamma,x,\varphi)-J(\Gamma,0,\varphi)|,$$

(C) のもとで，$J(\Gamma,x,\varphi)$ は x につき連続.

§9　$X(t)$ 有限のとき，$\xi(\varphi)$，$T\to\infty$ の行動.

$X(t)$ を有限，$X(0)=(0,c_1,c_2,\cdots)$，$c_n\equiv 0\ (n\geq N+1)$ (c.f. (6.1)′) とする.

(補題 1)　$X(t)$ は有限で，$f(x)$，$c_n\ (2\leq n\leq N)$ は定理 1 の条件 (A), (B), C(i), (ii) をみたすとする。

このとき，有界可積分，実数値 $\varphi(x)$，$-\infty<x<\infty$ に対して

$$(9.1)\quad \xi_T(\varphi)\xrightarrow{\mathcal{L}}N(0,\sigma^2),\ T\to\infty\ (\mathcal{L}:\text{法則収束}),$$

ただし

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\sigma^2 = 2\pi \Big\{ \int f_4(a,-a,b)\,\varphi(a)\,\varphi(b)\,da\,db \tag{9.2}$$
$$+ \int (f_2(a))^2 \varphi(a)(\varphi(a)+\varphi(-a))\,da \Big\}$$

（証明）

$$X(t) = \sum_{k\ge 1} \int c_k(\kappa^{(k)}) \exp(i\,\overline{\kappa^{(k)}}\,t)\,d^k\beta$$

（$\kappa^{(k)}$ は k－ベクトル，$\overline{\kappa^{(k)}}$ はその成分の和）

とおくと，$I(x)$ の定義から

$$I(x) = \frac{1}{2\pi T} \sum_{k\ge 1} \int c_k(\kappa^{(k)})\,\mathcal{D}(\overline{\kappa^{(k)}}-x)\,d^k\beta \sum_{l\ge 1} \int c_l(\kappa^{(l)})\,\mathcal{D}(\overline{\kappa^{(l)}}+x)\,d^l\beta \tag{9.3}$$
$$= E\,I(x) + \sum_{k\ge 1} \int a_k\,d^k\beta,$$

$$\xi(\varphi) = \sqrt{T} \sum_{k\ge 1} \int (a_k, \varphi)\,d^k\beta, \tag{9.4}$$

ただし

$$(a_k,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} a_k(x^{(k)}, e)\,\varphi(e)\,de,\quad x^{(k)} = (x_1,\dots,x_k) \in R^k,$$

$$a_k = a_k(x^{(k)}, e) = \sum_{\substack{v+w=k;\ p,v,w\ge 0\\ N\ge v+p,\ w+p\ge 1}} \binom{v+p}{p}\binom{w+p}{p}\,p! \tag{9.5}$$

$$\times \frac{1}{2\pi T} \int c_{v+p}(\kappa^{(p)}, x^{(v)})\, c_{w+p}(-\kappa^{(p)}, x^{(w)})$$
$$\times\, \mathcal{D}(\overline{\kappa^{(p)}} + \overline{x^{(v)}} - e)\,\mathcal{D}(-\overline{\kappa^{(p)}} + \overline{x^{(w)}} + e)\,d^p\sigma,$$

$$x^{(k)} = (x^{(v)}, x^{(w)}) = (x_1,\dots,x_v, x_{v+1},\dots,x_k).$$

(9.4) が正規分布に収束することをモーメント法で示す.

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

しばらく，つぎの作業仮説をおく。

(*) f と c_1 は有界である。

モーメントとキムラントの間に一対一の関係があるから，先々の目的のためには，$T\to\infty$ のとき

$$(9.6)\quad E(\xi(\varphi))^2 \longrightarrow (9.2)\text{ の右辺}$$

$$(9.7)\quad \xi(\varphi)\text{ の } n \text{ 次キムラント } S_{\xi(\varphi)}(n) = S(\underbrace{\xi(\varphi),\cdots,\xi(\varphi)}_{n\text{個}}) \longrightarrow 0,\quad n\geq 3$$

を示せばよい。

一般の n の場合，(9.7) の計算は，記号が繁雑になり見通しを欠くので，最も単純な $n=3$ の場合を扱う。この場合の計算法が，一般の n にあてはまることは，処理を経た段階で明らかになる。

(9.7) を示すには，S の多重線形性 (c.f. (3.5)) を考慮すれば，つぎのことを示せばよい

$$(9.8)\quad (\sqrt{T})^3 S\Big(\int\Big(a_k(x^{(k)},e)\varphi(e)de\Big)d^k\beta,$$

$$\int\Big(\int a_l(y^{(l)},f)\varphi(f)df\Big)d^l\beta,\ \int\Big(\int a_m(z^{(m)},g)\varphi(g)dg\Big)d^m\beta\Big)$$

$$\longrightarrow 0,\quad T\to\infty.$$

(9.8) の $S(*,*,*)$ を計算するために，a_k には (9.5)，a_l, a_m にも同様の表現を用いる。a_k を v, w ($v+w=k$) についての和で表したのに対し，a_l, a_m をそれぞれ (w, u) ($w+u=l$)，(u, v) ($u+v=m$) についての和で表わし，また a_k の自変数を $x^{(k)}$ としたのに対し，a_l, a_m の自変数 $y^{(l)}=(y_1,\cdots,y_w,y_{w+1},\cdots,y_l)$，$z^{(m)}=(z_1,\cdots,z_u,z_{u+1},\cdots,z_m)$ を導入する。$S(*,*,*)$ は (3.12) によって，連結結合核の積分の和として表わされる。連

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

結積分核は，ベクトル $x^{(k)}, y^{(l)}, z^{(m)}$ の成分同志の結合によってできる。これを正確に記述するために，$k=b+c$，$l=c+a$，$m=a+b$ とおく。ここで，$x^{(k)}$ の c 個の成分が，$y^{(l)}$ の c 個の成分と結合するものとし，a，b についても同様である。より詳しく，$x_1,\cdots,x_k$ の処えベクトル $\mu^{(b)}=(\mu_1,\cdots,\mu_b)$，$\nu^{(c)}=(\nu_1,\cdots,\nu_c)$ の成分を配分；$y_1,\cdots,y_l$ の処え $-\nu^{(c)}=(-\nu_1,\cdots,-\nu_c)$，$\lambda^{(a)}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_a)$ の成分；また $z_1,\cdots,z_m$ の処え $-\lambda^{(c)}=(-\lambda_1,\cdots,-\lambda_c)$，$-\mu^{(b)}=(-\mu_1,\cdots,-\mu_b)$ の成分を配分するものとする。この配分を同時に行う操作を $Q(\lambda^{(a)},\mu^{(b)},\nu^{(c)})$ で表わす。ただし，Q としては，かくして出来る核が連結核になるものだけに限るものとする。Q を用いて，(9.8) は

$$
\begin{aligned}
I = (\sqrt{T})^3 \int \varphi(e)\varphi(f)\varphi(g)\,de\,df\,dg \\
\times \sum_{Q\in\tilde{\mathcal{C}}} \int Q(\lambda^{(a)},\mu^{(b)},\nu^{(c)})\big(a_k(x^{(k)},e)\,a_l(y^{(l)},f) \\
\times a_m(z^{(m)},g)\big)\,d^{a+b+c}\sigma(\lambda^{(a)},\mu^{(b)},\nu^{(c)}).
\end{aligned}
\tag{9.9}
$$

ただし $\tilde{\mathcal{C}}$ は連結核を生む Q の全体。

$$
\binom{v+p}{p}\binom{w+p}{p}p! \le (N!)^2
$$

であるから，(9.5) にもとづく，前述の a_k，a_l，a_m の表現から

$$
|a_k| \le K \sum_{\substack{0\le p\le N \\ v+w=k,\ v,w\ge 0}} \int \left|\mathcal{D}(\bar{\kappa}^{(p)}+\bar{x}^{(v)}-e)\,\mathcal{D}(-\bar{\kappa}^{(p)}+\bar{x}^{(w)}+e)\right| d^p\sigma
$$

$$
|a_l| \le K \sum_{\substack{0\le q\le N \\ w+u=l,\ w,u\ge 0}} \int \left|\mathcal{D}(\bar{\kappa}^{(q)}+\bar{y}^{(w)}-f)\,\mathcal{D}(-\bar{\kappa}^{(q)}+\bar{y}^{(u)}+f)\right| d^q\sigma
$$

$$|\ell_m| \le K \sum_{\substack{0\le r\le N \\ u+v=m,\, u,v\ge 0}} \int |\mathcal{D}(\bar{\kappa}^{(r)} + \bar{z}^{(u)} - g)\mathcal{D}(-\bar{\kappa}^{(r)} + \bar{z}^{(v)} + g)|\, d^r\sigma$$

$$K = \frac{1}{2\pi T}(N!)^2 \max_{1\le k\le N} \|c_k\|_\infty^2 .$$

よって，$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \ge 0$ $(i=1,2)$ を整とし

$$|I| \le T^{3/2} K^3 \sum_{\substack{|\alpha|=k,\, |\beta|=\ell \\ |\gamma|=m}} \sum_{Q\in\tilde{\mathcal{C}}} J(a,b,c;\alpha,\beta,\gamma) .$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ 等},$$

(9.10)
$$\begin{aligned} J = J(a,b,c;\alpha,\beta,\gamma) = \int \{ & Q(\lambda^{(a)}, \mu^{(b)}, \nu^{(c)}) \\ & \times |\mathcal{D}(\bar{\kappa}^{(p)} + \bar{x}^{(\alpha_1)} - e)\mathcal{D}(-\bar{\kappa}^{(p)} + \bar{x}^{(\alpha_2)} + e) \\ & \times \mathcal{D}(\bar{\kappa}^{(q)} + \bar{y}^{(\beta_1)} - f)\mathcal{D}(-\bar{\kappa}^{(q)} + \bar{y}^{(\beta_2)} + f) \\ & \times \mathcal{D}(\bar{\kappa}^{(r)} + \bar{z}^{(\gamma_1)} - g)\mathcal{D}(-\bar{\kappa}^{(r)} + \bar{z}^{(\gamma_2)} + g)|\} \\ & \times |\varphi(e)\varphi(f)\varphi(g)|\, d^{p+q+r}\sigma\, d^{a+b+c}\sigma\, dV(e,f,g), \end{aligned}$$

$$(x^{(\alpha_1)}, x^{(\alpha_2)}) = (x_1, \cdots, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_1+1}, \cdots, x_k) \text{ 等}.$$

いま

$$\rho = -\bar{\kappa}^{(p)} + e, \quad \sigma = -\bar{\kappa}^{(q)} + f, \quad \tau = -\bar{\kappa}^{(r)} + g$$

とおけば，ρ 等は密度

$$g_p(\rho) = f^{p*} * |\varphi| \qquad (*:\ \text{convolution})$$

によって重みづけられているから，J はつぎの形に変換される

(9.11) $$J = \int \Big| \prod_{j=1}^{6} D(\ell_j) \Big| g_p(\rho) g_q(\sigma) g_r(\tau) f(\lambda_1) \cdots f(\nu_c)\, d\rho \cdots d\tau\, d\lambda_1 \cdots d\nu_c$$

$$D(x) = (\sin x/2)/(x/2).$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

ここに, $l_1, \dots, l_6$ は $t=a+b+c+3$ 個の変数 $\lambda_1, \dots, \lambda_a, \mu_1, \dots, \mu_b, \nu_1, \dots, \nu_c, \rho, \sigma, \tau$ の一次式 $l_1 = -\rho + \cdots$, $l_2 = \rho + \cdots$, $\dots$, $l_6 = \tau + \cdots$. そして l_{2m-1} と l_{2m} $(1 \le m \le 3)$ は, それぞれ ρ, σ, τ によって連結されており, (l_{2m-1}, l_{2m}) $(1 \le m \le 3)$ は全体として Q によって連結されているので, $l_1, \dots, l_6$ は全体として t 個の変数によって連結されている。そして

$$\sum_{k=1}^{6} l_k = 0 . \tag{9.12}$$

なお, (9.10) から (9.11) に移行するとき, $\mathfrak{D}$ の位置に D が入るのであるが, その際 (9.12) が利用されている。また (9.12) から $l_1, \dots, l_6$ は一次従属であるが, この中のどの5個も一次独立であることが, $l_1, \dots, l_6$ の連結性から容易に分る。

つぎに $l_1, \dots, l_5$ に前記 t 変数の適当な一次式 $\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_{a+b+c-2}$ をつけ加え, 全体として t 変数に関して一次独立であるようにする。これら t 変数を一列にならべかえ, $\rho_1, \dots, \rho_t$ で表わし, それに応じて, $g_\rho(\rho), \dots, g_\tau(\tau), f(\lambda_1), \dots, f(\nu_c)$ を $h_1(\rho_1), \dots, h_t(\rho_t)$ とかく。仮設(*)により, f が有界であるから $h_1, \dots, h_t$ も有界。

変数変換

$$\begin{array}{ll} \xi_1 = \tilde{l}_1 & \eta_1 = l_1 \\ \vdots & \vdots \\ \xi_s = \tilde{l}_s & \eta_5 = l_5 \quad , s = t-5 \end{array}$$

の逆変換を

$$(9.13) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= p_{11}\xi_1 + \cdots + p_{1s}\xi_s + q_{11}\eta_1 + \cdots + q_{15}\eta_5 \\ &\ \vdots \\ \alpha_s &= p_{s1}\xi_1 + \cdots + p_{ss}\xi_s + q_{s1}\eta_1 + \cdots + q_{s5}\eta_5 \\ &\ \vdots \\ \alpha_t &= p_{t1}\xi_1 + \cdots + p_{ts}\xi_s + q_{t1}\eta_1 + \cdots + q_{t5}\eta_5 \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

とする。一般性を失うことなく

$$B \equiv \det(p_{ij}) \neq 0 \quad , 1 \leq i, j \leq s$$

と仮定する。(9.13) の変換の行列式を A として、J はつぎのようにかける。

$$J = |A| \int |D(\eta_1) \cdots D(\eta_5) D(\eta_1 + \cdots + \eta_5)| d\eta_1 \cdots d\eta_5$$

$$\times \int \prod_{j=1}^{t} h_j(\alpha_j(\xi) + \alpha_j^*(\eta)) d\xi_1 \cdots d\xi_s$$

$$\alpha_j(\xi) = \sum_{k=1}^{s} p_{jk} \xi_k \quad , \alpha_j^*(\eta) = \sum_{k=1}^{5} q_{jk} \eta_k 。$$

変換

$$\xi' = \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \vdots \\ \xi_s' \end{pmatrix} = (p_{ij}) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_s \end{pmatrix}$$

を用いて J を評価すると

$$J \leq |A| \prod_{j=s+1}^{t} \|h_j\|_\infty \int |D(\eta_1) \cdots D(\eta_5) D(\eta_1 + \cdots + \eta_5)| d\eta$$

$$\times \int \prod_{j=1}^{s} h_j(\alpha_j(\xi) + \alpha_j^*(\eta)) d\xi_1 \cdots d\xi_s$$

$$= |A||B|^{-1} \prod_{j=s+1}^{t} \|h_j\|_\infty (2\pi)^5 T \int |\Psi^{(5)}(\eta)| d\eta \prod_{j=1}^{s} \int h_j(\xi_j') d\xi_j'$$

$$= \text{const. } T \quad (\text{const} \text{ は } T \text{ に無関係})。$$

これを (9.10) に代入すると

$$|I| \leq \text{const.} \frac{1}{\sqrt{T}},$$

(9.8) が証明された。この不等式から

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$S_{\xi(\varphi)}(3) = O(1/\sqrt{T}),$$

一般に

$$S_{\xi(\varphi)}(n) = O(1/T^{n/2-1})$$

が同様の方法で示される。

つぎに(9.6)を証明する。この証明には、c, f の有界性の仮設(*)は不用である。

(8.1)をかきかえて

$$E(\xi(\varphi))^2 = I_1 + I_2 + I_3$$

$$(9.14)\quad \begin{cases} I_1 = 2\pi\int \Psi(x) f_4(x,\varphi)\,dx \\ I_2 = 2\pi\int \Psi(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1+a) f_2(x_2-a)\varphi(a)\varphi(-x_1-x_3-a)\,da \\ I_3 = 2\pi\int \Psi(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1+a) f_2(x_2-a)\varphi(a)\varphi(-x_2-x_3+a)\,da. \end{cases}$$

$X(t)$ は有限であるから、補題の仮定から、§7, 9°により、$f_2 \in L^2$ である。従って I_2, I_3 の内側の積分は x の有界連続函数であり、(5.5)(ii)より

$$(9.15)\quad \begin{aligned} \lim_{T\to\infty} I_2 &= 2\pi\int (f_2(a))^2 \varphi(a)\varphi(-a)\,da \\ \lim_{T\to\infty} I_3 &= 2\pi\int (f_2(a))^2 \varphi^2(a)\,da \end{aligned}$$

となるから、(9.6)を示すには

$$(9.16)\quad \lim_{T\to\infty} I_1 = 2\pi\int f_4(a,-a,b)\varphi(a)\varphi(b)\,da\,db$$

を示せばよい。そのためには —— $f_4(x,\varphi)$ が $f_4(\Gamma,x,\varphi)$ の有限個の和だから、

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(9.17)\quad \lim_{T\to\infty}\int\Psi(x)f_4(\Gamma,x,\varphi)\,dx = f_4(\Gamma,0,\varphi)$$
$$\equiv\int f_4(\Gamma,a,-a,b)\varphi(a)\varphi(b)\,da\,db$$

となることを示せばよい。$f_4(\Gamma,x)$ は L^1 の元であって，特定の超平面上の値，たとえば $f_4(\Gamma,a,-a,b)$ は意味が確定しない。$f_4(\Gamma,x,\varphi)$ も L^1 の元であって，各点の値に意味はない。条件(C)は，(i)によって，c_n $(n\geq 2)$ に"都合のいい"ボレル可測な代表(Borel version)がとれることを，(ii)によって，f に都合のいい原点の値"$f(0)$"，が指定できることを規定している。c_n $(n\geq 2)$, f が連続ならば，(C)はみたされる。これらが区分的に連続なら，多くの場合(C)がみたされる。$f_4(\Gamma,x)$, $f_4(\Gamma,x,\varphi)$ は，これら都合のいい version から，各点で定まる値を意味している。すると (8.26)$_a$ により，Γ が (IV) の (iii), (iv), (vi) 以外の場合，(9.17) が成立する。

つぎに，Γ が (IV)−(iii), (iv), (vi) の場合，(9.17) が成りたつことを示す。(8.26)$_b$ によって

$$(9.18)\quad \left|\int\Psi(x)f_4(\Gamma,x,\varphi)-f_4(\Gamma,0,\varphi)\right|$$
$$\leq K\int|\Psi(x)||f(x_1+x_2)-f(0)|\,dx+f(0)\int|\Psi(x)|\lambda(x)\,dx$$

であり，

$$(9.19)\quad \lim_{T\to\infty}\int|\Psi(x)|\lambda(x)\,dx=0\ .$$

$\psi(x)=|f(x)-f(0)|$, $d(x)=\left|\sin\frac{x}{2}\Big/\frac{x}{2}\right|$ とおけば，

(9.18) の右辺第一項は，§5, 5° より

$$(9.20)\quad \int|\Psi(x)|\psi(x_1+x_2)\,dx = T^{-1}\int L_d(x_1)L_d(x_2)L_d(x_3)L_d(x_1+x_2+x_3)\psi(x_1+x_2)\,dx$$
$$=2T^{-1}\int_0^\infty\left(L_{d*d}(x)\right)^2\psi(x)\,dx$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

また(5.1)より

$$(9.21)\qquad d*d(x) \asymp \frac{\log 2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$$

であるから,

$$(9.20) \asymp \int_0^\infty \Lambda(x)\psi(hx)\,dx$$

$$\Lambda(x) = \frac{\log 2(1+x^2)}{1+x^2}, \quad h = 1/T .$$

$\mu(x) = x^{-1}\int_0^x \psi(y)\,dy$ とおけば

$$\int_0^\infty \Lambda(x)\psi(hx)\,dx = J_1 + J_2$$

$$J_1 = \int_0^1 \Lambda(x)\psi(hx)\,dx, \quad J_2 = \int_1^\infty \Lambda(x)\psi(hx)\,dx,$$

$$(9.22)\qquad J_1 \le \|\Lambda\|_\infty\,\mu(h) \longrightarrow 0, \quad h \to +0,$$

こゝで(C)(ii)を用いた。

$$J_2 = \Lambda(x)\mu(hx)x\Big]_1^\infty - \int_1^\infty \Lambda'(x)\,x\,\mu(hx)\,dx$$

