Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 47

4月シンポジウム(1977)報告集

岡部靖憲. 正規定常過程のT-正値性とマルコフ性 ——Langevin equation ——

他 7 編

1977

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

まえがき

4月シンポジウムの報告集を出してはどうかという提案は前からあったが，その年毎に考えればよいということになり，今年（1977）の4月には，これを出そうということになってたまたま私がまとめ役をお引き受けした。講演者の方々に「問題の背景，歴史的位置づけ，周囲との関連，未解決の問題などを含めて，普通の論文よりも意味のつかみ易いものにして下さい」という希望を私から出して，書いていただいたのがこの報告集である。4月シンポジウムは1959年の確率論セミナー結成以来毎年行われているが，今年は奈良女子大を会場にお借りして4月8日から10日まで行われ，short communication を含めて12の講演ないし報告が行われた。この報告集にはそのうち8つが収められている。排列は五十音順にした。内容をいくらかでも表わすため，岡部氏の報告をあげ他7篇として副題としたのは，私の独断である．

ここに収められた8つ以外に行われた講演は，次の通りであった．

佐藤健一　集団遺伝学における拡散近似
清水昭信　population biology にあらわれるある stochastic evolution equation の解の漸近的性質
富崎松代　Markov process の resolvent の Hölder 連続性について
丸山儀四郎　正規確率測度の非線形汎関数の応用

このうち丸山氏のは3回にわたって行われ特に興味深い講演であったが，独立して Seminar on Probability の1冊として書いていただきたいという要望が強く，そちらを考えていただくことになった．他の3人の講演の主な内容はその後次のような論文にまとめられているので，遠からず雑誌に出るであろうと思われる．興味ある方は直接プレプリントを請求されるとよいであろう．

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

1977年10月
佐藤健一

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

目　次

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

Unicellular 作用素について

板津誠一

序

Hilbert空間上の有界線型作用素は，その不変部分空間が包含関係で全順序づけられるとき，unicellular作用素と呼ばれる。Hilbert空間上の有界線型作用素の不変部分空間を求める研究はBeurling [1]などにより古くからある。これについては，Nikolskii [9] にくわしい解説がある。特にunicellular作用素は不変部分空間が決定される。この意味でunicellular作用素は重要である。あるクラスの作用素についてのunicellularityは確立され，具体的ないくつかの例においてunicellularであることは証明されている。

作用素がunicellularであることがたいせつであることを次の例で示す。

mを$[0,\ell)$ $(0<\ell\leqq+\infty)$上のRadon測度で

$$\int_{[0,\ell)} x^2\, m(dx) < +\infty$$

をみたすものとする。

$$(0.1)\qquad Vf(x)=\int_{[0,x)}(x-s)f(s)\,m(ds) \qquad 0\leqq x<\ell$$

とおけばVは$L^2([0,\ell);dm)$上の有界作用素である。このとき次のことが証明される。Vは$L^2([0,\ell),dm)$上のreal unicellular作用素である。ただし，$L^2(dm)$の部分空間が複素共役をとって変わらないとき，その空間をrealであるといい，作用素のrealな不変部分空間が包含関係で全順序づけられるとき，その作用素をreal unicellularであるという。この関数論的な意味は次のとおりである。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

作用素$\frac{d}{dm}\frac{d^+}{dx}$の$L^2([0,\ell);dm)$上の任意の自己共役拡大に対し，そのスペクトル分布関数ρが定まる。このとき

対応：$m \to \rho$

は1対1である。このことはスペクトルの逆問題といわれ，M. G. Kreinによって完全に解かれている(M.G. Krein [8], H. Dym and H.P. McKean [3])。

このKreinの定理において重要な点は上の対応が1対1であることである。この1対1を示すのに『$L^2(R, d\rho)$内へ埋蔵されるde Branges部分空間と呼ばれる整関数の作るHilbert空間の間に包含関係で全順序がつく』というde Brangesの定理が用いられる([2][3])。ところが$L^2([0,\ell);dm)$上のV^*のrealな不変部分空間は，一般化されたFourier変換によって，$L^2(R, d\rho)$の中のde Branges部分空間と1対1に対応している([3])ので，Vがreal unicellularであることは関数論的にはde Brangesの定理と同等であり，スペクトルの逆問題においてたいせつな役割をはたすことがわかる。

次に$0<\alpha<\infty$と$0<\ell<\infty$に対して$L^2(0,\ell)$上の有界作用素J_αを考える：

$$(0.2)\qquad J_\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\,dy \qquad 0 \le x \le \ell$$

このときJ_αは$L^2(0,\ell)$上のunicellular作用素であることが知られている(I.C. Gohberg and M.G. Krein [4])。このことは関数解析的にTitchmarshの定理と同値である([4])。

上の二つの例を作用素論的な立場から見ると，(0.1)のVに対しては，

$$(0.3)\qquad \frac{d}{dm}\frac{d^+}{dx}V = I$$

が成り立つ。$\frac{d}{dm}\frac{d^+}{dx}$は，一次元の一般化された拡散過程の生成作

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

用素の表現になっている（［6］）。(0.2)のJ_αに対してはA_αを $\alpha\in(0,1)$ 又は $\alpha\in(1,2)$ のときα次片側安定過程の，$\alpha=1$ のときは決定過程の，$\alpha=2$ のときはBrown運動の特性作用素，即ち

$$(0.4)\qquad A_\alpha f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\sin\pi\alpha}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\{f(x+y)-f(x)\}\frac{dy}{|y|^{1+\alpha}} & 0<\alpha<1\\ f'(x) & \alpha=1\\ \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\sin\pi\alpha}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\{f(x+y)-f(x)-yf'(x)\}\frac{dy}{|y|^{1+\alpha}} & 1<\alpha<2\\ f'(x) & \alpha=2\end{cases}$$

とするとき

$$(0.5)\qquad A_\alpha J_\alpha = I$$

が成り立つ。

良く知られているように，一般化された拡散過程，α次の片側安定過程は一次元Markov過程の中で典型的かつ重要なものである（［5］［6］）。

(*)そこで有界線型作用素がunicellularであることの定義を一般化して，一次元Markov過程の特性作用素Aがunicellularであるとは，あるL^2上のunicellularな有界線型作用素Vが存在して，

$$(0.6)\qquad AV=I$$

が成り立つときを言う。

この論文では生成作用素が具体的に表現される加法過程の場合に，Lévy測度の条件によって，(*)の意味で特性作用素がunicellularであることを示す。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

§1 記号と基本的な補題

この節では§2で用いられる記号と基本的な補題を与える。この節の補題の証明はI.C. Gohberg and M.G. Krein [4] の一章にあるからはぶく。

定義1.1
AをHilbert空間$\mathfrak{H}$上の有界作用素とするとき$\mathfrak{H}$の部分空間$\mathfrak{L}$がAの不変部分空間であるとは
$$A\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}$$
のときをいう。

定義1.2
作用素AがunicellularであるとはAの任意の2つの不変部分空間$\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$に対して$\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2$又は$\mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{L}_1$が成り立つことを言う。

定義1.3
作用素Aが作用素Bにsimilarであるとは，有界で逆も有界な線型作用素Xが存在して
$$A = X^{-1}BX$$
と書けるときを言う。

このとき次の補題が成り立つ。

補題1.1
作用素AがunicellularならばA^*もunicellularであり，Aとsimilarな作用素もunicellularである。

補題1.2
(0.2) のJ_αはunicellular作用素である。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

§2 主な定理とその証明

一次元加法過程の生成作用素 $\mathfrak{G}$ は次のように表現される（伊藤［5］）。

$$(2.1)\quad \mathfrak{G}f(x) = Af(x) \equiv af''(x) + bf'(x) + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(x+y) - f(x) - \frac{y}{1+y^2}f'(x)\right\}n(dy)$$

ただし，$a \geqq 0$，b は実数，n は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2}{1+y^2}n(dy) < +\infty$$

をみたす測度で Lévy 測度と呼ばれる。

このとき（2.1）の右辺の特性作用素と呼ばれる微分－積分作用素 A が unicellular であることを次のように定義する。

<u>定義 2.1</u>

A が unicellular であるとはある L^2 上の有界線型作用素 V で定義 1.2 の意味で unicellular なものが存在して

$$(2.2)\quad AV = I$$

が成り立つときを言う。

この節では補題 2.6，補題 2.7 を用いて定理 2.1 を証明する。定理 2.2 の証明は簡単であるから省く。

<u>定理 2.1</u>

$0 < \alpha \leqq 2$ を固定し，定数 $c\ (>0)$ を

$$(2.3)\quad c = \frac{\alpha}{2\lambda(1 + |\alpha - 1|)}$$

で定義する。このとき次の条件の下で特性作用素

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$Af(x) = \begin{cases} A_\alpha f(x) + a f(x) + \ell A_{\alpha-1} f(x) \\ \quad + \int_{-\infty}^{0} \{f(x+y) - f(x)\} \pi(dy) & 1 < \alpha \leqq 2 \\ A_\alpha f(x) + a f(x) + \int_{-\infty}^{0} \{f(x+y) - f(x)\} \pi(dy) \\ & 0 < \alpha \leqq 1 \end{cases}$$

は $L^2(0, \ell)$ 上の unicellular 作用素である。

i) $\alpha = 2$ の場合

イ) a は任意の実数，ℓ は非負の実数；$\pi \equiv 0$

ロ) a は任意の実数，ℓ は非負の実数で

$$\ell + \int_{-\ell}^{0} |y| \pi(dy) < C$$

ii) $1 < \alpha < 2$ の場合

a は任意の実数，ℓ は非負の実数で

$$\ell + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\ell}^{0} |y|^{\alpha-1} \pi(dy) < C$$

iii) $\alpha = 1$ の場合

a は任意の実数

$$\int_{-\ell}^{0} \pi(dy) < C$$

iv) $0 < \alpha < 1$ の場合

a は任意の実数，$(-\infty, 0]$ 上の有界な測度 π' で

$$\int_{-\infty}^{0} \pi'(dy) < \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}$$

$$\int_{-\infty}^{0} |y|^{1-\alpha} \pi'(dy) < +\infty$$

をみたすものが存在して

$$\pi(dy) = \left\{ \int_{y}^{0} (z-y)^{-\alpha} \pi'(dz) \right\} dy$$

次に Lévy 測度が discrete の場合を考える。

Sem. on Probab.
Vol.47　1977年
P1-122

定理2、2
Aが次の様に表現されるとする。

$$Af(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x+y)-f(x)\}\pi(dy)$$

かつ　$\pi(dy)=\sum_{k=1}^{n}\pi_k\delta_{\{u_k\}}$　，$\pi_k>0$，$u_k\neq0$，$u_1>u_2>\cdots>u_n$
とする。このとき
　$u_1>0$，$u_k<0$，u_kはu_1の整数倍（$k\geqq2$）
ならば$L^2(S, dm)$上で　Aはunicellularである。ただし，$S=\mathbb{Z}u_1\cap[0,l]$，　$E\subset S$に対し　$m(E)=\#E$

最初に定理2、1の証明のために6個の補題を用意する。

正数αと正の実数lを固定する。
補題2、3
$L^2(0,l)$上の有界作用素Y_k（$k\geqq0$）を次のように定義する。

$$Y_kf(x)=\begin{cases}\frac{1}{k\alpha}\{xf(x)+(\alpha-1)(k-1)\int_0^x f(y)\,dy\} & k\geqq1\\ f(x) & k=0\end{cases}$$

このとき正数C（>0）を

$$(2.3)\qquad C=\frac{\alpha}{2l(1+|\alpha-1|)}$$

とおくと，$L^2(0,l)$上の有界作用素Bで
$$(2.4)\qquad \|B\|<C$$
をみたすものについて
$$(2.5)\qquad \sum_{k=0}^{N}B^kY_kY_{k-1}\cdots Y_0$$
は$N\to\infty$のとき一様に収束する。そのときの極限をXとすると，Xは有界，逆も有界な作用素である。

証明
$k\geq1$のとき
$$\|Y_k\|\leqq\frac{1}{k\alpha}\{l+|\alpha-1|(k-1)l\}\leqq\frac{l}{\alpha}(1+|\alpha-1|)$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

したがって

$$\| Y_k \| \leq \frac{1}{2C}$$

Bが(2、4)をみたすときは

$$\| B^k Y_k Y_{k-1} \cdots Y_0 \| < \left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad (k \geqq 1)$$

が成り立ち，(2、5)は一様収束する。したがって

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} B^k Y_k Y_{k-1} \cdots Y_0$$

$$\| X - I \| < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

Q.E.D.

G. K. Kalisch [7] に α が整数のとき(0、2)の J_α と similar な積分作用素が求められている。ここでは α が一般のときに J_α と similar な作用素を J_α の摂動を考えることによって構成する。あとでこの作用素が定理で主張するものであることが示される。

<u>補題2、4</u>

Bが補題2、3の条件(2、4)をみたし，Bは J_1, J_α と可換とする。このとき次のことが成り立つ。

i) $V \equiv (I - BJ_1)^{-1} J_\alpha$

とおくと，Vは J_α に similar である。

ii) 任意の定数 a に対し

$$V \equiv (I - BJ_1 + aJ_\alpha)^{-1} J_\alpha$$

とおくとVは $(I + aJ_\alpha)^{-1} J_\alpha$ と similar である。

<u>注意2、1</u>

Bと J_1 は可換だから BJ_1 は Volterra 作用素であり，$I - BJ_1$ は有界な逆が存在する。また，Bと J_1, J_α は可換だから

$$BJ_1 - aJ_\alpha = \begin{cases} (BJ_{1-\alpha} - a)J_\alpha & 0 < \alpha \leqq 1 \\ (B - aJ_{\alpha-1})J_1 & \alpha > 1 \end{cases}$$

は Volterra 作用素であり，$I - BJ_1 + aJ_\alpha$ は有界な逆が存在する。

<u>補題2、4の証明</u>

i) 定義1、3により補題2、3で定めた X に対し，

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$(2.6) \qquad VX = XJ_\alpha$$

が成り立つことを言えばよい。

J_1 は Volterra 作用素だから

$$VX = V\sum_{k=0}^{\infty} B^k Y_k Y_{k-1} \cdots Y_0$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} B^j J_1^j J_\alpha \sum_{k=0}^{\infty} B^k Y_k Y_{k-1} \cdots Y_0$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} B^n \sum_{k=0}^{n} J_1^{n-k} J_\alpha Y_k Y_{k-1} \cdots Y_0$$
$$XJ_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} B^n Y_n Y_{n-1} \cdots Y_0 J_\alpha$$

となるから（2、6）を示すためには

$$(2.7) \quad \sum_{k=0}^{n} J_1^{n-k} J_\alpha Y_k Y_{k-1} \cdots Y_0 = Y_n Y_{n-1} \cdots Y_0 J_\alpha$$

が成り立てばよい。これを n についての帰納法で証明する。

まず任意の β（＞0）と自然数 k に対して

$$Y_k J_\beta f = \frac{1}{k\alpha}\{xJ_\beta f + (\alpha-1)(k-1)J_{\beta+1}f\}$$
$$J_\beta Y_k f = \frac{1}{k\alpha}\{J_\beta(xf) + (\alpha-1)(k-1)J_{\beta+1}f\}$$

ゆえに

$$(2.8) \quad Y_k J_\beta = J_\beta Y_k + \frac{\beta}{k\alpha}J_{\beta+1} = J_\beta\left(Y_k + \frac{\beta}{k\alpha}J_1\right)$$

（2、8）でとくに $\beta=\alpha$ とすると（2、7）の $n=1$ の場合が証明された。n のとき（2、7）が成り立つと仮定すると，（2、8）を使えば

$$(2.9) \quad Y_{n+1}Y_n \cdots Y_0 J_\alpha = \sum_{k=0}^{n} Y_{n+1} J_{n-k+\alpha} Y_k Y_{k-1} \cdots Y_0$$
$$= \sum_{k=0}^{n} J_{n-k+\alpha}\left\{Y_{n-1} + \frac{n-k+\alpha}{(n+1)\alpha}J_1\right\} Y_k \cdots Y_0$$

である。Y_{n+1} については次の式が成り立つ。

$$(2、10)\qquad Y_{n+1}+\frac{n-k+\alpha}{(n+1)\alpha}J_1$$
$$=\frac{1}{(n+1)\alpha}\{x+(\alpha-1)nJ_1+(n-k+\alpha)J_1\}$$
$$=\frac{k+1}{n+1}Y_{k+1}+\frac{n-k+1}{n+1}J_1$$

(2、9)，(2、10) より

$$Y_{n+1}Y_nY_{n-1}\cdots Y_0J_\alpha$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{n+1}J_{n-k+\alpha}Y_{k+1}Y_k\cdots Y_0+\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k+1}{n+1}J_{n-k+\alpha+1}Y_k\cdots Y_0$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{k}{n+1}J_{n-k+\alpha+1}Y_k\cdots Y_0+\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k+1}{n+1}J_{n-k+\alpha+1}Y_k\cdots Y_0$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1}J_{n-k+\alpha+1}Y_k\cdots Y_0$$

この式は (2、7) の n を $n+1$ に置き換えた式になっている。

Q、E、D、

ii) $a=0$ のときはいま証明した i) から言える。
$a\neq 0$ とする。

$$a(I-BJ_1+aJ_\alpha)^{-1}J_\alpha=I-(I-BJ_1+aJ_\alpha)^{-1}(I-BJ_1)$$
$$=I-\{(I-BJ_1)^{-1}(I-BJ_1+aJ_\alpha)\}^{-1}$$
$$=I-\{I+a(I-BJ_1)^{-1}J_\alpha\}^{-1}$$

いま証明した i) より $(I-BJ_1)^{-1}J_\alpha$ は J_α と similar だから

$$I-\{I+a(I-BJ_1)^{-1}J_\alpha\}^{-1}\text{ は}$$
$$I-(I+aJ_\alpha)^{-1}=a(I+aJ_\alpha)^{-1}J_\alpha$$

と similar である。

Q、E、D.

<u>補題 2、5</u>

i) α が自然数のとき，任意の定数 a に対して

$$(2、11)\qquad V\equiv(I-aJ_1)^{-\alpha}J_\alpha$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

とおくと，VとJ_αはsimilarである。

ii) a，bを任意の定数をするとき

(2, 12) $\quad V \equiv (I - aJ_1 + bJ_2)^{-1}J_2$

とおくとVと$(I+(b-\frac{a^2}{4})J_2)^{-1}J_2$はsimilarである。

証明

i) まず$(I-aJ_1)^{-1}J_1$とJ_1はsimilarである。なぜなら

$$(I-aJ_1)^{-1}J_1 f(x) = \int_0^x e^{a(x-y)} f(y)\,dy$$

であるからXを$L^2(0, l)$内におけるe^{ax}をかけることで定義したかけ算作用素とすると

$$(I-aJ_1)^{-1}J_1 = XJ_1X^{-1}$$

が成り立つからである。したがって$(I-aJ_1)^{-1}$とJ_1は可換だから，α乗することにより主張が言える。

ii) $4b=a^2$のときは$(I-aJ_1+bJ_2)^{-1}=(I-\frac{a}{2}J_1)^2$であるから，いま証明したi)より言える。

$4b \neq a^2$のときは

$$(b-\frac{a^2}{4})(I-aJ_1+bJ_2)^{-1}J_2 = I-(I-aJ_1+bJ_2)^{-1}(I-\frac{a}{2}J_1)^2$$

$$= I - \{(I-\frac{a}{2}J_1)^{-2}(I-aJ_1+bJ_2)\}^{-1}$$

$$= I - \{I+(b-\frac{a^2}{4})(I-\frac{a}{2}J_1)^{-2}J_2\}^{-1}$$

i)より$(I-\frac{a}{2}J_1)^{-2}J_2$は$J_2$とsimilarであるから

$$I = \{I+(b-\frac{a^2}{4})(I-\frac{a}{2}J_1)^{-2}J_2\}^{-1} \quad \text{は}$$

$$I - \{I+(b-\frac{a^2}{4})J_2\}^{-1} = (b-\frac{a^2}{4})(I+(b-\frac{a^2}{4})J_2)^{-1}J_2$$

とsimilarである。

Q.E.D.

補題2.4と補題2.5から次の補題が得られる。

補題 2.6

Bは補題2.3の条件(2.3)をみたし，BはJ_1，J_αと可換とす

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

る。このとき

i) 任意の定数 a に対して

(2.13) $\qquad V \equiv (I - BJ_1 + aJ_\alpha)^{-1} J_\alpha$

とすると V は unicellular 作用素である。

ii) 任意の定数 a, b に対して

(2.14) $\qquad V \equiv (I + aJ_1 + bJ_2)^{-1} J_2$

とすると V は unicellular 作用素である。

証明

i) 補題2.4より(2.13)の V は $(I + aJ_\alpha)^{-1} J_\alpha$ と similar であるから補題1.1より

$$V_1 \equiv (I + aJ_\alpha)^{-1} J_\alpha$$

が unicellular であることを言えばよい。

$a = 0$ のときは $V_1 = J_\alpha$ であるから補題1.2より言える。

$a \neq 0$ のときは

$$(I + aJ_\alpha) V_1 = J_\alpha$$
$$V_1 = J_\alpha (I - aV_1)$$

したがって

$$J_\alpha = V_1 (I - aV_1)^{-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n V_1^{n+1}$$

となるから V_1 の不変部分空間は J_α の不変部分空間である。したがって補題1.2より V_1 は unicellular である。

ii) i)と同様にして補題2.5を使って証明される。

Q.E.D.

補題2.7

B が補題2.3の条件2.3をみたし, B は J_1, J_α と可換とし, a, b は任意の定数とする。このとき i), ii), iii) のように作用素 A に対して V を定めれば, V は unicellular 作用素であってそれぞれにおいて

(2.15) $\qquad AV = I$

をみたす。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

i) $A = A_\alpha - BA_{\alpha-1} + aI$ $\qquad \alpha \geq 1$

$V = (I - BJ_1 + aJ_\alpha)^{-1} J_\alpha$

ii) $A = A_\alpha - BJ_{1-\alpha} + aI$ $\qquad 0 < \alpha < 1$

$V = (I - BJ_1 + aJ_\alpha)^{-1} J_\alpha$

iii) $A = A_2 + aA_1 + bI$

$V = (I + aJ_1 + bJ_2)^{-1} J_2$

ただし，$\alpha > 0$ に対して A_αは(0, 4)で定義したものであり，$A_0 = I$ である。

証明

i) 補題 2.6 の i) より Vは unicellular 作用素である。

$$\begin{aligned} AV &= A_\alpha V - BA_{\alpha-1}V + aV \\ &= A_\alpha J_\alpha (I - BJ_1 + aJ_\alpha)^{-1} - BA_{\alpha-1}J_{\alpha-1}J_1 (I - BJ_1 + aJ_\alpha)^{-1} \\ &\qquad + aJ_\alpha (I - BJ_1 + aJ_\alpha)^{-1} \\ &= (I - BJ_1 + aJ_\alpha)^{-1} - BJ_1 (I - BJ_1 + aJ_\alpha)^{-1} + aJ_\alpha (I - BJ_1 + aJ_\alpha)^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

ii) 補題 2.6 の i) を使って i) の場合と同様に証明される。

iii) 補題 2.6 の ii) を使って i) の場合と同様に証明される。

Q.E.D.

定理 2.1 を示すためにもう一つの補題を用意する。

補題 2.8

任意の固定されたα ($0 < \alpha \leq 1$) に対して

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|y|^\alpha}{1 + |y|^\alpha} \pi(dy) < +\infty \tag{2.16}$$

をみたす Lévy 測度に対し

$$B_1 f(x) = \int_{-\infty}^{0} \{ f(x+y) - f(x) \} \pi(dy) \tag{2.17}$$

とおくと，$J_\alpha B_1$ は $L^2(0, l)$ 上の有界作用素で任意のβ (> 0) に対して J_βと可換でありそのノルムは

$$\| B_1 J_\alpha \| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left\{ \int_{-l}^{0} |y|^\alpha \pi(dy) + l^\alpha \int_{-\infty}^{-l} \pi(dy) \right\} \tag{2.18}$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

である。

証明は簡単な計算によって示されるので省く。

次に作用素についての注意を与える。

注意2、1

$L^2(0,l)$ の f に対して，π による積分は，$x<0$ のとき $f(x)=0$ と拡張して定義する。

定理2、1の証明

i) i)の場合は A は補題2.7の iii)の形であるから補題2.7より，A は unicellular である。

ii) $$B_2 f(x) \equiv a' f'(x) + \int_{-l}^{0} \{f(x+y) - f(x)\} \pi(dy)$$

と定めれば f が2階微分可能で $f(0)=0$ であるとき

$$Af(x) = A_2 f(x) + B_2 J_1 A_1 f(x) + (a - \int_{-\infty}^{-l} \pi(dy)) f(x)$$

であり，補題2、8より $B_2 J_1$ は有界で J_1, J_2 と可換で

$$\|B_2 J_1\| \leqq a + \int_{-l}^{0} |y| \pi(dy) < C$$

であるから　$B = -B_2 J_1$ とおけば，A は補題2.7 の i)の形であるから補題2.7より A は unicellular である。

iii) $$B_2 f(x) \equiv A_{\alpha-1} f(x) + \int_{-l}^{0} \{f(x+y) - f(x)\} \pi(dy)$$

と定めれば $f(0)=0$ である f に対して

$$Af(x) = A_\alpha f(x) + B_2 J_{\alpha-1} A_{\alpha-1} f(x) + (a - \int_{\infty}^{-l} \pi(dy)) f(x)$$

であり補題2、8より $B_2 J_{\alpha-1}$ は有界で，J_1, $J_{\alpha-1}$ と可換であって

$$\|B_2 J_{\alpha-1}\| \leqq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-l}^{0} |y|^{\alpha-1} \pi(dy) < C$$

であるから $B = -B_2 J_{\alpha-1}$ とおけば A は補題2.7 の i)の形であるから補題2.7より A は unicellular である。

iii) $$Bf(x) \equiv -\int_{-l}^{0} f(x+y) \pi(dy)$$ と定めれば

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$Af(x)=A_1f(x)-Bf(x)+\left(a-\int_{-\infty}^{0}\pi(dy)\right)f(x)$$

であり，Bは有界で

$$\|B\|<C$$

をみたし，補題2.8よりBはJ_1と可換である。したがってAは補題2.7のii)の形であるから補題2.7よりAはunicellularである。

iv)
$$Bf(x)\equiv-\Gamma(1-\alpha)\int_{-\infty}^{0}f(x+y)\pi'(dy)=-\Gamma(1-\alpha)\int_{-x}^{0}f(x+y)\pi'(dy)$$

と定めれば

$$-BJ_{1-\alpha}f(x)=\Gamma(1-\alpha)\int_{-x}^{0}J_{1-\alpha}f(x+y)\pi'(dy)$$
$$=\Gamma(1-\alpha)\int_{-x}^{0}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{x+y}(x+y-z)^{-\alpha}f(z)dz\,\pi'(dy)$$
$$=\int_{-x}^{0}\int_{-x}^{y}(y-z)^{-\alpha}f(z+x)dz\,\pi'(dy)$$
$$=\int_{-x}^{0}\int_{z}^{0}(y-z)^{-\alpha}\pi'(dy)f(z+x)dz$$

したがって

$$-BJ_{1-\alpha}f(x)=\int_{-x}^{0}f(x+y)\pi(dy)$$

である。また

$$\int_{-\infty}^{0}\pi(dy)=\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{y}^{0}(z-y)^{-\alpha}\pi'(dz)\right)dy$$
$$=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z}(z-y)^{-\alpha}dy\,\pi'(dz)$$
$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1-\alpha}z^{1-\alpha}\pi'(dz)$$
$$=\frac{1}{1-\alpha}\int_{-\infty}^{0}z^{1-\alpha}\pi'(dz)\quad<+\infty$$

であるからπは有界なLévy測度である。したがって

$$Af(x)=A_\alpha f(x)-BJ_{1-\alpha}f(x)+\left(a-\int_{\infty}^{0}\pi(dy)\right)f(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

であり，B は有界で

$$\|B\| < C$$

をみたし，補題2.8よりBはJ_1，J_αと可換である。したがってAは補題2.7のi)の形であるから補題2.7よりAはunicellularである。

Q.E.D.

参考文献

[1] A. Beurling, "On two problems concerning linear transformations in Hilbert space," Acta Math., 81 (1949), 239-255

[2] L. de Branges, "Hilbert spaces of entire functions," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.

[3] H. Dym and H.P. McKean, "Gaussian processes; function theory and the inverse spectral problem", Academic Press, New York, 1976.

[4] I.C. Gohberg and M.G. Krein, "Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space", Transl. of Math. Mono. Vol.24, Providense, Amer. Math. Soc. 1970.

[5] 伊藤清，"確率論" 岩波書店.

[6] K. Ito and H.P. McKean, "Diffusion processes and their sample paths", Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[7] G. K. Kalisch, "On similarity, reducing manifold and unitary equivalence of certain Volterra operators", Ann. Math. 66. No.3 (1957), 481-494

[8] M.G. Krein, "On a method of effective solution of an inverse boundary problem," Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 94, (1954), 987-990 (Russian).

