SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 48

Gaussian Random Fields and Their Sample Paths

河 野 敬 雄

・(高嶋恵三記)

1 9 7 8

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

目次 ページ

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

序

従来，正規確率過程は定常過程の一典型又はブラウン運動の一属性と見られることが多かった。正規確率過程，特にその見本関数の性質について，正規性（任意の有限次元結合分布が正規分布という性質）のみに着目して研究され始めたのは1960年以後のように思われる。1964年 *Fernique* のごく短い論文は正規確率過程の見本関数が確率1で連続関数となる為の十分条件を正規性のみに着目した簡明な考察の下に与えたものであったが，それは Hunt による定常性を仮定した上での条件よりも真によい条件（ほとんど必要条件に近い）であった。その後，任意の集合をパラメーター空間にもつ正規確率場の見本関数の連続性（位相は正規確率場から自然に定義される）の条件を与える問題に発展し，遂に1973年再び *Fernique* によって，正規定常過程の見本関数が連続である為の必要十分条件が与えられたことによって，連続性に関する問題は一通り結着をみた。その間いろいろな結果が発表されたが，この *lecture note* では出来るだけ簡潔にこれらの結果を整理することを心掛けた。

この *lecture note* は河野の昭和52年度前期大阪大学における講義をもとに高嶋が整理したものである。この間講義を聞いて適切な助言をして下さった大阪大学のスタッフ並びに大学院の学生諸氏に感謝します。

昭和52年11月15日　　河野敬雄

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

§1 一次元正規分布

まず記号について。平均0，分散v^2（$v>0$）の一次元正規密度 $g(x, v)$ を，

$$g(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, v} e^{-\frac{x^2}{2v^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

と書くことにする。実数mに対して，$g(x-m, v)$ は平均m，分散v^2の一次元正規密度である。次に $g(x-m, v)$ の特性関数を $\varphi(z, m, v)$ で表わせば，

$$\varphi(z, m, v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} g(x-m, v)\, dx$$

$$= \exp\left\{ imz - \frac{v^2}{2} z^2 \right\}, \qquad z \in \mathbb{R}$$

である。ここで，$v \downarrow 0$ という極限移行を考えると，$\varphi(z, m, v)$ は e^{imz} に広義一様収束する。e^{imz} は $x = m$ に単位質量をもつ，$\mathbb{R}$上の確率測度 $\delta_{\{m\}}$ の特性関数であるから形式的に，

$$\varphi(z, m, 0) = e^{imz}, \qquad z \in \mathbb{R}$$

と書くことにする。

__定義 1.1__ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 $d\mu$ が Gaussian であるとは，実数 m と実数 $v\ (\geqq 0)$ とが存在して $d\mu$ の特性関数が

$$\exp\left\{ imz - \frac{v^2}{2} z^2 \right\}, \quad z \in \mathbb{R}$$

と書けることである。

以後，$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ と書くことにする。

__定義 1.2__ X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{l}, P)$ で定義された$\overline{\mathbb{R}}$-値確率変数とし，かつ

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$P(\{\omega ; |X(\omega)| < \infty\}) = 1$$

であるとする。X が Gaussian であるとは，X の分布 $d\mu_X$ が Gaussian であることである。特に $d\mu_X$ の特性関数が，

$$\exp\{-\frac{v^2}{2}z^2\} \quad , \quad z \in \mathbb{R} \quad , \quad v \geqq 0$$

の形である時，X を centered Gaussian と呼ぶ。以後，Gaussian 確率変数を G.r.v. と略記する。

<u>定理 1.1</u>　X が G.r.v. であるなら，任意の実数 a，b に対して $aX+b$ も又 G.r.v. である。

<u>証明</u>　X の特性関数が，

$$\exp\{imz - \frac{v^2}{2}z^2\} \ , z \in \mathbb{R} \ , \ m \in \mathbb{R} \ , \ v \geqq 0$$

であるならば $aX+b$ の特性関数は，

$$\exp\{iz(am+b) - \frac{v^2}{2}a^2z^2\} \quad , \quad z \in \mathbb{R}$$

であるから，$aX+b$ も G.r.v. である。　　　　（証明終）

<u>定理 1.2</u>　X_n，$n=1,2,\cdots\cdots$，を G.r.v. の列とする。$n \to \infty$ のとき，X_n が確率変数 X に法則収束すると仮定する。この時，次が成り立つ；

(i)　X は G.r.v. である。

(ii)　$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$

<u>証明</u>　$m_n \in \mathbb{R}$，$v_n \geqq 0$，$n=1,2,\cdots$，として X_n の特性関数 φ_n が

$$\varphi_n(z) = \exp\{im_n z - \frac{1}{2}v_n^2 z^2\} \quad , \quad z \in \mathbb{R}$$

であるとする。

(i)　まず，v_n が収束することを示す。X_n が X に法則収束することより，P. Lévy により，$\varphi_n(z)$ は X の特性関数 $\varphi(z)$ に，z について広義一様に収束する。従って

$$|\varphi_n(z)| = e^{-\frac{1}{2}v_n^2 z^2} \longrightarrow |\varphi(z)| \quad , \quad n \longrightarrow \infty$$

となる。φ が特性関数であることから，ある実数 $v \geqq 0$ が

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

存在して，$v_n \longrightarrow v$，$n \longrightarrow \infty$，とならねばならない。

次に m_n の収束を示す。その為に，

$$\psi_n(z) = \varphi_n(z)\, e^{\frac{1}{2} v_n^2 z^2} = e^{i m_n z},$$

$$\psi(z) = \varphi(z)\, e^{\frac{1}{2} v^2 z^2}, \qquad z \in \mathbb{R}$$

と置く。$\varphi_n(z)$ が $\varphi(z)$ に，z について広義一様に収束し，$\lim_{n\to\infty} v_n = v$，であることより，$n \to \infty$ のとき

$\psi_n(z) \longrightarrow \psi(z)$，$z$ について広義一様収束

となる。特に $0 \leqq z \leqq 1$，で一様収束である。そこで，

$$C_n = \{\, \psi_n(z)\ ;\ 0 \leqq z \leqq 1 \,\},$$

$$C = \{\, \psi(z)\ ;\ 0 \leqq z \leqq 1 \,\}$$

とおき，これらの曲線に沿った積分，

$$\int_{C_n} \frac{d\xi}{\xi},$$

を考えると，$\xi = \psi_n(z) = e^{i m_n z}$，より

$$\frac{d\xi}{\xi} = i m_n\, dz,$$

であるから

$$\int_{C_n} \frac{d\xi}{\xi} = i m_n,$$

である。一方，$\psi_n(z)$ が $0 \leqq z \leqq 1$ で $\psi(z)$ に一様収束するから，

$$\int_{C_n} \frac{d\xi}{\xi} \longrightarrow \int_C \frac{d\xi}{\xi}, \qquad n \longrightarrow \infty$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \frac{d\xi}{\xi} = \int_C \frac{d\xi}{\xi} = m.$$

以上により，$\lim_{n\to\infty} v_n = v$，$\lim_{n\to\infty} m_n = m$，が示されたので結局，

$$\varphi(z) = \exp\{\, i m z - \frac{v^2}{2} z^2 \,\}, \quad z \in \mathbb{R}$$

であることになり，X が $G.r.v.$ であることが分る。

(ii) $$E[X_n^2] = E[(X_n - m_n)^2] + m_n^2 = v_n^2 + m_n^2,$$

$$E[X^2] = v^2 + m^2,$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

であることと，nによる

$$E[X_n^2] = v_n^2 + m_n^2 \longrightarrow v^2 + m^2 = E[X^2], \quad n \longrightarrow \infty,$$

である。 (証明終)

§2. 多次元正規分布

dを自然数とする。

<u>定義 2.1</u> $\overline{X} = (X_1, \cdots, X_d)$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ で定義された $\overline{R}^d$－値確率変数とし，$P(|X_i| < \infty, \ i = 1, \cdots, d) = 1$ とする。 $\overline{X}$ が Gaussian であるとは，任意の実数 $z_1, \cdots, z_d$ による1次結合 $z_1 X_1 + \cdots + z_d X_d$ が1次元 G.r.v. になることである。 多次元の場合にも又，G.r.v. と略記することにする。 又，$\overline{X}$ が centered であるとは，各 X_i，$i = 1, \cdots, d$，が centered であることである。

さて，d次元 G.r.v. $\overline{X} = (X_1, \cdots, X_d)$ に対して，定義から，各 X_i，$i = 1, \cdots, d$，はそれぞれ G.r.v. であるから，

$$m_k = E[X_k], \quad k = 1, \cdots, d,$$
$$v_{kl} = E[(X_k - m_k)(X_l - m_l)], \quad k, l = 1, \cdots, d$$
$$\overline{m} = (m_1, \cdots, m_d), \quad V = (v_{kl})_{1 \le k, l \le d}$$

とする時，$\overline{X}$ の特性関数 $\varphi_{\overline{X}}$ は定義より，

$$\varphi_{\overline{X}}(\overline{z}) = E\left[e^{i(\overline{z}, \overline{X})}\right] = \exp\left\{ i(\overline{m}, \overline{z}) - \frac{1}{2}(V\overline{z}, \overline{z}) \right\}$$
$$\overline{z} = (z_1, \cdots, z_d) \in R^d$$

である。但し，$(\cdot, \cdot)$ は R^d の内積である。

$V = (v_{kl})_{1 \le k, l \le d}$，は次の2つの性質をもつ；

(V－1) V は real symmetric である，つまり V の転置行列を V^t で表わせば，$V^t = V$，である。

(V－2) 任意の $\overline{z} \in R^d$ に対して，$(V\overline{z}, \overline{z}) \geqq 0$，が成り立つ。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

以下，上の(V−1)，(V−2)の性質をもつ行列Vを real positive definite matrix と呼び，r.p.d.m. と略記する。

<u>定理 2.1</u>　(G.r.v.の存在定理)　任意の $\overline{m}=(m_1,\cdots,m_d)\in\mathbb{R}^d$ と任意の $d\times d$- r.p.d.m. $V=(v_{k\ell})_{1\le k,\ell\le d}$ とに対して，d 次元 G.r.v. $\overline{X}=(X_1,\cdots,X_d)$ が存在して，$\overline{X}$ の特性関数 $\varphi_{\overline{X}}$ は，

$$\varphi_{\overline{X}}(\overline{z})=\exp\left\{i(\overline{m},\overline{z})-\frac{1}{2}(V\overline{z},\overline{z})\right\},\quad \overline{z}\in\mathbb{R}^d$$

を満たす。

<u>証明</u>　$\mathbb{R}^d$ の平行移動を考えることにより，$\overline{m}=(0,\cdots,0)$ の場合に証明すれば十分である。V が real symmetric であるから，$d\times d$-直交行列 T で，

$$T^tVT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d\end{pmatrix},\quad \lambda_i\geq 0,\ i=1,\cdots,d,$$

となるものが存在する。2つの場合に分けて考える。

(i)　V が正則である場合。　この時には，$\lambda_i>0$，$i=1,\cdots,d$，である。T は直交行列であるから，T の行列式は $\det T=\pm 1$ である。$\mathbb{R}^d$ 上に次の確率密度，

$$g(\overline{x},T^tVT)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sqrt{\det V}}e^{-\frac{1}{2}(T^tVT\overline{x},\overline{x})}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}e^{-\frac{x_i^2}{2\lambda_i}},$$

$$\overline{x}=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$$

を考える。確率空間 $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),g(\overline{x},T^tVT)d\overline{x})$ 上で，各点を自分自身に対応させる確率変数を $\overline{Y}=(Y_1,\cdots,Y_d)$ とする。つまり，$\overline{Y}(\overline{x})=(x_1,\cdots,x_d)$，　$\overline{x}=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$，

$$P(\overline{Y}\in E)=\int_E g(\overline{x},T^tVT)\,d\overline{x},\quad E\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

とする。但し，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ は $\mathbb{R}^d$ の Borel field である。すると，任意の $\overline{z}\in\mathbb{R}^d$ に対して，

$$E\left[e^{i(\overline{z},\overline{Y})}\right]=\exp\left\{-\frac{1}{2}(T^tVT\overline{z},\overline{z})\right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

となるから，$\overline{Y}$ は Gaussian である。$\overline{X}=(X_1,\cdots,X_d)=T\cdot\overline{Y}$，と置けば，任意の $\overline{z}\in\mathbb{R}^d$ に対して，

$$E[e^{i(\overline{z},\overline{X})}]=E[e^{i(\overline{z},T\overline{Y})}]=E[e^{i(T^t\overline{z},\overline{Y})}]$$
$$=\exp\{-\tfrac{1}{2}((T^tVT)(T^t\overline{z}),T^t\overline{z})\}$$
$$=\exp\{-\tfrac{1}{2}(V\overline{z},\overline{z})\}$$

となる。又，$\overline{X}$ が Gaussian であることは，任意の $a_1,\cdots,a_d\in\mathbb{R}$ に対して，$\overline{a}=(a_1,\cdots,a_d)$，$\overline{a}'=(a_1',\cdots,a_d')=T^t\overline{a}$，と置けば，

$$\sum_{k=1}^{d}a_kX_k=(\overline{a},\overline{X})=(\overline{a},T\overline{Y})=(T^t\overline{a},\overline{Y})=\sum_{k=1}^{d}\overline{a}_k'Y_k$$

であることから，$\overline{Y}$ が Gaussian であることより分る。

(ii) V が正則でない場合。この時には，例えば $1<f<d$ があって，$\lambda_i>0$，$i=1,\cdots,f$，$\lambda_j=0$，$j=f+1,\cdots,d$，であると仮定してよい。$\overline{Y}=(Y_1,\cdots,Y_d)$ を $\mathbb{R}^d$ 上に次の様に構成する；$\mathbb{R}^f$ 上の確率密度，

$$g_f(\overline{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{f}{2}}}\prod_{i=1}^{f}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}e^{-\frac{x_i^2}{2\lambda_i}},\quad \overline{x}=(x_1,\cdots,x_f)\in\mathbb{R}^f$$

で決まる確率空間 $(\mathbb{R}^f,\mathcal{B}(\mathbb{R}^f),g_f(\overline{x})d\overline{x})$ と，$\mathbb{R}^{d-f}$ の原点における単位分布 $\delta_{\{0\}}$ による確率空間 $(\mathbb{R}^{d-f},\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d-f}),\delta_{\{0\}})$ とを考え，両者の直積によって得られる確率空間 $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),g_f(\overline{x})d\overline{x}\times\delta_{\{0\}})$ を考える。$\overline{Y}$ を (i) と同様に定義された確率変数とすると明らかに $\overline{Y}$ は Gaussian であるから，(i) と同じく $\overline{X}=T\overline{Y}$，とすれば $\overline{X}$ が求める G.r.v. であることが分る。

(証明終)

<u>定理 2.2</u> (i) X_k，$k=1,\cdots,d$，を互いに独立な 1 次元 G.r.v. とする。この時，$\overline{X}=(X_1,\cdots,X_d)$ は d 次元 G.r.v. である。

(ii) $(X_1,\cdots,X_d)$ が d 次元 G.r.v. であり，$E[X_k]=0$，$k=1,\cdots,d$ かつ，$k\neq l$ なら $E[X_kX_l]=0$ であるとする。この時，X_k，$k=1,\cdots,d$，は互いに独立である。

<u>証明</u> (i) 任意の $z_1,\cdots,z_d\in\mathbb{R}$，に対して $X_1,\cdots,X_d$ が独

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

立であるから，

$$E\left[\exp\left\{i\sum_{k=1}^{d} z_k X_k\right\}\right] = \prod_{k=1}^{d} E\left[e^{iz_k X_k}\right]$$
$$= \prod_{k=1}^{d} \exp\left\{i m_k z_k - \frac{v_k^2}{2} z_k^2\right\}$$

である。但し，X_k は平均 m_k，分散 v_k^2 であるとした。従って，

$$\overline{z} = (z_1, \cdots, z_d), \quad \overline{m} = (m_1, \cdots, m_d),$$
$$V = \begin{pmatrix} v_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_d^2 \end{pmatrix},$$

と置けば

$$E\left[e^{i(\overline{z}, \overline{X})}\right] = \exp\left\{i(\overline{m}, \overline{z}) - \frac{1}{2}(V\overline{z}, \overline{z})\right\}$$

となり，これは $\overline{X}$ が Gaussian であることを示している。

(ii) 仮定より，$E[X_k] = 0$，$k = 1, \cdots, d$，$E[X_k X_\ell] = 0$，$k \neq \ell$，であるから，任意の $\overline{z} = (z_1, \cdots, z_d) \in R^d$ に対して

$$E\left[e^{i(\overline{z}, \overline{X})}\right] = \exp\left\{-\frac{1}{2}(V\overline{z}, \overline{z})\right\},$$

となる。但し，$V = \begin{pmatrix} v_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_d^2 \end{pmatrix}$，$v_k^2 = E[X_k^2]$，$k = 1, \cdots, d$，

である。従って，

$$E\left[e^{i(\overline{z}, \overline{X})}\right] = \prod_{k=1}^{d} e^{-\frac{v_k^2}{2} z_k^2} = \prod_{k=1}^{d} E\left[e^{iz_k X_k}\right]$$

となるが，これは $X_1, \cdots, X_d$ が互いに独立であることを示している。　　　　（証明終）

次に，2次元確率分布で，Gaussian ではないが，周辺分布はともに1次元 Gaussian 分布となるものの例を2つ挙げる。
(*Feller, W.; An Introduction to Probabilitiy Theory and Its Applications, vol. 2*)

<u>例 1)</u> (E. Nelson) $g(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$，$x \in R$，

とし，$u(x)$ は R で定義された奇関数で，$[-1, 1]$ の外では 0 であり，かつ $|u(x)| < (2\pi e)^{-\frac{1}{2}}$，$x \in R$，を満たすものとする。

$$f(x, y) = g(x)g(y) + u(x)u(y), \qquad x, y \in R,$$

とおくと，$f(x, y)$ は R^2 上の確率密度となる。実際，$u(x)u(y) < 0$ となるのは，$xy < 0$ かつ $x, y \in [-1, 1]$ の時のみであるがこの時は，$|u(x)u(y)| < \left((2\pi e)^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = (2\pi e)^{-1}$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

[illegible]，一方 $x, y \in [-1, 1]$ なら

$$g(x)\,g(y) \geqq \left((2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = (2\pi e)^{-1}$$

であるから， $f(x, y) \geqq 0$ ，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$， である。又，

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x)\,g(y)\,dx\,dy + \iint_{\mathbb{R}^2} u(x)\,u(y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} g(x)\,g(y)\,dx\,dy = 1$$

であるから， $f(x, y)$ は確率密度である。一方， $u(x)$ が奇関数であることより， $f(x, y)$ を密度とする分布の周辺分布の密度は，

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,g(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}} u(x)\,u(y)\,dy$$

$$= g(x)$$

となるから，確かに周辺分布は Gaussian である。しかし， $f(x, y)$ を密度とする分布は明らかに 2 次元 Gaussian ではない。

<u>例2</u>　　$0 < r < 1$， とし

$$g(x, y; r) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-r^2)}} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2-2rxy}{2(1-r^2)}\right\}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

とおく。 $V = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$ ， $\overline{x} = (x, y)$ とすると，

$$g(x, y; r) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det V}}\, e^{-\frac{1}{2}(V^{-1}\overline{x}, \overline{x})}$$

と表わされるから $g(x, y; r)$ は 2 次元正規密度であり，その周辺分布はともに $N(0, 1)$ である。つまり， $g(x, y; r)$ を密度とする分布の周辺分布はともに，

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

を密度にもつ。さらに，

$$\iint_{\mathbb{R}^2} xy\, g(x, y; r)\,dx\,dy = r$$

である。そこで $r \neq r'$， $0 < r, r' < 1$， を任意に固定して考え， $f(x, y) = \frac{1}{2}\left(g(x, y; r) + g(x, y; r') \right)$ とおく。
$f(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の確率密度ではあるが，正規密度ではない。なぜなら，もし $f(x, y)$ が正規密度であるとすると，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\iint_{\mathbb{R}^2} xy\ f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}(r+r')$$

であるから，$\bar{x}=(x,y)$，$\bar{u}=(u,v)$ とおく時

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(\bar{u},\bar{x})} f(x,y)\,dx\,dy = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(u^2+(r+r')uv+v^2\right)\right\}$$

でなければならないが，一方，$f(x,y)$ の定義より，

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(\bar{u},\bar{x})} f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(\bar{u},\bar{x})} g(x,y;r)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(\bar{u},\bar{x})} g(x,y;r')\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(u^2+2ruv+v^2\right)\right\} + \frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(u^2+2r'uv+v^2\right)\right\}$$

である。両者は (u,v) の関数として等しくはないから，$f(x,y)$ は正規密度ではあり得ない。しかし，容易に分るように，$f(x,y)$ を密度とする分布の周辺分布はともに $N(0,1)$ である。

§3 正規確率場

<u>定義 3.1</u> $\{X(t);\ t\in T\}$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{O}\!\mathcal{L},P)$ で定義された，$\bar{\mathbb{R}}$－値確率変数の族とし，任意の $t\in T$ に対して，

$P(\ |X(t)|<\infty\ )=1$，であるとする。$\{X(t);\ t\in T\}$ が T 上の Gaussian random field であるとは，任意の自然数 d と任意の $t_1,\cdots,t_d\in T$ とに対して，$(X(t_1),\cdots,X(t_d))$ が d 次元 G.r.v. になることである。Gaussian random field のことを G.r.f. と略記する。

一般に，確率変数の列の収束には次の関係があった；

$$\left.\begin{array}{l}\text{概収束}\longrightarrow\\ L^2\text{-収束}\longrightarrow\end{array}\right.\ \text{確率収束}\longrightarrow\text{法則収束},$$

ここで，例えば "確率収束 ⟶ 法則収束" は，確率変数列 $\{X_n\}_n$ が確率収束することから，$\{X_n\}_n$ が法則収束することが導かれるという意味である。ところが，$\{X_n;\ n=1,2,\cdots\}$ が $T=\{1,2,\cdots\}$ 上の G.r.f. の場合には次の定理により，$\{X_n\}_n$ が確率収束する

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

なら，$\{X_n\}_n$ は L^2-収束することが分る。

定理 3.1　$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ を確率空間とし，$\{X_n ; n=1,2,\cdots\}$ を $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ で定義された G.r.f. とする。ある $A \in \mathfrak{A}$ で，$P(A) > 0$ であるものが存在して，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{n,m\to\infty} P(\{\omega ; |X_n(\omega) - X_m(\omega)| > \varepsilon\} \cap A) = 0$$

を満たすとする。この時 $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ で定義された G.r.v. X が存在して，$n \longrightarrow \infty$ のとき，$X_n \longrightarrow X$ in $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$，
すなわち，$E[|X_n - X|^2] \longrightarrow 0$ であり，かつ $\{X, X_1, X_2, \cdots\}$ が G.r.f. となる。又，このような X は次の意味で唯一である；
$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ で定義された G.r.v. X' が上の性質をもつなら，
$X' = X$, P-a.s. である。

証明　X の存在が示されれば，一意性は明らか。X の存在を言うには，X_n が L^2-収束することを示せばよい。

$m_n = E[X_n]$, $n=1,2,\cdots$, とおく。すると，

$$E[(X_m - X_n)^2] = E[\{(X_m - m_m) - (X_n - m_n)\}^2] + (m_m - m_n)^2$$

であるから，

$$\lim_{n,m\to\infty} (m_n - m_m) = 0 ,$$

かつ

$$\lim_{n,m\to\infty} E[\{(X_m - m_m) - (X_n - m_n)\}^2] = 0$$

を示せばよい。そこで，まず

i) $\lim_{n,m\to\infty} (m_n - m_m) = 0$, が成り立たないと仮定する。すると，部分列 $\{n_k\}$ と $\varepsilon' > 0$ とが存在して

$$| m_{n_k} - m_{n_{k+1}} | = | E[X_{n_k} - X_{n_{k+1}}] | \geqq \varepsilon' , \quad k = 1, 2, \cdots$$

となる。$\{X_n\}_n$ は G.r.f. であるから，部分列 $\{X_{n_k}\}_k$ も又，G.r.f. となる。従って，$(X_{n_k} - X_{n_{k+1}})$ は G.r.v. である。

$$v_{n_k} = E[\{(X_{n_k} - m_{n_k}) - (X_{n_{k+1}} - m_{n_{k+1}})\}^2] , \quad k = 1, 2, \cdots$$

とおき，$\varepsilon_0 > 0$ を，

$$\varepsilon_0 / \varepsilon' \leqq P(A) / (2 + 2P(A)) ,$$

となるようにとれば，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$P(\ |X_{n_k} - X_{n_{k+1}}| \leq \varepsilon_0\ ) = \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} (2\pi v_{n_k})^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(x - m_{n_k} + m_{n_{k+1}})^2}{2 v_{n_k}}\right\} dx$$

$$= \int_{-m_{n_k} + m_{n_{k+1}} - \varepsilon_0}^{-m_{n_k} + m_{n_{k+1}} + \varepsilon_0} (2\pi\ v_{n_k})^{-\frac{1}{2}}\ e^{-\frac{x^2}{2v_{n_k}}}\ dx$$

$$\leq \int_{\varepsilon' - \varepsilon_0}^{\varepsilon' + \varepsilon_0} (2\pi\ v_{n_k})^{-\frac{1}{2}}\ e^{-\frac{x^2}{2v_{n_k}}}\ dx$$

$$\leq 2\varepsilon_0\ (2\pi\ v_{n_k})^{-\frac{1}{2}}\ e^{-\frac{(\varepsilon'-\varepsilon_0)^2}{2v_{n_k}}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\varepsilon_0}{(\varepsilon' - \varepsilon_0)\sqrt{e}} \qquad \left(\because\ x e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}\ ,\ x \geq 0\right)$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon' - \varepsilon_0} \qquad \leq \frac{1}{2} P(A)$$

を得，これより

$$P(\{\omega\ ;\ |X_{n_k}(\omega) - X_{n_{k+1}}(\omega)| > \varepsilon_0\} \cap A)$$

$$\geq 1 - P(\ |X_{n_k} - X_{n_{k+1}}| \leq \varepsilon_0) - P(A^c)$$

$$\geq 1 - \frac{1}{2}P(A) - (1 - P(A)) = \frac{1}{2}P(A) > 0$$

となるが，これは，仮定，

$$\lim_{n,m\to\infty} P(\{\omega\ ;\ |X_n(\omega) - X_m(\omega)| > \varepsilon\} \cap A) = 0\ , \qquad \varepsilon > 0$$

に矛盾する。従って，$\lim_{n,m\to\infty}(m_m - m_n) = 0$，である。

ii) 次に，

$$\lim_{n,m\to\infty} E[\{(X_n - m_n) - (X_m - m_m)\}^2] = 0$$

が成り立たないと仮定する。又，部分列 $\{X_{n_k}\}_k$ と $\varepsilon' > 0$ とが存在して，

$$v_{n_k}^2 \equiv E[\{(X_{n_k} - m_{n_k}) - (X_{n_{k+1}} - m_{n_{k+1}})\}^2] \geq \varepsilon'\ , \quad k = 1, 2, \cdots$$

となる。再び $(X_{n_k} - X_{n_{k+1}})$ が G. r. v. であることに注意すれば，$\varepsilon_0 > 0$ を，$\varepsilon_0/\sqrt{\varepsilon'} \leq \frac{1}{2}P(A)$，ととれば，

$$P(\ |X_{n_k} - X_{n_{k+1}}| \leq \varepsilon_0)$$

$$= \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} (2\pi v_{n_k}^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2v_{n_k}^2}(x - m_{n_k} + m_{n_{k+1}})^2\right\} dx$$

$$\leq 2\int_0^{\varepsilon_0} (2\pi\ v_{n_k}^2)^{-\frac{1}{2}}\ e^{-\frac{x^2}{2v_{n_k}^2}}\ dx$$

$$\leq \frac{2\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi\varepsilon'}} \leq \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\varepsilon'}} \leq \frac{1}{2}P(A)$$

となり，i) と同じく，矛盾が生じる。従って

Sem. on Probab.
Vol.48　1978年
P1-123

$$\lim_{n,m\to\infty} E[\{(X_n - m_n) - (X_m - m_m)\}^2] = 0$$

が成り立つ。以上で，X_n が L^2-収束することが示されたから，その極限を X とおけば，定理1.2により，X は G.r.v. である。$\{X, X_1, X_2, \cdots\}$ が G.r.f. であることを示すには，$(X, X_1, \cdots, X_d)$ が d 次元 G.r.v. であることを示せばよい。これは，$z, z_1, \cdots, z_d$ を実数とする時，$\sum_{k=1}^{d} z_k X_k + z X_n$ が $n \to \infty$ の時，$\sum_{k=1}^{d} z_k X_k + z X$，に L^2-収束することより明らかである。

（証明終）

系　確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ で定義される G.r.f. $\{X(t); t \in T\}$ の $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ における閉包も又 G.r.f. である。

次に，T を集合とし，$\{X(t); t \in T\}$ を $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ で定義された，G.r.f. とする。この時，

$$d_X(s, t) = \sqrt{E[(X(s) - X(t))^2]}, \quad s, t \in T$$

とすると，d_X は T 上の pseudo-*distance* となる。つまり，d_X は次の3つの性質をもつ；

(i)　$d_X(s, t) \geq 0$，$s, t \in T$ かつ $d_X(s, s) = 0$，$s \in T$

(ii)　$d_X(s, t) = d_X(t, s)$，$s, t \in T$

(iii)　$d_X(s, t) \leq d_X(s, u) + d_X(u, t)$，$s, t, u \in T$.

実際，(i)，(ii) は自明であり，(iii) は Minkowski の不等式である。さらに，

$$m(t) = E[X(t)], \quad t \in T$$

$$V(s, t) = E[(X(s) - m(s))(X(t) - m(t))], \quad s, t \in T$$

とおくと，$m(t)$，$V(s, t)$ について次のことが成り立つ。まず，$m(t)$ は t の関数として d_X-連続である。実際，Schwarz の不等式より

$$|m(s) - m(t)| \leq E[|X(s) - X(t)|] \leq \sqrt{E[(X(s) - X(t))^2]} = d_X(s, t)$$

となるからである。次に $V(s,t)$ については，

(V-1)　$V(s, t) = V(t, s)$，$s, t \in T$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

(V−2) 任意の自然数 n と，任意の $t_1, \cdots, t_n \in T$，$z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{R}$ とに対して，$\sum_{j,k=1}^{n} V(t_j, t_k) z_j z_k \geqq 0$，となる，

が成り立つ。上の性質 (V−1), (V−2) を持つ $V(s,t)$ のことを *positive definite kernel* と呼ぶ。さらに，

$$U(s,t) = E[\{(X(s) - m(s)) - (X(t) - m(t))\}^2] \quad, \quad s, t \in T$$

とおくと，$U(s,t)$ は次の2つの性質をもつ；

(U−1) $U(s,t) = U(t,s)$，$s, t \in T$

(U−2) 任意の自然数 n と，任意の $t_1, \cdots, t_n \in T$，及び $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{R}$，で $z_1 + \cdots + z_n = 0$，となるものに対して，$\sum_{j,k=1}^{n} U(t_j, t_k) z_j z_k \leqq 0$，となる。

実際，(U−2) については，$U(s,t) = V(s,s) + V(t,t) - 2V(s,t)$ であることと $V(s,t)$ が *positive definite kernel* であることより分る。　上の性質 (U−1), (U−2) をもつ $U(s,t)$ のことを，*conditionally negative definite kernel* と呼ぶ。

<u>定理 3.2</u>　$\{X_i(t) ; t \in T\}$，$i=1,2$，を T 上の G.r.f. とする。$m_i(t)$，$V_i(s,t)$ は $\{X_i(t) ; t \in T\}$ に対する，上で導入したものとする。この時，$\{X_1(t) ; t \in T\}$ と $\{X_2(t) ; t \in T\}$ とが分布において等しい為の必要十分条件は，

$$m_1(s) = m_2(s) \quad, \quad V_1(s,t) = V_2(s,t) \quad, \quad s, t \in T$$

が成り立つことである。但し，$\{X_1(t)\}_{t \in T}$ と $\{X_2(t)\}_{t \in T}$ とが分布において等しいとは，任意の自然数 n と任意の $t_1, \cdots, t_n \in T$，とに対して，$(X_1(t_1), \cdots, X_1(t_n))$ と $(X_2(t_1), \cdots, X_2(t_n))$ とが同じ分布をもつことである。

<u>証明</u>　$t_1, \cdots, t_n \in T$，を固定して考え，

$$\overline{X}_i = (X_i(t_1), \cdots, X_i(t_n)) \quad, \quad i = 1, 2 \ ,$$

とおく。各 $\overline{X}_i$ は n次元 G.r.v. であるから，その特性関数 $\varphi_i(\overline{z})$，$\overline{z} \in \mathbb{R}^n$，は

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\varphi_i(\vec{z}) = \exp\{ i(\overline{m_i}, \vec{z}) - \tfrac{1}{2}(V_i \vec{z}, \vec{z})\}, \qquad i=1,2$$

である。但し，$\overline{m_i} = (m_i(t_1), \cdots, m_i(t_n))$，$V_i = (V_i(t_j, t_k))_{j,k}$ である。従って，特性関数と分布とは1対1に対応することから，$\overline{X_1}$ と $\overline{X_2}$ が同分布である為の必要十分条件は，

$$m_1(s) = m_2(s), \quad V_1(s,t) = V_2(s,t), \quad s,t \in T$$

である。　(証明終)

§4 Positive definite kernel と conditionally negative definite kernel

定義 4.1　$T\times T$ 上で定義された $\mathbb{R}$-値関数 $R(s,t)$ が，positive definite kernel（以下，p.d.k. と略記する）であるとは，$R(s,t)$ が次の性質をもつことである；

(R-1)　$R(s,t) = R(t,s)$，　$s,t \in T$

(R-2)　任意の自然数 n と任意の $t_1, \cdots, t_n \in T$，$z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{R}$ とに対して，

$$\sum_{j,k=1}^{n} R(t_j, t_k) z_j z_k \geq 0.$$

が成り立つ。

定義 4.2　$T\times T$ 上で定義された $\mathbb{R}$-値関数 $Q(s,t)$ が conditinally negative definite kernel（以下，c.n.d.k と略記する）であるとは，$Q(s,t)$ が次の性質をもつことである；

(Q-1)　$Q(s,t) = Q(t,s)$，　$s,t \in T$

(Q-2)　任意の自然数 n と任意の $t_1, \cdots, t_n \in T$，及び $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{R}$，で $z_1 + \cdots + z_n = 0$ となるものに対して；

$$\sum_{j,k=1}^{n} Q(t_j, t_k) z_j z_k \leq 0$$

が成り立つ。

定理 4.1 (i)　$R(s,t)$ を $T\times T$ 上の p.d.k.，$m(t)$ を T 上で定義された $\mathbb{R}$-値関数とする。この時，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$R'(s,t) = R(s,t) + m(s)\,m(t) \quad , \quad s,t \in T$$

とおくと，$R'(s,t)$ は $T\times T$ 上の p.d.k. となる。

(ii) $Q(s,t)$ を $T\times T$ 上の c.n.d.k.，$f(t)$ を T で定義された $\mathbb{R}$-値関数とする。この時

$$Q'(s,t) = Q(s,t) + f(s) + f(t) \quad , \quad s,t \in T$$

とおくと，$Q'(s,t)$ は $T\times T$ 上の c.n.d.k. となる。又，$R(s,t)$ を $T\times T$ 上の p.d.k. とし，

$$Q''(s,t) = Q(s,t) - R(s,t) \quad , \quad s,t \in T$$

とおくと，$Q''(s,t)$ は $T\times T$ 上の c.n.d.k. となる。

(iii) $R_1(s,t)$，$R_2(s,t)$ を $T\times T$ 上の p.d.k. とし，

$$R'(s,t) = R_1(s,t)\cdot R_2(s,t) \quad , \quad s,t \in T$$

とすると，$R'(s,t)$ は $T\times T$ 上の p.d.k. となる。又，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$，に対して，

$$R''(s,t) = a R_1(s,t) + b R_2(s,t) \quad , \quad s,t \in T$$

とおくと，$R''(s,t)$ は $T\times T$ 上の p.d.k. となる。

(iv) $R(s,t)$ を $T\times T$ 上の p.d.k. とし，$\alpha > 0$ に対して

$$R'(s,t) = e^{\alpha R(s,t)} \quad , \quad s,t \in T$$

とおくと，$R'(s,t)$ は $T\times T$ 上の p.d.k. となる。

<u>証明</u>　この証明においては，$t_1,\cdots,t_n \in T$，$z_1,\cdots,z_n \in \mathbb{R}$，とする。

(i) $R^m(s,t) = m(s)\,m(t) \quad , \quad s,t \in T$

とおくと，容易に分るように，$R^m(s,t)$ は $T\times T$ 上の p.d.k. となる。従って，(i) は (iii) の第2の主張の特別の場合である。

(ii) $z_1 + \cdots + z_n = 0$，あるならば

$$\sum_{j,k=1}^{n} Q'(t_j,t_k)\,z_j z_k = \sum_{j,k=1}^{n} \{ Q(t_j,t_k) + f(t_j) + f(t_k) \}\, z_j z_k$$

$$= \sum_{j,k}^{n} Q(t_j,t_k) z_j z_k + \sum_{j=1}^{n} f(t_j) z_j \Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\Big) + \sum_{k=1}^{n} f(t_k) z_k \Big(\sum_{j=1}^{n} z_j\Big)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} Q(t_j,t_k) z_j z_k \leqq 0 .$$

従って，$Q'(s,t)$ は c.n.d.k. である。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

(ii) さて，第2の主張を証明する。 $a, b \geqq 0$ より，

$$\sum_{j,k=1}^{n} R''(t_j, t_k) z_j z_k = a \sum_{j,k=1}^{n} R_1(t_j, t_k) z_j z_k + b \sum_{j,k=1}^{n} R_2(t_j, t_k) z_j z_k \geqq 0$$

であるから，$R'(s,t)$ は p.d.k. である。

次に，$R'(s,t) = R_1(s,t) R_2(s,t)$, $s, t \in T$, が p.d.k. であることを示す。そのためには，2つの r.p.d.m. $V_1 = (v_{ij}^{(1)})_{1 \leq i,j \leq n}$, $V_2 = (v_{ij}^{(2)})_{1 \leq i,j \leq n}$, に対して，real symmetric matrix $V = (v_{ij}^{(1)} v_{ij}^{(2)})_{1 \leq i,j \leq n}$ が又，r.p.d.m. となることを示せばよい。定理2.1により，適当な確率空間 $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ で定義された centered G.r.v. $X_1^{(1)}, \cdots, X_n^{(1)}$, $X_1^{(2)}, \cdots, X_n^{(2)}$, が存在して

$$v_{ij}^{(l)} = E[X_i^{(l)} X_j^{(l)}], \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad l = 1, 2$$

となる。$\{X_1^{(l)}, \cdots, X_n^{(l)}\}$ によって張られる，$L^2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ の n 次元ベクトル空間を $\mathbb{V}^{(l)}$, $l = 1, 2$, とする。$\mathbb{V}^{(l)}$ は $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ の部分空間であるから，自然に内積空間である。その内積を，$(\cdot, \cdot)_l$, $l = 1, 2$, と書く。$\mathbb{V}^{(1)}$ と $\mathbb{V}^{(2)}$ のテンソル積を $\mathbb{V}$ で表わす。$\mathbb{V}$ の2元 $X \otimes Y$, $X' \otimes Y'$, $X, X' \in \mathbb{V}^{(1)}$, $Y, Y' \in \mathbb{V}^{(2)}$, に対し

$$(X \otimes Y, X' \otimes Y')_{1 \otimes 2} = (X, X')_1 \cdot (Y, Y')_2$$

と定義すると，$(\cdot, \cdot)_{1 \otimes 2}$ は容易に確かめられるように，$\mathbb{V}$ の内積となる。$E[X_i^{(l)} X_j^{(l)}] = (X_i^{(l)}, X_j^{(l)})_l = v_{ij}^{(l)}$, であるから，

$$\sum_{j,k=1}^{n} v_{jk}^{(1)} v_{jk}^{(2)} z_j z_k = \sum_{j,k=1}^{n} (X_j^{(1)}, X_k^{(1)})_1 \cdot (X_j^{(2)}, X_k^{(2)})_2 \, z_j z_k$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} (X_j^{(1)} \otimes X_j^{(2)}, X_k^{(1)} \otimes X_k^{(2)})_{1 \otimes 2} \, z_j z_k$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} z_j X_j^{(1)} \otimes X_j^{(2)}, \sum_{k=1}^{n} z_k X_k^{(1)} \otimes X_k^{(2)} \right)_{1 \otimes 2} \geqq 0$$

となり，これは $V = (v_{ij}^{(1)} v_{ij}^{(2)})_{1 \leq i,j \leq n}$, r.p.d.m. であることを示している。従って，$R'(s,t)$ は p.d.k. である。