こゝで, μ が有界, $\mu(+0)=0$, $x\Lambda'(x) \in L'$ に注意すれば, 第一項, 第二項は, $h \to +0$ に対して, 何れも 0 に収束し

$$(9.23)\qquad \lim_{T\to\infty} J_2 = 0 .$$

かくしてすべての Γ に対して, (9.17) が示された。補題の証明を完成するには, f, c_1 の有界性(*)を除かねばならない。はじめに, c_1 の有界性を除く方法を示し, つぎにこれをふまえて, c_1, f の有界性を除く方法の要点を示す。

c_1 を

$$(9.24)\qquad c_1 = (c_1 - [c_1]_n) + [c_1]_n$$

と分解し, これに対応して $X(t)$ を

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$X(t) = X^1(t) + X^2(t)$$

ただし

$$X^1(0) = \{0, [c_1]_n, c_2, c_3, \cdots\}$$

$$X^2(0) = \{0, c_1 - [c_1]_n, 0, 0, \cdots\}$$

と分解する。(5.30)において，$2\mathrm{Re}J(x) = I^{12}(x) + I^{21}(x)$, $I^{12}(x) = \overline{I^{21}(x)}$ (c.f.(5.7))に注意し，(5.31)を

$$(9.25) \qquad \xi(\varphi) = \xi^1(\varphi) + \delta\xi(\varphi)$$

とかくと

$$(9.26) \qquad E(\delta\xi(\varphi))^2 \leq num.const.(E(\xi^2(\varphi))^2 + E(|\xi^{12}(\varphi)|^2)$$

である。(9.26)の右辺を用い，

$$(9.27) \qquad \lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{T\to\infty}} E(\delta\xi(\varphi))^2 = 0$$

を証明する。それには

$$(9.28)_1 \quad \lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{T\to\infty}} E(\xi^2(\varphi))^2 = 0 \qquad (9.28)_2 \quad \lim_{n\to\infty} \lim_{T\to\infty} E|\xi^{12}(\varphi)|^2 = 0$$

を示せばよい。$(9.28)_2$を示すために，(5.15)，(5.16)にもとづき

$$E|\xi^{12}(\varphi)|^2 = I_1 + I_2 + I_3$$

とかく。I_1, I_2, I_3はそれぞれ，(5.16)右辺のオーダー，オ三項である。I_1を処理するために，$f_4^{1212}(x)$が必要であるが，(7.43)と同様に

$$f_4^{1212}(x) = \sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_4} \gamma_n(\Gamma) f_4^{1212}(\Gamma, x) \qquad (\text{有限和})$$

とかくことができる。$f_4^{1212}(\Gamma, x)$に関与するΓの頂点中に$\delta c_1 = c_1 - [c_1]_n$が二個含まれるから，$\Gamma$の可能な型はIV-(v)である。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

(8.26)aにより，$f_4^{'2'2}(\Gamma, x, \varphi)$は$x$につき連続で

$$(9.29) \quad \sup_x |f_4^{'2'2}(\Gamma, x, \varphi)| \le \text{const.}\left(\| (\delta c_1)^2 f \|_2^{1/2} + \| (\delta c_1)^2 f \|_1^{1/2} \right),$$

ここにconst.はfと$\|\varphi\|_\infty$，$c_k\ (k \ge 2)$に依存する，nに無関係な定数，(9.29)の右辺は$n \to \infty$に対して，0に収束するから

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{T\to\infty}}\, I_1 = 0 .$$

I_2について．　$f_2^i \in L^2\ (i = 1, 2)$であって

$$f_2^2(\lambda) = |\delta c_1(\lambda)|^2 f(\lambda)$$

$$f_2^1(\lambda) = |[c_1]_n|^2 f(\lambda) + \sum_{k \ge 2} f_{2,k}(\lambda) \qquad \text{(有限和)}$$

$$\lim_{T\to\infty} I_2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(|[c_1]_n^2 f|(a) + \sum_{k\ge 2} f_{2,k}(a) \right) | (\delta c_1)^2 f | (a) (\varphi(a))^2 da,$$

右辺に(B)を用いて

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{T\to\infty}}\, I_2 = 0 .$$

全く同様に

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{T\to\infty}}\, I_3 = 0$$

$(9.28)_2$の証明終．

$(9.28)_1$について。$E(\xi^2(\varphi))^2$は，(5.15)を用いて，$|(\delta c_1)^2 f|$を含む簡単な積分で表わされ，

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{T\to\infty}}\, E(\xi^2(\varphi))^2 = 0$$

が容易に示される。(9.27)の証明終．

以上は，非有界c_1を$[c_1]_n$で近似する訳であるが，これをふまえ，c_1, fが共に非有界なとき，両者を有界なもので近似する方法の要点を述べる．

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\chi(\lambda) = \chi_n(\lambda) = \text{集合}\{\lambda : |f(\lambda)| \leq n\} \text{の特性関数}$$

とおき

$$(9.30) \quad \int c_k e_k(\lambda,t) d^k\beta = \int (c_k)_n(\lambda) e_k(\lambda,t) d^k\beta + \int \delta c_k(\lambda) e_k(\lambda,t) d^k\beta,$$

$$e_k(\lambda,t) = \exp(i(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)t), \ \delta c_k = c_k(\lambda) - (c_k)_n(\lambda),$$

$$(c_k)_n(\lambda) = c_k(\lambda)\chi(\lambda_1)\cdots\chi(\lambda_k) \ (k \geq 2), \ (c_1)_n(\lambda) = [c_1]_n(\lambda)\chi(\lambda)$$

とおく。(9.30)は $X(t)$ の非ガウス項の分解である。これに応じて $X(t)$ を分解する:

$$(9.31) \quad X(t) = X^1(t) + X^2(t)$$

$$X^1(0) = \{0, (c_1)_n, (c_2)_n, \cdots\}$$

$$X^2(0) = \{0, \delta c_1, \delta c_2, \cdots\}。$$

こゝで分解(9.31)の主要項 $X^1(t)$ に着目する。その一般項は

$$(9.32) \quad \int (c_k)_n(\lambda) d^k\beta = \int c_k(\lambda) d^k\hat{\beta} \quad (k \geq 2)$$

$$\int (c_1)_n(\lambda) d\beta = \int [c_1]_n(\lambda) d\hat{\beta}, \ d\hat{\beta}(\lambda) = \chi(\lambda) d\beta(\lambda)$$

とかかれ, $d\hat{\beta}$ は $d\beta$ の役割をするが,

$$E|d\hat{\beta}|^2 = \hat{f}(\lambda)d\lambda, \ \hat{f}(\lambda) = \chi(\lambda)f(\lambda)$$

となり,対応するスペクトル密度は有界である。即ち $X^1(t)$ は補題1の証明の仮設(*)をみたしている。(9.31)に対応して, $\xi(\varphi)$ を(9.25)の如く分解すれば,(9.27)に至ると同様な経過によって

$$(9.27)' \quad \lim_{n\to\infty} \lim_{T\to\infty} E(\delta\xi(\varphi))^2 = 0$$

が示される。その際, $f_4^{(12)}(r,x,\varphi)$ が, x につき連続である

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

ことと, $c_k\ (k \geq 2)$ の有界収束, f のノルム $\|f\|_1 + \|f\|_2$ による収束のもとで, $c_k\ (k \geq 1)$ および f について連続であることを用いる.

以上の議論で, つぎの点に注意する。(9.17) を $X^1(t)$, $X^2(t)$ に適用する必要が起るが, これらの展開の一般項に現れる積分核は, もはや c_k でなくて, $c_k^*(\lambda) \equiv c_k(\lambda)\chi(\lambda_1)\cdots\chi(\lambda_k)\ (k \geq 2)$, $c_1^*(\lambda) = [c_1]_n \chi(\lambda)$ などとなっている。$\chi(\lambda_i)$ は R^1 上の関数であるので, おきかえ $c_k \to c_k^*\ (k \geq 2)$ によって, 新な"欠損因子"を生じないから, c_k が (A)〜(C) をみたせば, c_k^* も同一条件をみたし, $X^i\ (i=1,2)$ に対しても (9.17) が成りたつ (c.f. §8, IV についての説明)

補題の証明を完結するために, n に依存する ξ' を ξ_n とかき

$$(9.33)\qquad \left|E\exp(iz\xi(\varphi)) - \exp\left(-\frac{\sigma^2 z^2}{2}\right)\right| \leq A_1 + A_2 + A_3,$$

$$A_1 = \left|E\exp(iz[\xi_n(\varphi) + \delta\xi(\varphi)]) - E\exp(iz\xi_n(\varphi))\right|,$$

$$A_2 = \left|E\exp(iz\xi_n(\varphi)) - \exp\left(-\frac{\sigma_n^2 z^2}{2}\right)\right|,$$

$$A_3 = \left|\exp\left(-\frac{\sigma_n^2 z^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\sigma^2 z^2}{2}\right)\right|,$$

と変形する。ただし σ_n^2 は (9.2) の右辺の f_2, f_4 に含まれる c_k を $(c_k)_n\ (k \geq 1)$ でおきかえたものである。すると

$$A_1 \leq F(z^2 E(\delta\xi(\varphi))^2),\quad F(x) = \sqrt{x} + \frac{x^2}{2}$$

に (9.32)′ を用いて

$$(9.34)\qquad \lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{T\to\infty}}\, A_1 = 0.$$

$X^1(t)$ は仮設 (*) をみたすから, 証明の第一段階により, $\xi_n(\varphi)$ の正規法則への収束がいえ

$$(9.35)\qquad \lim_{T\to\infty} A_2 = 0$$

(9.2) の σ^2 は, (7.39), (7.43), (7.51) を通して $c_k\ (1 \leq k \leq N)$ の

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

汎関数である。それゆえ，f_2 の表現 (7.39), (8.26)$_a$, (8.26)$_b$ から σ^2 は，c_k ($k \geq 2$) の有界収束，c_1 のノルム $\|c_1^2 f\|_1^{1/2} + \|c_1^2 f\|_2^{1/2}$ による収束のもとで連続である。従って

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} A_3 = 0 . \tag{9.36}$$

以上を綜合して，一般仮定のもとで補題は証明された。

§10 $\xi_T(x)$ の有限次元分布の収束——定理1の証明

§9で $X(t)$ が有限の場合 $\xi = \xi_T$ の有限次元分布の収束を示した。この節では，前節の結果を援用して，一般の場合にこのことを証明し，定理1の証明を完結する。

以下，M_{2m} の部分空間が問題である。$X(t) \in \mathfrak{S}(\beta)$, $X(0) = (0, c_1, c_2, \cdots)$, c_k ($k \geq 1$) が (A), (B) をみたすとき

$$\Phi(\zeta) = \Phi^{(\infty)}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \tag{10.1}$$

そして

$$a_k = \|c_k\|_\infty \|f\|_1^{k/2} \quad (2 \leq k < \infty)$$

$$a_0 = 0 \; , \quad a_1 = \|c_1^2 f\|_1^{1/2} + \|c_1^2 f\|_2^{1/2} \tag{10.2}$$

とおく。即ち $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ は $k=1$ において異るだけである。$\Phi^{(\infty)}(\zeta)$ から M_{2m} の部分空間

$$M_{\infty,2m} = \Big\{ X \in L^2(\beta) : |||X|||_{\infty,2m}^{2m}$$

$$= \int_0^\infty d\mu_m(x) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi^{(\infty)}(\sqrt{mx}\, e^{i\varphi})|^{2m} d\varphi < \infty \Big\}, \tag{10.3}$$

$$X = \{0, c_1, c_2, \cdots \} , \quad 1 \leq m < \infty ,$$

を定め，$X(0) \in M_{\infty,2m}$ のとき，$X(t) \in M_{\infty,2m}$ とかく。

$$\|c_k\|_2 \leq a_k \quad (k \geq 2)$$

および，(7.5)$'$ と同様に

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(10.4)\qquad M_{2m}\supset M_{\infty,2m}\qquad M_{\infty,2m}\supset M_{\infty,2(m+1)}$$

がいえる。

$|||X|||_{2m}$, $|||X|||_{\infty,2m}$ 等, 母関数の積分で表示される量が有限であることは,母関数の始めの有限個の係数に無関係であるから

$$(10.5)\qquad \begin{aligned}&\text{定理1の条件(D)}\Longleftrightarrow \int d\mu_1(x)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi^{(\infty)}(\sqrt{3x}\,e^{i\varphi})|^4d\varphi<\infty\\ &M_{\infty,6}\Longleftrightarrow \int d\mu_3(x)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi^{(\infty)}(\sqrt{3x}\,e^{i\varphi})|^6d\varphi<\infty\end{aligned}$$

でありまた

$$(10.6)\qquad \begin{aligned}&M_{\infty,4}\Longleftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)!\,2^k(b*b)_k^2<\infty\\ &M_{\infty,6}\Longleftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)!\,3^k(b*b*b)_k^2<\infty\end{aligned}$$

である。 他方(7.8)から

$$\left(\int d\mu_1\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi^{(\infty)}|^4d\varphi\right)^{1/4}\leq\left(\int d\mu_1\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi^{(\infty)}|^6\right)^{1/6},\ \Phi^{(\infty)}\doteq\Phi^{\infty}(\sqrt{3x}\,e^{i\varphi}),$$

であり, $\int_0^{2\pi}|\Phi^{(\infty)}|^6d\varphi$ は x と共に増加するから

$$(10.7)\qquad M_{\infty,6}\Rightarrow(D)\Rightarrow M_{\infty,4}$$

がある。

(定理1の証明) 始めに(10.4),(10.7),§7,10°より, $m=2$ に対して(7.43)が成り立つことに注意する。つぎのように分解する

$$X(t)=X^1(t)+X^2(t),$$

ただし

$$X^1(t)=(0,c_1e_1(\lambda,t),c_2e_2(\lambda,t),\cdots,c_Ne_N(\lambda,t),0,0,\cdots)$$

(展開の N 項までの和).

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

これに対応して

$$(10.8)\quad \xi(\varphi)=\xi^1(\varphi)+\delta\xi(\varphi),\quad \delta\xi(\varphi)=\xi^2(\varphi)+2\Re\,\xi^{12}(\varphi)$$

(c.f. (5.31), (5.32))

とかく。

補題1から

$$(10.9)\qquad \xi^1(\varphi)\xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,\sigma_N^2),\quad T\to\infty$$

ただし、σ_N^2 は補題1の $X(t)$ を $X'(t)$ とみた場合の(9.2)の値である。

補題1の証明と同様に

$$|E\exp(iz\xi(\varphi))-\exp(-\tfrac{\sigma^2z^2}{2})|\le A_1+A_2+A_3,$$

$$A_1=|E\exp(iz[\xi^1(\varphi)+\delta\xi(\varphi)])-E\exp(iz\xi^1(\varphi))|,$$

$$A_2=|E\exp(iz\xi^1(\varphi))-\exp(-\tfrac{\sigma_N^2z^2}{2})|,$$

$$A_3=|\exp(-\tfrac{\sigma_N^2z^2}{2})-\exp(-\tfrac{\sigma^2z^2}{2})|,$$

とかく。

(10.9)から

$$(10.10)\qquad \lim_{T\to\infty}A_2=0,$$

$$A_1\le F(z^2E(\delta\xi(\varphi))^2),\quad F(x)=\sqrt{x}+\frac{x^2}{2},$$

$$E(\delta\xi(\varphi))^2\le \text{num. const}\{E(\xi^2(\varphi))^2+E|\xi^{12}(\varphi)|^2\}$$

であるから、定理の証明はつぎに帰着する

$$(10.11)\qquad \lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{T\to\infty}}E(\xi^2(\varphi))^2=0,$$

$$(10.12)\qquad \lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{T\to\infty}}E|\xi^{12}(\varphi)|^2=0,$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

(10.13) $$\lim_{N\to\infty}\sigma_N^2=\sigma^2 .$$

(10.4), (10.7) から $X(t)\in M_4$. 従って f_2, f_4 が存在し, f_4 は(7.43) のようにかける。また (10.4), (10.7) から $X(t)\in M_{\infty,2}$ でもあるから, §7, 9°, (ii) の条件がみたされ, $f_2\in L^2$。

証明の主要部分は

(10.14) $$\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}(1)}\gamma_4(\Gamma)\ \sup_x|f_4(\Gamma,x,\varphi)|<\infty$$

(10.15) $$\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}(2)}\gamma_4(\Gamma)\ \sup_x|J(\Gamma,x,\varphi)|<\infty$$

を示すことにある。ここに $\mathcal{C}(1)$ は IV-(iii), (iv), (vi) 以外の Γ の全体, $\mathcal{C}(2)$ は IV-(iii), (iv), (vi) に属する Γ の全体を示す, $\mathcal{C}(1)\cup\mathcal{C}(2)=\mathcal{C}_4$.

(10.14), (10.15) の証明を後に廻し, まず (10.14), (10.15) から (10.11) 〜 (10.13) がみちびかれることを示す。(10.14), (10.15) に関連して

$$f_4(x,\varphi)=\Big(\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}(1)}+\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}(2)}\Big)f_4(\Gamma,x,\varphi)$$

とかく。右辺, 第一項, 第二項は, $(8.26)_a$, $(8.26)_b$ により絶対一様(xについて)収束する。(9.17) を用い項別極限をとることにより

$$\lim_{T\to\infty}\int f_4(x,\varphi)\Psi(x)\,dx$$

(10.16) $$=\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_4}\gamma_4(\Gamma)f_4(\Gamma,0,\varphi)=f_4(0,\varphi)$$

$X^N(t)$ に (10.16) を適用すると,

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{T\to\infty}E(\xi^N(\varphi))^2$$

$$=\lim_{N\to\infty}\Big\{\sum_{p_i(1\le i\le 4)\ge N+1}\gamma_4(\Gamma)f_4(\Gamma,0,\varphi)$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{k\ge N+1}k!\,f_{2,k}(a)\Big)^2\varphi(a)(\varphi(a)+\varphi(-a))\,da\Big\}=0$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

すなわち (10.11) が示された。

$X(t)$ の分解の仕方から，$f_2^{12}=f_2^{21}\equiv 0$ に注意して，(5.16) より

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{T\to\infty} E|\xi^{12}(\varphi)|^2$$

$$=\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{\substack{p_1,p_3\le N\\ p_2,p_4\ge N+1}}\gamma_4(\Gamma)\tilde{f}_4(\Gamma,0,\varphi)$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{1\le k\le N}k!f_{2,k}(a)\sum_{k\ge N+1}k!f_{2,k}(a)\Big)\varphi^2(a)da\Big)=0,$$

$$\tilde{f}_4(\Gamma,0,\varphi)=\int f_4(\Gamma,a,-a,b)\varphi(a)\varphi(-b)\,da\,db,$$

すなわち (10, 12) が示された。

ついては，(10.13) も容易になる：

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N^2=\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{\substack{p_i\le N\\ 1\le i\le 4}}\gamma_4(\Gamma)f_4(\Gamma,0,\varphi)$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{1\le k\le N}k!f_{2,k}(a)\Big)^2\varphi(a)(\varphi(a)+\varphi(-a))da\Big)$$

$$=\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_4}\gamma_4(\Gamma)f_4(\Gamma,0,\varphi)+\int_{-\infty}^{\infty}(f_2(a))^2\varphi(a)(\varphi(a)+\varphi(-a))da$$

$$=\sigma^2.$$

最後に残る (10.14), (10.15) の証明。

$(8\ 26)_{a,b}$ より

$$(10.14)\text{の左辺}+(10.15)\text{の左辺}$$

$$\le K(f)\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_4}\gamma_4(\Gamma)\prod_1^4 a_k$$

4－グラフの全体を $\mathcal{G}_4$ で表わす (c.f.§3) と，

$$(10.17)\qquad \sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_4}\gamma_4(\Gamma)\prod_1^4 a_k\le\sum_{\Gamma\in\mathcal{G}_4}\gamma_4(\Gamma)\prod_1^4 a_k$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$= \sum_{\substack{k,l,m,n\\ p,q\geq 0}} A(k,l,m,n,p,q)$$

たゞし

$$A(k,l,m,n,p;q)$$
$$= \frac{(k+l+m)!\,a_{k+l+m}\,(k+p+n)!\,a_{k+p+n}\,(l+n+q)!\,a_{l+n+q}\,(m+p+q)!\,a_{m+p+q}}{k!\,l!\,m!\,n!\,p!\,q!} .$$

定理の証明は

$$\sum_{\substack{k,l,m,n\\ p,q\geq 0}} A(k,l,m,n,p,q) < \infty$$

に帰着される。

しばらく $X(t)$ は有限, $X(0)=\{0, c_1, \cdots, c_N, 0, 0, \cdots\}$ とする。有限性から, 以下に現れる和は有限であって, 和に関する形式的計算はすべて成立する。

$\Phi = \Phi^{(\infty)}$ を用いて

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+p+q)!}{m!} a_{m+p+q}\, \zeta^m = \frac{d^{p+q}}{d\zeta^{p+q}} \Phi(\zeta),$$

従って

$$B(k,l,p,q) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} (k+l+m)!\, a_{k+l+m} \frac{(m+p+q)!}{m!} a_{m+p+q}$$

(10.18) $$= \int_0^{\infty} d\mu_1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\Phi}(\sqrt{x}e^{i\varphi})\, \Phi^{(p+q)}(\sqrt{x}e^{i\varphi})\, (\sqrt{x}e^{i\varphi})^{k+l} d\varphi,$$

また明らかな恒等式

(10.19) $$\sum_{k,l\geq 0} \frac{(k+p+n)!\, a_{k+p+n}\, (l+n+q)!\, a_{l+n+q}\, (\sqrt{x}e^{i\varphi})^{k+l}}{k!\, l!} = \Phi^{(n+p)}\, \Phi^{(n+q)}, \quad \zeta = \sqrt{x}e^{i\varphi} .$$