[9] N.K. Nikol'skii, "Invariant subspaces in the

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

theory of operators and theory of functions", Journal of Soviet Mathematics, Vol. 5, No. 2 (1976), 129-299.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov の方程式について

内山耕平

次の初期値問題を考える。

(1) $$\dot{u} = \frac{1}{2}u'' + F(u)$$

$$\left(\begin{array}{ll} u = u(t,x) & t>0,\ x\in R^1 \\ \dot{u} = \partial u/\partial t, & u'' = \partial^2 u/\partial x^2 \end{array}\right)$$

(2) $$u(0,x) = f(x),$$

ここで $F(u)$ は区間 $0 \leq u \leq 1$ 上の函数で次を満たす:

(3)
$$F \in C^1[0,1],\ F(0) = F(1) = 0,\ F(u) > 0 \quad 0<u<1,$$
$$F(u) \leq \alpha u \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (\alpha \equiv F'(0)),$$

また f は $0 \leq f \leq 1$ なる R^1 上の可測函数である。

方程式 (1) は R. A. Fisher [1] により，ある種の一地域的に移動する一生物集団の個体群密度 u が満たすべき方程式として導入された。初期値問題 (1)-(2) については，K-P-P [2] によって数学的な考察が与えられ（解の存在と一意性の証明），次の結果が得られた。

<u>**定理(K-P-P)**</u> (i) 微分方程式

(4) $$\frac{1}{2}w'' + \sqrt{2\alpha}\, w' + F(w) = 0 \qquad x \in R$$

の解で $0 \leq w \leq 1$, $w(0) = \frac{1}{2}$ を満たすものが唯一存在する。
(ii) $u(t,x)$ を

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

を初期値とする (1) の解とすると，$u'(t,x) < 0$ $(t>0)$ であり，

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$m(t)$ を $u(t, m(t)) = 1/2$ で定義すれば $t \uparrow \infty$ とした時,

$$(5) \qquad u(t, x+m(t)) \downarrow w(x) \quad (x \leq 0) \ ; \ \uparrow w(x) \quad (x > 0)$$

である。ただし $w(x)$ は (i) で述べられた (4) の解である。

$w(x)$ が (4) の解であることは w よりつくった進行波型の函数 $u(t, x) = w(x - \sqrt{2\alpha}\, t)$ が (1) を満足することに他ならない。以下 (i) における (4) の解を w で表わす。w に関しては次のことが証明できる：

$$w'(x) < 0 \quad x \in R, \quad w(-\infty) = 1, \ w(+\infty) = 0,$$

$$(6) \qquad \frac{w'(x)}{w(x)} \longrightarrow -\sqrt{2\alpha} \qquad (x \to \infty),$$

$$(7) \qquad \log w(x) = -\sqrt{2\alpha}\, x + o(x) \qquad (x \to \infty)。$$

(ii) と類似のことは $f(x)$ の台が有界 ($f \not\equiv 0$) の時にも成立する。すなわちそのような f を初期値とする (1) の解 u は $u(t, x+m(t)) \longrightarrow w(x)$ (広義一様) をみたす，但し $m(t)$ は

$$(8) \qquad m(t) = \sup\{x ; u(t, x) = \tfrac{1}{2}\}$$

で定義される。($u(t, x) \to 1$ $(t \to \infty)$ が証明できる。したがって十分大きな t に対しては $m(t)$ は有限な値をとる。) このことは特に，時刻 $t = 0$ に有界な領域にだけ存在していた生物集団の，時刻 t での個体群密度が，およそ $-m(t) < x < m(t)$ の範囲ではほぼ上限に達し，この領域を離れると指数函数的に小さくなることを示している。そして領域の広がる速さは $m'(t) \sim \sqrt{2\alpha}$ である。本稿の目的は $m(t)$ のより詳しい評価を得ることにある：

<u>定理</u> F は (3) の他に

$$(9) \qquad \int_{0+} (\alpha u - F(u)) \frac{|\log u|}{u} du < \infty$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

を満たし，さらに $F(u)/u$ が非増加であるとする。このとき

$$\sup\{x;\, f(x)>0\} < \infty$$

を満たす f $(0 \leqq f \leqq 1,\ f \neq 0)$ を初期値とする (1) の解 u に対し $m(t)$ を (8) で定義すれば次が成立する：

$$m(t) = \sqrt{2\alpha}\, t - \frac{3}{2\sqrt{2\alpha}} \log t + O(\log\log t)\text{。}$$

<u>注意</u> 参考のために線型の場合の対応する結果を述べておく：$v^{\cdot} = \frac{1}{2} v'' + \alpha v$, $v(0,x) = g(x)$ の解 $v(t,x)$ は $\int |g(x)| e^{\sqrt{2\alpha}\, x} dx < \infty$ であれば次を満たす。

$$v\left(t, x + \sqrt{2\alpha}\, t - \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}} \log t\right) \longrightarrow A e^{-\sqrt{2\alpha}\, x} \qquad (t \to \infty)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(y) e^{\sqrt{2\alpha}\, y} dy \quad \text{。}$$

次の補題は初期値問題 (1)－(2) を扱う上で基本的である。

<u>補題</u> F_1 , F_2 は R^1 上の有界連続な微係数をもつ函数とする。u_i を，(1) で F を F_i で置き代えた方程式の $u_i(0,x) = f_i(x)$ (f_i は有界可測) なる解とする ($i = 1, 2$)。この時，$F_1 \leqq F_2$ 及び $f_1 \leqq f_2$ から $u_1 \leqq u_2$ が出る。

<u>証明</u> 差 $u = u_2 - u_1$ の満たす方程式

$$u^{\cdot} = \frac{1}{2} u'' + F_1'(\theta) u + Q$$

$(Q(t,x) = F_2(u_2(t,x)) - F_1(u_2(t,x)))$ に放物型偏微分方程式に関する最大値原理を適用すればよい。

以下において $f = f_0$ (K-P-P の定理の (ii) を見よ) の場合の<u>定理の証明</u>を述べる。一般の場合はこの場合に帰着されるがここでは省略する。簡単のため次を仮定する。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

(10) $\quad F'(u) \geqq 0 \quad 0<u<\frac{1}{2}\ ;\ F'(u) \leqq 0 \quad \frac{1}{2}<u<1$。

$u(t,x)$ を f_0 を初期値とする (1) の解とする。$v(t,x)=u(t,x+m(t))$ とおく。

$$T_t g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t,x-y)g(y)dy, \quad p(t,x) = \frac{\exp\{-x^2/2t\}}{\sqrt{2\pi t}}$$

と書けば，補題から $u(t,x) \leqq e^{\alpha t} T_t f_0(x)$ 及び $1-u(t,x) \leqq T_t(1-f_0)(x)$ が得られる。(Appendix I を (1) 及び (1) の両辺を x で微分した式に適用すれば) $|u'(t,x)||x|$, $|u^{\cdot}(t,x)|$ は x の函数として R^1 上で可積分である。これらに注意すれば

$$m(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} u'(t,x+m(t))(m(t)+x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} u'(t,x+m(t))x\,dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} u'(t,x)x\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} w'(x)x\,dx + o(1),$$

$$M(t) \equiv -\int_{-\infty}^{\infty} u'(t,x)x\,dx = \int_0^{\infty} u\,dx - \int_{-\infty}^{0}(1-u)dx$$

とおいて

$$M^{\cdot}(t) = \int\left(\frac{1}{2}u'' + F(u)\right)dx = \int F(v)dx$$

が得られる。(5) 及び (10) より $M^{\cdot}(t)$ は増加函数である。$m(t) = M(t) + \text{const.} + o(1)$ と書けたから

(11) $$L \equiv \inf_{t>s>0}\left[m(t) - m(t-s) - \frac{s}{t}m(t)\right]$$

は有限である。

さて，$k(t,x) \equiv F(v(t,x))/v(t,x)$ とおけば (1) は

$$v^{\cdot} = \frac{1}{2}v'' + m^{\cdot}v' + kv$$

となる。$\{B_t, t\geqq 0\ ;\ P_x, x\in R\}$ を 1 次元ブラウン運動とすると，Kac の公式により

(12) $$v(t,x) = E_x\left[e^{\int_0^t k(s,B_{t-s}+m(t)-m(s))ds} f_0(B_t+m(t))\right]。$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$q_*(x) \equiv \alpha - \frac{F(w(x))}{w(x)} \quad x>0\ ; \quad \equiv \alpha \qquad x \leq 0$$

とおけば $F(u)/u$ の単調性により q_* は非増加，$v(t,x) \leq w(x)$ $(x>0)$ であるから $k \geq \alpha - q_*$，また (6), (7) 及び (9) により

$$(13) \qquad \int^{+\infty} q_*(x)\, x\, dx \ < \ \infty。$$

(11) の L を使えば，(12) より

$$V(t,x) \ \geq \ e^{\alpha t} E_x[e^{-\int_0^t q_*(B_s + m(t)\frac{s}{t} + L)ds}; B_t + m(t) < 0]。$$

したがって q_* の単調性から

$$V(t,-1) \geq e^{\alpha t} E_{-1}[e^{-\int_0^t q_*(B_s + m(t)\frac{s}{t} + L)ds} \mid B_t + m(t) = -1]$$

$$\times \ P_{-1}[-1 < B_t + m(t) < 0]。$$

条件：$B_t + m(t) = -1$ の下での $\{B_s + m(t)\frac{s}{t};\ 0<s<t\}$ の法則は条件：$B_t = -1$ の下での $\{B_s;\ 0<s<t\}$ の法則に等しいから上の不等式の右辺は

$$n(t) = \sqrt{2\alpha}\, t - m(t)$$

を用いて次のように書ける：

$$e^{\alpha t} E_{-1}[e^{-\int_0^t q_*(B_s + L)ds} \mid B_t = -1]\int_0^1 p(t, y - m(t))dy$$

$$= E_{-1+L}[e^{-\int_0^t q_*(B_s)ds} \mid B_t = -1+L]\frac{e^{\sqrt{2\alpha}\, n(t)}}{\sqrt{2\pi t}}\left(\int_0^1 e^{\sqrt{2\alpha}\, y} dy + o(1)\right)$$

$$= \frac{e^{\sqrt{2\alpha}} - 1}{\sqrt{2\alpha}}\ p_*(t, -1+L, -1+L)\, e^{\sqrt{2\alpha}\, n(t)}(1 + o(1)),$$

ここに $p_*(t,x,y)$ は $\dot{u} = \frac{1}{2}u'' - q_* u \quad (t>0,\ x\in R)$ の基本解である。(13) により；固定した x に対して

$$p_*(t,x,x) \sim A(x)\frac{1}{\sqrt{t}^3} \qquad (t \to \infty)$$

である (Appendix II) から，

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$V(t,-1) \geq \text{const.} \frac{e^{\sqrt{2\alpha}\, n(t)}}{\sqrt{t^3}} (1+o(1))$$

したがって

(14) $$n(t) \leq \frac{3}{2\sqrt{2\alpha}} \log t + \text{const.}$$

を得る。

次に

$$q^*(x) = 2F(\tfrac{1}{2}) \quad x<0 \,; \quad = 0 \quad x>0$$

とおき，$p^*(t,x,y)$ で $\dot{u} = \frac{1}{2}u'' - q^* u$ の基本解を表わせば，上と同じようにして（(11) の代わりに (14) を使う）

(15) $$V(t,0) \leq p^*(t,\sigma(t),\sigma(t))\, e^{\sqrt{2\alpha}\, n(t)} (\text{const.} + o(1))$$

を得る，但し $\sigma(t) = 4\frac{1}{2\sqrt{2\alpha}} \log t$ とおいた。Appendix II により

$$p^*(t,\sigma(t),\sigma(t)) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma(t)^2}{\sqrt{t^3}} \qquad (t\to\infty)$$

である。したがって (15) より

$$n(t) \geq \frac{3}{2\sqrt{2\alpha}} \log t - \frac{2}{\sqrt{2\alpha}} \log\log t + \text{const.}$$

を得る。(14) と合わせて定理が証明された。

Appendix I

函数 $G(t,x,y)$ は 3 変数に関し連続で，$|G(t,x,u_1)-G(t,x,u_2)| \leq K|u_1-u_2|$，$G(t,x,0)=0$ を満たすとする。領域 $T \leq t \leq T+1$，$x \geq L$ で連続な函数 $u(t,x)$ がそこで $(\dot{u}-\frac{1}{2}u'')(t,x) = G(t,x,u(t,x))$ を満たすならば

$$|u'(T+1,L+1)| \leq M \sup\{|u(t,x)|;\ T<t<T+1,\ x>L\}$$

が成り立つ。M は K にのみ依存する定数である。

証明 $p^*(t,x,y) = p(t,x-y) - p(t,x+y)$ $\left(p = e^{-\frac{x^2}{2t}}/\sqrt{2\pi t}\right)$ とおく。

$$u(T+1,L+y) = \int_0^1 p'(1-s,y)u(T+s,L)ds + \int_0^\infty p^*(1,y,r)u(T,L+r)dr$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$+\int_0^1 ds\int_0^\infty p^*(1-s,y,r)\,G(T+s,L+r,u(T+s,L+r))\,dr$$

の両辺を y で微分し，$y=1$ とおいて，右辺の積分を評価すれば求める不等式が得られる。

Appendix II

定理　$g(x)$ は R^1 上の非負連続函数で次を満たすとする。

$$0<\int_0^\infty g(x)\,x\,dx<\infty$$

この時，$\dot{u}=u''-gu$ (*) の基本解系 $p(t,x,y)$ に対し次が成立する。

$$p(t,x,y)=A(x,y)(1+o(1))/\sqrt{t}^{\,3},$$

但し，$o(1)$ は，各 $N\in R$ に対し，$t\to\infty$ とした時 $x,y>-N$，$(|x|+|y|)/\sqrt{t}\to 0$ なる限り一様に小さくなる；また $A(x,y)$ は正，連続な函数で，片方の変数をとめると $A''-gA=0$ を満たし，

$$\lim_{x,y\to\infty}\frac{A(x,y)}{xy}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

が成り立つ。

次は Titchmarsh [3] §5.7 による。

補題1　$\hat{g}(x)$ は $(0,\infty)$ 上の非負連続函数で，$\int_0^\infty \hat{g}(x)\,dx<\infty$ とする。境界条件 $u(t,0)=0$ に対応する $\dot{u}=u''-\hat{g}u$ の基本解系 $\hat{p}(t,x,y)$ $(x,y>0)$ は

(1)
$$\hat{p}(t,x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t\lambda}\,\psi(x,\lambda)\,\psi(y,\lambda)\,k(\lambda)\,d\lambda$$

と書ける。但し ψ は，$\lambda=s^2$ として，

(*)　$\dot{u}=\frac{1}{2}u''-gu$ に対応する結果を得たければ，以下で，t を $t/2$ で，g を $2g$ でおき換えればよい。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-y)\}\hat{g}(y)\psi(y,\lambda)\,dy$$

の解として定まり，

$$a(\lambda) = -\frac{1}{s}\int_0^\infty \sin(sy)\hat{g}(y)\psi(y,\lambda)\,dy,$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\infty \cos(sy)\hat{g}(y)\psi(y,\lambda)\,dy,$$

$$k(\lambda) = \left[\sqrt{\lambda}\,(a^2(\lambda)+b^2(\lambda))\right]^{-1},$$

(2) $\qquad k(\lambda) \sim \sqrt{\lambda} \quad (\lambda\to\infty), \qquad a^2(\lambda)+b^2(\lambda) > 0$

である。

上でさらに $\int^{+\infty} \hat{g}(x)\,x\,dx < \infty$ を仮定する。

$$\left|\frac{\psi(x,\lambda)}{x}\right| \leq 1 + \int_0^x \left|\frac{\psi(y,\lambda)}{y}\right| \hat{g}(y)\,y\,dy \qquad x>0$$

より，

$$\frac{|\psi(x,\lambda)|}{x} \leq e^M \qquad M \equiv \int_0^\infty \hat{g}(y)\,y\,dy$$

である。$\hat{\varphi}(x)$ を

$$\hat{\varphi}(x) = x + \int_0^x (x-y)\hat{g}(y)\hat{\varphi}(y)\,dy$$

の解とすると，$\psi(x,\lambda) = \hat{\varphi}(x)(1+\varepsilon(\sqrt{\lambda}\,x))$，$\varepsilon(u) = O(u^2)$
と書ける。実際 $w(x,\lambda) = |\hat{\varphi}(x) - \psi(x,\lambda)|/x$ とおけば，

$$w(x,\lambda) \leq \frac{1}{6}(x\sqrt{\lambda})^2 + \int_0^x \frac{1}{6}(x-y)^2\lambda\,\psi(y,\lambda)\hat{g}(y)\,dy + \int_0^x w(y,\lambda)\hat{g}(y)\,y\,dy$$

だから

$$w(x,\lambda) \leq \frac{1}{6}(x\sqrt{\lambda})^2(1+Me^M)e^M.$$

(3) $\qquad k(\lambda) = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{K^2}(1+o(1)) \quad (\lambda\downarrow 0), \quad K \equiv 1+\int_0^\infty \psi(y)\hat{g}(y)\,dy < \infty$

である。任意の $N>0$ に対し (1) を

$$\hat{p}(t,x,y) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{N/t} + \int_{N/t}^\infty\right\} e^{-\lambda t}\psi(x,\lambda)\psi(y,\lambda)k(\lambda)\,d\lambda$$

と分けて積分すれば，(2) と (3) から $k(\lambda) \leq M_1\sqrt{\lambda}$ とおさえられることに注意して，

第二項 $\leq e^{2M} M_1 \dfrac{xy}{\sqrt{t^3}} \displaystyle\int_N^\infty e^{-u}\sqrt{u}\,du$

第一項 $= \displaystyle\int_0^N e^{-u}\left\{1+\varepsilon\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\sqrt{u}\right)\right\}\left\{1+\varepsilon\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\sqrt{u}\right)\right\}\sqrt{u}\,(1+o(1))\,du\,\frac{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)}{K^2}\frac{1}{\sqrt{t^3}}$。

$\int_0^\infty e^{-u}\sqrt{u}\,du = \sqrt{\pi}/2$ であるから以上より次が成立する。

(4) $$\hat{p}(t,x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)}{K^2}\frac{1}{\sqrt{t^3}}(1+o(1)),\quad x,y>0$$

但し，$o(1)$ は $t\to\infty$ の時，$(x+y)/\sqrt{t}\to 0$ なる限り一様に小さくなる。

__補題 2__ $g(x)\geq 0\ \ x\in R$，$\int_{-\infty}^0 g(x)|x|dx = \infty$ とすると，

$$Q_L(-L)=1;\ Q_L(x)>0,\ Q_L'(x)\leqq 0,\ Q_L''-gQ_L=0 \qquad x>-L$$

によって定まる函数 $Q_L(x)$ $(x>-L)$ は次を満たす。

(5) $$LQ_L(x)\longrightarrow 0 \qquad (L\to\infty) \qquad x\in R。$$

証明 $x=0$ に対して (5) を示せば十分である。θ_L，ψ_L を

$$\theta_L(x) = 1+\int_{-L}^x (x-y)\,\theta_L(y)\,g(y)\,dy$$
$$\psi_L(x) = (L+x)+\int_{-L}^x (x-y)\,\psi_L(y)\,g(y)\,dy \qquad (x>-L)$$

の解とする。$\psi_L(x) = \theta_L(x)\int_{-L}^x \theta_L(y)^{-2}dy$ に注意して

$$D_L(x) \equiv C_L\theta_L(x)-\psi_L(x) = \theta_L(x)\int_x^\infty\frac{dy}{\theta_L^2(y)},\quad C_L\equiv\int_{-L}^\infty\frac{dy}{\theta_L^2(y)}$$

とおけば $D_L\geqq 0$，$D_L'\leqq 0$ $(x>-L)$ であるから

$$Q_L(x) = C_L^{-1}D_L(x)。$$

$$D_L(0) = \theta_L(0)\int_0^\infty\frac{dy}{\theta_L^2(y)} \leqq \theta_L(0)\int\frac{dx}{[\theta_L(0)+\theta_L'(0)x]^2} = \frac{1}{\theta_L'(0)}$$
$$= 1\Big/\int_{-L}^0 \theta_L(y)\,g(y)\,dy$$

及び $C_L\theta_L\geqq\psi_L$ により

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$Q_L(0) \leqq 1 \Big/ \int_{-L}^{0} \psi_L(y) g(y) dy ,$$

すなわち

$$(6) \qquad \frac{L}{Q_L(0)} \geqq \int_{-L}^{0} \frac{\psi_L(y)}{L} g(y) dy$$

を得る。 $\dfrac{\psi_L(x)}{L} \geqq 1 + \dfrac{x}{L}$ に注意して

$$\frac{\psi_L(0)}{L} \geqq \int_{-L}^{0} (1 + \frac{x}{L}) g(y) |y| dy$$

$$\geqq \int_{-L/2}^{0} \frac{1}{2} g(y) |y| dy \longrightarrow \infty \qquad (L \to \infty)$$

したがって

$$(7) \qquad \frac{\psi_L'(0)}{L} = \frac{1}{L} + \int_{-L}^{0} \frac{\psi_L(y)}{L} g(y) dy \longrightarrow \infty \qquad (L \to \infty)$$

実際， $\psi_L(y) \geqq \psi_L(0) + \psi_L'(0) y \quad (-L < y < 0)$ だから $\dfrac{\psi_{L_n}'(0)}{L_n} < C$ ならば

$$\frac{\psi_{L_n}'(0)}{L_n} \geqq \int_{y_0}^{0} g(y) dy \, \frac{\psi_{L_n}(0)}{L_n} - C \int_{y_0}^{0} g(y) |y| dy \longrightarrow \infty$$

となって矛盾。(6) と (7) より (5) が得られる。

<u>定理の証明</u>　$\int_{-\infty}^{0} g(x) |x| < \infty$ の時は (4) を得たと同様の方法で定理が証明できる（詳細は省略する）。以下，定理の仮定に加えて

$$\int_{-\infty}^{0} g(x) |x| dx = \infty$$

を仮定する。 $u(t, -L) = 0$ に対応する $\dot{u} = u'' - g u \quad (x > -L)$ の基本解系を $p^{(L)}(t, x, y)$ で表わす。(4) より

$$(8) \qquad p^{(L)}(t, x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\psi_L(x) \psi_L(y)}{K_L^2} \frac{1}{\sqrt{t}^3} (1 + o(1)) \qquad x, y > -L$$

$$K_L = 1 + \int_{-L}^{\infty} \psi_L(y) g(y) dy .$$

$p^{(L)}$ は L に関し増加だから ψ_L / K_L もそうである。

$$\psi(x) = \lim_{L \to \infty} \phi_L(x) , \qquad \phi_L(x) = \psi_L(x) / K_L$$

とおくと，(7) より $L / K_L \longrightarrow 0$ だから，

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} (x-y)\psi(y)\,g(y)\,dy, \quad \int_{-\infty}^{0} \psi(y)\,g(y)\,|y|\,dy < \infty。$$

$1 = \lim_{x\to\infty} \phi_L(x)/x = 1/K_L + \int_{-L}^{\infty} \phi_L(y)\,g(y)\,dy$ だから

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\,g(y)\,dy = 1。$$

このことに注意して次が得られる。

(9) $\phi_L(x) = \psi(x)\big(1 + o(1)\big)$, $o(1)\to 0$ は $x > -N$ に関し一様。

さて

(10) $p(t,x,y) = p^{(L)}(t,x,y) + \int_0^t p(t-s,-L,y)\,d_s Q_L(s,x)$

である。但し Q_L は $Q_L(t,-L) = 1$, $Q_L(0,x) = 0$ なる $\dot{Q_L} = Q_L'' - g\,Q_L$ $(x > -L)$ の解。(10) の右辺第2項を J_L とおけば

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt{t}^3 J_L \leqq Q_L(x)\,\bar{A}(-L,y),$$

但し $\bar{A}(-L,y) = \overline{\lim}_{t\to\infty} p(t,-L,y)/\sqrt{t}^3$, また $Q_L(x) \equiv \lim_{t\to\infty} Q_L(t,x)$ は補題2のものと同じである。$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,|x|\,dx < \infty$ の場合の結果と比較すれば $\bar{A}(-L,y) = O(L)$ $(L\to\infty$, $y > -N$ に関し一様) である。したがって、補題2から $Q_L(x)\,\bar{A}(-L,y) \to 0$ $(x, y > -N$ に関し一様)。ゆえに

$$\lim_{L\to\infty} \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt{t}^3 \left[p(t,x,y) - p^{(L)}(t,x,y)\right] = 0 \quad \text{収束は } x, y > -N \text{ に関し一様。}$$

(8), (9) と合わせれば、次が得られる:

$$p(t,x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\psi(x)\,\psi(y)\,\frac{1}{\sqrt{t^3}}\big(1 + o(1)\big)。$$

---

[1] R. A. Fisher : The genetical theory of natural selection. Oxford : Clarendon Press
[2] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, N. Piskunov : Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de la martiére et son application a un probleme biologique, Moscow Univ. Bull. Math. 1. 1937, 1-25.
[3] E. C. Titchmarsh : Eigenfunction Expansions I, Oxford Univ. Press, 1946.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

正規定常過程のT－正値性とマルコフ性
――― Langevin equation ―――

東大理　岡部靖憲

§1 序

場の量子論から出て来た概念であるT－正値性について、確率過程論の立場から、その数学的構造を明らかにすることが目的である。

相対論的かつ量子化された場の数学的な理論は、1950年代の後半から1960年代の前半にかけて、どんな相対論的量子論でも共通にもつべきだと考えられる一連の性質を定立すること――公理系――によって始められた。ここでは、Wightmanの公理系について考える。構成的な場の量子論のプログラムは、適当な模型を構成し、それが公理系をみたすことを証明し、さらに、質量スペクトルと束縛状態の性状、散乱行列のユニタリー性や尺度変換に対する振舞いなどを解析することである([19][21])。

Wightmanの公理系では、場の演算子 $\theta(x)$ の積の真空期待値であるところの、いわゆる "Wightmanの超関数"

$$\mathcal{W}^{(n)}(x_1, \cdots; x_n) = \langle \Omega, \theta(x_1) \cdots \theta(x_n) \Omega \rangle$$

の組 $(\mathcal{W}^{(n)}; n=0,1,2,\cdots)$ によって、場の理論が規定されるとし、次の性質を公理としておく：

(W.1)　緩やかな超関数であること (temperedness)；

$$\mathcal{W}^{(n)} \in \mathcal{S}((M^d)^n)' \quad (n=0,1,2,\cdots) \quad (\mathcal{W}^{(0)} \equiv 1 \in \mathbb{C})$$

但し、M^d は、d 次元のミンコフスキー空間である.

(W.2)　相対論的な共変性 (relativistic invariance)；

任意の制限されたPoincare groupの元 Λ に対して、

$$\mathcal{W}^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \mathcal{W}^{(n)}(\Lambda x_1, \cdots; \Lambda x_n)$$

詳しくいうと、Λ としては、space translation, space rotation, time translation, Lorentz rotation を考えれば充分である.

(W.3)　正値性 (positive definiteness)；

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

任意の $f_m \in \mathcal{S}((M^d)^m)$, $0 \leq m \leq k$ $(f_0 \in \mathbb{C})$

に対し

$$\sum_{m,n=0}^{k} \langle W^{(m+n)}, \bar{f}_m \otimes f_n \rangle \geq 0$$

但し $\bar{f}_m(x_1, \cdots; x_m) = \overline{f_m(x_m, \cdots; x_1)}$

(W.4) スペクトル条件 (spectral condition);

$\exists\ W^{(n)} \in \mathcal{S}((M^d)^{n-1})'$ ∋

(i) $\hat{w}^n(p_1, \cdots; p_n) = (2\pi)^d \delta(\sum_{j=1}^{n} p_j) \cdot \hat{W}^{(n)}(p_1, p_1+p_2, \cdots; p_1+p_2+\cdots+p_n)$

(ii) $\hat{W}^n(p_1, \cdots; p_{n-1}) = 0$ if $(p_1, \cdots; p_{n-1}) \notin V_+ \times \cdots \times V_+$

但し $V_+ = \{(t, \mathbf{x}) \in M^d;\ t^2 - \mathbf{x}^2 > 0\}$.

(W.5) 局所性の条件 (local commutativity);

$w^{(n)}(x_1, \cdots, x_j, x_{j+1}, \cdots; x_n) = w^{(n)}(x_1, \cdots; x_{j+1}, x_j, \cdots; x_n)$ if $(x_j - x_{j+1})^2 < 0$

(W.6) クラスター性 (cluster decomposition property);

a が space-like のとき、

$$\lim_{\lambda \to \infty} w^{(n)}(x_1, \cdots; x_j, x_{j+1} + \lambda a, \cdots, x_n + \lambda a)$$

$$= w^{(j)}(x_1, \cdots; x_j)\, w^{(n-j)}(x_{j+1}, \cdots; x_n) \quad (1 \leq j \leq n-1).$$

以上の (W.1)〜(W.6) が Wightman の公理系である。この公理系を満足する模型を、確率論的立場から構成すべく、E. Nelson は Euclidean field の概念を導入した。この場は、マルコフ性を満たす random field の特殊なもので、Euclid group との関連において定義される。([15])。

$\mathcal{H}_{-1}(\mathbb{R}^d)$ 上の random field $(\phi(f);\ f \in \mathcal{H}_{-1}(\mathbb{R}^d))$ が Euclidean field であるとは、

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

(E.1) (i) $\phi(af+bg) = a\phi(f) + b\phi(g)$

(ii) $f_n \to f$ in $\mathcal{H}_{-1}$ $\Rightarrow$ $\phi(f_n) \to \phi(f)$ (in Prob)

(iii) Markov 性をもつ（一般化された）

(E.2). $\eta \in E(d)$ (Euclidean group) $\longrightarrow T_\eta$: 保測変換が与えられ、

(i) $T_{\eta_1} \circ T_{\eta_2} = T_{\eta_1 \circ \eta_2}$

(ii) $\eta_n \to \eta \Rightarrow \forall\, Y$: r.v.

$$T_{\eta_n} Y \longrightarrow T_\eta Y \quad (\text{in prob})$$
$$(\, \overset{\shortparallel}{Y}(T_{\eta_n}^{-1}\omega))$$

(E.3) (Euclidean covariance)

任意の $\eta \in E(d)$, $f \in \mathcal{H}_{-1}(\mathbb{R}^d)$ に対して、

$$T_\eta \phi(f) = \phi(f \circ \eta^{-1})$$

が満たされるときをいう。

E. Nelson の構成法を、追ってみると、

$(\eta(t);\, t \in \mathbb{R})$ を、$\mathbb{R}^d$ における time translation のつくる unitary group ($\subset E(d)$) とし、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を、

$$\mathcal{H} = \{ u \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\mathbb{R}^d), P) ;\ \mathcal{F}(\mathbb{R}^{d-1})\text{-可測} \}$$

とする. $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{d-1})$ 等は random field $(\phi(f);\, f \in \mathcal{H}_{-1}(\mathbb{R}^d))$ によって、いつもの様に定義される σ-fields である. そのとき、$\mathcal{H}$ 上の operator P_t を、

$$P_t = P_{\mathcal{H}} T_{\eta(t)} \qquad (t \geq 0)$$

によって定義すると、$(P_t ;\, t \geq 0)$ は、$\mathcal{H}$ 上の強連続な縮少半群で、自己共役となる. その生成作用素を $-H$ とする. H は、positive な自己共役作用素となる。 この H を、Hamiltonian とし、$(\phi(f);\, f \in \mathcal{H}_{-1}(\mathbb{R}^d))$ に付随した quantum field Θ を作る訳であるが、技術的な条件の下で行われる.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{M}^{d-1})$ と $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\phi_0(f) \equiv \phi(f \otimes \delta)$$

$$\theta_t(f) \equiv e^{itH}(\phi_0(f)\cdot)e^{-itH}$$ （適当なヒルベルト空間での有界作用素となる）

を定義し、

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{M}^d)$ に対して、

$$\theta(f) \equiv \int_{\mathbb{R}} \theta_t(f_t)dt = \int_{\mathbb{R}} e^{itH}(\phi_0(f_t)\cdot)e^{-itH}dt$$

が求める場の演算子で、

$$\langle \theta(f_1)\cdots\theta(f_n)1, 1\rangle = \langle W^{(n)}, f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)\rangle$$
$$(f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{M}^d), 1 \le j \le n)$$

で定まる超関数 $W^{(n)} (\in \mathcal{S}((\mathbb{M}^d)^n)')$ が、先に述べたWightmanの超関数となるのである。

このNelsonの構成法に示唆されて、K. OsterwalderとR. Schrader（[18]）は、Wightmanの超関数の、Euclid時空に対応する超関数（Green関数、Schwingerの超関数）の公理系を確立し、両者の公理系が、解析接続という手続きを通して、1対1に対応するという、再構成定理を証明したのである。

Schwingerの超関数の公理系を、正確に述べると、記号が複雑となるので、不正確な表現をとることを許していただき、以下に述べてみよう；

(S.1) <u>temperedness</u>；

$$S_0 \equiv 1, \quad S_n \in \mathcal{S}((\mathbb{R}^d)^n)' \quad (n=1,2,\cdots)$$

(S.2) <u>Euclidean invariance</u>；

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

任意の $R \in SO_d$, $a \in \mathbb{R}^d$, $f \in \mathcal{S}((\mathbb{R}^d)^n)$ に対して、

$$\langle S_n, f \rangle = \langle S_n, f_{(a,R)} \rangle$$

但し、 $f_{(a,R)}(x_1, \cdots, x_n) = f(a + Rx_1, \cdots, a + Rx_n)$

(S.3) <u>positivity</u>;

任意の $f_n \in \mathcal{S}((\mathbb{R}^d)^n)$, $\mathrm{supp}\, f_n \subset ([0,\infty) \times \mathbb{R}^{d-1})^n$

に対して、

$$\sum_{m,n=0}^{k} \langle S_{m+n}, T\bar{f}_m \otimes f_n \rangle \geq 0$$

但し、 $(Tf_m)(x_1, \cdots, x_m) = f_m(Tx_1, \cdots, Tx_m)$

$$Tx_n = (-x_n^0, \underline{x}) \quad (x_n = (x_n^0, \underline{x}))$$

(S.4) <u>symmetry</u>;

任意の $\pi \in$ 置換群, $f_n \in \mathcal{S}((\mathbb{R}^d)^n)$ に対して、

$$\langle S_n, f \rangle = \langle S_n, f_\pi \rangle.$$

但し $f_\pi(x_1, \cdots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)})$

(S.5) <u>cluster property</u>;

任意の $f_n, g_n \in \mathcal{S}((\mathbb{R}^d)^n)$, $\mathrm{supp}\, f_n \subset ([0,\infty) \times \mathbb{R}^{d-1})^n$ と、$\mathrm{supp}\, g_n$.
$a = (0, \underline{a}) \in \mathbb{R}^d$ に対し、

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sum_{m,n=0}^{k} \{ \langle S_{m+n}, T\bar{f}_m \otimes g_{m(\lambda a, I)} \rangle - \langle S_m, T\bar{f}_m \rangle \cdot \langle S_n, g_n \rangle \} = 0$$

以上 (S.1)～(S.5) が、ユークリッド時空間のグリーン関数 (Schwinger の超関数) の公理系である。 (S.3) に出て来る作用素 T が、我々の研究対象である time reflection の作用素である。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

G.C. Hegerfeldt ([5]) は、E. Nelson がマルコフ性をもつ Euclidean field から quantum field を構成した方法と同様に、ある意味で、マルコフ性より広い T−正値性をもつ random field より、quantum field を構成した。このT−正値性が、今述べた公理(S.3)に対応することは、いうまでもない。

そして、T. Hida & L. Streit ([22]) は、この序の始めに述べた様に、確率場を確率過程、とくに、正規定常過程にしぼって、T−正値性を、共分散関数によって特徴付け、それは、Ornstein−Uhlenbeck のブラウン運動の共分散関数の "superposition"、すなわち、ある一意的に決まる有界な測度 $d\beta(\lambda)$ による積分、となっている。

我々は始めに、多重マルコフ性をもつ場合、T−正値性を、スペクトル密度関数(有理関数)の零点、pole の配置条件によって特徴付ける。その際、Schwinger の超関数が、解析接続を通して、Wightman の超関数になることが、共分散関数(二点相関数… $S_2(x_1,x_2)$)を通して、実現される。さらに、T. Hida & L. Streit に出てくる測度 $d\beta$ の確率論的意味をさぐるべく、又、Schwinger's distributions と Wightman's distributions との関係…解析接続…を、確率過程のことばで実現することをめざして、正規定常過程に付随したハミルトニアン H を構成する。

多重マルコフ性の研究より、確率微分方程式が、正規定常過程の path space の解析として、重要な役割を演じていることを知っている([17])。Ornstein−Uhlenbeck のブラウン運動を記述する確率微分方程式は、いわゆる Langevin equation である([2][23])。そこで、我々は、さらに研究を進めて、T−正値性をみたす正規定常過程を、path space としての構造を明らかにすることを目的とし、一般化された Langevin equation を導く([17])。この解である定常過程は、Hilbert 空間値($L^2((0,\infty),d\beta;M)$)の定常過程であり、単純マルコフ性と T−正値性をみたすことが示される。そして、始めの正規定常過程の共分散関数は、このHilbert空間値の定常

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

過程の共分散作用素より自然な形で得られる。かくして、T－正値性をみたす正規定常過程の共分散関数は、Hilbert 空間値の定常過程で、一般化された Langevin equation を満たし、単純マルコフ性とT－正値性を満足するものの共分散作用素として実現されることがわかる。

(一次元)定常過程の、過去と未来の従属性を表わす性質として、purely non-deterministic より強いものとして、strongly regular という性質がある。これは、I. A. Ibragimov & V. N. Solev ([7]), H. Helson & D. Sarason ([6]), H. Dym & H. P. McKean ([4]), H. Dym ([3]) らによって調べられている。T－正値性をもつ場合に限ると、いわゆる regularity coefficient は、T－作用素と共分散作用素によってノルム表現されることがわかる。今後の問題として、T－正値性をみたす正規定常過程が、strongly regular であるための条件を求めることは、重要と思われる。

最後に、T－正値性が、確率過程の relaxation time の研究に関係があることを注意して、この序を終わる([20])。

§2 T－正値性

$\mathbb{X}=(X(t); t\in\mathbb{R})$ を正規定常過程とし、純非決定的とする。スペクトル密度関数を $\Delta=\Delta(\lambda)$, その outer function を h, その Fourier 変換を $E\ (=\hat{h})$ とするとき、$\mathbb{X}$ の標準表現として前向きと後向きの2通りがえられる：

$$(2.1)\qquad X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}E(t-s)\,dB_{-}(s)$$

$$(2.2)\qquad =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t}^{\infty}E(s-t)\,dB_{+}(s)$$

ここで、$(B_{-}(s); s\in\mathbb{R})$ と $(B_{+}(s); s\in\mathbb{R})$ は、それぞれ、一次元のブラウン運動で、