(別証) 上述と同じく，2つの r.p.d.k. $V_l = (v_{ij}^{(l)})_{1 \leq i,j \leq n}$, $l = 1, 2$, に対し $V = (v_{ij}^{(1)} v_{ij}^{(2)})_{1 \leq i,j \leq n}$ が r.p.d.k. となることを示す。定理2.1により，centered G.r.v. $X_1^{(1)}, \cdots, X_n^{(1)}$, $X_1^{(2)}, \cdots, X_n^{(2)}$ が存在して，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$v_{ij}^{(\ell)} = E[X_i^{(\ell)} X_j^{(\ell)}] \quad , 1 \le i, j \le n \, , \quad \ell = 1, 2$$

となるが、$\overline{X}^{(\ell)} = (X_1^{(\ell)}, ---, X_n^{(\ell)})$, $\ell=1,2$, とおくとき、$\overline{X}^{(1)}$ と $\overline{X}^{(2)}$ とは独立であるとしてよい。$\overline{X} = (X_1^{(1)}X_1^{(2)}, ---, X_n^{(1)}X_n^{(2)})$ とおく。すると、$\overline{X}$ は V を covariance matrix にもつ R^n-値確率変数となる。実際、

$$E[(X_i^{(1)}X_i^{(2)})(X_j^{(1)}X_j^{(2)})] = E[X_i^{(1)}X_j^{(1)}]E[X_i^{(2)}X_j^{(2)}] = v_{ij}^{(1)} v_{ij}^{(2)}$$

であるからである。従って、V が n.p.d.m. となることが分る

(iv) $\displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} R'(t_j, t_k) z_j z_k = \sum_{j,k=1}^{n} \exp\{\alpha R(t_j, t_k)\} z_j z_k$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} z_j z_k \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\alpha R(t_j, t_k))^m \right)$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!} \left(\sum_{j,k=1}^{n} (\alpha R(t_j, t_k))^m z_j z_k \right)$$

(iii) より、$\alpha > 0$ であるなら、$(\alpha R(s,t))^m$ も p.d.k. となる。従って、$\displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} (\alpha R(t_j, t_k))^m z_j z_k \ge 0$ 。これより、$R'(s,t)$ が p.d.k. であることが分る。 (証明終)

<u>定理 4.2</u> (i) T×T 上の p.d.k. $R(s,t)$ に対して、

$$Q^R(s,t) = R(s,s) - 2R(s,t) + R(t,t) \quad , \quad s,t \in T$$

とおく。すると、$Q^R(s,t)$ は c.n.d.k. であり、かつ

(Q-3) $\quad Q^R(t,t) = 0 \quad , \quad t \in T$

を満たす。

(ii) $Q(s,t)$ を T×T 上の c.n.d.k. とし、かつ

(Q-3₀) T の元 0 が存在して、$Q(0,0) = 0$ 、となる。

が成り立つとする。この時、

$$R^Q(s,t) = \frac{1}{2}\{Q(s,0) + Q(0,t) - Q(s,t)\} \quad , \quad s,t \in T$$

とおけば、$R^Q(s,t)$ は p.d.k. であり、かつ

(R-3) $\quad R^Q(s,0) = 0 \quad , \quad s \in T$

を満たす。

<u>証明</u> (i) $Q^R(s,t)$ が (Q-3) を満たすことは明らかである。$Q^R(s,t)$ が c.n.d.k. であることを示す。$t_1, ---, t_n \in T$, とし

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{R}$, $z_1 + \cdots + z_n = 0$ とする。

$$\sum_{j,k=1}^{n} Q^R(t_j, t_k) z_j z_k$$

$$= \sum_{j=1}^{n} R(t_j,t_j) z_j \left(\sum_{k=1} z_k\right) + \sum_{k=1}^{n} R(t_k,t_k) z_k \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) - 2 \sum_{j,k=1}^{n} R(t_j,t_k) z_j z_k$$

$$= -2 \sum_{j,k=1}^{n} R(t_j, t_k) z_j z_k \leq 0.$$

よって，$Q^R(s,t)$ は c.n.d.k. である。

(ii) $R^Q(s,t)$ が (R−3) を満たすことは，$Q(s,t)$ が $(Q-3_0)$ を満たすことより明らか。$R^Q(s,t)$ が p.d.k. であること示す。

$t_1, \cdots, t_n \in T$, $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{R}$ とする。

(1) $0 \notin \{t_1, \cdots, t_n\}$ の場合；この時は，$m = \sum_{j=1}^{n} z_j$, $t_0 = 0$, $z_0 = -m$，とおく。$R^Q(s,t)$ が (R−3) を満たすことより

$$\sum_{j,k=1}^{n} R^Q(t_j, t_k) z_j z_k = \sum_{j,k=0}^{n} R^Q(t_j, t_k) z_j z_k$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j,k=0}^{n} \{ Q(t_j, 0) + Q(0, t_k) - Q(t_j, t_k) \} z_j z_k$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j,k=0}^{n} Q(t_j, t_k) z_j z_k \geq 0, \quad \left(\because \sum_{j=1}^{n} z_j = 0\right)$$

(2) $0 \in \{t_1, \cdots, t_n\}$ の場合；番号をつけかえることにより，$t_n = 0$，$t_j \neq 0$，$j = 1, \cdots, n-1$，としてよい。$R^Q(s,t)$ が (R−3) を満たすことより，z_n の値を変えても，$\sum_{j,k=1}^{n} R^Q(t_j,t_k) z_j z_k$ の値は変わらない。従って，$z_n = -\sum_{j=1}^{n-1} z_j$，とすれば (1) と同様にして，$\sum_{j,k=1}^{n} R^Q(t_j,t_k) z_j z_k \geq 0$，が得られる。

以上により，$R^Q(s,t)$ が p.d.k. であることが示された。

（証明終）

<u>系</u> (i) $R(s,t)$ は $T \times T$ 上の p.d.k. で，かつ (R−3) を満たすとする。つまり，T の元 0 が存在して，$R(t,0) = 0$，$t \in T$，となるとする。この時，$R^{(Q^R)} = R$，が成り立つ。

(ii) $Q(s,t)$ は $T \times T$ 上の c.n.d.k. でかつ，(Q−3) を満たすとする。この時，$Q^{(R^Q)} = Q$，が成り立つ。

<u>証明</u> (i) まず，$R(s,t)$ が (R−3) を満たすことより，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$Q^R(s,t)$ は $(Q\text{-}3_0)$ を満たすから，$R^{(Q^R)}$ は定義される。そして，

$$
\begin{aligned}
R^{(Q^R)}(s,t) &= \frac{1}{2}\{Q^R(s,0)+Q^R(0,t)-Q^R(s,t)\}\\
&= \frac{1}{2}\{R(s,s)+R(0,0)-2R(s,0)+R(0,0)+R(t,t)\\
&\qquad -2R(0,t)-R(s,s)-R(t,t)+2R(s,t)\}\\
&= R(s,t)
\end{aligned}
$$

となる。

(ii) まず，$Q(s,t)$ が $(Q\text{-}3)$ を満たすことより，明らかに，$(Q\text{-}3_0)$ も満たす。従って，$Q^{(R^Q)}$ は定義される。そして，

$$
\begin{aligned}
Q^{(R^Q)}(s,t) &= R^Q(s,s)+R^Q(t,t)-2R^Q(s,t)\\
&= \frac{1}{2}\{Q(s,0)+Q(0,s)-Q(s,s)\}+\frac{1}{2}\{Q(t,0)+Q(0,t)\\
&\qquad -Q(t,t)\}-\{Q(s,0)+Q(0,t)-Q(s,t)\}\\
&= Q(s,t)
\end{aligned}
$$

となる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

<u>定理 4.3</u>　$Q(s,t)$ が $T\times T$ 上の c.n.d.k. であることと，任意の $\alpha>0$ に対して，$e^{-\alpha Q(s,t)}$ が $T\times T$ 上の p.d.k. であることとは同値である。

<u>証明</u>　まず，$Q(s,t)$ が c.n.d.k. であると仮定する。T の元を1つ固定して考え，それを 0 とする。

$$Q_0(s,t)=Q(s,t)-Q(0,0)\quad,\quad s,t\in T$$

で $Q_0(s,t)$ を定義すれば，$Q_0(s,t)$ は c.n.d.k. でかつ，$(Q\text{-}3_0)$ を満たす。従って，$R^{Q_0}(s,t)$ が定義できて，これは $(R\text{-}3)$ を満たす。定義より，

$$R^{Q_0}(s,t)=\frac{1}{2}\{Q_0(s,0)+Q_0(0,t)-Q_0(s,t)\}$$

従って，$Q_0(s,t)=-2R^{Q_0}(s,t)+Q_0(s,0)+Q_0(0,t)$,

$$Q(s,t)=-2R^{Q_0}(s,t)+Q_0(s,0)+Q_0(0,t)+Q(0,0)$$

である。$t_1,\cdots,t_n\in T$，$z_1,\cdots,z_n\in\mathbb{R}$，とすると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,k=1}^{n} e^{-\alpha Q(t_j,t_k)}z_jz_k\\
&=\sum_{j,k=1}^{n} e^{2\alpha R^{Q_0}(t_j,t_k)}e^{-\alpha Q_0(t_j,0)}e^{-\alpha Q_0(0,t_k)}e^{-\alpha Q(0,0)}z_jz_k
\end{aligned}
$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$= e^{-\alpha Q(0,0)} \sum_{j,k=1}^{n} e^{2\alpha R^{Q_0}(t_j,t_k)} \left(z_j e^{-\alpha Q_0(t_j,0)}\right)\left(z_k e^{-\alpha Q_0(0,t_k)}\right)$$

$R^{Q_0}(s,t)$ は p.d.k. であるから，定理4.1 の(iv)より $e^{2\alpha R^{Q_0}(s,t)}$ も p.d.k. である。従って，上の右辺は非負であり，$e^{-\alpha Q(s,t)}$ は p.d.k. となる。

次に，任意の $\alpha > 0$，に対して $e^{-\alpha Q(s,t)}$ が p.d.k. となることを仮定する。まず $x \in \mathbb{R}$．に対して

$$e^{-\alpha x} = 1 - \alpha x - \alpha^2 \int_0^x (x-u)\, e^{-\alpha u}\, du$$

が成り立つことに注意する。$z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{R}$，$z_1 + \cdots + z_n = 0$，に対して，

$$\sum_{j,k=1}^{n} e^{-\alpha Q(t_j,t_k)} z_j z_k$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \left\{ 1 - \alpha Q(t_j,t_k) - \alpha^2 \int_0^{Q(t_j,t_k)} (Q(t_j,t_k) - u)\, e^{-\alpha u}\, du \right\} z_j z_k$$

$$= -\alpha \sum_{j,k=1}^{n} Q(t_j,t_k) z_j z_k - \alpha^2 \sum_{j,k=1}^{n} \left\{ \int_0^{Q(t_j,t_k)} (Q(t_j,t_k)-u)\, e^{-\alpha u}\, du \right\} z_j z_k$$

となる。$t_1, \cdots, t_n$，$z_1, \cdots, z_n$ を固定して考えると，$\alpha \downarrow 0$，の時，$\left| \sum_{j,k=1}^{n} \left\{ \int_0^{Q(t_j,t_k)} (Q(t_j,t_k) - u)\, e^{-\alpha u}\, du \right\} z_j z_k \right|$，は定数で上から評価できる。一方，仮定より $e^{-\alpha Q(s,t)}$ は p.d.k. であるから，

$$0 \le -\sum_{j,k=1}^{n} Q(t_j,t_k) z_j z_k - O(\alpha), \qquad \alpha \downarrow 0$$

これより，$Q(s,t)$ が c.n.d.k. であることが分る。（証明終）

次に，p.d.k.，c.n.d.k. の例を挙げる。

<u>例1</u>　$(S, \mathcal{B}, m)$ を測度空間とし，

$$T = \{ A \in \mathcal{B} \;;\; m(A) < \infty \},$$
$$R(A, B) = m(A \cap B),$$
$$Q(A, B) = m(A \ominus B), \qquad A, B \in T,$$

とおく。但し，$A \ominus B$ は A と B の symmetric difference である。この時，$R(A,B)$ は $T \times T$ 上の p.d.k. となり，$Q(A,B)$ は c.n.d.k. であり，かつ (Q-3) を満たすことが分る。

実際，$Q^R = Q$，となるから，$R(A,B)$ が p.d.k. であることを示せばよい。$A_1, \cdots, A_n \in T$，$z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{R}$，に対して，

$$\sum_{j,k=1}^{n} R(A_j, A_k) z_j z_k = \sum_{j,k=1}^{n} z_j z_k \int I_{A_j}(s)\, I_{A_k}(s)\, m(ds)$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$= \int \left(\sum_{j=1}^{n} z_j I_{A_j}(s)\right)^2 m(ds) \geq 0.$$

となる。但し，I_A は A の indicator である。

例2　$Q(x)$, $0 \leq x < \infty$, を実数値関数とし，$Q(0) = 0$ とする。$Q(s,t) = Q(|s-t|)$, $s, t \in R$, とする時，$Q(s,t)$ が R^2 上の c.n.d.k. となる為の必要十分条件は 任意の $\alpha > 0$ に対して，$\varphi_\alpha(t) = e^{-\alpha Q(|t|)}$, $t \in R$, が positive definite function になることである。実際，$\varphi_\alpha(t)$ が，

$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi_\alpha(t_j - t_k) z_j z_k \geq 0, \quad t_1, \cdots, t_n, z_1, \cdots, z_n \in R$$

を満たすことは，$e^{-\alpha Q(s,t)}$ が p.d.k. となることと同じであり，定理 4.3 より，これは $Q(s,t)$ が c.n.d.k. となることと同値である。

さらに，$\varphi_\alpha(t)$ が positive definite function であるなら，Fourier 解析の Bochner の定理により，$\varphi_\alpha(t)$ は R 上のある確率分布の特性関数になる。とくに，$\varphi(t) = e^{-Q(|t|)}$ に対応する分布は infinitely divisible である。infinitely divisible な分布に対する，P. Lévy の標準表現により，$Q(|t|)$ が実数値であることに注意すれば，

$$Q(|s-t|) = \frac{v^2}{2}|s-t|^2 + 4\int_0^\infty \sin^2\left(\frac{|s-t|u}{2}\right) dn(u)$$

となる。ここに，$v > 0$，であり，$dn(u)$ は R 上の測度で，

$$\int_{\{u;\,|u| \geq 1\}} dn(u) < \infty, \quad \int_{\{u;\,|u| \leq 1\}} u^2\, dn(u) < \infty$$

を満たす。特に，

$$Q(|s-t|) = |s-t|^\alpha, \qquad 0 < \alpha \leq 2$$

なら，$Q(s,t) = Q(|s-t|)$, は c.n.d.k. である。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

§5 Reproducing kernel Hilbert space

$T\ (\neq \phi)$ を parameter set とし，$T\times T$ 上の p.d.k. $R(s,t)$ を考える。$R(s,t)$ が p.d.k. であるから，

$$Q^R(s,t) = R(s,s)+R(t,t)-2R(s,t) \geqq 0, \quad s,t\in T$$

である。そこで，

$$d_R(s,t) = \sqrt{Q^R(s,t)} = \sqrt{R(s,s)+R(t,t)-2R(s,t)}, \quad s,t\in T$$

で，$d_R(s,t)$ を定義する。すると，$d_R(s,t)$ は $T\times T$ 上の pseudo-distance となる。すなわち，

i) $d_R(s,s)=0, \quad s\in T$

ii) $d_R(s,t) = d_R(t,s), \quad s,t\in T$

iii) $d_R(s,t) \leqq d_R(s,u)+d_R(u,t), \quad s,t,u\in T$

が成り立ち，さらに，

$$|R(s,u)-R(t,u)| \leqq d_R(s,t)\sqrt{R(u,u)}, \quad s,t,u\in T$$

も成り立つ。

<u>証明</u>　i)，ii) は明らかであるから，iii) を示す。$t_1=s$，$t_2=t$，$t_3=u$，とし，任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して，$z_1=\alpha$，$z_2=-1$，$z_3=-\alpha+1$，とおく。$R(s,t)$ が p.d.k. であるから，

$$0\leqq \sum_{j,k=1}^{3} z_j z_k R(t_j,t_k)$$
$$= \alpha^2 d_R^2(s,u)+2\alpha\{R(s,u)+R(u,t)-R(u,u)-R(s,t)\}+d_R^2(u,t)$$

となる。これが任意の α に対して成り立つ為には，

$$\{R(s,u)+R(u,t)-R(u,u)-R(s,t)\}^2 \leqq d_R^2(s,u)\cdot d_R^2(u,t)$$

従って，

$$|R(s,u)+R(u,t)-R(u,u)-R(s,t)| \leqq d_R(s,u)\cdot d_R(u,t)$$

これより，

$$\{d_R(s,u)+d_R(u,t)\}^2-d_R^2(s,t)$$
$$=2d_R(s,u)\cdot d_R(u,t)-2\{R(s,u)+R(u,t)-R(u,u)-R(s,t)\}$$
$$\geqq 0,$$

従って，$d_R(s,t)\leqq d_R(s,u)+d_R(u,t)$，が得られる。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

次に，$t_1=s$，$t_2=t$，$t_3=u$，$z_1=1$，$z_2=-1$，$z_3=\alpha$，として再び $R(s,t)$ が p.d.k. であることにより，

$$0 \leqq \sum_{j,k=1}^{3} z_j z_k R(t_j,t_k)$$
$$= \alpha^2 R(u,u) + 2\alpha\{R(s,u)-R(t,u)\} + d_R^2(s,t)$$

を得，前と同様にして，

$$|R(s,u)-R(t,u)| \leqq d_R(s,t)\cdot\sqrt{R(u,u)}$$

を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

次に，pre-Hilbert space $\mathscr{H}_0$，を

$$\mathscr{H}_0=\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k R(t_k,\cdot)\ ;\ n\in\mathbb{N},\ a_k\in\mathbb{R},\ t_k\in T,\ k=1,\cdots,n\right\}$$

で定義する。但し，例えば $R(t,\cdot)$ は‘$\cdot$’を変数とするT上の関数の意味である。$\mathscr{H}_0$ に内積を定義する。

$m,m'\in\mathscr{H}_0$ が

$$m(\cdot)=\sum_{j=1}^{n} a_j R(t_j,\cdot)\ ,\quad m'(\cdot)=\sum_{j=1}^{n'} a'_j R(t'_j,\cdot)$$

と表わされる時，

$$(m,m')=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n'} a_j a'_k R(t_j,t'_k)$$

と定義すると，$(\cdot,\cdot)$ は内積となる。

証明　対称性や双線型性は明らかであるから，

$(m,m)\geqq 0$，$m\in\mathscr{H}_0$，

$(m,m)=0 \iff m(\cdot)\equiv 0$，

及び，(m,m') の値が，m，m' の表現の仕方に無関係であることを示せばよい。

$$m(\cdot)=\sum_{j=1}^{n} a_j R(t_j,\cdot)\ \in\mathscr{H}_0\ ,$$

とすれば，$R(s,t)$ が p.d.k. であることより

$$(m,m)=\sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k R(t_j,t_k)\geqq 0$$

が分る。又，この非負性より，Schwarz の不等式が成り立つから，$(m,m)=0$，とすれば，一般に，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$m(t) = (m(\cdot), R(t,\cdot)), \quad t \in T,$$

が成り立つことにより，

$$|m(t)| = |(m(\cdot), R(t,\cdot))| \leq \|m\| \cdot \|R(t,\cdot)\| = 0,$$

となる。但し，$\|f\| = \sqrt{(f,f)}$，$f \in \mathcal{H}_0$，である。

逆に，

$$m(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} a_j R(t_j,\cdot) \equiv 0,$$

とすると，

$$(m, m) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_j R(t_j, t_k) \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k m(t_k) = 0.$$

となる。又，(m, m') の値が m, m' の表現の仕方に無関係なことを示すには，$m(\cdot) \equiv 0$ なら $(m, m') = 0$，$m' \in \mathcal{H}_0$，を言えばよいが，これは，Schwarzの不等式より，

$$|(m, m')| \leq \|m\| \cdot \|m'\| = 0,$$

であるからよい。　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

以上により，$\mathcal{H}_0$ が pre-Hilbert space になることが分ったから，$\mathcal{H}_0$ をノルム $\|\cdot\|$ で完備化して，Hilbert space $\mathcal{H}$ を得る。$\mathcal{H}$ の定義より，任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して，$\mathcal{H}_0$ の Cauchy 列 $\{m_n\}_{n=1,2,\cdots}$ で f に収束するものが存在する。先の証明において示したように，

$$m(t) = (m, R(t,\cdot)), \quad m \in \mathcal{H}_0, \quad t \in T$$

が成り立つから，

$$(f, R(t,\cdot)) = \lim_{n\to\infty} (m_n, R(t,\cdot)) = \lim_{n\to\infty} m_n(t), \quad t \in T$$

となる。実際，Schwarz の不等式により，

$$|m_n(t) - m_{n'}(t)| \leq \|m_n - m_{n'}\| \, \|R(t,\cdot)\|$$

が成り立つから，$\lim_{n\to\infty} m_n(t)$ の存在が分る。そこで，

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} m_n(t), \quad t \in T$$

と定義する。これが，$\{m_n\}_n$ の選び方に無関係であることは明らかである。この定義より，

$$f(t) = (f, R(t,\cdot)), \quad t \in T, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

が成り立つことも分る。そこで，$f \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}|f(s)-f(t)| &= |(f,\ R(s,\cdot)-R(t,\cdot))| \\ &\leq \|f\|\cdot\|R(s,\cdot)-R(t,\cdot)\| \\ &= \|f\|\cdot d_R(s,t) \quad , \quad s,t \in T\end{aligned}$$

となるから，$f \in \mathcal{H}$ に対して，$f(t)$ は pseudo-metric space (T, d_R) 上の一様連続関数であることが分る。
又，$f \in \mathcal{H}$ に対して，

$$0 = f(s) = (f, R(s,\cdot)) \quad , \quad s \in T$$

であるとすると，$\{R(t,\cdot)\ ;\ t \in T\}$ の線型結合 $\mathcal{H}_0$ は $\mathcal{H}$ で dense であるから，f は $\mathcal{H}$ の元として 0 でなければならない。すなわち，

$$f(t)=0,\ t \in T,\ \text{ならば}\ f=0 \in \mathcal{H},$$

である。よって，$f \in \mathcal{H}$ は，

$$f(t) = (f, R(t,\cdot)) \quad , \quad t \in T$$

と同一視することにより，(T, d_R) 上の一様連続関数とみなせる。以上で構成した Hilbert space $\mathcal{H}$ を，$R(s,t)$ を reproducing kernel にもつ，reproducing kernel Hilbert space と呼ぶ。

<u>定理 5.1</u>　$R(s,t)$ を $T\times T$ 上の p.d.k. とする。この時，(T, d_R) が separable な pseudo-metric space である為の必要十分条件は，$R(s,t)$ を reproducing kernel にもつ，reproducing kernel Hilbert space $\mathcal{H}$ が separable であることである。

<u>証明</u>　まず (T, d_R) が separable であると仮定する。T の可算部分集合 S で，S は (T, d_R) で dense であるものが存在する。

$$\mathcal{H}_S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k R(s_k,\cdot)\ ;\ n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{Q},\ s_k \in S,\ k=1,\cdots,n \right\}$$

とおく。但し，$\mathbb{Q}$ は有理数全体を，$\mathbb{N}$ は自然数全体を表わす。
$\|R(s,\cdot)-R(t,\cdot)\| = d_R(s,t)$，であったから，$\mathcal{H}_S$ が $\mathcal{H}_0$ で

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

dense となることが分る。従って，$\mathcal{H}_S$ は $\mathcal{H}$ で dense となり，$\mathcal{H}$ は separable である。

逆に，$\mathcal{H}$ が separableであると仮定する。可算個の $\mathcal{H}$ の元 f_n, $n=1,2,\cdots$, がとれて $\{f_n\}_n$ が $\mathcal{H}$ で dense となる。この時，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B(f_k,\tfrac{1}{n}) \supset \mathcal{H} \supset \{R(t,\cdot)\ ;\ t\in T\}$$

である。但し，$B(f,\varepsilon)=\{g\in\mathcal{H}\ ;\ \|f-g\|<\varepsilon\}$，とする。そこで，もし $B(f_k,\frac{1}{n})\cap\{R(t,\cdot)\ ;\ t\in T\}\neq\phi$ であれば，

$t_k^n\in T$ を，$R(t_k^n,\cdot)\in B(f_k,\frac{1}{n})$，となるように取る。この様にして選んだ t_k^n の全体を S とすれば，明らかに S は可算集合である。$\{f_n\}_n$ の定義により，任意の $s\in T$，$n\in\mathbb{N}$ に対して，$B(f_k,\frac{1}{n})\ni R(s,\cdot)$ となる f_k が存在する。この時には，$t_k^n\in S$ が存在して，かつ

$$\begin{aligned} d_R(s,t_k^n) &= \|R(s,\cdot)-R(t_k^n,\cdot)\| \\ &\leq \|R(s,\cdot)-f_k\| + \|f_k-R(t_k^n,\cdot)\| \\ &< \frac{2}{n} \end{aligned}$$

となるから，S は (T,d_R) で dense である。

（証明終）

§6 正規確率場の存在

T 上の G.r.f. $\{X(t)\ ;\ t\in T\}$ から，平均 $m(t)$ と p.d.k. $V(s,t)$ とが得られるが，逆に T 上に $m(t)$ と p.d.k. $R(s,t)$ とが与えられている時，$m(t)$ を平均に，$R(s,t)$ を covariance にもつ G.r.f. の存在を主張するのが，次の定理である。

<u>定理 6.1</u> $m(t)$, $t\in T$, は実数値関数とし，$R(s,t)$ は $T\times T$ 上の p.d.k. とする。$m(t)$, $R(s,t)$ に対して，T 上の G.r.f. $\{X(t)\ ;\ t\in T\}$ で次を満たすものが存在する；

$$E[X(t)] = m(t),\quad t\in T,$$
$$E[(X(s)-m(s))(X(t)-m(t))] = R(s,t),\quad s,t\in T.$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

<u>証明</u> $\mathcal{H}$ を，$R(s,t)$ を reproducing kernel にもつ，reproducing kernel Hilbert space とする。$\{\varphi_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathcal{H}$ の complete orthonormal system とする。（Λ は可算集合であるとは限らない。） すると，

$f \in \mathcal{H}$ は $\{\varphi_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ によって，次の様に表わされる。

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} (f, \varphi_\lambda)\, \varphi_\lambda$$

但し，右辺の和は，実際には高々可算個の $\lambda \in \Lambda$ に対する和となる。 次に，適当な確率空間 $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L}, P)$ 上に確率変数列 $\{\xi_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ を，各 ξ_λ は正規分布 $N(0,1)$ に従い，かつ互いに独立であるようにとる。 さて，$t \in T$ に対して

(1) $R(t,\cdot) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (R(t,\cdot), \varphi_\lambda)\, \varphi_\lambda(\cdot) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(t)\, \varphi_\lambda(\cdot)$

であるから，$(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L}, P)$ 上に，確率変数 $Y(t)$ を，

(2) $Y(t) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(t)\, \xi_\lambda$, P-a.s.

で定義する。但し，(2)式の右辺の和は，(1)式の右辺の和に寄与するところの，高々可算個の $\lambda\in\Lambda$ に対して和をとるものとする。 $Y(t)$ が(2)式で定義できることは，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$，を(1)式の右辺の和に寄与する，$\Lambda$ の元とする時，

$$E\Big[\Big(\sum_{k=1}^{m} \varphi_{\lambda_k}(t)\, \xi_{\lambda_k}\Big)^2\Big] = \sum_{k=1}^{m} \varphi_{\lambda_k}^2(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{\lambda_k}^2(t) = R(t,t)$$

であるから，$m \to \infty$ の時，$\sum_{k=1}^{m} \varphi_{\lambda_k}(t)\, \xi_{\lambda_k}$ が $L^2(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L}, P)$ で収束することから分る。

この時，$t_1, \cdots, t_m \in T$ に対して，$(Y(t_1), \cdots, Y(t_m))$ が G.r.v. であることが，次の様にして示される。$z_1, \cdots, z_m \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{m} z_i Y(t_i) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \xi_\lambda \Big(\sum_{i=1}^{m} z_i \varphi_\lambda(t_i)\Big), \quad P\text{-a.s.}$$

であるから，右辺が $L^2(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L}, P)$ で収束することと，各 ξ_λ が互いに独立な G.r.v. であることより，左辺は G.r.v. である。従って，$(Y(t_1), \cdots, Y(t_m))$ は G.r.v. である。

これより，$\{Y(t) ; t \in T\}$ は T 上の centered G.r.f. である。又，$s, t \in T$ に対して，各 ξ_λ が互いに独立であるから，

$$E[Y(s)Y(t)] = E\Big[\sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(s)\, \varphi_\lambda(t)\, \xi_\lambda^2\Big]$$
$$= \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(s)\, \varphi_\lambda(t) = R(s,t).$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

が成り立つ。従って、 $X(t)=Y(t)+m(t),\ t\in T$, とおけば $\{X(t);t\in T\}$ が求める G.r.f. であることが分る。

(証明終)

注意 $\{X(t);t\in T\}$ を T 上の centered G.r.f. とし、

$$R(s,t)=E[X(s);X(t)],\quad s,t\in T,$$

とおけば、$R(s,t)$ は p.d.k. となる。$\mathcal{H}$ を、$R(s,t)$ を reproducing kernel にもつ reproducing kernel Hilbert space とし、$\{\varphi_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ を $\mathcal{H}$ の C.O.N.S.、$\xi_\lambda,\lambda\in\Lambda$, を、$N(0,1)$ に従い、互いに独立な確率変数とすると、定理 6.1 により、

$$\tilde{X}(t)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(t)\,\xi_\lambda,\quad P\text{-a.s.}$$

とおけば、$\{\tilde{X}(t);t\in T\}$ は centered G.r.f. となる。この時、さらに $\{X(t);t\in T\}$ と $\{\tilde{X}(t)\in T\}$ とは同分布となる。

§7 Separability と Measurability.

以下、この節においては (T,d) は第2可算公理を満たす pseudo-metric space とし、$(\Omega,\mathcal{O}\!\ell,P)$ は完備な確率空間とする。又、$\{X(t);t\in T\}$ を、$(\Omega,\mathcal{O}\!\ell,P)$ で定義された確率場とする。即ち、$t\in T$ に対し、$X(t)$ は $(\Omega,\mathcal{O}\!\ell,P)$ 上の $\mathbb{R}$-値確率変数である。

T の部分集合 U と、$\omega\in\Omega$ に対して、

$$X(U,\omega)=\{X(t,\omega);t\in U\}$$

とおく。

定義 7.1 S を T の可算部分集合とし、$N\in\mathcal{O}\!\ell$, は $P(N)=0$ であるとする。$(\Omega,\mathcal{O}\!\ell,P)$ 上の確率場 $\{X(t);t\in T\}$ が (S,N) に関して、d-separable であるとは、$\mathbb{R}$ の任意の compact 部分集合 K と、T の任意の開集合 U とに対して、

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\mathcal{N}^c \cap \{\omega ; X(U,\omega) \subset K\} = \mathcal{N}^c \cap \{\omega ; X(U \cap S, \omega) \subset K\}$$

が成り立つことである。

注意 1　d_1, d_2 を T の pseudo-distance とし，(T, d_1) から (T, d_2) への恒等写像が連続であると仮定する。この時，T上の確率場が $\{X(t); t \in T\}$ が d_1-separable であるなら $\{X(t); t \in T\}$ は又，d_2-separable でもある。

注意 2　上の定義は，Doob による定義と本質的にはおなじであり，Meyer による定義と一致する。

定理 2.1　$(\Omega, \mathcal{O}\mathcal{C}, P)$ で定義された確率場 $\{X(t); t \in T\}$ が $(S, \mathcal{N})$ に関して d-separable である為には，任意の $t \in T$, $\omega \in \mathcal{N}^c$ とに対して，

$$X(t,\omega) \in \bigcap_{\substack{U;\, open \\ t \in U}} \overline{X(U \cap S, \omega)}$$

が成り立つことが必要かつ十分である。但し，intersection は t を含む T の開集合全体にわたるものとする。又，$\overline{X(U \cap S, \omega)}$ は $X(U \cap S, \omega)$ の閉包である。

証明　必要であることの証明。$\{X(t); t \in T\}$ が $(S, \mathcal{N})$ に関して d-separable であり，ある $\omega_0 \in \mathcal{N}^c$ と $t_0 \in T$ とが存在して，

$$X(t_0, \omega_0) \notin \bigcap_{\substack{U;\, open \\ t_0 \in U}} \overline{X(U \cap S, \omega_0)}$$

と仮定する。すると，t_0 を含む T の開集合 U_0 で，

$$X(t_0, \omega_0) \notin \overline{X(U_0 \cap S, \omega_0)}$$

となるものが存在する。ここで，$K = \overline{X(U_0 \cap S, \omega_0)}$ とすれば，K は $\overline{\mathbb{R}}$ の compact 部分集合である。一方，$\{X(t); t \in T\}$ は d-separable であるから，

$$\mathcal{N}^c \cap \{\omega ; X(U_0, \omega) \subset K\} = \mathcal{N}^c \cap \{\omega ; X(U_0 \cap S, \omega) \subset K\}$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

である。Kの定義より，$\omega_0 \in N^c \cap \{\omega ; X(U_0 \cap S, \omega) \subset K\}$，であるが，$\omega_0$, t_0, U_0 のとり方により，$t_0 \in U_0$, $X(t_0, \omega_0) \notin K$，であるから，$\omega_0 \notin N^c \cap \{\omega ; X(U_0, \omega) \subset K\}$，となるが，これは矛盾である。従って，任意の $t \in T$ と $\omega \in N^c$ とに対して，

$$X(t,\omega) \in \bigcap_{\substack{U:\text{open}\\ t\in U}} \overline{X(U\cap S, \omega)} \quad , \text{ となる。}$$

次に，十分であることの証明。任意の $t \in T$, $\omega \in N^c$, に対して，

$$X(t,\omega) \in \bigcap_{\substack{U:\text{open}\\ t\in U}} \overline{X(U\cap S, \omega)}$$

が成り立つことを仮定して，Tの任意の開集合Uと $\mathbb{R}$ の任意の compact K に対して，

$$N^c \cap \{\omega ; X(U\cap S, \omega) \subset K\} \subset N^c \cap \{\omega ; X(U, \omega) \subset K\}$$

を示せば，逆の包含関係は明らかに成り立つので，結局，等号が成り立ち，$\{X(t) ; t \in T\}$ は (S, N) に関して d-separable であることになる。そこで，$\omega \in N^c \cap \{\omega' ; X(U\cap S, \omega') \subset K\}$ とする。仮定より，$t \in U$，に対して $\omega \in N^c$ であるから

$$X(t,\omega) \in \bigcap_{\substack{U':\text{open}\\ t\in U'}} \overline{X(U'\cap S, \omega)} \subset \overline{X(U\cap S, \omega)} \subset \overline{K} = K,$$

即ち，$\omega \in N^c \cap \{\omega' ; X(U, \omega') \subset K\}$，となる。従って，

$$N^c \cap \{\omega ; X(U\cap S, \omega) \subset K\} \subset N^c \cap \{\omega ; X(U, \omega) \subset K\}$$

となる。　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

<u>定理 7.2</u>　$\{X(t) ; t \in T\}$ を $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L}, P)$ で定義された (T, d) 上の確率場とする。すると，(T, d) で dense である T の可算部分集合 S と，$N \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}$ で $P(N) = 0$ であるものが存在し，さらに $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L}, P)$ で定義された確率場 $\{\tilde{X}(t) ; t \in T\}$ が存在して，$\{\tilde{X}(t) ; t \in T\}$ は (S, N) に関して *d-separable* であり，かつ

$$P(\{\omega ; X(t, \omega) = \tilde{X}(t, \omega)\}) = 1 , \qquad t \in T ,$$

となる。この $\{\tilde{X}(t) ; t \in T\}$ を $\{X(t) ; t \in T\}$ の *d-separable modification* と呼ぶ。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

証明　４段階に分けて証明する。

(I)　S, N の構成。$\bar{R}$ の compact 部分集合Kと，Tの部分集合Fに対して，$A_F^K = \{\omega ; X(F,\omega) \subset K\}$，とおく。又，Tの開集合Uに対して，Uの有限部分集合の全体を $\Lambda(U)$ で表わす。この時，$F \in \Lambda(U)$ ならば，$A_F^K \in \mathfrak{A}$ である。$P(U,K) = \inf\{P(A_F^K) ; F \in \Lambda(U)\}$，とおけば，$n \in N$ に対して，$F_n \in \Lambda(U)$ が存在して，

$$P(A_{F_n}^K) \leqq P(U,K) + \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

となる。F_n は有限集合であるから

$$F(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

とおけば，$F(U)$ は可算集合であり，

$$A_{F(U)}^K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega ; X(\bigcup_{m=1}^{n} F_m, \omega) \subset K\}$$

となる。ここで，$\{\omega ; X(\bigcup_{m=1}^{n} F_m, \omega) \subset K\}$ が n について，decreasing であることから，

$$P(A_{F(U)}^K) = \lim_{n\to\infty} P(\{\omega ; X(\bigcup_{m=1}^{n} F_m, \omega) \subset K\}) \geqq P(U,K),$$

である。一方

$$P(A_{F(U)}^K) = \lim_{n\to\infty} P(\{\omega ; X(\bigcup_{m=1}^{n} F_m, \omega) \subset K\})$$
$$\leqq \varliminf_{n\to\infty} P(\{\omega ; X(F_n, \omega) \subset K\})$$
$$\leqq \lim_{n\to\infty}\{P(U,K) + \frac{1}{n}\} = P(U,K)$$

である。従って，$P(A_{F(U)}^K) = P(U,K)$ となる。又，

$$P(A_{F(U)}^K \cap \{\omega ; X(u,\omega) \in K\}) \leqq P(A_{F(U)}^K), \quad u \in U,$$

であり，他方で，

$$P(A_{F(U)}^K \cap \{\omega ; X(u,\omega) \in K\})$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(A_{\bigcup_{m=1}^{n} F_m}^K \cap \{\omega ; X(u,\omega) \in K\})$$
$$\geqq P(U,K) = P(A_{F(U)}^K)$$

であるから，

$$N_u(U,K) = A_{F(U)}^K \cap \{\omega ; X(u,\omega) \notin K\}, \quad u \in U$$

とおけば，$N_u(U,K) \in \mathfrak{A}$，かつ $P(N_u(U,K)) = 0$ となる。仮定より (T,d) は第２可算公理を満たすから，(T,d) の open base $\mathcal{O} = \{U_n, n = 1, 2, \cdots\}$ が存在する。つまり，Tの

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

任意の開集合Uは，$U=\bigcup_{U_n\subset U} U_n$，と表わされる。又，$\bar{R}$も第2可算公理を満たすから，可算個のcompact部分集合の族，$\mathcal{K}=\{K_n, n=1,2,\cdots\}$が存在して，$\bar{R}$の任意のcompact Kは，$K=\bigcap_{K_n\supset K} K_n$，と表わされる。そこで，

$$S=\bigcup_{n=1}^{\infty} F(U_n),$$

とおくと，$\mathcal{O}=\{U_n\}_n$がopen baseであるから，Sは(T,d)でdenseである。又，Sは可算集合でもある。次に，

$$\mathcal{N}_u=\bigcup \mathcal{N}_u(U_m, K_m), \qquad u\in T$$

とおく。但し，unionはuを含む$U_m\in\mathcal{O}$と，すべての$K_m\in\mathcal{K}$とにわたるものとする。すると，$\mathcal{N}_u\in\mathcal{O}\!\mathcal{L}$，かつ$P(\mathcal{N}_u)=0$，である。そこで，

$$\mathcal{N}=\bigcup_{u\in S}\mathcal{N}_u.$$

とおけば，Sが可算であるから，$\mathcal{N}\in\mathcal{O}\!\mathcal{L}$，かつ$P(\mathcal{N})=0$，である。

(II) $\{\tilde{X}(t), t\in T\}$の構成。$u\in T$と$\omega\in\Omega$に対して，

。まず，$u\in S$又は，$\omega\notin\mathcal{N}_u$のとき

$$\tilde{X}(u,\omega)=X(u,\omega)$$

とおく。

。次に，$u\notin S$かつ$\omega\in\mathcal{N}_u$のときは，$\{\overline{X(U_m\cap S,\omega)}\,;\,u\in U_m\}$が有限交叉性をもち，$\bar{R}$はcompactであるから，$\bigcap_{u\in U_m}\overline{X(U_m\cap S,\omega)}\neq\phi$，であることに注意して，

$$\tilde{X}(u,\omega)\in\bigcap_{u\in U_m}\overline{X(U_m\cap S,\omega)}$$

となるように$\tilde{X}(u,\omega)$を定める。

(III) $P(\tilde{X}(t)=X(t))=1$, $t\in T$, の証明。$t\in S$の時は，$\tilde{X}$の定義より，明らかに，$P(\tilde{X}(t)=X(t))=1$，である。次に，$t\notin S$の時は，$\omega\notin\mathcal{N}_t$，なら$\tilde{X}(t,\omega)=X(t,\omega)$，であった。従って，$\{\omega\,;\,\tilde{X}(t,\omega)\neq X(t,\omega)\}\subset\mathcal{N}_t$。$(\Omega,\mathcal{O}\!\mathcal{L},P)$の完備性により，$\{\omega\,;\,\tilde{X}(t,\omega)\neq X(t,\omega)\}\in\mathcal{O}\!\mathcal{L}$，かつ$P(\{\omega\,;\,\tilde{X}(t,\omega)\neq X(t,\omega)\})=0$。即ち，

$$P(\tilde{X}(t)=X(t))=1,\text{ である。}$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