一方

(10.20) $$\sum_{p,q,n\geq 0} \frac{\Phi^{(p+q)}\, \Phi^{(n+p)}\, \Phi^{(n+q)}}{p!\, q!\, n!}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$= \sum_{q\geq 0} \frac{1}{q!} \sum_{p,n\geq 0} \frac{\overline{\Phi}^{(p+q)}(\zeta)\ \overline{\Phi}^{(n+p)}(\zeta)\ \overline{\Phi}^{(n+q)}(\zeta)}{p!\,n!}$$

と変形し，右辺の内側の和をかきかえると

$$\sum_{p,n\geq 0} \frac{\overline{\Phi}^{(p+q)}(\zeta)\ \overline{\Phi}^{(n+p)}(\zeta)\ \overline{\Phi}^{(n+q)}(\zeta)}{p!\,n!}$$

(10.21)

$$= \sum_{s\geq 0} \frac{\overline{\Phi}^{(s)}(\zeta)}{s!} \sum_{p+n=s} \frac{s!}{p!\,n!}\ \overline{\Phi}^{(p+q)}(\zeta)\ \overline{\Phi}^{(n+q)}(\zeta)$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}^{(s)}(\zeta)}{s!} \frac{d^s}{d\zeta^s} \overline{\Phi}_q(\zeta)\ ,\quad \overline{\Phi}_q \equiv (\overline{\Phi}^{(q)})^2$$

となるので，(10.20) はつぎのようにかける。

$$(10.20) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}^{(s)}(\zeta)}{s!} \overline{\Phi}_q^{(s)}(\zeta)$$

(10.22)
$$= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \int_0^{\infty} e^{-y} dy \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\Phi}(\zeta+\sqrt{y}e^{-i\psi}) \overline{\Phi}_q(\zeta+\sqrt{y}e^{i\psi}) d\psi$$

となる

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \left(\overline{\Phi}^{(q)}(\zeta+\sqrt{y}e^{i\psi}) \right)^2$$

(10.23)
$$= \int_0^{\infty} e^{-z} dz \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\Phi}(\zeta+\sqrt{y}e^{i\psi}+\sqrt{z}e^{-i\theta}) \overline{\Phi}(\zeta+\sqrt{y}e^{i\psi}+\sqrt{z}e^{i\theta}) d\theta$$

よって (10.19), (10.20), (10.22), (10.23) より

$$\sum_{\substack{k,l,m,n\\ p,q\geq 0}} A(k,l,m,n,p,q)$$

$$= \sum_{p,q,n\geq 0} \frac{1}{p!\,q!\,n!} \sum_{k,l\geq 0} B(k,l,p,q) \frac{(k+p+n)!\,a_{k+p+n}\ (l+n+q)!\,a_{l+n+q}}{k!\ l!}$$

$$= \sum_{p,q,n\geq 0} \frac{1}{p!\,q!\,n!} \int_0^{\infty} d\mu_1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\Phi}(\zeta)\ \overline{\Phi}^{(p+q)}(\zeta)\ \overline{\Phi}^{(m+p)}(\zeta)\ \overline{\Phi}^{(n+q)}(\zeta)\ d\varphi$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$= \int d\mu_1(x)\, d\mu_1(y)\, d\mu_1(z)$$

$$(10.24) \qquad \times \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Phi(\sqrt{x} e^{-i\varphi})\, \Phi(\sqrt{x} e^{i\varphi} + \sqrt{y} e^{-i\psi})$$

$$\times\, \Phi(\sqrt{x} e^{i\varphi} + \sqrt{y} e^{i\psi} + \sqrt{z} e^{-i\theta})\, \Phi(\sqrt{x} e^{i\varphi} + \sqrt{y} e^{i\psi} + \sqrt{z} e^{i\theta})\, d\theta\, d\varphi\, d\psi$$

$$\leq \left(\int d\mu_1 \frac{1}{2\pi} \int |\Phi(\sqrt{x} e^{i\varphi})|^4 d\varphi \right)^{1/4}$$

$$\times \left(\int d\mu_1(x)\, d\mu_1(y) \frac{1}{(2\pi)^2} \int |\Phi(\sqrt{x} e^{i\varphi} + \sqrt{y} e^{i\psi})|^4 d\varphi\, d\psi \right)^{1/4}$$

$$\times \left(\int d\mu_1(x)\, d\mu_1(y)\, d\mu_1(z) \frac{1}{(2\pi)^3} \int |\Phi(\sqrt{x} e^{i\varphi} + \sqrt{y} e^{i\psi} + \sqrt{z} e^{i\theta})|^4 d\theta\, d\varphi\, d\psi \right.$$

$|\Phi(\zeta)|^4$ の劣調和性から

$$\frac{1}{2\pi} \int |\Phi(\sqrt{x} e^{i\varphi})|^4 d\varphi,\ \frac{1}{(2\pi)^2} \int |\Phi(\sqrt{x} e^{i\varphi} + \sqrt{y} e^{i\psi})|^4 d\varphi\, d\psi$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^3} \int |\Phi(\sqrt{x} e^{i\varphi} + \sqrt{y} e^{i\psi} + \sqrt{z} e^{i\theta})|^4 d\theta\, d\varphi\, d\psi$$

が成り立っているので

$$\sum_{\substack{k,l,m,n\\ p,q \geq 0}} A(k,l,m,n,p,q)$$

$$\leq \int d\mu_1(x)\, d\mu_1(y)\, d\mu_1(z) \frac{1}{(2\pi)^3} \int |\Phi(\sqrt{x} e^{i\varphi} + \sqrt{y} e^{i\psi} + \sqrt{z} e^{i\theta})|^4 d\theta\, d\varphi\, d\psi.$$

確率密度 $d\mu_1(x)\, d\mu_1(y)\, d\mu_1(z)(2\pi)^{-3} d\theta\, d\varphi\, d\psi$ のもとで、$\sqrt{x} e^{i\varphi} + \sqrt{y} e^{i\psi} + \sqrt{z} e^{i\theta}$ は同一分布に従う独立複素確率変数 $\sqrt{x} e^{i\varphi}$, $\sqrt{y} e^{i\psi}$, $\sqrt{z} e^{i\theta}$ の和であり、各変数において、その実部、虚部は互に独立で、正規分布 $N(0, 1/2)$ に従っている。すなわち確率分布について $\sqrt{x} e^{i\varphi} + \sqrt{y} e^{i\psi} + \sqrt{z} e^{i\theta}$ と $\sqrt{3x} e^{i\varphi}$ は同等であるから

$$(10.25) \qquad \sum_{\substack{k,l,m,n\\ p,q \geq 0}} A(k,l,m,n,p,q)$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\le \int d\mu_1(x)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi(\sqrt{3x}\,e^{i\varphi})|^4 d\varphi .$$

(10.25)は有限の$X(t)$について成り立つから、一般の$X(t)$について、その展開のN項までの部分和$X_N(t)$について成り立つ。極限移行$N\to\infty$によって、(10.25)は一般の$X(t)$についても成り立つ。

$$\Phi_b(\zeta)=\sum_{k\ge 0} b_k \zeta^k$$

とおくと、定理の条件(D)より

$$\int d\mu_1(x)\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi_b(\sqrt{3x}\,e^{i\varphi})|^4 d\varphi=\sum_{k=0}^{\infty} k!\,3^k (b*b)_k^2<\infty .$$

$\{a_n\}$と$\{b_n\}$は$k=1$においてのみ異なるので

$$\int d\mu_1(x)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi(\sqrt{3x}\,e^{i\varphi})|^4 d\varphi<\infty$$

$$\Leftrightarrow \int d\mu_1(x)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi_b(\sqrt{3x}\,e^{i\varphi})|^4 d\varphi<\infty$$

よって、(10.25)より

(10.14)の右辺 + (10.15)の右辺 $<\infty$, QED.

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

§11 定理2の証明への準備

定理1で，$\xi=\xi_T$ の有限次元分布の収束を示した。定理2の目的は，ξ が $C[0,\infty]$ 上に生成する確率測度 P_T の収束を証明することである。そのためには，P_T が相対コンパクトであることを示せばよい。そうすれば，定理1の結果と併せて，P_T の収束が出る。$C[0,\infty]$ が可分，完備な距離空間であるから，P_T の相対コンパクト性は，Prohorov の定理によって示される。

定理2は，正規過程に対する結果［7］を含むものである。c_1 は非有界であって，唯一つの制限

定理1の条件(B) $c_1^2 f\in L^2$

を課している。この条件は，§7，9°の注意で述べたように，$f_2\in L^2$ となるために必要であって，定理1，2の定式化に必要な極めて自然な条件である。f が定理1，2の仮定による制約をうけるとしても，(B)をみたす範囲で，c_1 にはなお自由度が残されており，c_1 を適当に選ぶことによって，定理2が前述正規過程に対する結果を含むようにできる。

c_k $(k\ge 2)$ は有界とした。当初の目標からすると，これは制約である。議論を精密化して，有界性を多少ともゆるめることは可能であろうが，煩雑さを増す割に本質的な改良にならないように思われる。

P_T の相対コンパクト性について。$\Omega=C[0,1]$ 上の確率測度の族 $\mathcal{P}$ の相対コンパクト性を判定するのに，最もよく使われるのは，$a>0$ を適当にとり

$$(11.0)\qquad \sup_{|s-t|\le\Delta,\ \mu\in\mathcal{P}}\int_\Omega |x(t)-x(s)|^a\,d\mu(x)$$

が，$\Delta\to+0$ のとき 0 に収束する速さを，Δ のべきで評価する方法である。同相変換 $\varphi:[0,\infty]\to[0,1]$ をとり，$\varphi^*f=f\circ\varphi$，$f\in C[0,1]$ とおくと，φ^* は $C[0,1]$ から $C[0,\infty]$ への同相変換(一様ノルム保存)である。それ故，φ^* によって $C[0,\infty]$ 上の確率測度全体と $C[0,1]$ 上のそれが同相に対応し，従って $C[0,\infty]$ 上の相

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

対コンパクトな確率測度の族は$C[0,1]$上のそれに対応するから，原理的にはP_Tの相対コンパクト性を$C[0,1]$上の対応する族の性質に帰着させることができる。それ故，この場合も，(11.0)に相当する量を計算する方針が考えられる。φのえらび方に任意性があるが，この方針の具体化は困難である。

ここで採用する方針は，$C[0,\infty]$の連続率（後に定義する）の行動を知るために

$$E(\xi(\lambda_2)-\xi(\lambda_1))^4,\quad E(\xi(\infty)-\xi(\lambda))^4$$

$$\Delta\lambda=\lambda_2-\lambda_1>0,\quad \lambda\geq 0$$

を評価することである。これは，φの汎関数$E(\xi(\varphi))^4$の適当な評価式を求めることに帰着される。その際，計算を簡易化するためには，§5，III，(i)，(ii)によって，$X(t)$をガウス部分$X^1(t)$と非ガウス部分$X^2(t)$の和に分解

$$(11.1)\qquad X(t)=X^1(t)+X^2(t)$$

し，これに対応してξを(5.31)に従って

$$\xi(\lambda)=\xi^1(\lambda)+\xi^2(\lambda)+2\Re\eta(\lambda)\quad(\eta=\xi^{12})$$

と分解するのが便利である。そして

$$(11.2)\qquad E(\xi^i(\varphi))^4\ (i=1,2),\quad E|\eta(\varphi)|^4$$

の適当な評価式を通して，ξ^i $(i=1,2)$，ηの連続率の行動を知り，これらを総合してξ自身の連続率の行動を知ることができる。そのためには，φを特別な区間の特性関数に限ってよいので，今後$\varphi(x)=1$又は0とする。

ξ^i，ηはどれもピリオドグラムの尺度変換で，類似の構造と表現をもっている。それにもかかわらず，(11.2)に対して，統一された評価式・評価方法が得られない。

評価は，つぎに述べる事情のために，大別して二種に分けられる。(11.2)の評価は，(5.18)〜(5.22)，(5.34)〜(5.37)によるのである

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

が，その際必要な積分表示中に，(5.22),(5.37)の右辺のようなキムラントの積の和が入って来る。そして，キムラントの積の因子数が4個の場合——(5.22)の$S(2,2,2,2)$，(5.37)の$S(11,11,22,22)$，と3個以下の場合とで異る方法を用いなければならない。何れにせよ，CSD $f_k(x)$ ($2\le k\le 8$, $k\ne 7$)の展開式(7.43)と，$f_k(\Gamma, x)$の積分表示が利用される。

定理2の条件(ii)のもとでは，§7, 10°によりこれらのCSDが存在し，(7.43)が成り立つことが保証される。何故ならば，(10.6)と同様に

$$(11.3)\qquad M_{\infty,8} \iff \sum_{k=0}^{\infty}(k+3)!\,4^k\,(b*b*b*b)_k^2<\infty$$

であるから，条件(ii) $\Rightarrow M_{\infty,8}$.

(11.2)の評価方針は大体以上の通りであるが更に評価にあたって，$f_k(\Gamma,x)$が利用され，Γのタイプに応じた個別性が現れる。Γのタイプを有限個に分類し，個別性に応じて処理することも可能であるが煩雑である。処理を簡易化するために，計算上の統一原理——後に，$\alpha_0,\alpha_1,\cdots$で示す，を見出す必要がある。

(5.22),(5.37)の右辺のキムラントの積の因子数が3以下の場合から始める。

(5.18)〜(5.22)にかえり，$E(\xi(\varphi))^4$について一般的な考察をする。

$$(11.4)\qquad C(8)=\frac{1}{(2\pi)^4T^2}\int_{D_8}\sigma(8)\,e_4\,ds_1\cdots dv_2$$

とおけば，

$$(11.5)\quad \sigma(8)=\int f_8(x,y,z)$$
$$\times\exp\Big\{i\sum_{j=1}^{2}\big[(s_j-v_2)x_j+(t_j-v_2)y_j+(u_j-v_2)z_j\big]$$
$$+i(v_1-v_2)z_3\Big\}\,dx\,dy\,dz\ ,$$
$$x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2),\ z=(z_1,z_2,z_3)$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

であるから，(11.4) の積分を実行して

$$C(8)=\frac{1}{(2\pi)^4 T^2}\int f_8(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\times\,\mathcal{D}(x_1-\alpha)\,\mathcal{D}(x_2+\alpha)\,\mathcal{D}(y_1-\beta)\,\mathcal{D}(y_2+\beta)$$

(11.6) $$\times\,\mathcal{D}(z_1-\gamma)\,\mathcal{D}(z_2+\gamma)\,\mathcal{D}(z_3-\delta)\,\mathcal{D}(\delta-\bar{x}-\bar{y}-\bar{z}),$$

$\bar{x}$ は x の成分の和

(11.6) に変換

$$\xi_1=x_1-\alpha,\ ,\ \xi_2=x_2+\alpha,\ \xi_3=y_1-\beta,\ \xi_3=y_2+\beta$$

(11.7)

$$\xi_5=z_1-\gamma\ ,\ \xi_6=z_2+\gamma\ ,\ \xi_7=z_3-\delta$$

をほどこすと

(11.8) $$C(8)=\frac{(2\pi)^3}{T}\int\Psi(\xi)$$

$$\times\, f_8(\xi_1+\alpha,\xi_2-\alpha,\xi_3+\beta,\xi_4-\beta,\xi_5+\gamma,\xi_6-\gamma,\xi_7+\delta)\,d\xi,$$

$$\Psi(\xi)=\Psi_T^{(7)}(\xi),\ \xi=(\xi_1,\cdots,\xi_7)\ 。$$

$E(\xi(\varphi))^4$ における $\sigma(8)$ の寄与を $\mathcal{E}_\xi(8)$ とかき，(7.43) より

$$\mathcal{E}_\xi(8)=\frac{(2\pi)^3}{T}\int\Psi(\xi)\,d\xi\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_8}\gamma_8(\Gamma)$$

(11.9)

$$\times\int f_8(\Gamma,\xi_1+\alpha,\xi_2-\alpha,\xi_3+\beta,\xi_4-\beta,\xi_5+\gamma,\xi_6-\gamma,\xi_7+\delta)\,dA,$$

$$dA=\varphi(\alpha)\cdots\varphi(\delta)\,d\alpha\cdots d\delta\ .$$

(4.46), (4.47) の如く

(10.10) $$\begin{cases} I_{p_1}=I_{p_1}(t_1)=I(c_{p_1}(\lambda_1)\,e_{p_1}(\lambda_1,t_1)) \\ \cdots \\ I_{p_7}=I_{p_7}(t_2)=I(c_{p_7}(\lambda_7)\,e_{p_7}(\lambda_7,t_2)) \\ I_{p_8}=I_{p_8}(0)=I(c_{p_8}(\lambda_8)) \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

とおき，(7.48)のように，$S(I_{p_1},\cdots,I_{p_8})$を(7.41)によって，連結グラフ$\Gamma$をパラメータとする$S(\Gamma,I_{p_1},\cdots,I_{p_8})$の和として表わし

$$S(\Gamma, I_{p_1}(t_8),\cdots,I_{p_8}(0)) \tag{11.11}$$
$$= \int f_8(\Gamma,x)\exp\left(i[x_1t_8+\cdots+x_7t_2]\right)dx$$

の核として，Γが定める8次CSD $f_8(\Gamma,x)$が求まる。

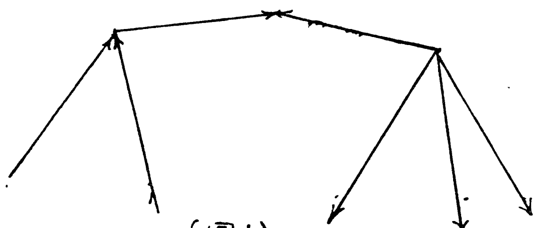
$f_8(\Gamma,x)$の形と，Γに応ずる若干の性質($\alpha_0,\alpha_1,\cdots$)を述べる。それらの性質は$f_8(\Gamma,x)$以外の$f_n(\Gamma,x)$にも共通である。

(11.11)をのべ変えて，

(α_0) $F=\{c_{p_1}(\lambda_1)e_{p_1}(\lambda_1,t_8),\cdots,c_{p_8}(\lambda_8)\}$，$\Gamma\in\mathcal{C}_8(F)$に対して，$S(\Gamma,I_{p_1},\cdots,I_{p_8})$のフーリエ核が，$f_8(\Gamma,x_1,\cdots,x_7)$，$i+j=9$をみたす$x_i$と$t_j$が対応する。

$\Gamma\in\mathcal{C}_8$は8頂点をもつ，$c_{p_i}\in\Gamma$とかいて，c_{p_i}がΓの頂点であることを示す。Γの一部の頂点，稜を使って出来る$\Gamma_0\in\mathcal{C}_8$を$\Gamma_0\subset\Gamma$で表わす。このようなΓ_0の中で，稜の数が最小，即ち7のものがいくつかある。このΓ_0をΓの枠とよぶ。Γ_0の稜ベクトルの次元は1である。

$f_8(\Gamma,x)$の形を知るのに枠Γ_0を用いる。これを例示する。Γ_0が図1のようになっているとする。各頂点iにI_{p_i}が配置されている。有向線分は，Γ_0の稜であるが，この他に各頂点に出入する


(図1)

Γの稜ベクトルがいくつかある。c_{p_i}に出入するこのようなベクトルをまとめて，一つのベクトルとしこれを，f_iで表わす。f_iを過剰ベクトルとよぶ。(7.41)より，(7.49)と同様に

(11.12) $S(\Gamma,I_{p_1},\cdots,I_{p_4})$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$
\begin{aligned}
= \int & c_{p_1}(e_1, f_1)\, c_{p_2}(e_2, e_3, e_4, e_5, f_2) \\
& \times c_{p_3}(e_7, -e_1, -e_6, f_3)\, c_{p_4}(-e_4, f_4) \\
& \times c_{p_5}(e_6, f_5)\, c_{p_6}(-e_3, f_6)\, c_{p_7}(-e_5, f_7)\, c_{p_8}(-e_2, -e_7, f_8) \\
& \times \exp\{it_8(e_1+\bar{f}_1)+it_7(\bar{e}_{25}+\bar{f}_2)+it_6(e_7-e_1-e_6+\bar{f}_3)+it_5(-e_4+\bar{f}_4) \\
& \qquad +it_4(e_6+\bar{f}_5)+it_3(-e_3+\bar{f}_6)+it_2(-e_5+\bar{f}_7)\}\, W\cdot dV 。
\end{aligned}
$$

$\bar{e}_{25}$ はひきつづく e_i の和，$\bar{e}_{25}=e_2+e_3+e_4+e_5$，以下これに準じ同様の記号を使う。W, dV は (7.49) におけると同様の意味をもつ。まず一般的注意

(α_1) c_{p_i} に含まれるベクトル成分の総和 $=0$

(7.50)と同様に，$f_8(\Gamma, x)$ を定めるため変換

$$
(11.13)_1 \quad
\begin{cases}
x_1 = e_1 + \bar{f}_1 \\
x_2 = \bar{e}_{25} + \bar{f}_2 \\
x_3 = e_7 - e_1 - e_6 + \bar{f}_3 \\
x_4 = -e_4 + \bar{f}_4 \\
x_5 = e_6 + \bar{f}_5 \\
x_6 = -e_3 + \bar{f}_6 \\
x_7 = -e_5 + \bar{f}_7
\end{cases}
\qquad
(11.13)_2 \quad
\begin{cases}
e_1 = x_1 - \bar{f}_1 \\
e_6 = x_5 - \bar{f}_5 \\
e_7 = x_1 + x_3 + x_5 - \bar{f}_1 - \bar{f}_3 - \bar{f}_5 \\
e_2 = x_2 + x_4 + \bar{x}_{67} - \bar{f}_2 - \bar{f}_4 - \bar{f}_{67} \\
e_3 = -x_6 + \bar{f}_6 \\
e_4 = -x_4 + \bar{f}_4 \\
e_5 = -x_7 + \bar{f}_7
\end{cases}
$$