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$(2.3) \qquad \sigma(X(s);\ s<t) = \sigma(B_-(s_1)-B_-(s_2);\ s_1, s_2<t),$$

$$(2.4) \qquad \sigma(X(s);\ s>t) = \sigma(B_+(s_1)-B_+(s_2);\ s_1, s_2>t)$$

を満足するものである。

閉集合 $D(\subset \mathbb{R})$ に対し、

$$(2.5) \qquad \mathcal{M}(D) \equiv [X(t);\ t\in D] \ (\text{closed linear hull})$$

を定義し、

$$(2.6) \quad \mathcal{M}^+ \equiv \mathcal{M}([0,\infty)), \qquad \mathcal{M}^- \equiv \mathcal{M}((-\infty,0])$$

と

$$(2.7) \quad \mathcal{M}^{-/+} \equiv [P_{\mathcal{M}^+}Y;\ Y\in\mathcal{M}^-]$$

の3つの閉部分空間を考える。

次に、$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(\mathbb{R})$ には unitary group $(U_t;\ t\in\mathbb{R})$ と time reflection とよばれる unitary operator T が定義される:

$$(2.8) \qquad U_t(X(s)) = X(s+t),$$

$$(2.9) \qquad T(X(s)) = X(-s).$$

<u>定義2.1</u> $\mathbb{X}$ が T-正値性をもつとは、$R=R(t)$ を $\mathbb{X}$ の共分散関数とするとき、

$$\forall c_j \in \mathbb{C}, \quad \forall t_j \ge 0 \quad (j=1,\cdots,n)$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j R(t_j+t_k)\overline{c_k} \ge 0$$

が成り立つときをいう。

$$R(t+s) = E(X(t)\cdot X(-s)) = E(X(t)\cdot TX(s))$$

に注意すると、T-正値性は、

$$(2.10) \qquad S \equiv P_{\mathcal{M}^+}TP_{\mathcal{M}^+}$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

なる作用素を導入すると、

$$(2.11) \qquad S \geq 0$$

と同値であることがわかる。 Sが有界な自己共役であることは、Tがそうであることよりわかる。

<u>定理2.1</u>（T. Hida & L. Streit [22]）
$\mathbb{X}$が T−正値性をもつ

$\Longleftrightarrow$ ∃ 有界な測度 $d\beta(\lambda)$ on $[0,\infty)$ ∋

$$(2.12) \qquad R(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-\lambda|t|}\, d\beta(\lambda) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

証明は、次のWiderの定理（[1]）より必要条件がえられる。(2.12)が充分であることは明らか：

<u>Widerの定理</u>

$\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

(i) 連続

(ii) $\forall c_j \in \mathbb{R},\ \forall t_j \geq 0 \ (j=1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j\, \varphi(t_j + t_k)\, c_k \geq 0$$

$\Longrightarrow$ ∃ 有界な測度 $d\beta(\lambda)$ on $\mathbb{R}$ ∋

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{t\lambda}\, d\beta(\lambda) \qquad (t \geq 0)$$

<u>注意2.1</u> T. Hida & L. Streit [22] では、もっと強く、$\mathbb{X}$が non linear な意味 $(L^2(\Omega, \mathbb{F}(\mathbb{R}), P))$ で T−正値性が成り立つことと、(2.12)が同値であることを示している。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

注意 2.2. $\lambda>0$ に対して、

(2.13) $R_\lambda(t) \equiv e^{-\lambda|t|}$

は、スペクトル密度関数 $\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+\xi^2}$ をもつ Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動 $\mathbb{X}_\lambda$ の共分散関数である；

(2.14) $R_\lambda(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{-it\cdot\xi}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2+\xi^2}d\xi$

そして、$\mathbb{X}_\lambda=(X_\lambda(t);t\in\mathbb{R})$ を記述する Langevin 方程式は、

(2.15) $dX_\lambda(t)=-\lambda X_\lambda(t)dt+\sqrt{\lambda}\cdot dB(t)$

である。ここで、$(B(t);t\in\mathbb{R})$ は、一次元ブラウン運動である。

この $\mathbb{X}_\lambda$ は、T-正値性をもつと同時に、(2.15) より従うことであるが、単純マルコフ性をもつ。

注意 2.3. 定理 2.1 は、$\mathbb{X}$ が purely non-deterministic でなくても成り立つことであるが、§5 において、purely non-deterministic のときは、$d\beta(\{0\})=0$ が成り立つことがわかる。従って、このとき、注意 2.2 に注意すると、定理 2.1 は、T-正値性をみたす正規定常過程の共分散関数は、Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動の共分散関数の superposition であることを示している。§4 において、測度 $d\beta(\lambda)$ の確率論的意味を調べる。

注意 2.4 purely non-deterministic のときは、$d\beta(\{0\})=0$ となるので、(2.12), (2.14) より、

(2.16) $R(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t}\left(\int_{(0,\infty)}\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+\xi^2)}d\beta(\lambda)\right)d\xi \qquad (t\in\mathbb{R})$

従って、スペクトル密度関数 Δ は、

(2.17) $\Delta(\xi)=\int_{(0,\infty)}\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+\xi^2)}d\beta(\lambda) \qquad (\xi\in\mathbb{R})$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

§3 多重マルコフ性とT一正値性

$\mathfrak{X}$がN重マルコフ性をもつとは、

$$(3.1) \qquad \dim M^{7t} = N \quad (N \in \mathbb{N})$$

が成り立つことであるが、このことは、スペクトル密度関数$\triangle$が次数$2N$の有理関数となることである，すなわち、

$$(3.2) \qquad \triangle(\lambda) = \left| \frac{Q(-\lambda)}{P(-\lambda)} \right|$$

PはN次の多項式、Qは高々$N-1$次の多項式で、もちろん、共有根はもたない。さらに、P, Qの零点の集合をそれぞれ、V_P, V_Qとするとき、

$$(3.3) \qquad V_P \subset \mathbb{C}^+, \quad V_Q \subset \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$$

が成り立つ．$\triangle$のouter function hは、

$$(3.4) \qquad h(\lambda) = \frac{Q(-\lambda)}{P(-\lambda)}$$

となり、$\overline{h(\lambda)} = h(-\lambda)$より、$P, Q$も同じ性質をもつ．

<u>定理3.1</u> <u>N重マルコフ性をもつ正規定常過程が、T一正値性をもつ</u>

$$\Longleftrightarrow \qquad V_P = \{ip_1, \cdots, ip_N\}, \quad V_Q = \{iq_1, \cdots, iq_{N-1}\}$$

<u>かつ</u> $\qquad 0 < p_k < q_k < p_{k+1} \quad (k = 1, \cdots, N-1)$.

この定理は、§4の一般論より簡略化できる所もあるが、この事実は、我々の研究の出発点であり、共分散関数の解析接続性の議論が有効に働くので、もとの証明を再現する．

<u>証明</u> <u>(必要条件)</u>

$\overline{P(\lambda)} = P(-\lambda)$, $V_P \subset \mathbb{C}^+$より、Pが重根をもたないとき、

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$\begin{cases} P(z) = i^{N-2M}(z - i\tilde{p}_1)\cdots(z - i\tilde{p}_N) \\ i\tilde{p}_k = a_k + i b_k,\ i\tilde{p}_{k+1} = -a_k + i b_k \quad (k=1,\cdots,2M-1)\ \ (a_k > 0)\ (b_k > 0) \\ \tilde{p}_k > 0 \ (k = 2M+1,\cdots,N) \end{cases}$$

と分解される。

従って、留数定理によって、

$x > 0$ に対し

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\cdot\lambda} \frac{1}{p(\lambda)p(-\lambda)} d\lambda$$

$$(3.5) \qquad = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{-\tilde{p}_j x}$$

但し、

$$(3.6) \qquad \alpha_j = (-1)^{N+1} \frac{1}{\prod_{l \neq j}(\tilde{p}_j - \tilde{p}_l)} \cdot \frac{1}{\prod_{l=1}^{N}(\tilde{p}_j + \tilde{p}_l)}$$

従って、

$x > 0$ に対して、

$$R(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{+ix\cdot\lambda} \frac{Q(\lambda)Q(-\lambda)}{p(\lambda)\,p(-\lambda)} d\lambda$$

$$(3.7) \qquad = Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right) Q\left(-\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right) \int_{\mathbb{R}} e^{+ix\lambda} \frac{1}{p(\lambda)p(-\lambda)} d\lambda$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \beta_j \cdot e^{-\tilde{p}_j x}$$

但し、

$$(3.8) \qquad \beta_j = 2\pi \cdot \alpha_j \cdot Q(i\tilde{p}_j) Q(-i\tilde{p}_j)$$

定理2.1 より、R は $\mathrm{Re}\, z > 0$ 迄 解析接続され、かつ有界である。従って、(3.7)の右辺も $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ において有界でなければいけない。$j = 2M+1,\cdots,N$ に対しては $\tilde{p}_j > 0$ であるので、

$$g(z) \equiv \sum_{j=1}^{2M} \beta_j e^{-\tilde{p}_j z}$$ は $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ において有界でなければいけない。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$g(iy) = \sum_{j=1}^{2M} e^{-ib_j y}\left(\beta_{2j-1} e^{-a_j y} + \beta_{2j} e^{+a_j y}\right)$$

は $y \in \mathbb{R}$ について有界でなければならず、$a_j > 0$, $b_j > 0$ より、$\beta_1 = \cdots = \beta_{2M} = 0$ しかし、Q は P と共有根をもたないから、(3.8) よりこのことは不可能。ということは、$M=0$ となり

$$(3.9) \qquad V_P \subset \{iy \,;\, y>0\}$$

ということがわかる。

一般に、P が重根をもつときには、(3.6), (3.8) に注意して、(3.7) において極限移行によって、$R(x)$ が計算でき、

$$(3.10) \qquad \begin{cases} R(x) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j(x) e^{-\hat{\rho}_j x} \\ \beta_j(x) = \beta_{j,0} + \beta_{j,1} x + \cdots + \beta_{j,n_j-1} x^{n_j-1} \quad (\beta_{j,n_j-1} \neq 0) \end{cases}$$

$$(i\hat{\rho}_j \text{ が } n_j \text{ 重根のとき})$$

このときも、(3.10) の右辺は、$\mathrm{Re}\, z \geq 0$ において有界、とくに、iy において有界でなければならず、このことは、不可能である。

従って、X が T-正値性をもつためには、P は重根をもたず、(3.9) が成り立つことが必要であることがわかる。ゆえに、

$$P(z) = z^N (z - i\rho_1) \cdots (z - i\rho_N) \quad (0 < \rho_1 < \cdots < \rho_N < \infty)$$

とするとき、(2.12), (3.7) より、

$$(3.11) \qquad \beta_j \geq 0$$

でなければならない。　(3.6) より、$(-1)^{j+1}\alpha_j > 0$ であるから、

決局、

$$(3.12) \qquad (-1)^{j+1} Q(i\rho_j) Q(-i\rho_j) \geq 0 \quad (1 \leq j \leq N)$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$Q(z)=(z-(b_1+ic_1))^{m_1}(z-(-b_1+ic_1))^{m_1}\cdots(z-(b_M+ic_M))^{m_M}(z-(-b_M+ic_M))^{m_M}$$
$$\times\, i^{\tilde N}(z-id_1)^{l_1}\cdots(z-id_{\tilde M})^{l_{\tilde M}}\ ,\ 0<d_1<\cdots<d_{\tilde M}$$

(3.13) $\tilde N = l_1+\cdots+l_{\tilde M},\quad 2(m_1+\cdots+m_M)+\tilde N = N-1$

Qの零点の個数が $N-1$ 個あることは、Xは1回可微分(L^2のいみで)のときは、T-正値性が成り立たない ($(X(0),T(X'(0)))=-(X'(0),X'(0))$) ことから分かる.

$$Q(i\rho_j)=\{(\rho_j-c_1)^2+b_1^2\}^{m_1}\cdots\{(\rho_j-c_M)^2+b_M^2\}^{m_M}\times(-1)^{\tilde N}$$
$$\times(\rho_j-d_1)^{l_1}\cdots(\rho_j-d_{\tilde M})^{l_{\tilde M}}$$

$$Q(-i\rho_j)=\{(\rho_j+c_1)^2+b_1^2\}^{m_1}\cdots\times\{(\rho_j+c_M)^2+b_M^2\}^{m_M}\times$$
$$\times(\rho_j+d_1)^{l_1}\cdots(\rho_j+d_{\tilde M})^{l_{\tilde M}}\qquad(>0)$$

に注意して、(3.12)は、

$$(-1)^{j+1+\tilde N}(\rho_j-d_1)^{l_1}\cdots(\rho_j-d_{\tilde M})^{l_{\tilde M}}\geq 0$$

$(-1)^{j+1+\tilde N} = (-1)^{j+N}$ であるから、結局、

(3.14) $(-1)^{j+N}(\rho_j-d_1)^{l_1}\cdots(\rho_j-d_{\tilde M})^{l_{\tilde M}}\geq 0 \quad (1\leq j\leq N)$

が成立する。

(Case 1) $m_1=\cdots=m_M=0,\quad l_1=\cdots=l_{\tilde M}=1$ のとき. ($\tilde M=N-1$)

2のとき、(Nに関する) induction によって、

(3.15) $\rho_k < d_k < \rho_{k+1}\quad (k=1,\cdots,N-1)$

を示す.

$N=2$ のとき、(3.14)より、(3.15)は成り立つ.

Nのとき成り立つとする. $N+1$ に対する(3.14)より、

(3.16) $(-1)^{N+1+j}(\rho_j-d_1)\cdots(\rho_j-d_N)>0\ (j=1,\cdots,N+1)$

$\rho_1>d_1$ とすると、$\rho_j>d_1\ (j=1,\cdots,N+1)$ となるから、

(3.16)より、

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$(3.17) \qquad (-1)^{N+1+j}\cdot(\beta_j-\alpha_2)\cdots(\beta_j-\alpha_N)>0 \quad (j=1,\cdots,N+1)$$

従って、 $(-1)^{N+j}(\beta_{j+1}-\alpha_2)\cdots(\beta_{j+1}-\alpha_N)>0 \quad (j=1,\cdots,N)$

よって、inductionの仮定より、

$$\beta_j<\alpha_j<\beta_{j+1} \qquad (j=2,\cdots,N)$$

従って、 $\beta_1<\alpha_j \qquad (j=2,\cdots,N)$

∴ (3.17)の $j=1$ の式より、 $(-1)^{N+2}(-1)^{N-1} > 0$

これは矛盾。従って、$\underline{\beta_1<\alpha_1}$ でなければいけない。

$\alpha_1>\beta_2$ とすると、 $\alpha_j>\beta_2 \quad (j=1,\cdots,N)$

従って、(3.16)の $j=2$ の式より、 $(-1)^{N+3}(-1)^N>0$ これは矛盾。

よって、 $\underline{\beta_1<\alpha_1<\beta_2}$ 　又 これは、$\alpha_1<\beta_j \ (j=2,\cdots,N+1)$

を示すから、(3.16)より、

$$(-1)^{N+1+j}(\beta_j-\alpha_2)\cdots(\beta_j-\alpha_N)>0 \quad (j=2,\cdots,N+1)$$

すなわち、

$$(-1)^{N+j}(\beta_{j+1}-\alpha_2)\cdots(\beta_{j+1}-\alpha_N)>0 \quad (j=1,\cdots,N)$$

従って、inductionの仮定より、 $\underline{\beta_j<\alpha_j<\beta_{j+1}\ (j=2,\cdots,N)}$

が成り立ち、決局、(3.15)が成立することがわかった。

(Case 2) $m_1=\cdots=m_M=0$、しかし、(Case 1)で無いとき、

このとき、各 k $(1\leq k\leq \tilde{M})$ $(\tilde{M}\leq N-2)$ に対し、相異なる ℓ_k の元で、

$$(3.18) \quad \alpha_{k-1}<\alpha_1^k<\cdots<\alpha_{\ell_k}^k<\alpha_k$$

をみたすものを補充して、

(3.14)を

$$(3.19) \qquad (-1)^{j+N}(\beta_j-\alpha_1)\cdots(\beta_j-\alpha_{N-1})>0 \quad (j=1,\cdots,N)$$

となる様にできる。ここで、$\alpha_1,\cdots,\alpha_{N-1}$ は、上に補充した α_j^k を大きさの順に並べたものである。すなわち、$\alpha_1=\alpha_1^1,\ \alpha_2=\alpha_2^1,\cdots,$ $\alpha_{\ell_1}=\alpha_{\ell_1}^1,\ \alpha_{\ell_1+1}=\alpha_1^2,\cdots,\ \alpha_{\ell_1+\ell_2}=\alpha_{\ell_2}^2,\ \cdots,\ \alpha_{N-1}=\alpha_{\ell_{\tilde{M}}}^{\tilde{M}}$.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

従って、(3.19)より、(Case 1)のことが使えて、 $\beta_j < \alpha_j < \beta_{j+1}$ ($j=1,\cdots,N-1$)
もし、$l_1 \geq 2$ なら、 $\beta_2 < \alpha_2 < \alpha_1$ ($\because$ (3.18)) 従って、このとき、(3.14)で
$j=2$ として、(3.13) に注意して、 $(-1)^{N+2}\cdot(-1)^{N-1}=(-1)$ これは矛盾
従って、$l_1=1$ でなければいけない。とくに、 $\underline{\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2}$ さらに、
$l_2 \geq 2$ なら、 $(\alpha_1 < \beta_2 <)\ \beta_3 < \alpha_2$ ($\because$ (3.18)) 従って、このとき、(3.14)で
$j=3$ として、 $(-1)^{N+3}\times(-1)^{\tilde{N}-1}=(-1)^{N+\tilde{N}}=(-1)^{2N-1}=(-1)$ これも矛盾。
従って、$l_2=1$。 とくに、 $\underline{\beta_2 < \alpha_2 < \beta_3}$ 以下同様にして、
$l_3=\cdots=l_{\tilde{N}}=1$ これは矛盾。

(Case 3) $m_1 \cdots\cdots m_M \neq 0$ のとき。
場合別としては、これで完全だが、証明は、本質的には、
(Case 1), (Case 2) で尽きている。すなわち、各 k ($1 \leq k \leq \tilde{N}$)
($\tilde{N} \leq N-1$) に対して、相異なる l_k 個の α_j^k ($j=1,\cdots,l_k$) を、(3.18)
をみたす様にとって、(3.14)を、

$$(3.20) \qquad (-1)^{j+N}\cdot(\beta_j-\alpha_1)\cdots\cdots(\beta_j-\alpha_{\tilde{N}})>0 \quad (j=1,\cdots,N-1)$$
$$(\tilde{N} \leq N-1)$$

とできる。$0<\alpha_1<\cdots<\alpha_{\tilde{N}}$ は、前頁と同じ様に、α_j^k を大きさの
順に並べたものである。さらに、$\alpha_{\tilde{N}}$ より大きくて、
$\alpha_{\tilde{N}+1}<\cdots<\alpha_{N-1}$ をみたすものを、 $2(m_1+\cdots+m_M)$ 個($\because$ (3.13))
もってきて、(3.20)は、

$$(3.21) \qquad (-1)^{j+N}(\beta_j-\alpha_1)\cdots(\beta_j-\alpha_{\tilde{N}})\cdots(\beta_j-\alpha_{N-1})>0$$

となる。従って、(Case 2)の証明より、 $l_1=\cdots=l_{\tilde{N}}=1$ となり、
決局 (Case 1) より、 (3.15) が一般の場合に示されたこととなる。

(十分条件)

このときは、
$$(-1)^{N+j}\cdot(\beta_j-\alpha_1)\cdots(\beta_j-\alpha_{N-1})$$
$$=(-1)^{N+j}\{(\beta_j-\alpha_1)\cdots(\beta_j-\alpha_{j-1})\}\{(\beta_j-\alpha_j)\cdots(\beta_j-\alpha_{N-1})\}$$
の符号は、 $(-1)^{N+j}\times(-1)^{N-j}>0$ となり、(3.6), (3.8), (3.14) より、
$\beta_j>0$ となり、定理2.1より X は T-正値性をもつ。 (Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

§4 ハミルトニアン H

$\mathbb{X}$ を、純非決定的な正規定常過程で、T-正値性を満足するものとする。

まず、一連の補題を用意する。

補題4.1 $\forall t \geq 0 \quad U_t(\mathcal{M}^+ \ominus \mathcal{M}^{T+}) \subset \mathcal{M}^+ \ominus \mathcal{M}^{T+}$

⦂ $\forall Y \in \mathcal{M}^+ \ominus \mathcal{M}^{T+}$ と $\forall Z \in \mathcal{M}^-$ に対して、

$$
\begin{aligned}
(U_t Y, P_{\mathcal{M}^+} Z) &= (U_t Y, Z) \quad (\because U_t Y \in \mathcal{M}^+) \\
&= (Y, U_{-t} Z) \\
&= (Y, P_{\mathcal{M}^+} U_{-t} Z) \\
&= 0 \quad (\because U_{-t} Z \in \mathcal{M}^-)
\end{aligned}
$$

従って $\forall W \in \mathcal{M}^{T+} \quad (U_t Y, W) = 0.$ (Q.E.D)

補題4.2.

(4.1) $\quad Z_t \equiv P_{\mathcal{M}^{T+}} U_t P_{\mathcal{M}^{T+}} \quad (t \geq 0)$ とおくと、

$(Z_t ; t \geq 0)$ は、$\mathcal{M}^{T+}$ 上の強連続な縮小半群である。

⦂ 縮小となることは明らか。$\forall Y \in \mathcal{M}^{T+}$ に対して、

$$
\begin{aligned}
Z_t Z_s Y &= P_{\mathcal{M}^{T+}} U_t P_{\mathcal{M}^{T+}} U_s Y \\
&= P_{\mathcal{M}^{T+}} U_t (U_s Y - P_{\mathcal{M}^+ \ominus \mathcal{M}^{T+}} U_s Y) \quad (\because U_s Y \in \mathcal{M}^+) \\
&= P_{\mathcal{M}^{T+}} U_{t+s} Y - P_{\mathcal{M}^{T+}} U_t P_{\mathcal{M}^+ \ominus \mathcal{M}^{T+}} U_s Y \\
&= Z_{t+s} Y \quad (\because \text{補題4.1})
\end{aligned}
$$

強連続性は、U_t のそれより従う。 (Q.E.D.)

補題4.3 (2.10)の S を $\mathcal{M}_+$ 上の作用素と考えたとき、

$$
\operatorname{Ker} S = \mathcal{M}_+ \ominus \mathcal{M}^{T+}
$$

⦂ $(\supset)$ $\forall Y \in \mathcal{M}_+ \ominus \mathcal{M}^{T+}$

$$
(SY, SY) = (P_{\mathcal{M}_+} T Y, SY)
$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$= (TY, SY) \quad (\because \ SY \in \mathbb{M}^+)$$

$$= (Y, TSY)$$

$$= (Y, P_{\mathbb{M}^+} TSY) \quad (\because Y \in \mathbb{M}^+)$$

$$= 0 \qquad (\because \ TSY \in \mathbb{M}^-)$$

$\therefore \quad SY = 0$

$(\subset)$ $\quad Y \in \mathbb{M}^+ \quad SY = 0$ とする. $\quad \forall Z \in \mathbb{M}^-$

$$(Y, P_{\mathbb{M}^+} Z) = (Y, Z) \quad (\because Y \in \mathbb{M}^+)$$

$$= (TY, TZ)$$

$$= (P_{\mathbb{M}^+} TY, TZ) \quad (\because \ TZ \in \mathbb{M}^+)$$

$$= (SY, TZ)$$

$$= 0$$

$\therefore \quad Y \in \mathbb{M}^+ \ominus \mathbb{M}^{++}$ (Q.E.D)

<u>補題4.4</u> $\quad S(\mathbb{M}^{++}) \subset \mathbb{M}^{++}$

証 $\quad \forall Y \in \mathbb{M}^{++}, \ \forall Z \in \mathbb{M}^+ \ominus \mathbb{M}^{++}$

$$(SY, Z) = (Y, SZ)$$

$$= 0 \quad (\because \ 補題4.4)$$

$\therefore \quad SY \in \mathbb{M}^+ \ominus (\mathbb{M}^+ \ominus \mathbb{M}^{++}) = \mathbb{M}^{++}$ (Q.E.D)

<u>補題4.5</u> 補題4.4より S は $\mathbb{M}^{++}$ 上の作用素と考えられ、このとき

(i) 縮小 (ii) 自己共役 (iii) 1:1

(iv) $S^{\frac{1}{2}}(\mathbb{M}^{++})$ 稠密.

証 (i),(ii)は、Sの定義式 (2.10) より明るか (iii)は、補題4.3より従う. (iv)は次の様にしてわかる: $Z \in \mathbb{M}^{++}$ が、$\forall Y \in \mathbb{M}^{++}$ $(S^{\frac{1}{2}}Y, Z) = 0$ をみたしているとする.

$$(S^{\frac{1}{2}}Z, S^{\frac{1}{2}}Z) = (Z, S^{\frac{1}{2}}(S^{\frac{1}{2}}Z)) = 0$$

Sem. on Probab.
Vol.47　1977年
P1-122

$\therefore \quad S^{\frac{1}{2}}Z=0 \qquad \therefore \quad SZ=0$

従って、(iii) より　$Z=0$　(Q.E.D)

以上の準備のうえで、次のことを示そう。

定理4.1

$\exists_1 (P_t \,;\, t\geq 0)$：$\mathcal{M}^{**}$上の強連続縮小半群で、自己共役であり、

(4.2)
$$P_t S^{\frac{1}{2}} = S^{\frac{1}{2}} Z_t \quad (t\geq 0)$$

㊟ まず、$S^{\frac{1}{2}}(\mathcal{M}^{**})$上で定義された作用素 $\tilde{P}_t \equiv S^{\frac{1}{2}} Z_t S^{-\frac{1}{2}}$ を考える。$\forall Y, Z \in \mathcal{M}^{**}$

(4.3)
$$\begin{aligned}
(S^{\frac{1}{2}}Y, \tilde{P}_t(S^{\frac{1}{2}}Z)) &= (Y, S Z_t Z) \\
&= (Y, S P_{\mathcal{M}^{**}} U_t Z) \\
&= (Y, S\cdot U_t Z) \quad (\because \text{補題4.3 } U_t Z \in \mathcal{M}^{+}) \\
&= (Y, T\, U_t Z) \quad (\because Y, U_t Z \in \mathcal{M}^{+}) \\
&= (Y, U_{-t} T Z) \\
&= (U_t Y, T Z) \\
&= (U_t Y, S\cdot Z) \quad (\because U_t Y, Z \in \mathcal{M}^{+}) \\
&= (S U_t Y, Z) \\
&= (S Z_t Y, Z) \quad (\because Y \in \mathcal{M}^{+}, \text{補題4.3}) \\
&= (\tilde{P}_t(S^{\frac{1}{2}}Y), S^{\frac{1}{2}}Z)
\end{aligned}$$

従って、$\tilde{P}_t(S^{\frac{1}{2}}\mathcal{M}^{**}) \subset S^{\frac{1}{2}}\mathcal{M}^{**}$ に注意して、

$$(\tilde{P}_t(S^{\frac{1}{2}}Y), \tilde{P}_t(S^{\frac{1}{2}}Y)) = (\tilde{P}_t\cdot\tilde{P}_t(S^{\frac{1}{2}}Y), S^{\frac{1}{2}}Y)$$

$\tilde{P}_t$ は、$S^{\frac{1}{2}}(\mathcal{M}^{**})$上では半群をつくるので（∵ 補題4.2）、

$$= (\tilde{P}_{2t}(S^{\frac{1}{2}}Y), S^{\frac{1}{2}}Y)$$

$$\therefore \quad \|\tilde{P}_t S^{\frac{1}{2}} Y\|^2 \leq \|S^{\frac{1}{2}} Y\| \cdot \|\tilde{P}_{2t} S^{\frac{1}{2}} Y\|$$

この操作をくり返して、

$$\|\tilde{P}_t S^{\frac{1}{2}} Y\|^2 \leq \|S^{\frac{1}{2}} Y\|^{\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n}} \cdot \|\tilde{P}_{2^N t} S^{\frac{1}{2}} Y\|^{\frac{1}{2^{N-1}}} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

一方、 $\tilde{P}_{2^N t} S^{\frac{1}{2}} Y = S^{\frac{1}{2}} Z_{2^N t} Y$ に注意し、Sは縮小な自己共役ゆえ、$S^{\frac{1}{2}}$ もそうであり、$Z_{2^N t}$ も縮小である(∵補題4.2)ので、決局、

$$\|\tilde{P}_t S^{\frac{1}{2}} Y\|^2 \leq \|S^{\frac{1}{2}} Y\|^{\sum_0^N \frac{1}{2^n}} \cdot \|Y\|^{\frac{1}{2^{N-1}}}$$

従い、$N \to \infty$として、

$$\|\tilde{P}_t S^{\frac{1}{2}} Y\|^2 \leq \|S^{\frac{1}{2}} Y\|^2$$

これは、$\tilde{P}_t$ は、$S^{\frac{1}{2}}(\mathcal{M}^{\#})$ 上で 縮小 であることをいっており、補題4.5(iv)より、$\tilde{P}_t$は、$\mathcal{M}^{\#}$上の縮小作用素P_tに一意的に拡張される。そして、(4.3)は、このP_tが自己共役であることを示す。さらに、$(\tilde{P}_t)$の $S^{\frac{1}{2}}(\mathcal{M}^{\#})$ 上での半群性より、$(P_t; t \geq 0)$ が、半群をつくることがわかる。最後に、(P_t)の強連続性は、$(Z_t; t \geq 0)$ が強連続であることと(∵補題4.2)、(P_t)の縮小性と、補題4.5(iv)に注意して、(4.2)より従う。 (Q.E.D.)

<u>定義4.1</u> 定理4.1の半群$(P_t; t \geq 0)$の生成作用素を$-H$とおき、このHを <u>ハミルトニアン</u> とよぶことにする;

$$(4.4) \qquad P_t = e^{-tH}$$

このHは、<u>自己共役</u>、<u>非負の作用素</u>であるので、単位の分解を $(E_\lambda; \lambda \geq 0)$ とする;

$$(4.5) \qquad H = \int_{[0,\infty)} \lambda \, dE_\lambda$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

今迄の一般論を使って、定理2.1の測度$d\beta(\lambda)$を具体的に求める。

命題4.1. $d\beta(\lambda) \equiv d(E(\lambda)X(0), X(0))$により定まる有界測度が、(2.12)の表現を与える測度である。

(証) $\forall t \geq 0$ $R(t) = (X(t), X(0))$
$= (U_t X(0), X(0)) = (Z_t X(0), X(0))$ $(\because X(0) \in M^{+})$

一方、Sが非負の自己共役で、$SX(0)=X(0)$ゆえ、$S^{\frac{1}{2}}X(0)=X(0)$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad R(t) &= (Z_t X(0), S^{\frac{1}{2}}X(0)) \\
&= (S^{\frac{1}{2}} Z_t X(0), X(0)) \\
&= (P_t S^{\frac{1}{2}} X(0), X(0)) \quad (\because (4.2)) \\
&= (P_t X(0), X(0)) \qquad (4.6) \\
&= \Big(\int_{[0,\infty)} e^{-t\lambda} dE(\lambda)X(0), X(0)\Big) \quad (\because (4.4),(4.5)) \\
&= \int_{[0,\infty)} e^{-t\lambda} d\beta(\lambda) \qquad \text{(Q.E.D.)}
\end{aligned}
$$

次に、ハミルトニアンHは正の作用素であることを示す。このことは、次の§5において本質的に使われる。

命題4.2.

(i) $P_t \longrightarrow 0$ $t \to +\infty$(強)

(ii) $H > 0$

(証) (i) $\forall Y \in M^{+}$

$$
\begin{aligned}
\|P_{\frac{t}{2}} S^{\frac{1}{2}} Y\|^2 &= (P_{\frac{t}{2}} S^{\frac{1}{2}} Y, P_{\frac{t}{2}} S^{\frac{1}{2}} Y) \\
&= (P_t S^{\frac{1}{2}} Y, S^{\frac{1}{2}} Y) \quad (\because \text{定理}4.1) \\
&= (S^{\frac{1}{2}} Z_t Y, S^{\frac{1}{2}} Y) \quad (\because (4.2))
\end{aligned}
$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$
\begin{aligned}
&= (Z_t Y,\ SY)\\
&= (Z_t Y,\ TY)\ (\because Z_t Y, Y \in \mathbb{M}^+)\\
&= (P_{\mathbb{M}^{+t}} U_t Y,\ TY)\ (\because Y \in \mathbb{M}^{+t})\\
&= (U_t Y,\ P_{\mathbb{M}^{+t}} TY)\\
&= (U_t Y,\ P_{\mathbb{M}^{+t}} P_{\mathbb{M}^+} TY)\ (\because \mathbb{M}^{+t} \subset \mathbb{M}^+)\\
&= (U_t Y,\ P_{\mathbb{M}^+} TY)\quad (\because TY \in \mathbb{M}^-)\\
&= (U_t Y,\ TY)\quad (\because U_t Y \in \mathbb{M}^+)
\end{aligned}
$$

一方、 $Y \in \mathbb{M}^+ = \mathbb{M}((0,\infty))$ であるから、 後向きの標準表現 (2.2), (2.4) より、 $\exists f \in L^2((0,\infty)) \ni \ Y = \int_0^\infty f(s)\,dB_+(s)$

とされ、 $T\,dB_+(s) = dB_-(-s)$ と $U_t\,dB_+(s) = dB_+(t+s)$

に注意して （(3.1) in [22]）

$$U_t Y = \int_{\mathbb{R}} f(s-t)\,dB_+(s), \qquad TY = \int_{\mathbb{R}} f(-s)\,dB_-(s)$$

従って、 [22] の (3.2) 式より、

$$\|P_{\frac{t}{2}} S^{\frac{1}{2}} Y\|^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} f(-s)\,dB_-(s),\ \int_{\mathbb{R}} f(s-t)\,dB_+(s) \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda}\, |\mathcal{F}(\lambda)|^2 \frac{h(-\lambda)}{h(\lambda)}\, d\lambda$$

$\overline{h(\lambda)} = h(-\lambda)\ (\lambda \in \mathbb{R})$ より、 $|\mathcal{F}(\lambda)|^2 \frac{h(-\lambda)}{h(\lambda)} \in L^1(\mathbb{R})$

従って、 Riemann-Lebesgue の定理より、

$$\lim_{t\to\infty} \|P_t S^{\frac{1}{2}} Y\| = 0$$

あとは、 P_t の縮小性と、 $S^{\frac{1}{2}}(\mathbb{M}^{+t})$ が稠密であること（∵ 補題4.5(iv)）

より、 $\forall Y \in \mathbb{M}^{+t}$ $\lim_{t\to\infty} P_t Y = 0$

(ii) $Y \in \mathcal{D}(H)$. $HY = 0$ とせよ. このとき、 $\forall t > 0$

$$P_t Y - Y = \int_0^t P_s(-HY)\,ds = 0$$ 従って. (i) より $t\to\infty$ として、

$Y = 0$. 即ち、 H は 1:1 である. H は非負であったから、 $H > 0$

(Q.E.D.)

