SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 44

Markov過程の研究

―(1976年12月金沢シンポジウム報告)―

1 9 7 7

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

まえがき

1976年12月20日から22日まで金沢大学で Markov 過程のシンポジウムが行われた。 このノートは、そのとき講演された方々から寄稿をいただいて出来たものである。

土谷正明
小倉幸雄
田中　洋

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

目　　次

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

拡散過程の道に沿った微分形式の積分について

池田 信行　　眞鍋 昭治郎

1. 序　　このノートでは，1次微分形式の拡散過程の道に沿った積分 $\int_{X[0,t]}\alpha$ を定義し，それを用いて確率積分に関する2,3の公式を導く。重点は，幾何学的な量によって表わして座標に依存しない公式を求めることにある。

まず，$\int_{X[0,t]}\alpha$ の定義から，それを座標変換で不変な形に書き直す（公式(3.1)）。これを用いると，例えばよく知られた Cameron-Martin の公式を，座標を用いないで書くことができる。$\int_{X[0,t]}\alpha$ に対し，R^d の場合と同じ近似定理が成立する。この事実は，それ自身重要であるが，これを用いて Stokes の定理を証明することができる。それを示すには，面積分に相当するものを定義する必要があるが，それは，近似の段階で示唆される式で定義できる。最後に，2乗可積分な continuous additive functional の表現定理を，微分形式の道に沿った積分を用いて表わす。以下では，原則として証明は省略する。

2. 定義　　Mを，d 次元の完備なリーマン多様体，g を，リーマン計量とする。Δ を，Laplace-Beltrami 作用素，b をM上の C^∞-ベクトル場とする。(X_t, P_x) を，$\frac{1}{2}\Delta + b$ に対応する minimal な拡散過程とする。

Mの局所有限な開被覆 $\{W_n\}_{n\in N}$ を，次の2条件を満たすようにとる：

(i) 任意の自然数 n に対して，(W_n, φ_n) は，座標近傍，

(ii) 任意の自然数 n と，W_n の任意の2元 x, y に対して，

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$\gamma_{x,y}(0)=x$, $\gamma_{x,y}(1)=y$, $\gamma_{x,y}([0,1])\subset W_n$となる唯一つの極小測地線$\gamma_{x,y}$が存在する。

$\{U_n\}$, $\{V_n\}$を, やはり局所有限な開被覆で, 任意のnに対して, $U_n\subset V_n\subset \overline{V_n}\subset W_n$ となるものとする。$\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$を, $\{U_n\}$に従属した1の分割とする。stopping time の列$\{\tau_k^{(n)}\}$, $\{\sigma_k^{(n)}\}$を, 次のように定義する。

$\tau_0^{(n)}=0$, $\sigma^{(n)}=\sigma_1^{(n)}=\inf\{t\,;\,X_t\notin V_n\}$, $\tau^{(n)}=\tau_1^{(n)}=\inf\{t\,;\,X_t\in U_n\}$, $\sigma_k^{(n)}=\tau_{k-1}^{(n)}+\sigma^{(n)}\circ\theta_{\tau_{k-1}^{(n)}}$, $\tau_k^{(n)}=\sigma_k^{(n)}+\tau^{(n)}\circ\theta_{\sigma_k^{(n)}}$, $n,k=1,2,\cdots$ 。

定義　αを, M上のsmoothな1次微分形式とする。

1°. $\mathrm{supp}(\alpha)\subset U_n$ の時。$(x^1,\cdots,x^d)$を, U_n上の局所座標系とし, αが, $\alpha=\sum_{i=1}^d \alpha_i\,dx^i$ と表わされるとする。X_tの座標を$(X_t^1,\cdots,X_t^d)$として,

$$\int_{X[0,t]}\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\tau_k^{(n)}\wedge t}^{\sigma_k^{(n)}\wedge t}\sum_{i=1}^{d}\alpha_i(X_s)\circ dX_s^i$$

と定義する。ここで, $\circ$は, 伊藤の対称積分である([3])。

2°. 一般の場合。1の分割$\{\psi_n\}$を用いて,

$$\int_{X[0,t]}\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{X[0,t]}\psi_n\alpha$$

で定義する。$\int_{X[0,t]}\alpha$ を, αのXの道に沿った積分と呼び, $S(t\,;\alpha)$とも書く。

例1　αが完全(exact)の時, 即ち, あるM上の函数uがあって, $\alpha=du$ と書けている場合は,

$$\int_{X[0,t]}\alpha=u(X_t)-u(X_0)$$

が成り立つ。これは, 伊藤の公式の対称積分を用いた表現に他ならない([3])。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

例２　Ｍが，R^dで，$g=(\delta_{ij})$，$b=0$　とする。
$\alpha_{ij}=\frac{1}{2}(x^i dx^j - x^j dx^i)$　とすれば，

$$\int_{X[0,t]} \alpha_{ij} = \int_0^t \frac{1}{2}\left(X^i(s)dX^j(s) - X^j(s)dX^i(s) \right)$$

$d=2$ の時は，Lévyの確率面積となる([4])。

注意　１次微分形式の拡散過程の道に沿った積分は，Gaveau [2] によって退化した拡散過程の性質を調べるのに用いられている。

３．１次微分形式の積分に対する公式

最初に記号の準備をする。$(x^1,\cdots,x^d)$を，Ｕのまわりの局所座標系とする。Laplace-Beltrami 作用素Δは，

$$\Delta = \sum_{i,j=1}^d g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^d 2c^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

と書ける。ここで，

$$g_{ij}(x) = g_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \ (g^{ij}(x)) = (g_{ij}(x))^{-1}, \ G = \det(g_{ij}),$$

$$c^i(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial g^{ij}(x)}{\partial x^j} + \frac{1}{2} g^{ij}(x)\frac{\partial \log G(x)}{\partial x^j} \right).$$

$\Lambda^1(M)$と$\mathfrak{X}(M)$を，それぞれＭ上のsmoothな１次微分形式とベクトル場の全体とする。gにより$\Lambda^1(M)$と$\mathfrak{X}(M)$の間に１対１の対応がある。この対応により$\alpha\in\Lambda^1(M)$に対応する$\mathfrak{X}(M)$の元をV_α，又，$V\in\mathfrak{X}(M)$に対応する$\Lambda^1(M)$の元をα_Vで表わす。ベクトル場Vの発散 $\mathrm{div}\,V$ は，

$$\mathrm{div}\,V = \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}\,v^i\right) \quad , \quad V = \sum_{i=1}^d v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

で定義される(ここでは述べないが，divは，座標を用いない定義ができる。松島［５］参照)。

dを外微分，δをdの双対作用素とする。この時，$\alpha\in\Lambda^1(M)$に対し

$$\delta\alpha = -\mathrm{div}(V_\alpha)$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

が成立することが知られている。

これらの準備をして，$\int_{X[0,t]}\alpha$ を，次のように表わすことができる。

定理 3.1 $L=\frac{1}{2}\Delta+b$ とする。X を，L に対応する M 上の拡散過程とする。任意の $\alpha\in\Lambda^1(M)$ に対して，

$$(3.1)\quad \int_{X[0,t]}\alpha = M(t;\alpha)+\int_0^t\left(-\frac{1}{2}\delta\alpha+\alpha(b)\right)(X(s))\,ds$$

が成立する。ここで，M は，局所マルチンゲールであって，座標近傍 U の上で，

$$M(t\wedge\tau)=\sum_{i=1}^d\int_0^{t\wedge\tau}\alpha_i(X(s))\,d\xi^i(s),$$

$$\xi^i(t\wedge\tau)=X^i(t\wedge\tau)-\int_0^{t\wedge\tau}\left(c^i(X(s))+b^i(X(s))\right)ds,$$

と書け，$\langle M,M\rangle_{t\wedge\tau}=\int_0^{t\wedge\tau}\|\alpha(X_s)\|^2\,ds$ である。但し，τ は，U からの *first exit time* である。

注意. 定理 3.1 を用いれば，*Cameron-Martin* の公式は，次のように座標に依存しない形に書くことができる。X を，M 上のブラウン運動（即ち，$\frac{1}{2}\Delta$ に対応する拡散過程），$\tilde{X}$ を $\frac{1}{2}\Delta+V_\alpha$ に対応する拡散過程とすると，

$$(3.2)\quad A_t=\left.\frac{dP^{\tilde{X}}}{dP^X}\right|_{\mathcal{F}_t}=\exp\left[\int_{X[0,t]}\alpha+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\delta\alpha-\|\alpha\|^2\right)(X(s))\,ds\right]$$

定理 3.1 から，α が特別な微分形式の時は，$\int_{X[0,t]}\alpha$ が，マルチンゲールになること等を調べることができる。そのために，微分形式に働く *Hodge-Kodaira* の *Laplacian* $\Delta=d\delta+\delta d$ について少し述べる。次の事実は，調和積分論でよく知られている（例えば，秋月 [1] を見よ）。$\alpha\in\Lambda^1(M)$ とする。

命題 1°. M が，コンパクトならば，$\Delta\alpha=0$ と $d\alpha=\delta\alpha=0$ とは，同等である。

2°. α は，次のように分解される：$\alpha=df+\delta\omega+\beta$.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

ここで，f は，C^∞-函数，$\omega \in \Lambda^2(M)$，$\beta \in \Lambda^1(M)$ かつ $\Delta\beta = 0$ （β を，調和１次微分形式という）。

この命題と定理3.1から次の系がわかる。

系．X を，M 上のブラウン運動とする。

(i) α が，双対境界即ちある $\omega \in \Lambda^2(M)$ があって $\alpha = \delta\omega$ と書けているならば，$\int_{X[0,t]}\alpha$ は，局所マルチンゲール。

(ii) M が，コンパクトの場合は，次の２つは同等である：

(a) $\int_{X[0,t]}\alpha$ は，マルチンゲール

(b) α は，$\alpha = \delta\omega + \beta$ と書ける。ここで，$\omega \in \Lambda^2(M)$，β は，調和１次微分形式。

4. 近似定理

この節では，X を測地線で近似した場合の１次微分形式の道に沿った積分に対する近似定理を述べる。証明は省くが，本質的に R^d の場合と同様である（中尾－大和［７］）。

Π_m を $[0,\infty)$ の分割：$0 = t_0^{(m)} < t_1^{(m)} < \cdots$ とし，Π_m に $\{\sigma_k^{(n)}\}_{n,k}$，$\{\tau_k^{(n)}\}_{n,k}$ をつけ加えて得られる細分を Π_m' とする：

$$\Pi_m' : 0 = T_0^{(m)} < T_1^{(m)} < \cdots$$

$X_{\Pi_m'}$ を，次のように定義する：$T_k^{(m)} \leq t < T_{k+1}^{(m)}$ では，$X_{\Pi_m'}(t)$ は，$X(T_k^{(m)})$ と $X(T_{k+1}^{(m)})$ を結ぶ測地線。そうすれば，$X_{\Pi_m'}$ は，区分的に微分可能だから，$\int_{X_{\Pi_m'}[0,t]}\alpha$ は，普通の α の $X_{\Pi_m'}[0,t]$ に沿う積分として定義される。この時，次の定理が成立する。

定理4.1 もし $\lim_{m\to\infty} mesh(\Pi_m) = 0$ ならば，任意の正整数 N と任意の１次微分形式 α に対して，

$$\lim_{m\to\infty} E_x\left[\sup_{0\leq t\leq T\wedge\xi_N}\left|\int_{X_{\Pi_m'}[0,t]}\alpha - \int_{X[0,t]}\alpha\right|^2\right] = 0$$

が成立する。ここで，$\xi_N = \inf\{t ; X_t \notin \bigcup_{n=1}^{N} U_n\}$。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

注意　この定理は，伊藤の公式の微分形式への拡張と考えることができる。実際，αが完全の時，$\alpha = du$ とすれば，

$$\int_{X[0,t]} \alpha = \lim_{m\to\infty}\int_{X_{\Pi'_m}[0,t]} \alpha = \lim_{m\to\infty}\left\{ u\left(X_{\Pi'_m}(t)\right) - u\left(X_{\Pi'_m}(0)\right)\right\}$$
$$= u(X_t) - u(X_0)$$

となるから。

5. Stokesの定理　前節の結果を利用して，Stokesの定理を，チェイン(秋月[1]を見よ)が，拡散過程の道から定まる場合にも拡張することができる。この考えは，R^dのブラウン運動の場合，高橋 陽一郎 氏が，使っている。

この節では，Mは，負曲率，単連結とする。$\varphi(s)$, $0\leq s\leq t$ を区分的に滑らかな曲線で，$X(0)=\varphi(0)$ となるものとする。$\gamma(\theta;x,y)$, $0\leq\theta\leq 1$ を，x と y を結ぶ極小測地線(仮定より唯一つ存在する)とする: $\gamma(0;x,y)=x$, $\gamma(1;x,y)=y$. Cを，$C(s,\theta)=\gamma(\theta;X(s),\varphi(s))$ で定義する。$S(t;X,\varphi)$を，写像Cで定まるM上のチェインとする。

2次微分形式βに対して面積分 $\int_{S(t;X,\varphi)}\beta$ を

$$\int_{S(t;X,\varphi)}\beta = \sum_{i<j}\int_0^1 d\theta \sum_{k=1}^{d}\int_0^t \beta_{ij}\left(\frac{\partial\gamma^j}{\partial\theta}\frac{\partial\gamma^i}{\partial x^k} - \frac{\partial\gamma^i}{\partial\theta}\frac{\partial\gamma^j}{\partial x^k}\right)\circ dX^k(s)$$
$$+\sum_{i<j}\int_0^1 d\theta \sum_{k=1}^{d}\int_0^t \beta_{ij}\left(\frac{\partial\gamma^j}{\partial\theta}\frac{\partial\gamma^i}{\partial\varphi^k} - \frac{\partial\gamma^i}{\partial\theta}\frac{\partial\gamma^j}{\partial\varphi^k}\right)\frac{d\varphi^k}{ds}ds$$

によって定義する。この式は，Xが滑らかな時は，普通の定義と一致している。前節の近似定理と全く同様にして次の命題が、いえる。

命題　Π_m, Π'_m は，前節と同じものとする。そうすると，任意の $T>0$ に対して，

$$\lim_{m\to\infty} E_x\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_{S(t;X,\varphi)}\beta - \int_{S_{\Pi'_m}(t;X,\varphi)}\beta\right|^2\right] = 0$$

が成立する。

これを用いると，次の形のStokesの定理の変形が示せる。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

定理 5.1　α を，1 次微分形式とすれば，

$$\int_{S(t;X,\varphi)} d\alpha = \int_{\partial S(t;X,\varphi)} \alpha \qquad \text{a.s.}$$

証明　近似した途中の段階では，

$$\int_{S_{\Pi_m'}(t;X,\varphi)} d\alpha = \int_{\partial S_{\Pi_m'}(t;X,\varphi)} \alpha$$

が成立しているから，定理 4.1 と上の命題を合わせればよい。

6. 2 乗可積分な continuous additive functional の表現定理との関係

X を，(M,g) 上のブラウン運動とする。$\mathcal{M}$ を，平均 0 の 2 乗可積分な continuous additive functional の全体とする。$\mathcal{M}$ のセミノルム $\rho_{x,t}$ を，

$$\rho_{x,t}(A_1,A_2) = E_x\left[\left(A_1(t)-A_2(t)\right)^2\right], \quad A_1, A_2 \in \mathcal{M}$$

で定義する。$\Lambda^1(M)$ に，内積 $(\ ,\ )_{x,t}$ を次式で定義する。

$$(\alpha,\beta)_{x,t} = \int_0^t ds \int_M p(s,x,y)\langle\alpha|\beta\rangle(y)\, m(dy),$$

ここで，m は，体積要素で，$p(s,x,y)$ は，m に関する $P_x(X_s\in dy)$ の密度である。

定理 6.1　任意の $A\in\mathcal{M}$ に対し，$(\beta,\beta)_{x,t}<\infty$，$\forall x\in M, \forall t\geq 0$ となる $\beta\in\overline{\Lambda^1(M)}$ $(=\Lambda^1(M)$ の $(\ ,\ )_{x,t}$ による完備化$)$ が存在して，(β は，x と t に依存しない)，

$$A_{t\wedge\tau} = \sum_{i=1}^d \int_0^{t\wedge\tau} \beta_i(X(s))\, d\xi^i(s)$$

と書ける。ここで，$\tau = \inf\{t\,;\, X_t \notin U\}$。

もし，β が，滑らかにとれる時は，A は，次のように書くことができる。

$$A_t = \int_{X[0,t]} \beta + \frac{1}{2}\int_0^t (\delta\beta)(X(s))\,ds$$

この定理は，次の補題を用いれば容易に示せる。

補題　$A \in \mathfrak{M}$ が，任意の $\alpha \in \Lambda^1(M)$ に対して，

$$E_x[\, \langle S(\cdot\,;\alpha),\, A \rangle_t \,] = 0$$

を，満たすならば，$A = 0$ が成り立つ。

文　献

[1] 秋月　調和積分論(上)　岩波

[2] B. Gaveau　*Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents*, preprint

[3] K. Ito　*Stochastic differentials*, Applied Math. & Optimization, vol. 1 (1975) 374～381

[4] P. Lévy　*Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars

[5] 松島　多様体入門　裳華房

[6] M. Motoo - S. Watanabe　*On a class of additive functionals of Markov processes*, Jour. Math. Kyoto Univ. vol. 4 (1965) 429-469

[7] S. Nakao - Y. Yamato　*Approximation theorem on stochastic differential equations*, to appear

[8] H. Tanaka　*Note on continuous additive functionals of the 1-dimensional Brownian path*, Z. Wahr. vol. 1 (1963) 251-257

[9] A.D. Ventcel'　*Nonnegative additive functionals of Markov processes* Soviet Math. Dokl. vol. 2 (1961) 218-221

[10] A.D. Ventcel'　*On continuous additive functionals of a multi-dimensional Wiener process*, Soviet Math. Dokl. vol. 3 (1962) 264-267

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

リーマン多様体の上の
ブラウン運動の近似について

大和祐一

1. 序

リーマン多様体 M の上のブラウン運動 $X(t,\omega)$ に沿う一次微分形式 α の積分 (Ikeda and Manabe [1]) を $\int_{X[0,t]}\alpha$ で表わす。いま M-値確率過程の列 $\{X_n(t,\omega)\,;\, n=1,2,\cdots\}$ で連続かつ区分的になめらかな道をもち $\lim_{n\to\infty} X_n(t,\omega) = X(t,\omega)$ なるものを考え，曲線 $X_n(s)$, $s\in[0,t]$ に沿う一次微分形式 α の積分を $\int_{X_n[0,t]}\alpha$ で表わす。我々の考える問題は，$\int_{X_n[0,t]}\cdot$ の $\int_{X[0,t]}\cdot$ に対する挙動によって近似列 $\{X_n,\ n=1,2,\cdots\}$ を分類することである。

まず，空間が $\mathbb{R}^1$ のとき，Wong and Zakai [5] の収束定理の特別な場合として，任意の一次微分形式 α に対し

$$(1.1)\qquad \int_{X_n[0,t]}\alpha \longrightarrow \int_{X[0,t]}\alpha \qquad (n\to\infty)$$

がなりたつ。また，$X(t)$ を2次元ブラウン運動，$X_n(t)$ をその折線近似とするとき，Lévy [3] の確率面積の近似は $\alpha = (x^1dx^2 - x^2dx^1)/2$ に対する (1.1) の形の収束にほかならない。しかしながら，多次元の場合，$X_n(t)$ が $X(t)$ に広義一様収束していても (1.1) の形の収束がなりたつとは限らず (McShane [4])，ある近似列のクラスに関しては，' 曲線 X_n の囲む面積' $\int_{X_n[0,t]}(x^i dx^j - x^j dx^i)/2$ の挙動に関係した補正項の現れることがわかっている (Ikeda Nakao and Yamato [2])。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

この報告では，[2] の結果をリーマン多様体の場合に拡張することを考える。

2. 近似クラスの定義

M は d 次元リーマン多様体とする。$[0,\infty)$ から M への連続関数の全体を Ω，$\omega\in\Omega$，$t\in[0,\infty)$ に対し $\omega(t)=X(t,\omega)$，$\mathcal{F}_t=\sigma[X(s,\omega);s\in[0,t]]$，$\mathcal{F}=\sigma[X(s,\omega);s\in[0,\infty)]$ とし，シフトオペレーターを θ_t で表わす。$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X(t),\theta_t,P_x)$ が M の上のブラウン運動であるとする。

<u>定義</u>　$(\Omega,\mathcal{F},P_x)$ の上で定義された M-値確率過程の列 $\{X_n(t,\omega);n=1,2,\cdots\}$ が次の条件をみたすとき $\{X_n(t,\omega);n=1,2,\cdots\}\in A(X)$ と定義する。

(A.1)　$X_n(k2^{-n},\omega)=X(k2^{-n},\omega)$，$k=0,1,\cdots$。

(A.2)　$X_n(t+k2^{-n},\omega)=X_n(t,\theta_{k2^{-n}}\omega)$，$t\in[0,\infty)$，$k=0,1,\cdots$。

(A.3)　$t\in[0,2^{-n}]$ のとき $X_n(t,\omega)$ は $\mathcal{F}_{2^{-n}}$-可測。

(A.4)　$X_n(t,\omega)$ は t につき連続かつ区分的になめらかである。

(A.5)　定数 $C>0$ があって

$$E_x[l_n^6]\leq C2^{-3n},\quad x\in M,\ n=1,2,\cdots。$$

ここで l_n は曲線 $X_n(t)$，$t\in[0,2^{-n}]$ の長さを表わす。

ここでは，U が相対コンパクトな M の開集合で U の任意の2点が U に含まれるただ一本の測地線で結ばれるとき，U を normal neighborhood と呼ぶ。2点 x,y を結ぶ測地線を $\gamma(t;x,y)$，$t\in[0,1]$ とし，$\underline{\underline{N}}$ は座標近傍 (U,φ) のうち U が normal なもの全体とする．$(U,\varphi)\in\underline{\underline{N}}$ と $n=1,2,\cdots$ に対し

(2.1)　$A(n,U)=\{\omega\in\Omega,\ {}^{\forall}t\in[0,2^{-n}]\ X_n(t,\omega)\in U\}$

とおき，

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

(2.2) $\quad \gamma_n(s,\omega) = \gamma(2^n s\,;\, X(0,\omega),\, X(2^{-n},\omega))$

(2.3) $\quad c_{n,\omega}(s,t) = \gamma(t\,;\, X_n(s,\omega),\, \gamma_n(s,\omega))$

$(s\in[0,2^{-n}],\ t\in[0,1],\ \omega\in A(n,U))$ と定義する。写像 $c_{n,\omega}$ によって定義される2-チェイン上の積分を $\int_{c(n,\omega)}\cdot$ または $\int_{c(n)}\cdot$ と書く。

いま、S は(2,0)型の交代テンソル場とする。$(U, (x^1,\cdots,x^d))\in \underline{\underline{N}}$ および U のコンパクト部分集合 K に対し、$\{X_n\,;\,n=1,2,\cdots\}\in A(X)$ のみたすべき次の条件を考える。

<u>条件(*)</u> 定数 $C>0$ があって

(2.4) $$\sum_{1\le i<j\le d}\ \sup_{x\in K}\left|2^n E_x\left[\int_{c(n)} dx^i\wedge dx^j\,;\,A(n,U)\right] - S^{ij}(x)\right| \le C\,2^{-n/3},$$

$n=1,2,\cdots$。ここで $S^{ij}(x)$ は点 x における S の (i,j) 成分を表わす。

<u>注意</u> 上の条件は局所座標を用いて書かれているが、この条件のなりたつことは局所座標の取り方によらない。

<u>定義</u> 任意の $(U,(x^1,\cdots,x^d))\in \underline{\underline{N}}$ と U のコンパクト部分集合 K に対し条件(*)がなりたつとき、$\{X_n\,;\,n=1,2,\cdots\}\in A(X,S)$ と定義する。

<u>3. 結果</u>

$T^2(x)$ を x における(2,0)型テンソルの空間、$T_2(x)$ をその双対空間とし、$T^2(x)\times T_2(x)$ の上の標準的な双線型写像

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

を $\langle\ ,\ \rangle(x)$ で表わす。このとき次のことがなりたつ。

定理 $\{X_n;n=1,2,\cdots\}\in A(X,S)$ のとき任意の一次微分形式 α に対し，確率1で

$$\int_{X_n[0,t]}\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{X[0,t]}\alpha+\frac{1}{2}\int_0^t\langle S,d\alpha\rangle(X(s))\,ds$$

（広義一様収束） となっている。

例 Mを上半平面の上に実現した hyperbolic plane とする。$t\in[0,2^{-n}]$ に対し

$$X_n(t,\omega)=\exp_{X(0,\omega)}(-\sqrt{-1}\,2^n t\,\dot{\gamma}(0;X(0,\omega),X(2^{-n},\omega)))$$

とおき，一般の t に対しては

$$X_n(t,\omega)=X_n(t-[2^n t]2^{-n},\ \theta_{[2^n t]2^{-n}}\omega)$$

とおくとき，

$$\{X_n;n=1,2,\cdots\}\in A\left(X;\ (x^2)^2\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$$

となっている。

4、定理の証明

補題 $(U,(x^1,\cdot,x^d))\in\underline{\underline{N}}$ のとき，適当な定数 $C>0$ に対し，

$$\iint_{[0,2^{-n}]\times[0,1]}\left|\frac{\partial}{\partial s}c_{n,\omega}{}^i(s,t)\frac{\partial}{\partial t}c_{n,\omega}{}^j(s,t)\right|ds\,dt\le C\,l_n(\omega)^2$$

（$n=1,2,\cdots,\ 1\le i,j\le d,\ \omega\in A(n,U)$）となっている。ここに $c_{n,\omega}{}^i$ は $c_{n,\omega}$ の i-成分を表わす。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

<u>証明</u>　(2.3)の両辺を微分して

$$\left|\frac{\partial}{\partial s} c_n^i(s,t)\right| \leq \text{const.}\left(\|\dot{X}_n(s)\| + \|\dot{\gamma}_n(s)\|\right)$$

および

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} c_n^j(s,t)\right| \leq \text{const.}\ \mathrm{dis}\left(X_n(s), \gamma_n(s)\right)$$

を得る。三角不等式により

$$\mathrm{dis}\left(X_n(s), \gamma_n(s)\right) \leq 2 l_n$$

となるので

$$\iint_{[0,2^{-n}]\times[0,1]} \left|\frac{\partial}{\partial s} c_n^i(s,t) \frac{\partial}{\partial t} c_n^j(s,t)\right| ds\,dt$$

$$\leq \text{const.}\ l_n \iint_{[0,2^{-n}]\times[0,1]} \left(\|\dot{X}_n(s)\| + \|\dot{\gamma}_n(s)\|\right) ds\,dt$$

$$\leq \text{const.}\ l_n^2$$

Q.E.D.