(IV) $\{\tilde{X}(t);t\in T\}$ が (S,N) に関して d-separable であることの証明。 T の開集合 U と $\bar{R}$ の compact K とを固定して考える。 $\mathcal{O}=\{U_m\}_m$, $\mathcal{K}=\{K_m\}_m$ の定め方により、

$$U=\bigcup_{U_m\subset U}U_m\ ,\quad K=\bigcap_{K_m\supset K}K_m$$

と表わされるから、

$$\{\omega;\tilde{X}(U,\omega)\subset K\}=\bigcap_{U_m\subset U}\bigcap_{K_m\supset K}\{\omega;\tilde{X}(U_m,\omega)\subset K_m\}$$

$$\{\omega;\tilde{X}(U\cap S,\omega)\subset K\}=\bigcap_{U_m\subset U}\bigcap_{K_m\supset K}\{\omega;\tilde{X}(U_m\cap S,\omega)\subset K_m\}$$

が成り立つことに注意しておく。 さて、$\tilde{X}$ の定め方により、$u\in S$ なら、$\tilde{X}(u,\omega)=X(u,\omega)$, $\omega\in\Omega$, であるから

$$(*)\quad \{\omega;\tilde{X}(U_m\cap S,\omega)\subset K_m\}=\{\omega;X(U_m\cap S,\omega)\subset K_m\}\subset A^{K_m}_{F(U_m)}$$

が成り立つ。以上の準備のもとに、

$\omega\in N^c\cap\{\omega';\tilde{X}(U_m\cap S,\omega')\subset K_m\}$ なら

$\tilde{X}(u,\omega)\in K_m$, $u\in U_m$,

であることを示す。

$\omega\in N^c\cap\{\omega;\tilde{X}(U_m\cap S,\omega')\subset K_m\}$, $u\in U_m$, とする。

(i) $u\in U_m\cap S$ の時, 明らかに $\tilde{X}(u,\omega)\in K_m$, である。

(ii) $u\notin U_m\cap S$ の時。

a) $\omega\notin N_u=\bigcup N_u(U_i,K_j)$, ならば, 任意の i,j に対し

$\omega\notin N_u(U_i,K_j)=A^{K_j}_{F(U_i)}\cap\{\omega';X(u,\omega')\in K_j\}$

であるから, とくに $\omega\notin A^{K_m}_{F(U_m)}$ 又は $X(u,\omega)\in K_m$.
ところが, (*)より $\omega\in\{\omega';\tilde{X}(U_m\cap S,\omega')\subset K_m\}$ ならば $\omega\in A^{K_m}_{F(U_m)}$ である。従って, $X(u,\omega)\in K_m$. となる。
$\omega\notin N_u$ であるから, $\tilde{X}$ の定め方より

$\tilde{X}(u,\omega)=X(u,\omega)\in K_m$, を得る。

b) $\omega\in N_u$ の時。$\tilde{X}$ の定め方により,

$\tilde{X}(u,\omega)\in\bigcap_{u\in U_k}\overline{X(U_k\cap S,\omega)}$, である。一方,

$\omega\in\{\omega';\tilde{X}(U_m\cap S,\omega')\subset K_m\}$, であるから, (*)により, $\omega\in\{\omega';X(U_m\cap S,\omega')\subset K_m\}$. 従って

$$\tilde{X}(u,\omega)\in\bigcap_{u\in U_k}\overline{X(U_k\cap S,\omega)}\subset\overline{X(U_m\cap S,\omega)}\subset\overline{K_m}=K_m.$$

以上により, $\omega\in N^c\cap\{\omega';\tilde{X}(U_m\cap S,\omega')\subset K_m\}$, なら

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$\tilde{X}(u,\omega) \in K_m$, $u \in U_n$, が得られた。従って，

$$N^c \cap \{\omega' ; \tilde{X}(U_n \cap S, \omega') \subset K_m\}$$
$$\subset N^c \cap \{\omega' ; \tilde{X}(U_n, \omega') \subset K_m\}$$

を得る。n, m が任意であったから，

$$N^c \cap \left[\bigcap_{U_n \subset U} \bigcap_{K_m \supset K} \{\omega ; \tilde{X}(U_n \cap S, \omega) \subset K_m\}\right]$$
$$\subset N^c \cap \left[\bigcap_{U_n \subset U} \bigcap_{K_m \supset K} \{\omega ; \tilde{X}(U_n, \omega) \subset K_m\}\right]$$

が成り立つ。先に注意したことより，

$$N^c \cap \{\omega ; \tilde{X}(U \cap S, \omega) \subset K\} \subset N^c \cap \{\omega ; \tilde{X}(U, \omega) \subset K\}$$

が成り立つ。逆の包含関係は明らかであるから，等号が成り立ち，$\{\tilde{X}(t) ; t \in T\}$ が (S, N) に関して，d-separable であることが示された。 (証明終)

<u>定義 7.2</u> $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ で定義された (T, d) 上の確率場 $\{X(t) ; t \in T\}$ が d-確率連続であるとは，任意の $\varepsilon > 0$，に対して $\delta > 0$ が存在して，$s, t \in T$，$d(s, t) < \delta$ であるなら，

$$P(\{\omega ; |X(s,\omega) - X(t,\omega)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

となることである。

<u>注意 3</u> $\bar{R}$ の演算について。$0 < a < +\infty$，に対して，

$$\pm\infty \pm a = \pm a \pm \infty = \pm\infty, \quad a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty,$$
$$+\infty + \infty = +\infty, \ -\infty - \infty = -\infty, \ +\infty - \infty = -\infty + \infty = 0$$

と定める。

<u>注意 4</u> $\{X(t) ; t \in T\}$, $\{\tilde{X}(t) ; t \in T\}$ を同分布な T 上の確率場とする。もし，$\{X(t) ; t \in T\}$ が，d-確率連続であるなら，$\{\tilde{X}(t) ; t \in T\}$ も d-確率連続である。

<u>定理 7.3</u> $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ で定義された (T, d) 上の確率場 $\{X(t) ; t \in T\}$ が d-確率連続であり，かつ (S, N) に関して d-separable であるとする。但し，S は (T, d) で dense な可算部分集合であり，$N \in \mathfrak{A}$，$P(N) = 0$，である。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

この時，(T,d)でdenseな任意のTの可算部分集合S'に対して，$N'\in\mathfrak{A}$，$P(N')=0$，なるN'が存在して，$\{X(t);t\in T\}$は(S',N')に関して，d-separableとなる。

証明　$\varepsilon_n>0$，$n=1,2,\cdots$，を$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\infty$，となるようにとる。$\{X(t);t\in T\}$が$d$-確率連続であるから，任意の$s\in S$に対して，$\delta_n=\delta_n(\varepsilon_n)>0$，が存在して，任意の$u\in B(s,\delta_n)=\{t\in T;d(s,t)<\delta_n\}$，に対して

$$P(|X(s)-X(u)|>\varepsilon_n)<\varepsilon_n,$$

となる。そこで，$u_n\in B(s,\delta_n)\cap S'$，かつ

$$P(|X(s)-X(u_n)|>\varepsilon_n)<\varepsilon_n,$$

となるu_nが存在する。$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\infty$，より

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X(s)-X(u_n)|>\varepsilon_n)<\infty$$

となり，*Borel-Cantelli*の補題より，$N_s\in\mathfrak{A}$，$P(N_s)=0$　かつ

$$\lim_{n\to\infty}X(u_n,\omega)=X(s,\omega),\quad \omega\notin N_s,$$

となる，N_sが存在する。そこで，

$$N'=N\cup(\bigcup_{s\in S}N_s)$$

とおけば，$N'\in\mathfrak{A}$，かつ　$P(N')=0$　である。

Uを Tの開集合とし，Kは$\overline{R}$の*compact*とする。
$\omega\in N'^c\cap\{\omega';X(U\cap S',\omega')\subset K\}$　とすると，$\omega\notin\bigcup_{s\in S}N_s$，であることより，任意の$s\in U\cap S$，に対して　自然数$n_0$が存在して，$n\geqq n_0$　なら，$u_n\in B(s,\delta_n)\cap S'\subset U\cap S'$，かつ

$$\lim_{n\to\infty}X(u_n,\omega)=X(s,\omega)$$

となる。一方，$X(U\cap S',\omega)\subset K$，であるから　$X(u_n,\omega)\in K$.
従って，　$X(s,\omega)\in K$　となる。故に，

$$N'^c\cap\{\omega';X(U\cap S',\omega')\subset K\}$$
$$\subset N'^c\cap\{\omega';X(U\cap S,\omega')\subset K\}$$

である。$\{X(t);t\in T\}$は(S,N)に関して*d-separable*であったから，

$$N^c\cap\{\omega';X(U\cap S,\omega')\subset K\}=N^c\cap\{\omega';X(U,\omega')\subset K\}$$

であるが，$N'^c\subset N^c$，であるから

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$N'^c \cap \{\omega'; X(U\cap S, \omega') \subset K\} = N'^c \cap \{\omega'; X(U, \omega') \subset K\}$$
$$\subset N'^c \cap \{\omega'; X(U\cap S', \omega') \subset K\}$$

従って,

$$N'^c \cap \{\omega'; X(U\cap S', \omega') \subset K\} = N'^c \cap \{\omega'; X(U\cap S, \omega') \subset K\}$$
$$= N'^c \cap \{\omega'; X(U, \omega') \subset K\}.$$

これは, $\{X(t); t\in T\}$ が (S', N') に関して d-separable であることを示している。 (証明終)

系 $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ で定義された確率場 $\{X(t); t\in T\}$ が

$E[X^2(t)] < \infty, \quad t\in T,$

を満たすとする。この時,

$d_X(s,t) = \sqrt{E[(X(s)-X(t))^2]}, \quad s,t\in T$

により, T上の pseudo-distance d_X を定義する。もし, (T, d_X) が第2可算公理を満たすならば, Tの任意の可算部分集合Sで, (T, d_X) で dense であるものに対して, $N\in\mathfrak{A}$, $P(N)=0$, なる N と, (S, N) に関する, $\{X(t); t\in T\}$ の d_X-separable modification $\{\tilde{X}(t); t\in T\}$ とが存在する。

証明 定理7.2 により, (T, d_X) で dense である, 可算部分集合 S_0 と, $N_0\in\mathfrak{A}$, $P(N_0)=0$, とが存在し, さらに (S_0, N_0) に関して d-separable な $\{\tilde{X}(t); t\in T\}$ が存在して, $\{\tilde{X}(t); t\in T\}$ は $\{X(t); t\in T\}$ の d-separable modification となる。明らかに, $\{X(t); t\in T\}$ は d_X-確率連続であり, 従って $\{\tilde{X}(t); t\in T\}$ も又 d_X-確率連続であるから定理7.3 により, $N\in\mathfrak{A}$, $P(N)=0$, なる N が存在して, $\{\tilde{X}(t); t\in T\}$ は (S, N) に関して d_X-separable となる。

(証明終)

定義 7.3 $\mathcal{B}(T)$ を (T, d) の Borel field とする。$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ で定義される, T上の確率場 $\{X(t); t\in T\}$ が d-measurable であるとは,

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$
\begin{array}{cccc}
X(\cdot,\cdot)\ ;\ (T\times\Omega, & \mathcal{B}(T)\otimes\mathfrak{A}) & \longrightarrow & (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \\
& \cup\!\!\!\!\;\shortmid & & \cup\!\!\!\!\;\shortmid \\
& (t,\omega) & \longmapsto & X(t,\omega)
\end{array}
$$

と考える時，$X(\cdot,\cdot)$ が $\mathcal{B}(T)\otimes\mathfrak{A}/\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ - measurable であることである。

<u>定理 7.4</u>　$\{X(t)\ ;\ t\in T\}$ を $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ で定義された，(T,d) 上の確率場で，d-確率連続とする。(T,d) で dense な T の任意の可算部分集合 S に対して，$P(N)=0$ なる $N\in\mathfrak{A}$ と，$(\Omega,\mathfrak{A},P)$ で定義された確率場 $\{\tilde{X}(t)\ ;\ t\in T\}$ とが存在して，$\{\tilde{X}(t)\ ;\ t\in T\}$ は d-確率連続，d-measurable であり，かつ (S,N) に関する $\{X(t)\ ;\ t\in T\}$ の d-separable modification となる。

<u>証明</u>　S の元に番号をつけて $S=\{s_1,s_2,\cdots\}$ とし，S に順序を次の様に入れる；$s_n, s_m\in S$ に対して，

$$s_n < s_m \iff n < m.$$

次に $t\in S$ に対して

$$C_n(t) = B(t,2^{-n})\cap\Big(\bigcup_{\substack{s\in S\\ s<t}} B(s,2^{-n})\Big)^c$$

とおく。但し，$B(t,2^{-n})=\{u\in T\ ;\ d(u,t)<2^{-n}\}$ である。明らかに，$C_n(t)\in\mathcal{B}(T)$ であり，又，$s,t\in S$，$s\neq t$ なら

$C_n(s)\cap C_n(t)=\phi$，であり，S が (T,d) で dense であることから，$T=\bigcup_{s\in S} C_n(s)$，$n=1,2,\cdots$，となる。さらに，$\{X(t)\ ;\ t\in T\}$ が d-確率連続であることから，正数の減少列 ε_n, $n=1,2,\cdots$，で $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\infty$ であるものに対し $n_k\in\mathbb{N}$，$k=1,2,\cdots$，がとれて，$s,t\in T$，$d(s,t)<2^{-n_k}$ なら，$P(|X(s)-X(t)|>\varepsilon_k)<\varepsilon_k$，となる。

$C_n(s)$，$s\in S$，の定め方から，任意の $t\in T$ と任意の k に対して，$s=s(t,n_k)\in S$ が存在して，$t\in C_{n_k}(s)$ となる。そこで，確率場 $\{X_k(t)\ ;\ t\in T\}$，$k=1,2,\cdots$，を

$$X_k(t,\omega) = X(s(t,n_k),\omega),\quad t\in T,\ \omega\in\Omega,$$

とおけば，$X_k(\cdot,\cdot)$ は $\mathcal{B}(T)\otimes\mathfrak{A}/\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ - measurable と

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

なる。又，

$$P(|X_k(t)-X(t)|>\varepsilon_k)=P(|X(s(t,n_k))-X(t)|>\varepsilon_k)<\varepsilon_k$$

となるから，

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(|X_k(t)-X(t)|>\varepsilon_k)<\infty,\quad t\in T.$$

となり，Borel-Cantelli の補題を使えば

$$P(\{\omega;\ \lim_{k\to\infty}X_k(t,\omega)=X(t,\omega)\})=1,\quad t\in T$$

となる。そこで，$\{\tilde{X}(t);t\in T\}$ を

$$\tilde{X}(t,\omega)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\ X_k(t,\omega),\quad t\in T,\ \omega\in\Omega$$

で定める。$X_k(\cdot,\cdot)$ が $\mathcal{B}(T)\otimes\mathcal{O}\!\mathcal{l}/\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-measurable であることから，$\{\tilde{X}(t);t\in T\}$ が d-measurable であることが容易に分る。又，

$$P(\tilde{X}(t)=X(t))=1,\quad t\in T$$

であるから，$\{X(t);t\in T\}$ が d-確率連続であることより，$\{\tilde{X}(t);t\in T\}$ も d-確率連続である。従って，$\{\tilde{X}(t);t\in T\}$ が d-separable であることを示せばよい。 $t\in T$ に対し，

$$N(t)=\{\omega;\ \tilde{X}(t,\omega)\neq X(t,\omega)\}$$

とおけば，$(\Omega,\mathcal{O}\!\mathcal{l},P)$ の完備性より，$N(t)\in\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, $P(N(t))=0$.

$N=\bigcup_{s\in S}N(s)$，とおけば $N\in\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, $P(N)=0$ である。任意の $t\in T$ と任意の k に対し，$s(t,n_k)\in S$ が定まり，$t\in C_{n_k}(s(t,n_k))$，であったから $\tilde{X}(t,\omega)$ の定義より

$$\begin{aligned}\tilde{X}(t,\omega)&=\overline{\lim_{k\to\infty}}\ X(s(t,n_k),\omega)\\&=\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \tilde{X}(s(t,n_k),\omega)\end{aligned}$$

従って

$$\tilde{X}(t,\omega)\in\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\tilde{X}(B(t,\varepsilon)\cap S,\omega)},\quad \omega\notin N$$

となり，定理2.1より $\{\tilde{X}(t);t\in T\}$ が (S,N) に関して d-separable であることが分る。 (証明終)

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

以下，本書においては，特にことわらない限り，$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ は完備な確率空間であるとする。

§8 0−1 law と integrability of G.r.f.

$\{X(t)\,;\,t\in T\}$ を T 上の centered G.r.f. とする。

$\mathbb{R}$ 上の vector space $E = \mathbb{R}^T$，を考え，$\mathcal{E}$ を E の cylinder sets 全体の生成する σ-field とすると，$(E, \mathcal{E})$ は measurable space となり，さらに次の性質をもつ；

(i) (α, x)，$\alpha\in\mathbb{R}$，$x\in E$，に $\alpha\cdot x\in E$ を対応させる写像は $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{E}/\mathcal{E}$ − measurable である。

(ii) (x, y)，$x, y\in E$，に $x+y\in E$ を対応させる写像は $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}/\mathcal{E}$ − measurable である。

各 $\omega\in\Omega$ に対して，$X(\omega) = (X(t,\omega))_{t\in T}\in E$ であり，X は $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ で定義された E-値確率変数とみなせる。

<u>定義 8.1</u>　E を $\mathbb{R}$ 上の vector space，$\mathcal{E}$ を E のある σ-field とする。$(E, \mathcal{E})$ が measurable vector space であるとは，

(1) (α, x)，$\alpha\in\mathbb{R}$，$x\in E$，に $\alpha\cdot x\in E$ を対応させる写像が $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{E}/\mathcal{E}$ − measurable である。

(2) (x, y)，$x, y\in E$，に $x+y\in E$ を対応させる写像が $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}/\mathcal{E}$ − measurable である。

が成り立つことである。

<u>定義 8.2</u>　$(E, \mathcal{E})$ を measurable vector space とする。$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ で定義される E-値確率変数 X が vector Gaussian であるとは次が成り立つことである；

X_1，X_2 を X の independent copies，すなわち X_1，X_2 は互いに独立で，ともに X と同分布である，とする時，任意の θ，$0\leq\theta<2\pi$，に対して

$$Y_1(\theta) = X_1\cos\theta + X_2\sin\theta$$
$$Y_2(\theta) = -X_1\sin\theta + X_2\cos\theta$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

とおけば，$Y_1(\theta)$，$Y_2(\theta)$ は互いに独立で，かつ X と同分布となる。

定理 8.1　$(E,\mathcal{E})$ を measurable vector space とし，F を E の measurable subspace，すなわち F は E の subspace であり，かつ $F\in\mathcal{E}$，とする。X が $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ で定義される E-値 vector Gaussian であれば，

$$P(\{\omega\,;\,X(\omega)\in F\})=0 \text{ or } 1$$

となる。

証明　X_1, X_2 を X の independent copies とする。$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ に対し，X が vector Gaussian であるから $(X_1\cos\theta+X_2\sin\theta,\,-X_1\sin\theta+X_2\cos\theta)$ と (X_1,X_2) とは同分布となる。そこで，

$$A(\theta)=\{\omega;\ X_1(\omega)\cos\theta+X_2\sin\theta\in F,\ \text{かつ},\ -X_1(\omega)\sin\theta+X_2\cos\theta\notin F\}$$

とおく。明らかに $A(\theta)\in\mathfrak{A}$ である。$(X_1\cos\theta+X_2\sin\theta)$ と $(-X_1\sin\theta+X_2\cos\theta)$ が互いに独立であるから，上に述べたことに注意して，

$$\begin{aligned}P(A(\theta)) &= P(X_1\cos\theta+X_2\sin\theta\in F)\,P(-X_1\sin\theta+X_2\cos\theta\notin F)\\ &= P(X_1\in F)\,P(X_2\notin F)\\ &= P(X\in F)\,P(X\notin F)\end{aligned}$$

となる。一方，$\theta\neq\theta'$ なら $A(\theta)\cap A(\theta')=\phi$ である。なぜなら，$A(\theta)\cap A(\theta')\neq\phi$ と仮定して，$\omega\in A(\theta)\cap A(\theta')$ とすると，

(*)　$X_1(\omega)\cos\theta+X_2\sin\theta\in F$，かつ $X_1\cos\theta'+X_2\sin\theta'\in F$

となるが，$\theta\neq\theta'$ より

$$\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \cos\theta' & \sin\theta'\end{vmatrix}\neq 0$$

であるから，(*) は $X_1(\omega)$，$X_2(\omega)$ について解け，$X_1(\omega)\in F$ かつ $X_2(\omega)\in F$，を得る。従って，

$$-X_1(\omega)\cos\theta + X_2 \sin\theta \in F$$

となるが，これは $\omega \in A(\theta)$ に矛盾。ゆえに $A(\theta) \cap A(\theta') = \phi$。

$$P(A(\theta)) = P(A(\theta')), \quad \theta, \theta' \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

であるから，$\theta_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$，$i = 1, 2, \cdots$，を相異なるものとすると，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A(\theta_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A(\theta_i)) \leq 1$$

であるから，$P(A(\theta)) = 0$，$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$，である。

$$P(A(\theta)) = P(X \in F)\, P(X \notin F)$$

より，$P(X \in F) = 0$ or 1，である。　（証明終）

定理 8.1 は次のように拡張されることが知られている；
E-値確率変数 X が stable であるとは，X_1，X_2 を X の independent copies とする時，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$x_n \in E$，$c_n \in \mathbb{R}$，$c_n \neq 0$ が存在して，$X_1 + n X_2$ と $c_n(X - x_n)$ とは同分布になる，ことであるとする。このように定義すると，X が stable で，F を measurable subspace とすると，

$$P(X \in F) = 0 \text{ or } 1$$

が成り立つ。

<u>定義 8.3</u>　$(E, \mathcal{E})$ を measurable vector space とする。E で定義される $\overline{\mathbb{R}}$-値関数 N が pseudo-semi-norm であるとは，N が次の性質をもつことである；

(i)　N は $\mathcal{E} / \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-measurable である。

(ii)　$N^{-1}(\mathbb{R}) = \{ x \in E ; N(E) \in \mathbb{R} \}$，は E の measurable subspace である。

(iii)　N の $N^{-1}(\mathbb{R})$ への制限は semi-norm である。すなわち，$\alpha \in \mathbb{R}$，$x, y \in N^{-1}(\mathbb{R})$ に対して，

$$N(\alpha x) \leq |\alpha|\, N(x), \quad N(-x) = N(x),$$
$$N(x+y) \leq N(x) + N(y),$$

が成り立つ。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

例　(T, d) を separable な pseudo-metric space とし，
$E = C(T) = \{ f(t) \;;\; f : T \longrightarrow \mathbb{R}$, 連続 $\}$，とおく。
$\mathcal{E}$ を E の cylinder sets 全体の生成する σ-field とする，つまり，$\mathcal{E} = \sigma[x(t) \;;\; t \in T,\ x \in E]$ である。

$$N(x) = \sup_{t \in T} |x(t)| \quad , \quad x \in E ,$$

とおくと，N は $(E, \mathcal{E})$ 上の pseudo-semi-norm となる。

<u>定理 8.2</u>　$(E, \mathcal{E})$ を measurable vector space とし，X を $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{C}, P)$ で定義される E-値 vector Gaussian とする。N が $(E, \mathcal{E})$ 上の pseudo-semi-norm で，かつ

$$P(\{\omega \;;\; N(X(\omega)) < \infty\}) > 0$$

を満たすものとする。$t_0 \in \mathbb{R}$，$q > 0$ を

$$q = P(\{\omega \;;\; N(X(\omega)) \leq t_0\}) > \frac{1}{2}$$

となるようにとる。この時，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$P\left(\{\omega \;;\; N(X(\omega)) > t_0(\sqrt{2}+1)(2^{\frac{n+1}{2}}-1)\}\right) \leq q \exp\left\{-2^n \log \frac{q}{1-q}\right\}$$

が成り立つ。又，任意の $t \geq t_0$ に対して

$$P(\{\omega \;;\; N(X(\omega)) > t\}) \leq \exp\left\{-\frac{t^2}{24 t_0^2} \log \frac{q}{1-q}\right\}$$

が成り立つ。さらに，ある $\alpha > 0$ が存在して，

$$E[\exp\{\alpha N^2(X)\}] < +\infty$$

となる。

<u>注意</u>　N が pseudo-semi-norm であるから，$\{x \in E \;;\; N(x) < +\infty\}$ は E の measurable subspace となり，定理 8.1 の 0-1 law により，$P(N(X) < +\infty) > 0$，は $P(N(X) < +\infty) = 1$ と同値である。

<u>定理 8.2 の証明</u>　まず，評価式；

$$P(N(X) \leq s)\, P(N(X) > t) \leq \left(P(N(X) > (t-s)/\sqrt{2})\right)^2, \quad 0 < s < t < \infty$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

を証明する。 $\Omega_0=\{\omega\,;\ N(X(\omega))<\infty\}$ とおく。 X_1, X_2 を X の independent copies とすると，X が vector Gaussian であるから，$0<s<t<\infty$ に対して

$$P(N(X)\le s)\,P(N(X)>t)=P\left(N\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\right)\le s\right)P\left(N\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\right)>t\right)$$

となる。一方，$N\left(\frac{X_1(\omega)-X_2(\omega)}{\sqrt{2}}\right)\le s$ ，$t<N\left(\frac{X_1(\omega)+X_2(\omega)}{\sqrt{2}}\right)<\infty$.
であれば，

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,N(X_1(\omega)) &\ge N(\sqrt{2}\,X_1(\omega))=N\left(\frac{X_1(\omega)+X_2(\omega)}{\sqrt{2}}+\frac{X_1(\omega)-X_2(\omega)}{\sqrt{2}}\right)\\ &\ge N\left(\frac{X_1(\omega)+X_2(\omega)}{\sqrt{2}}\right)-N\left(\frac{X_1(\omega)-X_2(\omega)}{\sqrt{2}}\right)\\ &> t-s.\end{aligned}$$

従って，$N(X_1(\omega))>(t-s)/\sqrt{2}$，同様に $N(X_2(\omega))>(t-s)/\sqrt{2}$，
となるから，

$$\left\{\omega\,;\,N\left(\frac{X_1(\omega)-X_2(\omega)}{\sqrt{2}}\right)\le s,\ N\left(\frac{X_1(\omega)+X_2(\omega)}{\sqrt{2}}\right)>t\right\}\cap\Omega_0$$
$$\subset\{\omega\,;\ N(X_1(\omega))>(t-s)/\sqrt{2},\ N(X_2(\omega))>(t-s)/\sqrt{2}\}\cap\Omega_0$$

よって

$$\begin{aligned}&P(N(X)\le s)\,P(N(X)>t)\\ &\le P(N(X_1)>(t-s)/\sqrt{2})\,P(N(X_2)>(t-s)/\sqrt{2})\\ &=(P(N(X)>(t-s)/\sqrt{2}))^2\end{aligned}$$

を得る。 次に，

$$t_{n+1}-t_0=\sqrt{2}\,t_n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

とおく。すると

$$\begin{aligned}t_{n+1}&=t_0+\sqrt{2}\,t_n=(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}^2+\cdots+\sqrt{2}^{n+1})\,t_0\\ &=(2^{\frac{n+2}{2}}-1)\,t_0/(\sqrt{2}-1)=t_0(\sqrt{2}+1)(2^{\frac{n+2}{2}}-1)\end{aligned}$$

となる。さらに

$$P(N(x)>t_n)=q\,x_n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

と，x_n を定めると，まず

$$q x_0=P(N(X)>t_0)=1-q.$$

ゆえに，$x_0=(1-q)/q<1$ ，である。
又，上に示した評価式より

$$\begin{aligned}P(N(X)\le t_0)\,P(N(X)>t_{n+1})&\le\{P(N(X)>(t_{n+1}-t_0)/\sqrt{2})\}^2\\ &=\{P(N(X)>t_n)\}^2\end{aligned}$$

となるから，$q^2 x_{n+1}\le q^2 x_n^2$ ，

従って， $x_{n+1} \leq x_n^2 \leq x_0^{2^{n+1}} = ((1-q)/q)^{2^{n+1}}$ ，

すなわち，

$$P(N(X) > t_{n+1}) = q x_{n+1} \leq q\ ((1-q)/q)^{2^{n+1}}$$

$n+1$，を n で置きかえて，

$$P(N(X) > t_0(\sqrt{2}+1)(2^{\frac{n+1}{2}} - 1))$$
$$\leq q((1-q)/q)^{2^n} = q \exp\{-2^n \log\frac{q}{1-q}\}$$

が得られる。

次に，任意の $t \geq t_0$ に対して，先に定めた t_n を使って，$t_n \leq t < t_{n+1}$ ，となる様に n をとる。この時，

$$P(N(X) > t) \leq P(N(X) > t_n)$$
$$\leq q \exp\{-2^n \log\frac{q}{1-q}\}$$

となる。一方，

$$t < t_{n+1} = t_0(\sqrt{2}+1)(2^{\frac{n+2}{2}} - 1)$$

より，

$$2^{\frac{n+2}{2}} > \frac{t}{t_0}(\sqrt{2}-1) + 1 > \frac{t}{t_0}(\sqrt{2}-1) = \frac{t}{t_0(\sqrt{2}+1)}$$
$$2^n > \frac{t^2}{4t_0^2(\sqrt{2}+1)^2} > \frac{t^2}{24t_0^2},$$

となるから，$q < 1$ より，$t \geq t_0$ に対して，

$$P(N(X) > t) \leq q \exp\{-2^n \log\frac{q}{1-q}\}$$
$$< \exp\{-\frac{t^2}{24t_0^2} \log\frac{q}{1-q}\}$$

が得られる。これより，

$$F(t) = P(N(X) > t), \quad t \geq 0$$

とおくと，

$$E[\exp\{\alpha N^2(X)\}] = -\int_0^\infty e^{\alpha t^2} dF(t)$$
$$= [-e^{\alpha t^2} F(t)]_0^\infty + \int_0^\infty 2\alpha t\, e^{\alpha t^2} F(t)\, dt$$
$$\leq 1 - \lim_{t\uparrow\infty} e^{\alpha t^2} F(t) + \int_{t_0}^\infty 2\alpha t\, e^{\alpha t^2} q \exp\{-\frac{t^2}{24t_0^2} \log\frac{q}{1-q}\}\, dt$$
$$+ \int_0^{t_0} 2\alpha t\, e^{\alpha t^2} F(t)\, dt$$

となるが，$\alpha < (24t_0^2)^{-1} \log\frac{q}{1-q}$ ，なら

$$\lim_{t\uparrow\infty} e^{\alpha t^2} F(t) = \lim_{t\uparrow\infty} e^{\alpha t^2} P(N(X) > t) = 0,$$

かつ，

$$\int_{t_0}^\infty 2\alpha t\, e^{\alpha t^2} q \exp\{-\frac{t^2}{24t_0^2} \log\frac{q}{1-q}\}\, dt < \infty$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

従って， $\alpha < (24 t_0^2)^{-1} \log \frac{q}{1-q}$ ，なら

$E[\exp\{\alpha N^2(X)\}] < \infty$ ．となる。 (証明終)

系1 $E = \mathbb{R}^T$ ，とし $\mathcal{E}$ を $\mathbb{R}^T$ の cylinder sets 全体の生成する σ-field とすると，$(E, \mathcal{E})$ は measurable vector space となる。 X を $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L}, P)$ で定義される，$\mathbb{R}^T$-値 vector Gaussian とする。$t \in T$ に対して，

$X(t, \omega) = X(\omega)$ の t-座標，

とおけば，$\{X(t)\,;\, t \in T\}$ は T 上の centered G.r.f. となる。

証明 $t_1, \cdots, t_n \in T$，$z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{R}$ を任意に固定して考え，$\sum_{k=1}^{n} z_k X(t_k)$ が centered G.r.v. になることを示せばよい。 $x \in \mathbb{R}^T$ の t-座標を $x(t)$ で表わし，

$N(x) = \sup_{1 \le i \le n} |x(t_i)|$ ， $x \in \mathbb{R}^T$

とおけば，明らかに N は pseudo-semi-norm であり，

$P(N(X) < \infty) = 1$

であるから，定理8.2 により，ある $\alpha > 0$ が存在して

$E[\exp\{\alpha N^2(X)\}] < +\infty$

となる。 $\bar{z} = (z_1, \cdots, z_n)$ ， $\bar{X} = (X(t_1), \cdots, X(t_n))$ ，とおくと，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し，

$|(\bar{z}, \bar{X})|^k \le N^k(X) \cdot |\sum_{j=1}^{n} z_j|^k \le C_k |\sum_{j=1}^{n} z_j|^k \exp\{\alpha N^2(X)\}$

となる。但し，C_k は k と α にのみ依存する定数であり，$(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^n$ の内積である。従って， $E[|(\bar{z}, \bar{X})|^k] < \infty$，となる。 X_1，X_2 を X の independent copies とし，X_1，X_2 に対しても，X と同じく，$\{X_1(t)\,;\, t \in T\}$，$\{X_2(t)\,;\, t \in T\}$，

$\bar{X}_1 = (X_1(t_1), \cdots, X_1(t_n))$ ， $\bar{X}_2 = (X_2(t_1), \cdots, X_2(t_n))$

等を考える。 さて，

$\varphi(\bar{z}) = E[e^{i(\bar{z}, \bar{X})}]$

とおくと，X が vector Gaussian であることから

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\varphi(\overline{z}) = E[\exp\{i(\overline{z}, (\overline{X_1}+\overline{X_2})/\sqrt{2})\}]$$
$$= E[\exp\{i(\overline{z}/\sqrt{2}, \overline{X_1})\}]\, E[\exp\{i(\overline{z}/\sqrt{2}, \overline{X_2})\}]$$
$$= \{\varphi(\overline{z}/\sqrt{2})\}^2$$

が成り立つ。一方

$$E[(\overline{z}, \overline{X})] = E[(\overline{z}, (\overline{X_1}+\overline{X_2})/\sqrt{2})] = \sqrt{2}\, E[(\overline{z}, \overline{X})]$$

より，$E[(\overline{z}, \overline{X})] = 0$，であるから

$$\varphi(\overline{z}) = \varphi^2(\overline{z}/\sqrt{2}) = \{\varphi(\overline{z}\, 2^{-\frac{m}{2}})\}^{2^m}$$
$$= \{1 - 2^{-m-1} E[(\overline{z}, \overline{X})^2] + O(\|\overline{z}\|^3 2^{-\frac{3}{2}m})\}^{2^m}$$

となる。　但し，$\|\overline{z}\| = (\overline{z}, \overline{z})$，である。
従って，$m \longrightarrow \infty$ として

$$\varphi(\overline{z}) = \exp\{-\tfrac{1}{2} E[(\overline{z}, \overline{X})^2]\}$$

となり，これは $\sum_{k=1}^{n} z_k X(t_k)$ が *centered Gaussian* であることを示している。　　　　(証明終)

<u>注意</u>　この系より，次のことが分る。
$\overline{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ が n 次元 *centered G.r.v.* である為には，次の事が成り立つことが必要かつ十分である；
$\overline{X_1}$，$\overline{X_2}$ を $\overline{X}$ の *independent copies* とする時，任意の θ，$0 \leq \theta < 2\pi$，に対して

$$\overline{Y_1} = \overline{X_1}\cos\theta + \overline{X_2}\sin\theta,$$
$$\overline{Y_2} = -\overline{X_1}\sin\theta + \overline{X_2}\cos\theta$$

とするなら，$\overline{Y_1}$，$\overline{Y_2}$ は独立であり，ともに $\overline{X}$ と同分布である。

<u>系2</u>　(T, d) を compact metric space，$\mathbb{B}(T)$ を T の Borel field，E を T 上の $\mathbb{B}(T)$-可測関数の全体，$\mathcal{E}$ を E の cylinder sets 全体の生成する σ-field とし，$C(T)$ を T 上の連続関数の全体とする。$(E, \mathcal{E})$ は measurable vector space となる。$\{X(t); t \in T\}$ を $(\Omega, \mathcal{O}\!\iota, P)$ で定義される T 上の centered G.r.f. で，d-separable であり，かつ d-measurable であるとする。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$X(\omega) = (X(t,\omega))_{t\in T} \in E, \quad \omega\in\Omega$$

とおけば，X は E-値 vector Gaussian であり，

(i) $P(\{\omega;\ X(\omega)\in C(T)\}) = 0$ or 1,

(ii) もし，$P(X\in C(T))=1$，であるなら，ある $\alpha>0$ が存在して，

$$E[\exp\{\alpha(\sup_{t\in T}|X(t)|)^2\}] < +\infty,$$

となる。

<u>証明</u>　$\{X(t);t\in T\}$ が (S,N) に関して d-separable であるとする。但し，S は (T,d) で dense な T の可算部分集合であり，$N\in\mathfrak{A}$，$P(N)=0$，である。

(i) E の Linear subset F を，

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{\substack{x,y\in S\\ d(x,y)<2^{-k}}}\{f\in E\ ;\ |f(x)|<+\infty,\ |f(y)|<+\infty,\ \text{かつ}\ |f(x)-f(y)|<2^{-n}\}$$

とおく。明らかに，$F\in\mathcal{E}$，であり，F は E の measurable subspace となる。従って，定理 8.2 により

$$P(X\in F) = 0 \text{ or } 1$$

である。$\{X(t);t\in T\}$ が (S,N) に関して d-separable であることより，$\omega\notin N$ かつ $X(\omega)\in F$，なら $X(\omega)\in C(T)$ となる。従って，$P(X\in F)=1$，なら $P(N)=0$，より

$$P(X\in C(T)) = 1$$

である。逆に，$P(X\in C(T))>0$，とする。明らかに，$X(\omega)\in C(T)$，なら $X(\omega)\in F$，であるから，

$$P(X\in F)>0, \quad \text{従って，}\quad P(X\in F)=1.$$

これより，$P(X\in F)=0$，なら $P(X\in C(T))=0$，となることが分る。よって，

$$P(X\in C(T)) = 0 \text{ or } 1.$$

となる。

(ii) $N' = \{\omega;\ X(\omega)\notin F\}\cup N$，とおくと，$N'\in\mathfrak{A}$，かつ $P(N')=0$，である。そこで，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\tilde{X}(t,\omega) = \begin{cases} X(t,\omega), & t \in T,\ \omega \notin N' \\ 0, & t \in T,\ \omega \in N' \end{cases}$$

$$\tilde{X}(\omega) = (\tilde{X}(t,\omega))_{t \in T}, \qquad \omega \in \Omega$$

とおけば，

$$P(X(t) = \tilde{X}(t),\ t \in T) = 1,$$

かつ，$\tilde{X}$ は $(C(T), \mathcal{E}_C)$ に値をとる vector Gaussian となる。但し，$\mathcal{E}_C$ は $C(T)$ の cylinder sets 全体の生成する σ-field である。

$$N(x) = \sup_{t \in T} |x(t)|, \qquad x \in C(T)$$

とおけば，N は $(C(T), \mathcal{E}_C)$ の pseudo-semi-norm となり，明らかに $P(N(\tilde{X}) < \infty) = 1$，である。従って，定理 8.2 より，ある $\alpha > 0$ が存在して，

$$E[\exp\{\alpha N^2(\tilde{X})\}] < +\infty$$

となる。$\tilde{X}$ の定義より，

$$E[\exp\{\alpha N^2(\tilde{X})\}] = E[\exp\{\alpha (\sup_{t \in T} |X(t)|)^2\}]$$

であるから，系の主張が得られる。　　　　　　(証明終)

系 3　$(E, \mathcal{E})$ を measurable vector space とし，X を $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L}, P)$ で定義される E-値 vector Gaussian とする。さらに，N は $(E, \mathcal{E})$ 上の pseudo-semi-norm であり，

$$P(0 < N(X) < \infty) = 1$$

を満たすとする。この時，定理 8.2 より，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$E[N^k(X)] < \infty$，となるから，$A > 0$ と k を

$$P(N(X) > A(E[N^k(X)])^{\frac{1}{k}}) < A^{-k} < \frac{1}{2},$$

となるように固定して考える。この時，X，N に無関係に定数 $M_k(A) > 0$，が存在して，$0 < \alpha \leq (24)^{-1} \log(A^k - 1)$，なる任意の α に対して，次が成り立つ；

(i) $$E\left[\exp\left\{\alpha\left(\frac{N(X)}{A(E[N^k(X)])^{\frac{1}{k}}}\right)^2\right\}\right] \leq M_k(A),$$