<u>注意4.1</u> 命題4.2の (i) と (ii) は、同値である.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

系4.1 $d\beta(\{0\})=0$

∵ (4.6)と命題4.2 (i)より従う.

次の§5において直接には関係ないが、命題4.2に関連した話題として、正規定常過程$\mathbb{X}$の正則性についてみてみよう。
(2.5)の$M(D)$を可測にする最小の σ-field を$F(D)$とする;

$$(4.7)\qquad F(D)=\sigma(M(D))=\sigma(X(t);t\in D)$$

そして、各$t\in R$に対して、$F^+(t)$, $F^-(t)$を夫々$F([t,\infty))$, $F((-\infty,t])$とし、$M^+(t)$, $M^-(t)$を夫々、$M([t,\infty))$, $M((-\infty,t])$とする. このとき、Kolmogorov - Rozanov([4], [9])によって、$t>0$に対して、

$$(4.8)\qquad C(t)\equiv \sup\{(u,v);\ u\in M^-(0),\ v\in M^+(t),\ \|u\|\le 1,\ \|v\|\le 1\}$$

$$(4.9)\qquad R(t)\equiv \sup\{|P(A\cap B)-P(A)P(B)|;\ A\in F^-(0),\ B\in F^+(t)\}$$

とおくとき、

$$(4.10)\qquad \underline{4R(t)\le C(t)\le \sin(2\pi R(t))}.$$

が示された。

従って、$\underline{C(t)\longrightarrow 0\ (t\to\infty)}$と$\underline{R(t)\longrightarrow 0\ (t\to\infty)}$とは、同値となるが、このとき、$\mathbb{X}$は、strongly regular であるといわれる。このC(t)が regularity coefficient といわれているものだが、我々の$\mathbb{X}$がT-正値性をもつときには、C(t)は次の様に、ノルム表現される.

命題4.3.

$$C(t)=\|P_{\frac{t}{2}}S^{\frac12}\|^2=\|S^{\frac12}P_tS^{\frac12}\|\qquad (t\ge 0)$$

∵ $M^{+/+}$と同様に、$M^{+/-}$を、

$$(4.11)\qquad M^{+/-}\equiv[P_{M^-}Y;\ Y\in M^+]$$

によって定義する.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

まず、次の(4.12)を示す

(4.12) $C(t) \equiv \sup\{(u, U_t v);\ u \in M^{+-},\ v \in M^{-+},\ \|u\| \le 1,\ \|v\| \le 1\}$

右辺を $\tilde{C}(t)$ とおく　$\forall u \in M^-(0),\ \forall v \in M^+(t)$ に対して、

$$(u, v) = (P_{M^-}u, P_{M^+}v) = (u, P_{M^-}P_{M^+}v) = (u, P_{M^{+-}}P_{M^-}P_{M^+}v) =$$

$$= (u, P_{M^{+-}}v) = (P_{M^{+-}}u, v) = (P_{M^{+-}}u, U_t v') \quad (v' \in M^+(0))$$

$$= (U_{-t}P_{M^{+-}}u, v') = (P_{M^{-+}}U_{-t}P_{M^{+-}}u, v') \quad (\because U_{-t}P_{M^{+-}}u \in M^-,\ v' \in M^+)$$

$$= (P_{M^{+-}}u, U_t P_{M^{-+}}v')$$

従って　$C(t) \le \tilde{C}(t)$　一方、$C(t) \ge \tilde{C}(t)$ は明らかだから、(4.12)が成立する。さらに、$\forall u \in M^{+-},\ \forall v \in M^{-+}$ に対して、

$$(u, U_t v) = (Tu, TU_t v) = (Tu, U_{-t}Tv) = (U_t Tu, Tv)$$

より、$Tu \in M^{-+}$ に注意して、(4.12)より、

(4.13) $C(t) = \sup\{(U_t u, Tv);\ u, v \in M^{-+},\ \|u\| \le 1, \|v\| \le 1\}$

さらに、$\forall u, v \in M^{-+}$ に対して、

$$(U_t u, Tv) = (P_{M^+}U_t u, Tv) = (U_t u, P_{M^+}Tv)$$

$$= (U_t u, P_{M^{-+}}P_{M^+}Tv) \quad (\because Tv \in M^-)$$

$$= (U_t u, P_{M^{-+}}Tv) = (P_{M^{-+}}U_t u, Tv)$$

$$= (Z_t u, Sv) = (S^{\frac{1}{2}}Z_t u, S^{\frac{1}{2}}v)$$

$$= (P_t S^{\frac{1}{2}}u, S^{\frac{1}{2}}v) = (S^{\frac{1}{2}}P_t S^{\frac{1}{2}}u, v)$$

従って、(4.13)より、

(4.14) $C(t) = \sup\{(S^{\frac{1}{2}}P_t S^{\frac{1}{2}}u, v);\ u, v \in M^{-+},\ \|u\| \le 1, \|v\| \le 1\}$.

$S^{\frac{1}{2}}P_t S^{\frac{1}{2}}$ は、M^{-+} 上の有界、対称、非負の作用素であるが、作用素ノルムの一般論より、$C(t) = \|S^{\frac{1}{2}}P_t S^{\frac{1}{2}}\|$ が成り立つ。

さらに、$(S^{\frac{1}{2}}P_t S^{\frac{1}{2}}u, v) = (P_{\frac{t}{2}}S^{\frac{1}{2}}u, P_{\frac{t}{2}}S^{\frac{1}{2}}v)$

従って、(4.14)より　$C(t) \le \|P_{\frac{t}{2}}S^{\frac{1}{2}}\|^2$

さらに、

$$C(t) \ge \sup\{(P_{\frac{t}{2}}S^{\frac{1}{2}}u, P_{\frac{t}{2}}S^{\frac{1}{2}}u);\ u \in M^{-+}, \|u\| \le 1\} =$$

$$= \sup\{\|P_{\frac{t}{2}}S^{\frac{1}{2}}u\|^2;\ u \in M^{-+}, \|u\| \le 1\} =$$

$$= \|P_{\frac{t}{2}}S^{\frac{1}{2}}\|^2$$

従って、命題(4.3)が示された。　(Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

命題4.4 $C(t)\equiv 1$ かあるいは、$C(t)\longrightarrow 0\ (t\to+\infty)$ exponentially

(∵) 命題4.3 より、$C(t_1+t_2)=\|S^{\frac{1}{2}}P_{t_1}\cdot P_{t_2}S^{\frac{1}{2}}\|$

$$\le\|S^{\frac{1}{2}}P_{t_1}\|\,\|P_{t_2}S^{\frac{1}{2}}\|=\sqrt{C(t_1)}\sqrt{C(t_2)}$$

従って、命題4.4 が従う. (Q.E.D.)

次に、話題を変えて、確率過程の解析接続性について見てみよう. 即ち、定理3.1 において、共分散関数 R が $\mathrm{Re}\,z>0$ 迄 解析接続 される (有界性を保って) ことをみたが、このことを path のことばで説明してみよう. §1 において述べた Schwinger's distribution と Wightman's distribution の関連について触れると、共分散関数 (2点相関数…2次のSchwinger関数) が $\mathrm{Re}\,z>0$ に解析接続され、虚軸 ($\mathrm{Re}\,z=0$) への極限関数が、2次のWightmanの関数となる. 確率論的に、意味のつく確率過程として次の predictor を考えてみる:

$t>0$

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{E(X(-t)\,|\,\mathcal{F}^+(0))}} &= P_{H^+(0)}TX(t)\\
(4.15)\qquad &= \underline{S\cdot X(t)}\\
&= S\ Z_t X(0)\\
&= S^{\frac{1}{2}}P_t X(0)
\end{aligned}
$$

もちろん、

$$R(t)=(E(X(-t)\,|\,\mathcal{F}^+(0)),\ X(0))$$

は成り立つ. 次に、次の確率過程を考えてみる:

$$(4.16)\qquad Y(t)\equiv \underline{\underline{P_t X(0)}}\qquad t\ge 0$$

そのとき、(4.6) より、

$$(4.17)\qquad R(t)=(Y(t),Y(0))=(Y(\tfrac{t}{2}),Y(\tfrac{t}{2}))$$

もっと一般に、

$$(4.18)\qquad (Y(t),Y(s))=R(t+s)=(Y(t+s),Y(0))$$

が成り立つ. そして、$Y(t)$ は、$X(0)\in\mathcal{D}(H)$ のときは、次の微分方程式の一意解として特徴付けられる;

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$(4.19)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}Y(t) + HY(t) = 0 & t>0 \\ Y(0) = X(0) \end{cases}$$

さらに、このY(t)が $Re\, z>0$ において解析接続されることは次の様にして分かる： $X(0)\in \mathcal{D}(H) \Longleftrightarrow \int_{(0,\infty)}\lambda d\beta(\lambda)<\infty$ (∵命題4.1) に注意すれば、

$$Y(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-t\lambda} dE(\lambda)X(0) \quad = e^{-tH}X(0)$$

であるから、 $Re\, z\geq 0$ において、

$$Y(z) \equiv \int_{(0,\infty)} e^{-z\lambda} dE(\lambda)X(0)$$

とおくと、 $Y(z)$は、 $Re\, z>0$ において正則になり、

$$(4.20)\qquad Y(is) \equiv \lim_{t\downarrow 0} Y(t+is) = \int_{(0,\infty)} e^{-is\lambda} dE(\lambda)X(0) = e^{-isH}X(0)$$

従って、

$$(4.21)\qquad R(is) = \int_{(0,\infty)} e^{-is\lambda} d\beta(\lambda) = (Y(is), Y(0)) \ (s\in\mathbb{R}).$$

(4.15)の $E(X(-t)\,|\,\mathcal{F}^+(0))$ に対しても、 $Re\, z>0$ 迄解析接続され、その $Re\, z=0$ への極限過程が(4.21)をみたすことは、(4.15)より分かる．しかし、(4.19)はみたさない．その意味では、確率過程 $(P_t X(0);\ t\geq 0)$ が望ましく思われる．； (4.20)より、$Y(is)$は次の方程式によって特徴付けられる．

$$(4.22)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}Y(it) + iHY(it) = 0 & (t\in\mathbb{R}) \\ Y(i0) = X(0) \end{cases}$$

<u>問題4.1</u>　T－正値性の下で、strongly regular となるための条件を求める

<u>問題4.2</u>　T－正値性を、表現核 E によって特徴付ける．

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

§5 一般化された Langevin 方程式

ヒルベルト空間値の定常過程を、一般化された Langevin 方程式の解として特徴付けることは、J.T. Lewis & L.C. Thomas ([11], [12]) におこなわれている。([11]の定理4.4は本質的な誤りを犯しているが。) 我々の場合、実(正規)定常過程で T-正値性を満たすものが与えられたとき、如何にして、ヒルベルト空間値の定常過程が必要になるかが、一般化された Langevin 方程式を通して説明される。さらに、我々の T-正値性をみたすことは、この一般化された Langevin 方程式の解が単純マルコフ性をもつことを意味する。具体的には、§4のハミルトニアン H が正の作用素ということから導かれる。上記の J.T. Lewis & L.C. Thomas の論文で扱われる一般化された Langevin 方程式は、一般の定常過程を扱っているために、本当に"一般化された" Langevin 方程式となってしまっている。基本的な考えは、P. Lax & R.S. Phillips の散乱理論での、ある条件をみたすヒルベルト空間上の unitary group を、適当なヒルベルト空間 $\mathcal{N}$ をつくり、$L^2(\mathbb{R};\mathcal{N})$ 上の right translation のつくる unitary group として表現することである([10])。

次のことは、一般論と思われるが、証明をつけておく。

<u>補題5.1</u> (i) $P_t u \in \mathcal{D}(H^n)$ $\forall t>0,\ \forall u\in \mathcal{M}^{T+}$ $\forall n\in\mathbb{N})$

(ii) $\int_0^t P_s u\, ds \in \mathcal{D}(H)$ $\forall t>0,\ \forall u\in\mathcal{M}^{T+}$

(iii) $\{P_t;\ t\geq 0\}$ は holomorphic semigroup である。

(証) (i) $P_t u = \int_0^\infty e^{-t\lambda}\, dE(\lambda)u$ であるから、

$$E(\lambda)P_t u = \int_0^\lambda e^{-t\mu}\, dE(\mu)u \quad \therefore\ (E(\lambda)P_t u, P_t u) = \int_0^\lambda e^{-2t\mu}\, d(E(\mu)u,u)$$

従って、$\displaystyle\int_0^\infty \lambda^{2n} d\|E(\lambda)P_t u\|^2 = \int_0^\infty \lambda^{2n} e^{-2t\lambda}\, d(E(\lambda)u,u) < \infty \quad (\because t>0)$

(ii) $$E(\lambda)\int_0^t P_s u\, ds = \int_0^t E(\lambda)P_s u\, ds = \int_0^t \left(\int_0^\lambda e^{-s\mu}\, dE(\mu)u\right) ds$$

$$= \int_0^\lambda \left(\int_0^t e^{-s\mu} ds \right) dE(\mu)u = \int_0^\lambda \frac{1-e^{-t\mu}}{\mu} dE(\mu)u$$

従って $d\|E(\lambda)\int_0^t P_s u ds\|^2 = \int_0^\lambda \left(\frac{1-e^{-t\mu}}{\mu}\right)^2 d(E(\mu)u, u)$

従って

$$\int_0^\infty \lambda^2 d\|E(\lambda)\int_0^t P_s u ds\|^2 = \int_0^\infty \lambda^2 (1-e^{-t\lambda})^2 d(E(\lambda)u, u) < \infty$$

(iii) $P_t u = \int_0^\infty e^{-t\lambda} dE(\lambda)u$ ゆえ、$t>0$ において微分をとると、

$P_t' u = \int_0^\infty (-\lambda) e^{-t\lambda} dE(\lambda)u$. 一般には $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(t P_t')^n u = \int_0^\infty (-t\lambda)^n e^{-nt\lambda} dE(\lambda)u$$

ところが、$\sup_{0<t<\infty} \sup_{0<\lambda<\infty} \{(t\lambda) e^{-t\lambda}\} = e^{-1}$ であるから、

$$\|(e t P_t')^n u\|^2 \le \|u\|^2$$

即ち、$\|(e t P_t')^n\| \le 1$ 従って、一般論([24])より、$(P_t; t \geq 0)$ は、正則半群となる。 (Q.E.D.)

補題 5.1 (i) より、各 $u \in M^{T+}$ に対して、

(5.1) $(\mathcal{R}_0 u)(t) \equiv \sqrt{2}\, \chi_{(0,\infty)}(t) H^{\frac{1}{2}} P_t u \quad (t \in \mathbb{R})$

が定義されるが、

$$\int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_0 u(t)\|^2 dt = 2\int_0^\infty \|H^{\frac{1}{2}} P_t u\|^2 dt = 2\int_0^\infty (P_t u, H P_t u) dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(-\frac{d}{dt}(P_t u, P_t u)\right) dt = \|u\|^2$$

(∵ 命題 4.2)

が成りたつ。従って、$\mathcal{R}_0$ は、

(5.2) $\mathcal{R}_0 : M^{T+} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}; M^{T+})$ isometry

となる。さて、$L^2(\mathbb{R}; M^{T+})$ 上には、right translation の作る unitary group $(Z_t; t \in \mathbb{R})$ が定義される;

(5.3) $(Z_t \varphi)(s) \equiv \varphi(s-t) \qquad \varphi \in L^2(\mathbb{R}; M^{T+})$

このとき、次のことを示す。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

補題5.2. $\bigvee_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{T}_t \mathcal{R}_0(\mathcal{M}^{\gamma+}) = L^2(\mathbb{R};\mathcal{M}^{\gamma+})$

(証) $\varphi \in L^2(\mathbb{R};\mathcal{M}^{\gamma+})$ が、$\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall u\in\mathcal{M}^{\gamma+}$ に対して、$(\varphi, \mathcal{T}_t\varphi) = 0$ をみたしているとする。このとき、(5-1) より、

(5-4) $\displaystyle\int_t^\infty (\varphi(s), H^{\frac{1}{2}} P_{s-t} u)\,ds = 0 \qquad \forall t\in\mathbb{R},\ \forall u\in\mathcal{M}^{\gamma+}$

特に、$u\in\mathcal{D}(H^{\frac{3}{2}})$ は、$Hu\in\mathcal{D}(H^{\frac{1}{2}})$ ゆえ、

(5-5) $\displaystyle\int_t^\infty (\varphi(s), P_{s-t} H^{\frac{3}{2}} u)\,ds = 0 \qquad \forall t\in\mathbb{R},\ \forall u\in\mathcal{D}(H^{\frac{3}{2}})$

少し考察がいるが、(5-4)を t について微分することによって、

$\tilde{\forall} t$; $\forall u\in\mathcal{D}(H^2)$

$$\int_t^\infty (\varphi(s), P_{s-t} H^{\frac{3}{2}} u)\,ds = (\varphi(t), H^{\frac{1}{2}} u)$$

従って、(5-5) より、$(\varphi(t), H^{\frac{1}{2}} u) = 0$

さて、補題 5.1 (i) より、$\forall v\in\mathcal{D}(H^{\frac{1}{2}})$, $\forall\varepsilon>0$ に対して、$P_\varepsilon v\in\mathcal{D}(H^2)$ であるから、$(\varphi(t), H^{\frac{1}{2}} P_\varepsilon v) = 0$

$\therefore\ (P_\varepsilon\varphi(t), H^{\frac{1}{2}} v) = (\varphi(t), P_\varepsilon H^{\frac{1}{2}} v) = (\varphi(t), H^{\frac{1}{2}} P_\varepsilon v) = 0$

$\varepsilon\downarrow 0$ として、$(\varphi(t), H^{\frac{1}{2}} v) = 0$ 　$H^{\frac{1}{2}}$ は自己共役だから、$\varphi(t)\in\mathcal{D}(H^{\frac{1}{2}})$ かつ $H^{\frac{1}{2}}\varphi(t) = 0$ ところが 命題4.2より、$\varphi(t) = 0$ が従う。 (Q.E.D.)

注意5.1. 次の (5.6), (5.7) が成り立つ。

(5.6) $\mathcal{R}_0(P_t) = \chi_{[0,\infty)} \mathcal{T}_t \cdot \mathcal{R}_0 \quad (t\geq 0)$

(5.7) $P_{\mathcal{R}_0\mathcal{M}^{\gamma+}} \mathcal{T}_t = \mathcal{R}_0 P_t \mathcal{R}_0^{-1}$ on $\mathcal{R}_0\mathcal{M}^{\gamma+}$

この (5.7) は、補題 5.2 と合わせることによって、$(L^2(\mathbb{R};\mathcal{M}^{\gamma+}), \mathcal{T}_t;\ t\in\mathbb{R})$ は、$(\mathcal{R}_0\mathcal{M}^{\gamma+}, \mathcal{R}_0 P_t \mathcal{R}_0^{-1};\ t\geq 0)$ の minimal unitary dilation であることを示している。

次に、作用値のブラウン運動を定義するために、いくつかの補題を用意する。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

補題5.3. $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in \mathcal{M}^{7+}$ に対して、

$$(Z_s R_0 u,\ Z_t R_0 v) = (P_{|s-t|} u, v)$$

(∵) (5-1) により、

$$(Z_s R_0 u,\ Z_t R_0 v)$$
$$= 2 \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\infty)}(z-s)\, \chi_{[0,\infty)}(z-t)\, (A P_{z-s} u,\ P_{z-t} v)\, dz.$$

示すべき式より u, v は $\mathcal{D}(H)$ の元としてよい。このとき、

$$(A P_{z-s} u,\ P_{z-t} v) = -2^{-1} \cdot \frac{d}{dz} (P_{z-s} u,\ P_{z-t} v) \quad (z > s \vee t)$$

であるから、

$$(Z_s R_0 u,\ Z_t R_0 v) = -\int_{\mathbb{R}} \chi_{(0,\infty)}(z-s)\, \chi_{(0,\infty)}(z-t) \frac{d}{dz} (P_{z-s} u, P_{z-t} v)\, dz$$

$$= (P_{|s-t|} u, v) \quad (\because P_{|s-t|} \text{ は s.a.})$$

(Q.E.D.)

この補題を用いて、次のことを示そう。

補題5.4 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$, $\forall \delta_1 > 0, \cdots, \delta_n > 0$ に対して、

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k Z_{t_k} R_0 (P_{\delta_k} X(0)) \right\|^2 = \sum_{j,k=1}^{n} c_j \cdot c_k\, R(|t_j - t_k| + \delta_j + \delta_k)$$

(∵)

示すべきことは、

$$(Z_{t_j} R_0 (P_{\delta_j} X(0)),\ Z_{t_k} R_0 (P_{\delta_k} X(0))) = R(|t_j - t_k| + \delta_j + \delta_k)$$

である。この左辺は、前の補題5.3 より、

$$\text{左辺} = (P_{|t_j - t_k|} P_{\delta_j} X(0),\ P_{\delta_k} X(0))$$

$$= (P_{|t_j - t_k|} S^{\frac{1}{2}} Z_{\delta_j} X(0),\ S^{\frac{1}{2}} Z_{\delta_k} X(0)) \quad (\because (4.2) \text{ と } S^{\frac{1}{2}} X(0) = X(0))$$

$$= (S Z_{|t_j - t_k|} Z_{\delta_j} X(0),\ Z_{\delta_k} X(0)) \quad (\because (4.2))$$

$$= (S \cdot U_{|t_j - t_k| + \delta_j} X(0),\ U_{\delta_k} X(0))$$

$$\doteq (S X(|t_j - t_k| + \delta_j),\ X(\delta_k))$$

$$= (T X(|t_j - t_k| + \delta_j),\ X(\delta_k))$$

$$= R(|t_j - t_k| + \delta_j + \delta_k)$$

(Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

系4.1より、(2.12)における測度$d\beta$は、$\{0\}$には massをもっていないので、(2.13)(2.14)に注意して、$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{R}$, $\forall \delta_1>0,\cdots,\delta_n>0$ に対して、

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j c_k\, R(|t_j-t_k|+\delta_j+\delta_k)$$

$$(5.8)\qquad = \int_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} \Big|\sum_{j=1}^{n} c_j\, e^{it_j\xi}\cdot e^{-\delta_j\lambda}\Big|^2 d\beta(\xi,\lambda),$$

ここで $d\beta(\xi,\lambda)$は、次で定義される$\mathbb{R}\times(0,\infty)$上の有界測度である；

$$(5.9)\qquad d\beta(\xi,\lambda) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+\xi^2)}\, d\xi\, d\beta(\lambda).$$

Fourier変換とLaplace変換の一意性より、$L^2(\mathbb{R}\times(0,\infty); d\beta(\xi,\lambda))$内の線型空間 $\{\sum_{j=1}^{n} c_j e^{it_j\xi}\cdot e^{-\delta_j\lambda};\ n\in\mathbb{N},\ c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{R},\ \delta_1>0,\cdots,\delta_n>0\}$

は、$L^2(\mathbb{R}\times(0,\infty), d\beta(\xi,\lambda))$において dense である。従って、補題5.2, 補題5.4, (5.8) より、次のことが成立する.

<u>補題5.5.</u> $\exists_1\ \Phi_1 : L^2(\mathbb{R}\times(0,\infty), d\beta(\xi,\lambda)) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}; M^{\gamma+})$ unitary operator

$\ni$

$$(5.10)\qquad \Phi_1(e^{it\xi}e^{-\delta\lambda}) = \tau_t R_0(P_\delta X(0)) \quad (t\in\mathbb{R},\ \delta>0).$$

一方、(2.13), (2.14) より、

$$(X(t), X(s)) = (e^{it\xi}, e^{is\xi})_{L^2(\mathbb{R}\times(0,\infty), d\beta(\xi,\lambda))}$$

従って、

<u>補題5.6</u> $\exists_1\ \Phi_0 : M \longrightarrow L^2(\mathbb{R}\times(0,\infty), d\beta(\xi,\lambda))$ isometry

$\ni$

$$(5.11)\qquad \Phi_0(X(t)) = e^{it\cdot}$$

特に、

$$(5.12)\qquad (\Phi_1\Phi_0)(X(t)) = \tau_t R_0 X(0) \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

さて、$L^2(\mathbb{R}\times(0,\infty), d\beta(\xi\lambda))$ 上には、次で定義される unitary group $(V_t; t\in\mathbb{R})$ がある；

$$(5\text{-}13) \qquad (V_t f)(\xi\lambda) = e^{it\xi} f(\xi,\lambda) .$$

このとき、(5-10) より、次のことが成り立つ；

$$(5\text{-}14) \qquad \Phi_1 V_t = \mathcal{T}_t \Phi_1 \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

次に、$f\in L^2(\mathbb{R}\times(0,\infty), d\beta(\xi\lambda))$ に対して、

$$(5\text{-}15) \qquad g(t,\lambda) \equiv \left(f(\cdot,\lambda)\cdot\frac{i\sqrt{\lambda}}{\pi(\cdot+i\lambda)}\right)^{\wedge}(t) \qquad (\in L^2(\mathbb{R}_t),\ d\beta\text{-a.e.}\lambda)$$

を考えると、

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times(0,\infty), d\beta(\xi\lambda))} = \int_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} |g(t,\lambda)|^2 dt\, d\beta(\lambda)$$

が成り立つので、(5-15) の対応によって、$L^2(\mathbb{R}\times(0,\infty), d\beta(\xi\lambda))$ と $L^2(\mathbb{R}\times(0,\infty), dt\, d\beta(\lambda))$ は unitary である。この対応によって、$e^{it\xi}e^{-\delta\lambda}$ 関数 $(t\in\mathbb{R}, \delta>0)$ は、$e^{-\delta\lambda}F_0(\lambda, s-t)$ (λ s が変数) に変換される。但し、

$$(5\text{-}16) \qquad F_0(\lambda, t) \equiv 2\sqrt{\pi}\,\chi_{(0,\infty)}(t)\sqrt{\lambda}\,e^{-\lambda t}$$

注意5.2. (5-15) における変換は、標準表現をとる操作を行っている。

さらに、$g\in L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}, d\beta(\lambda)dt)$ に対して、$d\beta$-a.e.λ に対し、$g(\lambda,\cdot)\in L^2(\mathbb{R}_t)$ であるから、(2.2) における（後向き表現の）Brownian motion $(B_+(t); t\in\mathbb{R})$ を用いて、確率積分 $\int_{\mathbb{R}} g(\lambda t)\, dB^+(t)$ を考えると、

$$\int_{(0,\infty)} \left\|\int_{\mathbb{R}} g(\lambda t)\, dB^+(t)\right\|^2_{M} d\beta(\lambda) = \|g\|^2_{L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}, d\beta(\lambda)dt)}$$

が成り立つ。(2.4) によれば、以上のことをまとめると、次の命題5.1が成り立つことになる。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

命題5.1 $\exists_1\ \Phi : L^2((0,\infty), d\beta(\lambda); \mathbb{M}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}; \mathbb{M}^{\mathcal{H}})$ unitary operator

$\ni$

$$(5.17)\quad \Phi\left(\lambda \longrightarrow e^{-\delta\lambda}\int_{\mathbb{R}} F_0(\lambda, s-t)\,dB_+(s)\right) = \tau_t R_0(P_\delta X(0)) \quad (t\in\mathbb{R}, \delta>0).$$

さて、

$$(5.18)\qquad \mathcal{H} \equiv L^2((0,\infty), d\beta(\lambda); \mathbb{M})$$

とおくとき、$\mathcal{H}$ 上には、次で定義される unitary group $(\widetilde{U}_t)$ がある；

$$(5.19)\qquad \widetilde{U}_t\big(\lambda \longrightarrow \underset{\mathbb{M}}{Y(\lambda)}\big) \equiv \big(\lambda \longrightarrow U_t Y(\lambda)\big) \quad (t\in\mathbb{R}).$$

このとき、前に述べたことより、次の図式は可換である；

$$(5.20)\qquad \begin{array}{ccccc} \mathbb{M} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \xrightarrow{\ \Phi\ } & L^2(\mathbb{R};\mathbb{M}^{\mathcal{H}}) \\ {\scriptstyle U_t}\downarrow & & {\scriptstyle \widetilde{U}_t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_t} \\ \mathbb{M} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R};\mathbb{M}^{\mathcal{H}}) \end{array} \qquad (t\in\mathbb{R}),$$

但し、$\mathbb{M} \longrightarrow \mathcal{H}$ への対応は、$X(s) \longrightarrow \left(\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} F_0(\lambda, \tau-s)\,dB_+(\tau)\right) \in \mathcal{H}$.

以上の準備の下で、operator valued のブラウン運動が構成できる。$u \in \mathbb{M}^{\mathcal{H}}$ と Lebegue measure が finite である1に次元 Borel set F に対して、

$$(5.21)\qquad \xi(F)u \equiv \Phi^{-1}(\chi_F(\cdot)u)$$

と定義すると、Φ が $\mathcal{H}$ から $L^2(\mathbb{R};\mathbb{M}^{\mathcal{H}})$ 上の unitary operator であることより、次のことが成り立つ。

補題5.7 (i) $(\xi(F_1)u_1, \xi(F_2)u_2) = |F_1\cap F_2|\,(u_1, u_2)$

(ii) F_j disjoint $(j\in\mathbb{N})$, $\left|\bigcup_1^\infty F_j\right| < \infty$

$\Rightarrow\ \forall u \in \mathbb{M}^{\mathcal{H}}\quad \xi\left(\bigcup_1^\infty F_j\right)u = \sum_1^\infty \xi(F_j)u$ in $\mathcal{H}$.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

この ξ のことを、operator valued のブラウン運動ということにするとき、この ξ による確率積分が定義できる。すなわち、$\forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}; \mathcal{M}^{ナ+})$ $\exists_1 \int_{\mathbb{R}} \xi(dt)\varphi(t) \in \mathcal{H}$ ∋

$$(5.22) \qquad \left\| \int_{\mathbb{R}} \xi(dt)\varphi(t) \right\| = \| \varphi \|,$$

$$(5.23) \qquad \int_{\mathbb{R}} \xi(dt) \sum_{j=1}^{n} \chi_{F_j}(t) u_j = \sum_{j=1}^{n} \xi(F_j) u_j$$

(c.f. P. Masani [13]).