<u>定理の証明</u>　*normal neighborhood* からなる M の被覆とこれに従属した単位の分割を考えることにより，α の台が一つの *normal neighborhood* U に含まれる場合について証明すればよいことがわかる。このとき，

$$Z_n(t,\omega) = \int_{X_n[0,t]} \alpha - \int_{X[0,t]} \alpha - \frac{1}{2}\int_0^t \langle S, d\alpha\rangle(X(s))\,ds$$

とおき

$$A(n) = \{\omega\in\Omega\ ;\ X_n([0,2^{-n}]) \subset U\},$$

$$B(n) = \{\omega\in\Omega\ ;\ X([0,2^{-n}]) \subset U\},$$

$$C(n) = \{\omega\in\Omega\ ;\ X_n([0,2^{-n}]) \subset (\mathrm{supp}\,\alpha)^c\},$$

$$D(n) = \{\omega\in\Omega\ ;\ X([0,2^{-n}]) \subset (\mathrm{supp}\,\alpha)^c\},$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$E(n,T)=\{\omega\in\Omega\,;\ \forall k=0,1,\cdots,[2^nT]\quad \theta_{k2^{-n}}\omega\in (A(n)\cap B(n))\cup(C(n)\cap D(n))\},$$

$$A(n,k)=\{\omega\in\Omega\,;\ \theta_{k2^{-n}}\omega\in A(n)\},$$

$$E(n,k,T)=E(n,T)\cap A(n,k)$$

とする。チェビシェフの不等式から

$$P_x[\sup_{t\in[0,T]}|Z_n(t,\omega)|\geq 2^{-n/6}]$$

$$\leq 2^{n/3}E_x[\sup_{t\in[0,T]}Z_n(t,\omega)^2\,;E(n,T)]+P_x[E(n,T)^c]。$$

$\omega\in E(n,T)^c$ のとき，曲線 $X_n(t,\theta_{k2^{-n}}\omega)$, $t\in[0,2^{-n}]$ または $X(t,\theta_{k2^{-n}}\omega)$, $t\in[0,2^{-n}]$ のどちらかが U^c および $\mathrm{supp}\,\alpha$ の両方と交わるので，(A.2) と (A.5) により

(4.2) $$P_x[E(n,T)^c]\leq \mathrm{const}.\,2^{-2n}T$$

がわかる。したがって，次の評価：

(4.3) $$E_x[\sup_{t\in[0,t]}Z_n(t,\omega)^2\,;E(n,T)]\leq \mathrm{const}.\,2^{-\frac{2}{3}n}T^2$$

を証明すれば定理の結果が得られる。

明らかに

(4.4) $$\sup_{t\in[0,T]}|Z_n(t,\omega)|\leq \max_{0\leq l<[2^nT]}\left|\sum_{k=0}^{l}Z_n(2^{-n},\theta_{k2^{-n}}\omega)\right| + \sup_{0\leq t\leq T}|Z_n(t-[2^nt]2^{-n},\theta_{[2^nt]2^{-n}}\omega)|$$

であり，右辺第２項は，(A.2), (A.5) により

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$(4.5)\quad E_x\Big[\sup_{0\le t\le T} Z_n(t-[2^n t]2^{-n},\ \theta_{[2^n t]2^{-n}}\omega)^2 ; E(n,T)\Big]$$
$$\le \text{const.}\ 2^{-\frac{2}{3}n}\,T^{\frac{1}{3}}$$

となる。また，$E(n,T)$ と $E(n,k,T)$ の定義から

$$Z_n(2^{-n}, \theta_{k2^{-n}}\omega)\,I_{E(n,T)} = Z_n(2^{-n}, \theta_{k2^{-n}}\omega)\,I_{E(n,k,T)}$$

であり，ストークスの定理により

$$(4.6)\quad Z_n(2^{-n},\omega) = \Big\{\int_{C(n,\omega)} d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{2^{-n}} \langle \mathcal{S}, d\alpha\rangle(X(s,\omega))\,ds\Big\} + \Big\{\int_{\gamma_n[0,2^{-n}]}\alpha - \int_{X[0,2^{-n}]}\alpha\Big\},\quad \omega\in A(n)。$$

まず次のことを証明する。

$$(4.7)\quad E_x\Big[\max_{0\le l<[2^nT]}\Big|\sum_{k=0}^{l}\Big\{\int_{C(n,k,\omega)} d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{2^{-n}}\langle \mathcal{S}, d\alpha\rangle(X(s,\theta_{k2^{-n}}\omega))\,ds\Big\}\Big|^2$$
$$\times I_{E(n,k,T)}\Big] \le \text{const.}\ 2^{-\frac{2}{3}n}\,T^2。$$

ここで $C(n,k,\omega) = C(n,\theta_{k2^{-n}}\omega)$ とする。任意の $1\le i,j\le d$ と $y\in M$ に対し

$$\mathcal{S}_n^{ij}(y) = 2^n E_y\Big[\int_{C(n)} dx^i\wedge dx^j ;\ A(n)\Big]$$

とおいて

$$\int_{C(n)} d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{2^{-n}}\langle \mathcal{S}, d\alpha\rangle(X(s))\,ds$$
$$(4.8)\quad = \Big\{\int_{C(n)} d\alpha - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(d\alpha)_{ij}(X(0))\int_{C(n)} dx^i\wedge dx^j\Big\}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(d\alpha)_{ij}(X(0))\Big\{\int_{C(n)} dx^i\wedge dx^j - 2^{-n}\mathcal{S}_n^{ij}(X(0))\Big\} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(d\alpha)_{ij}(X(0))2^{-n}\{s_n^{ij}(X(0))-s^{ij}(X(0))\}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{2^{-n}}\{\langle s,d\alpha\rangle(X(0))-\langle s,d\alpha\rangle(X(s))\}ds$$

の各項を評価する。

$$(d\alpha)_{ij}(X(k2^{-n}))I_{E(n,k,T)}=(d\alpha)_{ij}(X(k2^{-n}))I_{A(n,k)}\cdot I_{E(n,T)}$$

および

$$(d\alpha)_{ij}(X(k2^{-n}))I_{E(n,k,T)}=(d\alpha)_{ij}(X(k2^{-n}))I_{E(n,T)}$$

に注意して

$$\frac{1}{2}\sum_{ij}(d\alpha)_{ij}(X(k2^{-n}))\{\int_{C(n,k)}dx^i\wedge dx^j-2^{-n}s_n^{ij}(X(k2^{-n}))\}I_{E(n,k,T)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{ij}(d\alpha)_{ij}(X(k2^{-n}))\{\int_{C(n,k)}dx^i\wedge dx^j\cdot I_{A(n,k)}-2^{-n}s_n^{ij}(X(k2^{-n}))\}I_{E(n,T)},$$

$k=0,1,\cdots,[2^nT]$ となるが，マルコフ性と s_n^{ij} の定義から

$$E_x[\int_{C(n,k)}dx^i\wedge dx^j\cdot I_{A(n,k)}-2^{-n}s_n^{ij}(X(k2^{-n}))\mid\mathcal{F}_{k2^{-n}}]=0$$

となるので，

(4.9)
$$E_x[\max_{0\le l<[2^nT]}|\sum_{k=0}^{l}\frac{1}{2}\sum_{i,j}(d\alpha)_{ij}(X(k2^{-n}))\{\int_{C(n,k)}dx^i\wedge dx^j-2^{-n}s_n^{ij}(X(k2^{-n}))\}I_{E(n,k,T)}|^2]\le \mathrm{const.}\,2^{-n}T$$

を得る。また，補題により

(4.10) $$|\int_{C(n)}d\alpha-\frac{1}{2}\sum_{i,j}(d\alpha)_{ij}(X(0))\int_{C(n)}dx^i\wedge dx^j|\le \mathrm{const.}\,l_n^3$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

となり，$\{x_n\} \in A(X; S)$ であることから

(4.11) $$|S_n^{ij}(X(0)) - S^{ij}(X(0))| \leq \text{const.}\, 2^{-n/3}$$

となる。したがって，(4.8), (4.9) (4.10), (4.11) および $\langle S, d\alpha\rangle$ のリプシッツ連続性により (4.7) の評価を得る。

次に

(4.12) $$E_x\Big[\max_{0\leq l<[2^nT]}\Big|\sum_{k=0}^{l}\Big\{\int_{\gamma_n[0,2^{-n}]}\alpha - \int_{X[0,2^{-n}]}\alpha\Big\}(\theta_{k2^{-n}}\omega)\times I_{E(n,k,T)}\Big|^2\Big] \leq \text{const.}\, 2^{-n}T^2$$

を証明する。X, γ_n の i 座標をそれぞれ X^i, γ_n^i とし，

$$\Delta X^i(n) = X^i(2^{-n}) - X^i(0)$$

とおくとき

(4.13) $$\int_{\gamma_n[0,2^{-n}]}\alpha - \int_{X[0,2^{-n}]}\alpha = \Big[\sum_i\int_0^{2^{-n}}\{\alpha_i(\gamma_n(s)) - \alpha_i(X(0))\}d\gamma_n^i(s) - \sum_{i,j}\frac{1}{2}\int_0^{2^{-n}}\Big(g^{ij}\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\alpha_i\Big)\Big)(X(s))ds\Big] + \sum_i\int_0^{2^{-n}}\{\alpha_i(X(0)) - \alpha_i(X(s))\}dX^i(s)$$

であり，$\gamma_n(0) = X(0)$ に注意して

(4.14) $$\begin{aligned}&\sum_i\int_0^{2^{-n}}\{\alpha_i(\gamma_n(s)) - \alpha_i(X(0))\}d\gamma_n^i(s) - \sum_{i,j}\frac{1}{2}\int_0^{2^{-n}}\Big(g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\alpha_i\Big)(X(s))ds\\ &= \sum_{i,j}\int_0^{2^{-n}}ds\int_0^s du\Big\{\dot\gamma_n^i(s)\dot\gamma_n^j(u)\frac{\partial}{\partial x^j}\alpha_i(\gamma_n(u)) - 2^{2n}\Delta X^i(n)\Delta X^j(n)\frac{\partial}{\partial x^j}\alpha_i(X(0))\Big\}\\ &+ \sum_{i,j}\frac{1}{2}\Big\{\Delta X^i(n)\Delta X^j(n) - \int_0^{2^{-n}}g^{ij}(X(s))ds\Big\}\frac{\partial}{\partial x^j}\alpha_i(X(0))\\ &+ \sum_{i,j}\frac{1}{2}\int_0^{2^{-n}}g^{ij}(X(s))\Big\{\frac{\partial}{\partial x^j}\alpha_i(X(0)) - \frac{\partial}{\partial x^j}\alpha_i(X(s))\Big\}ds\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

となるが，(4.13), (4.14) に指数写像の初等的な評価：

$$(4.15) \qquad \sup_{\substack{s\in[0,2^{-n}] \\ 1\le i\le d}} \left| \dot{\gamma}_n^i(s) - 2^n \Delta X^i(n) \right| \le \text{const.}\, 2^n \sum_{i=1}^{d} |\Delta X^i(n)|^2$$

を適用して (4.12) が得られる。ゆえに (4.6), (4.7) および (4.12) により (4.3) が証明された。 Q. E. D.

文　献

[1] N. Ikeda and S. Manabe : Integral of differential form along the path of diffusion process, to appear.

[2] N. Ikeda, S. Nakao and Y. Yamato : A class of approximations of Brownian motion, to appear.

[3] P. Lévy : Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, Paris, 1948.

[4] E. J. McShane : Stochastic differential equations and models of random processes, Proc. 6-th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. 3 (1970), 263-294.

[5] E. Wong and M. Zakai : On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals, Ann. Math. Statist. 36 (1965), 1560-1564.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Non-cutoff Boltzmann 方程式に対する chaos の伝播について（2次元の場合）

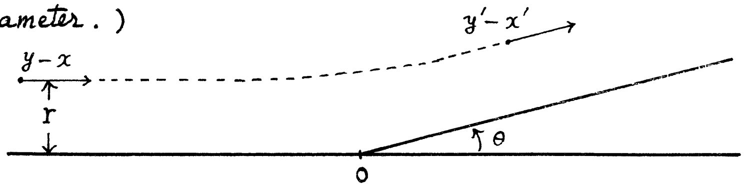
村田　博

§1. Introduction.

平面内で非常に多くの（同一種の）粒子から成る稀薄気体を考える。時刻 t で，速度が dx（$\subset R^2$）にあるような粒子数の割合を $u(t,x)dx$ で書くと，外力がなく，空間的に一様な場合の速度分布密度 $u(t,x)$ に対する Boltzmann 方程式は次の形をもつ。

$$(1.1)\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \int_{R^1\times R^2} \{u(t,x')u(t,y') - u(t,x)u(t,y)\}\, |x-y|\, dr\, dy \ , \quad x\in R^2.$$

ただし，x', y' は速度 x, y をもつ2粒子が次のような状態で瞬間的に"衝突"した結果の速度を表わすものとする。（r は impact parameter.）



粒子間力が，2体間距離の3乗に反比例するような2体間斥力のみで決まっている場合，運動量保存則とエネルギー保存則等から，x', y' は上の θ を用いて一意に求まる。

$$x' = \frac{x+y}{2} + R\frac{x-y}{2} \ ,\quad y' = \frac{x+y}{2} - R\frac{x-y}{2} \ ;\quad R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

このとき，

$$|x-y|\,dr = Q(\theta)\,d\theta \ ;\quad Q(\theta) = Q(-\theta) \geqq 0\ ,\quad Q(\theta) \overset{(\theta\to 0)}{\sim} \mathrm{const}.\,|\theta|^{-\frac{3}{2}}.$$

（3次元の Maxwellian gas については，Ford-Uhlenbeck [4] 参照．）
したがって，方程式 (1.1) は次のように書ける。

$$(1.2)\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \int_{(-\pi,\pi)\times R^2} \{u(t,x')u(t,y') - u(t,x)u(t,y)\}\, Q(d\theta)\,dy \ ,\quad x\in R^2,$$

$$Q(d\theta) = Q(\theta)\,d\theta\ ,\quad \int_{-\pi}^{\pi} |\theta|\,Q(d\theta) < \infty\ ,\quad (\bigstar)\ \int_{-\pi}^{\pi} Q(d\theta) = \infty\ (\text{non-cutoff}).$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

(★) のもとでは，方程式 (1.2) の解の存在は知られていない。(1.2) を積分して，次の probability measure $u(t,\cdot)$ に関する方程式を考えよう。

$$(1.3)\begin{cases} \dfrac{\partial \langle u(t,\cdot), \varphi \rangle}{\partial t} = \displaystyle\int_{(-\pi,\pi)\times R^2\times R^2} \{\varphi(x') - \varphi(x)\}\, Q(d\theta)\, u(t,dx)\, u(t,dy)\ , \quad \varphi \in C_0^\infty(R^2), \\ u(0,\cdot) = f(\cdot)\ . \end{cases}$$

[chaos の伝播の説明] 方程式 (1.3) に対する chaos の伝播とは，次のことである。「f を R^2 における確率分布とし，n 粒子の速度分布 $u_n(t,\cdot)$ が

$$(1.4)\begin{cases} \dfrac{\partial \langle u_n(t,\cdot), \psi \rangle}{\partial t} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i<j}\int_{(-\pi,\pi)\times R^{2n}} \{\psi(x'_{ij}) - \psi(x)\}\, Q(d\theta)\, u_n(t, dx_1\cdots dx_n)\ , \\ x'_{ij} = (x_1,\cdots,x'_i,\cdots,x'_j,\cdots,x_n) \quad \text{for} \quad x = (x_1,\cdots,x_n) \quad , \ \psi \in C_0^\infty(R^{2n}), \\ u_n(0,\cdot) = f\otimes\cdots\otimes f\ (\cdot) \qquad (n\text{-fold outer product})\ . \end{cases}$$

に従っているものを考える。$m \geq 1$ をとり，u_n の $x_1,\cdots,x_m$ に関する周辺分布を $u_{m/n}$ とかく。このとき，任意の $t \in R^1_+$ で

$$u_{m/n}(t) \longrightarrow \overbrace{u(t)\otimes\cdots\otimes u(t)}^{m}\ , \qquad n \to \infty$$

が成り立つ。ここに $u(t)$ は (1.3) の解である。」 すなわち，粒子数を無限に多くした極限において，任意有限個の粒子の速度分布は再び独立性をもつことを意味する。

M. Kac (1955) は，1次元 Maxwell 型 (cutoff) モデルに対して chaos の伝播を証明した。cutoff 型の Boltzmann 方程式に対する chaos の伝播は，McKean, Johnson, 上野, 田中(洋), Grümbaum, Berresford 等によって調べられた。ここでは，上述のような non-cutoff 型の Boltzmann 方程式に対して，chaos の伝播を証明することを目的とする。証明の道筋をわかりやすくするため，手段として用いる proposition, theorem 等 (§2 ～ §4) は証明なしに述べてある。[1] を参照されたい。

§2. A metric ρ .

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$\mathcal{P} = \left\{ f : f \text{ は } R^2 \text{ の確率測度}, \int_{R^2} |x| f(dx) < \infty \right\}$$

とおき， $f, g \in \mathcal{P}$ に対して， $h(A \times R^2) = f(A)$， $h(R^2 \times A) = g(A)$ $(A \in \mathcal{B}(R^2))$ をみたす R^4 の確率測度の全体を $\mathcal{H}_{f,g}$ とかく。

$$\rho(f, g) = \inf_{h \in \mathcal{H}_{f,g}} \int_{R^4} |x - y| \, h(dx dy) \quad , \quad f, g \in \mathcal{P}$$

を定義すると， ρ は $\mathcal{P}$ 上の metric を定めることが，田中(洋)[3]と同じ方法によって示される。ここでは，あとの§5 に使う ρ の性質をあげておく。

<u>記号</u> $\mathcal{P}_L = \{ f \in \mathcal{P} : f(|x| \leq L) = 1 \}$

$f \in \mathcal{P}$ に対して， $f_L \in \mathcal{P}_L$ を次の式により定義する。

$$< \psi, f_L > = < \psi_L , f > \qquad \psi : \text{有界連続}.$$

ただし，

$$\psi_L(x) = \begin{cases} \psi(x) & , |x| \leq L , \\ \psi(Lx/|x|) & , |x| > L . \end{cases}$$

$$\Phi_L = \left\{ \varphi : R^2 \to R^1 , \begin{array}{l} \text{Lipschitz 連続 (Lipschitz 定数} \leq 1) \text{ かつ} \\ \varphi(0) = 0 , \quad \varphi = \varphi_L \end{array} \right\}$$

<u>*Proposition 2.1.*</u> 任意の $\varepsilon > 0$ と $L > 0$ に対して，定数 $K = K(\varepsilon, L) > 0$ と有限集合 $\Phi_L^\varepsilon \subset \Phi_L$ が存在して，

$$(2.1) \quad \rho(f, g) \leq K \cdot \max_{\varphi \in \Phi_L^\varepsilon} \{ < \varphi, f > - < \varphi, g > \}$$
$$+ \rho(f, f_L) + \rho(g, g_L) + \varepsilon \quad , \quad f, g \in \mathcal{P} .$$

<u>*Proposition 2.2.*</u> 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次の4性質をみたす transition function $P_{f,g}^\varepsilon(x, B)$， $x \in R^2$， $B \in \mathcal{B}(R^2)$ $(f, g \in \mathcal{P})$ が存在する。

(2.2) 各 $B \in \mathcal{B}(R^2)$ に対して， $P_{f,g}^\varepsilon(x, B)$ は $(x, f, g) \in R^2 \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ につき可測。

(2.3) 各 $(x, f, g) \in R^2 \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ に対して， $P_{f,g}^\varepsilon(x, \cdot)$ は R^2 の確率測度。

(2.4) $\int_{R^2} f(dx) P_{f,g}^\varepsilon(x, \cdot) = g(\cdot)$.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$(2.5)\quad \int_{R^2}\int_{R^2} |x-y|\, f(dx)\, P^{\varepsilon}_{f,g}(x,dy) \leqq \rho(f,g) + \varepsilon \quad .$$

§3. Poisson random measures.

Poisson random measures について，あとで必要な事柄を列挙しておく。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間，$(\mathbb{S}, \lambda)$ を σ-有限な測度空間とし，

$$\mathcal{M}_\lambda(\mathbb{S}) = \left\{ \mu : \mu = \sum_{\text{高々可算}} \delta_{s_i} \ (s_i \in \mathbb{S}),\ \ \begin{array}{l} \mu(A) < \infty \ \text{ for each } A : \\ \lambda(A) < \infty \end{array} \right\}$$

とおく。 $p : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_\lambda(\mathbb{S})$ が，<u>平均 measure λ の Poisson random measure</u> であるとは，

(i) 各 $A : \lambda(A) < \infty$ に対して，$p(A)$ は $\mathcal{F}$-可測，

(ii) 互いに素な λ-有限集合列 $A_1, \cdots, A_k$ に対し，

$$P\{ p(A_j) = n_j \ , j=1,\cdots,k \} = \prod_{j=1}^{k} \lambda(A_j)^{n_j} \exp\{-\lambda(A_j)\} / n_j! \ , \quad n_j = 0,1,2,\cdots$$

が成り立つときをいう。ここに，$p(A) = p(\omega, A) = (p(\omega))(A)$.

ここでは，$\{\mu_t, t \geqq 0\}$ を可測空間 $(S, \mathcal{S})$ の σ-有限な測度の系とし，$\mathbb{S} = R^1_+ \times S$，$d\lambda = dt\,\mu_t(d\sigma)$ で与えられていて，また，$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に sub-σ-fields の増加列 $\{\mathcal{F}_t, t \geqq 0\}$ が与えられている場合を考える。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された，$R^1_+ \times S$ 上の Poisson random measure p が

(i) 各 $A \in \mathcal{B}([0,t] \times S)$ に対し，$p(A)$ は $\mathcal{F}_t$-可測，

(ii) 各 $t \in R^1_+$ に対し，$\sigma\{ p(A),\ A \in \mathcal{B}((t,\infty) \times S)\}$ は $\mathcal{F}_t$ と独立

をみたすとき，<u>$\mathcal{F}_t$-adapted</u> と呼ぶ。

平均 measure $d\lambda = dt\,\mu_t(d\sigma)$ をもつ $\mathcal{F}_t$-adapted な Poisson random measure p と，

$$(3.1)\quad E\left\{ \int_{[0,t]\times S} |a(s,\sigma,\omega)|\, \mu_s(d\sigma)\, ds \right\} < \infty \quad , \quad t \in R^1_+$$

をみたす $\mathcal{F}_t$-predictable[*)] な $a(t,\sigma,\omega)$ に対し，

*) $\mathcal{F}_t$-predictable の定義については，例えば 渡辺(信) [5] を見よ。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$(3.2)\quad \int_{[0,t]\times S} a(s,\sigma,\omega)\, p(ds\, d\sigma) - \int_{[0,t]\times S} a(s,\sigma,\omega)\, \mu_s(d\sigma)\, ds$$

は $\mathcal{F}_t$ - martingale（平均０）となる。

<u>Theorem 3.1.</u>　mapping　$p:\Omega \longrightarrow \mathcal{M}_\lambda(\mathbb{R}^1_+\times S)$ が

$$\mathbb{P}\{\, p(\omega, \{t\}\times S) = 0 \text{ or } 1 \ , \forall t\in \mathbb{R}^1_+ \,\} = 1$$

をみたすとし，$\{\mathcal{F}_t, t\geqq 0\}$ は $\mathcal{F}$ の sub-σ-fields の増加列とする。このとき，(3.1)をみたす任意の $\mathcal{F}_t$ - predictable な関数 $a(t,\sigma,\omega)$ に対して，(3.2) が $\mathcal{F}_t$ - martingale になることと，p が平均 measure $d\lambda = dt\,\mu_t(d\sigma)$ をもつ $\mathcal{F}_t$ - adapted な Poisson random measure になることとは同値である。

§4. Stochastic Integral Equations (corresponding to (1.3) & (1.4)).

$a(x,y,\theta) = x' - x$,　$S = (-\pi,\pi)\times(0,1]$,　$S_t = [0,t]\times S$ とする．確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ と，sub-σ-fields の増加列 $\{\mathcal{F}_t\}$ を適当に選んで，平均 measure $dt\,Q(d\theta)\,d\alpha$ をもつ $\mathbb{R}^1_+\times S$ 上の $\mathcal{F}_t$ - adapted な Poisson random measure $p(\omega, dt\,d\theta\,d\alpha)$ をとる．$\mathcal{F}_0$ - 可測な $\mathbb{R}^2$ - 値確率変数 $X(0)$ に対して

$$(4.1)\quad X(t) = X(0) + \int_{S_t} a(X(s-), Y(s,\alpha), \theta)\, p(ds\,d\theta\,d\alpha)\ ,\quad t\geqq 0$$

を考えよう。今もし $\mathcal{F}_t$ - adapted process $\{X(t,\omega), t\geqq 0\}$ と，確率空間 $((0,1], d\alpha)$ 上で定義された process $\{Y(t,\alpha), t\geqq 0\}$ が，

(i)　各 $t\in\mathbb{R}^1_+$ に対して，$Y(t)$ と $X(t-) \equiv \lim_{\varepsilon\downarrow 0} X(t-\varepsilon)$ が同分布，

(ii)　(4.1) が確率１で成り立つ

をみたすとき，この $\{X(t,\omega)\}$ を (4.1) の<u>解</u>と呼ぶ。

次の評価

$$(\blacklozenge)\quad \begin{cases} |a(x,y,\theta)| \leqq |\sin(\theta/2)|\cdot(|x|+|y|) \\ |a(x,y,\theta) - a(x_1,y_1,\theta)| \leqq |\sin(\theta/2)|\cdot(|x-x_1|+|y-y_1|) \end{cases}$$

が成り立っているので，３次元 Maxwellian gas の場合の田中(洋) [2] の方法を用いると，次の定理が同様に（より簡単に）示される。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Theorem 4.1. $f \in \mathcal{P}$ とし，$X(0)$ を $\mathcal{F}_0$－可測な f－分布確率変数とする。このとき，(＊) $\int_0^t E\{|X(s)|\}ds < \infty$ $(t<\infty)$ をみたす (4.1) の $\mathcal{F}_t$－adapted な解 $\{X(t), t \geq 0\}$ が存在する。また，$\{X(t)\}$，$\{\tilde{X}(t)\}$ を，上の可積分条件(＊)をみたすような (4.1) の $\mathcal{F}_t$－adapted な解（初期分布は共に f）とすれば，それらは equivalent. さらに，解 $X(t)$ の分布を $u(t)$ とおくと (1.3) の解になる。

分布の意味の一意性は，§5 ではもう少し広げておく必要がある。$f \in \mathcal{P}$ とし，Th. 4.1 で定まる $u(0)=f$ なる (1.3) の解を $u(t)$ とかく。$\{Y(t,\omega,\alpha), t \geq 0\}$ を，$\mathcal{F}_t$－predictable で，かつ 各 t,ω に対して，α についての $Y(t,\omega,\cdot)$ の分布 $= u(t)$ なるものとして与える。このとき，(◆) から

$$(4.2)\quad \hat{X}(t) = \hat{X}(0) + \int_{S_t} a(\hat{X}(s-), Y(s,\omega,\alpha), \theta)\, p(ds\,d\theta\,d\alpha), \quad t \geq 0$$

は一意解をもつ（$\hat{X}(0)$ は $\mathcal{F}_0$－可測，$E\{|\hat{X}(0)|\} < \infty$ とする）。

Theorem 4.2. $\{\hat{X}(t), t \geq 0\}$ の任意の有限次元分布は，f と $\hat{X}(0)$ の分布のみによって決まる。特に，$\hat{X}(0)$ を f－分布にとると，$\{\hat{X}(t)\}$ と Th. 4.1 の $\{X(t)\}$ とは equivalent.

n 粒子系方程式 (1.4) に対応する確率積分方程式を考えよう。$\{\bar{p}_{ij}(dt\,d\theta), 1 \leq i,j \leq n\}$ を，同じ平均 measure $dt\,Q(d\theta)/n$ をもつ $R^1_+ \times (-\pi,\pi)$ 上の $\mathcal{F}_t$－adapted Poisson random measures の系で，

(i) $\{\bar{p}_{ij}(dt\,d\theta), i \leq j\}$ は独立，　(ii) $\bar{p}_{ij} = \bar{p}_{ji}$

をみたすものとしてとる。

$$(4.3)\quad \bar{X}_i(t) = \bar{X}_i(0) + \sum_{j \neq i} \int_{U_t} a(\bar{X}_i(s-), \bar{X}_j(s-), \theta)\, \bar{p}_{ij}(ds\,d\theta), \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$U_t = [0,t] \times (-\pi,\pi).$$

Theorem 4.3. $\{\bar{X}_i(0), 1 \leq i \leq n\}$ を，$\mathcal{F}_0$－可測，独立，同分布（その分布を f，$f \in \mathcal{P}$）なる確率変数列とする。このとき，

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

(i) (4.3) の一意解 $\overline{\mathbb{X}}_n(t) = (\overline{X}_1(t), \cdots, \overline{X}_n(t))$ が存在して，その分布を $u_n(t,\cdot)$ とおくと (1.4) の解になる。

(ii) $\int_{R^2} |x|^{2+\delta} f(dx) < \infty$ $(\delta \geqq 0)$ を仮定すると，

(4.4) $E\{|\overline{X}_i(t)|^{2+\delta}\} \leqq E\{|\overline{X}_i(0)|^{2+\delta}\} \exp(2^{4+3\delta} M t)$, $t \geqq 0$, $1 \leqq i \leqq n$

が成り立つ。ただし，$M = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(\theta/2)| \, Q(d\theta)$.

(注意) $\int_{R^2} |x|^{2+\delta} f(dx) < \infty$ $(\delta \geqq 0)$ のもとで，Th. 4.1 の解 $\{X(t), t \geqq 0\}$ も同様の評価をもつ：

(4.5) $E\{|X(t)|^{2+\delta}\} \leqq E\{|X(0)|^{2+\delta}\} \exp(2^{4+3\delta} M t)$, $t \geqq 0$.

§5. Propagation of chaos.

$f \in \mathcal{P}$ とし，Th. 4.3 で得られた n 粒子速度分布に対応する Markov process を $\overline{\mathbb{X}}_n(t) = (\overline{X}_1(t), \cdots, \overline{X}_n(t))$ とする。整数 $m \geqq 1$ $(m \leqq n)$ をとり，$\overline{\mathbb{X}}_{m|n}(t) = (\overline{X}_1(t), \cdots, \overline{X}_m(t))$ とおくと，その path は

$W_m = \{ R^{2m}$-値 右連続，左極限をもつ関数$\}$

に属するようにとれる。W_m では，Skorohod metric から induce される topological Borel field と，cylinder sets から生成される σ-field は一致しており，これを $\mathcal{B}_m$ とかく。

<u>Theorem 5.1.</u> (chaos の伝播) $\int_{R^2} |x|^{2+\delta} f(dx) < \infty$ $({}^{\exists}\delta > 0)$ を仮定する。このとき，各 $m \geqq 1$ に対し，

$$P_{m|n} \longrightarrow \overbrace{P_f \otimes \cdots \otimes P_f}^{m}, \quad n \longrightarrow \infty.$$

ここで，$P_{m|n}$ は $\overline{\mathbb{X}}_{m|n}$ が定める $(W_m, \mathcal{B}_m)$ 上の確率測度，P_f は初期分布 f をもつ (4.1) の解 $\mathbb{X} = \{X(t), t \geqq 0\}$ が定める $(W_1, \mathcal{B}_1)$ 上の確率測度とする。

この Th.5.1 を証明するためには，次を示せば十分である。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

<u>Theorem 5.2.</u> f は Th.5.1 のものとし，整数 $m \geqq 1$ をとる。任意の $\varepsilon > 0$ と $T > 0$ に対し，以下の性質を成り立たせる正整数 $n_0 (\geqq m)$ が存在する： $n \geqq n_0$ に対し，確率空間を適当にとると，

(i) 初期分布 f をもつ (4.1) の n ケの独立な解 $X_1(t), \cdots, X_n(t)$,

(ii) 初期分布 $f \otimes \cdots \otimes f$ (n-fold) をもつ (4.3) の解 $(\overline{X}_1(t), \cdots, \overline{X}_n(t))$

が構成できて，

$$E\left\{ \sup_{0 \leqq t \leqq T} | X_i(t) - \overline{X}_i(t) | \right\} < \varepsilon \quad , \quad 1 \leqq i \leqq m .$$

証明にうつる。まず $n (\geqq m)$ を固定して，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を適当に選んで，平均 measure $dt\, Q(d\theta)\, d\alpha$ をもつ，n^2 コの $R^1_+ \times (-\pi, \pi) \times (0, \frac{1}{n}]$ 上の<u>独立</u>な Poisson random measures の系 $\{ p_{ij}(dt\, d\theta\, d\alpha), 1 \leqq i, j \leqq n \}$ と，それと独立であって，しかも独立，f-分布な確率変数列 $\{ \overline{X}_i(0), 1 \leqq i \leqq n \}$ をとる。

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(\{ \overline{X}_i(0), p_{ij}(A), 1 \leqq i, j \leqq n \}, A \in \mathcal{B}\left([0,t] \times (-\pi,\pi) \times (0, \tfrac{1}{n}]\right) \right),$$

$$\overline{p}_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & i \leqq j \\ p_{ji} & i > j \end{cases} \qquad \text{on} \quad R^1_+ \times (-\pi,\pi) \times (0, \tfrac{1}{n}]$$

とおき，さらに，$R^1_+ \times (-\pi,\pi) \times (0,1]$ の Borel 集合 Γ に対して，

$$p_i(\Gamma) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(\Gamma_j) \quad , \quad \overline{p}_i(\Gamma) = \sum_{j=1}^{n} \overline{p}_{ij}(\Gamma_j) ,$$

$$\Gamma_j = \left\{ (t, \theta, \alpha) \in R^1_+ \times (-\pi,\pi) \times (0, \tfrac{1}{n}] : \ (t, \theta, \alpha + \tfrac{j-1}{n}) \in \Gamma \right\}$$

と定義すると，$p_i(dt\, d\theta\, d\alpha)$, $1 \leqq i \leqq n$, は平均 measure $dt\, Q(d\theta)\, d\alpha$ をもつ $R^1_+ \times (-\pi,\pi) \times (0,1]$ 上の<u>独立</u>な $\mathcal{F}_t$-adapted Poisson random measures となり，また，

$$\overline{p}_{ij}(dt\, d\theta) = \overline{p}_{ij}(dt\, d\theta \cdot (0, 1/n]) \quad , \quad 1 \leqq i, j \leqq n ,$$

は，方程式 (4.3) にあらわれた，平均 measure $dt\, Q(d\theta)/n$ をもつ $R^1_+ \times (-\pi,\pi)$ 上の $\mathcal{F}_t$-adapted Poisson random measures となる。したがって，Th. 4.3 により，Th. 5.2 の (ii) に対応する $\mathcal{F}_t$-adapted な (4.3) の解 $\overline{\mathbb{X}}_n(t) = (\overline{X}_1(t), \cdots, \overline{X}_n(t))$ (初期分布 $f \otimes \cdots \otimes f$) が存

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

在して,

$$(5.1)\quad \overline{X}_i(t) = \overline{X}_i(0) + \sum_{j\neq i}\int_{U_t} a(\overline{X}_i(s-), \overline{X}_j(s-), \theta)\, \overline{p}_{ij}(ds\,d\theta), \quad 1\leqq i\leqq n,$$

をみたす。(5.1) を, $\overline{X}(t,\omega,\alpha)=\overline{X}_j(t,\omega)$, $\alpha\in I_j\equiv(\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]$ とおくことによって、次のように書き換える。

$$(5.2)\quad \overline{X}_i(t) = \overline{X}_i(0) + \int_{S_t} a(\overline{X}_i(s-), \overline{X}(s-,\omega,\alpha), \theta)\, \overline{p}_i(ds\,d\theta\,d\alpha), \quad 1\leqq i\leqq n.$$

<u>Lemma 5.3.</u> $\overline{X}_i(t)$, $1\leqq i\leqq n$, $\overline{X}(t,\omega,\alpha)$ は上のものとし, $u(t)$ を Th. 4.1 で定まる初期分布 f の (1.3) の解とする。このとき, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, 以下の3性質をもつ process $Y^\varepsilon(t,\omega,\alpha)$ が存在する.