(ii) $x > 1$，なら

$$P(N(X) > xA(E[N^k(X)])^{\frac{1}{k}}) \leq e^{-\alpha x^2} M_k(A).$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

証明 $t_0 = A(E[N^k(X)])^{\frac{1}{k}}$, とおくと, 仮定より $P(N(X) \leq t_0) > 1 - A^{-k} > \frac{1}{2}$, であるから, 定理 8.2 の証明において, q を $(1-A^{-k})$ で置き換えて考えると,

$$F(t) = P(N(X)/t_0 > t)$$
$$< \exp\left\{-\frac{t^2}{4(\sqrt{2}+1)^2}\operatorname{Log}(A^k-1)\right\}, \quad t > 1,$$

が成り立つことが分る。これより,

$$E\left[\exp\left\{\frac{\operatorname{Log}(A^k-1)}{24}\left(\frac{N(X)}{A(E[N^k(X)])^{\frac{1}{k}}}\right)^2\right\}\right]$$
$$= E\left[\exp\left\{\frac{\operatorname{Log}(A^k-1)}{24\cdot t_0^2}N^2(X)\right\}; N(X) \leq t_0\right] +$$
$$+ E\left[\exp\left\{\frac{\operatorname{Log}(A^k-1)}{24\, t_0^2}N^2(X)\right\}; N(X) > t_0\right]$$
$$\leq \exp\left\{\frac{\operatorname{Log}(A^k-1)}{24}\right\} - \int_1^\infty \exp\left\{\frac{\operatorname{Log}(A^k-1)}{24}t^2\right\} dF(t)$$
$$\leq \exp\left\{\frac{\operatorname{Log}(A^k-1)}{24}\right\} + \exp\left\{\frac{\operatorname{Log}(A^k-1)}{24}\right\} A^{-k}$$
$$+ \int_1^\infty \exp\left\{\frac{\operatorname{Log}(A^k-1)}{24}t^2\right\}\exp\left\{-\frac{\operatorname{Log}(A^k-1)}{4(\sqrt{2}+1)^2}t^2\right\} dt = M_k(A) < +\infty,$$

となり, (i) が成り立つことが分る。 又, $x > 1$, なら

$$M_k(A) \geq E\left[\exp\left\{\alpha\left(\frac{N(X)}{A(E[N^k(X)])^{\frac{1}{k}}}\right)^2\right\}\right]$$
$$\geq E\left[\exp\left\{\alpha\left(\frac{N(X)}{A(E[N^k(X)])^{\frac{1}{k}}}\right)^2\right\}; N(X) > xA(E[N^k(X)])^{\frac{1}{k}}\right]$$
$$\geq e^{\alpha x^2} P(N(X) > xA(E[N^k(X)])^{\frac{1}{k}})$$

これより, (ii) が成り立つ。 (証明終)

系 4 E を separable Banach space とし, E^* を E の dual space とする。

$$\mathcal{E} = \sigma[\{x \in E ; \langle x, f\rangle \leq 1\} ; f \in E^*],$$

とおくと, $(E, \mathcal{E})$ は measurable vector space となる。X_n, $n = 1, 2, \cdots$, を E-値 vector Gaussian とし, $n \to \infty$ のとき X_n はある確率変数 X に法則収束すると仮定する。ここで, X_n が X に法則収束するとは, X_n の分布 μ_n が X の分布 μ に弱収束すること, すなわち, $(E, \mathcal{E})$ で定義される任意の $\mathbb{R}$-値有界連続関数 f に対して,

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\int_E f\, d\mu_n \longrightarrow \int_E f\, d\mu, \qquad n \longrightarrow \infty$$

が成立することである。以上の準備のもとで次が成り立つ;

(i) X は vector Gaussian である,

(ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$E[\|X_n\|^k] \longrightarrow E[\|X\|^k], \qquad n \longrightarrow \infty$$

である。但し, $\|\cdot\|$ は E の norm である。

証明 (i) Eの定義より, X が vector Gaussian である為には, 任意の $f_1, \cdots, f_k \in E^*$ に対して, $(\langle X, f_1\rangle, \cdots, \langle X, f_k\rangle)$ が k 次元 centered G.r.v. となることが必要かつ十分である。X_n が vector Gaussian であるから, 任意の $z_1, \cdots, z_k \in \mathbb{R}$ に対して, $\sum_{i=1}^{k} z_i \langle X_n, f_i\rangle$ は1次元 centered Gaussian であり, X_n が X に法則収束することより, この和は $\sum_{i=1}^{k} z_i \langle X, f_i\rangle$ に法則収束する。従って, $\sum_{i=1}^{k} z_i \langle X, f_i\rangle$ は G.r.v. となり, これより X も vector Gaussian であることになる。

(ii) $F(t) = P(\|X\| > t), \quad t \geq 0$

$F_n(t) = P(\|X_n\| > t), \quad t \geq 0, \quad n = 1, 2, \cdots$

とおく。任意の k に対して,

$$E[\|X\|^k] = -\int_0^\infty t^k\, dF(t)$$

$$E[\|X_n\|^k] = -\int_0^\infty t^k\, dF_n(t), \qquad n = 1, 2, \cdots$$

となるが, 定理8.2 より, X_n に対して $c_n > 0$, が存在して, 十分大きな $t > 0$ に対しては, $F_n(t) \leq e^{-c_n t^2}$, と評価されるから, 部分積分によって

$$E[\|X_n\|^k] = -\int_0^\infty t^k\, dF_n(t) = \int_0^\infty F_n(t)\, k t^{k-1}\, dt$$

となる。$t \geq 0$, に対しては, $\{x ; \|x\| > t\}$, $\{x ; \|x\| \geq t\}$ はそれぞれ E の開集合, 閉集合となるから, X_n が X に法則収束することより, Prohorov の定理によって,

$$F(t) = P(\|X\| > t) \leq \varliminf_{n\to\infty} P(\|X_n\| > t) = \varliminf_{n\to\infty} F_n(t)$$

$$F(t-) = P(\|X\| \geq t) \geq \varlimsup P(\|X_n\| > t) = \varlimsup_{n\to\infty} F_n(t-)$$

が得られるから, $F(t)$ の任意の連続点 t において,

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t),$$

となる。これより，t_0 を $F(t)$ の連続点で，かつ $F(t_0) \leq \frac{1}{4}$，となるようにとれば，ある n_0 が定まって，

$$F_n(t_0) = P(\|X_n\| > t_0) = 1 - q_n, \quad n \geq n_0$$

とおくとき，$1 - q_n \leq \frac{1}{4}$，すなわち $q_n \geq \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$，となる

この時，$\log \frac{q_n}{1-q_n} \geq \log 3 > 0$，であるから定理8.2より

$$F_n(t) = P(\|X_n\| > t) \leq \exp\left\{-\frac{t^2}{24 t_0^2} \log \frac{q_n}{1-q_n}\right\}$$
$$\leq \exp\left\{-\frac{t^2}{24 t_0^2} \log 3\right\}, \quad t \geq t_0,\ n \geq n_0$$

を得る。$F(t)$ の不連続点は高々可算個しかないから，

$$E[\|X_n\|^k] = \int_0^\infty F_n(t)\, k t^{k-1} dt$$
$$\longrightarrow \int_0^\infty F(t)\, k t^{k-1} dt = E[\|X\|^k], \quad n \longrightarrow \infty$$

となる。 （証明終）

<u>定理 8.3</u>　$\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ を $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L}, P)$ で定義される，$\{1, 2, \cdots\}$ 上の centered G.r.f. とし，

$$P(\sup_n |X_n| < \infty) = 1,$$

とする。$\sigma_n^2 = E[X_n^2]$，$\sigma_n \geq 0$，$n = 1, 2, \cdots$，とおく。

$$\gamma = \sup\{\alpha\ ;\ E[\exp\{\alpha \sup_n |X_n|^2\}] < \infty\}$$

とおくと，$\gamma = (2 \sup_n \sigma_n^2)^{-1}$，である。

<u>証明</u>　(i)

$$E[\exp\{\alpha \sup_n |X_n|^2\}]$$
$$\geq E[e^{\alpha |X_n|^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x^2} (\sqrt{2\pi}\,\sigma_n)^{-1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}} dx$$
$$= \begin{cases} (1 - 2\alpha\sigma_n^2)^{-\frac{1}{2}}, & \alpha < (2\sigma_n^2)^{-1} \text{ のとき} \\ \infty, & \alpha \geq (2\sigma_n^2)^{-1} \text{ のとき} \end{cases}$$

であるから，$\gamma \leq (2\sigma_n^2)^{-1}$，$n = 1, 2, \cdots$，従って

$$\gamma \leq (2 \sup_n \sigma_n^2)^{-1}, \quad \text{である。}$$

(ii)　$\alpha < (2 \sup_n \sigma_n^2)^{-1}$，とする。まず，$\sigma^2 = \sup_n \sigma_n^2 < \infty$ であることを示す。もし，$\sigma^2 = +\infty$，であるとすると，任意の $\beta > 0$ に対して，$\beta \geq (2\sigma_{n_0}^2)^{-1}$，となる n_0 が存在するから，

$$E[\exp\{\beta \sup_n |X_n|^2\}] \geq E[e^{\beta |X_{n_0}|^2}] = +\infty,$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

一方，$P(\sup_n |X_n| < +\infty) = 1$，より定理8.2により，ある $\beta' > 0$，が存在して $E[\exp\{\beta' \sup_n |X_n|^2\}] < \infty$，となり矛盾を生じる。従って，$\sigma^2 < +\infty$ である。

次に，$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ で定義される1次元G.r.v. ξ_n, $n=1,2,\cdots$ が存在して，ξ_n は互いに独立であり，各 ξ_n は $N(0,1)$ に従い，$a_{n,k}$, $k=1,2,\cdots,n$，を適当にとることにより，

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\, \xi_k, \quad n = 1,2,\cdots$$

と表わされることに注意する。そこで，各 n, k，に対して

$$X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{k\wedge n} a_{k,j}\, \xi_j,$$

とおく。但し，$k \wedge n = \min(k, n)$，である。さらに，

$$Y_k^{(-n)} = \begin{cases} 0, & k \le n \text{ のとき} \\ \sum_{j=n+1}^{k} a_{k,j}\, \xi_j, & k > n \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく。この時，$X_k = X_k^{(n)} + Y_k^{(-n)}$，$k = 1,2,\cdots$，$n=1,2,\cdots$ である。$\mathfrak{A}$ の sub-σ-field $\mathcal{B}^{(-n)}$ を

$$\mathcal{B}^{(-n)} = \sigma[\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots]$$

と定める。各 ξ_j が互いに独立で $N(0,1)$ に従うことより，k を固定して考えれば，$\{Y_k^{(-n)}, \mathcal{B}^{(-n)}, n = \cdots,3,2,1\}$ は martingale であり，$\{\sup_k |Y_k^{(-n)}|, \mathcal{B}^{(-n)}, n=\cdots,3,2,1\}$ は submartingale となる。$P(\sup_k |X_k| < +\infty) = 1$，より $P(\sup_k |Y_k^{(-n)}| < \infty) = 1$，であり，$n$ を固定して考えた時 $\{Y_k^{(-n)}; k=1,2,\cdots\}$ が G.r.f. になるから，

$$E[\sup_k |Y_k^{(-n)}|] < \infty, \quad n=1,2,\cdots$$

となることに注意する。ここで，supermartingale に関する，次の定理を使う；

"$(X_n, \mathcal{F}_n; n \in -\mathbb{N})$ は supermartingale，$\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n\in -\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$，とし $\sup_n E[X_n] < +\infty$，を仮定する。この時，$\lim_{n\to-\infty} X_n = X$，が a.s. に存在し，かつ $E[|X|] < +\infty$，となる。"

(Meyer, P. A.; Probability and Potential, p.86, Theorem 21 参照)

$\{-\sup_k |Y_k^{(-n)}|, \mathcal{B}^{(-n)}, n=\cdots,3,2,1\}$ が supermartingale

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

であることに注意して，定理を使えば

$$\lim_{n\to\infty} \sup_k |Y_k^{(-n)}| = Y_{-\infty}$$

が a.s. に存在し，かつ $\mathcal{B}^{(-\infty)}$-measurable，$E[|Y_{-\infty}|]<\infty$，となる。但し，$\mathcal{B}^{(-\infty)} = \bigcap_{n\in N}\mathcal{B}^{(-n)}$，である。ところが，$\xi_n$ が互いに独立であったから，Kolmogorov の 0-1 law により

ある $a\geq 0$ が存在して，$P(Y_{-\infty}=a)=1$ となる。

つまり，$\sup_k |Y_k^{(-n)}| \longrightarrow a$，a.s.，$(n\longrightarrow\infty)$.

従って，$\sup_k|Y_k^{(-n)}|$ は $n\to\infty$ のとき，a に確率収束するから，任意の ε，$0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，に対して，$n(\varepsilon)$ が存在して，

$$P(\sup_k |Y_k^{(-n)}| > a+1) < \varepsilon, \qquad n\geq n(\varepsilon)$$

即ち，$P(\sup_k |Y_k^{(-n)}| \leq a+1) \geq 1-\varepsilon > \frac{1}{2}$，$n\geq n(\varepsilon)$

となる。$\{Y_k^{(-n)}, k=1,2,\cdots\}$ が G.r.f. であり，$\sup_k|Y_k^{(-n)}|$，が pseudo-semi-norm で，かつ

$P(\sup_k |Y_k^{(-n)}| < +\infty)=1$，であることから，定理8.2 より，$0<\beta<(24(a+1)^2)^{-1}\log\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$，なら

$$E[\exp\{\beta \sup_k |Y_k^{(-n)}|^2\}] < +\infty, \qquad n\geq n(\varepsilon),$$

となる。一方，$X_k = X_k^{(n)} + Y_k^{(-n)}$，であるから

$$\sup_k |X_k| \leq \sup_k |X_k^{(n)}| + \sup_k |Y_k^{(-n)}|,$$

となるので，任意の $\eta>0$ に対して，

$$\sup_k |X_k|^2 \leq (1+\eta)\sup_k |X_k^{(n)}| + (1+\tfrac{1}{\eta})\sup_k |Y_k^{(-n)}|$$

を得る。$\sup_k |X_k^{(n)}|$ と $\sup_k |Y_k^{(-n)}|$ とは独立になるので，$\alpha>0$ なら

$$\begin{aligned}
&E[\exp\{\alpha \sup_k |X_k|^2\}] \\
&\leq E[\exp\{\alpha(1+\eta)\sup_k |X_k^{(n)}|^2 + \alpha(1+\tfrac{1}{\eta})\sup_k |Y_k^{(-n)}|^2\}] \\
&= E[\exp\{\alpha(1+\eta)\sup_k |X_k^{(n)}|^2\}]\,E[\exp\{\alpha(1+\tfrac{1}{\eta})\sup_k |Y_k^{(-n)}|^2\}]
\end{aligned}$$

となる。ここで，

$X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{k\wedge n} a_{kj}\xi_j$，より Schwarz の不等式により，

$$\begin{aligned}
|X_k^{(n)}|^2 &\leq \Big(\sum_{j=1}^{k\wedge n} a_{kj}^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{k\wedge n}\xi_j^2\Big) \\
&\leq \Big(\sum_{j=1}^{k} a_{kj}^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2\Big) = \sigma_k^2\cdot\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2 \leq \sigma^2\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2
\end{aligned}$$

従って，

$$\sup_k |X_k^{(n)}|^2 \leq \sigma^2\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

となることに注意すると，もし $\alpha(1+\eta) < (2\sigma^2)^{-1}$，なら

$$E\left[\exp\{\alpha(1+\eta)\sup_k |X_k^{(n)}|^2\}\right]$$
$$\leqq E\left[\exp\{\alpha(1+\eta)\sigma^2 \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\}\right] = (1-2\alpha(1+\eta)\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

又，すでに示した様に，

$$\alpha\left(1+\frac{1}{\eta}\right) < (24(a+1)^2)^{-1} \log \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},$$

なら，

$$E\left[\exp\{\alpha\left(1+\frac{1}{\eta}\right)\sup_k |Y_k^{(-n)}|^2\}\right] < +\infty,$$

であった。そこで，$\alpha < (2\sigma^2)^{-1}$，であるから，まず $\eta > 0$ を $\alpha(1+\eta) < (2\sigma^2)^{-1}$，となるようにとり，次に $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ を，$\alpha(1+\frac{1}{\eta}) < (24(a+1)^2)^{-1} \log \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$，となるようにとり，最後に $n \geqq n(\varepsilon)$ として，今までの議論をくり返せば

$$E\left[\exp\{\alpha \sup_k |X_k|^2\}\right] < +\infty$$

であることが分る。従って，$\gamma \geqq (2\sigma^2)^{-1}$，である。

(証明終)

§9 *Oscillation of a sample function*

この節においてはとくにことわらない限り，(T, d) を pseudo-metric space とする。$t \in T$，$\varepsilon > 0$，に対して，

$$B_d(t,\varepsilon) = \{ s \in T ;\ d(s,t) < \varepsilon \}，とおく。$$

T で定義された $\overline{R}$-値関数 f と，$t \in T$ に対して，

$$\overline{W}^d(f;t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{s \in B_d(t,\varepsilon)} (f(s) - f(t)),$$
$$\underline{W}^d(f;t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{s \in B_d(t,\varepsilon)} (f(s) - f(t))$$

とおく。但し，$\infty - \infty = (-\infty) - (-\infty) = 0$，と約束する。

$$W^d(f;t) = \overline{W}^d(f;t) - \underline{W}^d(f;t)$$

とおき，これを f の *d-oscillation function* と呼ぶ。

$$W^d(f;t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{s,s' \in B_d(t,\varepsilon)} |f(s) - f(s')|$$

が成り立つ。

次に，$\varepsilon > 0$ に対して，

$$V^d(f;t,\varepsilon) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup\{|f(s) - f(s')| ;\ s,s' \in B_d(t,\varepsilon),\ d(s,s') < \delta\}$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

とおく。

注意 $V^d(f;t,\varepsilon) \geqq \sup\{W^d(f;s)\ ;\ s \in B_d(t,\varepsilon)\}$
である，実際，任意の $u \in B_d(t,\varepsilon)$ に対して

$$
\begin{aligned}
V^d(f;t,\varepsilon) &= \lim_{\delta \downarrow 0} \sup\{|f(s)-f(s')|\ ;\ s,s' \in B_d(t,\varepsilon),\ d(s,s')<\delta\} \\
&\geqq \lim_{\delta \downarrow 0} \sup\{|f(s)-f(s')|\ ;\ s,s' \in B_d(t,\delta)\} \\
&= W^d(f;t).
\end{aligned}
$$

しかし，一般には，逆向きの不等式は成立しない。

補題 9.1 f, g を (T,d) 上の実数値関数とする。

(i) f が $t \in T$ で d-連続であることと，

$$\overline{W}^d(f;t) = \underline{W}^d(f;t) = W^d(f;t) = 0$$

であることとは同値である。

(ii) g が $t \in T$ で d-連続であれば，

$$\overline{W}^d(f+g;t) = \overline{W}^d(f;t)$$
$$\underline{W}^d(f+g;t) = \underline{W}^d(f;t)$$
$$W^d(f+g;t) = W^d(f;t)$$

が成り立つ。

(iii) $W^d(f;t)$ は t の関数として，上半連続である。即ち，

$$W^d(f;t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{s \in B_d(t,\varepsilon)} W^d(f;s) \quad , \quad t \in T$$

が成り立つ。

(iv) $\displaystyle \lim_{\varepsilon \downarrow 0} V^d(f;t,\varepsilon) = W^d(f;t)$ ， $t \in T$

が成り立つ。

(v) f が T 上で d-一様連続であれば，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$V^d(f;t,\varepsilon) = 0 \quad , \quad t \in T$$

となる。とくに (T,d) が compact であれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$V^d(f;t,\varepsilon) = 0 \quad , \quad t \in T$$

となるならば，f は T 上で d-一様連続である。

(vi) g が T 上で d-一様連続であれば，

$$V^d(f+g;t,\varepsilon>0) = V^d(f;t,\varepsilon) \quad , \quad t \in T,\ \varepsilon>0$$

が成り立つ。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

(vii) $V^d(f;t,\varepsilon)$ は ε の関数として，単調増大かつ左連続である。

(viii) $V^d(f;t,\varepsilon) = \lim_{\delta\downarrow 0} \inf\{V^d(f;s,\varepsilon)\,;\, s\in B_d(t,\delta)\}$，$\varepsilon>0$
が成り立つ。つまり，$V^d(f;t,\varepsilon)$ は t の関数として，下半連続である。

(ix) $\lim_{\delta\downarrow 0} \sup\{V^d(f;s,\varepsilon)\,;\, s\in B_d(t,\delta)\} \leq \lim_{\delta\downarrow 0} V^d(f;t,\varepsilon+\delta)$
が，任意の $t\in T$，$\varepsilon>0$，に対して成り立つ。

証明 (i) 定義より明らか。

(ii) 例えば，$\overline{W}^d(f+g\,;t) = \overline{W}^d(f\,;t)$，については
$\varepsilon>0$，に対して

$$\sup_{s\in B_d(t,\varepsilon)} (f(s)-f(t)) - \sup_{s\in B_d(t,\varepsilon)} (g(s)-g(t))$$
$$\leq \sup_{s\in B_d(t,\varepsilon)} (f(s)+g(s)-f(t)-g(t))$$
$$\leq \sup_{s\in B_d(t,\varepsilon)} (f(s)-f(t)) + \sup_{s\in B_d(t,\varepsilon)} (g(s)-g(t))$$

が成り立つことより，$\varepsilon\downarrow 0$ とすれば得られる。他も同様。

(iii) $W^d(f;t) \leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup\{W^d(f;s)\,;\, s\in B^d(t,\varepsilon)\}$
は明らかであるから，逆向きの不等式を示せばよい。
任意の $\varepsilon>0$，$\delta>0$，に対して

$$\sup_{u\in B_d(t,\varepsilon)} W^d(f;u) \leq \sup_{s,s'\in B_d(t,\varepsilon+\delta)} |f(s)-f(s')|$$

が成り立つから，$\varepsilon'>0$，に対して

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{u\in B_d(t,\varepsilon)} W^d(f;u) \leq \sup_{s,s'\in B_d(t,\varepsilon'+\delta)} |f(s)-f(s')|$$

となる。$\varepsilon'\downarrow 0$，$\delta\downarrow 0$ として

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{u\in B_d(t,\varepsilon)} W^d(f;u) \leq W^d(f;t)\,,$$

となる。

(iv) $V^d(f;t,\varepsilon) \geq \sup\{W^d(f;u)\,;\, u\in B_d(t,\varepsilon)\} \geq W^d(f;t)$
であるから，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} V^d(f;t,\varepsilon) \geq W^d(f;t)$$

となる。逆に，

$$V^d(f;t,\varepsilon) \leq \sup\{|f(s)-f(s')|\,;\, s,s'\in B_d(t,\varepsilon)\}$$

であるから，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} V^d(f;t,\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{s,s'\in B_d(t,\varepsilon)} |f(s)-f(s')| = W^d(f;t)$$

を得る。

(v) f が T 上で d－一様連続であれば $V^d(f;t,\varepsilon)$ の定義より，任意の $\varepsilon>0$，に対して，明らかに

$$V^d(f;t,\varepsilon)=0,\quad t\in T$$

となる。次に (T,d) が compact であるとすると，$\varepsilon>0$ に対して，$t_1,\cdots,t_n\in T$，を $\bigcup_{i=1}^{n} B_d(t_i,\frac{\varepsilon}{2})\supset T$，となるようにとれる。$V^d(f;t,\varepsilon)=0$，$t\in T$，であれば，任意の $\eta>0$，に対して，$\delta_i>0$ が存在して，$s,s'\in B_d(t_i,\varepsilon)$ かつ $d(s,s')<\delta_i$ なら $|f(s)-f(s')|<\eta$，となる。

$\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{2},\delta_i,i=1,\cdots,n\}$，とおくと，$\{B_d(t_i,\frac{\varepsilon}{2})\}_{i=1,\cdots,n}$ が T の covering であることより，$s,s'\in T$，$d(s,s')<\delta$ なら，$s,s'\in B_d(t_i,\varepsilon)$ となる t_i が存在するから，

$|f(s)-f(s')|<\eta$，となる。これは f が T 上で d－一様連続であることに他ならない。

(vi) g が d－一様連続であることより明らか。

(vii) $V^d(f;t,\varepsilon)$ が ε の関数として単調増大であることは，定義より明らかであるから，左連続であることを示す。その為には，$\lim_{\varepsilon'\uparrow\varepsilon} V^d(f;t,\varepsilon')\geq V^d(f;t,\varepsilon)$，$\varepsilon>0$，を示せば十分。まず，

$$\sup\{|f(s)-f(s')|\ ;\ s,s'\in B_d(t,\varepsilon),\ d(s,s')<\delta\}$$

が，ε の関数として左連続であることに注意する。これは，$B_d(t,\varepsilon)$ が開球であることより分る。$0<\varepsilon'<\varepsilon$，に対して

$$\sup_{\substack{s,s'\in B_d(t,\varepsilon)\\ d(s,s')<\delta}} |f(s)-f(s')| - \sup_{\substack{s,s'\in B_d(t,\varepsilon')\\ d(s,s')<\delta}} |f(s)-f(s')|$$

$$\leq \sup\{|f(s)-f(s')|\ ;\ s,s'\in B_d(t,\varepsilon)-B_d(t,\varepsilon'),\ d(s,s')<\delta\}$$

の右辺は，δ の関数とし単調増加であり，ε' の関数としては，単調減少である。従って，任意の $\eta>0$ に対して，$\delta_\eta>0$，$\varepsilon_\eta>0$ が存在して，$0<\delta<\delta_\eta$，$\varepsilon_\eta<\varepsilon'<\varepsilon$，ならば

$$\sup_{\substack{s,s'\in B_d(t,\varepsilon')\\ d(s,s')<\delta}} |f(s)-f(s')| \geq \sup_{\substack{s,s'\in B_d(t,\varepsilon)\\ d(s,s')<\delta}} |f(s)-f(s')| - \eta$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\sup_{\substack{s,s'\in B_d(t,\varepsilon')\\ d(s,s')<\delta}} |f(s)-f(s')| \geqq \lim_{\delta'\downarrow 0} \sup_{\substack{s,s'\in B_d(t,\varepsilon)\\ d(s,s')<\delta'}} |f(s)-f(s')| - \eta$$

となる。よって

$$\lim_{\varepsilon'\uparrow\varepsilon} \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\substack{s,s'\in B_d(t,\varepsilon')\\ d(s,s')<\delta}} |f(s)-f(s')| \geqq \lim_{\delta'\downarrow 0} \sup_{\substack{s,s'\in B_d(t,\varepsilon)\\ d(s,s')<\delta'}} |f(s)-f(s')| - \eta$$

これより，$\lim_{\varepsilon'\uparrow\varepsilon} V^d(f;t,\varepsilon') \geqq V^d(f;t,\varepsilon)-\eta$.

$\eta\downarrow 0$ ，として

$$\lim_{\varepsilon'\uparrow\varepsilon} V^d(f;t,\varepsilon') \geqq V^d(f;t,\varepsilon) .$$

を得る。

(viii) $V^d(f;t,\varepsilon) \geqq \lim_{\delta\downarrow 0} \inf_{s\in B_d(t,\delta)} V^d(f;s,\varepsilon)$

は明らか。従って，

$$V^d(f;t,\varepsilon) \leqq \lim_{\delta\downarrow 0} \inf_{s\in B_d(t,\delta)} V^d(f;s,\varepsilon)$$

を示せばよい。

$\eta>0$ に対して，$d(t,t')<\eta$ なら，$B_d(t,\varepsilon)\subset B_d(t',\varepsilon+\eta)$ であるから，$V^d(f;t,\varepsilon) \leqq V^d(f;t',\varepsilon+\eta)$ ，となるので

$$\lim_{\delta\downarrow 0} V^d(f;t,\varepsilon-\delta) \leqq \lim_{\delta\downarrow 0} \inf_{t'\in B_d(t,\delta)} V^d(f;t',\varepsilon)$$

一方，(vii) により $V^d(f;t,\varepsilon)$ は ε について左連続であったから，結局

$$V^d(f;t,\varepsilon) \leqq \lim_{\delta\downarrow 0} \inf_{t'\in B_d(t,\delta)} V^d(f;t',\varepsilon)$$

となる。

(ix) (viii) の証明と同様に

$$\sup_{s\in B_d(t,\delta)} V^d(f;s,\varepsilon) \leqq V^d(f;t,\varepsilon+\delta)$$

が成り立つから，極限移行すればよい。

(証明終)

定義 9.1　(T,d) を第2可算公理を満たす pseudo-metric space とし，S を (T,d) で dense な T の可算部分集合とする。(T,d) で定義された，$\overline{R}$-値関数 f が S に関して，d-separable であるとは，任意の $t\in T$ に対して

$$f(t) \in \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{f(B_d(t,\varepsilon)\cap S)}$$

となることである。但し，$A\subset T$ に対して，

$f(A) = \{ f(u) ; u \in A \}$ とする。

S を (T, d) で dense な可算部分集合とする。この時

$$\overline{W}^d_S(f;t) = \lim_{n\uparrow\infty} \sup_{s\in B_d(t,1/n)\cap S} (f(s) - f(t)),$$

$$\underline{W}^d_S(f,t) = \lim_{n\uparrow\infty} \inf_{s\in B_d(t,1/n)\cap S} (f(s) - f(t)),$$

$$W^d_S(f,t) = \overline{W}^d_S(f,t) - \underline{W}^d_S(f,t),$$

$$V^d_S(f;t,\varepsilon) = \lim_{n\uparrow\infty} \sup_{\substack{s,s'\in B_d(t,\varepsilon)\cap S \\ d(s,s')<1/n}} |f(s) - f(s')|$$

とおく。但し，f，t，ε については $\overline{W}^d(f,t)$ 等の定義に準ずる。

<u>補題 9.2</u>　S を (T,d) で dense な可算部分集合とし，f を S に関して d-separable とする。任意の $t \in T$，$\varepsilon > 0$ に対して，次が成り立つ；

(i) $\overline{W}^d(f;t) = \overline{W}^d_S(f;t)$,

$\underline{W}^d(f;t) = \underline{W}^d_S(f;t)$,

$W^d(f;t) = W^d_S(f;t)$.

(ii) $V^d(f;t,\varepsilon) = V^d_S(f;t,\varepsilon)$

(iii) $V^d_S(f;t,\varepsilon) \leq \lim_{n\uparrow\infty} \inf_{s\in B_d(t,1/n)\cap S} V^d_S(f;s,\varepsilon)$

(iv) $\lim_{n\uparrow\infty} \sup_{s\in B_d(t,1/n)\cap S} V^d_S(f;s,\varepsilon) \leq \lim_{n\uparrow\infty} V^d_S(f;t,\varepsilon+1/n)$

(v) $W^d(f;t) = \lim_{n\uparrow\infty} \lim_{m\uparrow\infty} \sup_{s\in B_d(t,1/m)\cap S} V^d_S(f;s,1/n)$

<u>証明</u>　(i)，(ii) は f が S に関して d-separable であることから明らか。

(iii)　補題 9.1 の (viii) と，補題 9.2 の (ii) 及び

$$\inf_{s\in B_d(t,\delta)} V^d(f;s,\varepsilon) \leq \inf_{s\in B_d(t,\delta)\cap S} V^d(f;s,\varepsilon),$$

であることより導かれる。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

iii) $\delta > 0$, に対して

$$\sup_{s \in B_d(t,\delta) \cap S} V_S^d(f\,;s,\varepsilon) \leq \sup_{s \in B_d(t,\delta)} V_S^d(f\,;s,\varepsilon)$$

$$\leq V_S^d(f\,;t,\varepsilon+\delta) ,$$

であることによる。

(v) (iv) の証明において述べたことと，補題 9.1 の (iv)，補題 9.2 の (ii) により

$$\lim_{n\uparrow\infty} \lim_{m\uparrow\infty} \sup_{s \in B_d(t,1/m)\cap S} V_S^d(f, s, \tfrac{1}{n})$$

$$\leq \lim_{n\uparrow\infty} \lim_{m\uparrow\infty} V_S^d(f\,;t, \tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{m}) = W^d(f\,;t)$$

であり，一方

$$W^d(f\,;t) = \lim_{n\uparrow\infty} V_S^d(f\,;t, \tfrac{1}{n})$$

$$\leq \lim_{n\uparrow\infty} \lim_{m\uparrow\infty} \inf_{s \in B_d(t,1/m)\cap S} V_S^d(f\,;s, \tfrac{1}{n})$$

$$\leq \lim_{n\uparrow\infty} \lim_{m\uparrow\infty} \sup_{s \in B_d(t,1/m)\cap S} V_S^d(f\,;s, \tfrac{1}{n})$$

となるから，

$$W^d(f\,;t) = \lim_{n\uparrow\infty} \lim_{m\uparrow\infty} \sup_{s \in B_d(t,1/m)\cap S} V_S^d(f\,;s, \tfrac{1}{n})$$

を得る。

(証明終)

注意 $\quad W^d(f\,;t) = \lim_{n\uparrow\infty} \sup_{s \in B_d(t,1/n)\cap S} W^d(f\,;s)$

は，一般には成り立たない。

次に d_1, d_2 を T 上の *pseudo-distances* とし，d_2 は d_1 に関して一様連続であるとする。即ち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して，$s, t \in T$，$d_1(s,t) < \delta$ なら $d_2(s,t) < \varepsilon$ となる。この時，(T, d_1) から (T, d_2) への恒等写像は連続である。従って，$K \subset T$，が (T, d_1) で compact なら，K は (T, d_2) でも compact である。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

補題 9.3　(T, d_1), (T, d_2) を pseudo-metric spaces とし、d_2 は d_1 に関して一様連続とする。さらに (T, d_1) は compact とする。

$$\Lambda_t = \{ s \in T ;\ d_2(s, t) = 0 \} \ ,\ t \in T$$

とおく。T上で定義される $\bar{R}$-値関数 f が d_1-一様連続であり，かつ $f(s) = f(t)$, $s \in \Lambda_t$, $t \in T$, であるとする。
この時，f は d_2-連続となる。さらに，この補題の前に述べたことから，(T, d_2) は compact となる。従って，f は d_2-一様連続でもある。

証明　$A \subset T$, $s \in T$, に対して，$d_1(s, A) = \inf_{u \in A} d_1(s, u)$, とおく。又 $\varepsilon > 0$, に対し

$$\Lambda_t^{\varepsilon} = \{ s \in T ;\ d_2(s, t) < \varepsilon \} = B_{d_2}(t, \varepsilon) \ ,\ t \in T$$

と書くことにする。さらに，

$$\mu_t(\varepsilon) = \sup_{s \in \Lambda_t^{\varepsilon}} d_1(s, \Lambda_t) \ ,\ t \in T ,$$

とおく。
$d_1(s, \Lambda_t)$ は s の関数として d_1-連続であり，(T, d_1) は compact であるから，$\mu_t(\varepsilon) < +\infty$, $t \in T$, $\varepsilon > 0$, である。
又，$\varepsilon \downarrow 0$, のとき Λ_t^{ε} は単調に Λ_t に収束するから，

$$\mu_t(\varepsilon) \longrightarrow 0 \ ,\quad \varepsilon \longrightarrow 0 ,\quad t \in T ,$$

である。$f(t)$ が d_1-一様連続であるから，任意の $\eta > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$s, t \in T$, $d_1(s, t) < \delta$ なら，$|f(s) - f(t)| < \eta$ ，とできる。この $\delta > 0$ に対して，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ なら

$$\mu_t(\varepsilon) = \sup_{s \in \Lambda_t^{\varepsilon}} d_1(s, \Lambda_t) < \delta ,$$

即ち，任意の $s \in \Lambda_t^{\varepsilon}$ に対して，$t(s) \in \Lambda_t$ が存在して $d_1(s, t(s)) < \delta$ ，となる。そこで，$s \in \Lambda_t$ なら，仮定より $f(s) = f(t)$, となるから，$\Lambda_t^{\varepsilon} = B_{d_2}(t, \varepsilon) = B_{d_2}(s, \varepsilon)$ ，となることに注意して，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$W^{d_2}(f;t) = W^{d_2}(f;s) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{u,u'\in A_t^{\varepsilon}} |f(u)-f(u')|$$
$$\leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{u,u'\in A_t^{\varepsilon}} \{ |f(u)-f(t(u))| + |f(u')-f(t(u'))| \}$$
$$\leq 2\eta,$$

$\eta>0$ は任意であったから，$W^{d_2}(f;t)=0$，$t\in T$，を得て，f が d_2-連続であることが分る。　（証明終）

以下，よく引用する仮定を次に述べる；

仮定 (I)　(T,d) は compact な pseudo-metric space である。従って，separable でもある。$\{X(t);t\in T\}$ は，完備な確率空間 $(\Omega,\mathcal{O}\!\mathcal{L},P)$ で定義された，T 上の centered G.r.f. であり，(S,N) に関して d-separable であり，かつ d-確率連続である。但し，S は (T,d) で dense な T の可算部分集合であり，$N\in\mathcal{O}\!\mathcal{L}$，$P(N)=0$，である。

さて，(T,d)，$(\Omega,\mathcal{O}\!\mathcal{L},P)$，$\{X(t);t\in T\}$ は仮定(I)を満たすものとする。$\{X(t);t\in T\}$ により T 上に pseudo-distance d_X が次のように定義された；

$$d_X(s,t) = \sqrt{E[(X(s)-X(t))^2]}, \quad s,t\in T.$$

この時，d_X は d-連続であり，(T,d) が compact であるから，d-一様連続である。実際，定理 3.1 より，$\{X(t);t\in T\}$ が d-確率連続な G.r.f. であることより，

$$t, s_n\in T, \quad d(s_n,t)\longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty)，なら$$
$$X(s_n)\longrightarrow X(t) \quad \text{in } L^2(\Omega,\mathcal{O}\!\mathcal{L},P)$$

となるから，$d_X(s_n,t)\longrightarrow 0 \quad (n\rightarrow\infty)$，となるからである。

定理 9.1　(T,d)，$(\Omega,\mathcal{O}\!\mathcal{L},P)$，$\{X(t);t\in T\}$ は仮定(I)を満たすものとする。この時，T で定義される $\overline{\mathbb{R}}$-値関数 $\alpha^d(t)$ が存在し，さらに，任意の $t\in T$ に対して $N_t\in\mathcal{O}\!\mathcal{L}$，$P(N_t)=0$，が存在して，$\omega\notin N_t$，に対して次が成り立つ；

(i)　$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{s\in B_d(t,\varepsilon)} X(s,\omega) = X(t,\omega) + \frac{1}{2}\alpha^d(t),$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

(ii) $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{s \in B_d(t,\varepsilon)} X(s,\omega) = X(t,\omega) - \frac{1}{2}\alpha^d(t)$,

(iii) $X(\cdot,\omega)$ を T 上の関数とみて，
$w^d(X(\cdot,\omega);t) = \alpha^d(t)$.