注意 5.3. (5.21), (5.23) より、$\forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}; \mathcal{M}^{ナ+})$

$$(5.24) \qquad \int_{\mathbb{R}} \xi(dt)\varphi(t) = \Phi^{-1}\varphi.$$

この ξ を用いて、$\mathcal{M}^{ナ+}$ から $\mathcal{H}$ への定常過程を定義しよう。$\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathcal{M}^{ナ+}$ に対して、

$$(5.25) \qquad \widetilde{X}_t u \equiv \int_{\mathbb{R}} \xi(ds) R_0 u(s-t) = \int_t^{\infty} \xi(ds) \sqrt{2} H^{\frac{1}{2}} e^{-(s-t)H} u$$

によって、$\mathcal{M}^{ナ+}$ から $\mathcal{H}$ への作用素 $\widetilde{X}_t$ を定義するとき、$\widetilde{\mathbb{X}} \equiv (\widetilde{X}_t \,;\, t \in \mathbb{R})$ は次の性質をもつ。

命題 5.2. (i) $(\widetilde{X}_s u, \widetilde{X}_{s+t} v) = (u, P_{|t|} v)$ i.e. $\widetilde{\mathbb{X}}$ は定常過程で、共分散作用素は $P_{|t|}$ である。

(ii) $\widetilde{U}_t \widetilde{X}_s = \widetilde{X}_{t+s}$,

(iii) $\bigvee_{t \in \mathbb{R}} \widetilde{X}_t(\mathcal{M}^{ナ+}) = \mathcal{H}$,

(iv) $\bigcap_t \mathcal{H}_t^+ = \{0\}$, 但し $\mathcal{H}_t^+ \equiv [\widetilde{X}_s u \,;\, s \geq t, u \in \mathcal{M}^{ナ+}]$,

(v) $(\widetilde{X}_t(X(0)), \widetilde{X}_0(X(0))) = R(t)$.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

∵ (i) $(\tilde{X}_s u, \tilde{X}_{s+t} v) = \left(\int_{\mathbb{R}} \xi(d\tilde{\epsilon})(\tau_s \mathcal{R}_0 u)(\tilde{\epsilon}), \int_{\mathbb{R}} \xi(d\tilde{\epsilon})(\tau_{s+t}\mathcal{R}_0 v)(\tilde{\epsilon})\right)$

$= (\tau_s \mathcal{R}_0 u, \tau_{s+t}\mathcal{R}_0 v) = (\mathcal{R}_0 u, \mathcal{R}_t \mathcal{R}_0 v) =$

u, v は $\mathcal{D}(H)$ の元としてよく、このとき、

$$= 2\int_0^\infty \chi_{(0,\infty)}(s)\,\chi_{(0,\infty)}(s-t)\,(H P_s u, P_{s-t} v)\,ds$$

$$= -\int_0^\infty \chi_{(0,\infty)}(s)\,\chi_{(0,\infty)}(s-t)\,\frac{d}{ds}(P_s u, P_{s-t} v)\,ds = (P_{|t|} u, v)$$

(∵ 命題4.2)

(ii) $\tilde{U}_t(\tilde{X}_s u) = \tilde{U}_t(\Phi^{-1}\tau_s \mathcal{R}_0 u)$ (∵ (5.24), (5.25))

$= (\Phi^{-1}\tau_t \Phi)(\Phi^{-1}\tau_s \mathcal{R}_0 u)$ (∵ (5.20))

$= \Phi^{-1}\tau_{s+t}\mathcal{R}_0 u$

$= \tilde{X}_{s+t} u$ (∵ (5.24), (5.25))

(iv) の証明のために、次の補題5.8を示せばよい。

<u>補題5.8</u> $\forall t \in \mathbb{R}$

$$[\,\tau_s \mathcal{R}_0 u\,;\ s \geq t,\ u \in M^{+}\,] = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}; M^{+})\,;\ \varphi = 0 \text{ in } (-\infty, t)\}.$$

この補題は、次の様にして示される；$\mathcal{R}_0$ の定義 (5.1) より、左辺が右辺に含まれる。次に、$\varphi \in$ 右辺 が、左辺と直交しているとすると、$(\tau_s \mathcal{R}_0 u, \varphi) = 0$ $\forall s \geq t$, $\forall u \in M^{+}$. $\varphi = 0$ in $(-\infty, t)$ に注意して、補題5.2の証明と同様に、$\varphi = 0$ in (t, ∞) が成り立つ

(iii) $f \in \mathcal{H}$ が $(\tilde{X}_t u, f) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall u \in M^{+}$ をみたしているとする。$(\tau_t \mathcal{R}_0 u, \Phi f) = \left(\int_{\mathbb{R}} \xi(ds)\tau_t \mathcal{R}_0 u, \int_{\mathbb{R}} \xi(ds)\Phi f\right)$

$= (\tilde{X}_t u, f) = 0$ (∵ (5.24), (5.25))

従って、補題5.2より、$\Phi f = 0$ ∴ $f = 0$

(v) は、(4.6) と上に示した (i) より従う。 (Q.E.D)

命題5.2を、unitary dilation のことばで言い表わすために、M^{+} から $\mathcal{H}$ の中への isometry $\mathcal{R}$ を次の様に定義する：

(5.26) $\mathcal{R} \equiv \Phi^{-1}\mathcal{R}_0 : M^{+} \longrightarrow \mathcal{H}$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

注意 5.4 (5.25) により、 $\mathcal{R} = \widetilde{X}_0$.
このとき、次のことを示そう。

$$(5.27) \quad \mathcal{R} P_{|t|} = P_{\mathcal{R}(M^{Tt})} \widetilde{U}_t \mathcal{R}$$

$$(\because \ \forall u, v \in M^{Tt} \quad (P_{|t|}u, v) = (\widetilde{X}_0 u, \widetilde{X}_t v) \ (\because \text{命題} 5.2(i))$$
$$= (\widetilde{X}_0 u, \widetilde{U}_t \widetilde{X}_0 v) \ (\because \ \text{〃} \ 5.2(ii))$$
$$= (\mathcal{R}u, \widetilde{U}_t \mathcal{R} v) \ (\because \text{注意} 5.4)$$

一方、 $(P_{|t|}u, v) = (u, P_{|t|}v) = (\mathcal{R}u, \mathcal{R}P_{|t|}v)$ (Q.E.D.))
従って、命題 5.2 と (5.27) より、次のことが成り立つ。

命題 5.3 $(\mathcal{H}, \widetilde{U}_t ; t \in \mathbb{R})$ は、縮小共分散作用素 $(M^{Tt}, P_{|t|} ; t \in \mathbb{R})$ の minimal unitary dilation である i.e.

(i) $M^{Tt} \xrightarrow{\mathcal{R}} \mathcal{H}$ isometry

(ii) $\bigvee_{t \in \mathbb{R}} \widetilde{U}_t(\mathcal{R}M^{Tt}) = \mathcal{H}$

(iii) $\mathcal{R} P_{|t|} = P_{\mathcal{R}(M^{Tt})} \widetilde{U}_t \mathcal{R} \quad (t \in \mathbb{R})$.

さらに、共分散作用素 $P_{|t|}$ は次の性質をもつ：

(iv) $P_{|t|}$ は自己共役

(v) $P_{|t|} \longrightarrow 0 \quad (t \to \infty)$ (弱)

(vi) T－正値性をもつ； $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t_j \geq 0, \ u_j \in M^{Tt} \ (1 \leq j \leq n)$,
$$\sum_{j,k=1}^{n} (P_{|t_j + t_k|} u_j, u_k) \geq 0$$

(vii) $P_t P_s = P_{t+s} \quad (t, s \geq 0)$

最後に、定常過程 $\widetilde{\mathbb{X}}$ は、単純マルコフ性をもつことを示す。そのことの背景に、 $\widetilde{\mathbb{X}}$ は、一般化された Langevin 方程式を満たしていることが本質的である。まず、

$$(5.28) \quad \xi_t \equiv \begin{cases} \xi((0,t]) & t>0 \\ 0 & t=0 \\ -\xi((t,0]) & t<0 \end{cases}$$

とおく。 $\xi = (\xi_t ; t \in \mathbb{R})$ が operator valued の B.M と呼ぶ方がよいかもしれない。(5.21), 補題 5.7 より、

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

(5.29) $\qquad \xi_t : \mathcal{M}^{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}$ bounded linear operator,

(5.30) $\qquad \xi((s,t]) = \xi_t - \xi_s \qquad (s<t),$

(5.31) $\qquad (\xi_s u, \xi_t v) = (t\wedge s)(u,v) \qquad (s,t\in\mathbb{R},\ u,v\in\mathcal{M}^{\mathcal{H}})$

<u>命題5.4</u> 定常過程 $\widetilde{X}$ は 次の確率微分方程式を満足する；

$\forall u\in\mathcal{D}(H),\quad \forall s<{}^{\forall}t$ に対して、

(5.32) $$\widetilde{X}_t u - \widetilde{X}_s u = \int_s^t \widetilde{X}_z H u\,dz - (\xi_t-\xi_s)\sqrt{2}H^{\frac12}u.$$

(∵) Φ を (5.32)の両辺に作用したものが等しいことをみればよい。(5.24), (5.25) より

$$\Phi(\widetilde{X}_t u - \widetilde{X}_s u) = \tau_t R_0 u - \tau_s R_0 u$$

$$\Phi(\text{(5.32)の右辺}) = \int_s^t \tau_v R_0 H u\,dv - \chi_{(s,t]}(\cdot)\sqrt{2}H^{\frac12}u$$

変数・が t より大きいとき、

$$\begin{aligned}
\Phi(\text{(5.32)の左辺})(\cdot) &= \chi_{(0,\infty)}(\cdot-t)\sqrt{2}H^{\frac12}e^{-(\cdot-t)H}u - \chi_{(0,\infty)}(\cdot-s)\sqrt{2}H^{\frac12}e^{-(\cdot-s)H}u \\
&= \sqrt{2}H^{\frac12}\left(e^{-(\cdot-t)H}u - e^{-(\cdot-s)H}u\right) \\
&= \sqrt{2}H^{\frac12}\cdot\int_{\cdot-t}^{\cdot-s} e^{-zH}Hu\,dz \\
&= \sqrt{2}H^{\frac12}\int_s^t e^{-(\cdot-v)H}Hu\,dv \\
&= \int_s^t (\tau_v R_0 Hu)(\cdot)dz = \Phi(\text{(5.32)の右辺})(\cdot)
\end{aligned}$$

変数・が $(s,t]$ に属するとき、

$$\begin{aligned}
\Phi(\text{(5.32)の左辺})(\cdot) &= -\sqrt{2}H^{\frac12}e^{-(\cdot-s)H}u \\
&= -\sqrt{2}H^{\frac12}\left(e^{-(\cdot-s)H}u-u\right) - \sqrt{2}H^{\frac12}u \\
&= \sqrt{2}H^{\frac12}\cdot\int_0^{\cdot-s} e^{-zH}Hu\,dz - \sqrt{2}H^{\frac12}u \\
&= \sqrt{2}H^{\frac12}\int_s^{\cdot} e^{-(\cdot-z)H}Hu\,dz - \sqrt{2}H^{\frac12}u \\
&= \sqrt{2}H^{\frac12}\int_s^t \chi_{(0,\infty)}(\cdot-z)e^{-(\cdot-z)H}Hu\,dz - \sqrt{2}H^{\frac12}u
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$= \int_s^t (\tau_v \mathcal{R}_0 H v)(\cdot) dz - \sqrt{2} H^{\frac{1}{2}} u$$

$$= \Phi((5\text{-}32)\text{の右辺})(\cdot)$$

最後に、変数・が s 以下のとき、

$$\Phi((5\text{-}32)\text{の左辺})(\cdot) = 0 = \Phi((5\text{-}32)\text{の右辺})(\cdot)$$

(Q.E.D)

注意5.5　J. T. Lewis & L. C. Thomas [11] に一般論として、確率積分に関する部分積分の公式を用いて、(5-32)が、$u \in \mathcal{D}(H^2)$ のときは導ける。そこでは、形式的な計算のため、$u \in \mathcal{D}(H)$ としてやっているが、我々の場合は、半群の基本的な性質より、簡単に、かつ一般に導けたわけである。

注意5.6　(5-32)は、標語的に、次の様にかける；

$$(5\text{-}33) \qquad d\widetilde{X}_t = \widetilde{X}_t H\, dt - \xi(dt)\sqrt{2} H^{\frac{1}{2}}$$

これは、1次元の Langevin 方程式(2.15)の無限次元の場合に相当する確率微分方程式である。この意味で、(5-33)を、一般化された Langevin 方程式とよぶことにする([11])。

このノートの最後のしめくくりとして、Langevin 方程式という名にはじなく、その解である $\widetilde{X}$ は、単純マルコフ性をもつことを示そう。

$\mathbb{R}$ の open set D に対して、$\mathcal{H}$ の閉部分空間を次の様に定義する。

$$(5\text{-}34) \qquad \mathcal{H}(D) \equiv [\, \widetilde{X}_s u \,;\, s \in D,\ u \in M^{+} \,].$$

特に、$t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(5\text{-}35) \qquad \mathcal{H}^-(t) \equiv \mathcal{H}((-\infty, t)),\quad \mathcal{H}^+(t) \equiv \mathcal{H}((t, \infty))$$

なる past と future space が定義される。そして、$t \in \mathbb{R}$ に対して、present space に対応するものとして、

$$(5\text{-}36) \qquad \mathcal{H}(t) \equiv [\, \widetilde{X}_t u \,;\, u \in M^{+} \,].$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

(5.24), (5.25) に注意して、補題5.8 より、

補題5.9 $\mathcal{H}^+(t) = \{u \in \mathcal{H};\ \Phi u = 0 \text{ in } (-\infty, t)\}$ $(\forall t \in \mathbb{R})$.

が得られる。

これを用いて、次の主定理を示そう。

定理5.1 (i) $\tilde{\mathbb{X}}$ は、T-正値性をみたす、すなわち、$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_j \geq 0$, $\forall u_j \in \mathcal{M}^{1/4}$ $(1 \leq j \leq n)$ に対して、

$$(5.37) \qquad \sum_{j,k=1}^{n} \left(\tilde{X}(t_j + t_k) u_j, u_k \right) \geq 0$$

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall T > 0$ $\forall u \in \mathcal{M}^{1/4}$ に対して、

$$(5.38) \qquad P_{\mathcal{H}^+(t)} \tilde{X}_{t-T} u = \tilde{X}_t (P_T u)$$

すなわち、$\tilde{\mathbb{X}}$ は、単純マルコフ性をもつ。

∵ (i) は、命題5.2 (i) と命題5.3 (vi) より従う。(ii) は次の様にして示される。命題5.4 より、$u \in \mathcal{D}(H)$ に対して、

$$\tilde{X}_{t-T} u - \tilde{X}_t u = -\int_{t-T}^{t} \tilde{X}_\tau H u \, d\tau + (\xi_t - \xi_{t-T}) \sqrt{2} H^{\frac{1}{2}} u$$

補題5.9 と (5.24) より、$(\xi_t - \xi_{t-T}) \sqrt{2} H^{\frac{1}{2}} u \in \mathcal{H}^+(t)^{\perp}$

一方、

$$\int_{t-T}^{t} \tilde{X}_\tau H u \, d\tau = \int_{t-T}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi(ds) (\mathcal{R} H u)(s-\tau) \right) d\tau =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \xi(ds) \left(\int_{t-T}^{t} (\mathcal{R} H u)(s-\tau) \, d\tau \right)$$

$$= \int_{t-T}^{t} \xi(ds) \left(\int_{t-T}^{t} (\mathcal{R} H u)(s-\tau) \, d\tau \right) + \int_{t}^{\infty} \xi(ds) \left(\int_{t-T}^{t} (\mathcal{R} H u)(s-\tau) \, d\tau \right)$$

同じく、(5.24) と補題5.9 より、

$$\int_{t-T}^{t} \xi(ds) \left(\int_{t-T}^{t} (\mathcal{R} H u)(s-\tau) \, d\tau \right) \in \mathcal{H}^+(t)^{\perp}$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

さらに、$s>t$に対して、$\displaystyle\int_{t-T}^{t}(RHu)(s-\tau)d\tau = \int_{t-T}^{t}\chi_{(0,\infty)}(s-\tau)\sqrt{2}H^{\frac{1}{2}}P_{s-\tau}Hu\,d\tau =$

$$= \int_{t-T}^{t}\sqrt{2}H^{\frac{1}{2}}P_{s-\tau}Hu\,d\tau = \sqrt{2}H^{\frac{1}{2}}\int_{t-T}^{t}P_{s-\tau}Hu\,d\tau \quad (\because \text{補題}5.1(ii))$$

そして、$\displaystyle\int_{t-T}^{t}P_{s-\tau}Hu\,d\tau = \Big[P_{s-\tau}u\Big]_{\tau=t-T}^{t} = P_{s-t}u - P_{s-t+T}u =$

$$= P_{s-t}(u-P_Tu)$$

従って、

$$\int_t^{\infty}\xi(ds)\left(\int_{t-T}^{t}(RHu)(s-\tau)d\tau\right) = \int_t^{\infty}\xi(ds)\sqrt{2}H^{\frac{1}{2}}P_{s-t}(u-P_Tu)$$

$$= \tilde{X}_t(u-P_Tu)$$

よって、

$$\tilde{X}_{t-T}u - \tilde{X}_t(P_Tu) \in \mathcal{H}^+(t)^{\perp}$$

これは、(5.38)を示している。 (Q.E.D)

注意5.6 多重マルコフ性のとき、それに付随した多次元拡散過程が $M^{\#}$ の構造を定めていた。このノートにのべた Langevin方程式(5.32)((5.33))との関連については、別の機会に報告したい。([17]).

注意5.7 定常過程$\tilde{X}$のマルコフ性は、その背景には、一次元のときがそうであった様に、共分散作用素$P_{|t|}$が、次の微分方程式をみたしている：

(5.39) $$\frac{d}{dt}P_{|t|} \pm HP_{|t|} = 0 \qquad (t \gtrless 0).$$

以上

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

文献

1. N. I. Ahiezer & M. Krein, Some questions in the theory of moments, Translations of Math., Monographs, vol. 2

2. J. L. Doob, The Brownian movement and stochastic equations, Ann. Math., 43 (1942), 351-369

3. H. Dym, An extremal problem in the theory of Hardy functions, Israel J. Math. 18 (1974), 391-399

4. H. Dym & H. P. McKean, Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem, New York, Academic press, 1976

5. G. C. Hegerfeld, From euclidean to relativistic fields and on the notion of Markov fields, Commun. math. Phys. 35 (1974), 155-171

6. H. Helson & D. Sarason, Past and future, Math. Scand. 21 (1967), 5-16

7. I. A. Ibragimov, Conditions for the complete regularity of continuous-time stationary processes. Sem. Math. V.A. Steklov Math. Inst. Leningrad, 12 (1971), 29-49

8. A. Klein, A characterization of Osterwalder-Schrader path spaces by the associated semigroup Bull. Amer. Math. Soc., 82 (1976), 762-764

9. A. N. Kolmogorov & Yu. A. Rozanov, On strong mixing conditions for stationary Gaussian processes. Th. Prob. Appl. 5 (1960), 204-208

10. P. D. Lax & R. S. Phillips, Scattering theory, New York, Academic press, 1967

11. J. T. Lewis & L. C. Thomas, A characterization of regular solutions of a linear stochastic differential equation, Zeitschr. für Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb., 30 (1974), 45-55

12. J. T. Lewis & L. C. Thomas, How to make a heat bath, Functional Integration and its applications, Oxford, Clarendon Press, 1975

13. P. Masani Quasi-isometric measures and their applications. Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 427-528

14. E. Nelson, Quantum fields and Markov fields, Amer. Math. Soc. Summer Institute on Partial Differential Equations held at Berkely, 1971, 413-420

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

15. E. Nelson, Construction of Quantum fields from Markov fields, J. Funct. Anal. 12 (1973), 97–112

16. E. Nelson. The free Markov field, J. Funct. Anal. 12 (1973), 211–227

17. Y. Okabe, On the structure of splitting fields of stationary Gaussian processes with finite multiple Markovian property. Nagoya Math. J., 54 (1974), 191–213

18. K. Osterwalder & R. Schrader Axioms for Euclidean Green's functions, Commun. Math. Phys. 31 (1973), 83–112

19. B. Simon The $P(\Phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton Series in Physics, 1974

20. T. J. Ott, The covariance function of the virtual waiting-time process in an M/G/1 Queue. Adv. Appl. Prob 9 (1977), 158–168

21 R. Streater & A.S Wightman, P.C.T., Spin and Statistics and All That, Benjamin, New York, 1964

22. L. Streit & T. Hida, On Quantum theory in terms of white noise, Pre-Print

23. G.E. Uhlenbeck & L.S. Ornstein, On the theory of the Brownian motion, Physical Review 36 (1930), 823–841

24. K. Yosida, Functional Analysis, Springer, 1965.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

一次元分枝拡散過程の極限定理について

影山清司　小倉幸雄

1.序　優臨界のGalton–Watson過程の極限定理の歴史は古いが，優臨界の分枝拡散過程の極限定理は渡辺[8][9]によって始められた．氏はL^2–martingaleとFourier変換の理論を巧みに用いて，有界集合内の粒子数が時間と共に無限大に増大するような過程について，そのきっかりした漸近的性質を与えている．このノートでは有界集合内の粒子数が零に近づくような最も簡単な半直線上の優臨界分枝拡散過程の極限定理を述べる．又，このことを用いて，完全，単連結な負曲率空間上の分枝Brown運動の漸近的性質についていくらかのことを述べる．

2. 一次元分枝拡散過程についての結果　$\mathbb{R} = (r_t, \mathbb{P}_r)$ $(r \geq 0)$を池田，長沢，渡辺[3]の意味で，方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + b(r)\frac{\partial u}{\partial r} + c(u^2 - u)$$

$(c > 0)$をS–equationにもつ$[0, \infty)$上の分枝拡散過程とする．ここで，境界0は流入又は反射で，∞は自然とする．$b(r)$についての仮定を設ける：

(A.1)　$b(r)$は$(0, \infty)$上で定義され，そこで連続で，ある正定数b_0に対し　$b(r) \geq b_0$．

(A.2)　$b(r)$は非増加

(A.3)　$$\int^{\infty} (b(r) - b_0)\, dr < \infty.$$

(A.3)′　$$\int^{\infty} r\,(b(r) - b_0)\, dr < \infty.$$

ξ_tを分枝拡散過程$\mathbb{R}$の時刻tにおける粒子の個数とし，それらの位置を$r_t = [r_t^1, r_t^2, \cdots, r_t^{\xi_t}]$で表わす．また$\mathbb{B}$を$[0,\infty)$上の可測函数全体とし，$g \in \mathbb{B}$に対し

$$\check{g}(\boldsymbol{r}_t) = g(r_t^1) + g(r_t^2) + \cdots + g(r_t^{\xi_t})$$

とおく．更に定数を次の様に定める．

$$\lambda_0 = b_0^2/2, \quad \alpha_\lambda = b_0 - \sqrt{b_0^2 - 2\lambda}, \quad \alpha = \alpha_{\lambda_0} = b_0.$$

定理 1. 1) $b(r)$ が (A.1) と (A.3) をみたすとする．このとき，各 $0 \leq \lambda < \lambda_0$ に対し，非負確率変数 W_λ が存在して，$\lim_{r\to\infty} e^{\alpha_\lambda r} g(r) = g_\infty$ となる全ての $g \in \mathbb{B}$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} e^{(\lambda - c)t}\, \check{g}(\boldsymbol{r}_t) = g_\infty W_\lambda, \qquad a.s.$$

2) $b(r)$ が (A.1), (A.2) と (A.3)′ をみたすとする．このとき，非負確率変数 $W = W_{\lambda_0}$ が存在して，$\lim_{r\to\infty} e^{\alpha r} g(r)/r = g_\infty$ となる全ての $g \in \mathbb{B}$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} e^{(\lambda_0 - c)t}\, \check{g}(\boldsymbol{r}_t) = g_\infty W, \qquad \text{in prob.}$$

定理 2. 1) $b(r)$ が (A.1), (A.2) と (A.3) をみたすとする．このとき，$\alpha_\lambda^2 < 2c$ をみたす全ての $0 \leq \lambda < \lambda_0$ に対し

$$\mathbb{P}_r(0 < W_\lambda < \infty) = 1, \qquad r > 0.$$

更に $b(r)$ が (A.3)′ をみたせば上式は $\alpha_\lambda^2 = 2c$ となる $0<\lambda<\lambda_0$ についても成立つ．

2) $b(r)$ が (A.1), (A.2) と (A.3)′ をみたし，$c \geq \lambda_0$ ならば

$$\mathbb{P}_r(0 < W < \infty) = 1, \qquad r > 0.$$

注意. 1) $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ に対し $\alpha_\lambda^2 \leq 2\lambda$ となるので，定理 2 の結果は $\lambda \leq c$ となる $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ について成立つ．これは $\check{g}(\boldsymbol{r}_t) \longrightarrow \infty$ となる場合に対応している．

2) 実は $\alpha_{\lambda_0}^2 = 2\lambda_0$ なので，定理 2 2) の条件 $c \geq \lambda_0$ は $2c \geq \alpha_{\lambda_0}^2$ ともかける．

3. 負曲率空間上の分枝 Brown 運動についての結果　M を完

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

全，単連結な d 次元 Riemann 多様体とし，M_x を点 $x\in M$ における M の接空間とする．$X, Y\in M_x$ に対し，$K(X,Y)$ を X と Y の張る平面の断面曲率とし，$K(X)$ を X に関する平均曲率，即ち M_x の正規直交基底 $\{X, Y_1, Y_2, \cdots, Y_{d-1}\}$ に対し

$$K(X) = \frac{1}{d-1}\sum_{i=1}^{d-1} K(X, Y_i)$$

とする．$x_0\in M$ と $r\geq 0$ に対し，

$$k(r; x_0) = -\inf\{K(X) ;\ X\in M_x,\ d(x, x_0)\geq r\}$$

とおく．ここで $d(\cdot,\cdot)$ は M 上の距離である．次の仮定をおく：
(B.1) ある正定数 k_0, k_1 があって

$$k_1 \geq -K(X,Y) \geq k_0\ , \qquad X, Y\in M_x,\ x\in M.$$

(B.2) $$\int^\infty (k(r;x_0)-k_0)\,dr < \infty.$$

(B.2)′ $$\int^\infty r(k(r;x_0)-k_0)\,dr < \infty.$$

仮定 (B.2) (B.2)′ は $x_0\in M$ のとり方に関係しない．実際，$x_0, x_1 \in M$ に対し

$$k(r;x_1) \leq k(r/2;x_0)\ , \qquad r\geq 2d(x_0, x_1).$$

さて，M 上の Laplacian を Δ とし，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + c(u^2-u)$$

$(c>0)$ を S-equation にもつ M 上の分枝 Brown 運動を $\mathbb{X} = (x_t, \mathbb{P}_x)$ $(x\in M)$ とする．又，$b_0 = (d-1)\sqrt{k_0}/2$ とし，2 節と同様に定数 $\lambda_0, \alpha_\lambda, \alpha$ を定め，$\mathbb{B}$ を M 上の有界可測函数の全体とする．

<u>定理 3.</u> 1) (B.1), (B.2) がみたされ，$0\leq\lambda<\lambda_0$ とする．このとき，ある $x_0\in M$ に対し

$$\lim_{r\to\infty}\ \sup_{d(x,x_0)\geq r}\ e^{\alpha_\lambda d(x_0,x)}\, g(x) < \infty \quad [\ \leq 0\ ]$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

となる全ての $g \in \mathbb{B}$ に対して,

$$\limsup_{t\to\infty} e^{(\lambda-c)t}\, \check{g}(x_t) < \infty \quad [\leq 0] \quad a.s.$$

また, 更に $\alpha_\lambda^2 < 2c$ ならば, ある $x_0 \in M$ に対し,

$$\lim_{r\to\infty} \inf_{d(x,x_0)\geq r} e^{\alpha_\lambda d(x_0,x)} g(x) > 0 \quad [=\infty]$$

となる全ての $g \in \mathbb{B}$ に対し

$$\liminf_{t\to\infty} e^{(\lambda-c)t}\, \check{g}(x_t) > 0 \quad [=\infty] \quad a.s.$$

更に (B.2)′ がみたされゝば, 上のことは $\alpha_\lambda^2 = 2c$ となる $0 < \lambda < \lambda_0$ についても成立つ.

2) (B.1), (B.2)′ がみたされるとする. このとき, ある $x_0 \in M$ に対し

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{d(x,x_0)\geq r} e^{\alpha d(x_0,x)} g(x)/d(x_0,x) < \infty \quad [\leq 0]$$

となる全ての $g \in \mathbb{B}$ に対し,

$$\limsup_{t\to\infty} e^{(\lambda_0-c)t}\, \check{g}(x_t) < \infty \quad [\leq 0] \quad in\ prob.$$

更に $c \geq \lambda_0$ ならば, ある $x_0 \in M$ について

$$\lim_{r\to\infty} \inf_{d(x,x_0)\geq r} e^{\alpha d(x_0,x)} g(x)/d(x_0,x) > 0 \quad [=\infty]$$

となる全ての $g \in \mathbb{B}$ に対し

$$\liminf_{t\to\infty} e^{(\lambda_0-c)t}\, \check{g}(x_t) > 0 \quad [=\infty] \quad in\ prob.$$

注意 1) 上の定理の g に関する条件は $x_0 \in M$ のとり方に関係しない. 実際, 例えば, $x_0, x_1 \in M$ に対し, $r \geq 2d(x_0,x_1)$ なら

$$\inf_{d(x,x_1)\geq r} e^{\alpha_\lambda d(x_1,x)} g(x) \geq e^{-\alpha_\lambda d(x_0,x_1)} \inf_{d(x,x_0)\geq r/2} e^{\alpha_\lambda d(x_0,x)} g(x).$$

2) 上の定理より, g の台が compact ならば

$$\lim_{t\to\infty} e^{(\lambda-c)t}\, \check{g}(x_t) = 0 \quad a.s. \quad (0 \leq \lambda < \lambda_0),$$

$$= 0 \quad in\ prob. \quad (\lambda = \lambda_0).$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

尚，渡辺[9]の case，即ち $c > 2\lambda_0$ のときは，[9]より g が非負で恒等的に零でなければ，

$$e^{(\lambda-c)t}\,\check{g}(x_t) = \infty \quad a.s. \quad (\lambda > \lambda_0).$$

<u>4. 定理3の証明</u>　定理1と2の証明は[5]にあるので，ここでは定理3の証明を少し丁寧に述べる．

$x_0 \in M$ を固定するとき，(B.1) を仮定すれば，M_{x_0} は M に指数写像 $\exp_{x_0}$ によって双可微分的に移る（[1] p.184）．M_{x_0} は d 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ と同一視出来るから，M に自然に極座標 $(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{d-1})$ が入る．このとき，Riemann 計量の成分は

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}$$

という形になる．従って，$g = \det(g_{ij})$，$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ とおけば，

$$\Delta \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i} g^{ij}\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial x_j} = \Delta_r + \Delta',$$

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\Delta' = \sum_{i,j=1}^{d-1} p_{ij}(r,\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} + \sum_{i=1}^{d-1} p_i(r,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta_i}$$

という形になる．

$(\sqrt{g})^{-1}\partial\sqrt{g}/\partial r$ の評価をする．$\theta \in M_{x_0}$，$\|\theta\| = 1$ をとり，$\rho_\theta(t) = t\theta$．$\gamma_\theta(t) = \exp_{x_0}\rho_\theta(t)$ とおく．$\gamma_\theta(\cdot)$ は方向 θ の x_0 から出発する測地線となる．$r > 0$ を固定し，$(M_{x_0})_{\rho_\theta(r)}$ を $\rho_\theta(r) \in M_{x_0}$ における M_{x_0} の接空間とする．写像 $\pi_{\rho_\theta(r)} : M_{x_0} \longrightarrow (M_{x_0})_{\rho_\theta(r)}$ を $\pi_{\rho_\theta(r)} A = \lambda_*(0;\theta,A)$，$A \in M_{x_0}$ で定義する．ここで $\lambda(s;\theta,A) = \rho_\theta(r) + sA$ である．$A_1, A_2, \cdots, A_{d-1} \in M_{x_0}$ を一次独立で θ に直交するものとし，

$$f(r;\theta) = \frac{\|d\exp_{x_0}\pi_{\rho_\theta(r)} rA_1 \wedge d\exp_{x_0}\pi_{\rho_\theta(r)} rA_2 \wedge \cdots \wedge d\exp_{x_0}\pi_{\rho_\theta(r)} rA_{d-1}\|}{r^{d-1}\|A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{d-1}\|}$$

とおく．ここで $\|A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{d-1}\| = (\det(\langle A_i, A_j\rangle))^{1/2}$ である．このとき，$\gamma_\theta(t)$ における M の体積要素が $r^{d-1}f(r;\theta)\,d\theta\,dr$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

となる（[1] p. 256）から，$\sqrt{g(r,\theta)} = r^{d-1} f(r;\theta)$ となる．これを微分して比をとれば

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{g(r,\theta)}}\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{g(r,\theta)} = \frac{f'(r;\theta)}{f(r;\theta)} + \frac{d-1}{r}$$

が得られる．

<u>補題 1.</u> 仮定(B.1)の下で

$$(d-1)\sqrt{k_0}\coth\sqrt{k_0}\,r \leq \frac{1}{\sqrt{g(r,\theta)}}\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{g(r,\theta)} \leq (d-1)\frac{y'(r;x_0)}{y(r;x_0)}.$$

但し，$y(u,x_0)$ は §3 の $k(u;x_0)$ についての方程式

$$(2) \qquad y''(u) = k(u;x_0)\,y(u), \qquad y(0+)=0, \qquad y'(0+)=1$$

の解．

<u>証明.</u> [1] pp. 253～255 と pp. 228～230 の方法を用いればよいが，必要な所は長くないので一応説明する．$Y_i = d\exp_{x_0}\pi_{P_\theta(u)}uA_i$ とおけば，これは $Y_i(0)=0$ をみたす γ_θ に沿う Jacobi 場となる．$A_1, A_2, \cdots, A_{d-1}$ を適当にとることにより $Y_1(r), Y_2(r), \cdots, Y_{d-1}(r)$ が正規直交系になるように出来る．このような $A_1, A_2, \cdots, A_{d-1}$ をとっても $f(r;\theta)$ の値は変らないので，そうすることにする．このとき，

$$(\|Y_1\wedge Y_2\wedge\cdots\wedge Y_{d-1}\|^2)'(r) = \sum_{i=1}^{d-1}\langle Y_i', Y_i\rangle(r)$$

となるから

$$(3) \qquad \frac{f'(r;\theta)}{f(r;\theta)} = \sum_{i=1}^{d-1}\langle Y_i', Y_i\rangle(r) - \frac{d-1}{r}.$$

さて，Y_i の $\gamma_\theta(r)$ における第二基本形式が消える（[1] p. 247）ので，Jacobi 方程式 $Y_i'' + R_{\gamma_* Y_i}\gamma_* = 0$ （[1] p. 173）に注意すれば

$$\langle Y_i', Y_i\rangle(r) = \int_0^r (\langle Y_i', Y_i'\rangle - \langle R_{\gamma_* Y_i}\gamma_*, Y_i\rangle)\,du = I_r(Y_i)$$

但し，$\gamma = \gamma_\theta$ で R_{XY} は曲率変換，I_r は γ における指標形式である．E_i を $Y_i(r)$ から作られる平行場，$y(u)$ を方程式 (2) の解とし，$W_i(u) = (y(u)/y(r))\,E_i$ とする．このとき，

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$W_i(0)=0$, $W_i(r)=Y_i(r)$ で W_i の $\gamma_\theta(r)$ での第二基本形式も 0 になる．従って，基本不等式（[1] p.228）より

$$\langle Y_i', Y_i\rangle(r) \leq I_r(W_i) = \int_0^r (\langle W_i', W_i'\rangle - \langle R_{\gamma_*W_i}\gamma_*, W_i\rangle)\,du.$$

しかし

$$\langle R_{\gamma_* W_i}\gamma_*, W_i\rangle = K(\gamma_*, W_i)(\langle\gamma_*,\gamma_*\rangle\langle W_i,W_i\rangle - \langle\gamma_*, W_i\rangle^2)$$
$$= K(\gamma_*, W_i)\frac{y(u)^2}{y(r)^2}$$

だから

$$\langle Y_i', Y_i\rangle(r) \leq \frac{1}{y(r)^2}\int_0^r (y'(u)^2 - K(\gamma_*, E_i)\,y(u)^2)\,du.$$

$\gamma_*(u), E_1, E_2, \cdots, E_{d-1}$ は $M_{\gamma_\theta(u)}$ の正規直交基底だから，i について の和をとって

$$\sum_{i=1}^{d-1}\langle Y_i', Y_i\rangle(r) \leq \frac{d-1}{y(r)^2}\int_0^r (y'(u)^2 - K(\gamma_*(u))\,y(u)^2)\,du$$
$$\leq \frac{d-1}{y(r)^2}\int_0^r (y'(u)^2 + k(u\,;x_0)\,y(u)^2)\,du$$
$$= \frac{d-1}{y(r)^2}\int_0^r (y'(u)^2 + y''(u)\,y(u))\,du$$
$$= \frac{d-1}{y(r)^2}(y(r)y'(r) - y(0)y'(0)) = \frac{(d-1)y'(r)}{y(r)}.$$

これと (1), (3) より求める上からの評価を得る．

下からの評価は [1] p.256 を用いればよい．（証明終）

以後 x_0 を固定して議論すればよいので，x_0 を省略する．

<u>補題 2.</u> y を (2) の解とし，$a(r) = y'(r)/y(r)$ とする．

1) $0 \leq k(r) \leq k_1 < \infty$ ならば，$a(r) = 1/r + O(r)$, $r \downarrow 0$.