(5.3) $Y^\varepsilon(t,\omega,\alpha)$ は $\mathcal{F}_t$-predictable.

(5.4) ω を固定すると, 各 t に対し $Y^\varepsilon(t,\omega,\alpha)$ の分布は $u(t)$.

$$(5.5)\quad E\left\{\int_0^1 |\overline{X}(t,\omega,\alpha)-Y^\varepsilon(t,\omega,\alpha)|\,d\alpha\right\} \leqq E\{\rho(\overline{f}(t-,\omega), u(t))\} + \varepsilon,$$

ただし, $\overline{f}(t-,\omega)$ は $\overline{X}(t-,\omega,\cdot)$ の $\alpha\in(0,1]$ についての分布.

(証明の方針) Borel isomorphism $\xi: R^2\longrightarrow R^1$ を1つとる。$\overline{f}(t-,\omega)$, $u(t)\in\mathcal{P}$ だから Prop. 2.2 が使えて,

$$P^\varepsilon_{\overline{f}(t-,\omega),\,u(t)}(x, B), \quad x\in R^2, \quad B\in\mathcal{B}(R^2)$$

が存在する。$Y_j^*(t,\omega,\beta)$, $\beta\in(0,1]$ を, 分布関数

$$P^\varepsilon_{\overline{f}(t-,\omega),\,u(t)}(\overline{X}_j(t-,\omega), \xi^{-1}((-\infty,\cdot]))$$

の右連続な逆関数とし,

$$Y^\varepsilon(t,\omega,\alpha) = \xi^{-1}(Y_j^*(t,\omega,n\alpha-j+1)), \quad \alpha\in I_j$$

と定義すればよい。

この process $Y^\varepsilon(t,\omega,\alpha)$ を用いて, 次の確率積分を考えよう。

$$(5.6)\quad X_i(t) = \overline{X}_i(0) + \int_{S_t} a(X_i(s-), Y^\varepsilon(s,\omega,\alpha), \theta)\, p_i(ds\,d\theta\,d\alpha), \quad 1\leqq i\leqq n.$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Th.4.2により，(5.6)の $\mathfrak{F}_t$-adapted な解 $\{X_i(t), t \geqq 0\}$ が一意的に存在して，Th.4.1の $\{X(t), t \geqq 0\}$ と equivalent. さらに，Poisson random measures $\{p_i(dtd\theta d\alpha), 1 \leqq i \leqq n\}$ の独立性と，$Y^{\varepsilon}(t,\omega,\alpha)$ の $\mathfrak{F}_t$-predictable 性から，$\{X_i(t), t \geqq 0\}, 1 \leqq i \leqq n$, は独立。したがって，Th.5.2の(i)に対応する n コの独立な processes を得られた。

あとは，順次評価を行なう。そのために，次の補助的な(やはりTh.4.2により一意的に存在している) process を用意する。

$$(5.7)\quad \widetilde{X}_i(t) = \overline{X}_i(0) + \int_{S_t} a(\widetilde{X}_i(s-), Y^{\varepsilon}(s,\omega,\alpha), \theta)\, \overline{p}_i(dsd\theta d\alpha), \quad 1 \leqq i \leqq n.$$

Lemma 5.4. 各 $T>0$ と整数 $m>0$ に対して，n, ε に依存しない定数 $c>0$ が存在して，

$$E\{\sup_{0 \leqq t \leqq T} |X_i(t) - \widetilde{X}_i(t)|\} \leqq c\, n^{-\frac{1}{2}}, \qquad 1 \leqq i \leqq m.$$

証明は，$a(x,y,\theta)$ の滑らかさ(◆)に注意しながら，Poisson random measures p_i と $\overline{p}_i$ の差 $(i \leqq m)$ を評価するだけで求まる。単純に差をとれば，あとは Schwarz の不等式(2次モーメント有限！)で得られるので省略する。

Lemma 5.5. 任意の $\varepsilon>0$ と $T>0$ に対して，n に依存しない定数 $K_\varepsilon>0$ と，n, ε に依存しない定数 $c'>0$ が存在して，

$$E\{\sup_{0 \leqq t \leqq T} |\overline{X}_i(t) - \widetilde{X}_i(t)|\} \leqq K_\varepsilon \cdot n^{-\delta/4(2+\delta)} + c' \cdot \varepsilon, \qquad 1 \leqq i \leqq n.$$

(証明) (5.2), (5.7) と (◆) により，

$$E\{|\overline{X}_i(t) - \widetilde{X}_i(t)|\} \leqq M \int_0^t E\{|\overline{X}_i(s-) - \widetilde{X}_i(s-)| + \rho(\overline{f}(s-,\omega), u(s))\}\, ds$$
$$+ M t \varepsilon, \quad \left(M = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(\theta/2)|\, Q(d\theta)\right).$$

確率分布 $\mathfrak{f}$ の定義と同様にして，process $\widetilde{X}_i$ から $\widetilde{X}(t,\omega,\alpha)$，確率分布 $\widetilde{\mathfrak{f}}$ を定めて，距離 ρ について三角不等式を使うと，

$$(5.8)\quad E\{|\overline{X}_i(t) - \widetilde{X}_i(t)|\} \leqq M \int_0^t E\{|\overline{X}_i(s) - \widetilde{X}_i(s)| + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |\overline{X}_j(s) - \widetilde{X}_j(s)|\}\, ds$$
$$+ M \int_0^t E\{\rho(\widetilde{f}(s-,\omega), u(s))\}\, ds + M t \varepsilon.$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

したがって，Lem. 5.5 のためには，$E\{\rho(\tilde{f}(s-,\omega), u(s))\}$ の評価が本質的である。任意の $L>0$ に対して，Prop. 2.1 を使うと，

$$E\{\rho(\tilde{f}(s-,\omega), u(s))\} \leqq K\cdot E\{\max_{\varphi\in\Phi_L^\varepsilon}[\langle\varphi, \tilde{f}(s-,\omega)\rangle - \langle\varphi, u(s)\rangle]\}$$
$$+ E\{\rho(\tilde{f}(s-,\omega), \tilde{f}(s-,\omega)_L)\} + E\{\rho(u(s), u(s)_L)\} + \varepsilon$$

をみたす定数 $K=K(\varepsilon, L)>0$ がとれる。ところで，

$$E\{\rho(\tilde{f}(s-,\omega), \tilde{f}(s-,\omega)_L)\} \leqq E\{\int_{|x|>L}|x|\,\tilde{f}(s-,\omega,dx)\}$$
$$\leqq E\{\frac{1}{L}\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|\tilde{X}_j(s-,\omega)|^2\} = \mu/L$$

$$\rho(u(s), u(s)_L) \leqq \mu/L, \quad \mu = \int|x|^2 f(dx)$$

を用いると，L を十分大にとって fix することにより，

$$E\{\rho(\tilde{f}(s-,\omega), u(s))\} \leqq K'\cdot E\{|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(\tilde{X}_j(s-)) - M_\varphi(s-)|\} + 3\varepsilon$$
$$\varphi\in\Phi_L^\varepsilon, \quad M_\varphi(s-) = E\{\varphi(X(s-))\}$$

をみたす定数 $K'=K'(\varepsilon)>0$ がとれる。右辺の第一項は

$$E\{|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(\tilde{X}_j(s-)) - M_\varphi(s-)|^2\}$$
$$\leqq \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}E\{|\tilde{X}_j(s-)|^2\} + \frac{1}{n^2}\sum_{j\neq k}|E\{\varphi(\tilde{X}_j(s-))\varphi(\tilde{X}_k(s-))\} - M_\varphi^2(s-)|$$

と評価される。したがって，あとは

<u>Lemma 5.6.</u> 各 $j<k$ と $\varphi\in\Phi_L^\varepsilon$ に対し，n と ε に依存しない定数 c'' が存在して，

$$|E\{\varphi(\tilde{X}_j(t))\varphi(\tilde{X}_k(t))\} - M_\varphi^2(t)| \leqq c''\exp(c''t)\cdot n^{-\delta/2(2+\delta)}.$$

を証明すれば，(5.8) の評価ができ，Gronwall の不等式から Lem. 5.5 が従う。Lem. 5.6 の証明は，新しい Poisson random measure

$$\bar{P}_k^j(\Gamma) = \sum_{i\neq j}\bar{P}_{ki}(\Gamma_i) + P_{kj}(\Gamma_j), \quad \Gamma\in\mathcal{B}(R_+^1\times(-\pi,\pi)\times(0,1])$$

（Γ_i の記号はこの § のはじめのものと同じ）

を考え，確率積分方程式

(5.9) $$\tilde{X}_k^j(t) = \overline{X}_k(0) + \int_{S_t} a(\tilde{X}_k^j(s-), Y^\varepsilon(s,\omega,\alpha), \theta)\, \overline{p}_k^j(ds\,d\theta\,d\alpha)$$

の解 $\tilde{X}_k^j(t)$ を考えると，$\tilde{X}_k(t)$ と同分布，かつ $\underline{\tilde{X}_j(t)}$ と独立である。このとき，Lem. 5.6 の左辺は

$$|E\{\varphi(\tilde{X}_j(t))\cdot(\varphi(\tilde{X}_k(t))-\varphi(\tilde{X}_k^j(t)))\}| \leqq [E\{|\tilde{X}_j(t)|^2\}\cdot E\{|\tilde{X}_k(t)-\tilde{X}_k^j(t)|^2\}]^{\frac{1}{2}}$$

で評価される。確率積分の変換公式を用いて，$|\tilde{X}_k(t)-\tilde{X}_k^j(t)|^2$ を書き換え，2つの Poisson random measures $\overline{p}_k$ と $\overline{p}_k^j$ の差が $\alpha \in I_j$ 上でのみ現われることを用いると，$(2+\delta)$-次モーメントに関する評価 (4.4), (4.5) が使えて証明が終わる。

以上から Lem. 5.5 したがって Lemma 5.4 とあわせて Th 5.2 が証明されたことになる。

最後に，Lem. 5.3 の中で定義した経験分布

$$\overline{f}(t,\omega,\cdot) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{\overline{X}_j(t,\omega)}(\cdot) \quad , \quad t \geqq 0$$

の $u(t)$ への収束が，上の Th. 5.2 の証明中の評価で言えるので注意しておく。

<u>Corollary 5.7.</u> $\int_{R^2} |x|^{2+\delta} f(dx) < \infty$ $(^\exists\delta > 0)$ を仮定すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$P\{\rho(\overline{f}(t,\omega), u(t)) > \varepsilon\} \longrightarrow 0 \quad , \quad n\to\infty, \quad t \geqq 0,$$

したがって，もちろん $\overline{f}(t,\omega) \longrightarrow u(t)$ in probability, $n\to\infty$.

References

[1] H. Murata, Propagation of chaos for Boltzmann-like equation of non-cutoff type in the plane, Hiroshima Math. J. 7-2 (1977), to appear.

[2] H. Tanaka, On Markov process corresponding to Boltzmann's equation of Maxwellian gas, Proc. 2nd Japan-USSR Symp. on Prob. Theory, Lecture Notes in Math., No. 330, 478-489,

Springer-Verlag, 1973.

[3] 田中 洋, Boltzmann方程式の確率論的取り扱い, 東大セミナリーノート 35集, Tokyo, 1975.

[4] G. E. Uhlenbeck and G. W. Ford, Lectures in Statistical Mechanics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963.

[5] 渡辺 信三, Wentzellの境界条件をみたす多次元拡散過程のPoisson point processによる構成, Seminar on Probability Vol. 41, Markov過程の研究, p23-54, 1975, 確率論セミナー.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Unimodality of infinitely divisible distributions of class L

山里　真

1. Introduction and results.

分布函数 $F(x)$ がクラス L に属する，または L 分布函数であるとは，独立確率変数列 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ が，適当に定数 $B_n>0$, A_n を選べば

$$Y_n = B_n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_k - A_n$$

の分布函数が $F(x)$ に収束し，

$$X_{nk} = X_k/B_n \qquad (1 \leq k \leq n)$$

が asymptotically constant になるようにとれることをいう。

L 分布函数 $F(x)$ は明らかに無限分解可能で，その特性函数 $\hat{F}(t)$ の対数は Lévy-Hinchin formula で表わされる。分布函数 $F(x)$ がクラス L に属するための必要十分条件は $\hat{F}(t)$ が以下の性質を持つことである（P. Lévy (1937)）。

$$(1) \qquad \log \hat{F}(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \int_{R_0}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{k(u)}{|u|}du$$

但し $R_0 = R-\{0\}$, $k(u) \geqq 0$, $\int_{-1}^{0-}|u|k(u)du + \int_{0+}^{1} uk(u)du < \infty$, $\int_{|u|\geq 1}\frac{k(u)}{|u|}du < \infty$, $k(u)$ は $u<0$ で非減少，$u>0$ で非増加。

分布函数 $F(x)$ は $x<a$ で下に凸で，$x>a$ で上に凸であるとき，a をモードとする単峰分布函数といわれる。$F(x)$ は，ある a があって，$F(x)$ が a をモードとする単峰分布函数となるとき，単峰であるといわれる。

我々の目的は次の定理を証明することである。

［定理］　クラス L の分布函数はすべて単峰である。

Gnedenko-Kolmogorov が彼等の本の original Russian edition (1949) でこの定理を主張した。彼等のその主張の証明

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

は「零をモードとする2つの単峰分布函数のconvolutionは零をモードとする単峰分布になる」という，Lapinの定理に基づいていた。しかしChung (1953) はLapinの定理がまちがっていることを指適し，反例を作った。その後，Ibragimov (1957) は単峰でないL分布が存在すると主張した。ところが，Sun (1967) がIbragimovの例が実は単峰であることを示した。従って，今まで，クラスLの分布が単峰であるかどうかは解かれていなかった。

今までに，部分的な結果はいくつか得られている。以下の場合にはL分布函数は単峰である。

1. 対称な場合（Wintner (1956)）。
2. (1) で $\sigma^2=0$ かつ $k(0+)+k(0-)\leq 1$ （Zolotarev (1963)）。
3. Lévy 測度が片側だけにある場合（Wolfe (1971b)）。
4. (1) で $k(0+)\leq 1$ かつ $k(0-)\leq 1$ （〃 〃）。
5. (1) で $k(0+)\leq 1$ かつ $k(0-)\leq 2$ （or $k(0+)\leq 2$ かつ $k(0-)\leq 1$ ）（Yamazato (1975)）。

2は4に含まれる。Ibragimov-Chernin (1959) は安定分布（安定分布はクラスLに属する）が単峰であると主張した。しかし，最近，彼等の証明に誤りがあることが判明した（Kanter (1976)）。

一方，Ibragimov (1956) は強単峰（strongly unimodal）という概念（彼は任意の単峰分布函数とのconvolutionが単峰となるような分布函数を強単峰であると定義した）を導入し，分布函数が強単峰になるための必要十分条件を与えた。それは，その分布函数がlog concaveな密度（密度の対数が上に凸）を持つことである。

定理の証明は2つの部分からなる。最初の部分では，2つの単峰分布函数のconvolutionが単峰になるための上記のIbragimovの条件をまとめ，次の部分では [redacted] L分布函数にその条件をみたすものがあり，任意のL分布函数はそれらのconvolutionの極限として得られることを示す。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

2. Proof of Theorem.

定義から次のことが直ちに導かれる。分布函数 $F(x)$ が a をモードとする単峰分布函数であることは $F(x)$ が $(-\infty, a)\cup(a,\infty)$ で絶対連続で，密度の version が $(-\infty, a)$ で非減少，(a,∞) で非増加にとれることと同値である。我々は以後この version を用いることにする。

〔補助定理〕. $G(x)$, $H(x)$ は夫々 a, b をモードとする単峰分布函数とし，

$$F(x) = (G*H)(x) = \int G(x-y)\,dH(y).$$

とする。$G(x)$, $H(x)$ は絶対連続で密度をそれぞれ $g(x)$, $h(x)$ とする。更に，$a > c = \inf\{x;\ G(x)>0\}$ のときには，$g(x)$ が $[c, a]$ で log concave，$g(a-) = g(a) \geq g(a+)$，$g(c+)=0$ を仮定する。同様に $b<d=\sup\{x;\ H(x)<1\}$ のときには，$h(x)$ が $[b, d)$ で log concave，$h(b-) \leq h(b) = h(b+)$ かつ $h(d-)=0$ を仮定する。これらの仮定の下で $F(x)$ は単峰になる。

<u>証明</u>. 次の3つの場合に分けて考える。

case 1. $a=c$ かつ $b=d$

case 2. $a>c$ かつ $b<d$

case 3. $a=c$ かつ $b<d$ 又は $a>c$ かつ $b=d$

$G(x)$, $H(x)$ を夫々適当にずらしても単峰性は保たれるから，以下 $a=b=0$ とする。

case 1. 証略.

case 2. まず $g(x)$, $h(x)$ はそれぞれ $(-\infty,\infty)$ で絶対連続であるとし，$g'(x)$, $h'(x)$ をそれらの Radon-Nikodym derivative とする。すると $f(x)$ は連続な導関数 $f'(x)$ を持つ。$A_\varepsilon(x)$ を次のように定義する。

$$A_\varepsilon(x) = \begin{cases} h(x+\varepsilon)/h(x) & \text{if}\quad h(x)>0 \\ 0 & \text{if}\quad h(x)=0. \end{cases}$$

$h(x)$ に対する仮定から，$A_\varepsilon(x)$ は $x>\inf\{y;\ h(y)>0\}$ で連続，$[0, d]$ で単調非増加で，$x>0$ で $A_\varepsilon(x)\leq 1$，$x<-\varepsilon$ で $A_\varepsilon(x)\geq 1$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

となる．今ある $x_0>0$ で $f'(x_0)\le 0$ であるとする．$\varepsilon>0$ に対し

$$f'(x_0+\varepsilon)=\int_{-\infty}^{0} h(x_0-y)A_\varepsilon(x_0-y)g'(y)dy+\int_{0}^{\infty} h(x_0-y)A_\varepsilon(x_0-y)g'(y)dy$$

であるが，$A_\varepsilon(x)$ が $x>\inf\{y; h(y)>0\}$ で非負連続であり，$g'(x)$ が $(-\infty,0)$，$(0,\infty)$ のそれぞれの区間で符号変化がなく，$g'(x)h(x_0-y)$ が可積分であることから

$$f'(x_0+\varepsilon)=A_\varepsilon(\xi_1)\int_{-\infty}^{0} h(x_0-y)g'(y)dy+A_\varepsilon(\xi_2)\int_{0}^{\infty} h(x_0-y)g'(y)dy$$

となる．但し $\xi_2\le x_0\le \xi_1$．この式に前述の $A_\varepsilon(x)$ の性質を適用すれば $f'(x_0+\varepsilon)\le 0$ となる．仮定の対称性から，次のこともいえている。ある $x_0<0$ に対し $f'(x_0)\geq 0$ であるならば任意の $\varepsilon>0$ に対し $f'(x_0-\varepsilon)\geqq 0$．従ってこの場合には $F(x)$ は単峰となる。

次に $g(x)$, $h(x)$ が必ずしも絶対連続でない場合を考える。$G(x)$, $H(x)$ は次のような性質をもつ単峰分布[redacted]函数列 $\{G_n(x)\}$, $\{H_n(x)\}$ で近似できる．

1． $\mathrm{supp}\, G_n(x) = \mathrm{supp}\, G(x)$, $\mathrm{supp}\, H_n(x) = \mathrm{supp}\, H(x)$

2． $G_n(x)$, $H_n(x)$ はそれぞれ $(-\infty,\infty)$ で絶対連続な密度 $g_n(x)$, $h_n(x)$ をもつ．

3。 $g_n(x)$, $h_n(x)$ はそれぞれ $[c,0]$, $[0,d]$ で log concave である．

$G_n*H_n(x)$ は前の議論により単峰であり，単峰分布函数列の極限はまた単峰となるから，$F(x)$ は単峰である。

case 3。 $a=c$ かつ $b<d$ の場合を考える（$a>c$ かつ $b=d$ の場合も全く同じ論法）．まず $g(x)$, $h(x)$ が (c,∞), $(-\infty,\infty)$ で絶対連続であるとする。更に $g(c+)<\infty$ を仮定する。そうすると $f(x)$ は連続な導関数をもち，$f'(x)$ は

$$f'(x)=\int_{c}^{\infty} h(x-y)g'(y)dy + h(x)g(c+)$$

と書ける。 $x\leqq c$ で $f'(x)\geqq 0$, $x\geqq d$ で $f'(x)\le 0$ となる

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

ことは容易にわかる。ある $x_0 \in (0,d)$ で $f'(x_0) \leq 0$ とすると

$$f'(x_0+\varepsilon) = A_\varepsilon(\xi)\int_0^\infty h(x_0-y)g'(y)dy + A_\varepsilon(x_0)h(x_0)g(0+)$$

となる。但し $\xi \leq x_0$。従って case 2 で述べた $A_\varepsilon(x)$ の性質から $f'(x_0+\varepsilon) \leq 0$。従って $F(x)$ は単峰である。$g(x)$, $h(x)$ が上の仮定を満たさない時には $\{G_n(x)\}$, $\{H_n(x)\}$ を case 2 でのように選んでやれば $F(x)$ の単峰性が得られる。但し今の場合には $g_n(0+) < \infty$ となるように選ぶ。//

定理を証明する前にいくつかL分布の性質を述べておく。

$k(u)$ を次の様な函数であるとする。

$$(2) \qquad k(u) = \begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_n & 0 \leq u \leq p_1 \\ \lambda_2 + \cdots + \lambda_n & p_1 \leq u \leq p_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_n & p_{n-1} \leq u \leq p_n \\ 0 & p_n \leq u \end{cases}$$

但し $\lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$。$G(x)$ を特性函数が

$$\log \hat{G}(t) = \int_{0+}^\infty (e^{itu}-1)\frac{k(u)}{u}du$$

となるL分布函数とする。$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \lambda$ とおく。

(a) $G(x)$ は絶対連続である。$G(x)$ は $x=0$ を除いて連続な密度 $g(x)$ を持つ。$x<0$ では $g(x)=0$, $x>0$ では $g(x)>0$ である。$g(x)$ は点 $x=0, p_1, \cdots, p_n$ を除いて次の方程式を満たす (Wolfe (1971b))。

$$(3) \qquad xg'(x) = (\lambda-1)g(x) - \lambda_1 g(x-p_1) - \cdots - \lambda_n g(x-p_n).$$

(b) $\lambda \leq 1$ ならば $g(x)$ は $x>0$ で非増加である (Wolfe (1971b))。

(c) $\lambda > 1$ ならば $G(x)$ はある $a>0$ をモードとする単峰分布函数であり, $g(0+)=0$ (Wolfe (1971b))。

(d) $1 < \lambda \leq 2$ ならば $g(x)$ は $(0,a]$ で上に凸である (Yamazato (1975))。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

定理の証明. $G(x)$は上記のようなL分布函数とする. (a), (b), (c) に注意すると $G(x)$ が補助定理の条件を満たす為には, $\lambda>1$ のときに $g(x)$ が $(0,a]$ で log concave であることを言えば良いことがわかる。上に凸な函数は log concave だから (d) より $1<\lambda\leq 2$ の場合には O.K. $\lambda>2$ とする. このときには $g'(x)$ は $(-\infty,\infty)$で連続である. 従って

$$(4)\qquad xg''(x)=(\lambda-2)g'(x)-\lambda_1 g'(x-p_1)-\cdots-\lambda_n g'(x-p_n)$$

が $x>0$ で成り立ち, $g''(x)$ は $x>0$ で連続である. (3) と(4) から,

$$(5)\qquad xB(x)=g(x)g'(x)+\lambda_1(g(x)g'(x-p_1)-g'(x)g(x-p_1))$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\lambda_n(g(x)g'(x-p_n)-g'(x)g(x-p_n))$$

が得られる. 但し $B(x)=g'(x)^2-g(x)g''(x)$. $B(x)$ は $(0,\infty)$ で連続であり, $0\leq x\leq p_1$ で $B(x)>0$ である. $p_1<x<a$ でも $B(x)>0$ なることを証明しよう. ある $x\in(0,a)$ で $B(x)\leq 0$ とする. $x_0>0$ を $B(x_0)=0$ かつ $0<x<x_0$ では $B(x)>0$ となるように選んでおく. このとき $p_1<x_0<a$ で $g'(x_0)g(x_0)\geq 0$ である. 次の2つの場合を考える.

case 1. $g(x_0)g'(x_0-p_i)-g'(x_0)g(x_0-p_i)<0$ for some i

case 2. $g(x_0)g'(x_0-p_i)-g'(x_0)g(x_0-p_i)\geq 0$ for all i.

case 1 の場合には $x_0>p_i$ で, $g(x_0-p_i)>0$ となり, 従って

$$g'(x_0-p_i)/g(x_0-p_i)-g'(x_0)/g(x_0)<0.$$

平均値の定理により, ある $x_1\in(x_0-p_1,x_0)$ に対し

$$\left(\frac{g'}{g}\right)'(x_1)>0$$

となり, $B(x_1)<0$. これは x_0 のとり方に矛盾する. case 2の場合には (5)より

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$g(x_0)g'(x_0-p_i) - g'(x_0)g(x_0-p_i) = 0 \quad \text{for all } i.$$

$p_1 < x_0$ だから $g(x_0-p_1) > 0$ となり

$$g'(x_0-p_1)/g(x_0-p_1) - g'(x_0)/g(x_0) = 0.$$

再び平均値の定理を用いて，ある $x_1 \in (x_0-p_1, x_0)$ に対して $B(x_1)=0$ が得られる．これは x_0 のとり方に矛盾する．従って $g(x)$ は $(0,a]$ で log concave．

$\ell(u)$ を次の様な函数とする．

$$\ell(u) = \begin{cases} \mu_1 + \cdots + \mu_m & g_1 < u \le 0 \\ \mu_2 + \cdots + \mu_m & g_2 < u \le g_1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \mu_m & g_m < u \le g_{m-1} \\ 0 & u \le g_m \end{cases}$$

但し $\mu_1, \cdots, \mu_m > 0$．$H(x)$ を特性函数が

$$\log \hat{H}(t) = \int_{-\infty}^{0-} (e^{itu}-1)\frac{\ell(u)}{|u|}du$$

をみたすような L 分布函数とする。そうすると前と同様の議論で $H(x)$ が補助定理の条件をすべて満たすことがわかる。従って補助定理により $(G*H)(x)$ は単峰である．この事から，$F(x)$ が，その特性函数が

$$\log \hat{F}(t) = \int_{-\infty}^{0-}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{\ell(u)}{|u|}du + \int_{0+}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{k(u)}{u}du$$

をみたす L 分布函数であってもやはり単峰である．$F(x)$ を (1) で $\gamma=0$ かつ $\sigma^2=0$ であるような一般の L 分布函数とする。この場合には単調階段函数 $k_n(u)$, $\ell_n(u)$ の列を，特性函数が

$$\log \hat{F}_n(t) = \int_{-\infty}^{0-}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{\ell_n(u)}{|u|}du + \int_{0+}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{k_n(u)}{u}du$$

となるような分布函数 $F_n(x)$ が $n\to\infty$ とした時 $F(x)$ に収束するようにとれる．従って $F(x)$ は単峰であり，正規分布が強単峰であることから定理が証明された．//

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Remark 1. 補助定理で，$g(c+)=0$，$h(d-)=0$ という仮定は落とせる。

Remark 2. 補助定理で，$G(x), H(x)$ をずらしても単峰性が保たれることは佐藤健一氏が指摘された。

Remark 3. 定理の証明で，ある種の L 分布函数が補助定理の条件を満たすと書いたが，それは次のように拡張できる：

$f(x)$ を L 分布函数 $F(x)$ の密度とする。(1) で $k\equiv 0$ for $u<0$ かつ $\sigma^2=0$ ならば $F(x)$ は $(c,a]$ で $f(x)$ が log concave となるようなモード a を持つ。但し $c=\inf\{x; f(x)>0\}$。同様に $k\equiv 0$ for $u>0$ かつ $\sigma^2=0$ ならば $F(x)$ は $[a,d)$ で $f(x)$ が log concave となるようなモード a を持つ。但し $d=\sup\{x; f(x)>0\}$.