(α_2) Γ の枠 Γ_0 を構成する線ベクトル e_j の一次独立な一次式$(11.13)_1$ を用いて，$f_8(\Gamma, x)$ を求める。1, 5 などのように，Γ_0 の異る線に含まれることのない頂点を Γ_0 の端点とよぶ。$p_i=1$ のとき，$c_{p_i}\in\Gamma$ を同じ精神で，Γ の端点とよぶ。Γ の端点は，Γ_0 の端点になる。Γ_0 には少くとも二つの端点がある。

端点は，今後の評価式求める際に，統一原理を見出すのに重要であ

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

る。$f_8(\Gamma, x)$の積分表示において，$x=(x_1,\cdots,x_7)$の成分の現われ方に着目する。まず，端点iを通るベクトルe（一次元）のx_jおよび過剰ベクトルによる表現について考える。それに関連して二つの場合に分ける。第一は，図1のように，8が端点でない場合，第二は8が端点になっている場合である。例示は略すが，第二の場合も同様で，両者一つにまとめると

(α_3) Γ_0の端点iを通るベクトルe（Γ_0の端点ベクトルとよぶ）は

$$i \neq 8 \text{ のとき} \qquad e = \pm x_i \pm \overline{\rho_i}$$

$$i = 8 \text{ のとき} \qquad e = \pm \overline{x} \pm \overline{\rho_i}$$

$(11.13)_2$の右辺のx_iの分布に，いま一つの特徴がある。それを見るために，頂点と線に，込みで半順序を与える。まず頂点8を最高位におく。端点から線に沿って8に向う最短通路を考える。この通路上の頂点と線に，末端から次第に高位の順位を与える。2と3，1と5などは比較不能な例である。すると$(11.13)_2$はつぎのようになっている。

(α_4) Γ_0の線ベクトルeは

$e = \pm$（eより下位の頂点iを添字にもつx_iの和）

$\pm$（若干の過剰ベクトルの成分の和）

すべての$\rho_i \neq 1$，すなわち$C_1 \neq \Gamma_0$とすると，(11.2)，$(11.13)_2$より

$$(11.14) \qquad |f_8(\Gamma, x)| \leq \prod_1^8 \|C_{\rho_i}\|_\infty \|f\|_\infty^7 \|f\|_1^{P/2-7},$$

右辺は，$(11.13)_2$を(11.12)の右辺に代入するとき，Wの因子$f(e_i)$等を$\|f\|_\infty$で評価し，残りの$f(*)$（$*$＝過剰ベクトルの成分）は$*$について積分することにより，$\|f\|_1$で評価して求まる。一般に

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

(α_5) $c_1 \neq \Gamma$ ならば, $f_8(\Gamma, x)$ は有界, 従って

$$f_8(\Gamma, x) \in L^p, \quad \forall p \geq 1.$$

$$|f_8(\Gamma, x)| \leq (\|f\|_\infty \|f\|_1^{-1})^7 \prod_{k=1}^{8} a_{p_k} \qquad (\text{c.f. } (10.2))$$

$(11.13)_2$ を用い, $f_8(\Gamma, x)$ の表示がある:

$$\begin{aligned} f_8(\Gamma, x) = \|f\|_1^{7/2} \int & c_{p_1}(x_1 - \bar{\xi}_1, *)\, g(x_1 - \bar{\xi}_1)\, c_{p_2}(*)\, c_{p_3}(*) \\ & \times c_{p_4}(x_4 - \bar{\xi}_4, *)\, g(x_4 - \bar{\xi}_4)\, c_{p_5}(x_5 - \bar{\xi}_5, *)\, g(x_5 - \bar{\xi}_5) \\ & \times c_{p_6}(x_6 - \bar{\xi}_6, *)\, g(x_6 - \bar{\xi}_6)\, c_{p_7}(x_7 - \bar{\xi}_7, *)\, g(x_7 - \bar{\xi}_7)\, c_{p_8}(*) \\ & \times g(x_1 + x_3 + x_5 - \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_3 - \bar{\xi}_5)\, g(x_2 + x_4 + \overline{x_{67}} - \xi_2 - \xi_4 - \bar{\xi}_{67}) \\ & \times W\, dV, \qquad g = f/\|f\|_1 \end{aligned} \tag{11.15}$$

重要でないベクトルは$*$で示した。Wは過剰ベクトルの成分でのgの値$g(*)$を全部考え, それらをかけ合わせたものである。またdVは過剰ベクトル成分の体積要素。Wはgとともに確率密度となる。(11.15)の右辺にある$c_{p_1}(x_1 - \bar{\xi}_1, *)\, g(x_1 - \bar{\xi}_1)$等を"端点因子"とよぶ。

(α_6) 端点c_{p_i}の端点因子はxの成分x_iを唯一つ含む。とくに$p_i = 1$のとき, 端点因子は$fc_1(x_i)$である。

$E|\eta(\varphi)|^4$の評価に, 見かけ上$X^1(t)$と$X^2(t)$の混合CSDが現れる。しかし, その背景にある分解が, §5, III, (ii)のような特殊なものなので, それらCSDは$X(t)$自身のCSD $f_m(\Gamma, x)$に含まれて仕舞う。

I 有限域評価 (f.e.), 無限域評価 (i.e.)

混合CSDが出てくる場は, (5.34)～(5.37)である。(8.13)に準じて, 混合CSDを用いると

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\sigma_\eta(8) \equiv S_\eta(s_1, t_1, u_1, v_1, s_2, t_2, u_2, v_2)$$

(11.16)
$$= \int f_8^{1111\,2222}(x) \exp\{ix_1(s_1-v_2)+ix_2(t_1-v_2)+ix_3(u_1-v_2)$$
$$+ix_4(v_1-v_2)+ix_5(s_2-v_2)+ix_6(t_2-v_2)+ix_7(u_2-v_2)\}dx$$

とかける。(5.34), (5.35), (11.5) に注意して

$$C_\eta(8) = \frac{1}{(2\pi)^4 T^2}\int \sigma_\eta(8)\, e_\eta\, ds_1 \cdots dv_2$$

とおけば，(11.8) と同様に

(11.17)
$$C_\eta(8) = \frac{(2\pi)^3}{T}\int \Psi(\xi) f^{1111\,2222}(\xi_1+\alpha, \xi_2-\beta, \xi_3+\gamma, \xi_4-\delta, \xi_5-\alpha, \xi_6+\beta, \xi_7-\gamma)\,d\xi$$

となり，$E|\eta(\varphi)|^4$ に対する $\sigma_\eta(8)$ の寄与は

(11.18)
$$\mathcal{E}_\eta(8) = \frac{(2\pi)^3}{T}\int \Psi(\xi)\,d\xi \sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_8'} \gamma_8(\Gamma)$$
$$\times \int f_8^{1111\,2222}(\Gamma, \xi_1+\alpha, \xi_2-\beta, \xi_3+\gamma, \xi_4-\delta, \xi_5-\alpha, \xi_6+\beta, \xi_7-\gamma)\,dA$$

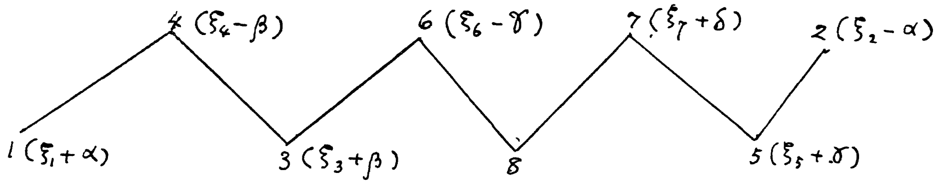
となる，ただし $\mathcal{C}_8' = \{\Gamma\in\mathcal{C}_8;\ p_j=1\ (1\le j\le 4),\ p_j\ge 2\ (5\le j\le 8)\}$.

(11.18) の Γ について。$c_{p_j} = c_1\ (1\le j\le 4)$ であるから，これらは Γ の端点になり対応する端点因子が出る。(11.15) の形に注意し，W が確率密度であることを用いて

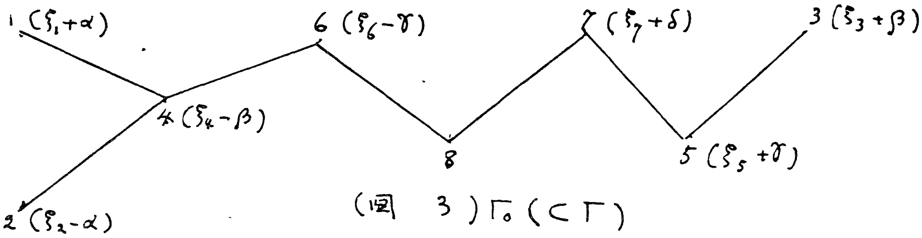
$$(\alpha_7)\begin{cases} |f_8^{1111\,2222}(\Gamma, \xi_1+\alpha, \cdots, \xi_7-\gamma)| \le \|f\|_1^{p/2}\|g\|_\infty^3 P_\eta(\Gamma)\prod_{i=5}^{8}\|c_{p_i}\|_\infty, \\ P_\eta(\Gamma) = |gc_1|(\xi_1+\alpha)|gc_1|(\xi_2-\beta)|gc_1|(\xi_3+\gamma)|gc_1|(\xi_4-\delta), \\ |\mathcal{E}_\eta(8)| \le \sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_8'}\gamma_8(\Gamma)\,\mathcal{E}_\eta(\Gamma, 8), \\ |\mathcal{E}_\eta(\Gamma, 8)| = \frac{(2\pi)^3}{T}\prod_5^8\|c_{p_i}\|_\infty\|f\|_1^{p/2}\|g\|_\infty^3\int|\Psi|\,d\xi\int P_\eta(\Gamma)\,dA \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$E(\xi^2(\varphi))^4$ に対する $\sigma(8)$ の寄与, $\mathcal{E}_{\xi^2}(8)$ は, (11.9) の右辺において, Γ を $p_i \geq 2$ $(1 \leq i \leq 8)$ と制限して得られる。その際, Γ_0 について二つの型(図2, 図3)に注意する。図において, 頂点 i に c_{p_i} が配置されている。



(図 2) Γ_0 $(\subset \Gamma)$



(図 3) Γ_0 $(\subset \Gamma)$

図2 の Γ_0 に対して

$$|f_8(\Gamma, \xi_1+\alpha, \cdots, \xi_7+\delta)| \leq \|f\|_1^{p/2} P_{\xi^2}(\Gamma) \prod_1^8 \|c_{p_i}\|_\infty,$$

(11.19)
$$\begin{aligned} P_{\xi^2}(\Gamma) = \int & g(\xi_1+\alpha+\bar{f}_1)\, g(\xi_2-\alpha+\bar{f}_2)\, g(\xi_1+\xi_4+\alpha-\beta+\bar{f}_3) \\ & \times g(\xi_1+\bar{\xi}_{34}+\alpha+\bar{f}_4)\, g(\xi_1+\bar{\xi}_{34}+\xi_6+\alpha-\gamma+\bar{f}_5) \\ & \times g(\xi_2+\xi_5+\gamma-\alpha+\bar{f}_6)\, g(\xi_2+\xi_5+\xi_7+\gamma+\delta-\alpha+\bar{f}_7) \\ & \times W dV \end{aligned}$$

が, (α_3), (α_4) より機械的に求まる。$\bar{f}_i$ は Γ_0 の頂点を通る過剰ベクトル成分の和であって

(α_5) 成分の個数は p をこえない

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

図3の Γ_0 に対しては

$$P_{\xi^2}(\Gamma)=\int g(\xi_1+\alpha+\bar{f}_1)\,g(\xi_2-\alpha+\bar{f}_2)\,g(\xi_3+\beta+\bar{f}_3)$$

(11.20)
$$\times g(\bar{\xi}_{12}+\xi_4-\beta)\,g(\bar{\xi}_{12}+\xi_4+\xi_6-\beta-\gamma)$$

$$\times g(\xi_3+\xi_5+\beta+\gamma)\,g(\xi_3+\xi_5+\xi_7+\beta+\gamma+\delta)\,W\,dV$$

図2の Γ_0 の特徴は、端点因子が $c_{p_1}f(\xi_1+\alpha+\bar{f}_1)$, $c_{p_2}f(\xi_2-\alpha+\bar{f}_2)$ となり、f の変数に $A=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ の一種類の文字 (α) しか現れない。これに対し、図3の Γ_0 については、端点因子が $c_{p_1}f(\xi_1+\alpha+\bar{f}_1)$, $c_{p_2}f(\xi_2-\alpha+\bar{f}_2)$, $c_{p_3}f(\xi_3+\beta+\bar{f}_3)$ であって、異る文字 (α,β) が現れる。

$\mathcal{E}_{\xi^2}(8)$ に対して、(α_7) と同様の式が求まるが、両者の場合に共通して、$\mathcal{E}_\eta(8)$, $\mathcal{E}_{\xi^2}(8)$ を φ の双一次形式、一次形式で評価することが要点である。ξ の連続率について、後の行動を知るため

(i) 双一次形式評価において、$\varphi=J[\lambda_1^q,\lambda_2^q]$（区間 $[\lambda_1^q,\lambda_2^q]$ の特性関数）, $0\leq\lambda_1<\lambda_2<\infty$, $q\geq 1$,

(ii) 一次形式評価において、$\varphi=J[\lambda^p,\infty)$, $0<\lambda<\infty$, $p\geq 1$

とおく。

双一次形式、一次形式評価、およびその延長上の評価を有限域評価 (f.e.)、無限域評価 (i.e) とよぶ。(α_7) から想像されるように、$\mathcal{E}_\eta(8)$, $\mathcal{E}_{\xi^2}(8)$ の f.e., i.e. の核心は、それぞれ

(11.21) (i) $\int P_\eta(\Gamma)\,dA$ (ii) $\int P_{\xi^2}(\Gamma)\,dA$

の f.e., i.e. にある。

(11.21) (i) の f.e., i.e は

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

(α_9) $\displaystyle\int P_\eta(\Gamma)\,dA$

$$\left\{\begin{array}{ll} \le \|f\|_1^{-1} a_1^2 \displaystyle\int |gc_1|(\xi_1+\alpha)\varphi(\alpha)d\alpha \int |gc_1|(\xi_2-\beta)\,\varphi(\beta)d\beta & (\text{f. e}) \\ \le \|f\|_1^{-3/2} a_1^3 \displaystyle\int |g|(\xi_1+\alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha & (\text{i. e.}) \end{array}\right.$$

$$a_1 = \|fc_1^2\|_1^{1/2} + \|fc_1^2\|_2^{1/2} .$$

$\mathcal{E}_{\xi^2}(8)$ については，(α_7) に対応して

$$(\alpha_{10}) \qquad |\mathcal{E}_{\xi^2}(8)| \le \sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_8''} \gamma_8(\Gamma)\,\mathcal{E}_{\xi^2}(\Gamma,8) ,$$

$$\mathcal{E}_{\xi^2}(\Gamma,8) = \frac{(2\pi)^3}{T}\|f\|_1^{\bar{p}/2} \prod_{i=1}^{8} \|c_{p_i}\|_\infty \int |\Psi|\,d\xi$$

$$\times \int P_{\xi^2}(\Gamma)\,dA ,$$

$$\mathcal{C}_8'' = \{\Gamma\in\mathcal{C}_8 : p_i \ge 2\ (1\le i\le 8)\}$$

これに関連する (11.21)(ii) の f. e., i.e. は，図3の場合

(α_{11}) $\displaystyle\int P_{\xi^2}(\Gamma)\,dA$

$$\le K(f)^5 \int W\,dV \int g(\xi_1+\alpha+\bar{f}_1)\varphi(\alpha)d\alpha \int g(\xi_3+\beta+\bar{f}_3)\varphi(\beta)d\beta \quad (\text{f. e})$$

$$\le K(f)^6 \int W\,dV \int g(\xi_1+\alpha+\bar{f}_1)\varphi(\alpha)\,d\alpha \qquad (\text{i. e.}) ,$$

$$K(f) = \|g\|_\infty + 1 ,$$

ここに，$K(f)$ の右辺は，$\int P_{\xi^2}(\Gamma)dA$ の被積分因子 g を，適宜 $\|g\|_\infty$ で評価するか，A の変数で積分して評価するか，何れの場合にも共通して有効なように考慮されたものである。 今後，f のみ，(ε, q) のみ，… に依存する定数を共通の記号 $K(f), K(\varepsilon,q), \cdots$ で表わす。

II ξ^2 における f. e., i.e

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

f.e. について。Γ_0 によって, (α_{11}) 以外のものも現れるが, 何れにしても, 右辺の積分は は $\mathcal{A}$ の異る文字二つ含み, それらはつぎの形に集約される

$$(11.22)\quad \int W dV \int g\Big(\sum{}' \xi_j + \alpha + \bar f_1\Big)\varphi(\alpha)\,d\alpha \int g\Big(\sum{}'' \xi_j + \beta + \nu\alpha + \bar f_3\Big)\varphi(\beta)\,d\beta,$$

$\nu = 0, \pm 1$, $\sum'$, $\sum''$ は ξ のいくつかの成分の和。

$\varphi = \mathcal{J}[\lambda_1^q, \lambda_2^q]$ とおけば §5, 6° より

$$(11.23)\quad \begin{aligned} &\int g\Big(\sum{}'' \xi_j + \beta + \nu\alpha + \bar f_3\Big)\varphi(\alpha)\,d\alpha \\ &\le K(\varepsilon, q)\Big(1 + \sum |\xi_j|^\varepsilon + m(\varepsilon) + |\alpha|^\varepsilon + |\bar f_3|^\varepsilon\Big)(\Delta\lambda)^{\varepsilon/2}, \end{aligned}$$

$m(\varepsilon) = m_g(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^\varepsilon g(\lambda)\,d\lambda$, ε は定理2,(i) による.