2) $0 < k_0 \leq k(r) \leq k_1 < \infty$ ならば，$a(r) \geq \sqrt{k_0}$.

3) 2) の条件がみたされ，$k(r)$ が非増加ならば，$a(r)$ も非増加．

4) 2) の条件がみたされ，$\int^\infty (k(r) - k_0)\,dr < \infty$ ならば，$\int^\infty (a(r) - \sqrt{k_0})\,dr < \infty$.

5) 2) の条件がみたされ，$\int^\infty r(k(r) - k_0)\,dr < \infty$ ならば，
$\int^\infty r(a(r) - \sqrt{k_0})\,dr < \infty$.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

証明. 1) $y_0(r)=r$, $y_1(r)=(1/\sqrt{k_1})\sinh\sqrt{k_1}\,r$ とおけば，これらはそれぞれ $k(r)\equiv 0$, $k(r)\equiv k_1$ に対する (2) の解．従って

$$y_1(r)=r+\int_0^r (r-s)\,k_1\,y_1(s)\,ds$$

をみたす．$y(r)$ は

$$y(r)=r+\int_0^r (r-s)\,k(s)\,y(s)\,ds$$

をみたし，それぞれの解は $y_1^{(0)}(r)\equiv y^{(0)}(r)\equiv 0$ から出発する逐次近似で求められるから，比較定理がなりたち，$y(r)\le y_1(r)$.
従って，$y_1'(r)=1+\int_0^r k_1\,y_1(s)\,ds$ ， $y'(r)=1+\int_0^r k(s)y(s)\,ds$

に注意して，$y'(r)\le y_1'(r)$．明らかに $y(r)\ge r=y_0(r)$, $y'(r)\ge 1=y_0'(r)$ だから，これより，

$$\frac{y_0'(r)}{y_1(r)}\le\frac{y'(r)}{y(r)}\le\frac{y_1'(r)}{y_0(r)}.$$

両辺の $r\downarrow 0$ のときの状況を計算して 1) が得られる．
2) 補題1より殆んど明らかだが，一般的には $-k(r)$ を平均曲率の下限にもつ多様体の存在定理が必要なので，一応解析的な証明を与える． $a(r)$ は方程式

$$(4)\qquad a'(r)=k(r)-a(r)^2\ ,\qquad a(0+)=\infty,$$

をみたす． $a(r)$ が $0<a_0<\sqrt{k_0}$ をとるとして，初めて $a(r)=a_0$ となる時刻を r_0 とすれば，$a'(r_0)\le 0$．しかし，このとき (4) より $a'(r_0)\ge k_0-a_0^2>0$ となり矛盾を生ずる．
3) $k(r)>a(r)^2$ となる r があれば，ある $r_0>0$ があって，$a'(r_0)\le 0$, $k(r_0)-a(r_0)^2>0$ となり矛盾を生ずる．
4) $a_0(r)=\sqrt{k_0}\coth\sqrt{k_0}\,r$ とおけば，これは $a_0'(r)=k_0-a_0(r)^2$ をみたす．従って (4) との差をとれば，$\tilde{a}(r)\equiv a(r)-a_0(r)$ が

$$\tilde{a}'(r)=(k-k_0)(r)-(a(r)+a_0(r))\,\tilde{a}(r)$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

2)より $a(r),\ a_0(r) \geqq \sqrt{k_0}$ だから,

$$(5)\qquad \tilde{a}(r) = \int_{r_0}^{r} e^{-\int_s^r (a(u)+a_0(u))du} (k-k_0)(s)\,ds + \tilde{a}(r_0)\, e^{-\int_{r_0}^{r}(a(s)+a_0(s))ds}$$

$$\leq \int_{r_0}^{r} (k-k_0)(s)\, e^{-2\sqrt{k_0}(r-s)} ds + \tilde{a}(r_0)\, e^{-2\sqrt{k_0}(r-r_0)}.$$

$$\therefore \int_{r_0}^{\infty} \tilde{a}(r)\,dr \leq \int_{r_0}^{r} (k-k_0)(s) \int_s^{\infty} e^{-2\sqrt{k_0}(r-s)} dr + \tilde{a}(r_0)\int_{r_0}^{\infty} e^{-2\sqrt{k_0}(r-r_0)} dr$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{k_0}} \int_{r_0}^{\infty} (k-k_0)(s)\,ds + \frac{\tilde{a}(r_0)}{2\sqrt{k_0}} < \infty.$$

従って, $a_0(r) - \sqrt{k_0} = O(e^{-2\sqrt{k_0}\,r})$, $r\to\infty$, に注意して,

$$\int^{\infty} (a(r) - \sqrt{k_0})\,dr = \int^{\infty} \tilde{a}(r)\,dr + \int^{\infty} (a_0(r) - \sqrt{k_0})\,dr < \infty.$$

5) (5)より

$$\int_{r_0}^{\infty} r\,\tilde{a}(r)\,dr \leq \int_{r_0}^{\infty} (k-k_0)(s)\, e^{2\sqrt{k_0}\,s} \int_s^{\infty} r\, e^{-2\sqrt{k_0}\,r} dr + \tilde{a}(r_0)\int_{r_0}^{\infty} r\, e^{-2\sqrt{k_0}(r-r_0)} dr$$

$$= \int_{r_0}^{\infty} (k-k_0)(s)\left(\frac{s}{2\sqrt{k_0}} + \frac{1}{(2\sqrt{k_0})^2}\right) ds + \tilde{a}(r_0)\left(\frac{r_0}{2\sqrt{k_0}} + \frac{1}{(2\sqrt{k_0})^2}\right) < \infty.$$

従って 4)と同様に 5)の結論を得る. (証明終)

系. $y(r)$ を (2)の解とし, $b_1(r) = (d-1)\,y'(r)/2y(r)$ とする. このとき, 仮定 (B.1) がみたされれば, $b_1(r)$ は $b_0 = (d-1)\sqrt{k_0}/2$ とするときの (A.1), 及び (A.2) をみたし, $b_1(r) = (d-1)/2r + O(r)$, $r\downarrow 0$. 更に, (B.2) [(B.2)′] がみたされれば, $b_1(r)$ は (A.3) [(A.3)′] をみたす.

証明は補題 2 及び $k(r)$ の定義より明らか.

さて, M上の Brown 運動 $X = (x(t), P_x)$ を, 点 $x_0 \in M$ を

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

中心とする極座標で $x(t)=(r(t),\theta_1(t),\theta_2(t),\cdots,\theta_{d-1}(t))$ と表わせば，今節の初めの Δ の形より，これらは d 次元 Brown 運動 $\beta(t)=(\beta_0(t),\beta_1(t),\cdots,\beta_{d-1}(t))$ に関する確率微分方程式

$$(6)\quad \begin{cases} dr(t) = d\beta_0(t) + b(r(t),\theta(t))\,dt \\ d\theta_i(t) = \sum_{j=1}^{d-1} \sigma_{ij}(r(t),\theta(t))\,d\beta_j(t) + \frac{1}{2} P_i(r(t),\theta(t))\,dt, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1\le i\le d-1, \\ r(0)=r_0, \quad \theta_i(0)=\theta_{0i}, \end{cases}$$

の解と考えられる．ここで，$b(r,\theta)=((1/2\sqrt{g})\,\partial\sqrt{g}/\partial r)(r,\theta)$，$(\sigma_{ij})\,{}^t(\sigma_{ij})=(P_{ij})$ である．

$b_0(r)=(d-1)\sqrt{k_0}\coth\sqrt{k_0}\,r/2$，$b_1(r)$ を補題2の系のものとすれば，補題1より，$b_0(r)\le b(r,\theta)\le b_1(r)$．従って，

$$(7)\quad dr_i(t) = d\beta_0(t) + b_i(r_i(t))\,dt, \qquad r_i(0)=r_0,\ i=0,1,$$

の解を $r_i(t)$ とすれば，池田，渡辺[4]の比較定理より

$$r_0(t) \le r(t) \le r_1(t), \qquad \text{a.s.}$$

これより $r(t)$ も 0 に到達しないことがわかる．

さて，求める分枝 Brown 運動は，独立な d 次元 Brown 運動 $\beta^{(1)}(t)$，$\beta^{(2)}(t)$，$\cdots$ に対する (6) の解を指数分布でもって，つなげることによって実現出来るから，同じ操作を (7) の解について行って出来る一次元分枝拡散過程との比較ができる．即ち，上の操作でできる分枝過程をそれぞれ，$\mathfrak{X}(t)=[(r^1(t),\theta^1(t)),\cdots,(r^{z_t}(t),\theta^{z_t}(t))]$，$\mathfrak{r}_0(t)=[r_0^1(t),\cdots,r_0^{z_t}(t)]$，$\mathfrak{r}_1(t)=[r_1^1(t),\cdots,r_1^{z_t}(t)]$ とおけば，

$$(8)\qquad r_0^j(t) \le r^j(t) \le r_1^j(t), \qquad j=1,2,\cdots,z_t,$$

となり，更に $\mathfrak{r}_i(t)$ は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}u + b_i(r)\frac{\partial}{\partial r}u + c(u^2-u)$$

を S-equation にもつ分枝拡散過程になる．補題2の系

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

より $b_i(r)$ が対応する (A.1)～(A.3)′ の仮定をみたすから，定理1,2と (8) より，定理3の主張はほゞ明らかであるが，念のために 1) だけを示す．

才一式を言うためには，必要ならば $g(x)\vee 0$ をとることにより，$g(x)\geq 0$ について言えばよいので，そう仮定する．

$$h_0(r) = \sup_{s\geq r,\,\theta\in S^{d-1}} e^{\alpha_\lambda s} g(s,\theta), \qquad g_0(r) = e^{-\alpha_\lambda r} h_0(r)$$

とすれば，$h_0(r)$ は非増加で，仮定よりある $g_\infty < \infty$ [$=0$] があって，$h_0(r) \longrightarrow g_\infty$，$r\to\infty$，i.e. $e^{\alpha_\lambda r} g_0(r) \to g_\infty$．従って定理1 1) より

$$\text{(9)} \qquad \lim_{t\to\infty} e^{(\lambda-c)t}\, \check{g}_0(r_0(t)) = g_\infty W_{0\lambda} < \infty \ [=0] \quad \text{a.s.}$$

一方，$g_0(r)$ も非増加で，$g(r,\theta) \leq e^{-\alpha_\lambda r} h_0(r) = g_0(r)$ だから (8) より

$$\check{g}(x(t)) \leq \check{g}_0(r(t)) \leq \check{g}_0(r_0(t)).$$

故に (9) より才一式を得る．

才二式．

$$h_1(r) = \inf_{s\geq r,\,\theta\in S^{d-1}} e^{\alpha_\lambda s} g(s,\theta), \qquad g_1(r) = e^{-\alpha_\lambda r} h_1(r)$$

とおけば，仮定よりある $g_\infty > 0$ [$=\infty$] があって，$e^{\alpha_\lambda r} g_1(r) \longrightarrow g_\infty$，$r\to\infty$．$0<g_\infty<\infty$ とする．このとき，ある $R>0$ があって，$g_1(r) \geq (g_\infty/2)\, g_\lambda(r)$，$r\geq R$，但し $g_\lambda(r) = e^{-\alpha_\lambda r}$．故に

$$\text{(10)} \quad g_1(r) \geq g_1(r) 1_{[0,R]}(r) + (g_\infty/2)\, g_\lambda(r) 1_{(R,\infty)}(r)$$
$$= \left(g_1(r) - (g_\infty/2) g_\lambda(r)\right) 1_{[0,R]}(r) + (g_\infty/2)\, g_\lambda(r)$$
$$\equiv g_1^1(r) + g_1^2(r).$$

$g_1^2(r)$ は単調減少で，$e^{\alpha_\lambda r} g_1^2(r) \longrightarrow g_\infty/2$ だから，λ が仮定をみたすとき 定理1 1) と定理2 1) と (8) より

$$\text{(11)} \quad \liminf_{t\to\infty} e^{(\lambda-c)t}\, \check{g}_1^2(r(t)) \geq \lim_{t\to\infty} e^{(\lambda-c)t}\, \check{g}_1^2(r_1(t)) = (g_\infty/2) W_{1\lambda} > 0.$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

更に $g_1^1(r)$ は compact な台をもつから、ある非増加で $e^{\alpha_\lambda r} g_1^3(r) \to 0$ となる函数があって、$|g_1^1(r)| \le g_1^3(r)$. 故に

$$\lim_{t\to\infty} e^{(\lambda-c)t}|\check{g}_1^1(r(t))| \le \lim_{t\to\infty} e^{(\lambda-c)t}\check{g}_1^3(r(t))$$

従って (8) と定理1 1) を使えば

$$(12)\qquad \lim_{t\to\infty} e^{(\lambda-c)t}|\check{g}_1^1(r(t))| \le \lim_{t\to\infty} e^{(\lambda-c)t}\check{g}_1^3(r_0(t)) = 0.$$

$g(r,\theta) \geqq e^{-\alpha_\lambda r}h_1(r) \geqq g_1(r)$ だから、$\check{g}(x(t)) \geqq \check{g}_1(r(t))$.
これと (10)〜(12) より結論を得る.

$g_\infty = \infty$ のときは、$L_n \uparrow \infty$ に対して、$R_n \uparrow \infty$ があって $g_1(r) \geqq L_n g_\lambda(r)$, $r \geqq R_n$ であることに注意して同じ議論をくり返せばよい.

4、補足　1° (B.1) を仮定し, 簡単のために $0<\lambda<\lambda_0$ とする. このとき, 各 $x_0 \in M$ に対し, 補題1が成立つ. 一方 $b_0(r) = (d-1)(\sqrt{k_0}/2)\coth\sqrt{k_0}\,r$ に対し,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\varphi + b_0(r)\frac{\partial}{\partial r}\varphi = -\lambda\varphi, \qquad \varphi(0)=1,$$

の解 $\varphi_{0\lambda}(r)$ が存在して, 正で減少で, $\lim_{r\to\infty} e^{\alpha_\lambda r}\varphi_{0\lambda}(r) = \varphi_{0\lambda}^\infty > 0$ (例えば [5]). 従って, $\varphi_{x_0}(x) = \varphi_{0\lambda}(d(x_0,x))$ とすれば, 補題1と, Δ の形より,

$$(13)\qquad \frac{1}{2}\Delta\varphi_{x_0} + \lambda\varphi_{x_0} \leqq 0, \qquad \varphi_{x_0}(x_0) = 1.$$

これより, $e^{(\lambda-c)t}\check{\varphi}_{x_0}(x(t))$ は非負 supermartingale になるから, 非負確率変数 $W_\lambda(x_0)$ があって

$$\lim_{t\to\infty} e^{(\lambda-c)t}\check{\varphi}_{x_0}(x(t)) = W_\lambda(x_0).$$

更に (B.2) を仮定して, $\alpha_\lambda^2 < 2c$ とすれば, $W_\lambda(x_0) > 0$, a.s. しかしこの $\{W_\lambda(x_0)\}$ がどんなものか今の所解らない.

2° 特に定負曲率の場合は (13) は等号になり,

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$\varphi_{x_0}(x)$ は $(1/2)\Delta+\lambda$ に関する調和函数になる。これが[2][6]で求められているMartin境界のどの部分に当っているかも，今の所解らない。

3° (B.1)から補題1の左側の評価が出，従って[5]の計算を用いれば，Δ の spectre が $-b_0^2$ より小さいというMcKean[7]の結果がでる。更に(B.2)を仮定すれば，$-b_0^2$ 自身も spectre である。更に $-b_0^2$ は連続spectreであることが予想されるが，未だ証明はない。

4° (B.1)の仮定を緩めて，曲率が非正で，遠方で $-k_0$ に，ある程度速い速度で近づくことだけを仮定することが考えられる。このとき，Δ の spectre は一般には $-b_0^2$ よりも大きい所にも現われるが，それらは離散であり，従ってそれら以外の $0<\lambda<\lambda_0$ に対し，$e^{\alpha_\lambda r}\varphi_\lambda(r)\to\varphi_\lambda^\infty\neq 0$，となることが予想される。この事実の証明及び分枝過程への反映も未だ解らない。

文献

[1] Bishop, R.L. & R.J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Acad. Press, 1964.

[2] Dynkin, E.B., *Brownian motion in certain symmetric spaces and nonnegative eigenfunctions of the Laplace Beltrami operator*, A.M.S. Transl. 72, 203–228, 1968.

[3] 池田，長沢，渡辺, *Branching Markov processes, I, II, III*, J. Kyoto Univ., 8 (1968), 233–278; 8 (1968), 365–410; 9 (1969), 95–160.

[4] 池田，渡辺, *A comparison theorem for solutions of stochastic differential equations*, to appear in Osaka Math. J.

[5] 影山，小倉, *On a limit theorem for a supercritical branching diffusion process*, in preparation.

[6] Karpelevič, F.I., *Non-negative eigenfunctions of the Beltrami-Laplace operator on symmetric spaces of non-positive curvature*, Soviet Math. Dokl. 4 (1963), 1180–1182.

[7] McKean, H.P., *An upper bound to the spectrum of Δ on a manifold of negative curvature*, J. Diff. Geometry, 4 (1970), 359–366.

[8] 渡辺, *On the branching process for Brownian particles with absorbing boundary*, J. Math. Kyoto Univ., 4 (1965), 385–398.

[9] 渡辺, *Limit theorem for a class of branching processes*, Markov processes and Potential Theory, 205–232, Wiley, 1967.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

MARKOV RANDOM FIELDS and GENERALIZED POTENTIAL THEORY

H. Künsch

I. Introduction

Spitzer [3] and Williams [4] discovered a connection between some Gaussian Markov random fields with discrete parameter and a random walk on the parameter space. They used identities of the potential theory of the random walk for the proof of properties of the random field. However, in doing so, they don't cover all cases of Gaussian Markov fields

In this paper, we take an opposite point of view. We start with an arbitrary Gaussian Markov field with discrete parameter and show that there exist functions satisfying the identities of discrete potential theory, although they are not defined in general with the help of a substochastic kernel. In this sense, we generalize discrete potential theory.

Here, we emphasize this generalization of potential theory. We give a theorem concerning the Dirichlet problem (th. 3.1) and define and show the elementary properties of potentials (th. 3.2 and 3.3). For applications of this to the theory of Markov fields, see our paper [1], where also the proofs are given with more details.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

II. Definitions

A random field is a stochastic process with a general parameter set T (usually interpreted as space). We deal with the discrete case, so we suppose T to be countable. In T we have no time direction for the definition of Markovity, but we suppose that there exists a neighbourhood relation $\gamma : T \times T \longrightarrow \{0,1\}$ such that $\forall t \ \gamma(t,t) = 0$ and $\gamma(t,s) = 1$ only for finitely many s and $\forall t \forall s \ \gamma(t,s) = \gamma(s,t)$. The boundary of a $D \subset T$ is then defined by $\partial D := \{ s \notin D \mid \exists\, t \in D, \gamma(t,s) = 1 \}$

Now, let $X(t)$, $t \in T$ be a Gaussian random field with $EX(t) \equiv 0$. Then X has the Markov property with respect to a $D \subset T$ iff
$\forall t \in D \quad E(X(t) \mid X(s), s \notin D) = E(X(t) \mid X(s), s \in \partial D)$
X is <u>Markov</u> iff it has the Markov property w. r. to all finite $C \subset T$.

For any $D \subset T$ define $H(D) := \overline{\text{lin}}\{X(t), t \in D\}$ (closure in $\mathbb{L}_2(dP)$), and let $H_\infty = \bigcap_{C \text{ finite}} H(C^c)$.
X is <u>regular</u> $:\Longleftrightarrow H_\infty = \{0\}$
X is <u>singular</u> $:\Longleftrightarrow H_\infty = H(T)$
The following lemma is standard

<u>Lemma 2.1</u>: Any $X(t)$, $t \in T$, has a decomposition $X = Y + Z$ with Y and Z independent, Y singular and Z regular

<u>Proof</u>: Put $Y(t) := \pi_\infty X(t)$, where π_∞ = orth. projection on H_∞.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

III. Generalized potential theory

Let $X(t)$, $t \in T$, be a random field, Markov w.r. to all one-point sets $\{t\}$, i.e. $\exists\, a(t,s)$ s.t.

$$E(X(t) \mid X(s),\ s \neq t) = \sum_{s \in \partial t} a(t,s)\, X(s) \qquad (1)$$

We put $a(t,s) = 0$ if $s \notin \partial t$, so the summation in (1) can be done over T. Spitzer and Williams treated the case, when $a(t,s)$ is a substochastic kernel. We treat here the general case.

(1) can be written using the covariance $R(t,s) = EX(t)X(s)$, since the conditional expectation is an orthogonal projection:

$$R(t,r) - \sum_s a(t,s)\, R(s,r) = c(t)\, \delta(t,s) \qquad (2)$$

for some nonnegative $c(t)$ ($c(t)$ is the error of interpolation).

Here the connection with potential theory becomes clear: If $a(t,s)$ is substochastic, then (2) is just the equation for the Green function.

By (2): $E\{(X(t) - \sum a(t,r)X(r))(X(s) - \sum a(s,q)X(q))\} =$

$$= a(s,t)\, c(t) = a(t,s)\, c(s) \qquad (3)$$

<u>Assumption</u>: $c(t) > 0$ $\forall t$ (see [1] for the case, when $c(t) = 0$ for some t).

The following lemma is basic

<u>Lemma 3.1</u> For any finite C, $(\delta(t,s) - a(t,s))_{t,s \in C}$ has a matrix inverse.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

Proof: Let $R_C(t,s) :=$
$= E\{[X(t) - E(X(t)\,|\,X(r), r\in\partial C)]\cdot[X(s) - E(X(s)\,|\,X(r), r\in\partial C)]\}$.
Then by the properties of conditional expectation and by (2), (3): $\sum_{s\in C}\frac{R_C(t,s)}{c(s)}a(s,q) = \frac{R_C(t,q)}{c(q)} - \delta(t,q)$ $t,q\in C$

q. e. d.

Definition: $g_C(t,s) := [\delta(r,q) - a(r,q)_{r,q\in C}]^{-1}(t,s)$ $t,s\in C$

$h_C(t,s) := \sum_{r\in C} g_C(t,r)a(r,s)$ $t\in C,\ s\notin C$

A function $f: D\cup\partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ is harmonic in D iff $\forall t\in D$: $f(t) = \sum a(t,s)f(s)$
Given a function $f_0: \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$, then f is called the solution of the Dirichlet problem with boundary values f_0 iff f is harmonic in D and $f(t) = f_0(t)$ $\forall t\in\partial D$.

Theorem 3.1. For any finite C, the Dirichlet problem (with arbitrary boundary values) has a unique solution.
Proof: Uniqueness follows from the fact, that the matrix $\delta(t,s) - a(t,s)_{t,s\in C}$ is not singular.
From the definition of $g_C(t,s)$ and $h_C(t,s)$, we get easily $h_C(t,s) = a(t,s) + \sum_{r\in C} a(t,r)h_C(r,s)$
This in turn implies, that
$f(t) = \sum_{s\in\partial D} h_C(t,s)f_0(s)$, $t\in D$; $f(t) = f_0(t)$, $t\in\partial D$
is a solution of the Dirichlet problem.

q. e. d.

Now, we want to define potentials. For this, we prove Lemma 3.2: $\lim_{C\uparrow T} g_C(t,s)$ exists.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

<u>Proof</u>: Let $X = Y + Z$ be the decomposition in singular and regular parts.
Then $\lim_{C \uparrow T} E(Z(t) \mid Z(r), r \notin C) = 0$ in $\mathbb{L}_2$.
For $s \neq t$ we have: $Y(s)$ and $Z(s)$ are in $H(\{t\}^c)$.
Together with independence of Y and Z, this implies, that Y and Z are solutions of (1).
With the help of theorem 3.1, we can show that $E(Z(t) \mid Z(s), s \notin C) = \sum h_c(t,s) Z(s)$, i.e. Z is Markov.
Then out of the proof of lemma 3.1
$$E\{[Z(t) - E(Z(t) \mid Z(r), r \notin C)][Z(s) - E(Z(s) \mid Z(r), r \notin C]\} = g_c(t,s)c(s)$$
This converges to $EZ(t)Z(s)$ as $C \uparrow T$

q. e. d.

<u>Definition</u>: $g(t,s) := \lim_{C \uparrow T} g_C(t,s)$ (<u>Green function</u>)
A function $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ with $\sum_s |\varphi(s)| \left(\frac{g(s,s)}{c(s)}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ is called a <u>charge</u>, and
$p(t) := \sum_s g(t,s)\varphi(s)$ is the <u>potential with charge</u> φ

Remark: Out of Schwartz-inequality we get
$$g(t,s)^2 \leq g(t,t)\, g(s,s) \frac{c(t)}{c(s)}$$

<u>Theorem 3.2</u>: If p is a potential, then $p(t) - \sum_s a(t,s)p(s)$ is its charge.
<u>Proof</u>: Since Z is a solution of (1), we get after a division of (2) by $c(r)$
$$g(t,r) - \sum_s a(t,s)\, g(s,r) = \delta(t,r)$$
This implies the theorem.

q. e. d.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

<u>Theorem 3.3</u>: If f satisfies $f(t)-\sum_s a(t,s)f(s)=\varphi(t)$ with $\sum_s |\varphi(s)|\left(\frac{g(s,s)}{c(s)}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$, then $f(t)=\sum_s g(t,s)\varphi(s)+h(t)$ with h a harmonic function. h is given by $h(t)=\lim_{C\uparrow T}\sum_{s\notin C} h_C(t,s)f(s)$.

<u>Proof</u>: It is obvious, that $f(t)-\sum_s g(t,s)\varphi(s)$ is harmonic (because of theorem 3.2).
Uniqueness of the solution of the Dirichlet problem shows, that $h(t)=\sum_s h_C(t,s)h(s)$.
Now, $E(Z(t)\mid Z(s), s\notin C)=\sum h_C(t,s)Z(s)$ implies

$$g(t,r)-\sum_s h_C(t,s)g(s,r)=\begin{cases}0 & r\notin C,\ t\in C\\ g_C(t,r) & r\in C,\ t\in C\end{cases}$$

Therefore $\sum_s h_C(t,s)\sum_r g(s,r)\varphi(r)=$
$=\sum_r g(t,r)\varphi(r)-\sum_{r\in C} g_C(t,r)\varphi(r)$.
But $g_C(t,r)\longrightarrow g(t,r)$ $\forall t$ $\forall r$ as $C\uparrow T$.
Furthermore $|g(t,r)-g_C(t,r)|\le\frac{1}{c(r)}(|g(t,r)|c(r)+$
$+|g_C(t,r)|c(r))\le g(t,t)^{\frac{1}{2}}g(r,r)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{c(t)}{c(r)}\right)^{\frac{1}{2}}+g_C(t,t)^{\frac{1}{2}}g_C(r,r)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{c(t)}{c(r)}\right)^{\frac{1}{2}}\le$
$\le 2g(t,t)^{\frac{1}{2}}g(r,r)^{\frac{1}{2}}\frac{c(t)^{\frac{1}{2}}}{c(r)^{\frac{1}{2}}}$.

Therefore: $\sum_s h_C(t,s)\sum_r g(s,r)\varphi(r)\longrightarrow 0$ as $C\uparrow T$.

q. e. d.

<u>Corollary 3.1</u>: A potential p satisfies $\lim_{C\uparrow T}\sum_s h_C(t,s)p(s)=0$.

We leave it to the interested reader, to develop this theory further. In the next chapter, we show, that this theory is really a non trivial extension, at least in the homogeneous case.

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

IV. Existence theorems

If $T = \mathbb{Z}^\nu$ then we call a field homogeneous if the covariance is translation invariant.

Theorem 4.1: There exists a homogeneous solution of (1) with $c(t) > 0 \ \forall t$ iff
$a(t,s) = a(t-s) = a(s-t)$ and
$P(x) := 1 - \sum a(k) e^{ikx} \geq 0 \quad \int_{[-\pi,\pi]^\nu} P(x)^{-1} dx < \infty$.
Proof: see Rozanov [2]

Theorem 4.2: If $a(t,s)$, $c(t)$, with $c(t) > 0 \ \forall t$, satisfy (3) and $\sum_{n=0}^{\infty} b^n(t,s) < \infty$ where $b(t,s) = |a(t,s)|$, $b^{n+1}(t,s) = \sum_r b^n(t,r)\, b(r,s)$, then there exists a solution of (1).
Proof: see Künsch [1].

Theorem 2 gives only a trivial generalization of potential theory, since $g(t,s)$, $g_c(t,s)$ and $h_c(t,s)$ could also be defined with power series (like in standard potential theory), and all identities follow then from a change in the order of summation. However, theorem 1 indicates that the condition of theorem 2 are too strong.

V. Possible Generalizations

The Markov property of the field X comes from the finite range of the kernel $a(t,s)$. But in the case of a random field X, which satisfies $E(X(t) \mid X(s), s \neq t) = \sum_s a(t,s) X(s)$ with an infinite sum on the right-hand side,

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

we get problems with the change in the order of summation.

In the case of a continuous parameter, there are problems, what could be the corresponding to $\sum_s a(t,s)\,X(s)$. One can think about something like $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\partial C} a_k(t,s) \frac{\partial^k}{\partial n^k} X(s)\, dO(s)$ (remark, that a general neighbourhood relation γ corresponds to a multiple Markov property in the continuous case). Off course, such expressions are quite problematic.

There might be some chances in the case $T \subseteq \mathbb{R}$ and with a Markov property of finite order. An other possibility is eventually a generalization to vector valued fields (the $a(t,s)$ would become matrices)

VI References

[1] H. Künsch, Gaussian Markov random fields, to appear
[2] Yu. A. Rozanov, On Gaussian fields with given conditional distributions, TPA 12 (1967), 381-391
[3] F. Spitzer, in Ecole d'été de prob. St. Flour III, Lect. Notes in math. 390, Springer (1974), 179-85
[4] D. Williams, Basic theorems on harnesses, in Stochastic Analysis, ed. Kendall / Harding, 349-63

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

多パラメーター ブラウン運動の射影不変性

竹中茂夫 (名大・理)

$\{B(t); t \in \mathbb{R}\}$ を (パラメーターが一つの) ブラウン運動とする。 $Y(t)$ をこのブラウン運動より作られる, $(0,1)$ 上の normalize された Brownian Bridge とする。
すなわち

$$Y(t) = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\{B(t) - tB(1)\}$$

$0 < t < s < 1$ として, $Y(t)$ と $Y(s)$ の共分散を計算すると,

$$E(Y(s)Y(t)) = \sqrt{\frac{t(1-s)}{s(1-t)}}$$

である。 これが $(0,1\,;\,s,t)$ の非調和比であることより この非調和比を不変にする変換, すなわち射影変換群 $PGL(2,\mathbb{R})$, に対して, ブラウン運動がある種の射影不変性を持つことが推定できる。(P. Lévy [6])

この射影不変性は, 次のようにして説明された。(T. Hida, I. Kubo, H. Nomoto & H. Yoshizawa [4])

核型空間

$$\mathcal{D}_1 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^1), \tfrac{1}{x}f(-\tfrac{1}{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)\} \cap L^2(\mathbb{R}^1)$$

より作られる Gel'fand triplet

$$\mathcal{D}_1 \subset L^2(\mathbb{R}^1) \subset \mathcal{D}_1^*$$

を考え, $\mathcal{D}_1$ 上の正値函数 $e^{-\frac{1}{2}\|\cdot\|^2}$ より定義される white noise の空間 $(\mathcal{D}_1^*, \mu)$ を考える。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$SL(2,\mathbb{R}) \ni g = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ に対して，$\mathcal{D}_1$ 上の unitary 作用素

$$(T_g f)(x) = \frac{1}{(\beta x+\delta)} f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right),$$

を定義し，これより誘導される $(\mathcal{D}_1^*, \mu)$ 上の保測変換が，Lévy の射影不変性を説明する変換だというのである。

この文の目的は，この射影不変性を 多パラメーター のブラウン運動に拡張し，さらにこの群 $PGL(n+1,\mathbb{R})$ の由来が，ブラウン運動を積分表示するのに使われる white noise の空間の構造及びその積分表示自体の持つ不変性にあることを示すことにある。

§1. O^∞ とその部分群 F

$\mathcal{H}$ を実ヒルベルト空間 $\mathcal{D}$ をその核型部分空間とする。 この時

$$O^\infty = O(\mathcal{D}) = \{T ; \mathcal{H}\text{の直交変換}, T\mathcal{D} \subset \mathcal{D}\},$$

は作用素の積に対して群となる。 この節では，O^∞ の部分群として射影不変性をとらえる。

I. 1パラメーターの場合

ヒルベルト空間として $L^2(\mathbb{R}^1)$，核型部分空間として

$$\mathcal{D}_1 = \{f ; f \in C^\infty(\mathbb{R}^1), (1/x)f(-\tfrac{1}{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)\} \cap L^2(\mathbb{R}^1)$$

を取り，$O(\mathcal{D}_1)$ の 1パラメーター部分群を次のように取る.