この事実の証明は次のようにすれば良い。$\lambda\leq 1$ ならば明らか。$1<\lambda\leqq 2$ の場合は yamazato [12]。従って $\lambda>2$ の場合を考えればよいが，(1) における $k(x)$ が階段函数の場合は既に証明した。$k(x)$ が一般の場合には単調階段函数列 $\{k_n(x)\}$ を適当にとれば，$\lambda>2$ であることから，特性函数

$$\hat{F}_n(t)=\exp\left\{\int_{0+}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{k_n(u)}{u}du\right\}$$

が $|\hat{F}(t)|\leq|\hat{F}_n(t)|$，$t\hat{F}_n(t)$ は可積分，$\hat{F}_n(t)\to\hat{F}(t)$ as $n\to\infty$ と~~なるようにた~~できる。従って反転公式にルベーグの収束定理を適用して

$$f_n(x)\to f(x)\qquad \text{as } n\to\infty$$
$$f_n'(x)\to f'(x)\qquad \text{as } n\to\infty$$

但し，$f_n(x)$ は $F_n(x)$ の密度である。従って Remark の結論が得られる。

References.

[1] Chung, K. L. (1953). Sur les lois de probabilites unimodales. C. R. Acad. Sci. Paris 236:6 583-584.

[2] Gnedenko, B. V. and Kolmogorov, A. N. (1954). Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables. Addison-Wesley, Cambridge.

[3] Ibragimov, I. A. (1956). On the composition of unimodal distributions. Theor. Probability Appl. 1 255-260.

[4] Ibragimov, I. A. (1957). A remark on probability distributions of class L. Theor. Probability Appl. 2 117-119.

[5] Ibragimov, I. A. and Chernin, K. E. (1959). On the unimodality of stable laws. Theor. Probability Appl. 4 417-419.

[6] Kanter, M. (1976). On the unimodality of stable densities. Ann. Probability 4 1006-1008.

[7] Levy, P. (1937). Theorie de l'addition des variables aleatoires. Gauthier-Villars, Paris.

[8] Sun, T. C. (1967). A note on the unimodality of distributions of class L. Ann. Math. Statist. 38 1296-1299.

[9] Wintner, A. (1956). Cauchy's stable distributions and an "explicit formula" of Mellin. Amer. J. Math. 78 819-861.

[10] Wolfe, S. J. (1971 a). On the continuity properties of L functions. Ann. Math. Statist. 42 2064-2073.

[11] Wolfe, S. J. (1971 b). On the unimodality of L functions. Ann. Math. Statist. 42 912-918.

[12] Yamazato, M. (1975). Some results on infinitely divisible distributions of class L with applications to branching processes. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect A, 13 133-139.

[13] Zolotarev, V. M. (1963). The analytic structure of infinitely divisible laws of class L. Litovsk. Math. Sb. 3 123-140.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Additive functionals and smooth measures in a wide sense

福島 正俊

1. Symmetric standard process とその exceptional set

X を可分で局所コンパクトな Hausdorff 空間，m を X 上の正の Radon 測度で $Supp(m) = X$ なるものとする．但し その補集合で測度 m が vanish するような最小の closed set を m の台といい，$Supp(m)$ で表わす．

マルコフ過程 $\underset{\sim}{M} = \{\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, \zeta, P_x\}$ が次の2条件を満すとき，これを m-対称標準マルコフ過程と呼ぶことにする：

(i) $\exists N_0 \in \mathcal{B}(X)$, $m(N_0) = 0$, $\underset{\sim}{M}$ は $X - N_0$ を状態空間とする standard process (cf. P. A Meyer, Processus de Markov, Springer Lecture Notes in Math., 26).

(ii) $\underset{\sim}{M}$ の transition semi-group を P_t とすると

$$\int_X P_t f(x) g(x) m(dx) = \int_X f(x) P_t g(x) m(dx), \quad {}^\forall f, g \in \mathcal{B}^+(X)$$

このような $\underset{\sim}{M}$ に関し，集合 $N \subset X$ が proper exceptional であるとは，$N \in \mathcal{B}(X)$, $m(N) = 0$ 且つ

$$P_x(X_t, X_{t-} \notin N \quad {}^\forall t \geq 0) = 1 \quad {}^\forall x \in X - N - N_0$$

が成立すること． 次の命題は自明である．

命題1. (i) N_0 は proper exceptional.

(ii) $N_1, N_2, \cdots$ proper exc. $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ proper exc.

(iii) N proper exc. $N \supset N_0$

$\Rightarrow$ $\underset{\sim}{M}$ の状態空間を $X - N$ に制限したもの $\underset{\sim}{M}|_{X-N}$ は又 m-対称標準マルコフ過程.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

2つのm-対称標準マルコフ過程 $\underset{\sim}{M}_1$ と $\underset{\sim}{M}_2$ に対して，それらに共通な proper exc. set N があって $N \supset N_0^{(1)}$, $N \supset N_0^{(2)}$ 且つ $\underset{\sim}{M}_1|_{X-N}$ と $\underset{\sim}{M}_2|_{X-N}$ は同じ transition function を持つとき，$\underset{\sim}{M}_1$ と $\underset{\sim}{M}_2$ は同値であるといって $\underset{\sim}{M}_1 \sim \underset{\sim}{M}_2$ と記す。
(次の命題の証明は Proc. 3rd Japan-USSR symp. on Prob. th., Springer Lecture Notes in Math., 550 の中の筆者の論文参照).

<u>命題2</u>. $\underset{\sim}{M}_1 \sim \underset{\sim}{M}_2$ であるための必要十分条件は $\{T_t^{(1)}, t>0\} = \{T_t^{(2)}, t>0\}$ が成立すること。
但し $\{T_t^{(i)}, t>0\}$ は $\underset{\sim}{M}_i$ の推移半群が一意的に定める $L^2(X;m)$ 上の強連続半群. $i=1,2$.

即ち与えられた L^2 半群に対応する m-対称標準マルコフ過程は存在するとしても同値性を除いて一意的なわけである。
集合 $N \subset X$ が(与えられた $\underset{\sim}{M}$ に関し) <u>exceptional</u> であるとは $\exists \tilde{N} \supset N$, $\tilde{N} \in \mathcal{B}(X)$, $P_x(\sigma_{\tilde{N}} < \infty) = 0$ for m-a.e. $x \in X$, が成立すること。但し $\sigma_{\tilde{N}}$ は $\tilde{N}$ への hitting time.

<u>命題3</u>. (i) N exc. $N_1 \subset N \Rightarrow N_1$ exc.
(ii) proper exc. $\Rightarrow$ exc.
(iii) N exc. $\Rightarrow \exists \tilde{N} \supset N$, $\tilde{N}$ proper exc.
(iv) $N_1, N_2, \cdots$ exc. $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ exc.

(iii) の証明は上記筆者の論文参照. 他は自明。

<u>2. PCAF と Smooth measure</u>

前節で定義した m-対称標準マルコフ過程 $\underset{\sim}{M}$ を固定し，その状態空間を $X - N_0$ とする. 2変数 $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ の関数 $A(t,\omega) = A_t(\omega)$ が次の条件を満すとき，これを <u>positive</u>

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

continuous additive functional (PCAF) in a wide sense という：

(i) $A_t(\cdot)$ は $\mathcal{M}_t$-adapted

(ii) $\exists \Lambda \in \mathcal{M}$, $\exists N$ exc. set $\subset X$

$P_x(\Lambda) = 1$, $\forall x \in X - N - N_0$

任意の $\omega \in \Lambda$ に対し，$A_\cdot(\omega)$ は $[0, +\infty)$ から $[0, +\infty]$ への連続写像で $A_0(\omega) = 0$, $A_t(\omega) < \infty$, $t < \zeta(\omega)$

$$A_t(\omega) = A_{\zeta(\omega)-}(\omega) \qquad t \geq \zeta(\omega)$$

$$A_{t+s}(\omega) = A_s(\omega) + A_t(\theta_s \omega).$$

Λ を A の defining set, N を A の exc. set と呼ぶ。A が $\underset{\sim}{M}$ の PCAF (in a wide sense) であるための必要十分条件は $\exists N$ proper exc. set $\supset N_0$, A は m-対称標準マルコフ過程 $\underset{\sim}{M}|_{X-N}$ の strict な意味での perfect PCAF (Blumenthal-Getoor ; Markov processes and potential theory 参照) となることである。

$\underset{\sim}{A}_c^+ = \{A \mid \text{PCAF of } \underset{\sim}{M}\}$ とおく。$A^{(1)}, A^{(2)} \in \underset{\sim}{A}_c^+$ が同値であるとは ($A^{(1)} \sim A^{(2)}$)

$\forall t > 0$, $\quad P_x(A_t^{(1)} = A_t^{(2)}) = 1 \quad$ for q.e. $x \in X$

が成立すること。但し "q.e." は "ある exc. set を除いて" という意。$A^{(1)} \sim A^{(2)}$ なるための必要十分条件は両者に共通な defining set Λ と exc. set N が取れて $A_t^{(1)}(\omega) = A_t^{(2)}(\omega)$, $\forall t \geq 0$, $\forall \omega \in \Lambda$ が成立することである。N として は特に proper なものを取ることができる。

$\dot{\underset{\sim}{A}}_c^+ = \underset{\sim}{A}_c^+ / \sim$ とおく。

我々の関心は次の関係によって $\dot{\underset{\sim}{A}}_c^+$ を測度の族により特徴づけることにある。

$$(\#) \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} E_m\left(\int_0^t f(X_s)\, dA_s\right) = \int_X f(x)\mu(dx), \quad \forall f \in b\mathcal{B}^+(X).$$

命題4. (i) $A \in \underset{\sim}{A}_c^+$ に対し (#) を満す σ-finite Borel 測度 μ が存在する。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

(ii) $A^{(1)} \sim A^{(2)} \Rightarrow \mu^{(1)} = \mu^{(2)}$

(iii) μ は exc. set に mass を持たない。

(#) の左辺の積分を $(fA)_t$ とおくと $fA \in \underset{\sim}{A}_c^+$ である。従って $\varphi_t = E_m((fA)_t)$ とおけば

$\varphi_{t+s} = \varphi_t + E_m(E_{X_t}((fA)_s)) = \varphi_t + (T_t 1, E_{\cdot}((fA)_s))$

$\leqq \varphi_t + E_m((fA)_s) = \varphi_t + \varphi_s$. つまり φ_t は subadditive であるから (#) の左辺の極限は無限大も込めて存在する。これがある σ-finite Borel 測度 μ によって (#) の右辺のように表わされることの証明は Revuz の論文 (TAMS 148 (1970), 501-531) 参照。命題4 (ii) (iii) は明らかであろう。

命題4にかんがみて, (#) は $\underset{\sim}{\dot{A}}_c^+$ の各元に σ-finite Borel 測度を一意的に対応させる。この測度を smooth measure (in a wide sense) と呼ぶ。smooth measure の全体を $\mathfrak{M}_s$ と記す。$\mathfrak{M}_s$ に関して以下の3問題が自然に起る:

(I) $\mathfrak{M}_s$ の解析的特徴ずけ.

(II) (#) による $\dot{A}_c^+$ と $\mathfrak{M}_s$ の対応は1対1か?

(III) 命題4 (iii) の逆の主張, 即ち exc. set に mass を持たない測度は smooth であるといえるか?

これらの設問に対する解答は肯定的である。即ち

定理 $\underset{\sim}{M}$ の Dirichlet space が regular であると仮定する。このとき

(I) $\mu \in \mathfrak{M}_s$ なるための必要十分条件は, 閉集合の増大列 $\{F_n\}$ が存在し

(i) $\mu_n = I_{F_n} \cdot \mu$ は (1-) エネルギー積分が有限

(ii) $\mu(X - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = 0$

(iii) $Cap^{(1)}(K - F_n) \longrightarrow 0 \quad n \uparrow \infty \quad \forall K$ コンパクト。

(II) (#) による $\underset{\sim}{\dot{A}}_c^+$ と $\mathfrak{M}_s$ の対応は1対1である。

(III) positive Radon measure が $\mathfrak{M}_s$ に属すための必要十分条

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

件は，それが exc. set に mass を持たないことである。

この定理の説明とその証明に必要なポテンシャル論的準備を次節で行う。

3. ポテンシャル論的準備

$\underset{\sim}{M}$ の Dirichlet space を $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ とする。即ち

$$\mathcal{F} = \{u \in L^2(X; m) : \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(u, u - T_t u) < \infty\}$$

$$\mathcal{E}(u, v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(u, v - T_t v), \quad u, v \in \mathcal{F}.$$

但し $(\ ,\ )$ は L^2 内積，T_t は $\underset{\sim}{M}$ の推移関数 P_t の定める $L^2(X; m)$ 上の半群。$\alpha > 0$ に対し

$$\mathcal{E}_\alpha(u, v) = \mathcal{E}(u, v) + \alpha(u, v)$$

とおく。以後我々は次の意味で $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ が regular であると仮定する：$\mathcal{F} \cap C_0(X)$ は $\mathcal{F}$ 内で $\mathcal{E}_1$ に関し dense 且つ $C_0(X)$ 内で一様収束に関し dense。$C_0(X)$ は台がコンパクトな連続関数の全体。

開集合 A の (1-) capacity を $Cap^{(1)}(A) = \inf_{u \in \mathcal{F},\, u \geq 1 \text{ on } A} \mathcal{E}_1(u, u)$ によって定義し，任意の集合 A の $Cap^{(1)}(A)$ を outer capacity として定義する。X 上の正の Radon 測度 μ が

$$\left|\int_X v(x)\mu(dx)\right| \leq {}^\exists C_\mu \cdot \mathcal{E}_1(v, v), \quad \forall v \in \mathcal{F} \cap C_0(X)$$

を満すとき，μ をエネルギー有限の測度と呼ぶ。このような測度 μ の全体を $\mathfrak{M}$ で表わす。又

$$\mathfrak{M}_b = \{\mu \in \mathfrak{M} ; \mu(X) = 1, U_1\mu \leq {}^\exists M_\mu \quad m\text{-a.e.}\}$$

とおく。

命題 5. 集合 A に対する次の条件は互いに同値：

(i) A は exceptional ($\underset{\sim}{M}$ に関し)

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

(ii) $Cap^{(1)}(A)=0$
(iii) $\mu(A)=0 \quad \forall \mu \in \mathfrak{M}$
(iv) $\mu(A)=0 \quad \forall \mu \in \mathfrak{M}_b$.

この命題により"q.e."は"1-容量0の集合を除いて"と同じ意になる．X上q.e.で定義された関数uがquasi-continuous（準連続）であるとは，任意の$\varepsilon>0$に対し閉集合Aがあって$Cap^{(1)}(A)<\varepsilon$，$u|_{X-A}$は連続，が成立すること．任意の$u\in\mathcal{F}$はその準連続修正（これを$\tilde{u}$と書く）をもつ．準連続関数がm-a.e.で非負ならばq.e.で非負となる．

$\mu\in\mathfrak{M}$，$\alpha>0$に対しては

$$\mathcal{E}_\alpha(U_\alpha\mu, v)=\int_X \tilde{v}(x)\mu(dx), \quad \forall v\in\mathcal{F}$$

を満す$U_\alpha\mu\in\mathcal{F}$が一意的に存在する．これを$\mu$の$\alpha$-ポテンシャルと呼ぶ．$\mathcal{E}_\alpha(U_\alpha\mu, U_\alpha\mu)$は又$\mathcal{E}_\alpha(\mu)$と書かれ，$\mu$の$\alpha$-エネルギー（積分）と呼ばれる．

X上q.e.で定義されたBorel関数が（p_tに関し）α-超過的（α-excessive）であるとは，$u\geq 0$，$e^{-\alpha t}p_t u\uparrow u$，$t\downarrow 0$，がq.e.で成立すること．

命題6．(i) $u\in\mathcal{F}$があるα-ポテンシャルの準連続修正であるための必要十分条件はuがp_tに関しα-超過的であることである．
(ii) $u, v\in\mathcal{F}$が共にα-超過的で，$v\in\mathcal{F}$ならば，$u\in\mathcal{F}$且つ$\mathcal{E}(u,u)\leq\mathcal{E}(v,v)$．特にこのとき$u$はある$\alpha$-ポテンシャルの準連続修正である．

以上のポテンシャル論的主張の大部分の証明は筆者の著書（紀伊国屋書店出版）参照．

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

4. $\mu \in \mathfrak{M}$ に対するPCAFの構成とその性質

補題1. f を $\mathcal{F}$ に属す準連続Borel関数, $0<T<\infty$, $\varepsilon>0$ とするとき

$$P_\nu\left(\sup_{0\le t\le T}|f(X_t)|>\varepsilon\right) \le \frac{e^T}{\varepsilon}\sqrt{\mathcal{E}_1(\nu)}\sqrt{\mathcal{E}_1(f,f)},\quad \forall \nu\in\mathfrak{M}.$$

証明. $E=\{x\in X\,;\,|f(x)|>\varepsilon\}$ とおくと

$P_\nu\left(\sup_{0\le t\le T}|f(X_t)|>\varepsilon\right) = P_\nu(\sigma_E\le T) \le e^T E_\nu(e^{-\sigma_E})$.

一方 $p(x)=E_x(e^{-\sigma_E})$ は E の1-平衡ポテンシャルの準連続修正で $Cap^{(1)}(E)=\mathcal{E}_1(p,p)$. 従って $E_\nu(e^{-\sigma_E})$

$\le \int_X p(x)\nu(dx) = \mathcal{E}_1(p,U_1\nu) \le \sqrt{\mathcal{E}_1(\nu)}\sqrt{Cap(E)}$. ところが

$Cap(E) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathcal{E}_1(f,f)$. q.e.d.

補題2. $\mathcal{F}$ に属す準連続Borel関数列 $\{f_n\}$ が $\mathcal{E}_1$ に関しCauchy列をなすならば $\exists n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$

$P_x(n_k\to\infty$ のとき $f_{n_k}(X_t)$ は t に関し広義一様収束$)=1$, q.e. x

証明. $T>0$ を固定する. 前補題により T と $\nu\in\mathfrak{M}$ に依存しない部分列 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ が選べて

$$P_\nu\left(\sup_{0\le t\le T}|f_{n_k}(X_t)-f_{n_{k+1}}(X_t)|>\frac{1}{2^k}\right) \le e^T\cdot\frac{\sqrt{\mathcal{E}_1(\nu)}}{2^k}.$$

Borel-Cantelli より

$$P_\nu\left(\sup_{0\le t\le T}|f_{n_k}(X_t)-f_{n_{k+1}}(X_t)|>\frac{1}{2^k}\quad i.o.\right)=0.$$

$\nu\in\mathfrak{M}$ は任意であったから q.e. の x に対し上の括弧内の事象の P_x 測度は0である(命題5参照). q.e.d.

補題3. $\forall\mu\in\mathfrak{M}$, $\exists A\in \underset{\sim}{A}_c^+$, $E_x\left(\int_0^\infty e^{-t}dA_t\right)$ は $U_1\mu$ の準連続修正.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

証明. u を $U_1\mu$ の Borel修正で次の性質をもつものとする
$0 \leqq u(x) < +\infty$, $\exists N \in \mathcal{B}(X)$, $Cap(N) = 0$
$nR_{n+1}u(x) \uparrow u(x)$ $\forall x \in X-N$, $u(x)=0$ $\forall x \in N$.
但し R_α は p_t の resolvent.

$$g_n(x) = \begin{cases} n(u(x) - nR_{n+1}u(x)) & x \in X-N \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

とおく. $g_n \cdot m \longrightarrow \mu$ (漠収束), $R_1 g_n \longrightarrow u$ ($\mathcal{E}_1$ に関し),
$R_1 g_n(x) = nR_{n+1}u(x) \uparrow u(x)$, $x \in X-N$, に注意しておく.
そこで

$$\tilde{A}_n(t,\omega) = \int_0^t e^{-s} g_n(X_s(\omega))\,ds$$

とおけば, これは $\mathbb{M}$ の PC(1-)AF であり, $\nu \in \mathfrak{M}_b$ に対して
$E_\nu((\tilde{A}_n(+\infty) - \tilde{A}_\ell(+\infty))^2) \leqq 2M_\nu \cdot \mathcal{E}_1(R_1g_n - R_1g_\ell, R_1g_n - R_1g_\ell)$.
実際例えば $E_\nu((\tilde{A}_n(+\infty))^2) = 2E_\nu(\int_0^\infty e^{-s}g_n(X_s)ds\int_s^\infty e^{-u}g_n(X_u)du)$
$= 2E_\nu(\int_0^\infty e^{-2s}g_n(X_s)R_1g_n(X_s)ds) = 2\langle \nu, R_2(g_n \cdot R_1g_n)\rangle$
$= 2(U_2\nu, g_n \cdot R_1 g_n) \leqq 2M_\nu(g_n, R_1g_n) = 2M_\nu \mathcal{E}_1(R_1g_n, R_1g_n)$
一方 $E_\nu(\tilde{A}_n(+\infty)/\mathcal{M}_t) = \tilde{A}_n(t) + e^{-t}E_{X_t}(\tilde{A}_n(+\infty))$
$= \tilde{A}_n(t) + e^{-t}R_1g_n(X_t)$ より

$$M_n(t) = \tilde{A}_n(t) + e^{-t}R_1g_n(X_t), \quad 0 \leqq t < +\infty$$

は $(P_\nu, \mathcal{M}_t)$-martingale である. Doob の不等式により
$P_\nu(\sup_{0\leqq t\leqq+\infty}|M_n(t) - M_\ell(t)| > \varepsilon) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2}E_\nu((\tilde{A}_n(+\infty) - \tilde{A}_\ell(+\infty))^2)$
$\leqq \frac{2M_\nu}{\varepsilon^2}\mathcal{E}_1(R_1g_n - R_1g_\ell, R_1g_n - R_1g_\ell)$.

従って $\nu \in \mathfrak{M}_b$ に無関係な部分列 $\{n_k\}$ が選べて
$P_\nu(M_{n_k}(t)$ は t に関し一様収束$) = 1$ $\forall \nu \in \mathfrak{M}_b$.
命題5と補題2にかんがみ, 必要なら部分列を更に選んで
$P_x(\tilde{A}_{n_k}(t)$ は t に関し広義一様収束$) = 1$ q.e. $x \in X$.
とできる. 即ち
$\Lambda = \{\omega \in \Omega : \tilde{A}_{n_k}(+\infty, \omega) < \infty$, $\tilde{A}_{n_k}(t,\omega)$ は広義一様収束$\}$

とおけば $P_x(\Lambda)=1$, $x\in X-\tilde{N}$. $\tilde{N}$は exc. set $\supset N$.
今

$$\tilde{A}(t,\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{n_k\to\infty}\tilde{A}_{n_k}(t,\omega) & \omega\in\Lambda\\ 0 & \omega\notin\Lambda\end{cases}$$

とおくと $\tilde{A}$ は Λ を defining set, $\tilde{N}$ を exc. set にもつ PC (1-) AF である.

次に $E_x(\tilde{A}(+\infty))=u(x)$ q.e. を示そう. P_ν に関し $\{M_n(t)\}_{t\geq 0}$ は martingale で $M_n(+\infty)=\tilde{A}_n(+\infty)$ は L^2 収束するから, P_ν-自乗平均収束の意味で $\lim\limits_{n\to\infty}M_n(t)$ $=\tilde{A}(t)+e^{-t}u(X_t)$. 従って

$$E_\nu(\tilde{A}(t))+e^{-t}\langle\nu,P_tu\rangle=\lim_{n\to\infty}E_\nu(M_n(t))$$
$$=\lim_{n\to\infty}E_\nu(\tilde{A}_n(+\infty))=\lim_{n\to\infty}\langle\nu,R_1g_n\rangle=\langle\nu,u\rangle.$$

ここで $t\uparrow\infty$ とする. $\langle\nu,P_tu\rangle=\mathcal{E}_1(U_1\nu,T_tu)$
$\leqq\sqrt{\mathcal{E}_1(\nu)}\sqrt{\mathcal{E}_1(T_tu,T_tu)}\leqq\sqrt{\mathcal{E}_1(\nu)}\sqrt{\frac{1}{2t}(u,u)+(u,u)}$
に注意すれば $E_\nu(\tilde{A}(+\infty))=\langle\nu,u\rangle$ $\forall\nu\in\mathcal{M}_b$。
$A(t,\omega)=\int_0^t e^s d\tilde{A}(s,\omega)$ が補題3を満すことがわかった. q.e.d.

補題4. $\mu\in\mathcal{M}$ と $A\in A_c^+$ が補題3の関係にあるものとする. このとき $\forall f\in{}_b\mathcal{B}^+(X)$, $\forall\alpha>0$, $E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(X_t)dA_t)$ は $U_\alpha(f\cdot\mu)$ の準連続修正.

証明 $\alpha=1$, $f=I_G$, Gは $\mu(\partial G)=0$ なる開集合, のときに示せばよい.
$\varphi(x)=E_x(\int_0^\infty e^{-t}I_G(X_t)dA_t)$, $\psi(x)=E_x(\int_0^\infty e^{-t}I_{X-G}(X_t)dA_t)$ とおけば φ, ψ 共に P_t に関し 1-超過的であり, $\varphi+\psi(=U_1\mu)\in\mathcal{F}$ だから, 命題6により $\exists\lambda,\nu\in\mathcal{M}$, φとψは各々 $U_1\lambda$ 及び $U_1\nu$ の準連続修正. $\lambda+\nu=\mu$.
一方 $\varphi(x)=E_x(e^{-\sigma_G}\varphi(X_{\sigma_G}))$ より $Supp[\lambda]\subset\bar{G}$ がわかる. 同様に $Supp[\nu]\subset X-G$. 故に $\lambda=I_G\cdot\mu$. q.e.d.

補題5. $\mu \in \mathfrak{M}$ に対し補題3の $A \in \underset{\sim}{A}_c^+$ は同値性を除いて一意的である.

証明. μ に $A^{(1)}, A^{(2)} \in \underset{\sim}{A}_c^+$ が補題3のように対応したとすると proper exc. set N があって

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-t}dA_t^{(1)}\right) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-t}dA_t^{(2)}\right) \equiv u(x), \quad \forall x \in X-N.$$

補題3の証明の場合と同じ計算で

$$v_{ij}(x) \equiv E_x\left(\int_0^\infty e^{-t}dA_t^{(i)}\int_0^\infty e^{-t}dA_t^{(j)}\right) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-2t}u(X_t)dA_t^{(i)}\right),$$

$x \in X-N$. $u_n = u \wedge n$ とおくと $\nu \in \mathfrak{M}_0$ に対して

$$\langle \nu, v_{ij} \rangle = \lim_{n\to\infty} E_\nu\left(\int_0^\infty e^{-2t}u_n(X_t)dA_t^{(i)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \langle \nu, \widetilde{U_2(u_n\mu)} \rangle = \langle U_2\nu \cdot u, \mu \rangle < +\infty.$$

従って

$$E_\nu\left(\left\{\int_0^\infty e^{-t}dA_t^{(1)} - \int_0^\infty e^{-t}dA_t^{(2)}\right\}^2\right) = \int_X (v_{11} - 2v_{12} + v_{22})\nu(dx)$$

$= 0$, $\forall \nu \in \mathfrak{M}_0$. これより $A_t^{(1)} \sim A_t^{(2)}$ が従う. q.e.d.

補題6. $\mu \in \mathfrak{M}$, $A \in \underset{\sim}{A}_c^+$ に対し次の条件は互いに同値である.

(i) $E_x\left(\int_0^\infty e^{-t}dA_t\right)$ は $U_1\mu$ の準連続修正.

(ii) $\displaystyle\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}E_m((fA)_t) = \lim_{\alpha\to\infty}\alpha(1, U_A^\alpha f) = \langle \mu, f \rangle$, $\forall f \in \mathcal{B}^+(X)$.

(iii) $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\alpha(h, U_A^\alpha f) = \langle \mu, hf \rangle$, $\forall f \in \mathcal{B}^+(X)$, $\forall h$: γ-excessive $(\gamma \geq 0)$.

但し $U_A^\alpha f(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(X_t)dA_t\right)$.

証明. (i) $\Rightarrow$ (iii). (i) と補題4より $U_A^\alpha f$ は $U_\alpha(f\cdot\mu)$ の準連続修正, $h \in \mathcal{F}$ の場合を示す. $\alpha(h, U_A^{\alpha+\gamma}f)$

$= \alpha(h, U_{\alpha+\gamma}(f\mu)) = \alpha\,\mathcal{E}_{\alpha+\gamma}(R_{\alpha+\gamma}h, U_{\alpha+\gamma}(f\mu))$

$= \alpha(R_{\alpha+\gamma}h, f\mu) \uparrow \langle h, f\mu \rangle$, $\alpha \uparrow \infty$.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

(iii) ⇒ (ii): $t=1$ とおけばよい. (ii) ⇒ (i): Revuz の前述論文を参照. q.e.d.

5. 定理の証明

補題7. $\mu \in \mathfrak{M}_s$ ならば, μ は定理の(I)の3条件(i), (ii), (iii) を満す.