(11.19), (11.22), (11.23) より

$$(11.24)_{f.e.}\quad \begin{aligned} &|\mathcal{E}_{\xi^2}(8)| \le K(f, \varepsilon, q)\Big\{\sum_{\Gamma \in \mathcal{C}_8} \gamma_8(\Gamma) F(I, \Gamma)\Big\}(\Delta\lambda)^{\varepsilon/2} \\ &F(I, \Gamma) = F_T(I, \Gamma) \\ &= \frac{(2\pi)^3}{T} \prod_{i=1}^{8} a_{p_i} \int |\Psi|\,d\xi \int W dV \int_{\lambda_1^q}^{\lambda_2^q} g\Big(\sum{}' \xi_j + \alpha + \bar f_1\Big) \\ &\qquad \times \Big(1 + \sum |\xi_j|^\varepsilon + m(\varepsilon) + |\alpha|^\varepsilon + |\bar f_3|^\varepsilon\Big)\,d\alpha \quad (f.e.), \\ &I = [\lambda_1, \lambda_2]. \end{aligned}$$

f.e. の最終段階で, 正値関数

$$(11.25)\quad F(I, 8) = F_T(I, 8) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{C}_8} \gamma_8(\Gamma) F(I, \Gamma)$$

に対して, T について一様有界性

$$(11.26)\quad \sup_{T \ge 1} F_T([0, \infty), 8) < \infty$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

が必要となる。

そこで、(11.26) がどんな条件下で保証されるかをみよう。§5, 6° より

$$F_T([0,\infty), 8)$$

$$\leq (2\pi)^3 \sum_{\Gamma \in \mathcal{C}_8} \gamma_8(\Gamma) \prod_1^8 |a_{p_i}| \, T^{-1} \int |\Psi| \, d\xi \int W \, dV$$

$$\times \left(1 + 2 \sum_1^7 |\xi_j|^{\varepsilon} + 2m(\varepsilon) + |\bar{\xi}_1|^{\varepsilon} + |\bar{\xi}_3|^{\varepsilon}\right) .$$

$$\leq (2\pi)^3 2 \sum_{\Gamma \in \mathcal{C}_8} \gamma_8(\Gamma) \prod_1^8 |a_{p_i}| \cdot \bar{p} \cdot T^{-1} \int |\Psi| \left(1 + \sum_1^7 |\xi_j|^{\varepsilon} + m(\varepsilon)\right) d\xi ,$$

最後の不等式において (α_8) を用いた。 §5, 3° より

$$\int |\Psi| \, d\xi = \| \Psi_1^{(7)} \| \quad (T \geq 1 \text{ に無関係}),$$

$$\int |\Psi| \, |\xi_1|^{\varepsilon} d\xi = \int L_d(x) L_{d_7}(x) |x|^{\varepsilon} = \int T d(Tx) \, d_7(Tx) \, |x|^{\varepsilon} dx$$

$$\leq \int d(x) \, d_7(x) |x|^{\varepsilon} dx < \infty, \quad d_k = \underbrace{d * \cdots * d}_{k} \ (\text{convolution})$$

であるから

$$\sup_{T \geq 1} F_T([0,\infty), 8) \leq 2(2\pi)^3 \left\{ \| \Psi_1^{(7)} \|_1 (1 + m(\varepsilon)) + 7 \int d(x) d_7(x) |x|^{\varepsilon} dx \right\}$$

$$\times \sum_{\Gamma \in \mathcal{C}_8} \gamma_8(\Gamma) \left(\prod_{i=1}^8 |a_{p_i}| \right) \bar{p} .$$

それゆえ

$$(11.27)_1 \qquad \delta_k = \sum_{\Gamma \in \mathcal{C}_k} \gamma_k(\Gamma) \left(\prod_{i=1}^k |a_{p_i}| \right) \bar{p} \qquad (2 \leq k)$$

とおくとき

$$(11.27)_2 \qquad \delta_8 < \infty$$

ならば、(11.26) がみたされる。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

ξ^2 について，双一次形式，一次形式評価を求める方針を述べる。
Γ_0 が図2の場合，(11.19) から

$$(\alpha_{12})\quad \int P_{\xi^2}(\Gamma)\,dA$$

$$\begin{cases} \le K(f)^5 \displaystyle\int W\,dV \int g(\xi_1+\alpha+\bar{f}_1)\varphi(\alpha)\,d\alpha \int g(\xi_1+\xi_4+\alpha-\beta+\bar{f}_3)\varphi(\beta)\,d\beta, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (f.e.) \\ \le (\alpha_{11})\text{ の }(i.e.)\text{ と同一表現。} \end{cases}$$

(α_{13})　ξ^2 に対して，双一次形式評価は，Γ_0 の端点が少くとも二つ $\mathcal{A}$ の異る文字を含めば，この二つの端点因子を用いて作る；Γ_0 の端点が $\mathcal{A}$ の一文字しか含まないときは，端点因子一つと，端点のすぐ上位にある頂点因子（(α_{12}) の $g(\xi_1+\xi_4+\alpha-\beta+\bar{f}_3)$）を用いて作る。
一次形式評価は，Γ_0 がどんなでも，一つの端点因子から作る。

(α_{13}) の方針に従えば，どんな場合でも，双一次評価は (11.22) の形をとり，f.e. として (11.24) を得る。
i.e. について　$\varphi = \mathcal{I}[\lambda^p, \infty)$ とおいて，(α_{11})，(α_{12}) より

$$(11.28)\quad |E_{\xi^2}(\Gamma,8)| \le K(f)^6\frac{(2\pi)^3}{T}\prod_1^8 a_{p_i}\int|\Psi|\,d\xi \times \int W\,dV\int_{\lambda^p}^{\infty} g(\xi_1+\alpha+\bar{f}_1)\,d\alpha = \prod_1^8 a_{p_i}\, h_T(\Gamma,\lambda),$$

$$h_T(\Gamma,\lambda) = K(f)^6\frac{(2\pi)^3}{T}\int|\Psi|\,d\xi\int_{\lambda^p}^{\infty} g_k(\xi_1+\alpha)\,d\alpha,$$

$g_k = g^{k*}$ （$*$ convolution，$k = f_1$ の成分数$+1$）。

以下，$T\ge 1$，$a \ge 2$，$b = a^p$，$4/p < \varepsilon$，$d^*(x) = d_1(x)d_7(x)$ とおき，

§5, 7°より

$$\int_a^\infty h_T(\Gamma,\lambda)\,d\lambda \le K(f)\int_a^\infty |\Psi|\,d\xi \int_b^\infty g_k(\xi_1+\alpha)\alpha^{1/p}\,d\alpha \le K(f)(A+B),$$

(11.29)

$$A = \int |\Psi|\,d\xi \int_{b+\xi_1}^\infty g_k(\alpha)|\alpha|^{1/p}\,d\alpha$$

$$= \left(\int_{-b/2}^\infty + \int_{-\infty}^{-b/2}\right) T d^*(Tx)\,dx \int_{b+x}^\infty g_k(\alpha)|\alpha|^{1/p}\,d\alpha$$

$$\le \|d^*\|_1 \int_{b/2}^\infty g_k(x)x^{1/p}\,dx + \int_{b/2}^\infty T d^*(Tx)\,dx \int_{-\infty}^\infty g_k(\alpha)|\alpha|^{1/p}\,d\alpha$$

$$\le \|d^*\|_1 (b/2)^{-1/p}\,\bar{p}\, m_g(2/p) + \int_{b/2}^\infty d^*(x)\,dx \cdot \bar{p}\cdot m_g(1/p).$$

同様に

(11.30)

$$B = \int |\Psi|\,d\xi\,|\xi_1|^{1/p} \int_{b+\xi_1}^\infty g_k(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \int T d^*(Tx)|x|^{1/p}\,dx \int_{b+x}^\infty g_k(\alpha)\,d\alpha$$

$$\le \int d^*(x)|x|^{1/p}\,dx \int_{b/2}^\infty g_k(\alpha)\,d\alpha + \int_{b/2}^\infty d^*(x)\,x^{1/p}\,dx$$

$$\le m_{d^*}(1/p)\cdot \bar{p}\cdot m_g(1/p)\,(b/2)^{-1/p} + \int_{b/2}^\infty d^*(x)\,x^{1/p}\,dx.$$

(α_{11}), (11.28)〜(11.30) より

$$|\mathcal{E}_{\xi^2(\delta)}| \le \sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_\delta} \gamma_\delta(\Gamma)\left(\prod_1^\ell |a_{p_i}|\right) h_T(\Gamma,\lambda),$$

(11.24)$_{i.e}$

$$h_T(\Gamma,\lambda)\downarrow 0 \quad (\lambda\to\infty),$$

$$G(a,\delta) = \sup_{T\ge 1}\int_a^\infty h_T(\Gamma,\lambda)\,d\lambda \le K(p,f)\,\bar{p}\,G(a) \quad (\text{Tに無関係}),$$

$$0 \le G(a) = a^{-1} + \int_{a^\epsilon/2}^\infty d^*(x)\,x^{1/p}\,dx \downarrow 0 \quad (a\to\infty).$$

(11.24)$_{i.e}$ の意味:

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(11.31)\quad \sum_{k\geq n+1} E\left(\xi^2(\infty)-\xi^2(k)\right)^4 \text{ への } \sigma(8) \text{ の寄与}$$

$$\leq \int_n^\infty d\lambda \sum_{\Gamma\in \mathcal{C}_8} \gamma_1(\Gamma)\left(\prod_{i=1}^{8} a_{p_i}\right) h_T(\Gamma,\lambda)$$

$$\leq K(p,f)\, G(n,8)\,\delta_8,$$

右辺は(11.28)のもとで，$\downarrow 0\ (n\to\infty)$

ξ^2，η における f.e., i.e. について，一般的注意。

これらの評価を完成するには，更に(5.22)の$\sigma(2,6)\sim\sigma(2,2,2,2)$，(5.37)の$\sigma_\eta(11,11,2222)\sim\sigma_\eta(11,11,22,22)$の寄与を計算しなければならない。そのとき，以上の$\sigma(8)$，$\sigma_\eta(8)$の場合がモデルになる。$\sigma(8)$の寄与については，(11.24)f.e. (11.24)i.e. が最終的評価である。(α_q)を用いて，ηについても最終的評価が求まるが，これは後廻しにし，ここでξ^2，ηに関する評価の相違点に注意する。前者においては，関与する尾関係式c_k中にc_1が現れないが，後者ではc_1が現れ，評価にΓ，従ってΓ_0の端点因子$f_{c_1}(\cdot)$だけを用いることができる。$c_k\ (k\geq 2)$の有界性のゆえに，ξ^2に関する評価の方が，ηのそれより容易である。ξ^2に関する評価は，$\sigma(8)$の場合を参考にすれば，以下述べるηに関する諸評価から求まる。それゆえ，これから専らηについて，f.e., i.e. を考えていく。

そこで，$(11.27)_2$のよりどころを明確にするために

(補題2)

(i) 数列$a^i=(a_1^i, a_2^i,\cdots)\ (1\leq i\leq n)$は有限，即ちある$N$があって，$a_k^i=0\ (k\geq N)$とし，

$$\Phi_i(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k^i \zeta^k$$

とおく。このとき

$$\sum_{\Gamma\in \mathcal{G}_n} \frac{\prod_{j=1}^{n} p_j!}{\prod_{1\leq i<j\leq n}} \prod_{j=1}^{n} a_{p_j}^{j}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(11.32)\quad = E_{x_1,\cdots,x_{n-1},\psi_1,\cdots,\psi_{n-1}}\Big\{ \Phi_1(\sqrt{x_1}\,e^{-i\psi_1})\,\Phi_2(\sqrt{x_1}\,e^{i\psi_1}+\sqrt{x_2}\,e^{-i\psi_2})$$
$$\times\cdots\times \Phi_{n-1}(\sqrt{x_1}\,e^{i\psi_1}+\cdots+\sqrt{x_{n-2}}\,e^{i\psi_{n-2}}+\sqrt{x_{n-1}}\,e^{-i\psi_{n-1}})$$
$$\times\,\Phi_n(\sqrt{x_1}\,e^{i\psi_1}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}}\,e^{i\psi_{n-1}})\Big\},$$

こゝに

$$E_{x_1,\cdots,x_{n-1},\psi_1,\cdots,\psi_{n-1}} = \prod_{k=}^{n-1}\left(\int_0^\infty \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x_k}\,d\theta_k\,dx_k\right).$$

(ii) 定理の条件 (ii) ⇒

(11.33) (イ) $\delta_k<\infty$ $(2\le k\le 8)$ (ロ) 定理1の条件 (D)

(証明) 一般的注意. (11.32)は, (10.24)の一般化であり証明も(10.24)に至る過程を一般の場合に適合するように手直しすることに帰着する。a^i $(1\le i\le n)$ が一致する場合と異なる場合とで,議論に本質的な違いはないので,記号簡易化のため,

$$a^i = a = (a_1, a_2, \cdots)\ (\text{有限}),\quad \Phi_i(\zeta)=\Phi(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\zeta^k$$

とする。a^i が無限の場合も(11.32)が成り立つための充分条件を定めることができるが,こゝでは必要がないので立入らない。

(10.24)の証明に用いた下記の記号;等式が有用である。

$$U(\zeta)=\sum_0^\infty u_k\zeta^k,\qquad V(\zeta)=\sum_0^\infty v_k\zeta^k\qquad (\text{有限和})$$

とおけば

$$U^{(n)}(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+n)!}{k!}u_{k+n}\zeta^k,$$

$$(11.34)\quad E_{x,\varphi}(U(\bar\zeta)V(\zeta)\zeta^p)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+p)!\,u_{k+p}v_k,$$
$$E_{y,\psi}(U(\zeta+\sqrt{y}\,e^{-i\psi})V(\zeta+\sqrt{y}\,e^{i\psi}))=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{U^{(s)}(\zeta)V^{(s)}(\zeta)}{s!},$$
$$\zeta=e^{i\varphi}$$

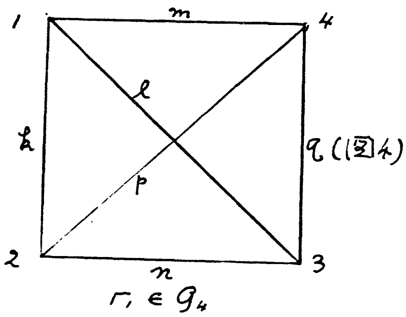
Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

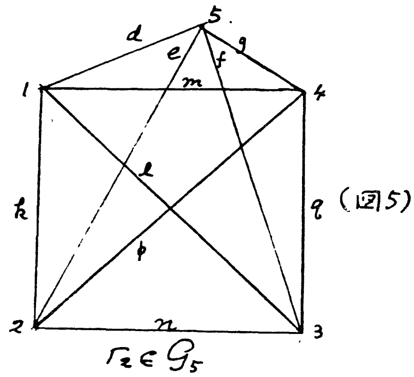
(10.24) に至る過程を要約すると，等式

$$(11.35)\quad \sum_{\substack{k,l,m,n\\ p,q\geq 0}} \frac{(k+l+m)!\,a_{k+l+m}\,(k+p+n)!\,a_{k+p+n}\,(l+n+q)!\,a_{l+n+q}\,(m+p+q)!\,a_{m+p+q}}{k!\,l!\,m!\,n!\,p!\,q!}$$

$$= E_{x,y,z,\theta,\varphi,\psi}\Big\{\Phi(\sqrt{x}e^{-i\psi})\,\Phi(\sqrt{x}e^{i\psi}+\sqrt{y}e^{-i\varphi})$$

$$\times\,\Phi(\sqrt{x}e^{i\psi}+\sqrt{y}e^{i\varphi}+\sqrt{z}e^{-i\theta})\,\Phi(\sqrt{x}e^{i\psi}+\sqrt{y}e^{i\varphi}+\sqrt{z}e^{i\theta})\Big\}$$





を得るのは，左辺を頂点1を通るベクトルの次元 k, l, m について加えることによります

(11.35) の左辺

$$(11.36)\quad = E_{x,\psi}\Big\{\Phi(\sqrt{x}e^{-i\psi})\sum_{p,q,n\geq 0}\frac{\Phi^{(p+q)}\,\Phi^{(n+p)}\,\Phi^{(n+q)}}{p!\,q!\,n!}(\sqrt{x}e^{i\psi})\Big\}$$

と示し（図4），つぎに (11.36) の右辺を変形して (11.35) の右辺を得た。この方法が一般化されることを $n=5$ の場合に示す。$\Gamma_2\in\mathcal{G}_5$（図5）は $\Gamma_1\in\mathcal{G}_4$（図4）に頂点5と，5を通る次元 d, e, f, g のベクトルが追加されて出来たと考える。(11.35) の左辺に相当する量は

$$(11.37)\quad \sum_{p_{ij}\geq 0}\frac{\prod_{1}^{5} p_j!}{\prod_{1\leq i<j\leq 5} p_{ij}!}\prod_{1}^{5} a_{p_j}$$

$$= \sum_{e,\cdots,q\geq 0} A(e,f,\cdots,q)\sum_{d=0}^{\infty}\frac{(d+e+f+g)!\,a_{d+e+f+g}\,(d+k+l+m)!\,a_{d+k+l+m}}{d!}$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$= \sum_{e,\cdots,q\geq 0} A(e,f,\cdots q)\, E_{x_1\psi_1}\Big(\Phi(\sqrt{x_1}\,e^{-i\psi_1}) \times \Phi^{(k+l+m)}(\sqrt{x_1}\,e^{i\psi_1})(\sqrt{x_1}\,e^{i\psi_1})^{e+f+g}\Big)$$

とかける。ここで A は (11.37) の一般項において, d を含まない因子, また最後の等式を得るのに (11.34) を用いた。(11.37)の一般項中 e, f, g を含む因子 $A(e,f,g)$ の形を考慮に入れて, 最後の和をかき直すと, 再び (11.34) を用いて

$$(11.38)\quad \begin{aligned} &= \sum_{\substack{k,l,m,n\\ p,q\geq 0}} \frac{1}{k!\,l!\,m!\,n!\,p!\,q!}\, E_{x_1\psi_1}\Big\{\Phi(\sqrt{x_1}\,e^{-i\psi_1})\,\Phi^{(k+l+m)}(\sqrt{x_1}\,e^{i\psi_1}) \\ &\quad\times \sum_{e\geq 0} \frac{(k+p+n+e)!\,a_{k+p+n+e}(\sqrt{x_1}\,e^{i\psi_1})^e}{e!} \\ &\quad\times \sum_{f\geq 0} \frac{(f+l+n+q)!\,a_{f+l+n+q}(\sqrt{x_1}\,e^{i\psi_1})^f}{f!} \\ &\quad\times \sum_{g\geq 0} \frac{(g+m+p+q)!\,a_{g+m+p+q}(\sqrt{x_1}\,e^{i\psi_1})^g}{g!} \\ &= E_{x_1\psi_1}\Big\{\Phi(\sqrt{x_1}\,e^{-i\psi_1}) \sum_{k,\cdots,q\geq 0} \frac{\Phi^{(k+l+m)}\,\Phi^{(k+p+n)}\,\Phi^{(n+l+q)}\,\Phi^{(m+p+q)}}{k!\,l!\,m!\,n!\,p!\,q!}(\sqrt{x_1}\,e^{i\psi_1})\Big\} \end{aligned}$$

これは, (11.36) の右辺に相当しており, (11.36)を得たと同じ過程によるもの, 即ち (11.37) の右辺を, 5を通るベクトルの次元 d, e, f, g について加え合わせたものである。(11.38) の最後の表現が (11.32) の右辺 ($n=5$, $\Phi_i=\Phi$) と一致することが期待される。実際 (11.34) を用いて, (11.32) の右辺を変形すると

$$E_{x_4\psi_4}\Big\{\Phi(\cdots+\sqrt{x_4}\,e^{-i\psi_4})\,\Phi(\cdots+\sqrt{x_4}\,e^{i\psi_4})\Big\} = \sum_{q\geq 0} \frac{\big(\Phi^{(q)}(\cdots+\sqrt{x_3}\,e^{i\psi_3})\big)^2}{q!},$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$E_{x_3\psi_3}\left\{ \Phi(\sqrt{x_1}e^{i\psi_1}+ \quad +\sqrt{x_3}e^{-i\psi_3}) \sum_{q\geq 0} \frac{\Phi^{(q)}(\cdots+\sqrt{x_3}e^{i\psi_3})\Phi^{(q)}(\cdots+\sqrt{x_3}e^{i\psi_3})}{q!} \right\}$$

$$= \sum_{s\geq 0} \frac{1}{s!} \Phi^{(s)}(\sqrt{x_1}e^{i\psi_1}+\sqrt{x_2}e^{i\psi_2}) \sum_{q\geq 0} \frac{(\Phi^{(q)}\cdot\Phi^{(q)})^{(s)}(\sqrt{x_1}e^{i\psi_1}+\sqrt{x_2}e^{i\psi_2})}{q!}$$

$$= \sum_{s\geq 0} \frac{1}{s!} \Phi^{(s)}(\sqrt{x_1}e^{i\psi_1}+\sqrt{x_2}e^{i\psi_2}) \sum_{\substack{p+n=s \\ q\geq 0}} \frac{s!}{p!n!}\frac{1}{q!}(\Phi^{(q+n)}\Phi^{(p+q)})(\sqrt{x_1}e^{i\psi_1}+\sqrt{x_2}e^{i\psi_2})$$

$$= S(\sqrt{x_1}e^{i\psi_1}+\sqrt{x_2}e^{i\psi_2}),$$

ただし

$$S = \sum_{p,q,n\geq 0} \frac{(\Phi^{(p+n)}\,\Phi^{(q+n)}\,\Phi^{(q+p)})(\sqrt{x_1}e^{i\psi_1}+\sqrt{x_2}e^{i\psi_2})}{n!\,p!\,q!}。$$

最後に

$$E_{x_2\psi_2}\left\{ \Phi(\sqrt{x_1}e^{i\psi_1}+\sqrt{x_2}e^{-i\psi_2})S \right\}$$

$$= \sum_{s\geq 0} \frac{1}{s!} \Phi^{(s)}(\sqrt{x_1}e^{i\psi_1}) S^{(s)}(\sqrt{x_1}e^{i\psi_1})$$

$$= \sum_{s\geq 0} \frac{1}{s!} \Phi^{(s)}(\sqrt{x_1}e^{i\psi_1}) \sum_{\substack{k+l+m=s \\ k,l,m,n,p,q\geq 0}} \frac{1}{n!p!q!}\frac{s!}{k!l!m!}\{\Phi^{(k+p+n)}\Phi^{(l+q+n)}\Phi^{(m+p+q)}\}(\sqrt{x_1}e^{i\psi_1})$$

$$= \sum_{\substack{k,l,m,n \\ p,q}\ \geq 0} \frac{\Phi^{(k+l+m)}\Phi^{(k+p+n)}\Phi^{(l+q+n)}\Phi^{(m+p+q)}(\sqrt{x_1}e^{i\psi_1})}{k!\,l!\,m!\,n!\,p!\,q!}$$

となるので、(11.32)の右辺は(11.38)の右辺と一致する。

(ii)

$$\delta_k \leq \sum_{\Gamma\in\mathcal{G}_k} \gamma_k(\Gamma)\left(\prod_{i=1}^{k} a_{p_i}\right)\bar{p} = k\sum_{\Gamma\in\mathcal{G}_k}\gamma_k(\Gamma)\left(\prod_{i=1}^{k}\right)p_1$$

であるから

$$(11.39) \qquad \sum_{\Gamma\in\mathcal{G}_k}\gamma_k(\Gamma)\left(\prod_{1}^{k} a_{p_i}\right)p_1 < \infty \qquad (2\leq k\leq 8)$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

述のような変数の"分離"が起るとき $n=6$, 起らないとき $n=7$. この式から, S が3個以内のキュムラントの積であると, つねに $a\geq 2$ であって, 前述の方法によって f.e, i.e が求まる。

V　S が4個のキュムラントの積である場合.