証明　$R(s,t) = E[X(s)X(t)]$ ，$s,t \in T$.
とおくと，$R(s,t)$ は $T\times T$ 上の p.d.k. となる。さらに Schwarz の不等式により，$s,s',t \in T$ に対して

$$\begin{aligned}|R(s,t) - R(s',t)| &\le E[\,|X(s) - X(s')|\,|X(t)|\,] \\ &\le E[|X(s)-X(s')|^2]\,E[|X(t)|^2] \\ &= d_X^2(s,s')\,E[|X(t)|^2],\end{aligned}$$

となり，$R(s,t)$ は s 又は t の関数として d－連続である。
$\mathcal{H}(R)$ を $R(s,t)$ を reproducing kernel にもつ reproducing kernel Hilbert space とすれば，仮定(I)より，(T,d) は separable となるから，定理6.1 により $\mathcal{H}(R)$ 自身が separable となる。そこで，$\{\varphi_n, n \in N\}$ を $\mathcal{H}(R)$ の C.O.N.S. とする。$\mathcal{H}(R)$ の norm を $\|\cdot\|$ で表わせば，§5 で示したように，

$$|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)| \le \|\varphi_n\|\, d_X(s,t) \quad , \quad s,t \in T \ , n \in N$$

となるから，φ_n は d－一様連続である。適当な確率空間 $(\Omega',\mathcal{O}\!\mathcal{L}',P')$ を考え，$\xi_n, n \in N$，を $(\Omega',\mathcal{O}\!\mathcal{L}',P')$ で定義され，互いに独立で，各々は $N(0,1)$ に従う確率変数の列とする。$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) = R(t,t)$, $t \in T$，により 定理6.1 の証明で述べたように，$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\xi_n$ は意味をもつが，ξ_n が互いに独立であることから，Kolmogorov の 0-1 law により

$$P'(\{\omega' ; \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\xi_n(\omega') \text{は収束する}\}) = 1 , \quad t \in T$$

となるから，各 $t \in T$ に対して，

$$\Omega'_t = \{\omega' ; \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\xi_n(\omega') \text{は収束する}\} \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}'$$

とし，$t \in T$, $\omega' \in \Omega'$ に対して $\tilde{X}(t,\omega')$ を

$$\tilde{X}(t,\omega') = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\xi_n(\omega') & , \quad \omega' \in \Omega'_t \\ +\infty & , \quad \omega' \notin \Omega'_t \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

で定義すれば、$\{X(t);t\in T\}$ と $\{\tilde{X}(t);t\in T\}$ とは同分布になる。さらに、(S,N) を仮定(I)で述べたものとする，つまり S は (T,d) で dense な可算部分集合で，$N\in\mathcal{O}\mathcal{C}$，$P(N)=0$，であり，$\{X(t);t\in T\}$ は (S,N) に関して d-separable とする。

$$(N_t')^c = \Big(\bigcap_{s\in S}\Omega_s'\Big)\cap\Omega_t' \quad ,\qquad t\in T$$

とおくと，$N_t'\in\mathcal{O}\mathcal{C}'$，$P'(N_t')=0$，となる。さらに，

$$\mathcal{O}\mathcal{C}_n' = \sigma[\,\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots\,] \,,\qquad n\in\mathbb{N}$$

とおくと，各 φ_n が d-連続であることより，$\omega\notin N_t'$ なら

$$\overline{W}_S^d\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\cdot)\xi_n(\omega');t\Big)=\overline{W}_S^d\Big(\sum_{n=k}^{\infty}\varphi_n(\cdot)\xi_n(\omega');t\Big)$$

が，任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して成り立つから，

$$\overline{W}_S^d(\tilde{X}(\cdot,\omega');t)=\overline{W}_S^d\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\cdot)\xi_n(\omega');t\Big)$$

は，ω' の関数として $\mathcal{O}\mathcal{C}_k$-measurable である。さらに，ξ_n が互いに独立であったことから，Kolmogorov の 0-1 law により，$t\in T$ に対し，$\overline{\alpha}^d(t)\in\overline{\mathbb{R}}$ が存在して

$$P'\big(\overline{W}_S^d(\tilde{X}(\cdot,\omega');t)=\overline{\alpha}^d(t)\big)=1$$

となる。$\underline{W}_S^d(\tilde{X}(\cdot,\omega');t)$ についても同様に $\underline{\alpha}^d(t)$ が存在して，

$$P'\big(\underline{W}_S^d(\tilde{X}(\cdot,\omega');t)=\underline{\alpha}^d(t)\big)=1\,,\quad t\in T\,,$$

となるが，$\{\tilde{X}(t);t\in T\}$ が centered G.r.f. であるから，$\{\tilde{X}(t);t\in T\}$ と $\{-\tilde{X}(t);t\in T\}$ とが同分布となるので，$\overline{W}_S^d(-\tilde{X}(\cdot,\omega');t)=-\underline{W}_S^d(\tilde{X}(\cdot,\omega');t)$，より

$$\overline{\alpha}^d(t)=-\underline{\alpha}^d(t)\,,\quad t\in T$$

となる。そこで，

$$\alpha^d(t)=\overline{\alpha}^d(t)-\underline{\alpha}^d(t)=2\,\overline{\alpha}^d(t)=-2\,\underline{\alpha}^d(t)\,,\quad t\in T$$

とおけば，$t\in T$ に対して

$$P'\left(\begin{array}{l}\overline{W}_S^d(\tilde{X}(\cdot,\omega');t)=\frac{1}{2}\alpha^d(t)\,,\ \underline{W}_S^d(\tilde{X}(\cdot,\omega');t)=-\frac{1}{2}\alpha^d(t)\\ W_S^d(\tilde{X}(\cdot,\omega');t)=\alpha^d(t)\,,\quad \text{かつ}\quad |\tilde{X}(t,\omega')|<\infty\end{array}\right)$$
$$=1$$

となる。そして，$\{X(t);t\in T\}$ と $\{\tilde{X}(t);t\in T\}$ とが同分布であることより，$t\in T$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$P\left(\begin{array}{l}\overline{W}^d_S(X(\cdot,\omega);t)=\frac{1}{2}\alpha^d(t),\ \underline{W}^d_S(X(\cdot,\omega);t)=-\frac{1}{2}\alpha^d(t)\\ W^d_S(X(\cdot,\omega);t)=\alpha^d(t),\ \text{かつ}\ |X(t,\omega)|<\infty\end{array}\right)=1,$$

となる。そこで，$t\in T$ に対して

$$(\hat{N}_t)^c=\{\omega\in\Omega;\ \overline{W}^d_S(X(\cdot,\omega);t)=\tfrac{1}{2}\alpha^d(t),\ \underline{W}^d_S(X(\cdot,\omega);t)=-\tfrac{1}{2}\alpha^d(t),\ W^d_S(X(\cdot,\omega);t)=\alpha^d(t),\ \text{かつ}\ |X(t,\omega)|<\infty\}$$

とおくと，$\hat{N}_t\in\mathcal{O}\!\mathcal{L}$，かつ $P(\hat{N}_t)=0$ ，である。

$\{X(t);t\in T\}$ が (S,N) に関して d- separable であるから

$$\overline{W}^d_S(X(\cdot,\omega);t)=\overline{W}^d(X(\cdot,\omega);t),$$
$$\underline{W}^d_S(X(\cdot,\omega);t)=\underline{W}^d(X(\cdot,\omega);t),$$
$$W^d_S(X(\cdot,\omega);t)=W^d(X(\cdot,\omega);t),\qquad \omega\notin N$$

となるから，$N_t=\hat{N}_t\cup N$ ，$t\in T$，とおけば，定理の主張が成り立つ。 (証明終)

<u>定理 9.2</u> (T,d)，$(\Omega,\mathcal{O}\!\mathcal{L},P)$，$\{X(t);t\in T\}$ は定理 9.1 と同じく 仮定(I) を満たすとする。さらに，$\alpha^d(t)$ を定理 9.1 によってその存在が示された関数とする。この時，

$$P(\{\omega;\ W^d(X(\cdot,\omega);t)=\alpha^d(t),\ t\in T\})=1,$$

が成り立つ。

<u>証明</u> $\{\tilde{X}(t);t\in T\}$，N_t'，$t\in T$，等を定理 9.1 の証明におけるものと同じとする，

$$N'=\bigcup_{s\in S}N_s'\ \in\mathcal{O}\!\mathcal{L}',$$

とおけば，$P'(N')=0$ ，である。定理 9.1 の証明において述べたように，各 φ_n が d- 一様連続であるから，補題 9.1 の (vi) により $t\in T$，$\varepsilon>0$ に対して $\omega'\notin N_t'$ なら

$$V^d_S(\tilde{X}(\cdot,\omega');t,\varepsilon)=V^d_S\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\cdot)\xi_n(\omega');t,\varepsilon\Big)$$
$$=V^d_S\Big(\sum_{n=k}^{\infty}\varphi_n(\cdot)\xi_n(\omega');t,\varepsilon\Big),\qquad k=1,2,\cdots$$

となるから，再び Kolmogorov の 0-1 law により，$\alpha^d(t,\varepsilon)$ が存在して，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$P'(\ V_S^d(\tilde{X}(\cdot,\omega');t,\varepsilon)=\alpha^d(t,\varepsilon)\ )=1$$

となる。正の有理数全体を $\mathbb{Q}^+$ で表わせば，

$$P'(\ V_S^d(\tilde{X}(\cdot,\omega');t,\varepsilon)=\alpha^d(t,\varepsilon),\ t\in S,\ \varepsilon\in\mathbb{Q}^+)=1,$$

となる。従って，再び $\{X(t);t\in T\}$ と $\{\tilde{X}(t);t\in T\}$ とが同分布であることから

$$P(\ V_S^d(X(\cdot,\omega);t,\varepsilon)=\alpha^d(t,\varepsilon),\ t\in S,\ \varepsilon\in\mathbb{Q}^+\ )=1,$$

となる。$\{X(t);t\in T\}$ が (S,N) に関して d-separable であることより，$\omega\notin N$ なら

$$V_S^d(\ X(\cdot,\omega);t,\varepsilon)=V^d(\ X(\cdot,\omega);t,\varepsilon),\ t\in T,\ \varepsilon>0$$

であるから，

$$P(\ V^d(\ X(\cdot,\omega);t,\varepsilon)=\alpha^d(t,\varepsilon),\ t\in S,\ \varepsilon\in\mathbb{Q}^+\ )=1,$$

となる。そこで，

$$N_1=\{\ \omega\in\Omega\ ;\ V^d(\ X(\cdot,\omega);t,\varepsilon)=\alpha^d(t,\varepsilon),\ t\in S,\ \varepsilon\in\mathbb{Q}^+\}$$

とおくと，$N_1\in\mathfrak{A}$，$P(N_1)=0$，は明らか。補題 9.2 の (v) により，$\omega\notin N\cup N_1$，$t\in T$ なら

$$\begin{aligned} w^d(\ X(\cdot,\omega);t) &= \lim_{n\uparrow\infty}\lim_{m\uparrow\infty}\sup_{s\in B_d(t,1/m)\cap S} V^d(X(\cdot,\omega);s,\tfrac{1}{n}) \\ &= \lim_{n\uparrow\infty}\lim_{m\uparrow\infty}\sup_{s\in B_d(t,1/m)\cap S}\alpha^d(s,\tfrac{1}{n}), \end{aligned}$$

であるから，

$$\alpha'^d(t)=\lim_{n\uparrow\infty}\lim_{m\uparrow\infty}\sup_{s\in B_d(t,1/m)\cap S}\alpha^d(s,\tfrac{1}{n})$$

とおけば，定理 9.1 より，

$$P(\ w^d(\ X(\cdot,\omega);t)=\alpha^d(t)\ )=1,\quad t\in T$$

であったから，実は $\alpha'^d(t)=\alpha^d(t)$，$t\in T$，となる。従って

$$P(\ w^d(X(\cdot,\omega);t)=\alpha^d(t),\ t\in T\ )=1.$$

となる。　(証明終)

<u>定理 9.3</u>　(T,d)，$(\Omega,\mathfrak{A},P)$，$\{X(t);t\in T\}$ は 仮定(I) を満たし，$\alpha^d(t)$ を定理 9.1 で存在が示された関数とする。U を T のある開集合とし，S_0 を U で dense な U の可算部分集合とする。さらに，ある $a>0$ が存在して

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\alpha^d(t) \geq a > 0, \quad t \in S_0$$

となると仮定する。この時,

$$\alpha^d(t) = +\infty \quad , t \in U$$

となる。

<u>証明</u>　$t \in S_0$、に対して

$$(N_t)^c = \{ \omega \in \Omega ; \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{s \in B_d(t,\varepsilon)} X(s,\omega) = X(t,\omega) + \tfrac{1}{2}\alpha^d(t),$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{s \in B_d(t,\varepsilon)} X(s,\omega) = X(t,\omega) - \tfrac{1}{2}\alpha^d(t),$$

かつ, $W^d(X(\cdot,\omega);t) = \alpha^d(t)$ $\}$,

とおく。$N_t \in \mathfrak{A}$, $P(N_t) = 0$, であるから

$N_1 = \bigcup_{t \in S_0} N_t$, とおくと $N_1 \in \mathfrak{A}$, $P(N_1) = 0$, であり

$\omega \notin N_1$, $t \in S_0$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{s \in B_d(t,\varepsilon)} X(s,\omega) = X(t,\omega) + \tfrac{1}{2}\alpha^d(t),$$

となる。さらに $\{X(t); t \in T\}$ が (S, N) に関して d-separable であり, かつ d-確率連続であるから, §7 の定理 7.3 により S_0 に対して, $N_0 \in \mathfrak{A}$ が存在して, $\{X(t); t \in U\}$ が (S_0, N_0) に関して d-separable となる。

だから, $\omega \notin N_0 \cup N_1$, $t \in S_0$ に対して.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{s \in B_d(t,\varepsilon)} X(s,\omega) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{s \in B_d(t,\varepsilon) \cap S_0} X(s,\omega)$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{s \in B_d(t,\varepsilon) \cap S_0} \Big[\lim_{\varepsilon' \downarrow 0} \sup_{u \in B_d(s,\varepsilon') \cap S_0} X(u,\omega) - \tfrac{1}{2}\alpha^d(s) \Big]$$

$$\leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{s \in B_d(t,\varepsilon) \cap S_0} \Big[X(s,\omega) - \tfrac{a}{2} \Big]$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{s \in B_d(t,\varepsilon) \cap S_0} X(s,\omega) - \tfrac{a}{2} = X(t,\omega) + \tfrac{1}{2}\alpha^d(t) - \tfrac{a}{2}$$

従って,

$$X(t,\omega) + \tfrac{1}{2}\alpha^d(t) \leq X(t,\omega) + \tfrac{1}{2}\alpha^d(t) - \tfrac{a}{2},$$

となるが, もし $\alpha^d(t) < +\infty$, なら $a < 0$, となり仮定に反するので $\alpha^d(t) = +\infty$, $t \in S_0$, となる。補題 9.1 の(iii) と 定理 9.2 により, $\alpha^d(t)$ が上半連続であることが分るから,

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\alpha^d(t) = +\infty \ , \ t \in U \ ,$$

を得る。 (証明終)

<u>定理 9.4</u> (T, d), $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L}, P)$, $\{X(t)\,;\, t\in T\}$ は 仮定(I) を満たすとする。$\alpha^d(t)$ を定理9.1でその存在が示された関数とすると，$\alpha^d(t)$ について次が成り立つ；

(α−1) $\alpha^d(t)$ は上半連続関数である。

(α−2) 任意の $a>0$ に対して，$\{t\in T\,;\, a \leq \alpha^d(t) < +\infty\}$ は T で *non-dense* である。つまり，T の任意の開集合においても *dense* でない。

証明は定理9.3とその証明より明らかである。

$\alpha^d(t)$, $t\in T$, を $\{X(t)\,;\, t\in T\}$ の *oscillation function* と呼ぶ。

定理 9.4 の逆；

$T=[0,1]^n$, とし，(α−1)，(α−2) を満たす，T 上の $\bar{R}$-値関数 $\alpha^d(t)$ が与えらているとする。但し，$d(s,t)$ は *Euclidean distance* とする。この時，T 上の *centered* G.r.f. $\{X(t)\,;\, t\in T\}$ が存在して，$\alpha^d(t)$ は $\{X(t)\,;\, t\in T\}$ の *oscillation function* となる。

については，一次元の場合は，

Ito, K. − Nisio, M.; *On the oscillation function of Gaussian processes*, Math. Scand. 22 (1968), 209−223,

多次元の場合については，

Jain, N.C. − Kallianpur, G.; *Oscillation function of a multiparameter Gaussian process*, Nagoya Math. J. 47, (1972), 15−28,

において証明されている。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

定理 9.5　(U, d) を第2可算公理を満たす pseudo-metric space とする。U から U 自身への写像 γ の集合 Γ が次の性質を満たすとする；

$(\Gamma-1)$　$\gamma \in \Gamma$, は 1対1，双連続な写像である。

$(\Gamma-2)$　Γ は transitive である，すなわち 任意の $s, t \in U$ に対して，$\gamma \in \Gamma$ が存在して　$\gamma(s) = t$，となる。

さらに，U は次の条件を満たすとする；

$(U-1)$　U は孤立点を持たない。

T を U の部分集合で，(T, d) が compact になり，かつ次の条件を満たすものとする；

$(T-1)$　T の内部 $\mathring{T}$ は，T で dense である。

そして，(T, d)，$(\Omega, \mathcal{O}, P)$，$\{X(t)\,;\,t \in T\}$ は 仮定(I) を満たし，さらに $\{X(t)\,;\,t \in T\}$ は次の条件を満たすとする；

$(X-1)$　任意の $\gamma \in \Gamma$，$s, t \in T$，で $\gamma(s), \gamma(t) \in T$，となるものに対して，

$$E[(X(s) - X(t))^2] = E[(X(\gamma(s)) - X(\gamma(t)))^2]$$

となる。

以上の仮定のもとに，$\alpha^d(t)$ を $\{X(t)\,;\,t \in T\}$ の oscillation function とすると，

$$\alpha^d(t) = 0 \ , \ t \in T \ ,$$

であるか，又は

$$\alpha^d(t) = +\infty \ , \ t \in T \ ,$$

のいずれか一方が成り立つ。

証明　　定理 9.2 より

$$P(\ W^d(X(\cdot, \omega)\,;t) = \alpha^d(t)\ , \ t \in T\ ) = 1\ ,$$

である。$N' = \{\omega \in \Omega\,;\ W^d(X(\cdot, \omega)\,;t) = \alpha^d(t)\ ,\ t \in T\}$ とおく。$s, t \in \mathring{T}$，$\gamma \in \Gamma$ を $\gamma(s) = t$，となるものとすると，$\varepsilon > 0$ を適当にとれば，$\gamma^{-1}(B_d(t, \varepsilon)) \subset \mathring{T}$，となる。これより，$\omega \in N$ なら

$$W^d(X(\cdot, \omega)\,;t) = \lim_{n\uparrow\infty} \sup_{u, v \in B_d(s, 1/n)} |X(\gamma(u), \omega) - X(\gamma(v), \omega)|$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$= \lim_{n\uparrow\infty} \sup_{\substack{u,v\in B_d(s,\frac{1}{n})\\ \gamma(u),\gamma(v)\in S}} |X(\gamma(u),\omega) - X(\gamma(v),\omega)|$$

となる。条件(P-1)より，Sが(T,d)でdenseであることより，$\gamma(S)$も$(\gamma(T),d)$でdenseである。そこで，$\gamma(u)\in S$，$u\in T$，に対して，$u_j\in S$，$j=1,2,\cdots$，が存在して，$\gamma(u_j)\longrightarrow\gamma(u)$，$j\to\infty$となる。$\{X(t);t\in T\}$がd-確率連続であることより，$X(\gamma(u_j))$は$X(\gamma(u))$に確率収束する。従って，部分列を取り直すことにより．$X(\gamma(u_j))$は$X(\gamma(u))$に概収束するとしてよい。そこで，

$$(N_u)^c = \{\omega;\ \lim_{j\uparrow\infty} X(\gamma(u_j),\omega) = X(\gamma(u),\omega)\} \in \mathfrak{A},$$

とおけば，$P(N_u)=0$，である。もちろん，N_uはu_jのとり方に依存して決まる。

$$N'' = \bigcup_{\gamma(u)\in S} N_u \in \mathfrak{A},$$

とおけば，$P(N'')=0$，である。

さて，$\omega\notin N\cup N'\cup N''$，なら

$$w^d(X(\cdot,\omega);t) = \lim_{n\uparrow\infty} \sup_{u,v\in B_d(s,\frac{1}{n})\cap S} |X(\gamma(u),\omega) - X(\gamma(v),\omega)|$$

となる。

実際，

$$w^d(X(\cdot,\omega);t) \geq \lim_{n\uparrow\infty} \sup_{u,v\in B_d(s,\frac{1}{n})\cap S} |X(\gamma(u),\omega) - X(\gamma(v),\omega)|$$

は自明。逆の不等式は，

$$w^d(X(\cdot,\omega);t) = \lim_{n\uparrow\infty} \sup_{\substack{u,v\in B_d(s,\frac{1}{n})\\ \gamma(u),\gamma(v)\in S}} |X(\gamma(u),\omega) - X(\gamma(v),\omega)|$$

$$= \lim_{n\uparrow\infty} \sup_{\substack{u,v\in B_d(s,1/n)\\ \gamma(u),\gamma(v)\in S}} |\lim_{j\to\infty} X(\gamma(u_j),\omega) - \lim_{j\to\infty} X(\gamma(v_j),\omega)|$$

$$\leq \lim_{n\uparrow\infty} \sup_{u,v\in B_d(s,1/n)\cap S} |X(\gamma(u),\omega) - X(\gamma(v),\omega)|$$

による。但し，$u_j\in S$，$v_j\in S$，はN_uの定義の時に用いたu_jをu,vについて考えたものである。

一方，$\{X(t);t\in T\}$は(S,N)に関してd-separableであったから，$\omega\notin N$なら

$$w^d(X(\cdot,\omega);s) = \lim_{n\uparrow\infty} \sup_{u,v\in B_d(s,1/n)\cap S} |X(u,\omega) - X(v,\omega)|$$

であった。そこで、$\{X(u,v)\ ;\ u,v\in B_d(s,1/n)\}$ と、$\{X(\gamma(u))-X(\gamma(v))\ ;\ u,v\in B_d(s,1/n)\}$ とが同分布であることを示す。両者とも centered G.r.f. であるから、covariance を比較すればよい。条件 (X-1) より、

$$\begin{aligned}
&E[\{X(\gamma(u))-X(\gamma(v))\}\{X(\gamma(u'))-X(\gamma(v'))\}]\\
&=\tfrac{1}{2}E[\{X(\gamma(u))-X(\gamma(v'))\}^2+\{X(\gamma(v))-X(\gamma(u'))\}^2-\\
&\qquad -\{X(\gamma(u))-X(\gamma(u'))\}^2-\{X(\gamma(v))-X(\gamma(v'))\}^2]\\
&=\tfrac{1}{2}E[\{X(u)-X(v')\}^2+\{X(v)-X(u')\}^2-\\
&\qquad -\{X(u)-X(u')\}^2-\{X(v)-X(v')\}^2]\\
&=E[\{X(u)-X(v)\}\{X(u')-X(v')\}]
\end{aligned}$$

が $u,v,u',v'\in T$ かつ $\gamma(u),\gamma(v),\gamma(u'),\gamma(v')\in T$、となるものに対して成り立つ。従って、問題の2つの centered G.r.f.'s は同分布となる。

以上の結果，ω の関数として $W^d(X(\cdot,\omega);s)$ と $W^d(X(\cdot,\omega);t)$ とは同分布であることが分る。よって，条件(Γ-2) により

$$\alpha^d(s)=\alpha^d(t)\ ,\quad s,t\in\mathring{T}$$

である。そして，もし $a>0$ が存在して，$\alpha^d(t)\geqq a$，$t\in\mathring{T}$，となるなら，条件 (T-1) と定理 9.3 により，

$$\alpha^d(t)=+\infty\ ,\quad t\in T$$

を得る。

もし，$\alpha^d(t)=0$，$t\in\mathring{T}$，であるなら，$s\in\partial T=T-\mathring{T}$，$t\in\mathring{T}$，に対して，($\Gamma$-2) より，$\gamma\in\Gamma$ が存在して $\gamma(s)=t$，となるが，$\omega\notin N\cup N'\cup N''$，なら

$$W^d(X(\cdot,\omega);s)=\lim_{n\uparrow\infty}\ \sup_{u,v\in B_d(s,1/n)\cap S}|X(u,\omega)-X(v,\omega)|$$

であり，右辺は ω の関数とみて，$\lim\limits_{n\uparrow\infty}\ \sup\limits_{u,v\in B_d(s,1/n)\cap S}|X(\gamma(u),\omega)-X(\gamma(v),\omega)|$ と同分布であるが，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\uparrow\infty}\ \sup_{u,v\in B_d(s,1/n)\cap S}|X(\gamma(u),\omega)-X(\gamma(v),\omega)|&\leqq W^d(X(\cdot,\omega);t)\\
&=\alpha^d(t)=0
\end{aligned}$$

であるから，結局 $\alpha^d(t)=0$，$t\in T$，となる。

（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

定理 9.6　(T, d), $(\Omega, \mathcal{O}\!\iota, P)$, $\{X(t) ; t \in T\}$ は仮定(I)を満たすとする。$\{X(t) ; t \in T\}$ によって導入されるT上の pseudo-distance d_X ;

$$d_X(s, t) = \sqrt{E[(X(s) - X(t))^2]}, \quad s, t \in T$$

によって出来る，(T, d_X) で $\{X(t) ; t \in T\}$ を考えた時の oscillation function を $\alpha^X(t)$, $t \in T$, で表わす。

この時，$\alpha^d(t) = 0$, $t \in T$,

であること，

$$\alpha^X(t) = 0, \quad t \in T,$$

であることとは同値である。

証明　$\{X(t) ; t \in T\}$ が d-確率連続であるから定理 9.1 の前に述べたように，d_X は d-一様連続である。従って，補題 9.3 の前に述べたことより，(T, d) から (T, d_X) への恒等写像は連続である。よって，$\alpha^X(t) = 0$, $t \in T$, なら

$$P(\{\omega ; X(t, \omega) \text{ は } d_X\text{-連続}\}) = 1,$$

であるから

$$P(\{\omega ; X(t, \omega) \text{ は } d\text{-連続}\}) = 1,$$

となり，これは $\alpha^d(t) = 0$, $t \in T$, を示す。

逆を示す。$T \times T$ 上に pseudo-distance $\bar{d}$, を

$$\bar{d}((s, t), (s', t')) = d(s, s') + d(t, t'), \quad (s, t), (s', t') \in T \times T,$$

で定める。$D_X = \{(s, t) \in T \times T ; d_X(s, t) = 0\}$, とし，$S_X \subset D_X$, を $(D_X, \bar{d})$ で dense な可算集合とする。(T, d) が compact であるから，$(T \times T, \bar{d})$ も compact，従って，$(T \times T, \bar{d})$ が separable となるので，S_X は存在する。$\alpha^d(t) = 0$, $t \in T$, であるから，定理 9.2 より

$$(N')^c = \{\omega ; X(\cdot, \omega) \text{ は } d\text{-連続}\}$$

とすれば，$N' \in \mathcal{O}\!\iota$, $P(N') = 0$, となる。$(s, t) \in D_X$, に対して，$(s^{(n)}, t^{(n)}) \in S_X$, $n = 1, 2, \cdots$, が存在して

$$\bar{d}((s, t), (s^{(n)}, t^{(n)})) \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty$$

となるから，$d(s, s^{(n)})$, $d(t, t^{(n)}) \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$.

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

従って，$\omega \notin N'$ なら

$$|X(s,\omega)-X(t,\omega)| = \lim_{n\to\infty} |X(s^{(n)},\omega)-X(t^{(n)},\omega)|$$

となる。そこで，

$$M_0(\omega) = \sup_{(s,t)\in D_X} |X(s,\omega)-X(t,\omega)|, \quad \omega\in\Omega$$

とおくと，$\omega \notin N'$ なら

$$M_0(\omega) = \sup_{(s,t)\in S_X} |X(s,\omega)-X(t,\omega)|$$

となり，M_0 は $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$-measurable である。一方，$S_X \subset D_X$ であるから，$(s,t)\in S_X$ なら $d_X(s,t)=0$，である。

$$(N_{s,t})^c = \{\omega\,;\, X(s,\omega)=X(t,\omega)\} \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}, \quad s,t\in T$$

とおくと，$(s,t)\in S_X$ なら $P(N_{s,t})=0$，である。従って

$$N'' = \bigcup_{(s,t)\in S_X} N_{s,t} \in \mathcal{O}\!\mathcal{l},$$ とおくと $P(N'')=0$，であり，$\omega\notin N'\cup N''$，なら $M_0(\omega)=0$，となる。すなわち，

$\omega\notin N'\cup N''$，$d_X(s,t)=0$，なら $X(s,\omega)=X(t,\omega)$

となる。補題9.3 により，

$\omega\notin N'\cup N''$ なら，$X(\cdot,\omega)$ は d-連続である，

が従う。よって，$\alpha^X(t)=0$，$t\in T$，となる。

(証明終)

§10 Some sufficient conditions for sample continuiy of a Gaussian random field

(T,d)，$(\Omega,\mathcal{O}\!\mathcal{l},P)$，$\{X(t)\,;\,t\in T\}$ は 仮定(I)（前節参照）を満たし，T 上の pseudo-distance d_X を，

$$d_X(s,t) = \sqrt{E[(X(s)-X(t))^2]}, \quad s,t\in T$$

とする。さて，$\varepsilon>0$，に対して，

$$N_d(\varepsilon,T) = \min\{\#(A)\,;\, A\subset T,\ は\ (T,d)\ の\ \varepsilon\text{-net}\}$$

とおく。但し，$\#(A)$ は集合 A の元の個数を表わし，$A\subset T$，が (T,d) の ε-net であるとは，任意の $t\in T$ に対し，$s\in A$ が存在して，$d(s,t)\le\varepsilon$，となることである。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

(T, d_X) に対しても同様に,

$$N_X(\varepsilon, T) = \min\{\#(A);\ A \subset T,\ は\ (T, d_X)\ の\ \varepsilon\text{-net}\}$$

とおく。本論に入る前に次の事に注意しておく;

$N_d(\varepsilon, T)$ は ε の関数として右連続である。

<u>証明</u>　$N_d(\varepsilon, T)$ は ε について単調減少であるから, 任意の $\varepsilon_0 > 0$, に対して

$$N_d(\varepsilon_0, T) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow \varepsilon_0} N_d(\varepsilon, T),$$

を示せばよい。$N_0 = \lim_{\varepsilon \downarrow \varepsilon_0} N_d(\varepsilon, T)$, とおく。$N_d(\varepsilon, T)$ が自然数値関数であることより, $\varepsilon' > \varepsilon_0$ が存在して, $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon'$ なら, $N_d(\varepsilon, T) = N_0$, となる。そこで, $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon'$, なる ε に対し (T, d) の minimal ε-net A_ε を考える。ここで, A_ε が minimal ε-net であるとは, A_ε が (T, d) の ε-net であり, かつ $\#(A_\varepsilon) = N_d(\varepsilon, T)$, であることである。

$A_\varepsilon = \{a_k^{(\varepsilon)},\ k = 1, \cdots, N_0\}$, とする。$(T, d)$ は compact と仮定したから, $\varepsilon_m \downarrow \varepsilon_0$ なる ε_m, $m = 1, 2, \cdots$, と, $a_k \in T$, $k = 1, \cdots, N_0$ とが存在して, $a_k^{(\varepsilon_m)} \longrightarrow a_k$, $m \longrightarrow \infty$, $k = 1, \cdots, N_0$, となる。A_{ε_m} が ε_m-net であることより, 任意の $t \in T$ に対して, $k_m(t)$, $1 \leq k_m(t) \leq N_0$, が定まって, $d(t, a_{k_m(t)}^{(\varepsilon_m)}) \leq \varepsilon_m$, となる。再び (T, d) が compact であることより, 必要なら部分列をとることにより, $k(t)$, $1 \leq k(t) \leq N_0$, が定まって,

$$a_{k_m(t)}^{(\varepsilon_m)} \longrightarrow a_{k(t)}, \quad m \longrightarrow \infty,$$

としてよい。この時, 明らかに $d(t, a_{k(t)}) \leq \varepsilon_0$, となるから, $\{a_k,\ k = 1, 2, \cdots, N_0\}$ は (T, d) の ε_0-net である。従って,

$$N_d(\varepsilon_0, T) \leq N_0 = \lim_{\varepsilon \downarrow \varepsilon_0} N_d(\varepsilon, T). \qquad \text{(証明終)}$$

<u>注意</u>　(T, d) が compact でない時は, $N_d(\varepsilon, T)$ は必ずしも右連続ではない。実際, $T = [0, 1] - \{\frac{1}{2}\}$, $d(s, t) = |s - t|$, とすると, $N_d(\frac{1}{2}, T) = 2$, 一方, $N_d(\varepsilon, T) = 1$, $\varepsilon > \frac{1}{2}$ である。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

定理 10.1　(T, d), $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $\{X(t); t \in T\}$ は仮定⑴を満たすとする。さらに，(T, d)は次の性質をもつとする；

(T-2)　$C_1 > 0$，と $M \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$N_d(\varepsilon, T) \leq C_1 \varepsilon^{-M}, \quad \varepsilon > 0$$

が成り立つ。

次に，$\{X(t); t \in T\}$に対して，ある $\delta > 0$ があって $0 < x \leq \delta$，で定義される連続な非減少関数 $\varphi(x)$ が存在して，次の条件を満たすとする；

(X-2)　$\varphi(x) > 0$，$0 < x \leq \delta$，かつ $\lim_{x \downarrow 0} \varphi(x) = 0$，であり，さらに，任意の $s, t \in T$，$d(s,t) < \delta$ に対して

$$E[(X(s) - X(t))^2] \leq \varphi^2(d(s,t)),$$

が成り立つ。

以上の仮定のもとで，もし $\varphi(x)$ が

$$\int^{+\infty} \varphi(e^{-x^2})\, dx < +\infty,$$

を満たすなら，

$$P(\{\omega;\ X(\cdot, \omega) \text{ は } d\text{-連続}\}) = 1$$

が成り立つ。或いは，前節の記号を使えば，

$$\alpha^d(t) = 0, \quad t \in T$$

となる。

以下，$\varphi(x)$ についての条件，

$$\int^{+\infty} \varphi(e^{-x^2})\, dx < +\infty$$

のことを *Fernique* の *integral test* と呼ぶことにする。

証明にあたって，δの値は本質的でないので例えば，$\varphi(x)$ は $x > 0$，で定義されているとしてよい。

証明の方法はいろいろあるが，ここでは分布が Gaussian であることを explicit に使わない方法を述べる。従って定理がより広い class（例えば，いわゆる sub-Gaussian processes）についても成り立つことが容易に分る。$\{X(t); t \in T\}$ が centered G.r.f. の場合，$E[(X(s) - X(t))^2] \leq \varphi^2(d(s,t))$，なら

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$E\left[\exp\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{X(s)-X(t)}{\varphi(d(s,t))}\right)^2\right\}\right] \leq \sqrt{2}\quad,\quad d(s,t)\neq 0$$

であることに注意して，次の補題を用意する。

補題 10.1　(T,d) を定理 10.1 の条件を満たす compact pseudo-metric space とし，$\{X(t);t\in T\}$ を平均 0 で，次の条件を満たす確率場とする；

$$\int^{+\infty}\varphi(e^{-x^2})\,dx<\infty,\quad \varphi(x)>0,\quad x>0,$$

を満たす，連続な非減少関数 $\varphi(x)$ が存在して，

(i)　$E[(X(s)-X(t))^2] \leq \varphi^2(d(s,t))$

(ii)　$L>0$，$\alpha>0$ が存在して，任意の $s,t\in T$，$d(s,t)\neq 0$ に対して

$$E\left[\exp\left\{\alpha\left(\frac{X(s)-X(t)}{\varphi(d(s,t))}\right)^2\right\}\right]\leq L$$

が成り立つ。

さて，$\varepsilon_k=\frac{1}{4}e^{-2^k}$，$k=1,2,\cdots$，とし S_k を (T,d) の minimal ε_k-net とし，任意の $t\in T$ に対して，$s_k(t)\in S_k$，$d(t,s_k(t))\leq\varepsilon_k$，なる点を対応させる。

この時，$N_t\in\mathcal{O}$，$P(N_t)=0$，が存在して，$\omega\notin N_t$ なら

$$X(t,\omega)=\lim_{k\to\infty}X(s_k(t),\omega)$$

となる。

証明　$d(t,s_k(t))\neq 0$，なら，

$$|X(t,\omega)-X(s_k(t),\omega)|\leq\frac{\varphi(\varepsilon_k)}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\mathrm{Log}\left(\exp\left\{\alpha\left(\frac{X(t,\omega)-X(s_k(t),\omega)}{\varphi(d(t,s_k(t)))}\right)^2\right\}\right)}$$

と Jensen の不等式より

$$\begin{aligned}&E[|X(t)-X(s_k(t))|]\\&\leq\frac{\varphi(\varepsilon_k)}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\log E\left[\exp\left\{\alpha\left(\frac{X(t)-X(s_k(t))}{\varphi(d(t,s_k(t)))}\right)^2\right\}\right]}\\&\leq\frac{\varphi(\varepsilon_k)}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\mathrm{Log}\,L}\ ,\end{aligned}$$

となる。$d(t,s_k(t))=0$ ならこの不等式は明らかに成り立つから，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$E\left[\sum_{k=4}^{\infty}|X(t)-X(s_k(t))|\right] \leqq \sqrt{\frac{\log L}{\alpha}}\sum_{k=4}^{\infty}\varphi(\varepsilon_k)$$

$$\leqq \sqrt{\frac{\log L}{\alpha}}\sum_{k=4}^{\infty}(2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k-1}{2}})\cdot\varphi(e^{-2^k})$$

$$\leqq \sqrt{\frac{\log L}{\alpha}}\int_{2\sqrt{2}}^{\infty}\varphi(e^{-x^2})\,dx < \infty$$

となる。ゆえに，

$$(\mathcal{N}_t)^c = \left\{\omega;\ \sum_{k=4}^{\infty}|X(t,\omega)-X(s_k(t),\omega)| < +\infty\right\} \in \mathcal{O}\!\mathcal{l},$$

とおくと，$P(\mathcal{N}_t)=0$，かつ $\omega \notin \mathcal{N}_t$ なら

$$\lim_{k\to\infty} X(s_k(t),\omega) = X(t,\omega)$$

となる。 (証明終)

<u>定理10.1の証明</u> $\{X(t);t\in T\}$ が補題10.1の条件を満たすことのみを用いて証明する。

S_k を補題10.1の証明において定めた minimal ε_k-net とする。$\varepsilon_k=\frac{1}{4}e^{-2^k}$, $k=1,2,\cdots$ ，である。条件(T-2)より，

$$\#(S_k) = N_d(\varepsilon_k, T) \leqq C_1\,\varepsilon_k^{-M},\ \text{である。}$$

$$A_k(\omega) = \max_{\substack{s,t\in S_k\cup S_{k+1}\\ 0<d(s,t)\leqq 4\varepsilon_k}} |X(s,\omega)-X(t,\omega)|, \quad k=1,2,\cdots$$

とおくと

$$A_k(\omega) \leqq \frac{\varphi(4\varepsilon_k)}{\sqrt{\alpha}}\max_{\substack{s,t\in S_k\cup S_{k+1}\\ d(s,t)\neq 0}}\sqrt{\alpha}\,\frac{|X(s,\omega)-X(t,\omega)|}{\varphi(d(s,t))}$$

$$\leqq \frac{\varphi(4\varepsilon_k)}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\log\left(\sum_{\substack{s,t\in S_k\cup S_{k+1}\\ d(s,t)\neq 0}}\exp\left\{\alpha\left(\frac{X(s,\omega)-X(t,\omega)}{\varphi(d(s,t))}\right)^2\right\}\right)}$$

となる。Jensen の不等式より

$$E[A_k(\omega)] \leqq \frac{\varphi(4\varepsilon_k)}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\log\left(\sum_{\substack{s,t\in S_k\cup S_{k+1}\\ d(s,t)\neq 0}}E\left[\exp\left\{\alpha\left(\frac{X(s)-X(t)}{\varphi(d(s,t))}\right)^2\right\}\right]\right)}$$

$$\leqq \frac{\varphi(4\varepsilon_k)}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\log(C_1^2 L\,\varepsilon_{k+1}^{-2M})}$$

$$\leqq C_2\,(2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k-1}{2}})\,\varphi(e^{-2^k})$$

となる。但し，C_2 は適当な定数である。従って，

$$E\left[\sum_{k=1}^{\infty}A_k(\omega)\right] \leqq C_2\int_1^{\infty}\varphi(e^{-x^2})\,dx < +\infty\,.$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$(N')^c = \{\omega ; \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega) < \infty\}$，とおくと，$P(N')=0$，かつ $\omega \notin N'$ なら $\sum_{k=n}^{\infty} A_k(\omega) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$，となる。
$t \in S$ に対して，$d(t, s_k(t)) \leq \varepsilon_k$，なる $s_k(t) \in S_k$，を対応させ，補題10.1の N_t より，$N'' = \bigcup_{t \in S} N_t$，とおくと，$N'' \in \mathfrak{A}$，$P(N'')=0$，かつ $\omega \notin N''$ なら

$$\lim_{k \to \infty} X(s_k(t), \omega) = X(t, \omega) \quad , \quad t \in S$$

となる。従って，$s, t \in S$，$\omega \notin N' \cup N''$，に対して $d(s,t) \leq \varepsilon_n$ なら，$d(s_{k+1}(s), s_k(s)) \leq d(s_{k+1}(s), s) + d(s_k(s), s) \leq 2\varepsilon_k$，

$$d(s_{k+1}(t), s_k(t)) \leq 2\varepsilon_k,$$

$$d(s_n(s), s_n(t)) \leq d(s_n(s), s) + d(s,t) + d(t, s_n(t))$$
$$\leq 2\varepsilon_n + \varepsilon_n < 4\varepsilon_n$$

であることより，

$$|X(s,\omega) - X(t,\omega)|$$
$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} |X(s_{k+1}(s), \omega) - X(s_k(s), \omega)| + |X(s_n(s),\omega) - X(s_n(t),\omega)|$$
$$+ \sum_{k=n}^{\infty} |X(s_{k+1}(t), \omega) - X(s_k(t), \omega)|$$
$$\leq 3 \sum_{k=n}^{\infty} A_k(\omega),$$

となる。ゆえに $\omega \notin N \cup N' \cup N''$，なら $X(t,\omega)$ は S 上で d- 一様連続となる。$\{X(t) ; t \in T\}$ が (S, N) に関して d-separable であることより，$\omega \notin N \cup N' \cup N''$，なら $X(t,\omega)$ は d- 連続となる。 (証明終)

注意　$N_d(\varepsilon, T)$ に対する条件 (T-2)；

$c_1 > 0$，$M > 0$ が存在して，$N_d(\varepsilon, T) \leq c_1 \varepsilon^{-M}$，$\varepsilon > 0$。