証明. $A_c^+ \ni A \xrightarrow{(\#)} \mu \in \mathfrak{M}_s$ とする. A の proper exc. set を N とする.

いたる所正な関数 $f \in L^2(X;m) \cap b\mathcal{B}^+(X)$ をとり

$$\varphi(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-t} f(X_t) e^{-A_t} dt\right), \quad x \in X-N,$$

とおくと $\varphi(x)>0$, $x \in X-N$. 又 A_t の連続性を使って等式

$$U_A^1 \varphi(x) = R_1 f(x) - \varphi(x) \quad , x \in X-N$$

が得られる. これより φ が準連続であることが従う. 実際 $U_A^1\varphi$ は1-超過的でしかも $\leq R_1 f \in \mathcal{F}$. 命題6より $U_A^1\varphi$ は準連続. 再び上の等式により φ も準連続.

従って $^\exists E_n$ closed, $Cap^{(1)}(X-E_n) \downarrow 0$, $\bigcap_n (X-E_n) \supset N$, $\varphi|_{E_n}$ は連続. そこで

$$F_n = \{x \in E_n \mid \varphi(x) \geq \tfrac{1}{n}\}$$

とおく. $\{F_n\}$ は閉集合の増大列であるが, これが定理の(I)の3条件を満すことを以下に示そう. 先ず

"(iii) $Cap^{(1)}(K-F_n) \to 0$ $\quad {}^\forall K$ compact" の証明

$K-F_n \subset (K-E_n) \cup (B_n \cap K)$ である. 但し $B_n = \{x \in E_n \mid \varphi(x) \leq \frac{1}{n}\}$. $Cap^{(1)}(K-F_n) \leq Cap^{(1)}(K-E_n) + Cap^{(1)}(B_n \cap K)$ で右辺の第1項は0に収束するから第2項が0に収束することをいえばよい. ところで $\sigma_n = \sigma_{B_n}$, $\sigma = \lim \sigma_n$ とおくと

$$E_x\left(\int_{\sigma_n}^\infty e^{-t} f(X_t) e^{-A_t} dt\right) = E_x\left(e^{-\sigma_n} e^{-A_{\sigma_n}} \varphi(X_{\sigma_n})\right) \leq \frac{1}{n}$$

だから $E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-t} f(X_t) e^{-A_t} dt\right) = 0$. 括弧内の積分は

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$\sigma < \zeta$ のとき正故, $P_x(\sigma < \zeta) = 0$, $x \in X - N$. 従って $\bigcap_n (B_n \cap K)$ は exc. set. $B_n \cap K$ は compact だから Choquet capacity の性質により $\lim \mathrm{Cap}^{(1)}(B_n \cap K) = \mathrm{Cap}^{(1)}(\bigcap_n (B_n \cap K)) = 0$.

"(i) $I_{F_n} \cdot \mu \in \mathfrak{M}$" の証明.

$A_n = I_{F_n} \cdot A$ とおくと $U_{A_n}^1 1(x) = E_x(\int_0^\infty e^{-t} I_{F_n}(X_t) dA_t) \leq n U_A^1 \varphi(x) \in \mathcal{F}$. 命題6により $\exists \mu_n \in \mathfrak{M}$, $U_{A_n}^1 1$ は $U_1 \mu_n$ の準連続修正. 補題6より $A_n \xrightarrow{(\#)} \mu_n$. 一方 $A_n \xrightarrow{(\#)} I_{F_n} \cdot \mu$ だから対応(#)の一意性より $I_{F_n} \cdot \mu = \mu_n \in \mathfrak{M}$.

"(ii) $\mu(X - \bigcup F_n) = 0$" の証明.

(iii) から簡単に $\bigcap_n (X - F_n)$ が exc. set であることが従う. 実際 (iii) と $P_x(\lim_n \sigma_{K - F_n} = \infty) = 1$ q.e. とは同値. そこで開集合の増大列 G_ℓ で $\overline{G_\ell}$ compact $\subset G_{\ell+1} \uparrow X$ なるものを選べば, $\sigma_{X - F_n}(\omega) \geq \sigma_{\overline{G_\ell} - F_n}(\omega) \wedge \sigma_{X - \overline{G_\ell}}(\omega)$ で順次 $n \to \infty$, $\ell \to \infty$ とすることにより $\lim_n \sigma_{X - F_n}(\omega) \geq \zeta$, P_x-a.s. q.e. x を得る.

命題4の(iii)に注意して上の主張(ii)がわかる. q.e.d.

補題8. 測度μが定理の(I)の3条件(i), (ii), (iii) を満すとする. このとき関係(#)によってμに対応するような $A \in \underset{\sim}{A}_c^+$ が同値性を除いて一意的に存在する.

証明. 測度μが閉集合列$\{F_n\}$に関して定理の(I)の3条件を満しているとしよう. $I_{F_n} \cdot \mu \in \mathfrak{M}$ だから, 補題3, 5及び6により $\exists 1\ A^n \in \underset{\sim}{\dot{A}}_c^+$: $A^n \xrightarrow{(\#)} I_{F_n} \cdot \mu$.

$n < \ell$ ならば $A^n \sim I_{F_n} \cdot A^\ell$ である. 実際 $I_{F_n} \cdot A^\ell \xrightarrow{(\#)} I_{F_n} \cdot I_{F_\ell} \cdot \mu = I_{F_n} \cdot \mu$.

一方 $\{F_n\}$ の満す条件(iii)と前補題の証明の最後の部分の注意により

$$P_x(\lim_n \sigma_{X - F_n} \geq \zeta) = 1 \qquad \text{q.e. } x \in X.$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

従って全ての A^n に共通な defining set Λ と proper exc. set N が選べて，$\forall\omega\in\Lambda$，$A^n_t(\omega)=(I_{F_n}\cdot A^{n+1})_t(\omega)$，$\forall t\geq 0$，$\forall n$，$\lim_n \sigma_{X-F_n}(\omega)\geq\zeta(\omega)$。そこで $\omega\in\Lambda$ に対し

$$\begin{cases} A_t(\omega)=A^n_t(\omega) & \sigma_{X-F_{n-1}}(\omega)\leq t<\sigma_{X-F_n}(\omega),\ n=1,2,\cdots, \\ A_t(\omega)=A_{\sigma(\omega)-}(\omega) & t\geq\sigma(\omega)=\lim_n \sigma_{X-F_n}(\omega) \end{cases}$$

とおく。明らかに $A\in\underset{\sim}{A}^+_c$ である。

$A\xrightarrow{(\#)}\mu$ を示そう。一般に $B\xrightarrow{(\#)}\nu\in\mathfrak{M}$ のとき任意の Borel 集合 S に対して

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha E_m\left(\int_0^{\sigma_{X-S}} e^{-\alpha t}f(X_t)dB_t\right)=\int_S f(x)\nu(dx),\quad \forall f\in b\mathcal{B}^+(X)$$

なる関係を証明できる。これを使えば $\sigma_n=\sigma_{X-F_n}$ として

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha E_m\left(\int_0^{\sigma_n} e^{-\alpha t}f(X_t)dA_t\right)=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha E_m\left(\int_0^{\sigma_n} e^{-\alpha t}f(X_t)dA^n_t\right)$$
$$=\int_{F_n}f(x)\mu_n(dx)=\int_{F_n}f(x)\mu(dx),\quad \forall f\in b\mathcal{B}^+(X).$$

ここで $n\to\infty$ とする。α に関する極限が単調増加極限であるから，極限の順序交換が可能であるが，$\lim_n\sigma_n\geq\zeta$，$\mu(X-\bigcup_n F_n)=0$ に注意して

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha(1,U^\alpha_A f)=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha E_m\left(\int_0^\zeta e^{-\alpha t}f(X_t)dA_t\right)=\langle f,\mu\rangle$$

$\forall f\in b\mathcal{B}^+(X)$。これは $A\xrightarrow{(\#)}\mu$ を意味する。

さて $A\xrightarrow{(\#)}\mu$ とすると $I_{F_n}\cdot A\xrightarrow{(\#)}I_{F_n}\cdot\mu\in\mathfrak{M}$ であるから μ に対して $I_{F_n}\cdot A\in\underset{\sim}{A}^+_c$ は同値性を除いて一意的である（補題5，6）。$\bigcap_n(X-F_n)$ が exc. set 故 $A\sim I_{\bigcup_n F_n}\cdot A$。従って A も μ に対して一意的である。 q.e.d.

補題7と補題8により定理の(I)と(II)の証明が完結した。(III)の証明は次の補題による。

<u>補題9</u>：μ を exc. set に mass をもたない任意の正の Radon 測度とすると，μ は定理の(I)の3条件(i),(ii),(iii)を満す。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

<u>証明</u>. K を compact とすると M. L. Silverstein, Springer Lecture Notes in Math. 426, Lemma 3.18 により閉集合列 B_n があって $\mu_K(B_n) \to 0$, $Cap^{(1)}(B_n) \to 0$, $I_{X-B_n} \cdot \mu_K \in \mathfrak{M}$ 但し $\mu_K = I_K \cdot \mu$. 開集合列 G_ℓ で $\overline{G_\ell}$ compact $\subset G_{\ell+1}$, $G_\ell \uparrow X$ なるものをとろう. $\exists F^{(\ell)}$ closed ; $\mu(\overline{G_\ell} - F^{(\ell)}) < 2^{-\ell}$, $Cap^{(1)}(X - F^{(\ell)}) < 2^{-\ell}$, $I_{F^{(\ell)} \cap \overline{G_\ell}} \cdot \mu \in \mathfrak{M}$. ここで $F_\ell' = F^{(\ell)} \cap \overline{G_\ell}$, $F_\ell = F_1' \cup F_2' \cup \cdots \cup F_\ell'$ とおけば各 ℓ_0 に対し $\mu(\overline{G_{\ell_0}} - F_\ell) \leqq \mu(\overline{G_\ell} - F^{(\ell)}) \to 0$, $\mu(\overline{G_{\ell_0}} - \bigcup_\ell F_\ell) = 0$.
故に $\mu(X - \bigcup_\ell F_\ell) = 0$. 又 $Cap(\overline{G_{\ell_0}} - F_\ell) \leqq Cap(\overline{G_\ell} - F^{(\ell)}) \to 0$. 又 $I_{F_\ell} \cdot \mu \in \mathfrak{M}$. 即ち $\mu \in \mathfrak{M}_s$. q.e.d.

<u>6. Remarks</u>

<u>Remark 1.</u> 補題9の証明と同じやり方で, $\mathfrak{M}_s$ に関する以下のようなより簡単な特徴ずけを示すことができる.

$\underset{\sim}{M}$ の Dirichlet space が regular とする. $\mu \in \mathfrak{M}_s$ であるための必要十分条件は閉集合の増大列 F_n が存在し

(i)' $I_{F_n} \cdot \mu$ は exc. set に mass を持たない Radon 測度

(ii) $\mu(X - \bigcup_{n=1}^\infty F_n) = 0$

(iii) $\lim_n Cap^{(1)}(K - F_n) = 0$ $\forall K$ compact.

<u>Remark 2.</u> $X = R^n$, m は Lebesgue 測度, $\underset{\sim}{M}$ は R^n 上の Brownian motion とする. $N \subset R^n$ が exc. set $\underset{\text{必十}}{\Longleftrightarrow}$ N が Polar : $P_x(\sigma_{\tilde{N}} < \infty) = 0$, $\forall x \in R^n$, $\tilde{N}$ は $\tilde{N} \supset N$ なるある Borel 集合.

<u>1次元 ($n=1$) のとき</u> : 各点 non-polar, 即ち exc. set は存在しない. 従って Remark 1 より, $\mu \in \mathfrak{M}_s \underset{\text{必十}}{\Longleftrightarrow} \mu$ は正の Radon 測度.

<u>多次元 ($n \geqq 2$) のとき</u> : 1点集合は polar. Lebesgue 測

度は polar set に mass を持たない。従って例えば任意の γ に対して $\mu(dx) = |x|^{\gamma}dx$ は smooth である。実際 Remark 1 の F_n として $\{x \in R^n \mid |x| \geqq \frac{1}{n}\}$ とをとればよい。対応する PCAF は $A_t(w) = \int_0^t |X_s(w)|^{\gamma} ds$ であり 1 点集合 $N = \{0\}$ を proper exc. set とする。この exc. set は一般には除去不可能である。実際 $\gamma \leqq -2$ ならば重複対数の法則により $P_0(\int_0^t |X_s(w)|^{\gamma} ds = +\infty) = 1$. 即ち原点から出発する Brown 運動に関して finite な A_t を自然に定義することができない。

strict (即ち exc. set を許さない) PCAF に (#) によって対応する測度を <u>smooth measure in the strict sense</u> と呼ぶ。Brownian motion に関するその特徴づけは, McKean-Tanaka Memoirs Kyoto Univ., 1961, 479~506, によって与えられた。strict sense の smooth measure は勿論 $\mathfrak{M}_s$ に属すが, 例えば $\gamma \leqq -2$ に対する $\mu(dx) = |x|^{\gamma}dx$ は strict sense の smooth measure ではない。McKean-Tanaka 参照。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Markovian resolvent の L^p 評価について

阪大　　福島 正俊

1. 主定理

$(X, \mathcal{B}, m)$ を測度空間，その上の実関数族のなす L^p 空間のノルムを $\|\ \|_p$，L^2 内積を $(\ ,\ )$ とする，$\mathcal{E}$ でもって L^2 のある部分空間 $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ の直積 $\mathcal{D}[\mathcal{E}]\times\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ 上の対称二次形式を表わす．$\lambda \geqq 0$ に対し

$$\mathcal{E}_\lambda(u, v) = \mathcal{E}(u, v) + \lambda(u, v), \quad u, v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$$

とおこう．$\lambda \geqq 0$，$f \in L^2$ に対して次の方程式の解 u を $R_\lambda f$ とする：

$$\begin{cases} u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}] \\ \mathcal{E}_\lambda(u, v) = (f, v), & \forall v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]. \end{cases}$$

一般には勿論 $R_\lambda f$ の存在と一意性はわからないが，ここではさしあたってそれが存在するとしてそのノルムについての先験的評価を与えることを目的とする．

そのために $\mathcal{E}$ に次の条件を課す；

$(\mathcal{E}.a)$ $u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}],\ k \geqq 0 \Longrightarrow \begin{cases} v = (u-k)^+ \in \mathcal{D}[\mathcal{E}] \\ \mathcal{E}(v, v) \leqq \mathcal{E}(u, v) \end{cases}$

$(\mathcal{E}.b)$ $\exists p_0 > 2$，$\exists C$ 正定数

$$\|u\|_{p_0}^2 \leqq C\cdot\mathcal{E}(u, u) \qquad \forall u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}].$$

<u>定理 1.</u>' $\mathcal{E}$ が $(\mathcal{E}.a)$, $(\mathcal{E}.b)$ を満すとすると $p > \dfrac{p_0}{p_0-2} \vee 2$ なる任意の p に対し不等式

$$\|R_0 f\|_\infty \leqq C_1\|f\|_p + C_2\|R_0 f\|_2, \qquad \forall f \in L^p \cap L^2$$

が成立する，但し，C_1, C_2 は $m(X)$ の無限，有限に応じて

$$C_1 = \begin{cases} 2^{1+\frac{p}{pp_0-2p-p_0}}\cdot C, & (m(X)=\infty), \\ 2^{1+\frac{p}{pp_0-2p-p_0}}\cdot C\cdot[m(X)]^{\frac{pp_0-2p-p_0}{pp_0}}, & (m(X)<\infty), \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$C_2 = \begin{cases} 1 & , \quad (m(X) = \infty) \\ 0 & , \quad (m(X) < \infty). \end{cases}$$

証明. 1°) $f \in L^p \cap L^2$, $p > 2$, を取り $u = R_0 f$, $v = (u-k)^+$ とおく. $k > 0$. 条件(E.a)と(E.b)により $v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ 且つ $\|v\|_{p_0}^2 \leqq C(f, v)$.
Schwarz と Hölder の不等式により

$$|(f, v)| \leqq \left(\int_{A(k)} f^2 dm\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A(k)} v^2 dm\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \|f\|_p \cdot [m(A(k))]^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \cdot \|v\|_{p_0} [m(A(k))]^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_0}}.$$

但し $A(k) = \{x \in X \mid u(x) > k\}$.

従って $\|v\|_{p_0} \leqq C \|f\|_p [m(A(k))]^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}$.

一方 $h > k > 0$ に対し

$$(h-k)^{p_0} m(A(h)) \leqq \int_{A(h)} [(u(x)-k)^+]^{p_0} dm \leqq \|v\|_{p_0}^{p_0}$$

だから結局次の不等式

$$(1.1) \quad m(A(h)) \leqq \frac{C^{p_0}}{(h-k)^{p_0}} \|f\|_p^{p_0} [m(A(k))]^{(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0})p_0}$$

が任意の $h > k > 0$ に対して成立することがわかった.

2°) 不等式(1.1)に次の補題(Stampacchia : Ann. Inst. Fourier 15(1965), Lemma 4.1)を適用する.

Stampacchia の補題. $t > k_0$ で定義された非負, 非増加な実関数 $\varphi(t)$ が $h > k > k_0$ に対して不等式

$$\varphi(h) \leqq \frac{\hat{C}}{(h-k)^{\alpha}} [\varphi(k)]^{\beta}$$

を満すとする. 但し $\hat{C}$, α, β は正定数で $\beta > 1$.
このとき $\varphi(k_0 + d) = 0$, ここに

$$d^{\alpha} = \hat{C} [\varphi(k_0)]^{\beta-1} \cdot 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}.$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

今の場合 $\varphi(t) = m(A(t))$, $\alpha = p_0$, $\hat{C} = C^{p_0}\|f\|_p^{p_0}$, $\beta = (1-\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0})p_0$. k_0は次のようにとる：

$$k_0 = \begin{cases} \|u\|_2 & m(X)=\infty \text{ のとき} \\ 0 & m(X)<\infty \text{ のとき.} \end{cases}$$

補題により $\beta > 1$ 即ち $p > \frac{p_0}{p_0-2}$ のとき

$$u(x) \leqq d + k_0 \quad m\text{-a.e.}$$

但し $d = C\cdot\|f\|_p[\varphi(k_0)]^{\frac{\beta-1}{\alpha}} 2^{\frac{\beta}{\beta-1}}$. ここで $m(X)$ が無限か有限かに応じて $\varphi(k_0)$ が 1 又は $m(X)$ で各々押えられることに注意すれば，殆んど全ての x に対して $u(x)$ が定理1の不等式の右辺の量で評価されることがわかる。

3°) 上の結果を $-f$ と $-u$ に適用すれば殆んど全ての x に対して $-u(x)$ も同じ量で評価されることがわかる。 q.e.d.

2. 非負定値双一次形式

$\mathcal{E}(u,u) \geqq 0$, $\forall u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$, なる双一次形式を非負定値という。このとき $\lambda > 0$, $f \in L^2$ に対して $R_\lambda f$ が存在するとすれば，不等式 $\|R_\lambda f\|_2 \leqq \frac{1}{\lambda}\|f\|_2$ が成立し，従って $R_\lambda f$ は一意的である。 $(\mathcal{E}.b)$ よりも弱い条件

$(\mathcal{E}.b)'$ $\exists p_0 > 2$, $\exists C$ 正定数

$$\|u\|_{p_0}^2 \leqq C\cdot\mathcal{E}_1(u,u) \qquad \forall u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}],$$

を考えよう。

<u>定理2</u>. 非負定値双一次形式 $\mathcal{E}$ が $(\mathcal{E}.a)$ 及び $(\mathcal{E}.b)'$ を満すとすると，$\lambda > 0$, $p > \frac{p_0}{p_0-2} \vee 2$ なる任意の λ, p に対し不等式

$$\|R_\lambda f\|_\infty \leqq (\tfrac{1}{\lambda}\vee 1)\cdot C_1\|f\|_p + \tfrac{1}{\lambda}C_2\|f\|_2, \quad \forall f \in L^p \cap L^2,$$

が成立する。但し C_1 は条件 $(\mathcal{E}.b)'$ の C によって定理1の

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

ように定まる定数．C_2 も定理1のもの．

証明．次のことに注意すればよい．非負定値双一次形式が $(\mathcal{E}.a)$ と $(\mathcal{E}.b)'$ を満すとすれば任意の $\lambda>0$ に対して $\mathcal{E}_\lambda$ は又 $(\mathcal{E}.a)$ を満すのみならず定数 $(\frac{1}{\lambda}\vee 1)\cdot C$ に関して $(\mathcal{E}.b)$ をも満す． q.e.d.

3. 非対称 Dirichlet 形式

上の2定理に於ける基本的条件の1つ $(\mathcal{E}.a)$ は実は双一次形式が最も一般な Dirichlet 形式であるための条件に他ならない．換言すると対応する L^2 上の半群又は resolvent が Markovian であるための必要十分条件が $(\mathcal{E}.a)$ なのである．以下 H. Kunita, Proc. Inter. Conf. on Functional analysis, 1969, Tokyo, に従ってこの事情を説明しよう．

L^2 上の双一次形式 $\mathcal{E}$ で次の3性質をもつものを考えよう：ある $\mu_0\geqq 0$ が存在し

(i) $\mathcal{E}_{\mu_0}$ は非負定値，

(ii) $\mathcal{E}_{\mu_0}$ は連続：$|\mathcal{E}_{\mu_0}(u,v)|\leqq M\sqrt{\mathcal{E}_{\mu_0}(u,u)}\sqrt{\mathcal{E}_{\mu_0}(v,v)}$

(iii) $\mathcal{E}_{\mu_0}$ は閉じている：$\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ は $\mathcal{E}_\alpha$ に関して完備 $(\alpha>\mu_0)$，且つ $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ は L^2 内 dense.

このような $\mathcal{E}$ に対しては L^2 上の強連続半群 $\{T_t,\ t>0\}$ でその生成作用素 A が次の条件を満すものが一意的に存在する：

$$\mathcal{E}(u,v)=(-Au,v),\ \forall u\in\mathcal{D}(A),\ \forall v\in\mathcal{D}[\mathcal{E}].$$

このとき更に各 $t>0$ に対し T_t が subMarkovian である，即ち $0\leqq f\leqq 1 \Rightarrow 0\leqq T_t f\leqq 1$ が成立するための必要十分条件は $\mathcal{E}$ が $(\mathcal{E}.a)$ を満すことなのである．一般に (i)(ii)(iii)，$(\mathcal{E}.a)$ を満す双一次形式を Dirichlet 形式という．Dirichlet 形式に対しては条件 $(\mathcal{E}.b)$ もしくは $(\mathcal{E}.b)'$ の下で定理1又は定理2の結論が各々成立する．

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

例1 (Stampacchia 前述論文). R^nの有界開集合Dを考え, mをその上のLebesgue測度とする. D上の有界可測関数 a_{ij} が $a_{ij}=a_{ji}$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \nu|\xi|^2$, $\forall\xi\in R^n$, を満すとする. νはある正定数. 又 $b_i\in L^n(D)$, $1\leqq i\leqq n$, とする. このとき

$$\mathcal{E}(u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}a_{ij}(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\int_D b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}v(x)dx$$

$$\mathcal{D}[\mathcal{E}]=H_0^1(D)$$

で定義される双一次形式$\mathcal{E}$はL^2上の(非対称) Dirichlet形式であり, しかも充分大きなμ_0に対しては$\mathcal{E}_{\mu_0}$は条件$(\mathcal{E}.b)'$を満す.

実際 $(\mathcal{E}.a)$ はこのとき

$$\mathcal{E}(u\wedge k,\ (u-k)^+)=0$$

というより強い形で成立する. 証明はしかし簡単ではない (Stampacchia, Montreal 大学講義ノート参照). 充分大きなμ_0に対し$\mathcal{E}_{\mu_0}$が$H_0^1(D)$上coerciveであること, 即ち$\mathcal{E}_{\mu_0}$-ノルムがDirichletノルムを押えることと及び後述するSobolev型不等式により $\frac{1}{2}>\frac{1}{p_0}>\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$ なる任意のp_0に対して$\mathcal{E}_{\mu_0}$が条件$(\mathcal{E}.b)'$を満すことが分かる. 更に$\mathcal{E}$が$H_0^1(D)$上の連続な形式であること(Stampacchia)と$\mathcal{E}_{\mu_0}$のcoercivenessより性質(i)(ii)(iii)が従う.

従って定理2により $p>\frac{n}{2}\vee 2$, $\lambda>\mu_0$ なる任意のpとλに対して

$$\|R_\lambda f\|_\infty \leqq C_3\|f\|_p \qquad ,\ \forall f\in L^p(D)$$

が成立する. C_3はν, p, λ, $\|b\|_n$ のみに依存する定数である.

4. 対称Dirichlet形式

前節に定義した一般のDirichlet形式が非負定値であり且つ$\mathcal{E}(u,v)=\mathcal{E}(v,u)$, $\forall u,v\in\mathcal{D}[\mathcal{E}]$, を満すとき,

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

これを対称 Dirichlet 形式と呼ぶ. 対称 Dirichlet 形式に於ける条件 $(\mathcal{E}.a)$ はそれと同値な条件

$$(\mathcal{E}.a)' \quad u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}] \Rightarrow \begin{cases} v = (0 \vee u) \wedge 1 \in \mathcal{D}[\mathcal{E}] \\ \mathcal{E}(v, v) \leq \mathcal{E}(u, u), \end{cases}$$

におきかえることができる. 又対称 Dirichlet 形式の全体と L^2 上の対称で subMarkovian な作用素 $\{T_t, t > 0\}$ のなす強連続半群の全体とは次の対応で 1 対 1 である:

$$(4.1) \begin{cases} \mathcal{D}[\mathcal{E}] = \{u \in L^2 ; \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(u - T_t u, u) < \infty\} \\ \mathcal{E}(u, v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(u - T_t u, v). \end{cases}$$

以下の 2 例は典型的な対称 Dirichlet 形式に定理 2 が適用できることを示すものである.

例 2. R^n 上の Radon 測度 ν_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ で

$$\nu_{ij} = \nu_{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} \nu_{ij}(E)\xi_i \xi_j \geq \gamma |E| \cdot |\xi|^2, \quad \forall \xi \in R^n,$$

$\forall E \in \mathcal{B}(R^n)$, を満すものを考える. γ は正定数, $|E|$ は E の Lebesgue 測度.

D を開集合とし $L^2(D)$ 上の形式

$$\mathcal{E}(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \nu_{ij}(dx), \quad \mathcal{D}[\mathcal{E}] = C_0^\infty(D)$$

が可閉であると仮定する. これを可閉ならしめ且つ Lebesgue 測度に関して必らずしも絶対連続でないような $\{\nu_{ij}\}$ の例は第 2 回及び第 3 回日ソシンポジューム Proc. (Springer Lecture Notes 330, 550) 中の筆者の論文参照.

$\mathcal{E}$ の最小閉拡大 $\bar{\mathcal{E}}$ はこのとき対称 Dirichlet 形式となりしかも $\mathcal{D}[\bar{\mathcal{E}}] \subset H_0^1(D)$ 且つ

$$(\gamma \wedge 1)(\mathbf{D}(u, u) + (u, u)) \leq \bar{\mathcal{E}}(u, u) + (u, u), \quad u \in \mathcal{D}[\bar{\mathcal{E}}].$$

ここに $\mathbf{D}(u, u)$ は u の Dirichlet 積分を表わす.

従って例 1 の場合と同様に後述の Sobolev 型不等式により $\bar{\mathcal{E}}$ が $\frac{1}{2} > \frac{1}{p_0} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ を満す任意の p_0 に対して条件 $(\mathcal{E}.b)$ を満すことがわかる. 定理 2 にかんがみて, 任意の

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$p > \frac{n}{2} \vee 2$ と $\lambda > 0$ に対して

$$\| R_\lambda f \|_\infty \leqq C_3 \| f \|_p + \frac{1}{\lambda} C_2 \| f \|_2 \quad , \quad \forall f \in L^p \cap L^2 .$$

但し C_3 は γ, λ, p のみに依存する正定数.

例3. $k(x, E)$ を $R^n \times \mathcal{B}(R^n)$ 上の核で

$$\int_{R^n} u(x)(kv)(x)\,dx = \int_{R^n} (ku)(x) v(x)\,dx, \quad \forall u, v \in C_0^+$$

$$k(x, E) \geqq \gamma \int_E |x-y|^{-(n+\alpha)} dy \ , \ x \in R^n, \ E \in \mathcal{B}(R^n)$$

を満すものとする. ここに $0 < \alpha < 2$, $\gamma > 0$.

$L^2(R^n)$ に属す Borel 関数 u であって積分

$$\int_{R^n \times R^n} (u(x) - u(y))^2 k(x, dy)\,dx$$

が有限であるような u の全体を $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ とし, $u, v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ に対して

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_{R^n \times R^n} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) k(x, dy)\,dx$$

とおく. 我々はここで $C_0^\infty(R^n) \subset \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ と仮定する. そうすればこのようにして定義される $\mathcal{E}$ が $L^2(R^n)$ 上の対称 Dirichlet 形式であることが容易に確かめられる. 例えば 2 変数の非負対称可測関数 $k(x, y)$ が $|x-y|^{-(n+\alpha)}$ の定数倍によって上と下から押えられているならば, 核 $k(x, y)dy$ は上で課された全ての条件を満す.

k に課された不等式から

$$\mathcal{D}[\mathcal{E}] \subset \mathcal{D}[\mathcal{E}^{(\alpha)}], \quad \mathcal{E}^{(\alpha)}(u, u) \leqq \frac{B(\alpha, n)}{\gamma} \mathcal{E}(u, u), \quad u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$$

が従う. ここに $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ は以下に定義されるような $L^2(R^n)$ 上の Dirichlet 形式であり, $B(\alpha, n)$ はそこで定まる定数.

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}(u, u) = \int_{R^n} |\hat{u}(\xi)|^2 |\xi|^\alpha d\xi$$

$$= \int_{R^n \times R^n} (u(x) - u(y))^2 \frac{B(\alpha, n)}{|x-y|^{n+\alpha}} dx\,dy$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$\mathcal{D}[\mathcal{E}^{(\alpha)}] = \{u \in L^2(R^n) \mid$ 上の積分が有限$\}$.
但し $\hat{u}$ は u の Fourier 変換で
$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} e^{i\xi\cdot x} u(x)\,dx.$$
又 $B(\alpha, n) = 2^{\alpha-1}\pi^{-\frac{n+2}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)\Gamma(\frac{\alpha+n}{2})\sin\frac{\pi}{2}\alpha$.