このとき, (11.66) から, (1)"変数分離"が起れば, $m=4$, $n=6$ だから $a=2$, (2) 起らなければ, $m=4$, $n=7$, $a=1$ となる。(1)にはこれまでの方法があてはまるが, (2)にはあてはまらない。これから, 従前と異り, (1), (2) を統一して扱う方法を示す。それは時間パラメータが離散の場合の Bentkus [2] の方法を若干手直ししたものである。

$h(x)\in L^2$ とするとき, Plancherel の定理によって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\mathcal{D}(\pm x\pm\alpha)\,dx\right|^2 d\alpha$$

(11.6.7)
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^T e^{\pm i\alpha y}dy\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\,e^{\pm iyx}dx\right|^2 d\alpha\leq(2\pi)^2\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|^2dx.$$

$$S_5=S_\eta(s_1,t_1)S_\eta(u_1,v_1)S_\eta(s_2,u_2)S_\eta(t_2,v_2)$$

について考える。この場合"分離"が起らず $a=1$ となる。

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\eta(S_5)=&\frac{1}{(2\pi)^4T^2}\int f_2^1(x)\,f_2^1(y)\,f_2^2(z)\,f_2^2(w)\\&\times\mathcal{D}(x-\alpha)\mathcal{D}(z+\alpha)\mathcal{D}(-x+\beta)\mathcal{D}(w-\beta)\\&\times\mathcal{D}(y-\gamma)\mathcal{D}(-z+\gamma)\mathcal{D}(-y+\delta)\mathcal{D}(-w-\delta)\,dA\,dx\cdots dw\\=&\frac{1}{(2\pi)^4T^2}\int\left(\left(\int\mathcal{D}(x-\alpha)\mathcal{D}(-x+\beta)f_2^1(x)\,dx\right)\right.\\&\times\left(\int\mathcal{D}(y-\gamma)\mathcal{D}(-y+\delta)f_2^1(y)\,dy\right)\left(\int\mathcal{D}(z+\alpha)\mathcal{D}(-z+\gamma)f_2^2(z)\,dz\right)\\&\times\left.\left(\int\mathcal{D}(w-\beta)\mathcal{D}(-w-\delta)f_2^2(w)\,dw\right)\right)dA\ ,\end{aligned}$$

f_2^1, f_2^2 は $X^1(t)$, $X^2(t)$ の第2次 cSD, とくに $f_2^1(\lambda)=|fC_1^2|(\lambda)$.

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\mathcal{E}_{\xi^2}(S_4)=\frac{1}{(2\pi)^4 T^2}\int f_4(x)\, f_4(y)$$

$$\times\, \mathcal{D}(x_1-\alpha)\mathcal{D}(x_2+\alpha)\mathcal{D}(x_3-\beta)\mathcal{D}(\beta-x_1-x_2-x_3)$$

$$(11.64)\qquad \times\, \mathcal{D}(y_1-\gamma)\mathcal{D}(y_2+\gamma)\mathcal{D}(y_3-\delta)\mathcal{D}(\delta-y_1-y_2-y_3)\,dx\,dy\,dA.$$

変換

$\xi_1=x_1-\alpha,\ \xi_2=x_2+\alpha,\ \xi_3=x_3-\beta,\ \xi_4=y_1-\gamma,\ \xi_5=y_2+\gamma,\ \xi_6=y_3-\delta$

によって

$$(11.65)\quad \mathcal{E}_{\xi^2}(S_4) =(2\pi)^2\left(\int \Psi^{(3)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\, f_4(\xi_1+\alpha,\xi_2-\alpha,\xi_3+\beta)\,\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\,d\xi\, d\alpha\, d\beta\right)^2$$

となる。

(11.61), (11.62)の S_i に現われる $s_1,\cdots,v_2$ の分布には共通した特徴がある。(s_1,s_2,t_1,t_2) と (u_1,u_2,v_1,v_2) とが"分離"である。これに起因して,(11.64)の積分核では,(x,α,β) と (y,γ,δ) が"分離"し,(11.65)では以前の Ψ の代りに積 $\Psi^{(3)}\cdot\Psi^{(3)}$ が現われる。他の S_i についても全く同様である。あらゆる場合を通じて,$\mathcal{E}_{\xi^2}$, $\mathcal{E}_\eta$ の表示に現われるフーリエ核には,(1) $\Psi^{(7)}$ と (2) $\Psi^{(3)}\cdot\Psi^{(3)}$ とがあり,この二通りに限られる。そして(2)の場合,f.e., i.e., の出し方は(1)の場合と実質的に変らないので細部は述べない。

(5.22), (5.37)の右辺から之らした項を $\sigma(8), S_1, S_2,\cdots$ としたが,これを S で代表する。$\mathcal{E}_\eta(S)$, $\mathcal{E}_{\xi^2}(S)$ をフーリエ核を用いて表示するとき,4個の φ が現われるが,これらの φ は,(1)自変数中に ξ_i を含むもの,(2) ξ_i を含まず,$\mathcal{A}$ の元を唯一つ含むもの,とに分類される。これまで(2)の φ を用いてf.e., i.e. を求めた。

(2)の φ の個数を a とするとき,関連する変数変換をチェックすることによって,

$$(11.66)\qquad a=4-(n-m)=m+4-n$$

ここ n m は S をCSDの積のフーリエ積分で表わした場合,CSDの積に含まれる自変数の個数,n は ξ_i の個数。従って,S に前

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

以上を総合して, $(11.45)_{f.e.}$ $(11.45)_{i.e}$ に相当するつぎの評価を得る。

$$(11.60)_{f.e} \quad |\mathcal{E}_\eta(S_3)| \le \mathcal{K}(f,\varepsilon,q)\, F_T(I,S_3)(\Delta\lambda)^{\varepsilon/4},$$
$$\sup_{T\ge 1} F_T([0,\infty), S_3) < \infty .$$

$$(11.60)_{i.e} \quad |\mathcal{E}_\eta(S_3)| \le h_T(\lambda, S_3) \downarrow 0 \quad (\lambda \to \infty),$$
$$G(a,S_3) \equiv \sup_{T\ge 1} \int_a^\infty h_T(\lambda,S_3)\,d\lambda \downarrow 0 \quad (a \to \infty).$$

IV $\mathcal{E}_\eta(*)$, $\mathcal{E}_{\xi^2}(*)$ を表示する積分核の特殊な形。

いままで, $*$ として $\sigma(8)$, S_i $(1\le i\le 3)$ として $\mathcal{E}_\eta(*)$, $\mathcal{E}_{\xi^2}(*)$ を考えた。その場合の積分表示では, (11.18), (11.51) などのように, 核の中にフーリエ核 $\Psi = \Psi^{(7)}$ が入って来る。これ以外に, $\Psi^{(7)}$ の代りに $\Psi^{(3)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\Psi^{(3)}(\xi_4,\xi_5,\xi_6)$ が入って来る場合がある。例示すると, つぎのような場合である。

(5.22) から

$$(11.61) \quad \begin{cases} S_4 = S(s_1,s_2,t_1,t_2)\,S(u_1,u_2,v_1,v_2) \\ S_6 = S(s_1,t_2)\,S(t_1,s_2)\,S(u_1,v_1)\,S(u_2,v_2), \end{cases}$$

(5.36), (5.37) から

$$(11.62) \quad \begin{cases} S_7 = S_\eta(s_1,t_1,s_2,t_2)\,S_\eta(u_1,v_1,u_2,v_2) \\ S_8 = S_\eta(s_1,t_1)\,S_\eta(s_2,t_2)\,S_\eta(u_1,v_1)\,S_\eta(u_2,v_2) \end{cases}$$

をとる。

$$(11.63) \quad S_4 = \int f_4(x) f_4(y) \exp\{ i(s_1-t_2)x_1 + \cdots + i(v_1-v_2)y_3 \}\,dx\,dy$$

とかき

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

(11.55) p.e. (11.55) i.e はそれぞれ, (11.44) p.e, (11.44) i.e に相当している。S_2 に対する解析にならって

$$|\mathcal{E}_\eta(S_3)| \le K(f,\varepsilon,q)(\Delta\lambda)^{\varepsilon/4} F_T(I,S_3),$$

(11.56)
$$F_T(I,S_3) = \sum_{\Gamma}{}' \gamma(\Gamma)\Big(\prod_{i=3}^{4} a_{p_i} a_{q_i}\Big) a_1^3 F_T(\Gamma, I, S_3),$$

$$\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{Q}_4 \times \mathcal{Q}_4, \quad \gamma(\Gamma) = \gamma_4(\Gamma_1)\gamma_4(\Gamma_2),$$

$$F_T(\Gamma, I, S_3) \le T^{-1}\int |\Psi| v(\xi_5) d\xi \int_{\lambda_1^q}^{\lambda_2^q} e(\xi_1 + \alpha)\, d\alpha,$$

そして

$$\sup_{T\ge 1} F_T([0,\infty), \Gamma, S_3) \le K(f,\varepsilon) a_1$$

であるから

(11.57)
$$\sup_{T\ge 1} F_T([0,\infty), S_3) \le K(f)\,\delta_4^2$$

(11.55) i.e は $\varphi = \mathcal{I}[\lambda^p, \infty)$ とおき,

$$h_T(\lambda, \Gamma, S_3) = K(f) T^{-1}\int |\Psi| d\xi \int_{\lambda^p}^{\infty} e(\xi_1 + \alpha)\, d\alpha$$

とかけば, これは (11.46) と同じ形をしているので,

(11.58.)
$$\sup_{T\ge 1}\int_a^\infty h_T(\lambda, \Gamma, S_3)\, d\lambda \le K(f,p) a_1 G(a,p) \downarrow 0 \ (a \to \infty)$$

(右辺は T に無関係)。

そして

(11.59)
$$|\mathcal{E}_\eta(S_3)| \le h_T(\lambda, S_3),$$

$$h_T(\lambda, S_3) = \sum{}' \gamma(\Gamma)\Big(\prod_{1}^{3} a_{p_i} a_{q_i}\Big) a_1^3 h_T(\lambda, \Gamma, S_3)$$

であるが, (11.59) より

$$G(a, S_3) = \sup_{T\ge 1}\int_a^\infty h_T(\lambda, S_3)\, d\lambda \le K(f,p)\,\delta_4^2\, G(a,p) \downarrow 0, \ (a \to \infty).$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(11.44)_{f.e} \quad |\mathcal{E}_\eta(S_2)| \le K(f)\delta_2 \|fc_1^2\|_1^{1/2} T^{-1}\int |\Psi| k\, d\xi \times \int e(\xi_3+\gamma)\varphi(\gamma)d\gamma \left(\int g(\xi_5-\delta)\varphi(\delta)d\delta\right)^{1/2},$$

$$g = f/\|f\|_1,$$

$$(11.44)_{i.e} \quad |\mathcal{E}_\eta(S_2)| \le K(f)\delta_2 \|fc_1^2\|_1 T^{-1}\int |\Psi| k\, d\xi \int e(\xi_3+\gamma)\varphi(\gamma)d\gamma.$$

これからつぎの評価が出ることをえます。

$$(11.45)_{f.e} \quad |\mathcal{E}_\eta(S_2)| \le K(f,\varepsilon,q,c_1)\,\delta_2 F_T(I,S_2)(\Delta\lambda)^{\varepsilon/4},$$

$$\sup_{T\ge 1} F_T([0,\infty),S_2) < \infty,$$

$$(11.45)_{i.e} \quad |\mathcal{E}_\eta(S_2)| \le K(f,c_1)\,\delta_2 h_T(\lambda,S_2),\ h_T(\lambda,S_2)\downarrow 0\ (\lambda\to\infty),$$

$$\int_a^\infty h_T(\lambda,S_2)d\lambda \le K(p)\, G(a,S_2),$$

$G(a,S_2)$ は $(11.44)_{i.e}$ における $G(a,\delta)$ と同様の性質をみたす。

何故ならば，$(11.44)_{f.e}$ において，$\varphi = \mathcal{J}[\lambda_1^\varepsilon,\lambda_2^\varepsilon]$ とおき，§5, 6° を $(11.44)_{f.e}$ の右辺に適用して $(11.45)_{f.e}$ の前半が出る，ただし

$$F_T(I,S_2) = T^{-1}\int |\Psi| k(1+m(\varepsilon)^{1/2}+|\xi_5|^{\varepsilon/2})d\xi \int_{\lambda_1^\varepsilon}^{\lambda_2^\varepsilon} e(\xi_3+\gamma)d\gamma,$$

$$a_1 = \|fc_1^2\|_1^{1/2} + \|fc_1^2\|_2^{1/2}.$$

$abc \le a^4+b^4+c^2$ を用いて

$$k(1+m(\varepsilon)^{1/2}+|\xi_5|^{\varepsilon/2}) \le e^4(\xi_3+\xi_7)+e^4(\bar\xi_{14}+\bar\xi_{67})+v^2(\xi_5),$$

$$v(x) = (1+m(\varepsilon)^{1/2}+|x|^{\varepsilon/2}).$$

$\|d_k\|_\infty < \infty$，$d_i(x)d_j(x)|x|^\delta \in L\ (0<\delta<1)$，また定理の条件から $e\in L^4$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

であるから

$$\sup_{T\geq 1} F_T([0,\infty), S_2) \leq \|f\|_1^{1/2} a_1 \sup_{T\geq 1}\left\{\int d_2(Tx)d_6(Tx)e^4(x)dx + \int d_1(Tx)d_7(Tx)(e^4(x)+v^2(x))dx\right\}$$

$$\leq \|f\|_1^{1/2} a_1 \left\{(\|d_2 d_6\|_\infty + \|d_1 \cdot d_7\|_\infty)\|e^4\|_1 + \int d_1(x)d_7(x)v(x)dx\right\} < \infty.$$

(11.44) の後半の不等式において，$\varphi = I[\lambda^p, \infty)$ とおき，

(11.46) $h_T(\lambda, S_2) = T^{-1}\int |\Psi| k\, d\xi \int_{\lambda^p}^{\infty} e(\xi_3+\gamma)d\gamma$,

(11.47) $$\int_a^\infty h_T(\lambda, S_2)d\lambda \leq T^{-1}\int|\Psi|d\xi\int_b^\infty e(\xi_3+\gamma)|\gamma|^{1/p}d\gamma = I_1 + I_2, \quad b = a^p,$$

$$I_1 = T^{-1}\int|\Psi|k\int_{b+\xi_3}^\infty e(\gamma)|\gamma|^{1/p}d\gamma \leq A^{1/4} B^{1/4} C_T^{1/4}(a)\|\Psi\|_1^{1/4},$$

$$I_2 = T^{-1}\int|\Psi|k|\xi_3|^{1/p}\int_{b+\xi_3}^\infty e(\gamma)d\gamma \leq A^{1/4}\cdot B^{1/4}\cdot D^{1/4}E_T^{1/4}(a),$$

ただし

(11.48)

$$A = T^{-1}\int|\Psi|e^4(\xi_3+\xi_7)d\xi, \quad B = T^{-1}\int|\Psi|e^4(\bar\xi_{14}+\bar\xi_{67})d\xi,$$

$$C_T(a) = \int|\Psi|d\xi\left(\int_{b+\xi_3}^\infty e(\gamma)|\gamma|^{1/p}d\gamma\right)^4 \downarrow 0, \ (a\to\infty),$$

$$D = \int|\Psi||\xi_3|^{4/p}d\xi,$$

$$E_T(a) = \int|\Psi|d\xi\left(\int_{b+\xi_3}^\infty e(\gamma)d\gamma\right)^4 \downarrow 0 \ (a\to\infty).$$

(11.45) f, e を用いた式によって

(11.49) $$\sup_{T\geq 1}(A+B+D) < \infty$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

一方 $f c_1^2 \in L$ より $m_e(2/p)$, $m_e(1/p) < \infty$. 従って (11.24)i.e を導いた過程を視察して容易に

$$(11.50)\quad \sup_{T \geq 1} \left(C_T(a) + E_T(a) \right) \downarrow 0 \quad (a \to \infty)$$

が示される。

(11.47), (11.49), (11.50) を総合すれば (11.45)i.e が出る。

$S_3 = S_\eta(s_1, t_1, s_2, u_2) S_\eta(u_1, v_1, t_2, v_2)$ について.

$$S_3 = \int f_4''^{22}(x) f_4''^{22}(y) \exp\{ix_1(s_1-u_2)+\cdots+iy_3(t_2-v_2)\}\,dx\,dy$$

より

$$\mathcal{E}_\eta(S_3) = \frac{1}{(2\pi)^4 T^2}\int f_4''^{22}(x) f_4''^{22}(y)\,dx\,dy$$
$$\times \mathcal{D}(x_1-\alpha)\mathcal{D}(x_3+\alpha)\mathcal{D}(x_2+\beta)\mathcal{D}(y_3-\beta)$$
$$\times \mathcal{D}(y_1-\gamma)\mathcal{D}(-x_1-x_2-x_3+\gamma)\mathcal{D}(y_2+\delta)\mathcal{D}(-y_1-y_2-y_3-\delta)\,dA.$$

これに変換

$$\xi_1 = x_1-\alpha,\ \xi_2 = x_2+\beta,\ \xi_3 = x_3+\alpha,\ \xi_4 = y_1-\gamma,\ \xi_5 = y_2+\delta$$

$$\xi_6 = y_3-\beta,\ \xi_7 = -x_1-x_2-x_3+\gamma$$

を行い

$$|\mathcal{E}_\eta(S_3)| \leq \frac{1}{T}\int |f_4''^{22}(\xi_1+\alpha, \xi_2-\beta, \xi_3-\alpha) f_4''^{22}(\bar{\xi}_{14}+\xi_7-\beta, \xi_5-\delta, \xi_6+\beta)|$$
$$\times |\Psi| \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\delta)\,d\alpha\,d\beta\,d\delta\,d\xi$$

$$(11.51)\quad \leq \sum_{\Gamma_1,\Gamma_2}{}' \gamma_4(\Gamma_1)\gamma_4(\Gamma_2)\frac{1}{T}\int |\Psi|\,d\xi$$
$$\times \int |f_4''^{22}(\Gamma_1, \xi_1+\alpha, \xi_2-\beta, \cdots) f_4''^{22}(\Gamma_2, \bar{\xi}_{14}+\xi_7-\beta, \cdots)|\varphi(\alpha)\cdots\varphi(\delta)$$
$$\times\, d\alpha\,d\beta\,d\delta.$$

ここに

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$\Gamma_1=(p_{ij})$, $\Gamma_2=(q_{ij})\in\mathcal{C}_4$,

$\sum'$: $p_1=p_2=1$, $q_1=q_2=1$, $p_3, p_4, q_3, q_4\geq 2$ をみたす Γ_1,Γ_2 についての和.