は，T が Euclid 空間の部分集合である場には満たされる。

系　定理10.1の仮定のもとで，同じ記号を使う。

(i) $\varphi(x) = \left(\sqrt{\log \frac{1}{x}} \left(\log \log \frac{1}{x}\right)^{\varepsilon}\right)^{-1}$，$x > 0$，$\varepsilon > 1$

であれば，$\alpha^d(t) = 0$，$t \in T$ となる。

(ii) $\varphi(x) = \left(\sqrt{\log \frac{1}{x}} \cdot \log \log \frac{1}{x} \cdot \left(\log \log \log \frac{1}{x}\right)^{\varepsilon}\right)^{-1}$，

$x > 0$，$\varepsilon > 1$，

であれば，やはり $\alpha^d(t) = 0$，$t \in T$，となる。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

証明 (i)では, $\varphi(e^{-x^2}) = (x(2\log x)^{\varepsilon})^{-1}$,
(ii)では $\varphi(e^{-x^2}) = (2x\log x(\log\log x + \log 2)^{\varepsilon})^{-1}$,
となり, いずれの場合にも, $\varepsilon > 1$ より $\varphi(x)$ は Fernique の integrale test を満たす。従って 定理10.1 より
$\alpha^d(t) = 0$, $t \in T$, である。 (証明終)

$T = [0,1]$, とし $\{X(t); t \in T\}$ が1次元 Brownian motion の場合について考える。この場合,

$$E[(X(s) - X(t))^2] = |s-t| = (\sqrt{|s-t|})^2, \quad s,t \in T$$

であるから, $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, でよい。 $\varphi(x)$ は Fernique の integral test を満たすから,

$$\alpha^d(t) = 0, \quad t \in T,$$ となる。

注意 Hunt, A.; Random Fourier transforms, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 38-69
Belyaev; Continuity and Hölder conditions for sample functions of stationary Gaussian process, 4th Berkeley Sym. II, 23-33.
では, $\{X(t); t \in T\}$ が stationary の場合を考え, その結果を stationary + Gaussian の形の process の場合に拡張し,

$$\varphi(x) = (\log \tfrac{1}{x})^{-\alpha}, \quad \alpha > \tfrac{1}{2},$$

であれば, 確率1で sample function が連続になることを示した。
又, $T = [0,1]$ で, $\{X(t); t \in T\}$ が stationary であり,

$$E[(X(s) - X(t))^2] = \varphi^2(|s-t|), \quad \varphi(x)\text{は非減少関数},$$

の場合には, $\varphi(x)$ が Fernique の integral test を満たすことが, $\alpha^d(t) = 0$, $t \in [0,1]$, である為の必要十分条件であることが分っている。
Marcus, M.B. - Shepp, L.A.; Continuity of Gaussian processes, Trans. Amer. Math. Soc. 151 (1970), 377-392

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

次に Fernique の integral test を変形することを考える。(T,d), $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $\{X(t);\, t\in T\}$, $\varphi(t)$ 等は定理 10.1 の条件を満たすとする。変数変換 $e^{-x^2}=y$, により

$$\int^{+\infty} \varphi(e^{-x^2})\,dx < +\infty \iff \int_{+0} \varphi(y)\left(y\sqrt{\log\tfrac{1}{y}}\right)dy < +\infty$$

であることが分る。さらに

$$\int_{2^n}^{2^{n+1}} \varphi(e^{-x^2})\,dx \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty,$$

又, $2^{n+1} \leq u \leq 2^{n+2}$, なら

$$\int_{2^n}^{2^{n+1}} \varphi(e^{-x^2})\,dx \geq \varphi(e^{-(2^{n+1})^2})(2^{n+1}-2^n)$$
$$= \frac{1}{4}\,2^{n+2}\varphi(e^{-(2^{n+1})^2})$$
$$\geq \frac{1}{4}\,u\,\varphi(e^{-u^2}),$$

より, $u\varphi(e^{-u^2}) \longrightarrow 0$, $u \longrightarrow \infty$, となる。すなわち,

$$\varphi(y)\sqrt{\log\tfrac{1}{y}} \longrightarrow 0, \quad y \downarrow 0,$$ を得る。

部分積分により

$$\int_{+0} \varphi(y)\left(y\sqrt{\log\tfrac{1}{y}}\right)^{-1}dy = \int_{+0} \varphi(y)\,d\left(-\sqrt{\log\tfrac{1}{y}}\right)$$

$$= c + \int_{+0}\sqrt{\log\tfrac{1}{y}}\;d\varphi(y), \qquad c \text{ は定数}$$

となるから,

$$\int^{+\infty} \varphi(e^{-x^2})\,dx < +\infty \iff \int_{+0}\sqrt{\log\tfrac{1}{x}}\,d\varphi(x) < +\infty$$

となる。一方, $\{X(t);\, t\in T\}$ が d-確率連続であり, (T,d) が compact であることから, (T,d_X) も compact になる。

$$d_X^2(s,t) = E\left[(X(s)-X(t))^2\right] \leq \varphi^2(d(s,t)),$$
$$s,t\in T, \quad d(s,t)\leq\delta$$

であるから, $A\subset T$, が (T,d) の ε-net であるなら A は (T,d_X) の $\varphi(\varepsilon)$-net でもある。従って定義より

$$N_d(\varepsilon,T) \geq N_X(\varphi(\varepsilon),T), \qquad 0<\varepsilon\leq\delta$$

となり, (T,d) について条件 (T-2), $N_d(\varepsilon,T)\leq c_1\varepsilon^{-M}$, $\varepsilon>0$, が成り立つことより

$$N_X(\varphi(\varepsilon),T) \leq c_1\varepsilon^{-M}, \qquad 0<\varepsilon\leq\delta,$$

すなわち, $\log N_X(\varphi(\varepsilon),T) \leq M\log\frac{1}{\varepsilon} + \log c_1$,

を得る。先に得たように,

$$\int^{+\infty} \varphi(e^{-x^2})\,dx < +\infty \iff \int_{+0}\sqrt{\log\tfrac{1}{x}}\,d\varphi(x) < +\infty$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

であるから $\int^{+\infty}\varphi(e^{-x^2})\,dx<\infty$，であれば

$$\int_{+0}\sqrt{\mathrm{Log}\,N_X(\varphi(x),T)}\,d\varphi(x)\leq\int_{+0}\sqrt{\mathrm{Log}\frac{1}{x}+\mathrm{Log}\,c_1}\;d\varphi(x)<+\infty,$$

を得る。$\lim_{x\downarrow 0}\varphi(x)=0$，であるから，結局

$$\int_{+0}\sqrt{\mathrm{Log}\,N_X(\varepsilon,T)}\,d\varepsilon<+\infty$$

が得られる。

そこで，$\varphi(x)$ が表に現われる Fernique の integral test

$$\int^{+\infty}\varphi(e^{-x^2})\,dx<+\infty$$

が満たされることを仮定する代わりに，条件；

$$\int_{+0}\sqrt{\mathrm{Log}\,N_X(\varepsilon,T)}\,d\varepsilon<+\infty,$$

が満たされることを仮定して sample function $X(t,\omega)$ の連続性，すなわち $\alpha^X(t)=0$，$t\in T$，が導かれるか，を考える。

<u>定理 10.2</u>　(T,d_X)，$(\Omega,\mathcal{O}\!\mathcal{l},P)$，$\{X(t),t\in T\}$ は仮定(I)を満たすとする。つまり $\{X(t),t\in T\}$ を完備な確率空間 $(\Omega,\mathcal{O}\!\mathcal{l},P)$ で定義される T 上の centered G.r.f. とし，(T,d_X) は compact な pseudo-metric space であり，かつ $\{X(t),t\in T\}$ は (S,N) に関して d_X-separable であるとする。

さらに，$N_X(\varepsilon,T)$ が次の条件を満たすとする；

$$\int_{+0}\sqrt{\mathrm{Log}\,N_X(\varepsilon,T)}\,d\varepsilon<+\infty.$$

この時，

$$P(\{\omega;\ X(t,\omega)\text{ は }d_X\text{-連続}\})=1,$$

すなわち，$\alpha^X(t)=0$，$t\in T$，が成り立つ。

以下，$N_X(\varepsilon,T)$ に関する条件；

$$\int_{+0}\sqrt{\mathrm{Log}\,N_X(\varepsilon,T)}\,d\varepsilon<+\infty,$$

のことを，Dudley の条件と呼ぶことにする。

<u>証明</u>　証明は定理10.1とほとんど同様であり，むしろやさしくすらある。まず補題10.1に対応して，次のことを証明する。補題10.1と違って，確率場は二乗可積分であれは十分で

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

ある；

$\{X(t); t \in T\}$ を平均 0, $\sqrt{E[(X(s)-X(t))^2]} = d_X(s,t) < +\infty$, $s, t \in T$, である確率場とする。S_k, $k=1,2,\cdots$, を pseudo-metric space (T, d_X) の minimal 2^{-k}-net, とし任意の $t \in T$ に対して, $d_X(t, s_k(t)) \leq 2^{-k}$, なる $s_k(t) \in S_k$ を対応させる。この時, $N_t \in \mathfrak{A}$, $P(N_t)=0$, が存在して, $\omega \notin N_t$ なら

$$\lim_{k\to\infty} X(s_k(t), \omega) = X(t, \omega),$$

となる。

実際, $d_X(t, s_k(t)) \neq 0$, のときは

$$|X(t,\omega) - X(s_k(t),\omega)|^2 \leq 2^{-2k} \left| \frac{X(t,\omega) - X(s_k(t),\omega)}{d_X(t, s_k(t))} \right|^2,$$

従って, $E[|X(t) - X(s_k(t))|] \leq \sqrt{E[|X(t) - X(s_k(t))|^2]} \leq 2^{-k}$.

又, $d_X(t, s_k(t)) = 0$, のときは この不等式は明らかに成り立つから,

$$E\left[\sum_{k=1}^{\infty} |X(t) - X(s_k(t))|\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1,$$

となる。

$$(N_t)^c = \left\{\omega ; \sum_{k=1}^{\infty} |X(t,\omega) - X(s_k(t),\omega)| < +\infty\right\} \in \mathfrak{A},$$

とおくと, $P(N_t) = 0$, かつ $\omega \notin N_t$ なら

$$\lim_{k\to\infty} X(s_k(t), \omega) = X(t, \omega),$$

となる。(以上).

次に,
$$A_k(\omega) = \max_{\substack{s,t \in S_k \cup S_{k+1} \\ 0 < d_X(s,t) \leq 2^{-k+2}}} |X(s,\omega) - X(t,\omega)|,$$

とおくと,

$$A_k(\omega) \leq 2^{-k+2} \max_{\substack{s,t \in S_k \cup S_{k+1} \\ d_X(s,t) \neq 0}} \frac{|X(s,\omega) - X(t,\omega)|}{d_X(s,t)}$$

$$\leq 2^{-k+3} \sqrt{\log\left(\sum_{\substack{s,t \in S_k \cup S_{k+1} \\ d_X(s,t) \neq 0}} \exp\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{X(s,\omega) - X(t,\omega)}{d_X(s,t)}\right)^2\right\}\right)}$$

となり, Jensen の不等式により

$$E[A_k(\omega)] \leq 2^{-k+3} \sqrt{\log\left(\sum_{\substack{s,t \in S_k \cup S_{k+1} \\ d_X(s,t) \neq 0}} E\left[\exp\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{X(t) - X(s)}{d_X(s,t)}\right)^2\right\}\right]\right)}$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\leq 2^{-k+3}\sqrt{\log N_X^2(2^{-k-1}, T) + \log\sqrt{2}}$$

$$\leq C\ (2^{-k-1} - 2^{-k-2})\sqrt{\log N_X(2^{-k-1}, T)}\ ,\ (C\text{は定数})$$

となる。故に

$$E\left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega)\right] \leq C\int_{+0}^{\frac{1}{4}}\sqrt{\log N_X(\varepsilon, T)}\,d\varepsilon < +\infty\ .$$

従って，$(N')^c = \{\omega\,;\, \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega) < \infty\} \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}$，とおけば，
$P(N') = 0$，となる。又，先に示した N_t より

$$N'' = \bigcup_{t\in S} N_t\ ,\ \text{とおく。}$$

$s, t \in S$，$d_X(s,t) \leq 2^{-n}$，なら

$$d_X(s_{k+1}(s), s_k(s)) \leq d_X(s_{k+1}(s), s) + d_X(s, s_k(s)) \leq 2\cdot 2^{-k},$$

$$d_X(s_{k+1}(t), s_k(t)) \leq 2\cdot 2^{-k},$$

$$\begin{aligned} d_X(s_m(s), s_m(t)) &\leq d_X(s_m(s), s) + d_X(s, t) + d_X(t, s_m(t)) \\ &\leq 3\cdot 2^{-k} < 2^{-k+2} \end{aligned}$$

より，$\omega \notin N' \cup N''$，なら

$$\begin{aligned} &|X(s,\omega) - X(t,\omega)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty}|X(s_{k+1}(s),\omega) - X(s_k(s),\omega)| + |X(s_n(s),\omega) - X(s_n(t),\omega)| + \\ &\quad + \sum_{k=n}^{\infty}|X(s_{k+1}(t),\omega) - X(s_k(t),\omega)| \\ &\leq 3\sum_{k=n}^{\infty} A_k(\omega)\ , \end{aligned}$$

となり，これより $\omega \notin N' \cup N''$，なら $X(\cdot,\omega)$ は S 上で d_X-一様連続となる。$\{X(t)\,;\, t\in T\}$ が (S, N) に関して d_X-separable であることより，$\omega \notin N \cup N' \cup N''$ なら $X(t,\omega)$ は d_X-連続である。　　　　(証明終)

<u>補題 10.2</u>　(T, d) を compact な pseudo-metric space とし，$\mathcal{B}(T)$ を T の topological Borel field とする。

$$H_d(\varepsilon) = \log N_d(\varepsilon, T)\ ,\quad \varepsilon > 0$$

とおく。この時，次の２つの条件は同値である；

(Dudley の条件)　$\displaystyle\int_{+0}\sqrt{H_d(\varepsilon)}\,d\varepsilon < +\infty\ ,$

(*)　$(T, \mathcal{B}(T))$ 上の確率測度 μ が存在して，

$$\int_{+0}\sup_{t\in T}\sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_d(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon < +\infty$$

となる。但し，$B_d(t,\varepsilon) = \{s\in T\,;\, d(s,t) < \varepsilon\}$ である。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

証明 (I) Dudleyの条件 $\Rightarrow$ (*), を示す。

S_n, $n=1,2,\dots$ を (T,d) の minimal 2^{-n}-net とする。もちろん, $\#(S_n) = N_d(2^{-n},T)$, である。

$(T,\mathcal{B}(T))$ 上の確率測度 μ を次のように定める;

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\ \#(S_n\cap E)/N_d(2^{-n},T), \quad E\in\mathcal{B}(T).$$

$\int_{+0} \sup_{t\in T}\sqrt{\mathrm{Log}\frac{1}{\mu(B_d(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon<+\infty$, となることを示す。

まず, S_{n+1} が 2^{-n-1}-net であることより, 任意の $t\in T$ に対して,

$B_d(t,2^{-n})\cap S_{n+1}\neq\phi$, である。従って

$$\mu(B_d(t,2^{-n})) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\ \#(S_k\cap B_d(t,2^{-n}))/N_d(2^{-k},T) \geqslant 2^{-n-1}\left(N_d(2^{-n-1},T)\right)^{-1},$$

よって,

$$\sup_{t\in T}\sqrt{\mathrm{Log}\frac{1}{\mu(B_d(t,2^{-n}))}} \leqslant \sqrt{\mathrm{Log}\left(2^{n+1}N_d(2^{-n-1},T)\right)} = \sqrt{(n+1)\mathrm{Log}\,2 + H_d(2^{-n-1})}$$
$$\leqslant \sqrt{H_d(2^{-n-1})} + \sqrt{(n+1)\mathrm{Log}\,2} \qquad (\because\ \sqrt{x+y}\leqslant\sqrt{x}+\sqrt{y},\ x,y\geqslant 0)$$

これより,

$$\int_{+0}^{1}\sup_{t\in T}\sqrt{\mathrm{Log}\frac{1}{\mu(B_d(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{2^{-n}}^{2^{-n+1}}\sup_{t\in T}\sqrt{\mathrm{Log}\frac{1}{\mu(B_d(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sup_{t\in T}\sqrt{\mathrm{Log}\frac{1}{\mu(B_d(t,2^{-n}))}}\,(2^{-n+1}-2^{-n})$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left\{\sqrt{H_d(2^{-n-1})}+\sqrt{(n+1)\mathrm{Log}\,2}\right\}$$

となる。一方, Dudleyの条件より, $H_d(\varepsilon)$ が非増加だから

$$+\infty > \int_{+0}^{\frac14}\sqrt{H_d(\varepsilon)}\,d\varepsilon = \sum_{n=2}^{\infty}\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}}\sqrt{H_d(\varepsilon)}\,d\varepsilon$$
$$\geqslant \sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{H_d(2^{-n})}\,(2^{-n}-2^{-n-1})$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n-1}\sqrt{H_d(2^{-n})} = \frac14\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sqrt{H_d(2^{-n-1})}$$

を得るから, $\int_{+0}\sup_{t\in T}\sqrt{\mathrm{Log}\frac{1}{\mu(B_d(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon<+\infty$, となる。

(II) (*) $\Rightarrow$ Dudleyの条件, を示す。

まず, $A\subset T$ が (T,d) の ε-*distinguishable set* (以下, *distin. set* と略す) であるとは, 任意の $s,t\in A$ に対して $d(s,t)>\varepsilon$, が成り立つことと定義する。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

また，$M_d(\varepsilon,T) = \max\{\#(A)\,;\,A$ は (T,d) の ε-distin. set$\}$，とおき，A が (T,d) の maximal ε-distin. set であるとは，A が (T,d) の ε-distin. set であり，かつ $\#(A) = M_d(\varepsilon,T)$，であることとする。さらに，$A$ が (T,d) の maximal ε-distin. set であれば，実は A は ε-net であることが分る。実際もし $t_0\in T$，でありかつ $\overline{B_d(t_0,\varepsilon)}\cap A=\phi$，となる t_0 が存在するならば，$A' = A\cup\{t_0\}$，は (T,d) の ε-distin. set となり，A が maximal であることに反する。従って任意の $t\in T$ に対して，$\overline{B_d(t,\varepsilon)}\cap A \neq \phi$，となり A が ε-net であることが分る。以上により，$N_d(\varepsilon,T)\leq M_d(\varepsilon,T)$，$\varepsilon>0$，となる。又，$M_d(\varepsilon,T)\leq N_d(\varepsilon/2,T)$，$\varepsilon>0$，であることも分る。なぜなら，$A$ を maximal ε-distin. set，B を minimal $\varepsilon/2$-net，とすると，任意の $s,t\in A$ に対して $s',t'\in B$ が存在して，

$$d(s,s')\leq \varepsilon/2,\qquad d(t,t')\leq\varepsilon/2,$$

となる。$d(s,t)>\varepsilon$，より $\overline{B_d(s,\varepsilon/2)}\cap\overline{B_d(t,\varepsilon/2)}=\phi$. 従って，$s'\neq t'$，となる。これは $M_d(\varepsilon,T)\leq N_d(\varepsilon/2,T)$，であることに他ならない。

簡単の為，$f(x)=\sqrt{\log\frac{1}{x}}$，$x>0$，とおく。

S_n, $n=1,2,\cdots$，を (T,d) の maximal 2^{-n}-distin. set とし $(T,\mathbb{B}(T))$ 上の確率測度 μ_n を，

$$\mu_n(E) = \#(S_n\cap E)/M_d(2^{-n},T),\qquad E\in\mathbb{B}(T),$$

で定める。S_n が 2^{-n}-distin. set であることより，任意の $t\in T$ に対して，$B_d(t,2^{-n-1})\cap S_n$，は高々一点のみである。従って

$$\sup_{t\in T}\mu_n(B_d(t,2^{-n-1}))\leq (M_d(2^{-n},T))^{-1}\leq (N_d(2^{-n},T))^{-1}$$

となる。一方，$f(x)=\sqrt{\log\frac{1}{x}}$，は区間 $(0,e^{-1})$ において下に凸であるから，Jensen の不等式により，$(T,\mathbb{B}(T))$ 上の任意の確率測度 μ に対して，

$$\int_T f(\mu(B_d(t,2^{-n-1})))\,d\mu_n(t)\geq f\left(\int_T \mu(B_d(t,2^{-n-1}))\,d\mu_n(t)\right)$$

となる。ここで，$X_{n+1}(s,t)$ を $T\times T$ の部分集合，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$\{(s,t)\,;\ d(s,t)<2^{-n-1}\}$ の indicator とすれば，

$$\int_T \mu(B_d(t,2^{-n-1}))\,d\mu_n(t)=\int_{T\times T}\chi_{n+1}(s,t)\,d\mu(s)\,d\mu_n(t)$$

$$=\int_T d\mu(s)\int_T \chi_{n+1}(s,t)\,d\mu_n(t)=\int_T \mu_n(B_d(s,2^{-n-1}))\,d\mu(s)$$

$$\leq \sup_{s\in T}\mu_n(B_d(s,2^{-n-1}))\leq (N_d(2^{-n},T))^{-1}$$

となる。これより，

$$f\left(\int_T \mu(B_d(t,2^{-n-1}))\,d\mu_n(t)\right)\geq f\left(\frac{1}{N_d(2^{-n},T)}\right)=\sqrt{H_d(2^{-n})}$$

であるから，結局，

$$\int_T f(\mu(B_d(t,2^{-n-1})))\,d\mu_n(t)\geq\sqrt{H_d(2^{-n})}$$

となる。μ_n の定義より

$$\int_T f(\mu(B_d(t,2^{-n-1})))\,d\mu_n(t)=\frac{1}{N_d(2^{-n},T)}\sum_{s\in S_n}f(\mu(B_d(s,2^{-n-1})))$$

$$\leq \sup_{s\in S_n} f(\mu(B_d(s,2^{-n-1})))$$

$$\leq \sup_{t\in T} f(\mu(B_d(t,2^{-n-1})))$$

であるから，

$$\sup_{t\in T} f(\mu(B_d(t,2^{-n-1})))\geq\sqrt{H_d(2^{-n})}$$

が得られる。そこで，条件(*)の μ をとれば，$f(x)$ が非増加であることより

$$+\infty>\int_{+0}\sup_{t\in T}f(\mu(B_d(t,\varepsilon)))\,d\varepsilon=\sum_n^\infty\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}}\sup_{t\in T}f(\mu(B_d(t,\varepsilon)))\,d\varepsilon$$

$$\geq\sum_n^\infty 2^{-n-1}\sup_{t\in T}f(\mu(B_d(t,2^{-n})))$$

$$\geq\sum_n^\infty 2^{-n-1}\sqrt{H_d(2^{-n+1})}$$

となり，これより，容易に Dudley の条件が導かれる。

（証明終）

<u>定理 10.3</u>　(T,d_X)，$(\Omega,\mathcal{O},P)$，$\{X(t)\,;\,t\in T\}$ を 仮定(I) を満たすものとし，さらに $\{X(t)\,;\,t\in T\}$ は d_X-measurable であるとする。$\mathcal{B}_X(T)$ を (T,d_X) の topological Borel field とし，$(T,\mathcal{B}_X(T))$ 上の確率測度 μ が存在して，

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{t\in T}\int_0^\delta\sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon=0\ ,$$

が成り立つと仮定する。この時

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$P(\{\omega ; X(t,\omega) \text{ は } d_X\text{- 連続}\}) = 1,$$

となる。但し，$B_X(t,\varepsilon) = \{s \in T ; d_X(s,t) < \varepsilon\}$，である。

証明は前二定理と同様である。まず，補題10.1に対応して，次のことを証明する。補題10.1と違って，二乗可積分であれば十分である。

<u>補題10.3</u>　$\{X(t) ; t \in T\}$ を平均0，

$\sqrt{E[(X(s)-X(t))^2]} = d_X(s,t) < +\infty$，　$s,t \in T$，

かつ，d_X- measurable な確率場とする。(T, d_X) を pseudo-metric space と考え，$(T, \mathcal{B}_X(T))$ 上の確率測度 μ が，$t \in T$ に対して，$\mu(B_X(t,2^{-k})) > 0$，$k=1,2,\cdots$，を満たすと仮定する。この時，

$$X_k(t,\omega) = \frac{1}{\mu(B_X(t,2^{-k}))} \int_{B_X(t,2^{-k})} X(s,\omega)\, d\mu(s),$$

$$\omega \in \Omega, \quad k=1,2,\cdots$$

とおくと，$N_t \in \mathcal{O}\mathcal{l}$，$P(N_t)=0$，が存在して，$\omega \notin N_t$ なら

$$\lim_{k\to\infty} X_k(t,\omega) = X(t,\omega)$$

となる。

<u>証明</u>

$$|X_k(t,\omega) - X(t,\omega)| \leqq \frac{1}{\mu(B_X(t,2^{-k}))} \int_{B_X(t,2^{-k})} |X(s,\omega) - X(t,\omega)|\, d\mu(s)$$

$$\leqq \frac{2^{-k}}{\mu(B_X(t,2^{-k}))} \int_{\substack{B_X(t,2^{-k}) \\ d_X(s,t)\neq 0}} \frac{|X(s,\omega) - X(t,\omega)|}{d_X(s,t)}\, d\mu(s),$$

であるから，Schwarz の不等式より

$$|X_k(t,\omega) - X(t,\omega)| \leqq 2^{-k} \sqrt{\frac{1}{\mu(B_X(t,2^{-k}))} \int_{\substack{B_X(t,2^{-k}) \\ d_X(s,t)\neq 0}} \left(\frac{X(s,\omega) - X(t,\omega)}{d_X(s,t)}\right)^2 d\mu(s)}$$

となるから，再び Schwarz の不等式と Fubini の定理より

$$E[\,|X_k(t) - X(t)|\,]$$

$$\leqq 2^{-k} \sqrt{\frac{1}{\mu(B_X(t,2^{-k}))} \int_{\substack{B_X(t,2^{-k}) \\ d_X(s,t)\neq 0}} E\left[\left(\frac{X(s) - X(t)}{d_X(s,t)}\right)^2\right] d\mu(s)} \leqq 2^{-k}.$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

よって、 $E\left[\sum_{k=1}^{\infty}|X_k(t)-X(t)|\right] \leqq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < +\infty$, となる。
ゆえに、$(N_t)^c = \{\omega;\ \sum_{k=1}^{\infty}|X_k(t,\omega)-X(t,\omega)| < +\infty\}$, とおけば、 $P(N_t)=0$, かつ $\omega \notin N_t$, なら

$$\lim_{k\to\infty} X_k(t,\omega) = X(t,\omega)$$

となる。 (証明終)

<u>補題 10.4</u> (T, d_X) を compact pseudo-metric space とし、 $\mathcal{B}_X(T)$ を (T, d_X) の topological Borel field とする。
$g(t)$, $t\in T$, を $\mathcal{B}_X(T)$-measurable な $\mathbb{R}$-値関数とし、 $s,t\in T$ に対して、

$$g_X(s,t) = \begin{cases} \dfrac{g(s)-g(t)}{d_X(s,t)}, & d_X(s,t)\neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & d_X(s,t)=0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく。μ を $(T, \mathcal{B}_X(T))$ 上の確率測度とし、 $F\in\mathcal{B}_X(T)$, $\mu(F)>0$, に対して、

$$g_F = \frac{1}{\mu(F)}\int_F g(s)\,d\mu(s),$$

とおく。さらに、 $M>0$ が存在して、

$$\int_{T\times T}\exp\left\{\frac{1}{4}g_X^2(s,t)\right\}d\mu(s)\,d\mu(t) \leqq M^2 < \infty,$$

が成り立つと仮定する。この時、 $F, G\in\mathcal{B}_X(T)$, $\mu(F), \mu(G)>0$, に対して、次の評価が成り立つ；

$$|g_F - g_G| \leqq 2d_X(F,G)\cdot\sqrt{\log\frac{M^2}{\mu(F)\mu(G)}},$$

但し、 $d_X(F,G) = \sup\{d_X(a,b);\ a\in F,\ b\in G\}$, とする。

<u>証明</u> まず、Jensen の不等式により

$$\log\left(\frac{1}{\mu(F)\mu(G)}\int_{F\times G}\exp\left\{\frac{1}{4}g_X^2(s,t)\right\}d\mu(s)\,d\mu(t)\right)$$

$$\geqq \frac{1}{\mu(F)\mu(G)}\int_{F\times G}\frac{1}{4}g_X^2(s,t)\,d\mu(s)\,d\mu(t)$$

$$\geqq \left(\frac{1}{\mu(F)\mu(G)}\int_{F\times G}\frac{1}{4}g_X^2(s,t)\,d\mu(s)\,d\mu(t)\right)\left(\frac{1}{\mu(F)\mu(G)}\int_{F\times G}\chi_{D^c}(s,t)\,d\mu(s)\,d\mu(t)\right)$$

但し、 $D=\{(s,t)\in T\times T;\ d_X(s,t)=0\}\in\mathcal{B}_X(T)\times\mathcal{B}_X(T)$, であり χ_{D^c} は D^c の indicator である。

Sem. on Probab.
Vol.48　1978年
P1-123

そこで，Schwarz の不等式より

$$\left(\frac{1}{\mu(F)\mu(G)}\int_{F\times G}\frac{1}{4}g_x^2(s,t)\,d\mu(s)\,d\mu(t)\right)\left(\frac{1}{\mu(F)\mu(G)}\int_{F\times G}\chi_{D^c}(s,t)\,d\mu(s)\,d\mu(t)\right)$$

$$\geqq\left(\frac{1}{\mu(F)\mu(G)}\int_{F\times G}\frac{1}{2}\,|g_x(s,t)|\,d\mu(s)\,d\mu(t)\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{2\,d_x(F,G)\,\mu(F)\mu(G)}\int_{F\times G}|g(s)-g(t)|\,d\mu(s)\,d\mu(t)\right)^2$$

$$\geqq\left(\frac{1}{2\,d_x(F,G)}\left|\int_{F\times G}\frac{g(s)-g(t)}{\mu(F)\,\mu(G)}\,d\mu(s)\,d\mu(t)\right|\right)^2$$

$$=\left(\frac{|g_F-g_G|}{2\,d_x(F,G)}\right)^2$$

となるが，一方

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{\mu(F)\mu(G)}\int_{F\times G}\exp\left\{\frac{1}{4}g_x^2(s,t)\right\}d\mu(s)\,d\mu(t)\right)$$

$$\leqq\operatorname{Log}\frac{M^2}{\mu(F)\mu(G)}$$

であるから，結局　$|g_F-g_G|\leqq 2d_x(F,G)\sqrt{\operatorname{Log}\frac{M^2}{\mu(F)\mu(G)}}$，となる。

（証明終）

<u>補題10.5</u>　(T,d_x)，$\mathbb{B}_x(T)$ は前補題と同じ。μ を $(T,\mathbb{B}_x(T))$ 上の確率測度とし，任意の $t\in T$ に対して，$F_n(t)=B_x(t,2^{-n})$ $n=1,2,\cdots$，とおくとき，$\mu(F_n(t))>0$，が成り立つとする。$g(t)$，$t\in T$，を $\mathbb{B}_x(T)$-measurable で，かつ $s,t\in T$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}g_{F_n(t)}=g(t)\;,\qquad\lim_{n\to\infty}g_{F_n(s)}=g(s)$$

が成り立つものとする。$M>0$ を前補題の条件を満たすものとする。

$$I(u,\delta)=\int_{+0}^{\delta}\sqrt{\operatorname{Log}\frac{M}{\mu(B_x(u,\varepsilon))}}\,d\varepsilon\;,\qquad u\in T,\ \delta>0$$

とおくとき，任意の $\delta>0$ に対して　$\sup_{u\in T}I(u,\delta)<+\infty$，が成り立つならば，

$$|g(s)-g(t)|\leqq 56\sqrt{2}\ \sup_{u\in T}I(u,d_x(s,t))\,,$$

が成り立つ。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

証明　　補題 10.4 により

$$|g_{F_n(t)} - g_{F_{n-1}(t)}| \leq 2\, d_X(F_n(t), F_{n-1}(t)) \sqrt{\mathrm{Log}\frac{M^2}{\mu(F_n(t))\,\mu(F_{n-1}(t))}}$$

であり，一方　$F_n(t) = B_X(t, 2^{-n})$　であるから

$$d_X(F_n(t), F_{n-1}(t)) = \sup\{ d_X(a,b)\ ;\ a \in F_n(t),\ b \in F_{n-1}(t)\}$$

$$\leq \sup\{ d_X(a,t) + d_X(t,b)\ ;\ a \in F_n(t),\ b \in F_{n-1}(t)\}$$

$$< 2^{-n} + 2^{-n+1} = 3 \cdot 2^{-n},$$

又，　$F_n(t) \subset F_{n-1}(t)$，であるから

$$\sqrt{\mathrm{Log}\frac{M^2}{\mu(F_n(t))\,\mu(F_{n-1}(t))}} \leq \sqrt{2}\sqrt{\mathrm{Log}\frac{M}{\mu(F_n(t))}}$$

従って，

$$|g_{F_n(t)} - g_{F_{n-1}(t)}| \leq 6\sqrt{2}\, 2^{-n}\sqrt{\mathrm{Log}\frac{M}{\mu(F_n(t))}} = 6\sqrt{2}\, 2^{-n}\sqrt{\mathrm{Log}\frac{M}{\mu(B_X(t,2^{-n}))}}$$

$$\leq 12\sqrt{2}\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \sqrt{\mathrm{Log}\frac{M}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\, d\varepsilon$$

仮定より，$\lim_{n\to\infty} g_{F_n(t)} = g(t)$，従って，

$$|g(t) - g_{F_n(t)}| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |g_{F_{k+1}(t)} - g_{F_k(t)}|$$

$$\leq 12\sqrt{2}\int_{+0}^{2^{-n-1}} \sqrt{\mathrm{Log}\frac{M}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\, d\varepsilon .$$

そこで，　$A_n = F_n(s) \cup F_n(t)$，$n = 1, 2, \cdots$，とおくと

$$d_X(A_n, F_n(t)) \leq d_X(s,t) + 2 \cdot 2^{-n},$$

$$d_X(A_n, F_n(s)) \leq d_X(s,t) + 2 \cdot 2^{-n},$$

m　を　$2^{-m} \leq d_X(s,t) < 2^{-m+1}$，となるようにとれば

$$d_X(A_m, F_m(s)),\ d_X(A_m, F_m(t)) \leq 4 \cdot 2^{-m},$$

又，　$\mu(A_m) \geq \mu(F_m(s)),\ \mu(F_m(t))$，であるから

$$|g_{A_m} - g_{F_m(t)}| \leq 2\, d_X(A_m, F_m(t)) \sqrt{\mathrm{Log}\frac{M^2}{\mu(A_m)\,\mu(F_m(t))}}$$

$$\leq 8\sqrt{2}\, 2^{-m}\sqrt{\mathrm{Log}\frac{M}{\mu(F_m(t))}}$$

$$\leq 16\sqrt{2}\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \sqrt{\mathrm{Log}\frac{M}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\, d\varepsilon$$

$$< 16\sqrt{2}\int_{+0}^{d_X(s,t)} \sqrt{\mathrm{Log}\frac{M}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\, d\varepsilon \qquad (\because\ 2^{-m} \leq d_X(s,t))$$

を得る。以上の評価を総合して，

$$
\begin{aligned}
|g(s)-g(t)| &\leqq |g(s)-g_{F_m(s)}| + |g_{F_m(s)}-g_{A_m}| + |g_{A_m}-g_{F_m(t)}| + \\
&\quad + |g_{F_m(t)}-g(t)| \\
&\leqq 12\sqrt{2}\int_{+0}^{2^{-m-1}}\sqrt{\log\frac{M}{\mu(B_X(s,\varepsilon))}}\,d\varepsilon + 16\sqrt{2}\int_{+0}^{d_X(s,t)}\sqrt{\log\frac{M}{\mu(B_X(s,\varepsilon))}}\,d\varepsilon + \\
&\quad + 12\sqrt{2}\int_{+0}^{2^{-m-1}}\sqrt{\log\frac{M}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon + 16\sqrt{2}\int_{+0}^{d_X(s,t)}\sqrt{\log\frac{M}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon \\
&\leqq 28\sqrt{2}\int_{+0}^{d_X(s,t)}\sqrt{\log\frac{M}{\mu(B_X(s,\varepsilon))}}\,d\varepsilon + 28\sqrt{2}\int_{+0}^{d_X(s,t)}\sqrt{\log\frac{M}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon \\
&\leqq 56\sqrt{2}\sup_{u\in T}\int_{+0}^{d_X(s,t)}\sqrt{\log\frac{M}{\mu(B_X(u,\varepsilon))}}\,d\varepsilon = 56\sqrt{2}\sup_{u\in T} I(u, d_X(s,t))
\end{aligned}
$$

(証明終)

<u>定理10.3の証明</u>　定理の仮定より，任意の $t\in T$，$n\in \mathbb{N}$ に対して，$\mu(B_X(t,2^{-n}))>0$，となる。そこで，補題10.3の N_t により，$N'=\bigcup_{t\in S} N_t$，とおくと $P(N')=0$，かつ $\omega\notin N'$，なら任意の $t\in S$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} X_k(t,\omega) = X(t,\omega)$$

となる。一方，Fubini の定理より，$d_X(s,t)\neq 0$，なら

$$
\begin{aligned}
&E\left[\int_{T\times T}\exp\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{X(s)-X(t)}{d_X(s,t)}\right)^2\right\}d\mu(s)\,d\mu(t)\right] \\
&= \int_{T\times T} E\left[\exp\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{X(s)-X(t)}{d_X(s,t)}\right)^2\right\}\right]d\mu(s)\,d\mu(t) \\
&\leqq \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

であるから，$N''=\left\{\omega\,;\int_{T\times T}\exp\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{X(s,\omega)-X(t,\omega)}{d_X(s,t)}\right)^2\right\}d\mu(s)d\mu(t)<+\infty\right\}$ とおけば，補題10.5より，$\omega\notin N'\cup N''$ なら

$$|X(s,\omega)-X(t,\omega)| \leqq 56\sqrt{2}\sup_{u\in T} I(u, d_X(s,t)\,;\,\omega)$$

を得る。但し，

$$I(u,\delta\,;\,\omega) = \int_{+0}^{\delta}\sqrt{\log\frac{M(\omega)}{\mu(B_X(u,\varepsilon))}}\,d\varepsilon\ ,$$

であり，$M(\omega)$ は ω にのみ依存する正数である。
定理の条件は $\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{u\in T} I(u,\delta,\omega)=0$，と同値であるから，$\omega\notin N'\cup N''$，なら $X(t,\omega)$ は S 上で d_X－一様連続。これより定理の主張が得られることは，前二定理と同様。

(証明終)

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

定理 10.4　$T=[0,1]^d$, とし $\{X(t);t\in T\}$ を完備な確率空間 $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ で定義される stationary increment な centered G.r.f. とする。

$$d_X(s,t)=\sqrt{E[(X(s)-X(t))^2]}=\varphi(\|s-t\|),\quad s,t\in T$$

とする。但し $\|\cdot\|$ は Euclidean norm とし, $\varphi(x)$ は $x\geqq 0$ で連続, $x>0$, で $\varphi(x)>0$, $\varphi(0)=0$, を満たすとする。

この時, 次の2つの条件は同値である;

(Dudleyの条件) $\int_{+0}\sqrt{\log N_X(\varepsilon,T)}\,d\varepsilon<+\infty$,

(**) $(T,\mathcal{B}_X(T))$ 上の確率測度 μ が存在して,

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{t\in T}\int_{+0}^{\delta}\sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon=0,$$

を満たす。

証明　Dudleyの条件より (**) が導かれることは, 補題10.2 より明らかであるから, 逆を示す。

簡単の為に, $f(x)=\sqrt{\log\frac{1}{x}}$, $0<x<e^{-1}$, とおく。

$B_X(t,\varepsilon)$ の定義より, 任意の $t\in T$, に対して

$$\lim_{\varepsilon'\uparrow\varepsilon}\mu(B_X(t,\varepsilon'))=\mu(B_X(t,\varepsilon)),$$

が成り立つ。又, $t'\in B_X(t,1/n)$, $1/n<\varepsilon$, なら

$$\mu(B_X(t',\varepsilon))\geqq\mu(B_X(t,\varepsilon-1/n)),$$

従って,

$$\lim_{n\uparrow\infty}\inf_{t'\in B_X(t,1/n)}\mu(B_X(t',\varepsilon))\geqq\lim_{n\uparrow\infty}\mu(B_X(t,\varepsilon-1/n))$$
$$=\mu(B_X(t,\varepsilon)),$$

よって,

$$\lim_{n\uparrow\infty}\sup_{t'\in B_X(t,1/n)}f(\mu(B_X(t',\varepsilon)))\leqq f(\mu(B_X(t,\varepsilon)))$$