従って $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ に関して次節で示される Sobolev 型不等式により, $\mathcal{E}$ は $\frac{1}{2} > \frac{1}{p_0} > \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2n}$ なる任意の p_0 に対して条件 (E.b)$'$ を満足することがわかる. 定理2を適用することにより, $p > \frac{n}{\alpha} \vee 2$ に対し 例2と全く同じ様な Resolvent に関する評価を得る.

ちなみに $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ は index α の対称安定過程の Dirichlet 形式に他ならない. 実際この process の推移半群は $\hat{\nu}_t(\xi) (= \int_{R^n} e^{i\xi\cdot x}\nu_t(dx)) = e^{-t|\xi|^\alpha}$ を満す測度 ν_t によって $T_t u(x) = \nu_t * u(x)$, $u \in C_0(R^n)$, と表わされる. 故に任意の $u \in L^2(R^n)$ に対して
$$\frac{1}{t}(u - T_t u, u) = \frac{1}{t}(\hat{u} - \widehat{T_t u}, \hat{u})$$
$$= \frac{1}{t}\int_{R^n}(1 - e^{-t|\xi|^\alpha})|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \uparrow \int_{R^n}|\hat{u}(\xi)|^2|\xi|^\alpha d\xi,\ t \downarrow 0.$$
ここで関係式 (4.1) を思い起せばよい.

5. Sobolev 型不等式

3節と4節の3つの例で考察した Dirichlet 形式はいずれも定理2が成立するための条件 (E.b)$'$ を満していた. その根拠はここに述べる Sobolev 型不等式にある.

例3の中で取り上げた対称安定過程の Dirichlet 形式 $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ を考えよう. $0 < \alpha < 2$ であるが
$$\mathcal{E}^{(2)}(u, u) = \mathbf{D}(u, u), \quad \mathcal{D}[\mathcal{E}^{(2)}] = H^1(R^n)$$
とおいて $\alpha = 2$ の場合も含めて考えることにする. 但し $\mathbf{D}(u, u)$ は u の通常の Dirichlet 積分.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

定理3. $0<\alpha\leqq 2$ とする. $\frac{1}{2}>\frac{1}{p_0}>\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2n}$ なる任意の p_0 に対し

$$\mathcal{D}[\mathcal{E}^{(\alpha)}]\subset L^{p_0}(R^n),\ \|u\|_{p_0}^2\leqq M\,\mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u),\ {}^\forall u\in\mathcal{D}[\mathcal{E}^{(\alpha)}]$$

が成立する. M は p_0 に関係した正定数.

証明. $\mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u)=\int_{R^n}(1+|\xi|^\alpha)|\hat{u}(\xi)|^2d\xi$

であるが, Aronszajn-Smith, Ann. Inst. Fourier 11 (1961), に従って次のノルムを考えると都合がよい:

$$|||u|||_\alpha^2=\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\hat{u}(\xi)|^2d\xi.$$

$\frac{1}{2}(1+|\xi|^\alpha)\leqq(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\leqq 1+|\xi|^\alpha$ であるから

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u)\leqq|||u|||_\alpha^2\leqq\mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u).$$

そこで定理3のためには次の不等式さえ示せばよいことがわかる.

$$(5.1)\quad \|u\|_{p_0}^2\leqq M\,|||u|||_\alpha^2\ ,\quad u\in\mathcal{D}[\mathcal{E}^{(\alpha)}].$$

ところで

$$G_\alpha(x)=\frac{1}{2^{\frac{n+\alpha-2}{2}}\pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)}K_{\frac{n-\alpha}{2}}(|x|)|x|^{\frac{\alpha-n}{2}}$$

によって定義される関数 G_α を用いて $G_\alpha f(x)=\int_{R^n}G_\alpha(x-y)f(y)dy$ とおいたものを Aronszajn-Smith は f の Bessel potential と呼んだ. G_α は原点の近くでは $|x|^{\alpha-n}$ の order であり, 遠方では指数的に減少し, α 位対称安定過程の1次のリゾルベント核に近いものである. 実際その Fourier 変換は

$$\hat{G}_\alpha(\xi)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(1+|\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

これから空間 $\mathcal{D}[\mathcal{E}^\alpha]$ とその上の modified norm $|||\ |||_\alpha$ について次の表現が得られることに注意しよう.

$$(5.2)\quad\begin{cases}\mathcal{D}[\mathcal{E}^{(\alpha)}]=\{u=G_{\frac{\alpha}{2}}f\mid f\in L^2(R^n)\}\\ |||u|||_\alpha^2=(f,f)\qquad\text{for }u=G_{\frac{\alpha}{2}}f.\end{cases}$$

実際 $u=G_{\alpha/2}f$ の Fourier 変換を取ると, $\hat{u}(\xi)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{G}_{\alpha/2}\hat{f}$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$= (1+|\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{4}}\hat{f}(\xi)$. 故に $|||u|||_\alpha^2 = \int (1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$

$= \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = (f, f)$.

さて表現(5.2)のおかげで不等式(5.1)はBesselポテンシャルのL^p評価に関する次の不等式に置きかわる.

(5.3) $\|G_{\alpha/2} f\|_{p_0} \leqq \sqrt{M}\,\|f\|_2$, $\forall f \in L^2$.

見やすくするために更に書きかえて

(5.3)′ $\begin{cases} \|G_\alpha f\|_q \leqq \tilde{M}\,\|f\|_2 , & \forall f \in L^2, \\ 0 < \alpha \leqq 1 , & \frac{1}{2} > \frac{1}{q} > \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n} . \end{cases}$

これはYoungの不等式(Zygmund, Trigonometric series) pp37):

$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} \geqq 1$, $1 \leqq r$, $1 \leqq p$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - 1$

$u \in L^r$, $v \in L^p \Rightarrow \|u * v\|_q \leqq \|u\|_r \|v\|_p$

の簡単な帰結である. 実際 $p = 2$, $\frac{1}{2} > \frac{1}{q} > \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n}$ を取り $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2} + 1$ とおけば $r > 1$, 且つ $r(\alpha - n) + n > 0$ であるから G_α の原点の近くでの前述の特異性にかんがみて, $G_\alpha \in L^r$. Youngの不等式が適用できて

$\forall f \in L^2 \Rightarrow G_\alpha f \in L^q$, $\|G_\alpha f\|_q \leqq \|G_\alpha\|_r \cdot \|f\|_2$.

$\tilde{M} = \|G_\alpha\|_r$ として(5.3)′を得る. q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Optimal stopping problem と変分不等式について

長井英生

1. non-negative function $g(x)$ と non-negative additive functional A_t が与えられた時、平均量 $E_x[g(X_\tau)-A_\tau]$ を maximize(*)する問題は、$E_x[\hat{g}(X_\tau)]$ ($\hat{g}(x)=g(x)+E_x[A_\infty]\geqq 0$) を maximize する問題に変換され、Dynkin ([2]), Grigelionis & Shiryaev ([6]), H.M. Taylor ([9]) 等により論じられた。Dynkin は Standard Process でこの問題を取り扱い、$\tilde{S}(x)=\max_\tau E_x[\hat{g}(X_\tau)]$ が $\hat{g}(x)$ の smallest excessive majorant であるという ($\hat{g}(x)$ が C_0-lower semi continuous であるという仮定のもとで) 特徴づけを行ない、さらに $g(x)$ が bounded である時に ε-optimal strategy の存在を示した。また、H.M. Taylor は transition semi-group が Feller である Hunt process では、$\hat{g}(x)$ が bounded continuous ならば discount した $\max_\tau E_x[e^{-\lambda\tau}\hat{g}(X_\tau)]$, $\lambda>0$, の optimal strategy の存在が [2] の Corollary として導かれる事を示した。一方、Grigelionis-Shiryaev は、この optimal stopping problem と、ある種の自由境界問題との結びつきを明らかにした。すなわち

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

いくつかの条件の下では Optimal strategy をある集合への entry time として求める事が自由境界問題において境界を求める事に相当する事を示した。その後 Bensoussan-Lions ([1]) は時間的非一様な拡散過程でこの問題を取り上げ対応する自由境界問題の解を変分法(変分不等式)で求め、変分不等式の解が十分な正則性を持つならば optimal strategy が存在する事を示した。その際変分不等式の解の正則性の検証は困難で Friedman ([3]) により補完された。ここでは対称な standard process において Dirichlet space とマルコフ過程のポテンシャル論を用いる事により、上の正則性の検証なしに Optimal strategy が存在する事を示す結果を掲げる。この方法によれば $g(x)$ や A_t の非負性の仮定ははずされる。((*)は全ての stopping time の上を動く)

なお証明は別な形で発表する予定なので省略します。

2. X: locally compact Hausdorff space with countable base

$m(dx)$: positive Radon measure, everywhere dense.

$\mathbb{M} = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, P_x, \zeta, \theta_t)$: m-対称 standard process

$$\int_X P_t f(x) g(x)\, m(dx) = \int_X f(x) P_t g(x)\, m(dx), \quad f, g \in \mathcal{B}^+(X)$$

P_t: $\mathbb{M}$ の transition semi-group

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $\mathbb{M}$ の Dirichlet space

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$\mathcal{F} = \{ u \in L^2(X; m) ; \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(u - T_t u, u) < +\infty \}$$

T_t は P_t より induce される L^2-semi-group

$$\mathcal{E}(u, v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(u - T_t u, v)$$

$$\mathcal{E}_\alpha(u, v) = \mathcal{E}(u, v) + \alpha(u, v) \qquad \alpha > 0.$$

仮定　$(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ は regular i.e. $\mathcal{F} \cap C_0(X)$ は $C_0(X)$ 内 uniformly dense でかつ $\mathcal{F}$ 内で $\mathcal{E}_1$ dense. 但し $C_0(X)$ は support compact な 連続函数全体。

所与　ν: Radon measure s.t. $\nu = \nu_1 - \nu_2$, $\nu_i \in \mathcal{M}$, $i=1,2$

φ: $\in \mathcal{F}$ なる finely continuous function

ここに $\mathcal{M}$ はエネルギー有限な測度全体([4])

M. Fukushima ([5]) によれば 各 ν_i に対して non-negative additive functional A_t^i, $i=1,2$ があって各 A_t^i の α-potential は ν_i の α-ポテンシャル $U_\alpha \nu_i$ の quasi-continuous version になっている。すなわち

$$U_\alpha \nu_i = E_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dA_t^i\right] \quad m\text{-a.e.} \quad i = 1, 2.$$

従って $U_\alpha \nu \equiv U_\alpha \nu_1 - U_\alpha \nu_2$, $A_t \equiv A_t^1 - A_t^2$ とおけば

$$U_\alpha \nu = E_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dA_t\right] \quad m\text{-a.e.}$$

一方用意すべき変分不等式は次のものである。

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \mathcal{E}_\alpha(u + \varphi, v - u) \geq \int \nu(dx)(\tilde{v}(x) - \tilde{u}(x)) & \forall v \in \mathcal{R} \\ u \in \mathcal{R} \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$\mathcal{R} = \{v \in \mathcal{F} ;\ v \leq 0 \ \ m\text{-a.e.}\}$, $\tilde{v}$ は v の quasi-continuous version.

<u>Theorem</u> ある proper exceptional set N ([5]) と $X-N$ の finely closed subset B があって

$$\tilde{\rho}(x) \equiv E_x\left[\int_0^{\tau_B} e^{-\alpha t} dA_t + e^{-\alpha \tau_B} \varphi(X_{\tau_B})\right]$$

$$= \inf_{\tau} E_x\left[\int_0^{\tau} e^{-\alpha t} dA_t + e^{-\alpha\tau} \varphi(X_\tau)\right] \qquad x \in X-N$$

であり $\tilde{\rho}$ は $\rho = u + \varphi$ の任意の quasi-continuous version (但し u は (I) の解).

<u>注意 1</u> 変分不等式 (I) は一意的な解をもつ。なぜなら (I) は

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\alpha(u+\varphi-U_\alpha\nu,\ v-u) \geq 0 \quad {}^\forall v \in \mathcal{R} \\ u \in \mathcal{R} \end{cases}$$

と同値であり、さらに $\mathcal{R}$ が convex set である事に注意すれば

$$(\mathrm{II})\begin{cases} \mathcal{E}_\alpha(u+\varphi-U_\alpha\nu,\ u+\varphi-U_\alpha\nu) \leq \mathcal{E}_\alpha(v+\varphi-U_\alpha\nu,\ v+\varphi-U_\alpha\nu) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {}^\forall v \in \mathcal{R} \\ u \in \mathcal{R} \end{cases}$$

と同値である。$\mathcal{R}$ が closed convex set であるから、中線定理を使って u が $U_\alpha\nu - \varphi$ の $\mathcal{R}$ 上への projection として一意的に存在する事がわかる。

<u>注意 2</u> 変分不等式 (I) の(*)解の存在は実は $\mathcal{E}_\alpha$ が Hilbert 空間 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\alpha)$ 上の連続で coercive な form である事で十分な場合

(*) 一意的な

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$\mathcal{E}_\alpha$ は $\mathcal{F}$ の内積であるから (coerciveness, 連続性とも自明) と $v(x) \rightsquigarrow \int \nu(dx)\tilde{v}(x)$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\alpha)$ 上の bounded linear functional である事に依っていて対称性は本質的ではない。(cf. [7]).

注意3 $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ が transient の時 ($\Leftrightarrow$ $\exists h(x) \in L^1(X;m)$, bounded Borel, >0 m-a.e., $\int_X |f(x)|h(x)\,dm \le \sqrt{\mathcal{E}(f,f)}$ $\forall f \in \mathcal{F}$) には、$\mathcal{F}$ を $\mathcal{E}$ で completion し completion された空間 $(\mathcal{F}_e, \mathcal{E})$ が Hilbert 空間となる様にできる ([8]) から、$v(x) \rightsquigarrow \int \nu(dx)\tilde{v}(x)$ が $(\mathcal{F}_e, \mathcal{E})$ 上の bounded linear functional であるならば 0次の form $\mathcal{E}$ に関する変分不等式

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u+\varphi, v-u) \ge \int \nu(dx)(\tilde{v}(x) - \tilde{u}(x)) \\ u \in K = \{ v \in \mathcal{F}_e ;\ v \le 0 \ \text{m-a.e.} \} \end{cases}$$

は(*)解をもつ。(0次の form に関しても capacity が定義され ポテンシャル論が Silverstein ([8]) でなされている) 従って、transient の場合には、$\alpha = 0$ の時も Theorem の成立する事情は変わらない。

注意4 $X = \mathbb{R}^n$, $m(dx) = dx$ (dx は Lebesgue measure) $\nu(dx) = f(x)dx$, $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n; dx)$ の場合に $u, \varphi \in \mathcal{D}(A)$ (A は $\mathcal{E}$ に対応する self-adjoint operator) を仮定すると (I) は

$$\begin{cases} (\alpha - A)\rho \le f & \text{(III.1)} \\ (\alpha - A)\rho = f \quad \text{on } \{x;\ \rho < \varphi\} & \text{(III.2)} \end{cases}$$

($\rho = u + \varphi$) と同値である。(III.2) の方程式が成立する領域

(*) 一意的な

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

が unknown であるので自由境界問題と呼ばれる。(I)と(III.1)&(III.2)の同値性は(I)が

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\alpha(u+\varphi-G_\alpha f, v) \geq 0 & \forall v \in \mathcal{R} \\ \mathcal{E}_\alpha(u+\varphi-G_\alpha f, u) = 0 \end{cases}$$

と同値であり、さらに上は $u, \varphi \in \mathcal{D}(A)$ の仮定の下では

$$\begin{cases} ((\alpha-A)\varphi-f, v) \geq 0 & \forall v \in \mathcal{R} \\ ((\alpha-A)\varphi-f, u) = 0 \end{cases}$$

と同値である事から示される。

References

[1] A. Bensoussan and J.L. Lions : Problems de temps d'arret optimal et inequations variationelles parabolique, Applicable Analysis 3 (1973), 267-277.

[2] E.B. Dynkin : The optimum choice of the instant for stopping a Markov process, Soviet Math. Dokl. 4 (1963) 627-629

[3] A. Friedman : Regularity theorems for variational inequalities in unbounded domains and application to stopping time problems, Archive Rat. Mech. Anal. 52 (1973), 134-160.

[4] 福島正俊：ディリクレ形式とマルコフ過程　紀伊國屋

[5] M. Fukushima : Additive functionals and smooth measure in a generalized sense, to appear

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

[6] B. I. Grigelionis and A. N. Shiryaev ; On the Stefan problem and optimal stopping rules for Markov processes, Theor. Prob. Appl. 11 (1966) 541-558

[7] J. L. Lions and G. Stampacchia ; Variational Inequalities, Comm. Pure and Appl. Math. Vol. XX (1967) 493-519.

[8] M. L. Silverstein ; Symmetric Markov processes, Lect. Notes in Math. 426, Springer-Verlag, 1974.

[9] H. M. Taylor ; Optimal stopping in a Markov process, Ann. Math. Statist. 39 (1968) 1333-1344.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

再帰マルコフ過程の平衡測度

大 島 洋 一

§0. 序

$p(t,x,y)$ を2次元ブラウン運動の推移確率密度，1を点 $(1,0)$， $g^p(x,y)=\int_0^\infty e^{-pt}p(t,x,y)\,dt$ とおくと以下のことは良く知られている([6],[8])． (i) $\lim_{p\to 0}[g^p(x,y)-g^p(0,1)]=a(x,y)$ が存在して， $a(x,y)=-\frac{1}{\pi}\log|x-y|$ である． (ii) コンパクト集合 F が極集合でないためには F 上の有界測度 ξ で $\int a(x,y)\xi(dy)$ が局所有界となるものが存在することが必要十分である． (iii) F が極集合でないコンパクト集合ならば F 上の確率測度 ξ_F で $\int a(x,y)\xi_F(dy)$ が F 上で極集合を除いてある定数 $R(F)$ に等しいものが存在する．このとき ξ_F 及び $R(F)$ をそれぞれ集合 F の平衡測度及び Robin の定数という． この報告の目的は同様の問題を強 Feller の再帰マルコフ過程 X について考えることである． その場合 (i) の極限値が一般には存在しないため，我々の場合 X の一つのポテンシャル核 $K(x,dy)$ の， X の不変測度 $\mu(dy)$ に関する，密度関数 $k(x,y)$ を採用する． X が2次元ブラウン運動の場合は， $k(x,y)=a(x,y)+x$ の局所有界関数 $+\,y$ の局所有界関数， なる関係がいえるため(定理2.x) 問題(ii) は a の代りに k としても同等である． 問題(iii) は我々の場合つぎのような形でとける． 相対コンパクト集合 F が，ある0でない，非負，有限の X の連続な加法的汎関数 B の fine support とする． X の dual，強 Feller マルコフ過程 $\hat{X}$ が存在するとし， $\hat{B}$ を B の dual 汎関数， $\hat{F}$ を $\hat{B}$ の cofine support とすると $\hat{F}$ 上の確率測度 ξ_F で $\hat{F}$ 上で $\int k(x,y)\xi_F(dy)$ がある定数 $K(F)$ に等しいものが存在する． この ξ_F, $K(F)$ は確率論的な意味をもつ． 特に X と $\hat{X}$ が同値の

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

場合は(iii)と類似の結果が成り立つ。　更にこの場合は平衡測度及びRobinの定数は，ブラウン運動の場合と同様に，エネルギーによって特徴づけることができる。

§.1. ポテンシャル核.

Eを可算基底をもつ局所コンパクト空間，$\mathcal{E}$をE上のボレル集合体，$b\mathcal{E}$, $b\mathcal{E}_+$, $b\mathcal{E}_c$をそれぞれ有界，非負有界，コンパクトな台をもつ有界$\mathcal{E}$ー可測関数の全体，$\mathcal{E}^*$をそのuniversal completionとする。　$X=(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, P^x)$を$E$上の強Fellerな再帰的Hunt過程，即ち$X$はHunt過程で$G^pf(x) = E^x[\int_0^\infty e^{-pt}f(X_t)\,dt]$　$(p \geq 0)$，　$Gf = G^0f(x)$とおくとき　(a)（再帰的）任意の$f \in b\mathcal{E}^+$に対して$Gf \equiv 0$または$\equiv \infty$，　(b) 任意の$p > 0$と$f \in b\mathcal{E}$に対してG^pfは有界連続である．（強Feller性）．Xの性質は[1]及び[2，問題 II.4.17−4.20]等で調べられている．　特に至るところ正のXの不変測度μが定数倍を除いて一意に存在する（[1]）．　次に，Xの0でない，非負，有限の連続な加法的汎関数の全体をΦとすると[1]より任意の$A \in \Phi$に対して$P^x(A_\infty = \infty) = 1$　$\forall x \in E$．二つの$A, B \in \Phi$に対して

$$U^{p,r}f(x) = E^x[\int_0^\infty e^{-pA_t - rB_t} f(X_t)\, dA_t]$$
$$V^{p,r}f(x) = E^x[\int_0^\infty e^{-pA_t - rB_t} f(X_t)\, dB_t],$$

特に$U^{p,0} = U^p$, $V^{0,r} = V^r$とおくと次のことがなりたつ（[3]定理2.1，2.2）．

<u>補題1.1</u>.　$p>0$，$q>0$，$r \geq 0$，$s \geq 0$，$f \in b\mathcal{E}^*$に対して，

(1.1)　$$U^{p,r}f - U^{q,s}f + (p-q)U^{p,r}U^{q,s}f + (r-s)V^{p,r}U^{q,s}f = 0$$

(1.2)　$$V^{r,p}f - V^{s,q}f + (p-q)V^{r,p}V^{s,q}f + (r-s)U^{r,p}V^{s,q}f = 0$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

特に $U^{0,a}|f|$（または $V^{a,0}|f|$）がある $a \geq 0$ に対して有界ならば $p+r>0$, $q+s>0$ なる $p, q, r, s \geq 0$ に対して (1.1)（または (1.2)）がなりたつ．

我々の場合 $\bigcup_n E_n = E$（または $\bigcup_n F_n = E$）なる $\mathcal{E}^*$ の増加列で $U^{0,1}(\cdot, E_n)$（または $V^{1,0}(\cdot, F_n)$）が有界なものがとれることを注意しておく（[5]）．特に $B_t = t$ のとき，$U^{p,r}$, $V^{p,r}$, U^p, V^p の代りにそれぞれ $K^{p,r}$, $G^{p,r}$, K^p, G^p と書くと [2, III.5] より F がコンパクトのとき $G^{1,0}(\cdot, F)$ は有界である．

今後，相対コンパクトな fine support をもち，任意の $p>0$ と $f \in b\mathcal{E}$ に対して $K^{0,p}f$ が有界連続であるような $A \in \Phi$ をとり固定しておく。例えば，任意のコンパクト集合 C に対して $A_t = \int_0^t I_C(X_s)ds$ は，C がポテンシャル 0 でないなら，上の性質をみたす。このとき，補題 1.1 より，

<u>補題 1.2.</u> 任意の $p, q > 0$, $f \in b\mathcal{E}^*$ に対して $K^p f$ 及び $G^{p,q}f$ は有界連続である．特に $f \in b\mathcal{E}_c^*$ なら $G^{p,0}f$ も有界連続である．

補題 1.2 より $(K^p)_{p\geq 0}$ は強 Feller resolvent だから $\sup_{x \in E} \| (K^1)^{n+1}(x, \cdot) - \nu(\cdot) \| < 2\alpha^n$ ($\exists \alpha < 1$) なる $(K^p)_{p \geq 0}$ の不変測度 ν が存在する．([4])．従って，

$$(1.3) \qquad K_A(x, \cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} [(K^1)^n(x, \cdot) - \nu(\cdot)]$$

が定義できる． $(K^p)_{p \geq 0}$ は resolvent だから $p<1$ のとき

$$K^p(x, \cdot) = K^1 \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n (K^1)^n(x, \cdot)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} [(K^1)^n(x, \cdot) - \nu(\cdot)] + \frac{\nu(\cdot)}{p} \quad \text{より}$$

<u>補題 1.3.</u> $\displaystyle \lim_{p \to 0} \sup_{x \in E} \| K^p(x, \cdot) - \frac{\nu(\cdot)}{p} - K_A(x, \cdot) \| = 0.$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

次に，任意の B ∈ 𝔄 に対し $\eta = p\nu V^{p,0}$ とおき η を B に associate した測度とよぶ．

$$V^{1,0}f - V^{p,0}f + (1-p)U^1V^{p,0}f = 0$$

の両辺を ν で積分し，ν が $(U^p)_{p\geq 0}$ の不変測度であることを使えば η の定義は $p>0$ に無関係となる．同様にすると η は $(V^p)_{p\geq 0}$ の不変測度，即ち $p\eta V^p = \eta$ ${}^{\forall}p>0$，であることがわかる．更に測度 ν 及び η はそれぞれ A 及び B に，Revuz [7] の意味で associate した測度となっていることもいえる．

$$(1.4)\qquad K_B(x,\cdot) = K_A V^{1,0}(x,\cdot) + V^{1,0}(x,\cdot) - \eta(\cdot)$$

とおく．特に $B_t = t$ のとき $K_B = K$ とおく．補題1.3 を使えば

<u>定理1.4</u>　(F_n) を補題1.1 の後の注で定義した集合列 $\|\ \|_{F_n}$ を F_n 上での全変動とすると，任意の $n\geq 1$ に対して，

$$\lim_{p\to 0}\sup_{x\in E}\| V^{p,0}(x,\cdot) - \frac{\eta(\cdot)}{p} - K_B(x,\cdot)\|_{F_n} = 0 .$$

特に $B_t = t$ のときは F_n の代りに任意のコンパクト集合としてなりたつ．

<u>定義</u>．E 上の核 H が X のポテンシャル核とは (a) 任意の $f \in \mathcal{N} = \{ f\in b\mathcal{E}_c^* ;\ \langle\mu, f\rangle = 0\}$ に対して $Hf \in b\mathcal{E}^*$，(b) 任意の $f\in\mathcal{N}$, $p>0$ に対して $(I - pG^p)Hf = G^pf$ をみたすことである．

定理1.4 及び K の定義より，

<u>系</u>．K は X のポテンシャル核である．また任意のコンパクト集合 F に対して K(・, F) は細連続である．

§2.　$k(x,y)$ の定義

今後 X の μ に関する dual，強 Feller な Hunt 過程 $\hat{X}$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$= (\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}_t, \hat{X}_t, \hat{P}^x)$ が与えられていると仮定する。この仮定はシンポジウムの折福島氏より教えて頂いた文献 Garcia-Meyer (Ann. of Prob. 1), Smythe-Walsh. (Inventiones Math. 19) の方法を使えば取り除けると思うが今のところ分からないのでこのまゝで議論する。このとき $\hat{X}$ も再帰的となる。関数 $\hat{B}(t, \hat{\omega})$ $(t \geq 0, \hat{\omega} \in \hat{\Omega})$ で，適当な極集合 $P_{\hat{B}}$ が存在して $\hat{B}$ が $\hat{X}|_{E \setminus P_{\hat{B}}}$ の非負，0 でない，有限値の連続な加法的汎関数となるような $\hat{B}$ の全体を $\hat{\mathfrak{B}}$ と書く。任意の $B \in \mathfrak{B}$ に対して X の $(e^{-B_t})_{t \geq 0}$ による subprocess と $\hat{X}|_{E \setminus P_{\hat{B}}}$ の $(e^{-\hat{B}_t})_{t \geq 0}$ による subprocess が μ に関して dual となる $\hat{B} \in \hat{\mathfrak{B}}$ が存在する（例えば［7］）。この $\hat{B}$ を B の dual 汎関数とよぶ。特に $\hat{A}$ は §1 の A の dual 汎関数とする。$\hat{K}^{p.q}(dx, y)$, $\hat{G}^{p.q}(dx, y)$ を $K^{p.q}$, $G^{p.q}$ の定義で X, A の代りに $\hat{X}, \hat{A}$ として定義したものとする。例えば，

$$f\hat{K}^{p.q}(x) = \hat{E}^x\left[\int_0^\infty e^{-p\hat{A}_t - qt} f(\hat{X}_t)\,dt\right] \qquad x \notin P_{\hat{A}}.$$

このとき上のことから，次の２つの性質をみたす $E \times E$-可測関数 $g^{p.q}(x, y)$ が存在する（［7］）。

(a). 任意の $p \geq 0$ と $y \in E \setminus P_{\hat{A}}$ ［又は $x \in E$］に対して $g^{p.q}(\cdot, y)$ ［又は $g^{p.q}(x, \cdot)$］は fine ［又は cofine］連続で $(G^{p.q})_{q \geq 0}$ ［又は，$(\hat{G}^{p.q})_{q \geq 0}$］に関して q-excessive ［又は q-coexcessive］である。

(b) 任意の $p, q \geq 0$ と $x \in E$ ［又は $y \in E \setminus P_{\hat{A}}$］に対し $g^{p.q}(x, \cdot)$ ［又は $g^{p.q}(\cdot, y)$］は $K^{p.q}(x, \cdot)$ 及び $G^{p.q}(x, \cdot)$ ［又は $\hat{K}^{p.q}(\cdot, y)$ 及び $\hat{G}^{p.q}(\cdot, y)$］のそれぞれ ν 及び μ に関する密度関数である。

次に任意の $B \in \mathfrak{B}$ をとり $\hat{B}$ をその dual 汎関数とする。$\hat{U}^{p.q}$, $\hat{V}^{p.q}$ を $U^{p.q}$, $V^{p.q}$ の定義で X, A, B の代りに $\hat{X}, \hat{A}, \hat{B}$ として定義した核とすると，補題 1.1 を使えば，

補題 2.1. 任意の $x \in E$, $y \in E \setminus (P_{\hat{A}} \cup P_{\hat{B}})$ に対して

$$V^{1.0}(x, dz) = g^{1.0}(x, z)\,\eta(dz), \qquad \hat{V}^{1.0}(dz, y) = g^{1.0}(z, y)\,\check{\eta}(dz).$$