(11.18), (α_7) にならって (11.54)f.e より

(11.52)

$$|f_4^{1122}(\Gamma_1,\xi_1+\alpha,\xi_2-\beta,\cdots)f_4^{1122}(\Gamma_2,\bar{\xi}_{14}+\xi_7-\beta,\cdots)|$$
$$\leq\|f\|_1^{\bar{p}/2-3}\|f\|_1^{\bar{q}/2-3}\|f\|_\infty^2\left(\prod_{i=3}^{4}\|C_{p_i}\|_\infty\|C_{q_i}\|_\infty\right)P_7(\Gamma_1,\Gamma_2),$$

$$P_7(\Gamma_1,\Gamma_2)=e(\xi_1+\alpha)e(\xi_2-\beta)e(\bar{\xi}_{14}+\xi_7-\beta)e(\xi_5-\delta),$$
$$e=|fC_1|$$

よって

$$\int P_7(\Gamma_1,\Gamma_2)dA$$

(11.53)
$$\begin{cases}\leq\|f\|_1 a_1^3\int e(\xi_1+\alpha)\varphi(\alpha)d\alpha\left(\int g(\xi_5-\delta)g(\delta)d\delta\right)^{1/2} & (f.e.)\\ \leq\|f\|_1^{3/2}a_1^3\int e(\xi_1+\alpha)\varphi(\alpha)d\alpha & (i.e.),\quad e=|fC_1|\text{。}\end{cases}$$

(11.52), (11.53) を (11.51) に代入して

$$(11.54)\qquad |\mathcal{E}_7(S_3)|\leq\sum{}'\gamma_4(\Gamma_1)\gamma_4(\Gamma_2)\mathcal{E}(\Gamma_1,\Gamma_2,S_3),$$

$$(11.55)_{f.e}\quad \mathcal{E}(\Gamma_1,\Gamma_2,S_3)=K(f)a_1^3\|f\|_1^{\bar{p}/2}\|f\|_1^{\bar{q}/2}\left(\prod_{i=3}^{4}\|C_{p_i}\|_\infty\|C_{q_i}\|_\infty\right)$$
$$\times T^{-1}\int|\Psi|d\xi\int e(\xi_1+\alpha)\varphi(\alpha)d\alpha\left(\int g(\xi_5-\delta)\varphi(\delta)d\delta\right)^{1/2},$$

$$(11.55)_{i.e}\quad \mathcal{E}(\Gamma_1,\Gamma_2,S_3)=K(f)a_1^3\|f\|_1^{\bar{p}/2}\|f\|_1^{\bar{q}/2}\left(\prod_{i=3}^{4}\|C_{p_i}\|_\infty\|C_{q_i}\|_\infty\right)$$
$$\times T^{-1}\int|\Psi|d\xi\int e(\xi_1+\alpha)\varphi(\alpha)d\alpha$$

となる。

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

(11.55)p.e.(11.55)i.e はそれぞれ，(11.44)p.e，(11.44)i.e に相当している。S_2 に対する解析にならって

$$|\mathcal{E}_\eta(S_3)| \le K(f,\varepsilon,q)(\Delta\lambda)^{\varepsilon/4} F_T(I,S_3),$$

(11.56)
$$F_T(I,S_3) = \sum_{\Gamma}{}' \gamma(\Gamma)\Big(\prod_{i=3}^{4} a_{p_i} a_{q_i}\Big) a_1^3 F_T(\Gamma, I, S_3),$$

$$\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_4, \quad \gamma(\Gamma) = \gamma_4(\Gamma_1)\gamma_4(\Gamma_2),$$

$$F_T(\Gamma, I, S_3) \le T^{-1}\int |\Psi| v(\xi_5)\, d\xi \int_{\lambda_1^\rho}^{\lambda_2^\rho} e(\xi_1+\alpha)\, d\alpha,$$

そして

$$\sup_{T\ge 1} F_T([0,\infty), \Gamma, S_3) \le K(f,\varepsilon)\, a_1$$

であるから

(11.57)
$$\sup_{T\ge 1} F_T([0,\infty), S_3) \le K(f)\, \delta_4^2$$

(11.55)i.e に $\varphi = \mathcal{I}[\lambda^\rho, \infty)$ とおき，

$$h_T(\lambda, \Gamma, S_3) = K(f) T^{-1}\int |\Psi|\, d\xi \int_{\lambda^\rho}^{\infty} e(\xi_1+\alpha)\, d\alpha$$

とかけば，これは(11.46)と同じ形をしているので，

(11.58)
$$\sup_{T\ge 1} \int_a^\infty h_T(\lambda, \Gamma, S_3)\, d\lambda \le K(f,p) a_1 G(a,p) \downarrow 0 \ (a \to \infty)$$

（右辺はTに無関係）。

そして

(11.59)
$$|\mathcal{E}_\eta(S_3)| \le h_T(\lambda, S_3),$$

$$h_T(\lambda, S_3) = \sum{}' \gamma(\Gamma)\Big(\prod_1^3 a_{p_i} a_{q_i}\Big) a_1^3 h_T(\lambda, \Gamma, S_3)$$

であるが，(11.59)より

$$G(a, S_3) = \sup_{T\ge 1} \int_a^\infty h_T(\lambda, S_3)\, d\lambda \le K(f,p)\, \delta_4^2\, G(a,p) \downarrow 0, \ (a \to \infty).$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

以上を総合して，$(11.45)_{f.e.}$ $(11.45)_{i.e}$ に相当するつぎの評価を得る。

$$(11.60)_{f.e}\quad |\mathcal{E}_\eta(S_3)| \le K(f,\varepsilon,q)F_T(I,S_3)(\Delta\lambda)^{\varepsilon/4},$$
$$\sup_{T\ge 1} F_T([0,\infty),S_3)<\infty。$$

$$(11.60)_{i.e}\quad |\mathcal{E}_\eta(S_3)| \le h_T(\lambda,S_3)\downarrow 0\ (\lambda\to\infty),$$
$$G(a,S_3)\equiv \sup_{T\ge 1}\int_a^\infty h_T(\lambda,S_3)\,d\lambda\downarrow 0\ (a\to\infty)。$$

IV $\mathcal{E}_\eta(*)$, $\mathcal{E}_{\xi^2}(*)$ を表示する積分核の特殊な形。

いままで，$*$ として $\sigma(8)$, $S_i\ (1\le i\le 3)$ として $\mathcal{E}_\eta(*)$, $\mathcal{E}_{\xi^2}(*)$ を考えた。その場合の積分表示では，(11.18), (11.51) などのように，核の中にフーリエ核 $\Psi=\Psi^{(7)}$ が入って来る。これ以外に，$\Psi^{(7)}$ の代りに $\Psi^{(3)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\Psi^{(3)}(\xi_4,\xi_5,\xi_6)$ が入って来る場合がある。例示すると，つぎのような場合である。

(5.22) から

$$(11.61)\quad \begin{cases} S_4 = S(s_1,s_2,t_1,t_2)S(u_1,u_2,v_1,v_2) \\ S_6 = S(s_1,t_2)S(t_1,s_2)S(u_1,v_1)S(u_2,v_2), \end{cases}$$

(5.36), (5.37) から

$$(11.62)\quad \begin{cases} S_7 = S_\eta(s_1,t_1,s_2,t_2)S_\eta(u_1,v_1,u_2,v_2) \\ S_8 = S_\eta(s_1,t_1)S_\eta(s_2,t_2)S_\eta(u_1,v_1)S_\eta(u_2,v_2) \end{cases}$$

をとる。

$$(11.63)\quad S_4=\int f_4(x)f_4(y)\exp\{i(s_1-t_2)x_1+\cdots+i(v_1-v_2)y_3\}\,dx\,dy$$

とかき

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\mathcal{E}_{\xi^2}(S_4)=\frac{1}{(2\pi)^4T^2}\int f_4(x)f_4(y)$$
$$\times\mathcal{D}(x_1-\alpha)\mathcal{D}(x_2+\alpha)\mathcal{D}(x_3-\beta)\mathcal{D}(\beta-x_1-x_2-x_3)$$
(11.64)
$$\times\mathcal{D}(y_1-\gamma)\mathcal{D}(y_2+\gamma)\mathcal{D}(y_3-\delta)\mathcal{D}(\delta-y_1-y_2-y_3)\,dx\,dy\,dA.$$

変換

$\xi_1=x_1-\alpha$, $\xi_2=x_2+\alpha$, $\xi_3=x_3-\beta$, $\xi_4=y_1-\gamma$, $\xi_5=y_2+\gamma$, $\xi_6=y_3-\delta$

によって

(11.65) $\mathcal{E}_{\xi^2}(S_4)$
$$=(2\pi)^2\left(\int\Psi^{(3)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)f_4(\xi_1+\alpha,\xi_2-\alpha,\xi_3+\beta)\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\,d\xi\,d\alpha\,d\beta\right)^2$$

となる。

(11.61),(11.62) の S_i に現れる $s_1,\cdots,v_2$ の分布には共通した特徴がある。(s_1,s_2,t_1,t_2) と (u_1,u_2,v_1,v_2) とが"分離"である。これに起因して，(11.64) の積分核では，(x,α,β) と (y,γ,δ) が"分離"し，(11.65) では以前の Ψ の代りに積 $\Psi^{(3)}\cdot\Psi^{(3)}$ が現れる。他の S_i についても全く同様である。あらゆる場合を通じて，$\mathcal{E}_{\xi^2}$，$\mathcal{E}_\eta$ の表示に現れるフーリエ核には，(1) $\Psi^{(7)}$ と (2) $\Psi^{(3)}\cdot\Psi^{(3)}$ とがあり，この二通りに限られる。そして (2) の場合，f.e.，i.e.，の求し方は (1) の場合と実質的に変らないので細部は述べない。

(5.22),(5.37) の右辺からえられた項を $\sigma(8)$, S_1, S_2, $\cdots$ としたが，これを S で代表する。$\mathcal{E}_\eta(S)$，$\mathcal{E}_{\xi^2}(S)$ をフーリエ核を用いて表示するとき，4個の φ が現れるが，これらの φ は，(1) 自変数中に ξ_i を含むもの，(2) ξ_i を含まず，A の元を唯一つ含むもの，とに分類される。これまで (2) の φ を用いて f.e., i.e. を求めた。

(2) の φ の個数を a とするとき，関連する変数変換をチェックすることによって，

(11.66) $a=4-(n-m)=m+4-n$

ここに m は S を CSD の積のフーリエ積分で表わした場合，CSD の積に含まれる自変数の個数，n は ξ_i の個数。従って，S に前

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

述のような変数の"分離"が起るとき $n=6$, 起らないとき $n=7$. この式から, S が3個以内のキムラントの積であると, つねに $a\geq 2$ であって, 前述の方法によって f.e., i.e が求まる。

V S が4個のキムラントの積である場合.

このとき, (11.66) から, (1) "変数分離" が起れば, $m=4$, $n=6$ だから $a=2$, (2) 起らなければ, $m=4$, $n=7$, $a=1$ となる. (1) にはこれまでの方法があてはまるが, (2) にはあてはまらない。これから, 従前と異り, (1), (2) を統一して扱う方法を示す. それは時間パラメータが離散の場合の Bentkus [2] の方法を若干手直ししたものである.

$h(x)\in L^2$ とするとき, Plancherel の定理によって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\,\mathcal{D}(\pm x\pm\alpha)\,dx\right|^2 d\alpha$$

(11.6.7)
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{0}^{T}e^{\pm i\alpha y}dy\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\,e^{\pm iyx}dx\right|^2 d\alpha\leq(2\pi)^2\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|^2dx.$$

$$S_5=S_\eta(s_1,t_1)S_\eta(u_1,v_1)S_\eta(s_2,u_2)S_\eta(t_2,v_2)$$

について考える。この場合"分離"が起らず $a=1$ となる。

$$\mathcal{E}_\eta(S_5)=\frac{1}{(2\pi)^4T^2}\int f_2^1(x)\,f_2^1(y)\,f_2^2(z)\,f_2^2(w)$$
$$\times\mathcal{D}(x-\alpha)\mathcal{D}(z+\alpha)\mathcal{D}(-x+\beta)\mathcal{D}(w-\beta)$$
$$\times\mathcal{D}(y-\gamma)\mathcal{D}(-z+\gamma)\mathcal{D}(-y+\delta)\mathcal{D}(-w-\delta)\,dA\,dx\cdots dw$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4T^2}\int\left(\left(\int\mathcal{D}(x-\alpha)\mathcal{D}(-x+\beta)f_2^1(x)\,dx\right)\right.$$
$$\times\left(\int\mathcal{D}(y-\gamma)\mathcal{D}(-y+\delta)f_2^1(y)\,dy\right)\left(\int\mathcal{D}(z+\alpha)\mathcal{D}(-z+\gamma)f_2^2(z)\,dz\right)$$
$$\left.\times\left(\int\mathcal{D}(w-\beta)\mathcal{D}(-w-\delta)f_2^2(w)\,dw\right)dA\right.,$$

f_2^1, f_2^2 は $X^1(t), X^2(t)$ の第2次 cSD, とくに $f_2^1(\lambda)=|f_{C_1}|^2(\lambda)$.

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$x_1=\alpha,\cdots,x_4=\delta$, $d\sigma_1=\varphi(\alpha)d\alpha,\cdots,d\sigma_4=\varphi(\delta)d\delta$ とおいて §5, 3° を適用する.

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{E}_\eta(S_5)| \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^4T^2}\left(\iint\left|\int\mathcal{D}(x-\alpha)\mathcal{D}(-x+\beta)f_2^1(x)\,dx\right|^2\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\,d\alpha\, d\beta\right)^{1/2} \\
&\qquad\times\left(\iint\left|\int\mathcal{D}(y-\gamma)\mathcal{D}(-y+\delta)f_2^1(y)\,dy\right|^2\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\,d\gamma\, d\delta\right)^{1/2} \\
&\qquad\times\left(\iint\left|\int\mathcal{D}(z+\alpha)\mathcal{D}(-z+\gamma)f_2^2(z)\,dz\right|^2\varphi(\alpha)\varphi(\gamma)\,d\alpha\, d\gamma\right)^{1/2} \\
&\qquad\times\left(\iint\left|\int\mathcal{D}(w-\beta)\mathcal{D}(-w-\delta)f_2^2(w)\,dw\right|^2\varphi(\beta)\varphi(\delta)\,d\beta\, d\delta\right)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{11.68}
$$

(11.68) の右辺の4因子に (11.67) を適用, たとえば第一因子について, $h(x)=\mathcal{D}(x-\alpha)f_2^1(x)$ とおいて

$$
\int\left|\int\mathcal{D}(x-\alpha)\mathcal{D}(-x+\beta)f_2^1(x)\,dx\right|^2 d\beta \le (2\pi)^2\int|\mathcal{D}(x-\alpha)f_2^1(x)|^2\,dx.
$$

以下第2,第3,第4因子において, それぞれ γ,α,δ について積分を実行することによって

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{E}_\eta(S_5)| &\le \left(T^{-1}\int|\mathcal{D}(x)|^2dx\int(f_2^1(x+\alpha))^2\varphi(\alpha)\,d\alpha\right) \\
&\quad\times\left(T^{-1}\int|\mathcal{D}(z)|^2dz\int(f_2^2(z+\alpha))^2\varphi(\alpha)\,d\alpha\right).
\end{aligned}
\tag{11.69}
$$

f.e. を求めるために, $\varphi=\mathcal{J}[\lambda_1^\varepsilon,\lambda_2^\varepsilon]$ とおく.

$$
\begin{aligned}
\int(f_2^2(z+\alpha))^2\varphi(\alpha)\,d\alpha &\le \|f_2^2\|_\infty\sum_{k\ge 2}k!\,\|c_k\|_\infty^2\|f\|_1^k \\
&\quad\times\int W(f)\,dV\,g(z+\alpha-\bar{f})\varphi(\alpha)\,d\alpha,
\end{aligned}
\tag{11.70}
$$

$f=(f_1,\cdots,f_{k-1})$, $W(f)=g(f_1)\cdots g(f_{k-1})$, $g=f/\|f\|_1$, $dV=f$ の体積要素.

(α_{13}) より $\|f_2^2\|_\infty\le K(f)\delta_2$, §5, 6° より, $\mathcal{E}_\eta(S_2)$ の f.e. におけると同様

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$\int W(\xi)\,dV g(z+\alpha-\bar{\xi})\varphi(\alpha)\,d\alpha \le 2k\,K(\varepsilon,q)\,v(z)\,(\Delta\lambda)^{\varepsilon/2}$$

(11.71)

$$\sup_{T\ge 1} T^{-1}\int|\mathcal{D}(z)|^2 v(z)\,dz \le \|d\|_2^2(1+m(\varepsilon))+m_d(\varepsilon)\ 。$$

以前統一的に用いた記号をもどすと，$\|c_k\|_\infty^2\|f\|_1^k=\prod_{i=1}^{2}a_{p_i}$, $p_1=p_2=k$, $\bar{p}=2k$, $k!=\gamma_2(\Gamma)$, $\|f_2^2\|_\infty\le K(f)\,\delta_2$ (c.f. α_{13}) であるから，(11.70)より

$$T^{-1}\int|\mathcal{D}(z)|^2dz\int(f_2^2(z+\alpha))^2\varphi(\alpha)\,d\alpha$$
$$\le K(f,\varepsilon,q)\,\delta_2\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_2}\gamma_2(\Gamma)\Big(\prod_1^2 a_{p_i}\Big)\bar{p}\cdot(\Delta\lambda)^{\varepsilon/2}.$$

一方(11.69)右辺第一因子について，上からの評価：

$$T^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{D}(x)|^2dx\int_{-\infty}^{\infty}(f_2'(x+\alpha))^2d\alpha$$

(11.72)

$$=\|f_2'\|_2^2\,\|d\|_2^2\quad(\text{Tに依存しない}).$$

つぎに i.e. を求めるために，(11.69)において $\varphi=\mathcal{J}[\lambda^p,\infty)$ とおき，

$$|\mathcal{E}_\eta(S_5)|\le\|f_2'\|_2^2\,\|d\|_2^2\,\|f_2^2\|_\infty\,h_T(\lambda,S_5),$$

(11.73)

$$h_T(\lambda,S_5)=T^{-1}\int|\mathcal{D}(z)|^2dz\int_{\lambda^p}^{\infty}f_2^2(z+\alpha)\,d\alpha\ 。$$

(11.73)のf_2^2に関する積分を(11.70)と同様に処理して

$$h_T(\lambda,S_5)\le\sum_{\Gamma\in\mathcal{C}_2}\gamma_2(\Gamma)\prod_1^2 a_{p_i}\cdot h_T(\lambda,\Gamma,S_5),$$

(11.74)

$$h_T(\lambda,\Gamma,S_5)=T^{-1}\int|\mathcal{D}(z)|^2dz\int_{\lambda^p}^{\infty}g_k(z+\alpha)\,d\alpha,$$

$$g_k=g^{k*}\quad(\text{convolution}).$$

$h_T(\lambda,\Gamma,S_5)$ は(11.29)の $A+B$ と同形であるから

(11.75) $$\int_a^{\infty}h_T(\lambda,\Gamma,S_5)\,d\lambda\le K(p,f)\,\bar{p}\,G(a)\quad(\bar{p}=p_1+p_2).$$

この $G(a)$ は(11.24) i.e. の $G(a)$ と同じ性質をみたす。

以上をまとめると，

(11.76) $$F_T^2(I,S_5)=T^{-1}\int|\mathcal{D}(x)|^2dx\int_{\lambda_1^q}^{\lambda_2^q}(f_2'(x+\alpha))^2d\alpha$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

とおけば，(11.69)〜(11.72)より

$$(11.77)\ \text{f.e.}\quad |\mathcal{E}_\eta(S_5)| \le K(f,\varepsilon,q)\,\delta_2^2\, F_T(I,S_5)\,(\Delta\lambda)^{\varepsilon/2},$$
$$\sup_{T\ge 1} F_T([0,\infty),S_5) < \infty .$$

(11.73)〜(11.75)より

$$(11.77)\ \text{i.e}\quad |\mathcal{E}_\eta(S_5)| \le K(f,c_1)\,\delta_2\, h_T(\lambda,S_5) \downarrow 0 \quad (\lambda\to\infty),$$
$$G(a,S_5) \equiv \sup_{T\ge 1}\int_a^\infty h_T(\lambda,S_5)\,d\lambda \downarrow 0 \quad (a\to\infty)。$$

以上の方法の統一性を検証するために，いま一つの例をあげる：

$$S_6 = S_\eta(s_1,t_1)\,S_\eta(u_1,v_1)\,S_\eta(s_2,t_2)\,S_\eta(u_2,v_2).$$

この場合変数の分離がおこり，$a=2$となる。そして

$$\mathcal{E}_\eta(S_6) = \frac{1}{(2\pi)^4 T^2}\Big(\int f_2^1(x) f_2^2(z)\, D(x-\alpha) D(z+\alpha)$$
$$\times D(-x+\beta) D(-z-\beta)\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\,dx\,dz\,d\alpha\,d\beta\Big)^2$$

(11.78)

$$\le \frac{1}{(2\pi)^4 T^2}\Big(\int \Big|\int D(x-\alpha) D(-x+\beta) f_2^1(x)\,dx\Big|^2 \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\,d\alpha\,d\beta\Big)$$
$$\times\ \Big(\int \Big|\int D(z+\alpha) D(-z-\beta) f_2^2(z)\,dz\Big|^2 \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\,d\alpha\,d\beta\Big)$$
$$\le \Big(T^{-1}\int |D(x)|^2 dx \int (f_2^1(x+\alpha))^2 \varphi(\alpha)\,d\alpha\Big)$$
$$\times \Big(T^{-1}\int |D(z)|^2 dz \int (f_2^2(z+\alpha))^2 \varphi(\alpha)\,d\alpha\Big),$$

ここで$|D(z)|$と$f_2^2(z)$が偶関数であることを用いた。かくて(11.69)と同一の評価が得られた。

(注意)　必要がないので明らかにしなかったが，$T\to\infty$に対する$\mathcal{E}_\xi$，$\mathcal{E}_\eta$の行動について，(1) I〜III と (2) IV とで違いが

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

ある。既述の計算を検討すれば容易に分るが，(1)の場合は $\mathcal{E}_{\xi^2}$, $\mathcal{E}_\eta \to 0\ (T \to \infty)$ であるが，(2)の場合これは成りたたない。そのことと関連して，(1)で T の機能を100%使わないですむが，(2)では充分使わなければならない。

VI　$\xi'_T(\lambda)$ について．

いままで $\xi' = \xi'_T$ についてふれなかった。ξ' は正規過程 X' のピリオドグラムの尺度変換である。この稿で扱うような極限問題は，離散時間正規過程に対して，Grenander－Rosenblatt によって始めて満足な形の解答が与えられた。その後，連続時間の場合も Ibragimov [7], Toustik [14] 等によって扱われた。ξ が関数空間 $C[0,\infty]$ 上に生成する確率分布の相対コンパクト性を示すことは，離散時間の場合よりも，技術的に困難である。正規過程の場合でも例外ではないが，以上の準備を終えた上では，比較的簡単に —— V の方法で，処理される。

$E(\xi'(\varphi))^4$ を評価するのに，$X(t)$ を $X'(t)$ とみなして，(5.17)～(5.22) を用いればよいが，$X'(t)$ は正規過程だから，(5.22) の右辺のうち，$S(2,2,2,2)$ 以外はすべて 0 になる。そのため，V の方法で統一的に処理される。いま一例として $S(2,2,2,2)$ の右辺の一項

$$S_6 = S(s_1,t_1)\,S(u_1,v_1)\,S(s_2,u_2)\,S(t_2,v_2), \tag{11.79}$$
$$S(s_1,t_1) = S(X'(s_1), X'(t_1)) \text{ 等}$$

を考える。S_6 の $E(\xi'(\varphi))^4$ への寄与 $\mathcal{E}_{\xi'}(S_6)$ は (11.69) にならって

$$|\mathcal{E}_{\xi'}(S_6)| \le \left(\int \chi(x)\,dx \int (f_2'(x+\alpha))^2 \varphi(\alpha)\,d\alpha\right)^2, \tag{11.80}$$
$$\chi(x) = T^{-1}|D(x)|^2 = T^{-1}\left(\frac{\sin Tx/2}{x/2}\right)^2$$