となる。すなわち, $f(\mu(B_X(t,\varepsilon)))$ は t の関数として上半連続である。ゆえに, $\mathcal{B}_X(T)$-measurable である。一方, $f(\mu(B_X(t,\varepsilon)))$ は又, ε の関数としては, 左連続であるから, $\delta>0$, なら $\int_{+0}^{\delta}f(\mu(B_X(t,\varepsilon)))\,d\varepsilon$ は $\mathcal{B}_X(T)$-measurable となる。従って λ を T 上の Lebesgue 測度とすると, $\int_T\int_{+0}^{\delta}f(\mu(B_X(t,\varepsilon)))\,d\varepsilon\,d\lambda(t)$, が定義されて, 積分の順序変換ののち, Jensen の不等式を適用すると,

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\int_T \left(\int_{+0}^{\delta} f(\mu(B_X(t,\varepsilon)))\,d\varepsilon \right) d\lambda(t) \geqq \int_{+0}^{\delta} f\left(\int_T \mu(B_X(t,\varepsilon))\,d\lambda(t)\right) d\varepsilon$$

となる。ここで $\{X(t); t \in T\}$ が *stationary increment* であることより，$a \in T$ に対して

$$\lambda(B_X(a,\varepsilon)) = \lambda(\{b \in T;\ \varphi(\|a-b\|) < \varepsilon\})$$
$$\leqq 2^d \lambda(\{b \in T;\ \varphi(\|b\|) < \varepsilon\}) = 2^d \lambda(B_X(0,\varepsilon))$$

となる。但し，2^d が現われるのは，$T = [0,1]^d$，としているからである。これより，

$$\int_T \mu(B_X(t,\varepsilon))\,d\lambda(t) = \int_{T\times T} \chi(s,t;\varepsilon)\,d\mu(s)\,d\lambda(t)$$
$$\leqq 2^d \lambda(B_X(0,\varepsilon))$$

となる。但し，$\chi(s,t;\varepsilon)$ は $\{(s,t);\ d_X(s,t) < \varepsilon\}$ の *indicator* である。ゆえに

$$+\infty > \sup_{t \in T} \int_{+0}^{\delta} f(\mu(B_X(t,\varepsilon)))\,d\varepsilon$$
$$\geqq \int_T \left(\int_{+0}^{\delta} f(\mu(B_X(t,\varepsilon)))\,d\varepsilon \right) d\lambda(t)$$
$$\geqq \int_{+0}^{\delta} f\left(\int_T \mu(B_X(t,\varepsilon))\,d\lambda(t)\right) d\varepsilon.$$
$$\geqq \int_{+0}^{\delta} f(2^d \lambda(B_X(0,\varepsilon)))\,d\varepsilon.$$

を得る。S_k を (T, d_X) の *maximal* 2^{-k}-*distin. set* とすると，

$$\#(S_k) = M_X(2^{-k},T) \geqq N_X(2^{-k},T), \quad \text{となる。}$$

$B_X(t, 2^{-k-1})$，$t \in S_k$，は *disjoint* であるから

$$1 \geqq \lambda\Big(\bigcup_{t\in S_k} B_X(t,2^{-k-1})\Big) = \sum_{t\in S_k} \lambda(B_X(t,2^{-k-1}))$$
$$\geqq N_X(2^{-k},T)\, m_{k+1},$$

となる。但し，$m_{k+1} = \lambda(B_X(0,2^{-k-1}))$，とおく。

従って，$m_{k+1} \leqq (N_X(2^{-k},T))^{-1}$，となる。

$$+\infty > \int_{+0}^{\delta} f(2^d \lambda(B_X(0,\varepsilon)))\,d\varepsilon.$$
$$\geqq \sum_n^\infty \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} f(2^d \lambda(B_X(0,\varepsilon)))\,d\varepsilon$$
$$\geqq \sum_n^\infty 2^{-n-1} f(2^d \lambda(B_X(0,\varepsilon)))$$
$$\geqq \sum_n^\infty 2^{-n-1} f(2^d (N_X(2^{-n+1},T))^{-1}) = \sum_n^\infty 2^{-n-1}\sqrt{\log(2^{-d} N_X(2^{-n+1},T))}$$
$$\geqq \sum_n^\infty 2^{-n-1}\left\{\sqrt{\log N_X(2^{-n+1},T)} - \sqrt{d\log 2}\right\}$$

を得る。ゆえに

$$\sum_n^\infty 2^{-n-1}\sqrt{\log N_X(2^{-n+1},T)} < +\infty.$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

となるが，これより容易にDudleyの条件が導かれる。

（証明終）

定理 10.5 (T, d_X), $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{l}, P)$, $\{X(t); t\in T\}$ を定理 10.3 とし，$(T, \mathbb{B}_X(T))$ 上の確率測度の全体を $\mathcal{M}$ とすると，$\mu\in\mathcal{M}$ に対して，$\int_{+0}^{\delta}\sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon$ は，定理 10.4 の証明において示されたように，$\mathbb{B}_X(T)$-measurable となるが，もし

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\ \sup_{\mu\in\mathcal{M}}\int_T\int_{+0}^{\delta}\sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon = 0,$$

が成り立つならば，

$$P(\{\omega\,;\ X(t,\omega)\ \text{は}\ d_X\text{-連続}\}) = 1,$$

となる。

証明 $B_\mu(\omega) > 0$，を

$$B_\mu^2(\omega) = \left(\int_{\substack{T\times T\\ d_X(s,t)\neq 0}} \exp\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{X(s,\omega)-X(t,\omega)}{d_X(s,t)}\right)^2\right\} d\mu(s)\,d\mu(t)\right)\vee 1,$$

とする。但し，$a\vee b = \max(a,b)$，である。

$$\sqrt{\log\frac{B_\mu(\omega)}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}} \leqq \sqrt{\log B_\mu(\omega)} + \sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}$$

$$\leqq B_\mu(\omega) + \sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}$$

であるから，補題 10.5 の証明を見直すと，定理 10.3 の証明に用いた記号 N', N'' を使うとすると，$s,t\in S$，$\omega\notin N'\cup N''$ なら，

$$|X(s,\omega)-X(t,\omega)| \leqq 56\sqrt{2}\,d_X(s,t)\,B_\mu(\omega) +$$

$$+28\sqrt{2}\int_{+0}^{d_X(s,t)}\sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_X(s,\varepsilon))}}\,d\varepsilon + 28\sqrt{2}\int_{+0}^{d_X(s,t)}\sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon$$

となることが分る。

S が可算集合であることから，$S_k\subset S$，$k=1,2,\cdots$，を適当にとれば，$S=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k$，かつ $\#(S_k)<+\infty$，となる。

$\delta>0$，を固定して考え，各 k に対し，$\sigma_1^{(k)}(\omega)$，$\sigma_2^{(k)}(\omega)$，$\tau_1^{(k)}(\omega)$，$\tau_2^{(k)}(\omega)$，を次の様に定める；

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$\sigma_1^{(k)}(\omega)=s,\ \sigma_2^{(k)}(\omega)=t$

$$\Longleftrightarrow\ X(s,\omega)-X(t,\omega)>\sup_{\substack{u,v\in S_k\\ d_X(u,v)<\delta}}\ (X(u,\omega)-X(v,\omega))_{u\neq s,\ v\neq t},$$

及び，$\tau_1^{(k)}(\omega)=s,\ \tau_2^{(k)}(\omega)=t$

$$\Longleftrightarrow\ X(s,\omega)-X(t,\omega)<\inf_{\substack{u,v\in S_k\\ d_X(u,v)<\delta}}(X(u,\omega)-X(v,\omega))_{u\neq s,\ v\neq t}.$$

この時，$\sigma_1^{(k)}$ と $\sigma_2^{(k)}$ とが同分布になることが分る。
なぜなら，まず

$$\inf_{\substack{u,v\in S_k\\ d_X(u,v)<\delta}}(X(u,\omega)-X(v,\omega))=X(\tau_1^{(k)}(\omega),\omega)-X(\tau_2^{(k)}(\omega),\omega),$$

より，$$\sup_{\substack{u,v\in S_k\\ d_X(u,v)<\delta}}(X(u,\omega)-X(v,\omega))=X(\tau_2^{(k)}(\omega),\omega)-X(\tau_1^{(k)}(\omega),\omega)$$

でもあるから，$\sigma_1^{(k)}(\omega)=\tau_2^{(k)}(\omega)$，$\sigma_2^{(k)}(\omega)=\tau_1^{(k)}(\omega)$，となる。又，$\{X(t);t\in T\}$ が centered G.r.f. であることより，$\{X(s)-X(t);s,t\in T\}$，と $\{-X(s)+X(t);s,t\in T\}$ とは同分布である。従って

$$\inf_{\substack{u,v\in S_k\\ d_X(u,v)<\delta}}(X(u,\omega)-X(v,\omega))=-\sup_{\substack{u,v\in S_k\\ d(u,v)<\delta}}(-X(u,\omega)+X(v,\omega)),$$

であるが，$\sup_{\substack{u,v\in S_k\\ d_X(u,v)<\delta}}(-X(u,\omega)+X(v,\omega))$，と $\sup_{\substack{u,v\in S_k\\ d_X(u,v)<\delta}}(X(u,\omega)-X(v,\omega))$

とが同分布であるから．結局 $(\sigma_1^{(k)},\sigma_2^{(k)})$ と $(\tau_1^{(k)},\tau_2^{(k)})$ とが同分布となる。これより，$\sigma_1^{(k)}$ と $\tau_1^{(k)}$ とが同分布となり，$\sigma_1^{(k)}$ と $\sigma_2^{(k)}$ とが同分布であることが分る。
そこで，$\sigma_1^{(k)}$ の分布を $\mu_k\in\mathcal{M}$，とおく。先に述べた評価で μ を μ_k で考えて，$\omega\notin N'\cup N''$，$s,t\in S_k$，$d_X(s,t)<\delta$，ならば，

$$|X(s,\omega)-X(t,\omega)|\leq 56\sqrt{2}\ \delta\, B_{\mu_k}(\omega)+$$
$$+28\sqrt{2}\int_{+0}^{\delta}\sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_X(s,\varepsilon))}}\,d\varepsilon+28\sqrt{2}\int_{+0}^{\delta}\sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon$$

となる。$$\sup_{\substack{u,v\in S_k\\ d_X(u,v)<\delta}}|X(u,\omega)-X(v,\omega)|=\sup_{\substack{u,v\in S_k\\ d_X(u,v)<\delta}}(X(u,\omega)-X(v,\omega))$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

であることに注意して,

$$E\left[\sup_{\substack{u,v\in S_k\\ d_X(u,v)<\delta}}|X(u)-X(v)|\right]=E\left[\sup_{\substack{u,v\in S_k\\ d_X(u,v)<\delta}}(X(u)-X(v))\right]$$

$$=E\left[X(\sigma_1^{(k)})-X(\sigma_2^{(k)})\right]$$

$$\leq 56\sqrt{2}\cdot\delta\, E[B\mu_k]+28\sqrt{2}\int_T\int_{+0}^{\delta}\sqrt{\log\frac{1}{\mu_k(B_X(s,\varepsilon))}}\,d\varepsilon\, d\mu_k(s)+$$

$$+28\sqrt{2}\int_T\int_{+0}^{\delta}\sqrt{\log\frac{1}{\mu_k(B_X(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon\, d\mu_k(t)$$

$$\leq 56\sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{2}}\cdot\delta+56\sqrt{2}\sup_{\mu\in\mathfrak{M}}\int_T\int_{+0}^{\delta}\sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon\, d\mu(t)$$

を得る。 $k\longrightarrow+\infty$,として

$$E\left[\sup_{\substack{u,v\in S\\ d_X(u,v)<\delta}}|X(u)-X(v)|\right]\leq 56\sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{2}}\cdot\delta+$$

$$+56\sqrt{2}\sup\int_T\int_{+0}^{\delta}\sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_X(t,\varepsilon))}}\,d\varepsilon\, d\mu(t)$$

となるが, $\{X(t);t\in T\}$ が (S,N) に関して d_X-separable であることより, $\omega\notin N$ なら, $\delta\downarrow 0$ のとき

$$\sup_{\substack{u,v\in S\\ d_X(u,v)<\delta}}|X(u,\omega)-X(v,\omega)|\longrightarrow\sup_{u\in T}\alpha^X(u)$$

であるから,結局, $E[\sup_{u\in T}\alpha^X(u)]=0$, すなわち,

$\alpha^X(t)=0$, $t\in T$, となる。

(証明終)

<u>注意</u> 定理10.5の条件と,すでに導かれた条件との関係は分っていない。

次に,再び, $T=[0,1]^d$, の場合について考える。

$$\varphi;[0,\delta]\longrightarrow[0,a],$$

を, $\varphi(0)=0$, $\varphi([0,\delta])=[0,a]$,であり,かつ連続とする。Euclid norm を $\|\cdot\|$,で表わし,

$$d_X(s,t)=\varphi(\|s-t\|),\quad s,t\in T,$$

であるが, φ は必ずしも単調であるとは限らないとする。

$$\mu(y)=\lambda(\{h\in[0,\delta];\ \varphi(h)<y\}),\quad y\in[0,a]$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

とおく。但し，λ は $\mathbb{R}^1$ の Lebesgue 測度である。μ は左連続であり，かつ $0 \leq y_1 < y_2 \leq a$，なら $\mu(y_1) < \mu(y_2)$，である。実際，$\varphi([0,\delta]) = [0,a]$，かつ φ は連続であるから，$\{h \in [0,\delta]\,;\, y_1 < \varphi(h) < y_2\} \neq \phi$，であり，open であるからである。

次に，$\overline{\varphi}(h) = \sup\{y \in [0,a]\,;\, \mu(y) < h\}$，$h \in [0,\delta]$ とおく。μ が左連続,かつ真の増加関数であるから，$\overline{\varphi}$ は非減少連続関数となる。この $\overline{\varphi}$ を φ の non-decreasing arrangement と呼ぶことにする。もちろん，φ 自身が非減少であれば，$\overline{\varphi} = \varphi$，となる。

<u>定理 10.6</u>　記号及び仮定は上記の通りとする。この時，

$$\int^{+\infty} \overline{\varphi}(e^{-x^2})\,dx < +\infty \iff \int_{+0} \sqrt{Log\, N_X(\varepsilon,T)}\, d\varepsilon < +\infty$$

である。

<u>補題 10.6</u>　$f\,;\,(0,\delta] \longrightarrow [0,\infty)$，を非増加関数とする。$f$ の generalized inverse function を f^{-1} とする。つまり，任意の $0 \leq y < \infty$，に対して，

$$\sup\{x \in (0,\delta]\,;\, f(x) > y\} \leq f^{-1}(y) \leq \inf\{x \in (0,\delta]\,;\, f(x) < y\}$$

とする。この時，

$$\int_{+0} f(u)\,du < +\infty \iff \int^{+\infty} f^{-1}(y)\,dy < +\infty$$

である。

<u>証明</u>　$0 \leq u < v < +\infty$，に対して，定義より

$$f^{-1}(u) \geq \sup\{x\,;\, f(x) > u\} = x_0 .$$

$\varepsilon > 0$，に対し，$f(x_0+\varepsilon) \leq u < v$，であるから

$$x_0 + \varepsilon \geq \inf\{x\,;\, f(x) < v\} .$$

$\varepsilon \downarrow 0$ として，

$$f^{-1}(u) \geq x_0 \geq \inf\{x\,;\, f(x) < v\} \geq f^{-1}(v),$$

となるから，f^{-1} は非増加である。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

まず，$\int_{+0} f(u)\,du < +\infty$，とする。

$$a_k = \inf\{x\,;\, f(x) < 2^k\} \geqq f^{-1}(2^k), \quad k=1,2,\cdots$$

とおくと，$a_k \geqq a_{k+1} \geqq \cdots$，であるから，$a_k \downarrow 0\ (k\uparrow\infty)$ の場合について考えればよいことが分る。なぜなら，もし，$a_k \downarrow a > 0$，であるとすると，これは $f(u) = +\infty$，$u < a$ を意味し，$\int_{+0} f(u)\,du < +\infty$，に矛盾する。又，ある番号 k_0 から先では，$a_k = 0$，となるとすると，これは，$f^{-1}(y) = 0$，$y \geqq 2^{k_0}$，を意味し，$\int^{+\infty} f^{-1}(y)\,dy < +\infty$，は自明となるから。

そこで，$a_k \downarrow 0\ (k\uparrow\infty)$，とする。$a_k \geqq u > a_{k+1}$，ならば $2^{k+1} > f(u) \geqq 2^k$，であるから，仮定より

$$+\infty > \int_{+0}^{a_k} f(u)\,du \geqq 2^k a_k,$$

従って，$k\uparrow\infty$ のとき，$2^k a_k \longrightarrow C$，（$C$は定数）となる。

k_0 を固定して考えて，

$$+\infty > \int_{+0}^{a_{k_0}} f(u)\,du = \sum_{k=k_0}^{\infty}\int_{a_{k+1}}^{a_k} f(u)\,du$$

$$\geqq \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^k(a_k - a_{k+1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=k_0}^{n} 2^k(a_k - a_{k+1})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=k_0}^{n} 2^k a_k - \sum_{k=k_0+1}^{n+1} 2^{k-1} a_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2^{k_0}a_{k_0} - 2^{n+1}a_n + \sum_{k=k_0+1}^{n} 2^{k-1} a_k\right)$$

$$\geqq 2^{k_0}a_{k_0} - 2C + \frac{1}{2}\int_{2^{k_0+1}}^{+\infty} f^{-1}(y)\,dy$$

従って，$\int^{+\infty} f^{-1}(y)\,dy < +\infty$，が示された。

逆に，$\int^{+\infty} f^{-1}(y)\,dy < +\infty$，を仮定する。

$$b_k = \sup\{x\,;\, f(x) > 2^k\} \leqq f^{-1}(2^k), \quad k=1,2,\cdots$$

とおけば，上述と同様の議論により，$b_k \downarrow 0$，$k\uparrow\infty$，としてよい。$b_k \geqq u > b_{k+1}$，なら，$2^k < f(u) \leqq 2^{k+1}$，であるから

$$+\infty > \int_{2^k}^{2^{k+1}} f^{-1}(y)\,dy \geqq 2^k f^{-1}(2^{k+1}) \geqq 2^k b_{k+1}$$

従って，$2^k b_{k+1} \longrightarrow b$，$k\uparrow\infty$，となる。再び，$k_0$ を固定して考えると，

$$+\infty > \int_{2^{k_0}}^{+\infty} f^{-1}(y)\,dy = \sum_{k=k_0}^{\infty}\int_{2^k}^{2^{k+1}} f^{-1}(y)\,dy$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\geqq \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^k b_{k+1} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{n} 2^k b_k$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left\{ 2^{n+1} b_{n+1} - 2^{k_0+1} b_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{n} 2^{k+1} b_k - \sum_{k=k_0}^{n} 2^{k+1} b_{k+1} \right\}$$
$$\geqq \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left\{ 2^{n+1} b_{n+1} - 2^{k_0+1} b_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{n} \int_{b_{k+1}}^{b_k} f(u)\,du \right\}$$

従って, $\int_{+0} f(u)\,du < +\infty$, となる。 (証明終)

<u>定理10.6の証明</u> λ^d を $\mathbb{R}^d$ の Lebesgue 測度とし,

$m_k = \lambda^d(B_X(0, 2^{-k}))$, $k = 1, 2, \cdots$, とおく。

但し, $B_X(0, 2^{-k}) = \{ s \in T \,;\, d_X(s, t) < 2^{-k} \}$, であることに注意。すると,

$$\frac{2^d}{m_{k+1}} \geqq N_X(2^{-k}, T) \geqq \frac{2^{-d}}{m_k},$$

が成り立つから, $m(\varepsilon) = \lambda^d(B_X(0, \varepsilon))$, $\varepsilon > 0$, とおくと

$$\int_{+0} \sqrt{\operatorname{Log} N_X(\varepsilon, T)}\, d\varepsilon < +\infty \iff \int_{+0} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)}}\, d\varepsilon < +\infty,$$

となる。

さらに, $m'(\varepsilon) = \lambda(\{ h \in [0, \delta] \,;\, \varphi(h) < \varepsilon \})$, $\varepsilon > 0$,

とおくと, $d_X(s, t) = \varphi(\| s - t \|)$, $s, t \in T$, より

$$\operatorname{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)} \geqq \operatorname{Log} \frac{1}{m'(\varepsilon)} + \operatorname{Log} \frac{2^d}{\sqrt{d}^{\,d-1} S_d},$$

$$\operatorname{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)} \leqq d \operatorname{Log} \frac{1}{m'(\varepsilon)} + \operatorname{Log} \frac{2^d \cdot d}{S_d}.$$

が成り立つ。但し, S_d は $\mathbb{R}^d$ の単位球の表面積である。

実際, $m(\varepsilon) = \int_{B_X(0,\varepsilon)} d\lambda^d = 2^{-d} S_d \int_{\{r>0\,;\,\varphi(r)<\varepsilon\}} r^{d-1}\,dr$,

であり,

$$\sup_{s\in T} \| s \| \leqq \sqrt{d}$$

であるから, $m(\varepsilon) \leqq 2^{-d} S_d \sqrt{d}^{\,d-1} \lambda(\{ r > 0 \,;\, \varphi(r) < \varepsilon \})$

$$= 2^{-d} S_d \sqrt{d}^{\,d-1} m'(\varepsilon),$$

従って, $\operatorname{Log} \frac{1}{m(\varepsilon)} \geqq \operatorname{Log} \frac{1}{m'(\varepsilon)} + \operatorname{Log} \frac{2^d}{\sqrt{d}^{\,d-1} S_d}$, を得る。

逆に,

$$m(\varepsilon) = 2^{-d} S_d \int_{\{r>0\,;\,\varphi(r)<\varepsilon\}} r^{d-1}\,dr \geqq 2^{-d} S_d \int_0^{m'(\varepsilon)} r^{d-1}\,dr$$
$$= 2^{-d} d^{-1} S_d (m'(\varepsilon))^d,$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

従って，$\log \frac{1}{m(\varepsilon)} \leq d \log \frac{1}{m'(\varepsilon)} + \log \frac{2^d \cdot d}{S_d}$，を得る。
以上の評価式により，

$$\int_{+0} \sqrt{\log \frac{1}{m(\varepsilon)}}\, d\varepsilon < +\infty \Longleftrightarrow \int_{+0} \sqrt{\log \frac{1}{m'(\varepsilon)}}\, d\varepsilon < +\infty$$

であることが分る。
従って，$\overline{\varphi}(e^{-x^2})$ が $\sqrt{\log \frac{1}{m'(\varepsilon)}}$ の generalized inverse function になっていることを示せば，補題10.6により，定理の主張が証明される。

$$\sup\{\varepsilon > 0 ;\ \sqrt{\log \frac{1}{m'(\varepsilon)}} > x\}$$
$$= \sup\{\varepsilon > 0 ;\ \lambda(\{h > 0 ;\ \varphi(h) < \varepsilon\}) < e^{-x^2}\}$$
$$= \overline{\varphi}(e^{-x^2})$$

であるから，$\overline{\varphi}(e^{-x^2})$ は $\sqrt{\log \frac{1}{m'(\varepsilon)}}$ の generalized inverse function である。 (証明終)

§11 Comparison theorem

$R = (r_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ を non-degenerate $n \times n$ positive definite matrix とする。但し，$r_{ij} \in \mathbb{R}$，とする。$|R| = \det R$，とし

$$g(R, \overline{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |R|^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(R\overline{x}, \overline{x})\},$$
$$\overline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^d$$

とおく。

<u>補題11.1</u> R，$g(R, \overline{x})$ を上記の通りとし，$g(R, \overline{x})$ を r_{jk} の関数とみなすことにする。但し，r_{jk} と r_{kj} とは独立な変数と考える。この時，次が成り立つ：

(i) $j \neq k$ の時，$\dfrac{\partial g(R, \overline{x})}{\partial r_{jk}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 g(R, \overline{x})}{\partial x_j \partial x_k}$，

(ii) $\dfrac{\partial g(R, \overline{x})}{\partial r_{jj}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 g(R, \overline{x})}{\partial x_j^2}$．

ここで，$g(R, \overline{x})$ を r_{jk} で微分する時は，R が non-degenerate, positive definite であることにこだわらずに，r_{jk} を自由に動か

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

して考えるものとする。

証明　Fourier transform の方法による。

$$\varphi(R,\bar{z}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\bar{z},\bar{x})} g(R,\bar{x})\, d\bar{x} = \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(R\bar{z},\bar{z})\right\},$$
$$\bar{z} = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n,$$

とおく。

(i) $j \neq k$ の時；

$$\frac{\partial \varphi(R,\bar{z})}{\partial r_{jk}} = -\frac{1}{2} z_j z_k\, e^{-(R\bar{z},\bar{z})}$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} z_j z_k\, e^{i(\bar{z},\bar{x})} g(R,\bar{x})\, d\bar{x}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 e^{i(\bar{z},\bar{x})}}{\partial x_j \partial x_k} g(R,\bar{x})\, d\bar{x},$$

であるが，R が non-degenerate であるから部分積分ができて，

$$\frac{\partial \varphi(R,\bar{z})}{\partial r_{jk}} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\bar{z},\bar{x})} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} g(R,\bar{x})\, d\bar{x} .$$

一方，

$$\frac{\partial \varphi(R,\bar{z})}{\partial r_{jk}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\bar{z},\bar{x})} \frac{\partial g(R,\bar{x})}{\partial r_{jk}}\, d\bar{x},$$

であるから，結局

$$\frac{\partial g(R,\bar{x})}{\partial r_{jk}} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(R,\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k},$$

を得る。

(ii) も (i) と同様である。　　　　(証明終)

定理 11.1　（Slepian の補題）　T を有限集合で，$\#(T) = n \geq 2$，とする。$\{X(t)\,;\,t\in T\}$，$\{Y(t)\,;\,t\in T\}$ を T 上の centered G.r.f.'s とする。任意の $t \in T$ に対して，$E[X^2(t)] = E[Y^2(t)]$，であり，かつ任意の $s, t \in T$ に対して

$$E[X(s)X(t)] \leq E[Y(s)Y(t)],$$

であるとする。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

この時，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，

$$P(\{\omega ; \sup_{t \in T} X(t,\omega) \leq a\}) \leq P(\{\omega ; \sup_{t \in T} Y(t,\omega) \leq a\})$$

が成り立つ。

証明　$R^X = (r^X_{s,t})_{s,t\in T}$, $r^X_{s,t} = E[X(s)X(t)]$, $R^Y = (r^Y_{s,t})_{s,t\in T}$, $r^Y_{s,t} = E[Y(s)Y(t)]$, とおく。R^X, R^Y はともに positive definite matrix であるが，ここで R^X, R^Y がともに non-degenerate であるとして証明すれば十分であることが分る。実際，degenerate のときは，$\{Z(t) ; t \in T\}$ を，各 $Z(t)$ が正規分布 $N(0,1)$ に従い，かつ $\{X(t) ; t \in T\}$, $\{Y(t) ; t\in T\}$ と独立である G.r.f. として，

$$X_\varepsilon(t) = X(t) + \varepsilon Z(t), \quad Y_\varepsilon(t) = Y(t) + \varepsilon Z(t), \quad t \in T$$

とするとき，$\{X_\varepsilon(t)\}_t$, $\{Y_\varepsilon(t)\}_t$, について定理が成り立つならば，$\varepsilon \downarrow 0$ とすると，各 sample path ごとに，

$$X_\varepsilon(t,\omega) \longrightarrow X(t,\omega), \quad Y_\varepsilon(t,\omega) \longrightarrow Y(t,\omega)$$

であることから，$\{X(t)\}_t$, $\{Y(t)\}_t$, についても定理が成り立つことが分るからである。

以下，R^X, R^Y は non-degenerate とし，$T = \{1, \cdots, n\}$ とする。

$$R_\alpha = \alpha R^X + (1-\alpha) R^Y, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

とすると，定理 4.1 の (iii) より，R_α もまた positive definite となり，かつ non-degenerate となる。一方，§6 の議論により，R_α に対応する T 上の centered G.r.f. $\{X_\alpha(t) ; t\in T\}$ が存在する。この時，$\{X_0(t) ; t \in T\}$ と $\{Y(t) ; t \in T\}$，及び $\{X_1(t) ; t \in T\}$ と $\{X(t) ; t \in T\}$ とは，それぞれ同分布である。

$a \in \mathbb{R}$，を固定して考え，

$$f(\alpha) = P(\{\omega ; \sup_{t\in T} X_\alpha(t,\omega) \leq a\}), \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

とおくと，$f(\alpha)$ は α について微分可能である。$\check{x} = \max_{1\leq i\leq n} x_i$，と表わせば，

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \int_{\{\overline{x} ; \check{x} \leq a\}} \frac{\partial g(R_\alpha, \overline{x})}{\partial \alpha} \, d\overline{x}$$

$$= \int_{(\check{x} \leq a)} \sum_{s,t \in T} \frac{\partial g(R_\alpha, \overline{x})}{\partial r^\alpha_{s,t}} \frac{d r^\alpha_{s,t}}{d\alpha} \, d\overline{x} .$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

但し，$R^{\alpha} = (r^{\alpha}_{s,t})_{s,t \in T}$，とする。ここで，

$$E[X^2(t)] = E[Y^2(t)],$$

$$r^{\alpha}_{tt} = \alpha r^{X}_{tt} + (1-\alpha) r^{Y}_{tt} = r^{X}_{tt} = r^{Y}_{tt}, \qquad t \in T$$

であるから，$\dfrac{d r^{\alpha}_{tt}}{d\alpha} = 0$，$t \in T$，である。又，$s \neq t$ の時は，

$$\frac{d r^{\alpha}_{st}}{d\alpha} = r^{X}_{st} - r^{Y}_{st} = E[X(s)X(t)] - E[Y(s)Y(t)] \leq 0,$$

である。前補題により

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \int_{(\check{x} \leq a)} \sum_{s \neq t} (r^{X}_{st} - r^{Y}_{st}) \frac{\partial g(R^{\alpha}, \overline{x})}{\partial r^{\alpha}_{st}} \, d\overline{x}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{(\check{x} \leq a)} \sum_{s \neq t} (r^{X}_{st} - r^{Y}_{st}) \frac{\partial^2 g(R^{\alpha}, \overline{x})}{\partial x_s \partial x_t} \, d\overline{x}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s \neq t} \left\{ (r^{X}_{st} - r^{Y}_{st}) \int_{(\check{x}_t \leq a)} \frac{\partial g(R^{\alpha}, \overline{x})}{\partial x_s} \bigg|_{x_t = a} \frac{d\overline{x}}{dx_t} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s \neq t} \left\{ (r^{X}_{st} - r^{Y}_{st}) \int_{(\check{x}_{st} \leq a)} g(R_{\alpha}, \overline{x}) \bigg|_{\substack{x_s = a \\ x_t = a}} \frac{d\overline{x}}{dx_s \, dx_t} \right.$$

$$\leq 0.$$

但し，$\check{x}_t = \max\{x_j \,;\, j \neq t\}$，$\check{x}_{st} = \max\{x_j \,;\, j \neq s, t\}$，

$$\frac{d\overline{x}}{dx_t} = dx_1 \cdots dx_{t-1} \, dx_{t+1} \cdots dx_n,$$

$$\frac{d\overline{x}}{dx_s \, dx_t} = dx_1 \cdots dx_{s-1} \, dx_{s+1} \cdots dx_{t-1} \, dx_{t+1} \cdots dx_n, \qquad s<t \text{ のとき}.$$

とする。従って，$f(0) \geq f(1)$，すなわち，

$$P(\sup_{t \in T} Y(t) \leq a) \geq P(\sup_{t \in T} X(t) \leq a)$$

を得る。 (証明終)

<u>系</u>　定理 11.1 と同じ仮定のもとに，

$$E[\sup_{t \in T} Y(t)] \leq E[\sup_{t \in T} X(t)] < +\infty,$$

が成り立つ。

<u>証明</u>　$F_X(x) = P(\sup_{t \in T} X(t) \leq x)$，$F_Y(x) = P(\sup_{t \in T} Y(t) \leq x)$，$x \in \mathbb{R}$ とおくと，§8 の議論より，$\alpha > 0$ が存在して，

$$F_X(-x) + (1 - F_X(x)) \leq e^{-\alpha x^2},$$

が十分大きな x について成り立つ。従って，部分積分により，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$E[\sup_{t\in T} X(t)] = \int_{-\infty}^{0} x\, dF_X(x) - \int_0^{+\infty} x\, d(1-F_X(x))$$
$$= -\int_{-\infty}^{0} F_X(x)\,dx + \int_0^{+\infty} (1-F_X(x))\,dx\,.$$

であるが、定理Ⅱ.1 により、 $F_X(x) \le F_Y(x)$ ，であるから

$$E[\sup_{t\in T} X(t)] = -\int_{-\infty}^{0} F_X(x)\,dx + \int_0^{+\infty}(1-F_X(x))\,dx$$
$$\geq -\int_{-\infty}^{0} F_Y(x)\,dx + \int_0^{+\infty} (1-F_Y(x))\,dx = E[\sup_{t\in T} Y(t)]$$

を得る。 (証明終)

<u>注意</u> 定理Ⅱ.1 の仮定だけでは，

$$E[\sup_{t\in T} |X(t)|] \geq E[\sup_{t\in T} |Y(t)|]\,,$$

は必ずしも成り立つとは限らない。

<u>例</u> $T=\{1,2\}$，とする。 $X(1)=-X(2)$，とし $Y(1)$ は $Y(2)$ と独立であり，かつ $X(i), Y(i)$，$i=1,2$，は各々正規分布 $N(0,1)$ に従うものとする。この時，

$$E[X(1)X(2)] = -E[X(1)] = -1 \leq E[Y(1)Y(2)] = 0\,,$$

かつ、$E[X^2(i)] = E[Y^2(i)] = 1$，$i=1,2$，である。

$$E[\sup_{i=1,2} |X(i)|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,,$$

$$E[\sup_{i=1,2} |Y(i)|]$$
$$= 2\left\{ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{|y_2|}^{\infty} \frac{y_1}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}}\,dy_1dy_2 + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{-|y_2|} \frac{|y_1|}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}}\,dy_1dy_2 \right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,,$$

であるから， $E[\sup_i |X(i)|] < E[\sup_i |Y(i)|]$，となる。
(以上)

$\{X(t);\, t\in T\}$，$\{Y(t);\, t\in T\}$ を T 上の centered G.r.f.'s とし，
$d_X(s,t) = \sqrt{E[(X(s)-X(t))^2]}$，$d_Y(s,t) = \sqrt{E[(Y(s)-Y(t))^2]}$，
$s,t \in T$，とする。Slepian の補題の仮定より，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$d_X(s,t) \geqq d_Y(s,t) \quad , \quad s,t\in T$$

が得られる。ここで,

$$E[\sup_{s,t\in T}|X(s)-X(t)|] = E[\sup_{s,t\in T}(X(s)-X(t))]$$

$$= E[\sup_{s\in T}X(s)] - E[\inf_{t\in T}X(t)]$$

$$= E[\sup_{s\in T}X(s)] + E[\sup_{t\in T}(-X(t))]$$

$$= E[\sup_{s\in T}X(s)] + E[\sup_{t\in T}X(t)] = 2E[\sup_{t\in T}X(t)]$$

すなわち, $E[\sup_{t\in T}X(t)] = \frac{1}{2}E[\sup_{s,t\in T}|X(s)-X(t)|]$, である。同様に, $E[\sup_{t\in T}Y(t)] = \frac{1}{2}E[\sup_{s,t\in T}|Y(s)-Y(t)|]$, であることに注意して, Slepianの補題の仮定;

$$E[X^2(t)] = E[Y^2(t)], \quad E[X(s)X(t)] \leqq E[Y(s)Y(t)] \quad , s,t\in T$$

の代わりに,

$$d_X(s,t) \geqq d_Y(s,t), \quad s,t\in T$$

を仮定して, Slepianの補題の結果が得られないか, ということについて考える。

<u>定理 11.2</u> Tを有限集合とし, $\#(T)=n\geqq 2$, とする。$\{X(t);t\in T\}$, $\{Y(t);t\in T\}$ をT上の centered G.r.f.'s とし

$$d_X(s,t) \geqq d_Y(s,t) \quad , \quad s,t\in T,$$

を仮定する。この時,

$$E[\sup_{t\in T}X(t)] \geqq E[\sup_{t\in T}Y(t)]$$

が成り立つ。

<u>証明</u> R^X, R^Y は定理 11.1 の証明と同じとし, ともに non-degenerate と仮定してよいことも, 同様である。

$R_\alpha = \alpha R^X + (1-\alpha)R^Y$, とし, $\{X_\alpha(t);t\in T\}$ を R_α に対応する T上の centered G.r.f. とする。

$F(\alpha) = E[\sup_{t\in T}X_\alpha(t)]$, とおくとき, $0\leqq\alpha\leqq 1$, で $\dfrac{dF(\alpha)}{d\alpha} \geqq 0$, であることを示せばよい。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$\frac{\partial g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial\alpha} = \sum_{s,t\in T} \frac{\partial g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial \gamma^\alpha_{st}} \cdot \frac{d\gamma^\alpha_{st}}{d\alpha}$$

$$= \sum_{s,t} \frac{\partial g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial \gamma^\alpha_{st}} \left(\gamma^X_{s,t} - \gamma^Y_{st}\right)$$

$$= \sum_{s,t} \frac{\partial g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial \gamma^\alpha_{st}} \frac{1}{2}\left(d_Y^2(s,t) - d_X^2(s,t) + \gamma^X_{ss} + \gamma^X_{tt} - \gamma^Y_{ss} - \gamma^Y_{tt}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{s,t} \frac{\partial^2 g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial x_s\,\partial x_t}\left(d_Y^2(s,t) - d_X^2(s,t) + \gamma^X_{ss} + \gamma^X_{tt} - \gamma^Y_{ss} - \gamma^Y_{tt}\right)$$

であるから，

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\check{x}\, g(R_\alpha,\overline{x})\right) d\overline{x}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{s\neq t}\left(d_Y^2(s,t) - d_X(s,t)\right)\int_{\mathbb{R}^n} \check{x}\, \frac{\partial^2 g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial x_s\,\partial x_t}\, d\overline{x} +$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{s\neq t}\left(\gamma^X_{ss} + \gamma^X_{tt} - \gamma^Y_{ss} - \gamma^Y_{tt}\right)\int_{\mathbb{R}^n} \check{x}\, \frac{\partial^2 g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial x_s\,\partial x_t}\, d\overline{x} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{t\in T}\left(\gamma^X_{tt} - \gamma^Y_{tt}\right)\int_{\mathbb{R}^n} \check{x}\, \frac{\partial^2 g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial x_t^2}\, d\overline{x} \quad ,$$

である。但し，$\overline{x} = (x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，であり，以下，$\check{x}$ 等，定理11.1 の証明と同様の記号を使う。右辺の第1項をⅠ，第2項をⅡ，第3項をⅢ，とおく。

Ⅰについて；

$$\int_{\mathbb{R}^n} \check{x}\, \frac{\partial^2 g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial x_s\,\partial x_t}\, d\overline{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left\{\int_{-\infty}^{\check{x}_s} \check{x}_s \frac{\partial^2 g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial x_s\,\partial x_t}\, dx_s + \int_{\check{x}_s}^{+\infty} x_s \frac{\partial^2 g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial x_s\,\partial x_t}\, dx_s\right\}\frac{d\overline{x}}{dx_s}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left\{\left[\check{x}_s \frac{\partial g}{\partial x_t}\right]_{x_s=-\infty}^{x_s=\check{x}_s} + \left[x_s \frac{\partial g}{\partial x_t}\right]_{x_s=\check{x}_s}^{x_s=\infty} - \int_{\check{x}_s}^{\infty} \frac{\partial g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial x_t}\, dx_s\right\}\frac{d\overline{x}}{dx_s}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\check{x}_s}^{\infty} \frac{\partial g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial x_t}\, dx_s\right) dx_t\right\}\frac{d\overline{x}}{dx_s\, dx_t}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-2}}\left\{\int_{-\infty}^{\check{x}_{st}}\left(\int_{\check{x}_{st}}^{\infty} \frac{\partial g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial x_t}\, dx_s\right) dx_t + \int_{\check{x}_{st}}^{\infty}\left(\frac{\partial g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial x_t}\, dx_s\right) dx_t\right\}\frac{d\overline{x}}{dx_s\, dx_t}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-2}}\left\{\int_{\check{x}_{st}}^{\infty}\left[g(R_\alpha,\overline{x})\right]_{x_t=-\infty}^{x_t=\check{x}_{st}} dx_s + \int_{\check{x}_{st}}^{\infty}\left(\int_{\check{x}_{st}}^{x_s} \frac{\partial g(R_\alpha,\overline{x})}{\partial x_t}\, dx_t\right) dx_s\right\}\frac{d\overline{x}}{dx_s\, dx_t}$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-2}} \left\{ \int_{\check{x}_{st}}^{\infty} [g(R_\alpha, \overline{x})]_{x_t = x_s} dx_s \right\} \frac{d\overline{x}}{dx_s dx_t} \leq 0 ,$$