(S) シフト ; $(S(t)f)(x) = f(x+t)$,

(D) ディレイション ; $(D(t)f)(x) = e^{t/2} f(e^t x)$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

さらに作用素

$$(\mathrm{J}) \ ; \ (Jf)(x) = \frac{1}{x} f\left(-\frac{1}{x}\right)$$

を考え、この作用素と $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{S})$ で作られる O^∞ の部分群を考える。

$$J^{-1} \mathcal{D}(t) J = \mathcal{D}(-t)$$

$$(\mathrm{K}) \ J^{-1} S(t) J = \frac{1}{1-tx} f\left(\frac{1}{1-tx}\right) \equiv K(t)$$

である。 これらの作用素 (S), $(\mathcal{D})$, (J) は、次の型の $SL(2, \mathbb{R})$ の $L^2(\mathbb{R}^1, dx)$ 上でのユニタリー表現を与える。

$$(T_g f)(x) = \frac{1}{\beta x + \delta} f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right).$$

この表現がすなわち P. Lévy のいう射影不変性であった。(c.f. 前書及び T. Hida, I. Kubo, H. Nomoto & H. Yoshizawa [4])。

Ⅱ. 一般化

Ⅰを一般化するためには、自然なやり方で作られた、微分作用素の作る半群から、例えば $PGL(n+1, \mathbb{R})$, $n \geq 1$, のユニタリー表現を作るという方向がいちばん易しいと思われる。 先ず (S) と $(\mathcal{D})$ については、次の型で問題はなかろう。

$$(\mathrm{S}) \ (S_i(t) f)(x) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \cdots x_n), \quad i = 1, \cdots n,$$

$$(\mathcal{D}) \ (\mathcal{D}_i(t) f)(x) = e^{t/2} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, e^{t} x_i, x_{i+1}, \cdots x_n), \ i = 1, \cdots n,$$

$$f \in L^2(\mathbb{R}^n, dx).$$

この時、残る問題は、作用素 (K) の一般化(又は (J))及び模型的な空間をどう取ればいいのか、ということである。
さて、Ⅰの場合をよく見れば、$\mathcal{D}_1$ は $\mathbb{R}^1$ 上の C^∞ 函数の作る

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

空間というよりも，むしろ実射影平面$\mathbb{P}^1$上のC^∞-函数の作る空間であり，作用素Jは，$\mathbb{P}^1$の local coordinate を，それとおになり$\mathbb{P}^1$の chart を作る coordinate へ変換する作用素より由来していると考えられる。　そこで我々も $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{P}^n - \{\infty\}$ と思い，(J)の一般化を考えると，

$$(\mathrm{J})\quad (J_i f)(x) = \left(\frac{1}{x_i}\right)^{n+1/2} f\left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots \frac{x_{i-1}}{x_i}, -\frac{1}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots \frac{x_n}{x_i}\right)$$

となる。　この時空間 $\mathcal{D}_n$ は，

$$\mathcal{D}_n = \{f\,;\, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ J_i f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ i = 1 \cdots n\} \cap L^2(\mathbb{R}^n),$$

とすればよい。　Iと同様にして，

$$(\mathrm{K})\quad K_i(t) = J_i^{-1} S_i(t) J_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$f(x) \longmapsto \frac{1}{1-tx_i} f\left(\frac{x_1}{1-tx_i}, \cdots \frac{x_{i-1}}{1-tx_i}, \frac{-1}{1-tx_i}, \frac{x_{i+1}}{1-tx_i}, \cdots \frac{x_n}{1-tx_i}\right),$$

$$(\mathrm{S}')\quad S_{ij}(t) = J_i^{-1} S_j(t) J_i \qquad i \neq j$$

$$f(x) \longmapsto f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + tx_j, x_{i+1}, \cdots, x_n).$$

これらの作用素 $\{D_i, S_i, K_i, S_{ij}\}$ は $SL(n+1,\mathbb{R})$ の $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ におけるユニタリー表現 $\{T_g, g \in SL(n+1,\mathbb{R})\}$ を定義する。　こうして我々は，射影不変性の一般化の候補として

$$O^\infty \supset \mathcal{F}_n \simeq \{T_g\,;\, g \in SL(n+1,\mathbb{R})\}$$

なる群を得た。

III. 以下の節で説明されるべき問題点

さて，IIで求めた $\mathcal{F}_n$ が我々の求めている射影不変性であると主張するためには，次にあげる問題点を明らかにしていかねばならない。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

一. 射影不変性は，ブラウン運動（又はその一般化）とどうむすびつくのか。

二. 射影不変性の必然性，又はなぜ $SL(n+1,\mathbb{R})$ のしかもその特定の表現 T_g が不変性を示す群としてあらわれるのか。

三. 1パラメーターの場合は，Wiener Integral を通して $\mathcal{O}^{\infty}$ が定義されたたが，我々の場合それに対応するものは何か。

上記問題点を解決するために，次節より，多パラメーターのブラウン運動及びその Ченцов による積分表示を導入，その構造をしるべる。

§2. Gaussian random measure と群の表現

$(E, \mathcal{B}, \mu)$ を σ-有限な測度空間とする。

$$\mathcal{B}_0 = \{B \in \mathcal{B}, \mu(B) < \infty\}$$

とおき，$\mathcal{B}_0$の元をパラメーターとするガウシアン システム

$$\mathcal{X} = \{X(B,\omega), B \in \mathcal{B}_0\}$$

が Gaussian random measure であるとは，次の 1), 2) を充すことである.

1) $X(B,\omega) \simeq N(0, \mu(B))$, $\forall B \in \mathcal{B}_0$.

2) $X(B_1 \cup B_2, \omega) = X(B_1,\omega) + X(B_2,\omega)$

ただし B_1 と B_2 は $\mathcal{B}_0$ に属する任意の互いに交わらない部分集合とする。

$\{X(B,\omega)\}$ の Ω-space として，$\mathbb{R}^E$ がとれることは既知とする。（構成については S. TAKENAKA [8] 参照）

$L^2(E,\mu)$ の元 f に対して通常の方向で測度 $\mathcal{X}$ による確率積分 $I(f)$ を対応させておく。

さて，E上に群Gが μ を quasi-invariant にするように作用していると考えよう。 $G \ni g$ の Gaussian random measure $\mathcal{X}$ に対する作用を Ω を $\mathbb{R}^E$ すなわち E

上の函数とみて，ω-wise に次のように定義する。

$$\tilde{X}^g(B,\omega) = X(B, g\cdot\omega),$$

$$X^g(B,\omega) = \tilde{I}^g\left(\sqrt{\frac{d\mu}{d\mu^g}}\chi_B, \omega\right).$$

ここに $\tilde{I}^g$ は $\tilde{X}^g$ に対応する積分，χ_B は B の特性函数。

こうすると，

$$\mathscr{X} \longmapsto \mathscr{X}^g = \{X^g(B,\omega)\}$$

は，$(E,\mathcal{B},\mu)$ 上の Gaussian random measure を，同じく $(E,\mathcal{B},\mu)$ 上の Gaussian random measure へ移す変換となっている。この作用により確率積分は次のように変換される，

$$I^g(f(x),\omega) = I\left(\sqrt{\frac{d\mu^{g^{-1}}}{d\mu}(x)}\, f(xg), \omega\right),$$

$$\forall f \in L^2(E,\mu).$$

すなわち，群の作用が確率積分を通じて，ユニタリー表現

$$f(x) \longmapsto (U_g f)(x) = \sqrt{\frac{d\mu^{g^{-1}}}{d\mu}(x)}\, f(xg),\quad g\in G,$$

としてあらわれてきたのである。

注意．この表現は，ユニタリー表現ではあるが，定義に群 G の位相に関する条件がふくまれていない，すなわち連続なユニタリー表現であるとは限らないことを注意しておく。

§3. 多パラメーターのブラウン運動とその積分による表示．

ブラウン運動の一般化をするに当って，我々の場合に必要なのは，その値の vector 化ではなく，パラメーターの vector 化である。例えば R^n をパラメーターとするブラウン運動は，そのパラメーターを R^n の任意の線型部分空間($\simeq R^k$)

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

に制限した時，その制限されたプロセスが$\mathbb{R}^n$をパラメーターとするブラウン運動になっているようなものを考えるのは自然である。　次に定義するものは，上記の条件をみたすものである。

定義（P. Lévy [6]）．$\{B(x,\omega);\ x\in\mathbb{R}^n\}$が$\mathbb{R}^n$をパラメーターとするブラウン運動であるとは，次の1)，2)を満足する時にいう。

1) $B(0)\equiv 0$,

2) $B(x)-B(y)\simeq N(0,|x-y|)$.

このLévyのブラウン運動が，次に示す積分による表示を持つことは良く知られている。（H.H. Ченцов [9]）

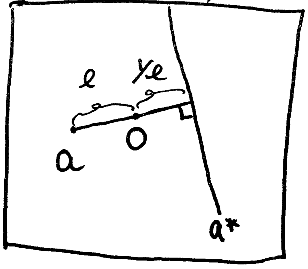
$$B(a)=\mathrm{p.v.}\left[\int_{\mathbb{P}^n(\tilde{a}^*)}-\int_{\mathbb{P}^n(\tilde{0}^*)}\right]\xi_x\sqrt{d\mathcal{4}(x)},$$

ここに右辺は，次のような意味をもつものとする。　先ず，

$$\mathcal{4}(x)=\frac{dx}{|x|^{n+1}}$$ は，$\mathbb{R}^n\simeq\mathbb{P}^n-\{\infty\}$上のmeasure

$\xi_x\sqrt{d\mathcal{4}(x)}$は，$(\mathbb{P}^n, d\mathcal{4})$に対応するGaussian random measure

$\mathbb{P}^n(\tilde{a}^*)$は　a^*を点aの射影反転とし，$\mathbb{P}^n-a^*$に0から連続的に定義されたオリエンテーションとする．　すなわち右辺は，a^*で分割される$\mathbb{R}^n$の原点から見て外側の領域に対する，Gaussian random measureの値である．　さて，$\mathbb{P}^n$を$\mathbb{P}^n$へ移す変換で，$a\leftrightarrow a^*$という構造を保つ変換は，$SL(n+1,\mathbb{R})$である．　すなわち$\mathbb{P}^n$上のwhite noise $\{\xi_x\sqrt{d\mathcal{4}(x)}\}$は，$SL(n+1,\mathbb{R})$-quasi-white noise



Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

と考えられるのである。 さて前節によれば，$SL(n+1,\mathbb{R})$の$L^2(\mathbb{P}^n,d\psi)$上定義された，ユニタリー表現 U_gが定義される。
さて，このユニタリー表現は，ブラウン運動の積分表示という構造より決定された表現であるので，この群こそ，ブラウン運動の射影不変性をいいあらわしているはずである。 一方，候補である表現 T_g とこの表現 U_g とをくらべてみると，この二つは，$SL(n+1,\mathbb{R})$の同値な表現ではあるが，T_g が $L^2(\mathbb{R}^n,dx)$，U_g が $L^2(\mathbb{P}^n,d\psi)$ でそれぞれ，realize されているので，直接に一方が他の一方を説明しているとはいえない。 我々としては，この二つの表現T_g とU_gを結びつける変換（intertwining operator）を見出せば充分であろう。

§4. 主定理

nが奇数の時，$L^2(\mathbb{R}^n,dx)$ と $L^2(\mathbb{P}^n,d\psi)$をむすぶユニタリー変換として，次のラドン変換はよく知られている，（Gel'fand 他［1］）.

定義． 任意の $f\in L^2(\mathbb{R}^n,dx)$ に対して

$$(Rf)(\eta)=\check{f}_p^{(m)}\left(\frac{\eta}{\|\eta\|},\frac{-1}{\|\eta\|}\right),\quad \eta\in\mathbb{R}^n-\{0\},$$

ここに

$$\check{f}_p^{(m)}=\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^m\check{f},$$

$$\check{f}(\xi,p)=\int_{\langle\xi,x\rangle=p}f(x)\,dx,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\ p\in\mathbb{R}.$$

R は $L^2(\mathbb{R}^n,dx)$から $L^2(\mathbb{R}^n,d\psi)$ へのユニタリーかつ onto な map である。 この変換Rを用いると，

主定理

$$RT_g=U_{\hat{g}}R,\quad \hat{g}={}^tg^{-1}.$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

ここで注目すべきことは、ラドン変換Rの中に$\langle \xi, x\rangle = p$という型で　$x \longleftrightarrow x^*$なる対応がふくまれているということである。　ちなみに

$$x^* = \{\xi ; \langle \xi, x\rangle = -1\}$$

である。

主定理もあわせて考えると、ラドン変換というものが、我々の望んでいるブラウン運動の構造に全く適合していることがわかる。

さて最後にT_gを$L^2(R^n, dx)$で作ったことの説明が、ウィーナー積分ともからんで、問題になるのであるが、次の確率積分

$$W(f, o) = I(Rf, o; \omega)$$

$$= \int Rf(x)\, \xi_x \sqrt{d\text{Ч}(x)} \quad , f \in L^2(R^n, dx)$$

を考えることによって、1-パラメーターの場合と全く同様に、理論が、展開できることが明らかである。

この文では、考え方のすじ道をのべるにとどめ、定理及び、種々の性質の証明さらには、厳密な定義さえはぶいた部分があるので、くわしくは著者の論文（S. Takenaka [8]）を参考にされるようおねがいします。

§5. 蛇足

A). この文の内容は、多パラメーターのブラウン運動のホワイトノイズによる積分表示としてのЧенцовの表示が、射影不変性と適合していることを示しているが、さらにこのЧенцовの表示の好ましい性質として次のようなことがわかっている。（McKean [7], Hida [2]）.

$M_n(t)$をLévyのM_t-process、すなわちR^n-パラメーターのブラウン運動の半径t中心Oの球面上での

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

平均とする,

$$M_n(t)=\frac{1}{|S(t)|}\int_{S(t)} B(A)\,dS(A).$$

$I(\cdot)$をЧенцовのホワイトノイズによる確率積分とし, $\tilde{P}(A)=P(A^t)\setminus P(O^t)$と略記すれば,

$$M_n(t)=\int_{S(t)} I(\tilde{P}(A^t))\,dS'(A),$$ dS'はdSのnormalizedしたもの.

$$=I\left(\int_{S(t)}\chi_{\tilde{P}(A^t)}(x)\,dS'(A)\right)$$

ここで,

$$F(x)=\int_{S(t)}\chi_{\tilde{P}(A^t)}(x)\,dS'(A)$$ とおくと

$$F(x)=\int_{\frac{1}{|x|t}}^{1}(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}dy$$ となる.

ここで, $$B_0(t)=I\left(\chi_{\mathbb{R}^n\setminus S(t)}(x)\right)$$

なるprocessを考えると, $t\geq 0$で1次元のブラウン運動となる。 これを考えに入れると定数をのぞいて,

$$M_n(t)\propto\int_0^t\left(\int_{\frac{u}{t}}^{1}(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}dy\right)dB_0(u).$$

これはまさに, n奇の時のM_t-processのカノニカル表現である。

B). Ченцовの積分表示で, 必ずしもガウス型でない他のホワイトノイズ(例えばポワソン型のホワイトノイ

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

ズ）を用いれば 多パラメーターの無限分解可能なプロセスの一つのクラスが定義でき（例えば，多パラメーター ポワソンプロセス），それらが $M(n)$（ユークリッド運動群）に対する不変性を持つことが容易にわかる。 これらのプロセスをブラウン運動とくらべながら調べるのは興味深いことと思われる。

Literatures

[1] Гельфанд,И.М., Граев, М.И. и Виленкин, Н.Я. : Обобщеные Функции вып 5, Фузматиз, М. (1962)

[2] Hida, T. : Canonical representations of Gaussian processes and their applications, Mem. of the college of Science, Univ. of Kyoto, Series A vol. XXXIII 1960

[3] 飛田武幸, ブラウン運動 岩波 (1975)

[4] Hida,T. Kubo,I., Nomoto,H. and Yoshizawa,H. ; On projective invariance of Brownian motion, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 4 (1968)

[5] 久保泉 ; 確率場の話題 Seminar on probability 26 (1967)

[6] Lévy,P. : Processus Stochastiques et Mouvement Brownien, Gauthier-Villars (1965)

[7] McKean Jr., H.P. : Brownian motion with several-dimensional time, Theory of Prob. Appl. 8 (1963)

[8] Takenaka, S. : On projective invariance of multi-parameter Brownian motion Nagoya Math. J. 67 (1977)

[9] Ченцов, Н. Н. : Многопараметрическое Броуновское движение Леви и обобщеиный белый шум, Теория вероятностей и ее применения, 2 (1957)

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

斜めの微分を零にする周期的境界条件

本尾 実

1 序

まず記号の準備として

$$D=\{z=(x^1,\cdots,x^N,y)\quad 0<y\}$$

をR^{N+1}の上半空間とし

$$D^a=\{0<y<a\}\qquad \bar{D}=\{0\leqq y\}$$

などとおく．以下 D, D^a, R^N 上の周期関数というときは，x^j 座標 $(j=1,2,\cdots N)$ に関して周期 2π の周期関数を意味することにする．

この報告では $\gamma^k(x)$ $(k=1,2,\cdots N)$ が $y=0$ 上の周期関数で

(1.1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\gamma^k_{x_k}(x)=0$

をみたすとき，$y=a$ 上の周期関数 f に対して，

(1.2) $\phi=f$,　$y=a$ 上

(1.3) $\Delta\phi=0$,　D^a 内

(1.4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\gamma^k(x)\phi_{x_k}+\phi_y=0$,　$y=0$ 上

をみたす周期関数ϕを求める問題を考える(註)．できるだけ一般な$\gamma^k(x)$に対し解を求めることが目標であったが，報告できる結果は中途半端である．即ち

$$\gamma^k(x)=\sum_p\lambda^k_p e^{ipx}\qquad p=(p_1\cdots p_N)\quad |p|^2=\sum|p_k|^2$$

と$\gamma^k(x)$をフーリエ展開したとき

$$\sum_p\sum_k|\lambda^k_p|^2(1+|p|)^{-1}<\infty$$

が成立する場合に解の存在が示せた（定理5.1）にすぎず，

(註) この解の存在とD上のマルコフ過程の存在との関係は[1]定理2.2参照．この定理は次元に関係なく成立する．

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

解の一意性については,
$$\sum_p \sum_k |\lambda_p^k| < \infty$$
の場合しか示すことができなかった(定理5.2)。

終りに条件(1.1)の背景について説明する. D内でブラウン運動し. そのグリーン関数が $y=0$ で境界条件(1.4)をみたすマルコフ過程を考える. $\gamma^k(x)$ は充分なめらかとし, f を y が有限な範囲に台を持つなめらかな周期関数とする. このとき. グリーン関数 $u = G_\lambda f$ $(\lambda > 0)$ も周期関数で
$$(1.5)\begin{cases} (\lambda - \Delta)u = f, & D \text{内} \\ \sum \gamma^k(x) u_{x_k} + u_y = 0, & y=0 \text{上} \end{cases}$$
をみたす. 周期性に注意して. グリーンの定理を適用すると,
$$\int_{\substack{y=a \\ 0\le x^i \le 2\pi}} u_y dx - \int_{\substack{y=0 \\ 0\le x^i\le 2\pi}} u_y dx = \int_{D^a, 0\le x^i \le 2\pi} \Delta u \, dz .$$
(1.5)を用いて変形すると.
$$\int_{\substack{y=a \\ 0\le x^i\le 2\pi}} u_y dx - \int_{\substack{y=0 \\ 0\le x^i\le 2\pi}} \sum \gamma^k u_{x_k} dx = \int_{D^a, 0\le x^i\le 2\pi} (\lambda u - f) dz$$
左辺第一項は $a \to \infty$ のとき 0 に近づく. 従って
$$\int_{\substack{y=0 \\ 0\le x^i\le 2\pi}} (\sum \gamma^k_{x_k}) u \, dx = -\int_{\substack{y=0 \\ 0\le x^i\le 2\pi}} \sum \gamma^k u_{x_k} dx = \int_{D, 0\le x^i\le 2\pi} (\lambda u - f) dz$$
f を動かすと. u の $y=0$ への制限は $y=0$ の連続周期関数の中で稠密なことが示せて. $\sum_k \gamma^k u_{x_k} = 0$ と
$$(1.6) \quad \lambda \int_{D, 0\le x^i\le 2\pi} G_\lambda f \, dz = \int_{D, 0\le x^i\le 2\pi} f \, dz$$
とは同値になる. 即ち, (1.1)は ルベーグ測度が対応するマルコフ過程の不変測度となることと同値な条件である.

$N=1$ のときは, (1.1)から $\gamma^1(x)$ は定数となり簡単な場合になる. ([1]参照)

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

2. フーリエ展開による問題の変形

$$\gamma^k(x)=\sum_p \lambda_p^k e^{ipx}$$
$$f(x)=\sum_p \beta_p e^{ipx} \qquad p=(p_1\cdots p_n),\ |p|^2=(\sum|p_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Phi(z)=\sum_p \alpha_p(y)e^{ipx}.$$

と§1の関数をフーリエ展開する。条件(1.1)は

$$(2.1)\qquad \sum_{k=1}^N \lambda_p^k p_k=0$$

となる。$\alpha_p(y)$ は Φ が D^a で調和であるから $\alpha_p=\alpha_p(0)$ とおいて,

$$(2.2)\qquad \alpha_p(y)=\frac{1}{\mathrm{sh}\,a|p|}(\alpha_p \mathrm{sh}(a-y)|p|+\beta_p \mathrm{sh}\,y|p|) \qquad (p\neq 0)$$

$$(2.3)\qquad \alpha_0(y)=\frac{1}{a}(\alpha_0(a-y)+\beta_0).$$

このとき境界条件(1.4)は

$$(2.4)\qquad \sum_{l+m=p}\sum_k \lambda_l^k \alpha_m m_k-\coth a|p|\cdot|p|\alpha_p=\sigma_p \qquad (p\neq 0)$$

$$(2.5)\qquad \alpha_0=\beta_0,$$

但し $\sigma_p=\dfrac{-|p|\beta_p}{\mathrm{sh}\,a|p|}$ $(p\neq 0)$ である。

又 γ^k, Φ, f は実関数であるから

$$(2.6)\qquad \lambda_{-p}^k=\overline{\lambda_p^k},\quad \alpha_{-p}=\overline{\alpha_p},\quad \beta_{-p}=\overline{\beta_p}.$$

α_0 は(2.4)式に影響しないことに注意して, $\{\lambda_p^k\}$, $\{\sigma_p\}_{p\neq 0}$ があたえられたとき, $\{\alpha_p\}_{p\neq 0}$ を(2.4)をみたすように求めることが問題となる。

$$l_j=\{\alpha=\{\alpha_p\}_{p\neq 0}\ \alpha_{-p}=\overline{\alpha_p},\ \sum|\alpha_p|^2|p|^j<\infty\}$$

$(j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ とし $\alpha\in l_j$ に対して $\|\alpha\|_j=\sum_p|\alpha_p|^2|p|^j$ とおく。

補助定理2.1 $\|\lambda\|_{-1}^*=\sum_p\sum_k|\lambda_p^k|^2(1+|p|)^{-1}<\infty$ のとき, $\alpha=\{\alpha_p\}_{p\neq 0}\in l_1$ に対し

$$(2.6)\qquad \sum_{l+m=p}\left|\sum_{k=1}^N \lambda_l^k\alpha_m m_k\right|\leqq \|\lambda\|_{-1}^*\|\alpha\|_1|p|(2+|p|)^{\frac{1}{2}} \quad \square$$

証明 $l+m=p$ のとき, (2.1)により

$$\sum_k \lambda_l^k\alpha_m m_k=\sum_k\lambda_l^k\alpha_m(p_k-l_k)=\sum_k\lambda_l^k\alpha_m p_k$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

従って
$$\sum_{\ell+m=p}\left|\sum_k \lambda_\ell^k \alpha_m m_k\right| \leqq |p| \sum_{\substack{\ell+m=p \\ m\neq 0}} \left(\sum_k |\lambda_\ell^k|^2\right)^{\frac{1}{2}} |\alpha_m|$$
$$\leqq |p| \sum_{m\neq 0} |\lambda_{p-m}|(1+|p-m|)^{\frac{-1}{2}} |\alpha_m||m|^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1+|p|+|m|}{|m|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\dfrac{1+|p|+|m|}{|m|} \leqq 2+|p|$ $(m\neq 0)$ とシュワルツの不等式から (2.6) を得る ⊔

今後

(2.7) $$\Lambda_p(\alpha) = \sum_{\ell+m=p}\sum_k \lambda_\ell^k \alpha_m m_k$$
$$N_p(\alpha) = \coth a|p| \cdot |p|\alpha_p$$

とおいて, $\sigma \in \ell_{-1}$ に対して

(2.8) $$\Lambda_p(\alpha) - N_p(\alpha) = \sigma_p \qquad (p\neq 0)$$

の解 $\alpha \in \ell_1$ を求める問題を考える. 補助定理 2.1 より (2.8) の左辺は意味をもつ.

3. $\sum_p \sum_k |\lambda_p^k| < \infty$ の場合

この節では

(3.1) $$\|\lambda\|' = \sum_p \sum_k |\lambda_p^k| < \infty$$

を仮定する.

<u>補助定理 3.1</u> (3.1) の下で, $\alpha, \beta \in \ell_1$ とすると

(3.2) $$\left|\sum_p \Lambda_p(\alpha)\bar{\beta}_p\right| \leqq \|\lambda\|^1 \|\alpha\|_1 \|\beta\|_1$$

(3.3) $$\sum_p \Lambda_p(\alpha)\bar{\beta}_p + \sum_p \bar{\alpha}_p \Lambda_p(\beta) = 0 \text{ .} \qquad ⊔$$

<u>証明</u> 補助定理 2.1 と同様 $\ell+m=p$ のとき
$$F_{\ell.m.p} \equiv \sum_k \lambda_\ell^k \alpha_m \beta_p m_k = \sum_k \lambda_\ell^k \alpha_m \beta_p p_k$$

従って $|F_{\ell.m.p}| \leqq \left(\sum_k |\lambda_\ell^k|\right)|\alpha_m||\beta_p||m|$, $\left(\sum_k \lambda_\ell^k\right)|\alpha_m||\beta_p||p|$

故に $|F_{\ell.m.p}| \leqq \left(\sum_k |\lambda_\ell^k|\right)|\alpha_m||\beta_b|(|m||p|)^{\frac{1}{2}}$
$$\sum_{\ell+m=p}|F_{\ell.m.p}| \leqq \sum_\ell \left(\sum_k |\lambda_\ell^k|\right) \sum_{p-m=\ell} |\alpha_m||m|^{\frac{1}{2}}|\beta_p||p|^{\frac{1}{2}}$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$\leqq \sum_{\ell}\sum_{k} |\lambda_\ell^k| \, \|\alpha\|_1 \|\beta\|_1 \quad .$$

(3.3) は $\alpha_p = 0$, $\beta_p = 0$ $|p| \geqq n$ のときには,

$$\sum_{\ell+m=p}\sum_{k} \lambda_\ell^k \alpha_m m_k \overline{\beta_p} = \sum_{\ell+m+p=0}\sum_{k} \lambda_\ell^k \alpha_m m_k \beta_p$$
$$= -\sum_{\ell+m+p=0}\sum_{k} \lambda_\ell^k \alpha_m \beta_p P_k$$
$$= -\sum_{\ell+p=m}\sum_{k} \lambda_\ell^k \beta_p P_k \overline{\alpha_m} \quad .$$

一般の $\alpha, \beta \in \ell_1$ に対しては,

$$\alpha_p(n) = \begin{cases} \alpha_p & |p| \leq n \\ 0 & |p| > n \end{cases} \qquad \beta_p(n) = \begin{cases} \beta_p & |p| \leq n \\ 0 & |p| > n \end{cases}$$

とおくと, (3.2) より

$$\left| \sum_p \Lambda_p(\alpha_p(n)) \overline{\beta_p}(n) - \sum_p \Lambda_p(\alpha) \overline{\beta_p} \right|$$
$$\leqq \|\lambda\|' \left(\|\alpha(n)-\alpha\|_1 \|\beta(n)\|_1 + \|\alpha\|_1 \|\beta(n)-\beta\|_1 \right)$$

等より $n \to \infty$ として (3.3) を得る. ◻

<u>補助定理 3.2</u> $\alpha \in \ell_1$ に対し $\Lambda(\alpha)$, $N(\alpha) \in \ell_{-1}$

且つ,

(3.4) $\|\Lambda(\alpha)\|_{-1} \leq \|\lambda\|' \|\alpha\|_1$

(3.5) $\|\alpha\|_1 \leqq \|N(\alpha)\|_{-1} \leqq \coth|a| \cdot \|\alpha\|_1$ ◻

<u>証明</u> (3.4) は (3.2) より明か. (3.5) は $\coth a|p| \leq \coth a$

$(p \neq 0)$ より定義から明かである. ◻

$\alpha \in \ell_j$, $\beta \in \ell_{-j}$ に対して $(\alpha, \beta) = \sum \alpha_p \overline{\beta_p}$ と定義する. (3.3) 及び $N(\alpha)$ の定義から

(3.6) $(\Lambda(\alpha), \beta) = -(\Lambda(\beta), \alpha) = -(\alpha, \Lambda(\beta))$

(3.7) $(N(\alpha), \beta) = (\alpha, N(\beta))$

<u>定理 3.3</u> (3.1) の下で, $\sigma \in \ell_{-1}$ に対して

(3.8) $\Lambda(\alpha) - N(\alpha) = \sigma$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

はl_1内に1つ且つ唯1つの解αを持ち

(3.9) $\|\alpha\|_1 \leqq \|\sigma\|_{-1}$ ⏌

証明 [(3.9)の証明と一意性]

$\alpha \in l_1$を解とすれば, $(\Lambda(\alpha),\alpha)-(N(\alpha),\alpha)=(\sigma,\alpha)$

(3.3)と(3.5)より $(\Lambda(\alpha),\alpha)=0$

$|(N(\alpha),\alpha)| = \sum_p \coth a|p|\cdot|p||\alpha_p|^2 \geqq \|\alpha\|_1^2$

従って $\|\alpha\|_1^2 \leqq |(\sigma,\alpha)|$ 即ち $\|\alpha\|_1 \leqq \|\sigma\|_{-1}$ を得る.

特に$\sigma=0$なら$\alpha=0$であるから解の一意性もわかる.

[$\{\Lambda(\alpha)-N(\alpha)\}_{\alpha\in l_1}$ は l_{-1}で稠密である.

何故なら $\beta\in l_1$に対して, $(\Lambda(\alpha)-N(\alpha),\beta)=0$ が,

任意の$\alpha\in l_1$に対して成立すると, (3.6), (3.7)より

$(\alpha, -\Lambda(\beta)-N(\beta))=0$, 即ち $-\Lambda(\beta)-N(\beta)=0$.

λ_p^kを$-\lambda_p^k$におきかえたときの解の一意性から $\beta=0$ を得る.

[解の存在] 任意の$\sigma\in l_1$に対し, $\alpha_n\in l_1$が存在して

$\sigma_n = \Lambda(\alpha_n)-N(\alpha_n)\in l_1$, $\sigma_n\to\sigma$ (l_{-1}). (3.9)より

$\|\alpha_n-\alpha_m\|_{+1} \leqq \|\sigma_n-\sigma_m\|_{-1}$, 従って $\alpha=\lim\alpha_n\in l_1$

が存在する. (3.4), (3.5)に注意して $\Lambda(\alpha)-N(\alpha)=\sigma$

を得る. ⏌

4. 収束定理と一般の場合の解の存在

此の節では主として

(4.1) $\|\lambda\|_{-1}^* = \sum_p\sum_k |\lambda_p^k|^2(1+|p|)^{-1} < \infty$

を仮定する.

補助定理4.1 (4.1)の下で, pを一つ定め,

(4.2) $\mu_m^k(p) = \frac{1}{2}(\lambda_{p+m}^k+\lambda_{p-m}^k)$, $\nu_m^k(p)=\frac{1}{2i}(\lambda_{p+m}^k-\lambda_{p-m}^k)$

$(m\neq 0)$ とおくと, $\mu^k(p)$, $\nu^k(p)\in l_{-1}$であり,

(4.3) $\lambda_{p+m}^k = \mu_m^k(p)+i\nu_m^k(p)$. ⏌

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

証明　(4.3) 及び $\mu_{-m}^{k}(p)=\overline{\mu}_{m}^{k}(p)$, $\nu_{-m}^{k}(p)=\overline{\nu}_{m}^{k}(p)$ は明か.

$$\sum_{m\neq 0}|\mu_m^k(p)|^2|m|^{-1}\leqq\frac{1}{2}\sum_{m\neq 0}(|\lambda_{p+m}^k|^2+|\lambda_{p-m}^k|^2)|m|^{-1}$$
$$\leqq\sum_{m\neq 0}|\lambda_{p+m}^k|^2(1+|p+m|)^{-1}\frac{1+|p|+|m|}{|m|}$$
$$\leqq\|\lambda\|_{-1}^{*}(2+|p|)\ ,$$

即ち $\mu^k(p)\in l_{-1}$. $\nu^k(p)$ についても同様である. □

定理 4.2　$\{\lambda_p^k\}$ は (4.1), $\{\lambda_p^k(n)\}$ $(n=1,2\cdots)$ は (3.1) をみたし, $\|\lambda(n)-\lambda\|_{-1}^{*}=\sum_{p}\sum_{k}|\lambda_p^k(n)-\lambda_p^k|^2(1+|p|)^{-1}\to 0$ $(n\to\infty)$ と仮定する. $\sigma\in l_{-1}$ を定めて, $\alpha(n)\in l_1$ を σ と $\{\lambda_p^k(n)\}$ に対応する (3.8) の解とする.