となる。ここで $\varphi = I[\lambda_1, \lambda_2]\ (0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \infty)$ とおいて

$$|\mathcal{E}_{\xi'}(S_6)| \le (\Delta F_T(\lambda, S_6))^2, \tag{11.81}$$
$$\Delta F_T(\lambda, S_6) = F_T(\lambda_2, S_6) - F_T(\lambda_1, S_6)$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$F_T(\lambda, S_\delta) = \int \chi(x)dx \int_x^{\lambda+x} (f_2'(\alpha))^2 d\alpha \ 。$$

ξ' においては,評価を f.e., i.e. に分ける必要はないが,その代り $F_T(\lambda, S_\delta)$ に対して,下記の同程度連続性が必要となる。

ノルム $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ を伴う空間 $C_0[0,\infty] = \{f \in C[0,\infty]; f(0) = 0\}$, $C_0[0,1] = \{f \in C[0,1]; f(0) = 0\}$ について連続率を考える。

(定義) (i) $f \in C_0[0,1]$ の連続率

$$W_f(\delta) = \sup_{\substack{0 \le |a-b| \le \delta \\ a,b \in [0,1]}} |f(a) - f(b)| \ , \ \delta > 0 \ 。$$

(ii) $f \in C_0[0,1]$ の連続率

$$\overline{W}_f(\delta) = W_f(\delta) + W_f(1/\delta, \infty) \ , \ \delta > 0,$$

$$W_f(\delta) = \sup_{\substack{0 \le |a-b| \le \delta \\ a,b \in [0,\infty)}} |f(a) - f(b)|, \quad W_f(k,\infty) = \sup_{k \le a,b \le \infty} |f(a) - f(b)|$$

(性質) (i) $\psi \in C_0[0,\infty]$, $\psi(\infty) = 1$, 狭義増大,

$$\theta = \psi^{-1} : [0,1] \longrightarrow [0,\infty] \ (\text{同相変換})$$

$f \in C[0,\infty]$ に対して, $g(t) \equiv \theta^* f(t) = (f \circ \theta)(t)$ とおく。

このとき

$$\overline{W}_f(\delta) \le W_g(\overline{W}_\psi(\delta)) \ 。$$

(ii) 上と同じ記号を用いて,任意の $k > 0$ に対し, $\theta(t_0) = k$, $\theta_k = \theta$ の区間 $[0, t_0]$ への制限とすれば,ある $\delta_0 > 0$ があって

$$W_g(\delta) \le \overline{W}_f(k,\infty) + \overline{W}_f(W_{\theta_k}(\delta)) \ , \ 0 < \delta \le \delta_0 .$$

(iii) $h = \alpha f + \beta g$, $f, g \in C_0[0,\infty]$, α, β 定数 に対して

$$\overline{W}_h(\delta) \le |\alpha| \overline{W}_f(\delta) + |\beta| \overline{W}_g(\delta)$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

(iv) $K \subset C_0[0,1]$, $K^* = \theta^* K$

$$K^* \text{が相対コンパクト} \Longleftrightarrow K \text{が相対コンパクト}$$
$$\Longleftrightarrow \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{f\in K^*} \overline{W}_f(\delta)=0$$

(補題3) つぎの性質をみたす単調増大 $F_T(\lambda)\in C_0[0,\infty]$ が存在する。任意の $\Delta=[\lambda_1,\lambda_2]$, $0\le\lambda_1<\lambda_2<\infty$ に対して

$$E\left(\xi'(\lambda_2)-\xi'(\lambda_1)\right)^4 \le (\Delta F_T(\lambda))^2,\quad \Delta F_T(\lambda)=F_T(\lambda_2)-F_T(\lambda_1),$$

$$\{F_T,\ T\ge 1\}\subset C_0[0,\infty] \text{ は相対コンパクト}$$

(証明) V の所論で明らかなように, (11.79) 以外の $S(2,2,2,2)$ の構成員 S に対しても, $\mathcal{E}_{\xi'}(S)$ は (11.80) と同じ形の評価をもつから, これらを加え合わすことによって, 所要の評価が出る。$\{F_T, T\ge1\}$ の相対コンパクト性を示すには, (11.81) の $\{F_T(\lambda, S_6)\}_{T\ge1}$ の相対コンパクト性を示せば足りる。

$\|\chi\|_1=\pi$ であるから, (11.81) より

$$\sup_{T\ge 1} W_{F_T}(\delta)\le \pi \sup_{0\le|\lambda_1-\lambda_2|\le\delta}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}(f_2'(\alpha))^2 d\alpha \downarrow 0 \quad (\delta\to+0),$$

$$W_{F_T}(k,\infty)\le\left(\int_{-k/2}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-k/2}\right)\chi(x)dx\int_{k+x}^{\infty}(f_2'(\alpha))^2 d\alpha$$

$$\le(\pi+\|f_2'\|_2^2)\left(\int_{k/2}^{\infty}(f_2'(\alpha))^2 d\alpha+\int_{k/2}^{\infty}(d(x))^2 dx\right),\ k>0,$$

$$d(x)=\left|\frac{\sin x/2}{x/2}\right|$$

より

$$\sup_{T\ge 1} W_{F_T}(1/\delta,\infty)\downarrow 0\ (\delta\to+0).$$

以上から

$$\sup_{T\ge 1}\overline{W}_{F_T}(\delta)\downarrow 0\quad(\delta\to+0).$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

§12 定理2の証明

$C[0,1]$ 上の確率測度の族の相対コンパクト性の判定条件はProhorovによって与えられた。§11で述べた$C_0[0,1]$, $C_0[0,\infty]$に関する注意から、$\xi=\xi_T$ が $C_0[0,\infty]$ 上に定める確率測度 $P_T\ (T\geq 1)$ が相対コンパクトであるための必要充分条件は

$$(12.1)\quad \lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{T\geq 1} P(\overline{W}_\xi(\delta)\geq\varepsilon)=0,\quad \forall\varepsilon>0 \qquad ([5]).$$

一方(5.31)より

$$\xi=\xi^1+\xi^2+2R\eta$$

であるから、§11, $\overline{W}$ の性質(iii)によって

$$\overline{W}_\xi(\delta)\leq\overline{W}_{\xi^1}(\delta)+\overline{W}_{\xi^2}(\delta)+2\overline{W}_\eta(\delta).$$

それゆえ、(12.1)を証明するには

$$(\mathrm{I})\quad \lim_{\delta\to+0}\sup_{T\geq 1}P(\overline{W}_{\xi^1}(\delta)\geq\varepsilon)=0$$

$$(12.2)\qquad (\mathrm{II})\quad \lim_{\delta\to+0}\sup_{T\geq 1}P(\overline{W}_{\xi^2}(\delta)\geq\varepsilon)=0$$

$$(\mathrm{III})\quad \lim_{\delta\to+0}\sup_{T\geq 1}P(\overline{W}_{\eta}(\delta)\geq\varepsilon)=0$$

を示せばよい。

§11のf.e, i.e. をまとめるとつぎのようになる。p, q は、$10/p<\varepsilon$, $q\geq 1$ をみたし、$\kappa=\varepsilon/4$ とおく。ただし ε は定理の条件に述べたものである。$[0,\infty)$ 上の絶対連続測度 F_T が存在して、$0\leq\lambda_1<\lambda_2<\infty$, $\Delta\lambda=\lambda_2-\lambda_1\leq$ に対して

$$(12.3)_{f.e}\quad E|\eta(\lambda_2^\varepsilon)-\eta(\lambda_1^\varepsilon)|^4\leq F_T(I)(\Delta\lambda)^{\varepsilon/4},\quad I=[\lambda_1,\lambda_2],$$

$$\sup_{T\geq 1}F_T([0,\infty])<\infty,$$

$(12.3)_{i.e}$ $\quad 0\leq h_T(\lambda)\downarrow\ (\lambda\to\infty)$ が存在して

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$E|\eta(\infty)-\eta(\lambda^p)|^4\le h_T(\lambda)\quad,$$

$$G(a)\equiv\sup_{T\ge1}\int_a^\infty h_T(\lambda)d\lambda\downarrow 0\quad(a\to\infty).$$

ξ^2 もこれと同じ形の f.e., i.e. をもつ

これからの論証で明らかなように,(II),(IV)の証明のより処は,それぞれ ξ^2, η の f.e., i.e. だけであるので,両者に実質的違いはない。それ故,(I),(III)だけを示すことにする。

(I)の証明.

補題3において,$F_T(\infty)$ $(T\ge1)$ は有界だから,一般性を失うことなく——必要ならば ξ' に定数をかけることにより,

$$F_T(\infty)\le 1/2$$

としてよい。いたる処正の値をとる $[0,\infty)$ 上の確率密度 $w(x)$ をとり,分布関数 $\psi\in C_0[0,\infty]$ を

(12.4) $$\psi(\lambda)=\psi_T(\lambda)=F_T(\lambda)+(1-F_T(\infty))\int_0^\lambda w(x)dx$$

と定めると,ψ は狭義増大

$$\Delta F_T(\lambda)\le\Delta\psi(\lambda),$$

$\theta=\psi^{-1}$, $\zeta(t)=\zeta_T(t)=(\xi'\circ\theta)(t)$, $0\le t\le1$, とおくと補題3から,$\Delta=(t_1,t_2]\subset[0,1]$ に対して

$$\begin{aligned}E(\zeta(t_2)-\zeta(t_1))^4&\le\{F_T(\theta(t_2))-F_T(\theta(t_1))\}^2\\&\le\{\psi(\theta(t_2))-\psi(\theta(t_1))\}^2=(\Delta t)^2.\end{aligned}$$

よく知られているように([5], chap. 2, Th. 12.3),ζ_T の分布は相対コンパクトであり,これに同値な条件として

(12.5) $$\lim_{\delta\to+0}\sup_{T\ge1}P(W_{\zeta_T}(\delta)\ge\varepsilon)=0\ 。$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$\xi'(\lambda)=(\zeta\circ\theta)(\lambda)$ であるから、$\overline{W}$ の性質 (i) によって

$$\overline{W}_{\xi'}(\delta)\leq W_{\zeta}(\overline{W}_{\psi}(\delta)).$$

(12.5) と ψ_T の相対コンパクト性を用いて

$$\sup_{T\geq 1}P(\overline{W}_{\xi'}(\delta)\geq\varepsilon)\leq\sup_{T\geq 1}P\{W_{\zeta_T}(\overline{W}_{\psi_T}(\delta))\geq\varepsilon\}\to 0\quad(\delta\to+0)$$

QED.

(III) の証明

以下の所論は、633 内 (?) 関数空間 $[0,1]$ の確率過程の標本連続性の判定条件に対する論証を手直ししたものである。

$\kappa=\varepsilon/20$, $S_n=\left\{\frac{k}{2^n},\ 0\leq k<\infty \text{ 整}\right\}$, $0\leq n<\infty$, $S=\bigcup_{n\geq 0}S_n$ とおく, $S_n\uparrow$. $\eta^{(q)}(\lambda)=\eta(\lambda^q)$ とおき, $\eta^{(q)}$ が $C_0[0,\infty]$ に生ずる確率分布を $P_T^{(q)}$ とし, $C_0[0,\infty]$ の元を f で代表する。(12.3) 式 e によって, $\lambda_1=r/2^n$, $\lambda_2=(r+1)/2^n$, $\Delta\lambda=1/2^n$ に対して

$$\text{(12.6)}\qquad \begin{aligned}P(|\Delta\eta^{(q)}(\lambda)|\geq(\Delta\lambda)^{\kappa})&\leq(\Delta\lambda)^{-4\kappa}E|\Delta\eta^{(q)}(\lambda)|^4\\&\leq\Delta F_T(\lambda)\cdot 2^{-n\kappa}\end{aligned}$$

である。

$$C_n=\left(f\in C_0[0,\infty]:\sup_{0\leq r<\infty}|f((r+1)/2^n)-f(r/2^n)|\geq(\Delta\lambda)^{\kappa}\right)$$

とおき, $\sigma>0$ に対して

$$\text{(12.7)}\qquad \sup_{T\geq 1}F_T([0,\infty])\sum_{n\geq n_0}2^{-n\kappa}\leq\sigma$$

となる $n_0=n_0(\sigma)$ を定め

$$\text{(12.8)}\qquad C=C(\sigma)\equiv\bigcup_{n\geq n_0}C_n$$

とおけば, (12.6) 〜 (12.8) より

$$\text{(12.9)}\qquad \sup_{T\geq 1}P_T^{(q)}(C)\leq\sigma$$

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

であります

(12.10) $f\in C^c \Rightarrow \sup_{0\le r<\infty} |f((r+1)/2^n) - f(r/2^n)| < (\Delta\lambda)^\kappa$, $\forall n\ge n_0$.

$m_0\ge n_0$ をみたす m_0 をとる。つぎに二点 $s,t\in S$ を, $s<t$, $s\in S_{m_0}$, $t\notin S_{m_0}$ なるようにえらべば, $\exists m>m_0 : t\in S_m$, $s<t<s+1/2^{m_0}$. そしてつぎの表示ができる

$$s=\frac{k}{2^{m_0}},\ t=\frac{k}{2^{m_0}}+\frac{1}{2^{m_0+\nu}}+\frac{\varepsilon_1}{2^{m_0+\nu+1}}+\frac{\varepsilon_2}{2^{m_0+\nu+2}}+\cdots,$$

(12.11)

$$\nu\ge 1,\ \varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots=0\text{ 又は }1.$$

$s\in S_{m_0+p}$, $\forall p\ge 1$ であるから, (12.10) より

$$f\in C^c \Rightarrow$$

$$|f(s)-f(t)|\le |f(s)-f(s+\tfrac{1}{2^{m_0+\nu}})|+$$

(12.12)

$$+|f(s+\tfrac{1}{2^{m_0+\nu}})-f(s+\tfrac{1}{2^{m_0+\nu}}+\tfrac{1}{2^{m_0+\nu+1}})|+\cdots$$

$$\le\left(\frac{1}{2^{m_0+\nu}}\right)^\kappa+\left(\frac{1}{2^{m_0+\nu+1}}\right)^\kappa+\cdots=\left(\frac{1}{2^{m_0+\nu}}\right)^\kappa(1+2^{-\kappa}+2^{-2\kappa}+\cdots)$$

$$\le\gamma(t-s)^\kappa\quad,\quad \gamma=\frac{1}{1-2^{-\kappa}}.$$

$n\ge n_0(\sigma)$ をみたす n をとり, $0<s<t$, $|t-s|<2^{-n}$ をみたす $s,t\in S$ を考える。すると $[s,t]\cap S_n$ の点は高々一つしか現れない。$k/2^n\in S_n$ を $[s,t]$ 上の点か, 若くは s より小さく s に最も近い点とすれば, (12.12) より

$$|f(s)-f(t)|\le|f(s)-f(k/2^n)|+|f(k/2^n)-f(t)|\le 2\gamma\left(\frac{1}{2^n}\right)^\kappa,\ f\in C^c.$$

f の連続性から

$$\forall s,t\in[0,\infty),\ |s-t|\le 2^{-n},\ f\in C^c$$
$$\Rightarrow |f(s)-f(t)|\le 2\gamma\left(\frac{1}{2^n}\right)^\kappa,$$

従って

$$\sup_{f\in C^c} W_f(2^{-n})\le 2\gamma\left(\frac{1}{2^n}\right)^\kappa$$

(12.13)

$$\sup_{T\ge 1} P_T^{(q)}\left(W_f(2^{-n})>2\gamma(2^{-n})^\kappa\right)\le\sigma$$

となり

(12.14) $\displaystyle \lim_{\delta\to+0}\sup_{T\geq 1} P_T^{(q)}(W_f(\delta)\geq\varepsilon)=0, \quad \forall q\geq 1, \varepsilon>0.$

つぎに，自然数 n に対して

$$\sup_{n\leq\lambda}|\eta^{(p)}(\infty)-\eta^{(p)}(\lambda)|=\sup_{n\leq\lambda}|\eta^{(2p)}(\infty)-\eta^{(2p)}(\sqrt{\lambda})|$$

(12.15) $$\leq \sup_{\substack{n\leq k\\ k\text{自然数}}}|\eta^{(2p)}(\infty)-\eta^{(2p)}(\sqrt{k})|+\sup_{\substack{n\leq k\\ 0\leq x\leq 1}}|\eta^{(2p)}(\sqrt{k+x})-\eta^{(2p)}(\sqrt{k})|$$

$$\leq \sup_{n\leq k}|\eta^{(p)}(\infty)-\eta^{(p)}(k)|+W_{\eta^{(2p)}}(1/\sqrt{n}).$$

(12.3) i.e. より

$$P(\sup_{n\leq k}|\eta^{(p)}(\infty)-\eta^{(p)}(k)|>\varepsilon)$$

$$\leq \varepsilon^{-4}\sum_{k\geq n}E|\eta^{(p)}(\infty)-\eta^{(p)}(k)|^4\leq \varepsilon^{-4}\int_{n-1}^{\infty}h_T(\lambda)d\lambda,$$

(12.16) $$\lim_{n\to\infty}\sup_{T\geq 1}P(\sup_{n\leq k}|\eta^{(p)}(\infty)-\eta^{(p)}(k)|>\varepsilon)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\varepsilon^{-4}G(n)=0.$$

(12.14) において $q=2p$ とおき

(12.17) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sup_{T\geq 1}P(W_{\eta^{(2p)}}(1/\sqrt{n})>\varepsilon)=0, \quad \forall\varepsilon>0.$

(12.15)～(12.17) をまとめて

(12.18) $\displaystyle \lim_{\lambda\to\infty}\sup_{T\geq 1}P(W_{\eta^{(p)}}(\lambda,\infty)>\varepsilon)=0.$

(12.14) において $q=p$ とおき

(12.19) $\displaystyle \lim_{\delta\to+0}\sup_{T\geq 1}P(W_{\eta^{(p)}}(\delta)\geq\varepsilon)=0$

(12.18), (12.19) より

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

$$(12.20)\quad \lim_{\delta\to+0}\sup_{T\geq 1} P(\overline{W}_{\eta^{(p)}}(\delta)\geq\varepsilon)=0$$

これは$(P_T^{(p)}, T\geq 1)$が相対コンパクトであることを示す。従って,任意の$\varepsilon>0$に対して,Tに依存しないコンパクトな$K_\varepsilon\subset C_0[0,\infty]$があって,$P_T^{(p)}(K_\varepsilon)>1-\varepsilon$ ([5]). 一方$\psi: f\in C_0[0,\infty]\to\psi\circ f(\lambda)=f^{(p)}(\lambda)=f(\lambda^p)$は$C_0[0,\infty]$の同相変換である。そしてηの分布$P_T^{(1)}$は

$$P_T^{(1)}(\psi^{-1}K_\varepsilon)=P_T^{(p)}(K_\varepsilon)>1-\varepsilon$$

をみたす。$\psi^{-1}K_\varepsilon$は,Tに依存しないコンパクト集合であるから,結局$(P_T^{(1)}, T\geq 1)$は相対コンパクト$\Longleftrightarrow$(12.2),(III), QED.

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

文献は本稿に関係の深いものに限る

文 献

[1] T. W. Anderson, The statistical analysis of time series, J. Wiley, N.Y., 1958.

[2] R. Bentkus, On the asymptotic behavior of the spectral function estimation of a mulivariate stationary Gaussian time series, Lit. mat. rink., XI (1971)

[3] ————, On the error of the estimate of the spectral function of a stationary process, 仝上, XII (1972).

[4] ————, On the asymptotic normality of the estimate of the spectral function, 仝上, XII (1972).

[5] P. Billingsley, Convergence of probability measures, J. Wiley, N.Y., 1968.

[6] U. Grenander, M. Rosenblatt, Statistical analysis of stationary time series, J. Wiley, N.Y., 1957.

[7] I. A. Ibragimov, On estimation of the spectral function of a stationary Gaussian process, Theory of Prob. Appl., VIII (1963).

[8] I. A. Ibragimov, Yu. V. Linnik, Independent and stationarily connected variables, Moscow, 1965.

[9] K. Ito, Multiple Wiener integrals, J. Math. Soc. Japan, 3 (1951)

[10] ————, Complex multiple Wiener integral, Jap. J. Math., 22 (1952).

[11] G. Maruyama, A singular flow with countable Lebesgue spectrum, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967).

[12] ————, Nonlinear functionals of Gaussian stationary processes and their applications, Proc. Third Japan—USSR Symposium on Prob. Theory, 1976, Lecture Notes in

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

Math. No.550, Springer.

[13]. D. S. Ornstein, Ergodic theory, randomness, and dynamical systems, Yale Math. Monographs 5, New Haven and London, Yale Univ. P., 1974.

[14] T. M. Tovstik, On the estimation of spectral functions of a class of stationary random processes, Vestnik No.13 (1966)

[15] N. Wiener, The homogeneous chaos, Amer. J. Math., 60(1938).

[16] ———, Nonlinear problems in random theory, J. Wiley, N.Y., 1958.

[17] A. N. Shiryaev, Sur le calcul des sémi-invariants, Theory of Prob. Appl., IV (1959),

Sem. on Probab.
Vol.49 1980年
P1-150

1980年2月　確率論セミナー発行