従って，$d_Y^2(s,t) - d_X^2(s,t) \leq 0$，と合わせて，$\mathrm{I} \geq 0$，を得る。

次に Ⅲ について；

$$\int_{\mathbb{R}^n} \check{x} \frac{\partial g(R_\alpha, \overline{x})}{\partial x_t^2} d\overline{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left\{ \int_{-\infty}^{\check{x}_t} \check{x}_t \frac{\partial^2 g(R_\alpha, \overline{x})}{\partial x_t^2} dx_t + \int_{\check{x}_t}^{\infty} x_t \frac{\partial^2 g(R_\alpha, \overline{x})}{\partial x_t^2} dx_t \right\} \frac{d\overline{x}}{dx_t}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left\{ \check{x}_t \left[\frac{\partial g}{\partial x_t} \right]_{x_t = -\infty}^{x_t = \check{x}_t} + x_t \left[\frac{\partial g}{\partial x_t} \right]_{x_t = \check{x}_t}^{x_t = \infty} - \int_{\check{x}_t}^{\infty} \frac{\partial g(R_\alpha, \overline{x})}{\partial x_t} dx_t \right\} \frac{d\overline{x}}{dx_t}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\check{x}_t}^{\infty} \frac{\partial g(R_\alpha, \overline{x})}{\partial x_t} dx_t \right) \frac{d\overline{x}}{dt} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [g]_{x_t = \check{x}_t} \frac{d\overline{x}}{dx_t}$$

$$= \sum_{s \neq t} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \left\{ \int_{\check{x}_{st}}^{\infty} [g]_{x_t = \check{x}_t} dx_s \right\} \frac{d\overline{x}}{dx_s dx_t}$$

$$= \sum_{s \neq t} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \left\{ \int_{\check{x}_{st}}^{\infty} [g]_{x_t = x_s} dx_s \right\} \frac{d\overline{x}}{dx_s dx_t} ,$$

従って，

$$\mathrm{III} = \frac{1}{2} \sum_t (\gamma_{tt}^X - \gamma_{tt}^Y) \sum_{s \neq t} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \left\{ \int_{\check{x}_{st}}^{\infty} [g]_{x_t = x_s} dx_s \right\} \frac{d\overline{x}}{dx_s dx_t}$$

となる。

一方，Ⅱ について，s,t について対称であることより

$$\mathrm{II} = \frac{1}{2} \sum_t (\gamma_{tt}^X - \gamma_{tt}^Y) \sum_{s \neq t} \int_{\mathbb{R}^n} \check{x} \frac{\partial^2 g(R_\alpha, \overline{x})}{\partial x_s \partial x_t} d\overline{x} ,$$

であるが，Ⅰの計算において示されたように，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \check{x} \frac{\partial^2 g(R_\alpha, \overline{x})}{\partial x_s \partial x_t} d\overline{x} = -\int_{\mathbb{R}^{n-2}} \left\{ \int_{\check{x}_{st}}^{\infty} [g(R_\alpha, \overline{x})]_{x_t = x_s} dx_s \right\} \frac{d\overline{x}}{dx_s dx_t}$$

であるから，

$$\mathrm{II} = -\frac{1}{2} \sum_t (\gamma_{tt}^X - \gamma_{tt}^Y) \sum_{s \neq t} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \left\{ \int_{\check{x}_{st}}^{\infty} [g(R_\alpha, \overline{x})]_{x_t = x_s} dx_s \right\} \frac{d\overline{x}}{dx_s dx_t}$$

となる。従って $\mathrm{II} + \mathrm{III} = 0$。

以上により，$\dfrac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \mathrm{I} \geq 0$，であることが示される。

（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

§12 Necessary condition for sample continuity of a Gaussian random field

$A_m = \{1, 2, \cdots, m\}$, $m = 1, 2, \cdots$, とおき, $\mathfrak{A}_m$ を A_m の部分集合の全体とする。明らかに $\#(\mathfrak{A}_m) = 2^m$, である。

φ_k, $k = 1, 2, \cdots, m$, を $\mathfrak{A}_m$ で定義される関数で, $t \in \mathfrak{A}_m$, に対し

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 1, & k \in t \text{ のとき} \\ 0, & k \notin t \text{ のとき} \end{cases}$$

であるとする。すると, $t \in \mathfrak{A}_m$ に対して $(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_m(t))$ が1対1に対応する。

T, T' を有限集合とし, $\#(T) = \#(T') = 2^m$, とする。T と $\mathfrak{A}_m$ との間の1対1対応を τ とし, T' と $\mathfrak{A}_m$ との間の1対1対応を τ' とする。

$$Y(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau(t))\lambda_k, \qquad t \in T$$

$$Y(t') = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau'(t'))\lambda_k, \qquad t' \in T',$$

とおく。但し, λ_k, $k = 1, \cdots, m$, は互いに独立で, 各々は正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である。この時,

$$E[(Y(t) - Y(t'))^2] = E\left[\frac{1}{m}\left\{\sum_{k=1}^{m}(\varphi_k(\tau(t)) - \varphi_k(\tau'(t')))\lambda_k\right\}^2\right]$$
$$= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(\varphi_k(\tau(t)) - \varphi_k(\tau'(t')))^2 \leq 1,$$

又,

$$\sup_{\substack{t \in T \\ t' \in T'}} (Y(t, \omega) - Y(t', \omega))$$
$$= \sup_{\substack{t \in T \\ t' \in T'}} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m}(\varphi_k(\tau(t)) - \varphi_k(\tau'(t')))\lambda_k(\omega)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k(\omega)|,$$

となる。従って,

$$E\left[\sup_{t \in T, t' \in T'} (Y(t) - Y(t'))\right] = \sqrt{m}\, E[|\lambda_1|] = \sqrt{\frac{2m}{\pi}}$$

である。

以上の準備のもとに次の定理を証明する。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

定理 12.1　T を有限集合とし、$\#(T)=n\geq 2$，とする。$\{X(t);t\in T\}$ を centered G.r.f. とし，$\varepsilon>0$，が存在して，

$$d_X(s,t)\geq\varepsilon \quad , \quad s,t\in T\ ,\ s\neq t$$

が成り立つとする。この時，

$$E[\sup_{t\in T}X(t)]\geq\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{[\log_2 n]} \quad ,$$

が成り立つ。但し，$[\cdot]$ は Gauss の記号であり，$\log_2$ は 2 を底とする対数を表わす。

証明　$p_n=[\log_2 n]$，とおく。$T'\subset T$，を $\#(T')=2^{p_n}\leq n$，となるものとする。τ を T' と $\mathfrak{A}_m$ との間の 1 対 1 対応とし，

$$Y(t)=\varepsilon\frac{1}{\sqrt{p_n}}\sum_{k=1}^{p_n}\varphi_k(\tau(t))\lambda_k \quad , \quad t\in T'$$

とおく。φ_k，λ_k は前述の通りとする。先に述べたことより，

$$E[(Y(t)-Y(t'))^2]\leq\varepsilon^2\leq d_X^2(t,t') \quad , \quad t,t'\in T',\ t\neq t'$$

となる。従って　定理 11.2　により

$$E[\sup_{t\in T}X(t)]\geq E[\sup_{t\in T'}X(t)]\geq E[\sup_{t\in T'}Y(t)]$$

となる。一方，

$$E[\sup_{t\in T'}Y(t)]=\frac{1}{2}E[\sup_{t,t'\in T'}(Y(t)-Y(t'))]$$
$$=\varepsilon\sqrt{\frac{p_n}{2\pi}}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{[\log_2 n]}$$

であるから，定理の主張を得る。　　　　(証明終)

系　T は無限集合とし，$\{X(t);t\in T\}$ を T 上の centered G.r.f. とし，(S,N) に関して d_X-separable とする。但し，$S\subset T$，は (T,d_X) で dense な可算集合であり，$N\in\mathfrak{A}$，$P(N)=0$，である。さらに $A\subset T$，と $\varepsilon>0$，が存在して，$\#(A)=+\infty$，かつ　$d_X(s,t)\geq\varepsilon$　，$s,t\in A$，$s\neq t$，が成り立つとする。この時，

$$E[\sup_{t\in T}X(t)]=+\infty \quad ,$$

でありこれは，$P(\sup_{t\in T}X(t)=+\infty)=1$，と同値である。

証明　まず，定理12.1より，$E[\sup_{t\in T} X(t)] = +\infty$，である。次に $\{X(t); t\in T\}$ が centered G.r.f. であることから，§8 の議論より，$P(\sup_{t\in T}|X(t)| < +\infty) = 0$ or 1，である。もし，$P(\sup_{t\in T}|X(t)| < +\infty) = 1$，であるなら，

$E[\sup_{t\in T}|X(t)|] < +\infty$，でなければならないから，結局，

$P(\sup_{t\in T}|X(t)| = +\infty) = 1$，

でなければならない。ゆえに，$P(\sup_{t\in T} X(t) = +\infty) = 1$，でなければならない。　(証明終)

注意　$\#(T) = n < +\infty$，とし，$\{X(t); t\in T\}$ を centered G.r.f. とし，$\varepsilon > 0$，が存在して，

$$d_X(s,t) \leqq \varepsilon, \quad s, t \in T,$$

であるとする。この時，

$$E[\sup_{t\in T} X(t)] \leqq 2\varepsilon\sqrt{\log(\sqrt{2}n)},$$

が成り立つ。

証明　まず，$s\in T$ を固定して考える。

$t\in T$，$d_X(s,t) \neq 0$，に対して

$$\exp\left\{\left(\frac{X(s,\omega)-X(t,\omega)}{2d_X(s,t)}\right)^2\right\} \leqq \sum_{\substack{u\in T\\ d_X(s,u)\neq 0}} \exp\left\{\left(\frac{X(s,\omega)-X(u,\omega)}{2d_X(s,u)}\right)^2\right\},$$

であるから，

$$|X(s,\omega)-X(t,\omega)| \leqq 2d_X(s,t)\sqrt{\log\left(\sum_{\substack{u\in T\\ d_X(s,u)\neq 0}} \exp\left\{\left(\frac{X(s,\omega)-X(u,\omega)}{2d_X(s,u)}\right)^2\right\}\right)}$$

$$\leqq 2\varepsilon\sqrt{\log\left(\sum_{\substack{u\in T\\ d_X(s,u)\neq 0}} \exp\left\{\left(\frac{X(s,\omega)-X(u,\omega)}{2d_X(s,u)}\right)^2\right\}\right)}$$

となる。

もし，$d_X(s,t) = 0$，ならば，明らかに，$X(s,\omega) = X(t,\omega)$，a.s. であるから，

$$\left\{\omega;\ \text{任意の } t\in T \text{ に対して}, \atop X(t,\omega) \leqq X(s,\omega) + 2\varepsilon\sqrt{\log\left(\sum_{\substack{u\in T\\ d_X(s,u)\neq 0}} \exp\left\{\left(\frac{X(s,\omega)-X(u,\omega)}{2d_X(s,u)}\right)^2\right\}\right)}\right\}$$

の確率は1である。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

Jensen の不等式により，

$$E[\sup X(t)] \leqq 2\varepsilon E\left[\sqrt{\log\left(\sum \exp\left\{\left(\frac{X(s)-X(u)}{2d_X(s,u)}\right)^2\right\}\right)}\right]$$

$$\leqq 2\varepsilon\sqrt{\log\left(\sum_{\substack{u\in T\\ d_X(s,u)\neq 0}} E\left[\exp\left\{\left(\frac{X(s)-X(u)}{2d_X(s,u)}\right)^2\right\}\right]\right)}$$

$$\leqq 2\varepsilon\sqrt{\log(\sqrt{2}\ \#(T))}.$$

（証明終）

さて，(T, d) を compact な pseudo-metric space とし，S を T の部分集合とする。

定義 12.1　$A\subset S$，が S 上の ε-distinguishable set であるとは，$d(s,t) > \varepsilon$，$s, t\in A$，$s\neq t$，が成り立つことである。さらに，

$$M_d(\varepsilon, S) = \sup\{\#(A)\ ;\ A \text{ は } S \text{ 上の } \varepsilon\text{-distin. set}\}$$

とおく。

$\{X(t)\ ;\ t\in T\}$ を centered G.r.f. とし，(T, d_X) は第2可算公理を満たすとする。以下，$S\subset T$，を固定して考え，$\delta>0$ に対し，S_δ を S の (T, d_X) における δ-近傍とする。

$q\geqq 2$，とし

$$n_k = \inf\{[\log_2 M_X(2\delta q^{-k}, B_X(s, \delta q^{-k+1}))]\ ;\ s\in S_\delta\},\quad k=1,2,\cdots$$

とおく。但し，$[\cdot]$ は Gauss の記号である。

定理 12.2　上記の仮定と記号のもとに

$$E[\sup X(t)] \geqq \frac{\delta}{8\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{[\log_2 M_X(2\delta, S)]} + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{n_k}\, q^{-k}\right)$$

が成り立つ。

証明　四段階に分けて証明する。

(I) S_{2n} の構成。

$n_0 = [\log_2 M_X(2\delta, S)]$，とし，$S_0$ を S 上の maximal

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

(2δ)- distin. set とする。$s \in S_0$, に対して, $S_2(s)$ を,
$B_X(s, \delta g^{-1})$ 上の $(2\delta g^{-2})$- distin. set であり, かつ
$\#(S_2(s)) = 2^{n_2}$, を満たすものとする。
$t \in S_2(s)$, なら $d_X(s,t) \le \delta g^{-1} < \delta$, であるから,
$S_2(s) \subset S_\delta$, である。

$S_2 = \bigcup_{s \in S_0} S_2(s)$, とおく。$S_2 \subset S_\delta$, は明らか。

次に, $S_{2(k-1)}$ まで構成され, かつ $S_{2i} \subset S_\delta$, $i=1,\cdots,k-1$, であるとする。この時, $s \in S_{2(k-1)}$, に対して, $S_{2k}(s)$, を
$B_X(s, \delta g^{-2k+1})$ 上の $(2\delta g^{-2k})$- distin. set であり, かつ
$\#(S_{2k}(s)) = 2^{n_{2k}}$, を満たすものとし,

$S_{2k} = \bigcup_{s \in S_{2(k-1)}} S_{2k}(s)$, とおく。$S_{2k} \subset S_\delta$, が成り立つ。

実際, $t \in S_{2k}$, に対して $s_i \in S_{2i}$, $i=0,1,\cdots,k-1$, が存在して, $t \in B_X(s_{k-1}, \delta g^{-2k+1})$, $s_{k-1} \in B_X(s_{k-2}, \delta g^{-2k+3})$, $\cdots$ $\cdots$, $s_1 \in B_X(s_0, \delta g^{-1})$, となる。これより,

$$d_X(t, s_0) \le d_X(t, s_{k-1}) + d_X(s_{k-1}, s_{k-2}) + \cdots + d_X(s_1, s_0)$$
$$\le \delta g^{-2k+1} + \delta g^{-2k+3} + \cdots + \delta g^{-1} \le \frac{\delta g}{g^2-1} < \delta,$$

となり, $S_{2k} \subset S_\delta$, となる。

(II) Y_{2m} の構成。

$s \in S_{2k}$, に対して, $s' \in S_{2(k-1)}$, が唯一つ存在して,
$s \in S_{2k}(s')$, となる。そこで,
$\varphi_{2k}^{2(k-1)}$; $S_{2k} \longrightarrow S_{2(k-1)}$, を
$$\varphi_{2k}^{2(k-1)}(s) = s' \iff s \in S_{2k}(s').$$
で定義する。さらに, $0 \le l < k$, に対して,
φ_{2k}^{2l}; $S_{2k} \longrightarrow S_{2l}$, を
$$\varphi_{2k}^{2l}(s) = \varphi_{2(l+1)}^{2l} \circ \varphi_{2(l+2)}^{2(l+1)} \circ \cdots \circ \varphi_{2k}^{2(k-1)}(s), \quad s \in S_{2k}.$$
で定義する。次に,

τ_0; $S_0 \longrightarrow \mathfrak{A}_{n_0}$, を前述の1対1対応とし,
$s \in S_{2(k-1)}$, に対して
$\tau_{2k}^{(s)}$; $S_{2k}(s) \longrightarrow \mathfrak{A}_{n_{2k}}$, をやはり前述の1対1対応とする。$t \in S_0$, に対して,
$$Y_0(t) = \frac{\delta}{4\sqrt{n_0}} \sum_{i=1}^{n_0} \varphi_i(\tau_0(t))\lambda_i^{(0)},$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$t \in S_{2k}$，に対しては，$s \in \psi_{2k}^{2(k-1)}(t)$，とする時，

$$Y_{2k}(t) = Y_{2(k-1)}(s) + \frac{\delta}{4 g^{2k}\sqrt{n_{2k}}} \sum_{i=1}^{n_{2k}} \varphi_i(\tau_{2k}^{(s)}(t))\lambda_i^{(2k)}$$

とする。

但し，$\lambda_i^{(2k)}$，$i=1,\cdots,n_{2k}$，$k=0,1,2,\cdots\cdots$，は互いに独立で，各各は $N(0,1)$ に従うものとする。

(III) $E[\sup_{t\in S_{2m}} Y_{2m}(t)]$ の評価，その他

$k \geqq 1$，$s,t \in S_{2k}$，$s \neq t$，とする。

(i) $0 \leqq l \leqq k-1$，なる l が存在して，

$$\psi_{2k}^{2l}(s) = \psi_{2k}^{2l}(t), \quad \psi_{2k}^{2j}(s) \neq \psi_{2k}^{2j}(t), \quad l < j \leqq k-1,$$

となる場合について；

$$Y_{2k}(s) - Y_{2k}(t)$$
$$= \sum_{j=l+1}^{k} \frac{\delta}{4 g^{2j}\sqrt{n_{2j}}} \sum_{i=1}^{n_{2j}} \left\{ \varphi_i(\tau_{2j}^{(s_{j-1})}(s)) - \varphi_i(\tau_{2j}^{(t_{j-1})}(t)) \right\} \lambda_i^{(2j)}$$

である。但し，$s_{j-1} = \psi_{2k}^{2(j-1)}(s)$，$t_{j-1} = \psi_{2k}^{2(j-1)}(t)$，である。

従って，定理12.1の直前に述べたことに注意して，

$$E[(Y_{2k}(s) - Y_{2k}(t))^2] \leqq \sum_{j=l+1}^{k} \frac{\delta^2}{16 g^{4j}}$$
$$\leqq \frac{\delta^2}{16} \frac{g^{-4(l+1)}}{1-g^{-4}} \leqq \frac{\delta^2}{15 g^{4(l+1)}},$$

を得る。仮定より，$s_{l+1} \neq t_{l+1}$，かつ $s_l = t_l$，であるから，

$$d_X(s_{l+1}, t_{l+1}) > 2\delta g^{-2(l+1)}, \quad \text{となる。}$$

一方，$d_X(s_{j-1}, s_j) \leqq \delta g^{-2j+1}$，$d_X(t_{j-1}, t_j) \leqq \delta g^{-2j+1}$，

であるから，

$$d_X(s,t) \geqq d_X(s_{l+1}, t_{l+1}) - \sum_{j=l+2}^{k} d_X(s_{j-1}, s_j) - \sum_{j=l+2}^{k} d_X(t_{j-1}, t_j)$$
$$\geqq 2\delta g^{-2(l+1)} - 2\sum_{j=l+2}^{k} \delta g^{-2j+1}$$
$$\geqq 2\delta g^{-2(l+1)} - 2\delta \frac{g^{-2l-3}}{g^2-1} = 2\delta g^{-2(l+1)}\left(1 - \frac{g}{g^2-1}\right)$$
$$> \frac{\delta}{3 g^{2(l+1)}} \qquad (\because g \geqq 2)$$

となり，従って，

$$d_X^2(s,t) \geqq \frac{\delta^2}{9 g^{4(l+1)}} > \frac{\delta^2}{15 g^{4(l+1)}} \geqq E[(Y_{2k}(s) - Y_{2k}(t))^2]$$
$$= d_{Y_{2k}}^2(s,t).$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

(ii) $\varphi_{2k}^{0}(s) \neq \varphi_{2k}^{0}(t)$，の場合について；

(i)において，$\ell=-1$，とした時の結果が成り立つから，

$$d_X(s,t) \geq \frac{\delta}{3} \quad , \quad d_{Y_{2k}}^{2}(s,t) \leq \frac{\delta^2}{15} \quad ,$$

となり，結局，$d_X(s,t) \geq d_{Y_{2k}}(s,t)$，を得る。

(i),(ii)により 任意の $s,t \in S_{2k}$ に対して

$d_X(s,t) \geq d_{Y_{2k}}(s,t)$，が成り立つ。

一方，

$$\sup_{s,t\in S_{2k}} (Y_{2k}(s) - Y_{2k}(t)) = \sup_{s_{k-1},t_{k-1}\in S_{2(k-1)}} \sup_{\substack{s\in S_{2k}(s_{k-1})\\ t\in S_{2k}(t_{k-1})}} (Y_{2k}(s) - Y_{2k}(t))$$

$$= \sup_{s_{k-1},t_{k-1}\in S_{2(k-1)}} (Y_{2(k-1)}(s_{k-1}) - Y_{2(k-1)}(t_{k-1})) + \frac{\delta}{4g^{2k}\sqrt{n_{2k}}} \sum_{i=1}^{n_{2k}} |\lambda_i^{(2k)}|$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{\delta}{4g^{2j}\sqrt{n_{2j}}} \sum_{i=1}^{n_{2j}} |\lambda_i^{(2j)}|$$

従って，

$$E[\sup_{t\in S_{2k}} Y_{2k}(t)] = \frac{1}{2} E[\sup_{s,t\in S_{2k}} (Y_{2k}(s) - Y_{2k}(t))]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} \frac{\delta}{4g^{2j}\sqrt{n_{2j}}} \sum_{i=1}^{n_{2j}} E[|\lambda_i^{(2j)}|] = \frac{\delta}{4\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{k} \frac{\sqrt{n_{2j}}}{g^{2j}}$$

を得る。

(IV) $E[\sup_{t\in T} X(t)]$ の評価。

(III) より，$d_X(s,t) \geq d_{Y_{2k}}(s,t)$，$s,t\in S_{2k}$，であるから，定理 11.2 により

$$E[\sup_{t\in T} X(t)] \geq E[\sup_{t\in S_{2k}} X(t)]$$

$$\geq E[\sup_{t\in S_{2k}} Y_{2k}(t)]$$

$$\geq \frac{\delta}{4\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{k} \frac{\sqrt{n_{2j}}}{g^{2j}}$$

を得る。

以上の議論を，δ を δg^{-1} で置きかえて繰り返せば，奇数番号の項による評価，

$$E[\sup_{t\in T} X(t)] \geq \frac{\delta}{4\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{k} \frac{\sqrt{n_{2j+1}}}{g^{2j+1}}$$

を得る。

以上の2つの評価を合わせて，$k \longrightarrow \infty$，とすれば，定理の主張を得る。 (証明終)

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

以下，この節において，$T=[-1,1]^d$，とし $d(s,t)$, $s,t\in\mathbb{R}^d$ は Euclidean distance とする。

<u>定理 12.3</u> $\{X(t)\,;\,t\in T\}$ を d-separable な centered G.r.f. とし，次の条件を満たすとする；

(i) (T,d) から (T,d_X) への恒等写像は連続である。

(ii) 任意の $s,t\in T$，$u\in\mathbb{R}^d$，$s+u$, $t+u\in T$，に対して $d_X(s,t)=d_X(s+u,t+u)$，が成り立つ。

この時，$\alpha^X(t)=0$，$t\in T$，である為の必要十分条件は，

$$(***)\quad \int_{+0}\sqrt{\log_2 N_X(\varepsilon,T)}\,d\varepsilon<+\infty$$

である。

<u>注意</u> 条件 $(***)$ から $\alpha^X(t)=0$，$t\in T$，が導かれることは Dudley による（定理 10.2）。又 $\alpha^X(t)=0$，$t\in T$，が $\alpha^d(t)=0$，$t\in T$，と同値であることは，定理 9.6 による。一方，$\alpha^d(t)=0$，$t\in T$，から $E[\sup_{t\in T}X(t)]<+\infty$，が導かれるが，§8 の議論より，$E[\sup_{t\in T}X(t)]<+\infty$，と $P(\sup_{t\in T}|X(t)|<+\infty)=1$，とは同値である。さらに，定理 12.3 の証明から，$E[\sup_{t\in T}X(t)]<+\infty$，から Dudley の条件 $(***)$ が導かれることが分るから，結局 $\alpha^X(t)=0$，$t\in T$，と $P(\sup_{t\in T}|X(t)|<+\infty)=1$，とが同値であることが分る。

<u>補題 12.1</u> 定理 12.3 の仮定の下に，$F=\{t\in T\,;\,d_X(0,t)=0\}$ とおく。原点 0 が F の集積点であるとすると，$\mathbb{R}^d$ の linear subspace L が存在して，$L\cap T\subset F$，となる。

<u>証明</u> $t_n\in F$，$t_n\neq 0$，$n=1,2,\cdots$，が存在して，$n\to\infty$ のとき，$\|t_n\|=d(0,t_n)\to 0$，となるとする。L_n を $\{t_n,t_{n+1},\cdots\}$ の張る linear subspace とする。

$L=\bigcap_{n=1}^{\infty}L_n$，とおけば，$L$ は $\mathbb{R}^d$ の linear subspace であり，かつ $\dim L\geqq 1$，である。$F\supset L\cap T$，を示す。

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$k \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $t_0 \in L \cap T$，に対して，$i_{n,1}, \cdots, i_{n,k} \in \mathbb{N}$ が存在して，$i_{n,j} \geqq n$，$j=1,\cdots,k$，かつ

$$t_0 = \sum_{j=1}^{k} a_j^{(n)} t_{i_{n,j}} \quad , \quad a_j^{(n)} t_{i_{n,j}} \in T, \quad a_j^{(n)} \in \mathbb{R},$$

と表わされることが分る。実際，$\mathbb{R}^d \supset L_1 \supset L_2 \supset \cdots$，であるから $\dim L_1 = k$，とすれば．$\dim L_n \leqq k$，であり，$t_0 \in L \subset L_n$，であるから，$i_{n,j} \geqq n$，$j=1,\cdots,k$，が存在して，

$$t_0 = \sum_{j=1}^{k} a_j^{(n)} t_{i_{n,j}}$$

と書ける。t_0，$t_{i_{n,j}} \in T$，であるから $a_j^{(n)} t_{i_{n,j}} \in T$，としてよい。そこで，

$$t_0^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} [a_j^{(n)}] t_{i_{n,j}} \quad , \quad n=1,2,\cdots$$

とおく。但し，$[\cdot]$ は Gauss の記号である。もちろん，$t_0^{(n)} \in T$，である。$t \in F$，$2t \in T$，であれば，条件(ii)より

$$d_X(0,2t) \leqq d_X(0,t) + d_X(t,2t)$$
$$= d_X(0,t) + d_X(0,t) = 0,$$

となるから，$2t \in F$，となる。これより，$m \in \mathbb{N}$，$mt \in T$ なら，$mt \in F$，となることが分る。さらに，$s, t \in F$，$m, n \in \mathbb{N}$，$ms + nt \in T$，なら $ms + nt \in F$，となることも分る。従って．

$$t_0^{(n)} \in F, \quad n=1,2,\cdots$$

となる。一方，$\|t_n\| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$，であることより

$$\sup_{1 \leqq j \leqq k} |a_j^{(n)} - [a_j^{(n)}]| \, \|t_{i_{n,j}}\| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty$$

となるから，結局，

$$\|t_0 - t_0^{(n)}\| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty$$

となり，条件(i)より

$$d_X(0,t_0) \leqq d_X(0,t_0^{(n)}) + d_X(t_0^{(n)}, t_0)$$
$$= d_X(t_0^{(n)}, t_0) \longrightarrow \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となり，$t_0 \in F$，であることが分る。従って，$L \cap T \subset F$，が示された。 (証明終)

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

補題 12.2　補題12.1の記号を使う。定理12.3の証明は，(T, d)において，原点0をFの孤立点と仮定して証明しても，一般性を失わない。

証明　$F \supset L \cap T$，となる$\mathbb{R}^d$の linear subspace L の中で次元が最大であるものをとり，それを改めて L とおき，
$k = \dim L$，とする。
φを$\mathbb{R}^d$から$\mathbb{R}^d/L$への標準写像とし，$\mathbb{R}^d/L$と$\mathbb{R}^{d-k}$とを同一視して考える。
$t, t' \in T$かつ$\varphi(t) = \varphi(t')$ならば，条件(ii)より$d_X(t, t') = 0$，である。Vを$\mathbb{R}^d$の0の近傍で，$V - V \subset T$，となるものとし，

$$\varphi(V) = V' \subset \mathbb{R}^d/L \cong \mathbb{R}^{d-k}\text{，とする．}$$

V'上の確率場$\{\hat{X}(t')\,;\, t' \in V'\}$を，

$$\hat{X}(t') = X(t)\text{，} \quad a.s.\text{，} \quad \text{但し}\ \varphi(t) = t'\text{．}$$

で定義する。$t_1, t_2 \in T$，かつ$\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ならば
$d_X(t_1, t_2) = 0$，従って$P(X(t_1) = X(t_2)) = 1$，であることに注意すれば，$\{\hat{X}(t')\,;\, t' \in V'\}$は，$\varphi^{-1}(t')$の代表元のとり方が違っても equivalent version を同一視して，唯一つに定まることが分る。しかもこの時，$\{\hat{X}(t')\,;\, t' \in V'\}$は d'-separable version をもつことが定理7.2から分るから$\{\hat{X}(t')\,;\, t' \in T\}$は$d'$-separable な centered G.r.f. であるとしてよい。但し，d'は$\mathbb{R}^{d-k}$の Euclidean distance である。さらに，$\{\hat{X}(t')\,;\, t' \in V'\}$は$d'$-確率連続である。実際，任意の$s', t' \in V'$，に対して，$s \in \varphi^{-1}(s')$，$t \in \varphi^{-1}(t')$を，
$d(s, t) = d'(s', t')$，となるようにとれるから，$\{X(t)\,;\, t \in T\}$がd-確率連続であること（条件(i)による）から，
$d'(s', t') = d(s, t) \longrightarrow 0$，のとき．

$$d_{\hat{X}}^2(s', t') = E\left[(\hat{X}(s) - \hat{X}(t))^2\right]$$
$$= E\left[(X(s) - X(t))^2\right] = d_X^2(s, t) \longrightarrow 0,$$

となるからである。又もし，$P(\sup_{t \in V} |X(t)| < +\infty) = 1$，ならば，$P(\sup_{t' \in V'} |\hat{X}(t')| < +\infty) = 1$，である。さらに，

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

$$N_X(\varepsilon, V) = N_{\tilde{X}}(\varepsilon, V'), \quad M_X(\varepsilon, V) = M_{\tilde{X}}(\varepsilon, V'), \ \varepsilon > 0,$$

となることも分る。なぜなら $s, t \in V$ に対し

$$d_X(s, t) = d_{\tilde{X}}(\varphi(s), \varphi(t)),$$

であるから、 $B_X(s, \varepsilon) \ni t \iff B_{\tilde{X}}(\varphi(s), \varepsilon) \ni \varphi(t)$

となるからである。

最後に、(V', d') において、$F' = \varphi(F)$，は原点 0 を孤立点として含むことが分る。実際、もし、0 が F' の集積点であるとすると，補題 12.1 より，$\mathbb{R}^{d-k}$ の linear subspace $L' \neq \{0\}$，で，$F' \supset L' \cap V'$，となるものが存在する。$\varphi^{-1}(L')$ と L との直和を L_1 とすると，明らかに $F \supset L_1 \cap T$， かつ $\dim L_1 > \dim L$，となるが，これは L のとり方に矛盾する。従って，F' は原点 0 を孤立点として持つ。

$$\varphi(\{t \in V;\ d_X(0, t) = 0\}) = \{t' \in V';\ d_{\tilde{X}}(0, t') = 0\}$$

であることから補題の証明が終わる。

<u>定理 12.3 の証明</u>　$E[\sup_{t \in T} X(t)] < +\infty$，から Dudley の条件(***) が導かれることを示す。補題 12.2 より，

$F = \{t \in T;\ d_X(0, t) = 0\}$，は $\mathbb{R}^d$ で原点 0 を孤立点として含むと仮定してよい。そこで，0 の近傍 V_0 が存在して，$F \cap V_0 = \{0\}$ となる。V を 0 の近傍で，$V - V \subset V_0$，となるものとする。$u, v \in V$，$u \neq v$，なら $v - u \in V_0$，$v - u \neq 0$，より，条件(ii) によって，

$$d_X(u, v) = d_X(0, v - u) > 0,$$

となる。これより，(V, d) から (V, d_X) への恒等写像は 1 対 1 となる。定理 12.2 において，S として，V を考える。$\delta > 0$，に対して，V_δ を V の δ-近傍とし，必要なら V を小さくとり直すことによって，$V_\delta \subset T$，となるものとする。条件(ii) より $s \in V_\delta$ に対して，

$$M_X(2\delta q^{-k}, B_X(s, \delta q^{-k+1})) = M_X(2\delta q^{-k}, B_X(0, \delta q^{-k+1})),$$

となるから，

$$\inf_{s \in V_\delta} [\log_2 M_X(2\delta q^{-k}, B_X(s, \delta q^{-k+1}))] = [\log_2 M_X(2\delta q^{-k}, B_X(0, \delta q^{-k+1}))]$$

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

が成り立つ。但し，$[\cdot]$ は Gauss の記号である。

$n_k(\delta) = [\log_2 M_X(2\delta q^{-k}, B_X(0, \delta q^{-k+1}))]$，とおく。

一方，一般に，$M.(\varepsilon, \square) \geqq N.(\varepsilon, \square)$，となることより

$m_k(\delta) = M_X(2\delta q^{-k}, B_X(0, \delta q^{-k+1}))$，とおくと，

$$N_X(\delta q^{-k+1}, V)\ m_k(\delta) \geqq N_X(2\delta q^{-k}, V),$$

が成り立つ。実際，A を (V, d_X) の minimal (δq^{-k+1})-net とし任意の $s \in A$ に対して，$B_X(s, \delta q^{-k+1})$ の maximale $(2\delta q^{-k})$-distin. set $S(s)$ を考えると，$\bigcup_{s\in A} S(s)$ が V の $(2\delta q^{-k+1})$-net となることから，上記の不等式が得られる。

$n_k(\delta)$ の定義より，

$$2^{n_k(\delta)+1} \geqq M_X(2\delta q^{-k}, B_X(0, \delta q^{-k+1})) = m_k(\delta)$$
$$\geqq \frac{N_X(2\delta q^{-k}, V)}{N_X(\delta q^{-k+1}, V)},$$

従って，$$2^{n_k(\delta)} \geqq \frac{N_X(2\delta q^{-k}, V)}{2N_X(\delta q^{-k+1}, V)}$$

を得る。そこで，$q = 4$，とし δ を $\frac{\delta}{2}$ で置きかえて，

$$2^{n_k(\frac{\delta}{2})} \geqq \frac{N_X(\delta q^{-k}, V)}{2N_X(2\delta q^{-k}, V)},$$

よって，$$2^{n_k(\delta)+n_k(\frac{\delta}{2})} \geqq \frac{N_X(\delta q^{-k}, V)}{4N_X(\delta q^{-k+1}, V)}.$$

$n_k(\frac{\delta}{2}) \geqq n_k(\delta)$，であるから，結局

$$2^{2n_k(\frac{\delta}{2})} \geqq \frac{N_X(\delta q^{-k}, V)}{4N_X(\delta q^{-k+1}, V)},$$

従って，$2n_k(\frac{\delta}{2}) \geqq \log_2 N_X(\delta q^{-k}, V) - \log_2 N_X(\delta q^{-k+1}, V) - 2$，

となる。定理 12.2 より

$$E[\sup_{t\in T} X(t)] \geqq \frac{\delta}{8\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{\log_2 M_X(2\delta, V)} + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{n_k(\delta)}\, q^{-k}\right)$$

であるから，$E[\sup_{t\in T} X(t)] < +\infty$，より，任意の $N \in \mathbb{N}$，に対し

$$+\infty > \sum_{k=1}^{N}\sqrt{2n_k(\tfrac{\delta}{2})}\, q^{-k}$$
$$\geqq \sum_{k=1}^{N} q^{-k}\left(\log_2 N_X(\delta q^{-k}, V) - \log_2 N_X(\delta q^{-k+1}, V) - 2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\geqq \sum_{k=1}^{N-1}\frac{3}{4} q^{-k}\sqrt{\log_2 N_X(\delta q^{-k}, V)} - q^{-1}\sqrt{\log_2 N_X(\delta, V)} - \sum_{k=1}^{N}\sqrt{2}\, q^{-k}$$

（∵ $q = 4$，であるから）

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

これより，$N \to \infty$，として，$\sum_{k=1}^{\infty} q^{-k}\sqrt{\log_2 N_X(\delta q^{-k}, V)} < +\infty$
を得る。

ところで，$\varepsilon > 0$，が存在して，$B_d(0, \varepsilon) \subset V$，かつ

$$N_X(\delta q^{-k}, T) \leq N_d(\varepsilon, T)\, N_X(\delta q^{-k}, V),$$

が成り立つことが分る。実際，A を (T, d) の minimal ε-net とし，$s \in A$ に対し，$A(s)$ を $(s+V, d_X)$ の minimal (δq^{-k})-net とすると，$\bigcup_{s \in A} A(s)$ が (T, d_X) の (δq^{-k})-net になることから，

$$N_X(\delta q^{-k}, T) \leq \sum_{s \in A} N_X(\delta q^{-k}, s+V) = N_d(\varepsilon, T)\, N_X(\delta q^{-k}, V),$$

となるからである。

以上により，$\sum_{k=1}^{\infty} q^{-k}\sqrt{\log_2 N_X(\delta q^{-k}, T)} < +\infty$，が得られ，これより

$$\int_{+0} \sqrt{\log_2 N_X(\varepsilon, T)}\, d\varepsilon < +\infty,$$

となる。　　　　(証明終)

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

参考文献

[1] Dudley, R. M., (1967) The sizes of compact subset of Hilbert space and continuity of Gaussian processes, J. Functional Analysis, 1, 290-330.

________ (1973) Sample functions of the Gaussian process, Ann. Probability, 1 , 66-103.

[2] Fernique, X., (1964) Continuité des processus gaussiens, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 6058-6060.

________ (1970) Intégrabilité des vecteurs gaussiens, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 270, 1698-1699.

________ (1971) Régularité de processus gaussiens, Invent. Math. 12, 304-320.

________ (1972) Certains propriétés des éléments aléatoires gaussiens, Symposia Matematica INDAM, vol. 9, 37-42.

________ (1974) Des résultats nouveaux sur les processus gaussiens, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 278, 363-365.

________ (1974) Minorations des fonctions aléatoires gaussiens, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 24, 61-66.

________ (1974) Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour IV, Lecture notes in Mathematics (Springer) 480.

[3] Gangolli, R., (1967) Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters, Ann. Inst. H. Poincaré, Sec. B, 4, 121-225.

[4] Hahn, M. G., (1977) Conditions for sample-continuity and the central limit theorem, Ann. Probability, 5, 351-360.

[5] Heinkel, B., (1977) Mesures majorantes et théorème de la limite centrale dans C(S), Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 38, 339-351.

[6] Ito, K. - Nishio, M., (1968) On the oscillation function of Gaussian processes, Math. Scand., 22, 209-223.

[7] Jain, N. C. - Kallianpur, G., (1972) Oscillation function of a multiparameter Gaussian process, Nagoya Math. J., 47 15-28.

[8] Jain, N. C. - Marcus, M. B., (1973) A new proof of a sufficient conditions for discontinuity of Gaussian processes, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 27, 293-296.

────────── (1974) Sufficient conditions for the continuity of stationary Gaussian processes and applications to random series of functions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 24, 117-141.

[9] Kallianpur, G., (1970) Zero-one laws for Gaussian processes, Trans. Amer. Math. Soc., 149, 199-211.

[10] Landau, H. J. - Shepp, L. A., (1971) On the supremum of a Gaussian process, Sankhya, Ser. A., 32, 369-378.

[11] Marcus, M. B., (1973) A comparison of continuity conditions for Gaussian processes, Ann. Probability, 1, 123-130.

────────── (1973) Continuity of Gaussian processes and random Fourier series, Ann. Probability, 1, 968-981.

[12] Marcus, M. B. - Shepp, L. A., (1970) Continuity of Gaussian processes, Trans. Amer, Math. Soc., 151, 377-392.

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

__________ (1971) Sample behabior of Gaussian processes, Proc. 6-th Berkeley symp. Math. Stat. Prob., 2, 423-442.

[13] Schoenberg, I. J., (1973) On certain metric spaces arising from Euclidean spaces by a change of metric and their imbedding in Hilbert space, Ann. of Math., 38, 787-793.

[14] Slepian, D., (1962) The one-sided barrier problem for Gaussian noise, Bell system Tech. J., 41, 463-501.

Sem. on Probab.
Vol.48 1978年
P1-123

1978年3月 確率論セミナー発行