このとき, 適当な部分列 $\{n_j\}$ が存在して, $\alpha(n_j)$ は或る $\alpha\in l_1$ に l_1 で弱収束する. 又この α は σ と $\{\lambda_p^k\}$ に対応する (2.8) 即ち, $\Lambda_p(\alpha)-N_p(\alpha)=\sigma_p$ の解である. □

証明　(3.9) より $\|\alpha(n)\|_1\leqq\|\sigma\|_{-1}$, 従って部分列 $\{n_j\}$ と $\alpha\in l_1$ が存在して $\alpha(n_j)\to\alpha$ (l_1 で弱収束) とできる.　補助定理 2.1 と同様に変形して,

$$\Lambda_p(\alpha)-\Lambda_p^{(n_j)}(\alpha(n_j))=\sum_{l+m=p}\sum_{k}(\lambda_l^k-\lambda_l^k(n_j))\alpha_m^{(n_j)}P_k$$
$$+\sum_{l+m=p}\sum_{k}\lambda_l^k(\alpha_m-\alpha_m(n_j))P_k$$

$$|\text{右辺第一項}|\leqq|p|(2+|p|)^{\frac{1}{2}}\|\lambda(n_j)-\lambda\|_{-1}^{*}\|\alpha(n_j)\|$$
$\to 0$ $(n_j\to\infty)$ は (2.6) よりわかる. 又補助定理 4.1 に注意して

$$|\text{右辺第二項}|\leqq|p|\,|\{(\mu^k(p),\alpha-\alpha(n_j))+i(\nu^k(p),\alpha-\alpha(n_j))\}|$$
$\to 0$ $(n_j\to\infty)$.

$$N_p(\alpha(n_j))=\coth a|p|\cdot|p|\alpha_p(n_j)\to N_p(\alpha)$$
は明かであるから α は (2.8) の解になる. □

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

<u>系 4.3</u> $\{\lambda_p^k(n)\}, \{\lambda_p^k\}$, σ, $\alpha(n)$ は定理4.2の通りとする。特に$\{\lambda_p^k\}$が(3.1)をみたすときには、$\alpha(n)$ は σ と$\{\lambda_p^k\}$に対する(2.8)の解αにl_1で強収束する。

<u>証明</u> 定理4.2で得られたαは(2.8)の唯一つの解である(定理3.3)から、$\alpha(n)\to\alpha$ (l_1で弱収束)がわかる。他方 $(\Lambda(\alpha),\alpha)=0$ より $-(N(\alpha),\alpha)=(\sigma,\alpha)$。同様 $-(N(\alpha(n)),\alpha(n))=(\sigma,\alpha(n))$。従って

$$(N(\alpha(n)),\alpha(n))=\sum_p \coth a|p|\cdot|p||\alpha_p(n)|^2$$
$$\to (N(\alpha),\alpha)=\sum_p \coth a|p|\cdot|p||\alpha_p|^2$$

$\lim_{|p|\to\infty}\coth a|p|=1$, $\alpha_p(n)\to\alpha_p$ $(n\to\infty)$ より

$\|\alpha(n)\|_1^2\to\|\alpha\|_1^2$ 即ち $\alpha(n)\to\alpha$ (l_1内で強収束)を得る。

<u>5. 最初の境界問題への書き直し</u>

此の節では、今までの結果を§1の境界問題に対して見易い形に書き直す。

[I] $\gamma^k(z)$ を D で周期的且つ調和で、$y\to\infty$のとき有界とし

(5.1) $\displaystyle\sum_{k=1}^N \gamma^k_{x_k}(z)=0$ (D内)

(5.2) $\displaystyle\int_{D^a,\,0\le x^i\le 2\pi}\sum_k \gamma^k(z)^2\,dz<\infty$ (任意の$a>0$に対し)

と仮定する。

このとき $\gamma^k(z)$ は

$$\gamma^k(z)=\sum_p \lambda_p^k e^{-|p|y}e^{ipx}$$

と展開できて、(5.1) (5.2) は夫々 (2.1), (4.1) 即ち

$$\sum_{k=1}^N \lambda_p^k p_k=0 \quad , \quad \sum_p\sum_k|\lambda_p^k|^2(1+|p|)^{-1}<\infty$$

と書き直せる。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

[II] f を R^n 上の連続周期関数とし

$$f(x) = \sum_p \beta_p e^{ipx}$$

(5.4) $$\sigma_p = \frac{-|p|\beta_p}{\mathrm{sh}\, a|p|}$$

とおく。

[III] $\alpha = \{\alpha_p\}_{p\neq 0} \in \ell_1$ を，σ と $\{\lambda^k_p\}$ に対する (2.8) 即ち，$\Lambda_p(\alpha) - N_p(\alpha) = \sigma_p$ の解とする．定理4.2 により，このような α は存在する．

$0<y<a$ に対して

(5.5) $$\alpha_p(y) = \frac{1}{\mathrm{sh}\, a|p|}(\alpha_p \,\mathrm{sh}(a-y)|p| + \beta_p \,\mathrm{sh}\, y|p|) \qquad p\neq 0$$

$$\alpha_0(y) \equiv \beta_0$$

とおき

(5.6) $$\Phi(z) = \sum_p \alpha_p(y) e^{ipx} \qquad z \in D^a$$

と定義する．

(5.6)の右辺は D^a で絶対収束し

(5.7) $$\lim_{y\to a} \Phi(x,y) = f(x)$$

$$\Delta\Phi(z) = 0 \qquad z\in D^a .$$

$$\Lambda_{p(y)}(\alpha(y)) = \sum_{\ell+m=p}\sum_k \lambda^k_\ell e^{-|\ell|y}\alpha_m(y)\, m_k$$

とおくと，この右辺も $0<y<a$ で絶対収束し，このとき

$$\sum \gamma^k(z)\Phi_{x_k}(z) = \sum_{p\neq 0}\Lambda_{p(y)}(\alpha(y))e^{ipx}$$

$$\Phi_y(z) = \sum_{p\neq 0}\frac{1}{\mathrm{sh}\, a|p|}(\mathrm{ch}(a-y)|p|\cdot|p|\alpha_p - \mathrm{ch}\, y|p|\cdot|p|\beta_p)e^{ipx}$$

となり，各々の右辺も $z\in D^a$ で絶対収束する，更に

$$|\lambda^k_p e^{-|p|y}| \leq |\lambda^k_p|$$

$$|\alpha_p(y)| \leq |\alpha_p| + |\beta_p|\frac{\mathrm{sh}\, y|p|}{\mathrm{sh}\, a|p|}$$

より，　補助定理 2.1 に注意すると．定数 $C = C(\lambda,\alpha,\beta)$ が存在して．

$$|\Lambda_{p(y)}(\alpha(y))| \leqq |p|(2+|p|)^{\frac{1}{2}} C$$

$$\Lambda_{p(y)}(\alpha(y)) \to \Lambda_p(\alpha) \qquad (y\to 0).$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

従って $g(x)=\sum_p \gamma_p e^{ipx}$ を充分になめらかな周期関数（例えば $\sum|\gamma_p|(1+|p|)^{\frac{3}{2}}<\infty$）とすると

$$\int_{0\le x^j\le 2\pi} g(x)\left(\sum \gamma^k(z)\Phi_{x_k}(z)+\Phi_y(z)\right)dx$$

$$\to \sum_{p\neq 0}\gamma_p\left(\Lambda_p(\alpha)-N_p(\alpha)-\sigma_p\right)=0 \qquad (y\to 0).$$

以上の結果をまとめて次の定理を得る

<u>定理 5.1</u> $\gamma^k(z)$ $(k=1,2,\cdots N)$ を (5.1) (5.2) をみたし、$y\to\infty$ のとき有界な D で周期調和関数とする R^N での連続周期関数 f に対し、次の様な D^a 上の関数 Φ が存在する。

(5.8) $\displaystyle\int_{\substack{0<y<b\\ 0\le x^j\le 2\pi}}(\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2)\,dz<\infty$ （任意の $b<a$ に対し）

(5.9) $\displaystyle\lim_{y\to a}\Phi(x,y)=f(x)$

$\Delta\Phi=0$ （D^a 内）

(5.10) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\int_{0\le x^j\le 2\pi} g(x)\left(\sum\gamma^k(z)\Phi_{x_k}(z)+\Phi_y(z)\right)dx=0$

（任意のなめらかな周期関数 g に対して）. ⌟

<u>証明</u> (5.8) が $\alpha\in\ell_1$ と同値であることに注意すれば、他は既に述べた通りである ⌟

一意性が成立するのは、定理 3.3 の適用できる場合しかわからない。

<u>定理 5.2</u> 定理 5.1 で $\gamma^k(z)=\sum\lambda_p^k e^{-|p|y}e^{ipx}$,

$\sum_p\sum_k|\lambda_p^k|<\infty$ の成立するとき, (5.8) (5.9) (5.10) をみたす Φ は唯一つである。⌟

<u>注意</u> 定理 4.2 から, 定理 5.1 の解は, $\gamma^k(z)$ が $y=0$ でもなめらかなときの解の D^a 内での広義一様収束極限

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

として得られることがわかる. このことを使うと定理5.2の条件下で

$$\sup_{x\in D_a}|\phi(z)|\leqq\sup|f(x)|$$

となる解の存在, 及び特に $f\geqq 0$ のときは $\phi\geqq 0$ となる解の存在がわかる. ⊔

最後に将来の問題として次のことがわかることを希望している.

[I] 条件 [4.1) (又は(5.2)) の下で解の一意性があるかどうか.

[II] 条件 (4.1) を解 (又はマルコフ過程) が存在し得る限界まで弱めること. そのためには境界問題をどう定式化したらよいか.

[III] 対応するマルコフ過程がルベーグ測度以外の周期的不変測度を持つときに[II]と同様の問題を解くこと. 即ち, この場合不変測度はルベーグ測度に対し絶対連続で, その密度関数 $n(z)$ は D で正値, 周期的調和であり $y\to\infty$ で有界である. ([I] 定理4.1参照). 特になめらかな場合, $n(z)$ の境界値を用いて境界条件を

$$(5.11)\quad n\phi_y+\sum\gamma^k\phi_{x_k}=0\qquad (y=0 \text{ 上})$$

と書くと, (1.1) に相当する条件は

$$(5.12)\quad n_y-\sum\gamma^k_{x_k}=0$$

となる. 従って問題はできるだけ特異な n, γ^k に対して (5.12) の下での境界問題 (1.1), (1.2), (5.11) を一般化することである.

[引用文献]

[I] M. Motoo : Brownian motion in the halfplane with singular inclined periodic boundary conditions. Topics in Probability Theory (163-179) New York Univ. Seminar Note 1971~1972

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

voter model の configuration の収束について

若山 宏

§1 Introduction

吸引的な相互作用(interaction)を及ぼし合いながら時間発展する d 次元整数格子上の voter model の Markov process について考察する。必要な notation を列挙することから始める。

$\mathbb{Z}_d$; d 次元整数格子。$\mathbb{Z}_d$ の元を $x, y, z, \cdots$ 等で表わす。

$|x-y| = x$ と y を結ぶ最小の bond 数

$\partial x = \{y \in \mathbb{Z}_d ; |x-y| = 1\}$

$E = \{0,1\}^{\mathbb{Z}_d}$ with product topology. E の元を $\xi, \eta, \zeta, \cdots$ 等で表わす。

E の元は $\mathbb{Z}_d$ 上の粒子の configuration を表現しているが、$\mathbb{Z}_d$ の部分集合と同一視できる。$\xi(x) = 1$ for $\forall x \in \mathbb{Z}_d$ のとき $\xi = \mathbb{Z}_d$, $\xi(x) = 0$ for $\forall x \in \mathbb{Z}_d$ のとき $\xi = \phi$ と記す。

$|\xi| = \{x \in \mathbb{Z}_d ; \xi(x) = 1\}^{\#}$, $\|\xi\| = \{x \in \mathbb{Z}_d ; \xi(x) = 0\}^{\#}$

$\xi_x \in E$ を

$$\xi_x(y) = \begin{cases} \xi(y) & \text{if } y \neq x \\ 1-\xi(x) & \text{if } y = x \end{cases}$$

で定義する。

δ_ξ を ξ に point mass をもつ delta measure とする。

$\mathcal{C}$; E 上の実連続関数全体のなす sup norm $\|\cdot\|$ をもつ Banach space

$\mathcal{C}_0$; 有限個の座標のみに depend する E 上の実連続関数全体。

吸引的な nearest neighbor interaction をもつ voter model の Markov process ξ_t とは、

$$(1,1)\quad (\mathcal{A}f)(\xi) = \sum_{x\in\mathbb{Z}_d}\Big[(1-\xi(x))\lambda\sum_{y\in\partial x}\xi(y) + \xi(x)\Big\{\mu_1\sum_{y\in\partial x}\xi(y) + \mu_0\sum_{y\in\partial x}(1-\xi(y))\Big\}\Big] \times \{f(\xi_x) - f(\xi)\},\quad f \in \mathcal{C}_0$$

ここで $\lambda > 0$, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$ は定数で $\mu_0 \geq \mu_1$.

なる generator をもつ stationary E-valued Markov process である。

[1] 又は [2] により、(1,1)を満足する generator をもつ $\mathcal{C}$ 上の一意的な Markovian semigroup $\{{}_{\lambda,\mu_0,\mu_1}T_t\}$ の存在が保障される。混乱の恐れがない場合は単に $\{T_t\}$ と記す。$\{U_t\}$ を $\{T_t\}$ の dual semigroup とする。Markov process ξ_t は、$\mu_0 = \mu_1$ の時 contact process と呼ばれる([4])。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

ここで、$\mu_0 \geq \mu_1$であるから、相互作用は[3]の意味で吸引的となる。従って$\lim_{t\to\infty} U_t \delta_{\mathbb{Z}_d} = \nu_{\mathbb{Z}_d}$が存在し次の不等式が成り立つ([3])。

(1.2) $\forall$increasing fun. $f \in \mathcal{C}$ (i.e. $f(\eta) \geq f(\xi)$ if $\eta(x) \geq \xi(x)$ for $\forall x \in \mathbb{Z}_d$) と $\forall \xi \in E$ に対して

$$f(\phi) = \lim_{t\to\infty}\int f(\eta) U_t \delta_\phi(d\eta) \leqq \varliminf_{t\to\infty}\int f(\eta) U_t \delta_\xi(d\eta) \leqq \varlimsup_{t\to\infty}\int f(\eta) U_t \delta_\xi(d\eta)$$
$$\leqq \lim_{t\to\infty}\int f(\eta) U_t \delta_{\mathbb{Z}_d}(d\eta) = \int f(\eta) \nu_{\mathbb{Z}_d}(d\eta).$$

明らかに$\mu_1 = 0$のときかつその時に限り$\nu_{\mathbb{Z}_d} = \delta_{\mathbb{Z}_d}$となる。(1.2)によれば、$\nu_{\mathbb{Z}_d} = \delta_\phi$の時Markov process ξ_tはergodic, 即ち

$$\lim_{t\to\infty} U_t \delta_\xi = \delta_\phi \quad \text{for } \forall \xi \in E$$

となる。

§2において、Markov process ξ_tがergodicとなるための十分条件を計算する。その方法は、Griffeath, D. ([6])がcontact processに対して計算したのと同様である。§3では、$\nu_{\mathbb{Z}_d} \neq \delta_\phi$の時$\nu_{\mathbb{Z}_d}$及び$\delta_\phi$に収束するinitial configurationを調べる。

§ 2. The ergodic theorem

$\nu_{\mathbb{Z}_d}$のcorrelation function ρを

$$\rho(A) = \nu_{\mathbb{Z}_d}\{\xi ;\ \xi(A) = 0\} \quad (\rho(\phi) = 1)$$

ここでAは$\mathbb{Z}_d$の有限部分集合で$\xi(A) = \sum_{x\in A} \xi(x)$.

で定義し、$\sigma(A) = 1 - \rho(A)$とおくと簡単に次の関係が験証できる([6])。

(2.1) $\sigma(A \cup B) + \sigma(A \cap B) \leqq \sigma(A) + \sigma(B)$

(2.2) $\nu_{\mathbb{Z}_d} = \delta_\phi \rightleftarrows \sigma(x) = 0$ for $\forall x \in \mathbb{Z}_d$

補題2.1

(2.3)
$$\sigma(A) = \frac{1}{2d(\mu_1+\lambda)|A|}\sum_{x\in A}\Big\{2d\mu_1\sigma(A\setminus x) + (\mu_1-\mu_0+\lambda)\sum_{y\in\partial x}\sigma(A\cup y) + (\mu_1-\mu_0)\sum_{y\in\partial x}\sigma(A\setminus x\cup y)\Big\}$$

証明)

$\mathbb{Z}_d$の有限部分集合Aに対して、$f_A \in \mathcal{C}_0$を

$$f_A(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi(A) = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.47　1977年
P1-122

で定義する。$\nu_{\mathbb{Z}_d}$はstationary measureであるから

$$\int \mathcal{A} f_A(\xi)\nu_{\mathbb{Z}_d}(d\xi)=0.$$

従って

$$\sum_{x\in A}\Big[\mu_1\sum_{y\in\partial x}\nu_{\mathbb{Z}_d}\{\xi(A\setminus x)=0,\ \xi(x)=1,\ \xi(y)=1\}+\mu_0\sum_{y\in\partial x}\nu_{\mathbb{Z}_d}\{\xi(A\setminus x)=0,\ \xi(x)=1,$$
$$\xi(y)=0\}-\lambda\sum_{y\in\partial x}\nu_{\mathbb{Z}_d}\{\xi(A)=0,\xi(y)=1\}\Big]=0 .$$

これより(2.3)は直ちに従う。

さて、$\nu_{\mathbb{Z}_d}=\delta_\phi$となるための十分条件を計算しよう。$\mu_1=0$の時は、$\nu_{\mathbb{Z}_d}=\delta_{\mathbb{Z}_d}\neq\delta_\phi$だから$\mu_1\neq 0$と仮定する。$\partial x=\{y_1,\cdots,y_{2d}\}$とおくと、$\nu_{\mathbb{Z}_d}$がshiftとrotationに関して不変([2]を参照)なことを考慮すれば(2.3)より

(2.4) $$\sigma(x)=\frac{1}{\mu_1+\lambda}\{(\mu_1-\mu_0+\lambda)\sigma(x\cup y_1)+(\mu_0-\mu_1)\sigma(y_1)\}$$

(2.5) $$\sigma(x\cup y_1)=\frac{1}{2d(\mu_1+\lambda)}\Big[\{(2d-1)\mu_1+\mu_0\}\sigma(x)+(\mu_1-\mu_0+\lambda)\sigma(x\cup y_1)$$
$$+(\mu_1-\mu_0+\lambda)\sum_{i=2}^{2d}\sigma(x\cup y_1\cup y_i)+(\mu_0-\mu_1)\sum_{i=2}^{2d}\sigma(y_1\cup y_i)\Big]$$

が従う。

$\mu_1-\mu_0+\lambda\leqq 0$の時は、(2.4)により$\sigma(x)=0$。従って(2.2)より$\nu_{\mathbb{Z}_d}=\delta_\phi$となる。以後$\mu_1-\mu_0+\lambda>0$とする。(2.4)を書き直して

(2.4′) $$\sigma(x\cup y_1)=\Big(\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_0+\lambda}+1\Big)\sigma(x).$$

$i\neq 1$に対して(2.1)より

$$\sigma(x\cup y_1\cup y_i)\leqq 2\sigma(x\cup y_1)-\sigma(x),$$
$$\sigma(y_1\cup y_i)\leqq 2\sigma(y_1).$$

従って(2.5)より

(2.6) $$\{2d\mu_0-(2d-1)(\mu_1-\mu_0+\lambda)\}\sigma(x\cup y_1)$$
$$\leqq\{2d\mu_0-(2d-1)(\mu_1-\mu_0+\lambda)+(2d-1)(\mu_0-\mu_1)\}\sigma(x).$$

$2d\mu_0-(2d-1)(\mu_1-\mu_0+\lambda)>0$の時、(2.4′)と(2.6)より

(2.7) $$\Big(1+\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_0+\lambda}\Big)\sigma(x)\leqq\Big(1+\frac{(2d-1)(\mu_0-\mu_1)}{2d\mu_0-(2d-1)(\mu_1-\mu_0+\lambda)}\Big)\sigma(x).$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

$$\mu_0-\mu_1<\lambda<\mu_0+\frac{\mu_1}{2d-1} \text{ の時 } \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_0+\lambda}>\frac{(2d-1)(\mu_0-\mu_1)}{2d\mu_0-(2d-1)(\mu_1-\mu_0+\lambda)}$$

であるから、(2.7)より$\sigma(x)=0$を得る。

以上のことから次の定理が証明された。

定理2.2

$\mu_0 \geqq \mu_1 \neq 0$, $\lambda<\mu_0+\dfrac{\mu_1}{2d-1}$ の時

$U_t\delta_\xi \longrightarrow \delta_\phi$ for $\forall\xi\in E$

contact processに対して、Harris T, E.[4]は、$\frac{\lambda}{\mu}$ $(\mu_0=\mu_1=\mu\neq 0)$が十分大きい時$\nu_{\mathbb{Z}^d}\neq\delta_\phi$となることを示した。従ってvoter modelの場合にも、μ_0,μ_1に対してλを十分大きくとれば$\nu_{\mathbb{Z}^d}\neq\delta_\phi$となることが次の(2.8)によりわかる。

(2.8) $\lambda'\geqq\lambda$, $\mu_1'\leqq\mu_1\leqq\mu_0$, $\mu_1'\leqq\mu_0'\leqq\mu_0$ の時、

$\forall$ increasing fun. $f\in\mathcal{C}$と$\forall\xi\in E$に対して

$${}_{\lambda',\mu_0',\mu_1'}T_tf(\xi)\geqq{}_{\lambda,\mu_0,\mu_1}T_tf(\xi) \qquad t\geqq 0.$$

§3 $\nu_{\mathbb{Z}^d}\neq\delta_\phi$の場合におけるconfigurationの収束について

Holley, R[2]は次の事を示した。

(3.1) $0<{}^{\exists}K<\infty$が存在して、$f\in\mathcal{C}_0$がfinite set Λの座標のみにdependするとき

(i) $\|\mathcal{A}^nf\|\leqq\|f\|\,n!\,e^{|\Lambda|}K^{-n}$が成立し

(ii) $t<K \Longrightarrow T_tf=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathcal{A}^nf$.

(3.1)とgenerator $\mathcal{A}$の形から容易に

(3.2) $P_\xi\{\xi_t$がξとk個の座標で異なる$\}=o(t^{k-1})$
unif. in $\xi\in E$ as $t\downarrow 0$

がわかる。

先ず、$\mu_1=0$、即ち$\nu_{\mathbb{Z}^d}=\delta_{\mathbb{Z}^d}$の場合を考える。

補題3.1

$\mu_1=0$、$0<|\xi|<\infty$のとき$t\downarrow 0$に対して次の(i),(ii),(iii)が成り立つ。

(i) $P_\xi\{|\xi_t|=|\xi|+1\}=\{\lambda\sum_{x\in Z_d}(1-\xi(x))\sum_{y\in\partial x}\xi(y)\}t+o(t)$

(ii) $P_\xi\{|\xi_t|=|\xi|-1\}=\{\mu_0\sum_{x\in Z_d}\xi(x)\sum_{y\in\partial x}(1-\xi(y))\}t+o(t)$

(iii) $P_\xi\{\xi_t=\xi\}=1-\{\lambda\sum_{x\in Z_d}(1-\xi(x))\sum_{y\in\partial x}\xi(y)+\mu_0\sum_{x\in Z_d}\xi(x)\sum_{y\in\partial x}(1-\xi(y))\}t+o(t)$

証明)

(3.2)より

$$P_\xi\{\xi_t=\eta\}=\begin{cases}\{\lambda\sum_{y\in\partial x}\xi(y)\}t+o(t) & \text{if } \eta=\xi\cup x,\ x\notin\xi\\ \{\mu_0\sum_{y\in\partial x}(1-\xi(y))\}t+o(t) & \text{if } \eta=\xi\setminus x,\ x\in\xi\\ 1-\{\lambda\sum_{x\in Z_d}(1-\xi(x))\sum_{y\in\partial x}\xi(y)+\mu_0\sum_{x\in Z_d}\xi(x)\sum_{y\in\partial x}(1-\xi(y))\}t+o(t) & \text{if } \eta=\xi\end{cases}$$

これより直ちに(i),(ii),(iii)が従う。

定理3.2

$\mu_1=0$ の時

(i) $|\xi|<\infty$ なる $\xi\in E$ に対して

$\mu_0\geqq\lambda\Longrightarrow P_\xi\{\xi_t=\phi \text{ for some } t\}=1$

$\mu_0<\lambda\Longrightarrow P_\xi\{\xi_t=\phi \text{ for some } t\}=\left(\frac{\mu_0}{\lambda}\right)^{|\xi|}$

(ii) $\|\xi\|<\infty$ なる $\xi\in E$ に対して

$\mu_0\leqq\lambda\Longrightarrow P_\xi\{\xi_t=Z_d \text{ for some } t\}=1$

$\mu_0>\lambda\Longrightarrow P_\xi\{\xi_t=Z_d \text{ for some } t\}=\left(\frac{\lambda}{\mu_0}\right)^{\|\xi\|}$

証明)

(i)から(ii)がでることは明らかである。

$|\xi|<\infty$ なる ξ を出発点とする voter model の推移の起ったときだけみた process を X_n とすると、補題3.1より $|X_n|$ は、$|X_0|=|\xi|$ で transition probability

$P_{i,i+1}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu_0}$, $P_{i,i-1}=\frac{\mu_0}{\lambda+\mu_0}$ $i\geqq1$

$P_{0,i}=\delta_{0,i}$

をもつ Markov chain となることより(i)が出る。

この定理より次の系は自明である。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

系 3.3.

$\mu_1 = 0$ の時

(i) $|\xi| < \infty$ なる $\xi \in E$ に対して、$\mu_0 \geqq \lambda \Longrightarrow U_t \delta_\xi \longrightarrow \delta_\phi \quad (t \to \infty)$

(ii) $\|\xi\| < \infty$ なる $\xi \in E$ に対して、$\mu_0 \leqq \lambda \Longrightarrow U_t \delta_\xi \longrightarrow \delta_{Z_d} \quad (t \longrightarrow \infty)$

系 3.3 より $\mu_1 = 0$, $\mu_0 = \lambda$ の時、$T_t f(\xi)$ が収束しないような $\xi \in E$ 及び $f \in \mathcal{C}$ を構成することができる。

続いて $\mu_1 \neq 0$ で $\mu_{Z_d} \neq \delta_\phi$ のとき μ_{Z_d} に収束する configuration を調べる。この場合、[5] と定理 2.2 により次のような E-valued Markov process ξ_t^* が存在する。

(3.3) $P_\xi\{\xi_t \cap \eta \neq \phi\} = P_\eta^*\{\xi_t^* \cap \xi \neq \phi\}$, $t \geqq 0$

if ξ or η is finite

ここで P_η^* は ξ_t^* の確率法則

$\xi \in E$, $x \in Z_d$ に対して

$$\Delta_\xi(x) = \min\{|y - x| \,;\, \xi(y) = 1\},$$

$$E' = \{\xi \in E \,;\, \sup_{x \in Z_d} \Delta_\xi(x) < \infty\}$$ と

とおく。

補題 3.4

$\mu_1 \neq 0$ の時

(3.4) $\forall t > 0$ と $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\sup_{\xi;|\xi|=n} P_{Z_d}\{\xi_t \cap \xi \neq \phi\} < 1$$

(3.5) $\forall t > 0$, $\forall \xi \in E'$ に対して

$$\sup_{x \in Z_d} P_\xi\{\xi_t(x) = 0\} < 1.$$

証明)

(3.4) ; $|\xi| = n$ なる ξ に対して

$$P_{Z_d}\{\xi_t \cap \xi \neq \phi\} = P_\xi^*\{\xi_t^* \neq \phi\}$$

は、$P_\phi^*\{\xi_t^* = \phi\} = 1$ であることにより t に関して非増加となることに注意すれば、十分小なる t に対して云えばよい。

$f_\xi \in \mathcal{C}_0$ を

$$f_\xi(\eta)=\begin{cases}1 & \text{if } \eta(x)=0 \text{ for } {}^\forall x\in\xi\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

で定義すると、(3.1)により

$$P_{\mathbb{Z}_d}\{\xi_t\cap\xi=\phi\}=T_t f_\xi(\mathbb{Z}_d)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathcal{A}^k f_\xi(\mathbb{Z}_d) \quad \text{for } t<K.$$

ところで

$$\mathcal{A}^k f_\xi(\mathbb{Z}_d)=0 \quad \text{for } k\leqq n-1$$

であり、$\mu_1>0$であることにより

$$\inf_{\xi;|\xi|=n}\mathcal{A}^n f_\xi(\mathbb{Z}_d)>0$$

が成立するので、十分小なるtに対して

$$\inf_{\xi;|\xi|=n}P_{\mathbb{Z}_d}\{\xi_t\cap\xi=\phi\}>0$$

が成り立つ。

(3.5); $\chi_{\{x\}}\in\mathcal{C}_0$を

$$\chi_{\{x\}}(\xi)=\begin{cases}1 & \text{if } \xi(x)=1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

で定義すると

$$P_\xi\{\xi_t(x)=1\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathcal{A}^k\chi_{\{x\}}(\xi) \quad \text{for } t<K.$$

又、${}^\forall x\in\mathbb{Z}_d$に対して

$$\mathcal{A}^k\chi_{\{x\}}(\xi)=0 \quad \text{for } k<\Delta_\xi(x)$$

であり、$\lambda>0$であることにより

$$\mathcal{A}^{\Delta_\xi(x)}\chi_{\{x\}}(\xi)>0$$

となる。従って、$t_0>0$が存在して、$0<t\leqq t_0$なるtに対して

$$\inf_{x\in\mathbb{Z}_d}P_\xi\{\xi_t(x)=1\}>0 \quad \text{if } \xi\in E', \text{ 及び}$$

$$\inf_{\xi\in E;\,\xi(x)=1}P_\xi\{\xi_t(x)=1\}>0$$

が成り立つ。Markov性により$2t_0\geqq t>t_0$に対して

$$\begin{aligned}P_\xi\{\xi_t(x)=1\}&\geqq P_\xi\{\xi_{t_0}(x)=1,\ \xi_t(x)=1\}\\ &\geqq\inf_{\xi;\,\xi(x)=1}P_\xi\{\xi_{t-t_0}(x)=1\}P_\xi\{\xi_{t_0}(x)=1\}\end{aligned}$$

となるから

$$\inf_{x\in\mathbb{Z}_d}P_\xi\{\xi_t(x)=1\}>0$$

となる。このようにして${}^\forall t>0$に対して(3.5)が証明される。

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

以下の議論は、Harris T.E が[5]で展開した考え方に基ずいている。$h_{\xi,t}(\eta) = U_t\delta_\xi\{\zeta \in E ; \zeta \cap \eta \neq \phi\}$ とおくと、(3.4)と強Markov性により

(3.6) $^\forall \xi \in E$, $^\forall k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} P_\xi^*\{0 < |\xi_t^*| \leqq k\} = 0 \qquad ([5]\ \text{lemma } 9.3)$$

が成立しているので、$h_{\xi,t}(\phi) = 0$ に注意すれば

(3.7) $^\forall \xi \in E$, $^\forall t > 0$, $^\forall k = 1, 2, \cdots$ と $|\eta| < \infty$ なる $^\forall \eta \in E$ に対して

$$\liminf_{s\to\infty} \int_{|\gamma|>k} P^*(s, \eta, d\gamma) h_{\xi,t}(\gamma) = \liminf_{s\to\infty} h_{\xi,t+s}(\eta) \qquad ([5]\ \text{lemma } 9.7)$$

$$\leqq \limsup_{s\to\infty} h_{\xi,t+s}(\eta) = \limsup_{s\to\infty} \int_{|\gamma|>k} P^*(s, \eta, d\gamma) h_{\xi,t}(\gamma)$$

となる。$0 < t_1 < K$ なる t_1 を fix する。[5] lemma 9.14 の証明を少し改良すれば、(3.5)により

(3.8) $\xi \in E'$ のとき、$^\forall \varepsilon > 0$ に対して自然数 k が存在して

$$|\eta| \geqq k \Longrightarrow h_{\xi,t_1}(\eta) \geqq 1 - 2\varepsilon$$

が証明できる。

以上の準備の下で、次の定理が証明できる。

定理 3.5.

$\mu_0 \geqq \mu_1 \neq 0$ で $\nu_{\mathbb{Z}^d} \neq \delta_\phi$ のとき、$\xi \in E'$ に対して

$$U_t\delta_\xi \longrightarrow \nu_{\mathbb{Z}^d} \quad (t \to \infty)$$

証明)

$|\eta| < \infty$ なる $\eta \in E$ に対して

$$P(\eta) = P_\eta^*\{\xi_t^* \neq \phi \ \ ^\forall t\} = \lim_{t\to\infty} P_\eta^*\{\xi_t^* \neq \phi\}$$

とおく。(3.6), (3.7), (3.8) により、$^\forall \xi \in E'$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} h_{\xi,t}(\eta) = P(\eta)$$

となる。$\mathbb{Z}^d \in E'$ だから

$$\lim_{t\to\infty} U_t\delta_\xi = \lim_{t\to\infty} U_t\delta_{\mathbb{Z}^d} = \nu_{\mathbb{Z}^d} \quad \text{for } ^\forall \xi \in E'.$$

Sem. on Probab.
Vol.47 1977年
P1-122

参考分献

[1] Liggett, T.M. ; Existence Theorems for Infinite Particle Systems, Trans. Amer. Math. Soc. 165, (1972) 471-481

[2] Holley, R ; Markovian Interaction Processes with Finite Interactions, Ann. Math. Statistics 43, (1972) 1961-1967

[3] Holley, R ; An Ergodic Theorem for Interacting Systems with Attractive Interactions, Z. Wahrsheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 24, (1972) 325-334

[4] Harris, T.E ; Contact Interactions on a Lattice, Ann. Prob. 2, (1974) 969-988

[5] Harris, T.E ; On a Class of Set-Valued Markov Processes, Ann. Prob. 4, (1976) 175-194

[6] Griffeath, D ; Ergodic Theorems for Graph Interactions, Advances in Appl. Prob. 7, (1975) 179-194

Sem. on Probab.
Vol.47　1977年
P1-122

率
「1977年11月　確卒論セミナー発行」