ただし，η は B に associate した測度。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

特に ν 及び η は極集合に mass をもたないから，

(2.1) $\quad (f, V^{1,0}g)_\nu = (f U^{1,0}, g)_\eta, \quad (f \hat{V}^{1,0}, g)_\nu = (f, U^{1,0}g)_\eta$

をみたす．いま，関数 f_n と $E \times (E \setminus P_A^r)$ の部分集合 Γ を

(2.2). $\quad f_n(x, y) = (K^1)^{n-1} g^{1,0}(x, y) - 1,$

(2.3) $\quad \Gamma = \{(x, y) ; \ g^{1,0}(x,y) + K^1 g^{1,0}(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \int (K^1 |f_n|)(x,z) g^{1,0}(z,y) \nu(dz) < \infty \}$

とおきその x, y 切片をそれぞれ $\Gamma_x = \{y : (x,y) \in \Gamma\}$，$\Gamma_y = \{x : (x,y) \in \Gamma\}$ とおくと

$$\xi_x(dy) = \sum_{n=1}^{\infty} (K^1 |f_n|)(x,y) \nu(dy) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| (K^1)^{n+1}(x,dy) - \nu(dy) \|$$

は有界測度だから

$$g^{1,0}(x,y) + K^1 g^{1,0}(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \int (K^1 |f_n|)(x,z) g^{1,0}(z,y)$$
$$= \int (\delta_x + K^1(x,\cdot) + \xi_x(\cdot))(dz) \ g^{1,0}(z,y)$$

は有界測度のポテンシャルで更に μ-a.a. y に対して有限だから極集合を除いて有限である．即ち，

<u>補題 2.2.</u> 任意の $x \in E$ 及び $y \in E \setminus P_A^r$ に対して $\hat{\Gamma}_x^c$ 及び Γ_y^c は極集合である．

(2.4) $$k(x,y) = \begin{cases} g^{1,0}(x,y) - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(K^1)^n - \nu] g^{1,0}(x,y) & (x,y) \in \Gamma \text{ のとき} \\ +\infty & (x,y) \notin \Gamma \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくと $(x,y) \in \Gamma$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,y)$ は絶対収束し $k(x,y)$ に等しい．従って，

<u>定理 2.3.</u> 任意の $x \in E$ に対して $K_A(x, dz) = k(x,y)\nu(dy)$ 及び $K_B(x, dy) = k(x,y)\eta(dy)$ である．

上で定義した $k(x,y)$ は次の3つの性質をもつ．

(a) $\Gamma = \{(x,y) : k(x,y) < \infty\}$ とすると Γ^c の x, y 切片

は極集合で，任意の $x\in E$ 及び $y\in E-P\hat{A}$ に対して $k(x,\cdot)$ 及び $k(\cdot,y)$ はそれぞれ cofine 及び fine 閉集合 $\hat{\Gamma}_x$ 及び Γ_y で cofine 及び fine 連続である。

(b) $\int k(x,y)\nu(dy)$ 及び $\int k(x,y)\nu(dx)$ が定義され局所有界（今の場合は 0）で E 及び $E-P\hat{A}$ 上でそれぞれ fine 及び cofine 連続である。

(c) 任意の $f\in b\mathcal{E}_c^*$ に対して $Kf(x)=\int k(x,y)f(y)\mu(dy)$ が定義され X のポテンシャル核である。

<u>定義</u>. 上の 3 つの性質をみたす関数 $k(x,y)$ を X のポテンシャル核関数とよぶことにする。

任意のポテンシャル核関数 $k^0(x,y)$ に対して $\Gamma^0=\{(x,y)\,;\,k^0(x,y)<\infty\}$ とおく。任意の $f\in\mathcal{N}$ に対して (c) より $Kf-K^0f$ は有界可測の調和関数であるから，X が再帰的であることより，一定である。従って (a)，(b) を使えば，

<u>定理 2.4</u>. $(x,y)\in\Gamma\cap\Gamma^0$ のとき

$$(2.5)\quad k(x,y)=k^0(x,y)-\int k^0(x,z)\nu(dz)-\int k^0(u,y)\nu(dy)+\iint k^0(u,z)\nu(du)\nu(dz)\ .$$

次に問題 (ii) を考える。そのために X 及び $\hat{X}$ の乗法的汎関数 $M_t=e^{-A_t}$ 及び $\hat{M}_t=e^{-\hat{A}_t}$ による subprocess をそれぞれ Y_A 及び $\hat{Y}_A$ とおくと Y_A 又は $\hat{Y}_A$ に関する極集合は，M 及び A が正より，極集合（X に関する）である。更に Y_A 及び $\hat{Y}_A$ の resolvent はそれぞれ $(G^{1,p})_{p\geq 0}$ 及び $(\hat{G}^{1,p})_{p\geq 0}$ であるから補題 1.2 より強フェラーである。従って，コンパクト集合 F が極集合でないためには $G^{1,0}\xi(x)=\int g^{1,0}(x,y)\xi(dy)$ が，F 上のある 0 でない有界測度 ξ に対して，局所有界となることが必要

十分である. また $G^{1,0}\xi$ が局所有界ならば ξ は極集合に mass をもたない. ([2] p.285). また X と $\hat{X}$ が同値ならば Y_A と $\hat{Y}_A$ も同値であるから, ξ がコンパクト集合 F 上の測度のとき $G^{1,0}\xi$ が局所有界であることはそれが F 上で有界であることと同値である([2] 問題 VI.1.26). 以上のことに注意すると $k(x,y)$ の定義及び定理 2.4 より

定理 2.5. $k^0(x,y)$ を $\Gamma^0 < \Gamma$ なる任意のポテンシャル核関数とするとき, E のコンパクト集合 F が極集合でないための必要十分条件は $\int |k^0(x,y)|\,\xi(dy)$ が, F 上のある 0 でない有界測度 ξ に対して局所有界(特に X と $\hat{X}$ が同値のときは F 上で有界)となることである.

§3. 平衡測度.

この節では問題 (iii) について考える. まず, 相対コンパクト集合 F がある $B \in \mathfrak{A}$ の fine support になっている場合を考える. 後半でみるようにこの条件は X と $\hat{X}$ が同値の場合は取り除ける. $U^{p,q}$, $V^{p,q}$, $\hat{U}^{p,q}$, $\hat{V}^{p,q}$, $\cdots$ は A, $\hat{A}$ 及び今の B とその dual 汎関数 $\hat{B}$ に対して定義したものとする. 補題 1.1 の後の注意と同様に $\hat{F}_n \nearrow E$ で $\hat{V}^{1,0}(\hat{F}_n,\cdot)$ が有界であるような列 $\{\hat{F}_n\}$ が存在する. $B^n_t = \int_0^t I_{F_n \cap \hat{F}_n}(X_s)\,dB_s$ とおき $U^{p,q}_n$, $V^{p,q}_n$, $\hat{U}^{p,q}_n$, $\hat{V}^{p,q}_n$ は A, $\hat{A}$, B_n, $\hat{B}_n$ に対して定義した核とする. また η 及び $\eta_n = \eta(\cdot \cap F_n \cap \hat{F}_n)$ をそれぞれ, §2 で定義した, B 及び B^n に associate した測度とし, $K_n(x,dy) = k(x,y)\,\eta_n(dy)$ とおくと補題 1.1 と定理 1.4 を使えば

補題 3.1 $B^n \neq 0$ ならば, 任意の $p > 0$ に対して,

$$p K_n(U^{0,p}_n 1) + U^{0,p}_n 1 = R_n(p)$$

は有限の定数である.

$$(3.1)\qquad R(F) = \begin{cases} \lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} R_n(p) & B \neq 0 \text{ のとき} \\ +\infty & B = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおき, $R(F)$ を集合 F の Robin の定数という. T_F を集合 F への hitting time とすると $R(F)$ の定義より.

<u>補題 3.2.</u> $R(F) = E^{\nu}[A_{T_F}]$.

E 上の測度 ξ に対して, $K\xi(x) = \int k(x,y)\,\xi(dy)$, $G^{1,0}\xi(x) = \int g^{1,0}(x,y)\,\xi(dy)$ と書く. また $\hat{B}$ の cofine support を $\hat{F}$ とすると,

<u>定理 3.3</u> (平衡原理). $\hat{F}$ 上の確率測度 ξ_F で $K\xi_F$ が F 上で一定となるものが唯一つ存在する. このときその定数は $R(F)$ に等しい. この測度 ξ_F を集合 F の平衡測度という.

<u>略証</u>. $U^{0,\infty}f(x) = E^x[\int_0^{T_F} f(X_t)\,dA_t]$ とおくとき, $K\xi_F(x) + U^{0,\infty}1(x) = R(F)$ をみたす ξ_F の存在がいえれば, $U^{0,\infty}1(x)$ が F 上で 0 であることから定理の ξ_F の存在がいえる. 補題 3.1 と K_n の定義より,

$$(3.2)\qquad R_n(p) = K_A V_n^{1,0}(p\,U_n^{0,p}1)(x) + V_n^{1,0}(p\,U_n^{0,p}1)(x) - 1 + U_n^{0,p}1(x)$$

ここで

$$V_n^{1,0}(p\,U_n^{0,p}1)(x) = 1 - U_n^{0,p}1(x) + U^1U_n^{0,p}1(x) \xrightarrow{n,p\to\infty} 1 - U^{0,\infty}1(x) + U^1U^{0,\infty}1(x) \quad (\text{有界収束}).$$

他方 $\xi_{p,n}(dy) = p\,U_n^{0,p}1(y)\,\eta_n(dy)$ は $\bar{F}$ 上の確率測度であるから部分列をとると $\bar{F}$ 上の確率測度 ξ_F に弱収束する. 任意の $f \in b\mathcal{E}$ に対して (2.1) より

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$\int f(x)\, V_n^{1,0}(p\, U_n^{0,p} 1)(x)\, \nu(dx) = \int f \hat{K}^1(y)\, \xi_{p,n}(dy)$$

で，$f\hat{K}^1$ が有界連続であることに注意すると

$$1 - U^{0,\infty}1(x) + U^1 U^{0,\infty} 1(x) = G^{1,0}\xi_F(x) \quad \nu\text{-a.a. } x.$$

従って (3.2) で $n, p \to \infty$ とすると $K_A \ll \nu$ より μ-a.a.x に対し，

$$R(F) = K_A G^{1,0}\xi_F(x) + G^{1,0}\xi_F(x) - 1 + U^{0,\infty}1(x) = K\xi_F(x) + U^{0,\infty}1(x)$$

両辺に $pG^{1,p}$ を施し，$p \to \infty$ とすれば結果が得られる。

ξ_F の定義の仕方から，

<u>補題 3.4</u>. $\xi_F(C) = \hat{P}^\nu[\hat{X}_{\hat{T}_{\hat{F}}} \in C]$.

ただし，$\hat{T}_{\hat{F}}$ は $\hat{X}$ の集合 $\hat{F}$ への hitting time.

次に X と $\hat{X}$ が同値の場合を考える。この場合は良く知られているように semipolar 集合は極集合である（[2] p289.）。従って特に任意のコンパクト集合 F に対して $F - F^r$ は極集合だから，本尾の定理より，supp.$(B) = F^r$ で $E^x[e^{-T_F}] = E^x[\int_0^\infty e^{-t} dB_t]$ をみたす $B \in \Phi$ が存在する（[2] V.4.6, 4.7）。従って定理 3.3 より

<u>定理 3.5</u>. X と $\hat{X}$ が同値のとき，任意のコンパクト集合 F に対して F^r 上の確率測度 ξ_F で，F 上で $K\xi_F = R(F)$ なるものが唯一つ存在する。

$\mathfrak{M}$ を E 上のコンパクトな support をもち $\int |k(x,y)|\, \xi(dy)$ が局所有界であるような有界測度の全体としそのエネルギーを

$$I(\xi) = \iint k(x,y)\, \xi(dx)\, \xi(dy)$$

とおくと [8] と類似の方法により

<u>定理 3.6</u> X と $\hat{X}$ が同値のとき，コンパクト集合 F に対して平衡測度 ξ_F は，

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$\min \{ I(\xi) : \xi \in \mathcal{M}, \xi(E) = 1, \text{ support } (\xi) \subseteq F \}$$

を与える唯一つの測度で R(F) はその最小値に等しい。

文献

[1]. J. Azéma, M.K. Duflo and D. Revuz ; Mesure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov , Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verv. Gebiete 8 (1967).

[2]. R. M. Blumenthal and R. K. Getoor ; Markov processes and potential theory, Academic Press, New York, (1968).

[3]. 福島, 長沢, 佐藤 ; マルコフ過程の変換と境界問題, Sem. on Prob. vol. 16, (1963).

[4]. R. Kondō and Y. Ōshima ; A characterization of weak potential kernels for strong Feller recurrent Markov chains, 第2回日ソシンポジウム報告集, Lecture Notes in Math. 330.

[5]. Y. Ōshima ; On a construction of a recurrent potential kernel by mean of time change and killing, to appear.

[6]. S. C. Port and C. J. Stone ; Logarithmic potentials and planar Brownian motion, Proc. 6th. Berkeley Symposium, III, (1972).

[7]. D. Revuz ; Mesures associees aux fonctionnelles additives de Markov, Trans. Amer. Math. Soc. 148 (1970).

[8]. 竹内, 渡辺(信), 山田 ; 安定過程, Sem. on Prob. vol. 13 (1962).

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

マルコフ過程のOccupation Timeに関する極限定理

笠 原 勇 二

§0. 序

$X=\{X_t\}_{t\geq 0}$ を時間的に一様な、状態空間Eのマルコフ過程、$f(x)$ をE上の可測函数として、

$$w\text{-}\lim_{t\to\infty} Pr\left\{ \frac{1}{u(t)}\int_0^t f(X_s)ds < x \right\} = G(x)$$

の型の極限定理を調べるのが小論の目的である。ここに、$u(t)$, $G(x)$ はそれぞれ、適当な normalizing function、退化していない分布函数である。Kallianpur-Robbinsによって、1次元(or 2次元) Brown運動の場合、$f(x)\in L^1$、$\bar{f}\equiv\int f(x)dx \neq 0$ の条件のもとに $u(t)=\sqrt{t}$ (or $\log t$) とすれば、G は片側正規(or 指数)分布になることを示した。Darling-Kac[1]はこれらを一般化して、$f\geq 0$ のときに限れば(適当な条件のもとに)極限分布が Mittag-Leffler 分布に限ることを証明し、その domain of attraction も決定した。尤も、Darling-Kac の証明では"$f(x)\geq 0$"が essential であるにもかかわらず、結論の形からみれば、実は Brown運動の場合と同様に、"不変測度に関して integral null (i.e. null charged) でない"場合は、$f\geq 0$ の場合と本質的に同じであろうと容易に想像される。(あとで触れるが、このことは実は正しい。)

しかし、null charged の場合の事情は、$f\geq 0$ の場合と全く異なる。なぜなら、この場合、$f\geq 0$ のときと同じ normalizing function $u(t)$ を選んでしまえば、極限分布は0に退化してしまうからである。以下では、(適当な条件のもとで) null charged の場合、positively charged の場合とどう違うかを明らかにしなが

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

ら．null charged の場合には“極限分布は両側 Mittag-Leffler 分布に限る”ことを証明し、またその domain of attraction を決定する。

なお、以下で仮定する条件は、Darling-Kac の条件に較べて多分に複雑にみえるが、これは陽に書く必要のなかった条件が、“$f \geq 0$”を取り除いた為表に出たもので、実質的な制限ではないことを注意しておく。また、我々の条件は、相当緩めることもできるが、簡単のためそれらについては触れない。しかし、十分注意して読めば、以下の議論は例えば discrete time の Markov 過程にまでも適用でき、従って Dobrusin [2] の 1 次元 random walk に関する定理に別証を与え、更に 2 次元の場合にまで拡張することも容易であることも注意しておく。

§1. Main Theorem

E を localy compact Hausdorff 空間、$f(x)$ を E 上の実数値有界 Borel 可測関数とし、その support を K とする。E-値 Markov 過程 $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ の Resolvent kernel $G_s(x, dy)$ が、適当な σ-finite な測度 $\nu(dy)$[1] について絶対連続で、その密度 $G_s(x, \cdot)$ が次のような分解をもつ場合を考えよう．

$$G_s(x, y) = h(s) + u(x, y) + \varepsilon(x, y; s)$$

ここに、$h(s)$ は $s \to 0$ のとき ∞ に発散する項、$u(x, y)$ は有限な項、$\varepsilon(x, y; s)$ は 0 に収束する項である。即ち、

(A)

(A.1) $\lim_{s \to 0} h(s) = \infty$ [2]

(A.2) $\sup_{x \in K} \int_K |u(x, y)| \nu(dy) < \infty$

(A.3) $\sup_{x \in K} \int_K |\varepsilon(x, y; s)| \nu(dy) \longrightarrow 0 \quad \text{as } s \longrightarrow 0$

---

1) $\nu(dy)$ が不変測度であることは、陽には仮定しない。

2) X の再帰性

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

更に artificial であるが、次の仮定をおく。

(B) $y_0 \in E$ と $\delta > 0$ とがあって、

$$\sup_{\substack{x \in E \\ s \in (0,\delta)}} \int_K |G_s(x,y) - G_s(x,y_0)| \, \nu(dy) < \infty$$

例 X が1次元 Brown 運動、K が compact のとき、$\nu(dx) = dx$ として、$G_s(x,y) = (\sqrt{2s})^{-1} \exp\{-\sqrt{2s}|x-y|\}$ であるから、

$h(s) = (\sqrt{2s})^{-1}$, $u(x,y) = -|x-y|$ とおけば (A) は満たされる。(B) が成り立つことをみるには $|G_s(x,y) - G_s(x,0)| \leq |y|$ に注意すればよい。

(A), (B) は、X に関する条件であったが、次に $f(x)$ に関する条件を以下のように仮定する。$f(x) \in L^1(d\nu)$ とし、$\bar{f} \equiv \int f(x)\nu(dx)$ とおく。更に、$\bar{f} = 0$ のときには、$\langle f \rangle \equiv \iint u(x,y) f(x) f(y) \nu(dx)\nu(dy)$ と定義しよう。(A) と、f が有界であることに注意すれば、$\langle f \rangle$ は常に有限であり、また非負であることも示すことができる。そこで次の仮定をおく。

(C) $\bar{f} \neq 0$ or $\langle f \rangle \neq 0$

多くの process については、この条件は $f \neq 0$ ν-a.e と同等であり、自然な仮定である。

定理 (A) ～ (C) の仮定のもとに、

(i) 適当な $u(t) \nearrow \infty$ と、原点に退化していない分布函数 G とがあって、

$$\operatorname*{w-lim}_{t \to \infty} \Pr\left\{ \frac{1}{u(t)} \int_0^t f(X_\tau) d\tau < x \right\} = G(x) \tag{1}$$

が成り立つ必要十分条件は、定数 $0 \leq \alpha \leq 1$ と slowly varying function L とがあって、[註3)]

$$h(s) = s^{-\alpha} L(1/s) \tag{2}$$

となることである。

(ii) また (i) のとき、

[イ] $\bar{f} \neq 0$ であれば

$$w\text{-}\lim_{t\to\infty} \Pr\left\{ \frac{1}{\bar{f}\,h(\frac{1}{t})} \int_0^t f(X_\tau)d\tau < x \right\} = g_\alpha(x) \tag{3}$$

[ロ] $\bar{f} = 0$ であれば

$$w\text{-}\lim_{t\to\infty} \Pr\left\{ \frac{1}{\sqrt{\langle f \rangle h(\frac{1}{t})}} \int_0^t f(X_\tau)d\tau < x \right\} = \tilde{g}_{\frac{\alpha}{2}}(x) \tag{4}$$

(※ いずれも "P_r" の出発点 ($\in K$) にはよらない)

註1. $g_\beta(x)$, $\tilde{g}_\beta(x)$ はそれぞれ β 次の片側および両側 Mittag-Leffler 分布を表わす。即ち、$\beta \neq 1$ のとき

$$g_\beta(x) = \frac{1}{\pi\beta}\int_0^x \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} \sin\pi\beta j\ \Gamma(\beta j+1)\ y^{j-1}\,dy \quad , x>0$$

$$\tilde{g}_\beta(x) = \frac{2}{\pi\beta}\int_{-\infty}^x \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} \sin\pi\beta j\ \Gamma(\beta j+1)\ |y|^{j-1}\,dy$$

片側[両側] Mittag-Leffler 分布は、その k 次の moment が、$\frac{k!}{\Gamma(\beta k+1)}$ $\left[\text{or } \frac{(-1)^k+1}{2}\frac{k!}{\Gamma(\beta k+1)}\right]$ であることによって特徴づけられる。とくに、$g_0\,[\tilde{g}_0]$, $g_{\frac{1}{2}}\,[\tilde{g}_{\frac{1}{4}}]$ はそれぞれ片側[両側]指数分布と、片側[両側]正規分布を表わす。

註2. とくに、$h(s) \sim const \times s^{-1}$ ($s \downarrow 0$) のとき、上の定理の (ii)(イ)(ロ) は、それぞれ大数の法則と中心極限定理とみなすこともできる。

註3. L が slowly varying (at ∞) とは、$\lim_{t\to\infty} \frac{L(\lambda t)}{L(t)} = 1$ が、任意の正数 λ について成り立つことである。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

§2. 定理の略証

はじめに $g(x) \equiv \int u(x,y)f(y)\nu(dy)$ とおくと、仮定(A)によって、

$$G_s f(x) = \bar{f}\,h(s) + g(x) + o(1) \qquad \text{as} \quad s \to 0$$

となることに注意しよう。従って、$s \to 0$ のとき、

$$G_s f(x) \sim \bar{f}\,h(s) \qquad \text{if} \quad \bar{f} \neq 0$$
$$G_s f(x) \longrightarrow g(x) \qquad \text{if} \quad \bar{f} = 0$$

が成り立つが、一般に帰納法によって次のことが示される。

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{\{\bar{f}\,h(s)\}^n} \overbrace{G_s(f(G_s(f \cdots (G_s f) \cdots)))}^{n} = 1 \qquad \text{if} \quad \bar{f} \neq 0$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{\{\langle f \rangle h(s)\}^{n/2}} \overbrace{G_s(f(G_s(f \cdots (G_s f) \cdots)))}^{n} = \frac{(-1)^n+1}{2} \qquad \text{if} \quad \bar{f} = 0$$

このことを利用して、$Z(t) \equiv \int_0^t f(X_\tau)\,d\tau$ の moment の Laplace 変換の漸近評価を得ることができる。即ち、積分の順序交換で、

$$s\int_0^\infty e^{-st} E_x\{Z(t)^n\}\,dt = n!\, \overbrace{G_s(f(G_s(f \cdots (G_s f) \cdots)}^{n}$$

を容易に得るから、上のことと合わせて、

$$\lim_{s \to 0} s\int_0^\infty e^{-st} E_x\left\{\left(\frac{Z(t)}{v(s)}\right)^n\right\} dt = \begin{cases} n! & \text{if} \quad \bar{f} \neq 0 \\ \dfrac{(-1)^n+1}{2}\, n! & \text{if} \quad \bar{f} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

を得る。但し、ここで $v(s) = \begin{cases} \bar{f}\,h(s) & \text{if} \quad \bar{f} \neq 0 \\ \sqrt{\langle f \rangle h(s)} & \text{if} \quad \bar{f} = 0 \end{cases}$

我々の目標は、$E_x\{Z(t)^n\}$ 自身の評価である。$f(x) \geq 0$（即ち Darling-Kac の場合）であれば、これらは単調増大（in t）であるから Karamata の Tauberian Theorem がそのまま利用できて、定理の結論を導びくのは容易である。なぜなら 極限分布となるべき分布が、g_α であり、g_α は moment で決まる分布であるからである。ところで、我々は $f(x) \geq 0$ を仮定していないから 事情は少し複雑になる。然し、結果的には、形式的に Tauberian

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Theorem を使ってもよいことが以下の証明で判る。まず、T を X と独立で、$Pr\{T>x\}=e^{-x}\ (x>0)$ なる確率変数としよう。(5)式は、T を使えば、次のように書ける。

$$\lim_{s\to 0} E_x\{(\frac{Z(T/s)}{v(s)})^n\} = \begin{cases} n! & \text{if } \bar{f}\neq 0 \\ \frac{(-1)^n+1}{2} n! & \text{if } \bar{f}=0 \end{cases}$$

右辺は、g_0 or $\tilde{g}_0$ の moment であることに注意すれば、

$\frac{1}{v(s)}Z(T/s)$ の分布が g_0 ($\bar{f}\neq 0$ のとき) or $\tilde{g}_0$ ($\bar{f}=0$ のとき) に収束する (6)

ことがわかる。即ち、とくに $\bar{f}\neq 0$ であれば、

$$\lim_{s\to 0} s\int_0^\infty e^{-st} Pr\{\frac{1}{v(s)}Z(t) < x\}dt$$
$$(=\lim_{s\to 0} Pr\{\frac{1}{v(s)}Z(T/s)<x\})$$
$$= 1-e^{-x}, \quad x>0 \qquad (6')$$

さて、定理で(1)式が成立するとしよう。(6′) を見れば、$u(t)\sim \text{const}\ v(\frac{1}{t}),\ t\to\infty$ でなければならないことは容易に想像されるが、実は $u^*(t)=\lim_{s\to 0} u(t/s)/v(s)$ が $u^*(t)$ の連続点で成り立つように u^* が選べる。部分列について、このことが正しいのは明らかであるが、(6′) の右辺の特殊性によって、u^* が、s の部分列のとり方に依らないことを示すことができるからである。詳しくは [1] を参照のこと。*) $\bar{f}=0$ の場合には、(6′) に於て、$Z(t)$ を $|Z(t)|$ で置き換えておくことにより、今迄の議論はそのまま正しい。よって (2)式の必要性は示せた。十分性をいうには (ii) を示せばよい。まず、(ロ) の case；$\bar{f}=0$ の場合を示そう。$G_s f(x) \to g(x),\ s\to 0$ であったが仮定(B) により、これは有界収束であることがわかる。($\int G_s(x,y_0)f(y)m(dy)=0$ に注

*) [1] では $f(x)\geq 0$ の条件が一見本質的に使われているが、実は不必要である。(cf [5])

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

意せよ。) 次に、$M(t) \equiv g(X(t)) + Z(t)$ とおくと、M_t は martingale になることに注意しよう。$g(x)$ は有界であるから、(5), (6) は、$Z(t)$ の代りに $M(t)$ を代入しても正しいことは容易に確かめられる。従ってとくに、$|M(T/s)/v(s)|$ の分布は、片側指数分布に、moment も込めて収束する。よって、

$$\lim_{s \to 0} s\int_0^\infty e^{-st} E_x\{ \left| \frac{M(t)}{v(s)} \right|^n \} dt = n! \tag{7}$$

である。ところが、$E_x\{|M(t)|^n\}$ は t に関して非減少であるから、今度は Tauberian Theorem が使えて、$v(1/t)$ が regulary varying (i.e $h(s) = s^{-\alpha} L(1/s)$) であれば、

$$E_x\{ \left| \frac{M(t)}{v(\frac{1}{t})} \right|^n \} \longrightarrow \frac{n!}{\Gamma(\frac{\alpha n}{2}+1)} \quad , t \to \infty$$

同様にして、

$$E_x\{ \left| \frac{M(t)}{v(\frac{1}{t})} \right|^n + \left(\frac{M(t)}{v(\frac{1}{t})} \right)^n \} \longrightarrow \frac{n!}{\Gamma(\frac{\alpha n}{2}+1)} \quad , t \to \infty$$

(if n:奇数)

が示される。上の二式より、

$$E_x\{ \left(\frac{M(t)}{v(\frac{1}{t})} \right)^n \} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{if } n:\text{奇数} \\ \dfrac{n!}{\Gamma(\frac{\alpha n}{2}+1)} & \text{if } n:\text{偶数} \end{cases}$$

再び、$M(t)$ と $Z(t)$ とが有界な process $g(X_t)$ しか違わないことに注意すれば、最後の式は、定理の(ロ) を示すことがわかる。

次に、$\bar{f} \neq 0$ の case であるが、$f(x) \geq 0$ のとき (i.e. Darling - Kac の場合) は、既に述べたように、そのまま Tauberian Th. が利用できるので明らかである。一般の場合は、(必要なら、f の代りに $-f$ を考えると) $f(x) = f^p(x) + f^n(x)$ と分解できることに注意しよう。ここに、$f^p(x)$ は非負、$\bar{f^n} = 0$ となる有界可測函数である。$\sqrt{h(\frac{1}{t})} \ll h(\frac{1}{t})$ であるから、(ロ)の結果より、

$\frac{1}{h(\frac{1}{t})}\int_0^t f^n(X_\tau)d\tau$ の 分布は 0 に収束する。$f^p(x)$ についての極限定理は上に述べたように正しいので、$\bar{f} = \bar{f^p}$ に注意すれば我々の定理を得る。$\langle f^n \rangle = 0$ の場合にもこのことが justify

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

できるのは勿論のことである。

例 Xを1次元standard Brown運動とし、$f(x)$ ($\neq 0$ a.e) を、compact 台をもつ有界可測函数とすると、前に述べたように、(A)〜(C) は満たされているから、

$\bar{f} = \int f(x)dx \neq 0$ のとき
$$\lim_{t\to\infty} P_r\left\{ \frac{1}{\bar{f}\sqrt{2t}} \int_0^t f(X_\tau)d\tau < x \right\} = g_{\frac{1}{2}}(x)$$

$\bar{f} = 0$ のとき
$$\lim_{t\to\infty} P_r\left\{ \frac{1}{C\, t^{\frac{1}{4}}} \int_0^t f(X_\tau)d\tau < x \right\} = \tilde{g}_{\frac{1}{4}}(x)$$

ここに、 $C_1 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint |x-y| f(x) f(y) dx dy \right\}^{\frac{1}{2}}$

§3. 対称安定過程の場合.

Xが n次元対称安定過程の場合を考える。我々の扱うのは、recurrentなときに限ったから、指数αは、$n=1$のとき$1\leqq\alpha\leqq 2$, $n=2$のとき$\alpha=2$ の場合に限ろう。このとき、よく知られているように、$\nu(dx)=dx$ とすれば、仮定(A)は、Kがcompact であれば満たされる。但し、

$$h(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha \sin\frac{\pi}{\alpha}}\, s^{\alpha-1} & \text{if} \quad n=1<\alpha\leqq 2 \\ \dfrac{1}{\pi} \log \dfrac{1}{s} & \text{if} \quad n=\alpha=1 \\ \dfrac{1}{4\pi} \log \dfrac{4}{s} + \dfrac{\gamma}{2}\ ^{*)} & \text{if} \quad n=\alpha=2 \end{cases}$$

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\cos(\pi\alpha/2)\Gamma(\alpha)}\ \dfrac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} & \text{if} \quad n=1<\alpha\leqq 2 \\ \dfrac{1}{\pi} \log \dfrac{1}{|x-y|} & \text{if} \quad n=\alpha=1 \\ \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{1}{|x-y|} & \text{if} \quad n=\alpha=2 \end{cases}$$

*) γ はオイラーの定数

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

従って、$f(x)(\neq 0$ a.e) がR^n上のcompact台をもつ有界可測函数であれば(A)～(C) が満足されることは容易にわかるから定理により、

[イ] $\bar{f} \neq 0$ のとき

$$\lim_{t\to\infty} Pr\left\{ \frac{1}{\bar{f}\,h(\frac{1}{t})}\int_0^t f(X_\tau)\,d\tau < x \right\} = g_\beta(x)$$

[ロ] $\bar{f} = 0$ のとき

$$\lim_{t\to\infty} Pr\left\{ \frac{1}{\sqrt{\langle f\rangle h(\frac{1}{t})}}\int_0^t f(X_\tau)\,d\tau < x \right\} = \tilde{g}_{\frac{\beta}{2}}(x)$$

ここに、$\beta = \begin{cases} 1-\frac{1}{\alpha} & \text{if} \quad n=1 \leqq \alpha \leqq 2 \\ 0 & \text{if} \quad n = \alpha = 2 \end{cases}$

勿論、これらの極限分布は、出発点にdependしない。

註) ここでは対称安定過程の場合に限ったが、加法過程の適当なクラスにまで拡張されることは十分予想される。しかし、我々の仮定(A)～(C)が満たされるのはどんな場合かを、例えばLévy measureの言葉で表わすことは未解決である。

§4. 1次元拡散過程の場合

Xが1-次元拡散過程の場合を考える。適当な仮定を入れれば一般の場合も殆んど同様であるので、片側の拡散過程についてのみ考える。$m(dx)$ を $[0,\infty)$ 上の非負Radon測度とすると、time changeによって、1次元standard Brownian motionから $\frac{d}{dm}\frac{d}{dx}$ をlocal generatorとする一般化された1-次元拡散過程 $X=\{X_t\}_{t\geq 0}$ がつくれる。Xはstate spaceを $E = \text{supp}\, m(dx)$ とする再帰的な強マルコフ過程となる。(cf [7]) このXに対して、$\nu(dx) = m(dx)$ ととれば、

$$G_s(x,y) = G_s(0\ 0) - \max\{x,y\} + \frac{1}{m(R^1)}\{\sigma(x)+\sigma(y)\}^{\text{註)}} + \varepsilon(x,y,s)$$

$\varepsilon(x,y;s) \longrightarrow 0$ as $s\to 0$ （(x,y)について広義一様収束）

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

となることを示すことができる。よって、$f(x)(\neq 0 \ m\text{-a.e})$が、compact台をもつような有界可測函数であれば、(A)～(C) が成り立つのを確かめるのは容易である。(cf [6])

また、$h(s) = G_s(0,0)$ が regularly varying with exponent $-\alpha$ (i.e $h(s) = s^{-\alpha}L(1/s)$) であるための必要十分条件は [4] により

$$\lim_{x\to\infty} \frac{m[0,\lambda x)}{m[0,x)} = \lambda^{\frac{1}{\alpha}-1} \qquad \left(但し、\ \lambda^{\frac{1}{0}-1} = \begin{cases} \infty & \lambda > 1 \\ 0 & \lambda < 1 \end{cases} とする \right)$$

であるから、次の定理を得る。

定理　上に述べた X と f とについて、

(i) 原点に退化しない分布函数 $G(x)$ と $u(t) \nearrow \infty$ とがあって、

$$w\text{-}\lim_{t\to\infty} P_r\left\{ \frac{1}{u(t)} \int_0^t f(X_\tau)\,d\tau < x \right\} = G(x)$$

が成り立つための必要十分条件は、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{m[0,\lambda x)}{m[0,x)} = \lambda^{\beta} \quad , \quad {}^{\exists}\beta \in [0,\infty]$$

が成り立つことである。

(ii) またこのとき、

[イ] $\bar{f} \equiv \int f(x)\,m(dx) \neq 0$ のとき

$$\lim_{t\to\infty} P_r\left\{ \frac{1}{\bar{f}\,h(\frac{1}{t})} \int_0^t f(X_\tau)\,d\tau < x \right\} = g_{\frac{1}{\beta+1}}(x)$$

[ロ] $\bar{f} = 0$ のとき

$$\lim_{t\to\infty} P_r\left\{ \frac{1}{\sqrt{\langle f\rangle h(1/t)}} \int_0^t f(X_\tau)\,d\tau < x \right\} = \tilde{g}_{\frac{1}{2(\beta+1)}}(x)$$

ここに、$\langle f\rangle = -\frac{1}{2}\iint |x-y|\,f(x)f(y)\,m(dx)\,m(dy)$

$$\left(= \int_0^\infty \left\{ \int_0^x f(y)\,m(dy) \right\}^2 dx \right)$$

註) $s(x) = \int_0^x m[0,\xi)\,d\xi$ if $x \geq 0$; $= \int_x^0 m[\xi,0)\,d\xi$ if $x < 0$

文 献

[1] D.A.Darling and M.Kac, On occupation times for Markov processes, Trans. Amer. Math. Soc. 84 (1957) 444-458

[2] R.L.Dobrusin, Two limit theorems for the simplest random walk on a line, Uspehi Math. Nauk 10 (1955) 139-146

[3] W.Feller, An introduction to probability theory and its applications. New York, 1957

[4] Y. Kasahara, Spectral theory of generalized second order differential operators and its applications to Markov processes. Japan J. Math 1 (1975) 67-84

[5] Y. Kasahara. Limit theorems of occupation times for Markov Processes. Pub. of R.I.M.S. (to appear)

[6] Y. Kasahara and H Watanabe. Remarks on Potential theory of one-dimensional diffusion processes (仮題) (to appear)

[7] S. Watanabe, On time inversion of one-dimensional diffusion processes, Z. Wahrsch und Geb., 31 (1975) 115-124

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Renewal Theorem

田家井 喜義 （筑波大 数学系）

概　要

FをnonlatticeなR^d上の分布函数とし，$U\{A\}$を$U\{A\}=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n*}\{A\}$と定義する。ここに，$F^{n*}$はn-convolutionを表わす。ここでの目的はFが平均0，かつ有限な二次のモーメントをもつ場合に，正方矩形Aに対して　$U\{A+x\}$　$|x|\to\infty$の漸近評価を与えることである。

1．序

X_1，X_2，…を分布Fをもつ互いに独立なd次元確率ベクトルとし，random walk　$S_n=X_1+\cdots+X_n$，$n=1,2,\cdots$，を考える。上で定義した$U\{A\}$は　random walk　S_nの領域Aへの平均訪問回数を表わす。random walkがtransientな場合は

(1.1)　　$\lim_{|x|\to\infty} U\{A+x\}=0$

となることはよく知られている。

Fの特性函数をϕとすれば，nonlatticeの定義は

(1.2)　　$|\phi(\theta)|<1$　，　$\theta\in R^d-\{0\}$

である。

$x=(x_1,\ldots,x_d)\in R^d$　$h>0$　に対して　$P(x,h)$および$P_n(x,h)$は集合

$\{y=(y_1,\ldots,y_d)\mid x_k\le y_k<x_k+h\quad 1\le k\le d\}$

にそれぞれF，F^{n*}が与える測度とする。

いま　とくに

$A=\{y=(y_1,\ldots,y_d)\mid\quad 0\le y_k<1\quad 1\le k\le d\}$

とすれば

(1.3)　　$U\{A+x\}=\sum_{n=1}^{\infty}P_n(x,1)$

となる。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

2. 定理の記述

ここで証明したいのは次の定理である。

定理. F を R^3 上の分布函数とする。

(a) F は non lattice

(b) $\mu = \int x \, F\{dx\} = 0$

(c) $m_2 = \int |x|^2 F\{dx\} < \infty$

(a) ~ (c) が満たされれば

$$U\{A+x\} \sim \frac{1}{2\pi}|Q|^{-\frac{1}{2}}(x, Q^{-1}x)^{-\frac{1}{2}} \qquad |x| \to \infty$$

が成り立つ。ここで, Q は F の covariance matrix ; Q^{-1} は Q の inverce matrix ; $|Q|$ は Q の determinant ; をそれぞれ表わす。

Remark : 1. F が lattice の場合は参考文献 1 に出ている。

2. $d \geqq 4$ の場合について筆者が調べた限りではよくわかっていないようである。

3. 補助定理

補助定理 1. F を (a) ~ (c) を満たす R^d 上 ($d \geqq 1$) の分布函数とするとき

$$(3.1) \qquad \lim_{n\to\infty} \left[(2\pi n)^{\frac{d}{2}} P_n(x, 1) - |Q|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2n}(x, Q^{-1}x)} \right] = 0$$

が $x \in R^d$ に一様に成り立つ。

証明) 参考文献 2 を参照

補助定理 2. F は前と同じとする。

$$(3.2) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{n} \left[(2\pi n)^{\frac{d}{2}} P_n(x, 1) - |Q|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2n}(x, Q^{-1}x)} \right] = 0$$

が $x \in R^d$ に一様に成り立つ。

証明) $g(x)$ および $\gamma(\theta)$ を次のように定義する。

$$g(x) = \left(\frac{1}{2\pi A_{2m}}\right)^d \prod_{1\leq k\leq d} \left(\frac{\sin x_k}{x_k}\right)^{2m}$$

ここで, m は $m \geqq 2$ である整数 (任意に選んで固定).

$A_{2m} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2m} dx$ とする。

$$\gamma(\theta) = \int e^{i(\theta, x)} g(x) \, dx$$
$$= \left(\frac{1}{\pi A_{2m}}\right)^d \prod_{1\leq k\leq d} \int_0^\infty \cos \theta_k x_k \left(\frac{\sin x_k}{x_k}\right)^{2m} dx_k$$

$\|\theta\| = \max_{1\le k\le d} |\theta_k|$ とすれば，$\gamma(\theta)$ は R^d 上で C^2 級，かつ $\|\theta\| \geq m$ において $\gamma(\theta) = 0$ となる。$a > 0$ に対して $g_a(x) = a^{-d} g(a^{-1}x)$，$\gamma_a(\theta) = \gamma(a\theta)$ とおく。

$$\int g_a(x)\,dx = 1$$
$$\int e^{i(\theta,x)} g_a(x)\,dx = \gamma_a(\theta)$$

である。さて，$h > 0$ に対して $P_n(x,h)$, $n=1,2,\dots$ は x に関して可積分で，

$$\int e^{i(\theta,x)}\, P(x,h)\,dx = h^d \prod_{1\le k\le d} \frac{1-e^{-ih\theta_k}}{ih\theta_k}\,\phi(\theta)$$
$$\int e^{i(\theta,x)}\, P_n(\sqrt{n}x, \sqrt{n}h)\,dx = h^d \prod_{1\le k\le d} \frac{1-e^{-ih\theta_k}}{ih\theta_k}\,\phi^n\!\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)$$

となる。さらに

$$V_n(x,h,a) = |x|^2 \int g_a(x-y) P_n(\sqrt{n}y, \sqrt{n}h)\,dy$$

で，$V_n(x,h,a)$ を定義すれば，Fubini の定理より

$$V_n(x,h,a) = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^d |x|^2 \int_{\|\theta\|\le \frac{m}{a}} e^{-i(x,\theta)} \gamma_a(\theta) \prod_{1\le k\le d} \frac{1-e^{-ih\theta_k}}{ih\theta_k}\,\phi^n\!\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) d\theta$$

以後 $\prod_{1\le k\le d} \frac{1-e^{-ih\theta_k}}{ih\theta_k} = f_h(\theta)$ とする。Green の公式を使って

$$V_n(x,h,a) = -\left(\frac{h}{2\pi}\right)^d \int_{\|\theta\|\le\frac{m}{a}} \Delta_\theta \left[e^{-i(x,\theta)}\right] \gamma_a(\theta) f_h(\theta)\,\phi^n\!\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) d\theta$$

$$= -\left(\frac{h}{2\pi}\right)^d \int_{\|\theta\|\le\frac{m}{a}} e^{-i(x,\theta)}\, \Delta_\theta \left[\gamma_a(\theta) f_h(\theta)\,\phi^n\!\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\right] d\theta \;+\; (\text{boundary term})$$

○ boundary term の評価

$$\text{boundary term} = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^d \Big\{ \int_{\|\theta\|=\frac{m}{a}} e^{-i(x,\theta)} \left(\operatorname{grad}_\theta\left[\gamma_a(\theta) f_h(\theta) \phi^n\!\left(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\right], n\right) d\theta$$
$$- \int_{\|\theta\|=\frac{m}{a}} \gamma_a(\theta) f_h(\theta)\,\phi^n\!\left(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}}\right) \left(\operatorname{grad}_\theta\left[e^{-i(x,\theta)}\right], n\right) d\theta \Big\}$$

ここで，n は $\{\theta \mid \|\theta\| = \frac{m}{a}\}$ の外向き単位法線ベクトルである。

$\|\theta\| = \frac{m}{a}$ 上で $\gamma_a(\theta) \equiv 0$．よって第1項のみを評価すればよい。$\operatorname{grad}_\theta\left[\gamma_a(\theta) f_h(\theta) \phi^n\!\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\right]$ の k-座標成分（$1 \le k \le d$）は

$$\frac{\partial \gamma_a(\theta)}{\partial\theta_k} f_h(\theta)\,\phi^n\!\left(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}}\right) + \gamma_a(\theta)\frac{\partial f_h(\theta)}{\partial\theta_k}\,\phi^n\!\left(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}}\right) + \gamma_a(\theta) f_h(\theta)\,\frac{\partial \phi^n(\frac{\theta}{\sqrt{n}})}{\partial\theta_k}$$

境界上では $\gamma_a(\theta) \equiv 0$ であるから，上式の第1項のみを考慮すればよいことがわかる。

$$\frac{\partial\gamma_a(\theta)}{\partial\theta_k} = -\left(\frac{1}{\pi A_{2m}}\right)^d \int_0^\infty a \sin a\theta_k x_k \frac{\sin^{2m} x_k}{x_k^{2m-1}}\,dx_k \prod_{\substack{1\le j\le d\\(j\ne k)}} \int_0^\infty \cos a\theta_j x_j \left(\frac{\sin x_j}{x_j}\right)^{2m} dx_j$$

$|f_h(\theta)| \le 1$．であるから

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$|\text{boundary term}| \le \left(\frac{h}{2\pi}\right)^d \sum_{k=1}^{d} \int_{\|\theta\|=\frac{m}{a}} \left| \frac{\partial \gamma_a(\theta)}{\partial \theta_k} f_h(\theta) \phi^n\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) \right| d\theta$$

$$\le \left(\frac{h}{2\pi}\right)^d \left(\frac{1}{\pi A_{2m}}\right)^d d \cdot a \int_0^\infty \frac{\sin^{2m} x}{x^{2m-1}} dx \left(\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2m} dx \right)^{d-1} \int_{\|\theta\|=\frac{m}{a}} \left|\phi^n\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\right| d\theta$$

$a = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $h = \frac{l}{\sqrt{n}}$ （$l > 0$ は固定）とおけば．$\|\theta\| = m\sqrt{n}$ 上で，仮定(a)により，$\exists\, \delta_0 > 0$ で $\left|\phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\right| \le 1 - \delta_0$ （$\delta_0 > 0$ は m のみに依存） よって

$$|\text{boundary term}| = o(n^{-\frac{d}{2}})$$

さて $V_n(x, h, a)$ の主要部と

$$-\left(\frac{h}{2\pi}\right)^d \int e^{-i(x,\theta)} \underset{\theta}{\Delta} [\, e^{-\frac{1}{2}Q(\theta)}]\, d\theta$$

とを比較しよう。 ここに $Q(\theta) = \int (\theta, x)^2 F\{dx\}$ である。

$$\begin{aligned}(3.3)\quad \underset{\theta}{\Delta} [\gamma_a(\theta) f_h(\theta) \phi^n(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}})] &= \gamma_a(\theta) f_h(\theta) \underset{\theta}{\Delta} [\phi^n(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}})] \\ &+ \Big\{ f_h(\theta) \underset{\theta}{\Delta}[\gamma_a(\theta)] + 2 \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \gamma_a(\theta)}{\partial \theta_k} \frac{\partial f_h(\theta)}{\partial \theta_k} + \gamma_a(\theta) \underset{\theta}{\Delta}[f_h(\theta)] \Big\} \phi^n(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}}) \\ &+ 2 f_h(\theta) \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \gamma_a(\theta)}{\partial \theta_k} \frac{\partial \phi^n(\frac{\theta}{\sqrt{n}})}{\partial \theta_k} + 2 \gamma_a(\theta) \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f_h(\theta)}{\partial \theta_k} \frac{\partial \phi^n(\frac{\theta}{\sqrt{n}})}{\partial \theta_k}\end{aligned}$$

（3.3）より．$A > 0$，$\varepsilon > 0$ として 次の各積分を評価する。（A，ε に関して後述する。） すなわち．

$$I_1 = \int_{\|\theta\| \le A} e^{-i(x,\theta)} \Big\{ \gamma_a(\theta) f_h(\theta) \underset{\theta}{\Delta} [\phi^n(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}})] - \underset{\theta}{\Delta} [e^{-\frac{1}{2}Q(\theta)}] \Big\} d\theta$$

$$I_2 = -\int_{\|\theta\| > A} e^{-i(x,\theta)} \underset{\theta}{\Delta} [\, e^{-\frac{1}{2}Q(\theta)}]\, d\theta$$

$$I_3 = \int_{A < \|\theta\| \le \varepsilon\sqrt{n}} e^{-i(x,\theta)} \gamma_a(\theta) f_h(\theta) \underset{\theta}{\Delta} [\phi^n(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}})]\, d\theta$$

$$I_4 = \int_{\varepsilon\sqrt{n} < \|\theta\| \le \frac{m}{a}} e^{-i(x,\theta)} \gamma_a(\theta) f_h(\theta) \underset{\theta}{\Delta} [\phi^n(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}})]\, d\theta$$

一般に

$$(3.4)\quad \underset{\theta}{\Delta}[\phi^n(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}})] = n\phi^{n-1}(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}}) \underset{\theta}{\Delta}[\phi(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}})] + n(n-1)\phi^{n-2}(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}}) |\underset{\theta}{\mathrm{grad}}\, \phi(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}})|^2$$

で，さらに

$$(3.5)\quad \lim_{n\to\infty} n \underset{\theta}{\Delta}[\phi(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}})] = -m_2 = -\int |x|^2 F\{dx\}$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$(3.6)\quad \lim_{n\to\infty} n^2 \,|\, \underset{\theta}{\mathrm{grad}}\, \phi(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}})|^2 = (Q\theta, Q\theta) = |Q\theta|^2$$

$$(3.7)\quad \lim_{n\to\infty} \phi^n(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}}) = e^{-\frac{1}{2}Q(\theta)}$$

であるから，(3.4) の両辺で $n\to\infty$ とすることにより

$$(3.8)\quad \lim_{n\to\infty} \underset{\theta}{\Delta}[\phi^n(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}})] = \underset{\theta}{\Delta}[e^{-\frac{1}{2}Q(\theta)}]. \qquad \theta\in R^d$$

が導かれる。

$\gamma_a(\theta)\to 1$，$f_b(\theta)\to 1$．$n\to\infty$ （$\because\ a=\frac{1}{\sqrt{n}}$，$b=\frac{l}{\sqrt{n}}$）であり (3.8) より，$\|\theta\|\leq A$ において収束は一様．よって $I_1 = o(1)$．また．$A>0$ を大きくとってやれば．I_2 は n，x に無関係にいくらでも小さくすることができる。

(3.7) より $\varepsilon>0$ を十分小さくとってやれば

$$|\phi^n(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}})| \leq e^{-\frac{1}{4}Q(\theta)}$$

$|\gamma_a(\theta)|\leq 1$，$|f_b(\theta)|\leq 1$ であるから．これより

$$|I_3| \leq \int_{\varepsilon\sqrt{n}\geq\|\theta\|>A} \{k_1 + k_2\}\, e^{-\frac{1}{4}Q(\theta)}\, d\theta$$

ここで，k_i （$i=1,2$）は $\varepsilon>0$ のみに依存する正の定数。よって $A>0$ を大きくすることにより．I_3 は n,x に無関係にいくらでも小さくできる。

仮定(a)より．$\varepsilon\sqrt{n}<\|\theta\|\leq\frac{m}{a}$ において，$\exists\,\delta>0$ で

$$\sup_{\varepsilon<\|\theta\|\leq m} \phi(\theta) = 1-\delta \qquad (\delta \text{ は } \varepsilon, m \text{ のみに依存})$$

これより (3.4) から 正の定数 k_1，k_2 を使って

$$|\underset{\theta}{\Delta}[\phi^n(\tfrac{\theta}{\sqrt{n}})]| \leq k_1(1-\delta)^{n-1} + k_2(1-\delta)^{n-2}$$

従って

$$|I_4| \leq \int_{\|\theta\|>\varepsilon\sqrt{n}} \{k_1(1-\delta)^{n-1} + k_2(1-\delta)^{n-2}\}\, d\theta = o(1)$$

(3.3) の残りの項の評価は上と全く同様にして いくらでも小さくすることができる。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$\int e^{-i(x,\theta)} \Delta_\theta \{ e^{-\frac{1}{2}(\theta,Q\theta)} \} d\theta = -(2\pi)^{\frac{d}{2}} |x|^2 |Q|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x,Q^{-1}x)}$$

であるから，結局

$$V_n(x, \tfrac{\ell}{\sqrt{n}}, \tfrac{1}{\sqrt{n}}) = (\tfrac{\ell}{2\pi\sqrt{n}})^d \{ (2\pi)^{\frac{d}{2}} |x|^2 |Q|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x,Q^{-1}x)} + o(1) \} + o(n^{-\frac{d}{2}})$$

$$(3.9) \qquad = \frac{|x|^2 \ell^d}{(2\pi n)^{\frac{d}{2}} |Q|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x,Q^{-1}x)} + o(n^{-\frac{d}{2}})$$

を得る。

さて，

$$p(x) = \frac{|x|^2}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}|Q|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x,Q^{-1}x)}, \qquad p_0 = \max p(x)$$

とおく。

$p(x)$は一様連続であるから，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists h_1 > 0$ で，

$\|x-y\| \leq h_1$ ならば $|p(x)-p(y)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon$

ここで，次のような$\delta > 0$が存在する。すなわち

$(1+2\delta)^d \leq \frac{4}{3}$ かつ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に対して

$$(1+2\delta)^d - 1 = \varepsilon_1$$

$$\int_{\|x\|>\frac{1}{\delta}} g(x)\, dx = \varepsilon_2$$

ε_i $(i=1,2)$ は上の $\varepsilon > 0$ に対して，下の不等式を満たす。

$$(p_0 + \varepsilon_1 p_0 + \tfrac{1}{2}\varepsilon)(1-\varepsilon_2)^{-1} - p_0 \leq \varepsilon$$

$$\varepsilon_1 p_0 + \varepsilon_2 (p_0 + \varepsilon) \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

$i = (1,\dots,1) \in R^d$ とおく。(3.9) により，$\exists N$ で，

$\forall n \geq N$，$x \in R^d$ に対して

$$V_n(x - \tfrac{\delta}{\sqrt{n}} i, \tfrac{1}{\sqrt{n}}(1+2\delta), \tfrac{\delta^2}{\sqrt{n}}) \leq (\tfrac{1+2\delta}{\sqrt{n}})^d p(x - \tfrac{\delta}{\sqrt{n}} i) + \tfrac{1}{6}\varepsilon n^{-\frac{d}{2}}$$

$$\leq (\tfrac{1+2\delta}{\sqrt{n}})^d (p(x) + \tfrac{1}{4}\varepsilon) + \tfrac{1}{6}\varepsilon n^{-\frac{d}{2}}$$

$$\leq n^{-\frac{d}{2}} (p(x) + \varepsilon_1 p_0 + \tfrac{1}{2}\varepsilon)$$

同じく，

$$V_n(x + \tfrac{\delta}{\sqrt{n}} i, \tfrac{1}{\sqrt{n}}(1-2\delta), \tfrac{\delta^2}{\sqrt{n}}) \geq (\tfrac{1-2\delta}{\sqrt{n}})^d p(x + \tfrac{\delta}{\sqrt{n}} i) - \tfrac{1}{4}\varepsilon n^{-\frac{d}{2}}$$

$$\geq (\tfrac{1-2\delta}{\sqrt{n}})^d (p(x) - \tfrac{1}{4}\varepsilon) - \tfrac{1}{4}\varepsilon n^{-\frac{d}{2}}$$

$$n^{-\frac{d}{2}}\left(p(x)-\varepsilon_1 p_0-\frac{1}{2}\varepsilon\right)$$

一方，

$$P_n\left(\sqrt{n}\left(x-\tfrac{\delta}{\sqrt{n}}i-y\right),\ 1+2\delta\right)\geqq P_n\left(\sqrt{n}\,x,\ 1\right)\qquad \|y\|\leqq\tfrac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$$P_n\left(\sqrt{n}\left(x+\tfrac{\delta}{\sqrt{n}}i-y\right),\ 1-2\delta\right)\leqq P_n\left(\sqrt{n}\,x,\ 1\right)\qquad \|y\|\leqq\tfrac{\delta}{\sqrt{n}}$$

が成り立つ。従って

$$\begin{aligned}V_n\left(x-\tfrac{\delta}{\sqrt{n}}i,\tfrac{1}{\sqrt{n}}(1+2\delta),\tfrac{\delta^2}{\sqrt{n}}\right)&\geqq |x|^2\int_{\|y\|\leqq\frac{\delta}{\sqrt{n}}} g_{\frac{\delta^2}{\sqrt{n}}}(y)\,P_n\left(\sqrt{n}\left(x-\tfrac{\delta}{\sqrt{n}}i-y\right),1+2\delta\right)dy\\&\geqq |x|^2 P_n(\sqrt{n}\,x,1)\int_{\|y\|\leqq\frac{\delta}{\sqrt{n}}} g_{\frac{\delta^2}{\sqrt{n}}}(y)\,dy\\&\geqq (1-\varepsilon_1)\,|x|^2 P_n(\sqrt{n}\,x,1)\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}|x|^2 P_n(\sqrt{n}\,x,\ 1)&\leqq n^{-\frac{d}{2}}\left(p(x)+\varepsilon_1 p_0+\tfrac{1}{2}\varepsilon\right)(1-\varepsilon_1)^{-1}\\&\leqq n^{-\frac{d}{2}}\left(p(x)+\varepsilon\right)\end{aligned}$$

同様に，

$$\begin{aligned}V_n\left(x+\tfrac{\delta}{\sqrt{n}}i,\tfrac{1}{\sqrt{n}}(1-2\delta),\tfrac{\delta^2}{\sqrt{n}}\right)&\leqq |x|^2\int_{\|y\|\leqq\frac{\delta}{\sqrt{n}}} g_{\frac{\delta^2}{\sqrt{n}}}(y)\,P_n\left(\sqrt{n}\left(x+\tfrac{\delta}{\sqrt{n}}i-y\right),1-2\delta\right)dy\\&\qquad+\varepsilon_2\,(p_0+\varepsilon)\,n^{-\frac{d}{2}}\\&\leqq |x|^2 P_n(\sqrt{n}\,x,1)+\varepsilon_2(p_0+\varepsilon)\,n^{-\frac{d}{2}}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}|x|^2 P_n(\sqrt{n}\,x,\ 1)&\geqq n^{-\frac{d}{2}}\left(p(x)-\varepsilon_1 p_0-\varepsilon_2(p_0+\varepsilon)-\tfrac{1}{2}\varepsilon\right)\\&\geqq n^{-\frac{d}{2}}\left(p(x)-\varepsilon\right)\end{aligned}$$

以上のことから，$\varepsilon>0$ に対して $\exists N$ で $n\geqq N$ ならば

$$n^{-\frac{d}{2}}\left(p(x)-\varepsilon\right)\leqq |x|^2 P_n(\sqrt{n}\,x,1)\leqq n^{-\frac{d}{2}}\left(p(x)+\varepsilon\right)$$

が成り立つ。x のかわりに $\frac{x}{\sqrt{n}}$ とおきかえることにより，(3.2) が導かれる。

4. 定理の証明

(3.1)，(3.2) より

(4.1) $\quad |x|\,P_n(x,1)=|x|(2\pi n)^{-\frac{3}{2}}|Q|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2n}(x,Q^{-1}x)}+|x|\,n^{-\frac{3}{2}}E_1(n,x)$

(4.2) $\quad |x|\,P_n(x,1)=|x|(2\pi n)^{-\frac{3}{2}}|Q|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2n}(x,Q^{-1}x)}+|x|^{-1}n^{-\frac{1}{2}}E_2(n,x)$

$E_1(n,x)$，$E_2(n,x)$ は $n\to\infty$ のとき x に一様に 0 に収束する。もちろん (4.2) では $x\neq 0$ を仮定している。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$|x|\,U\{A+x\}=\sum_{n=1}^{\infty}|x|\,P_n(x,\ 1)$$

の評価をしよう。

$$S(x)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}|Q|^{-\frac{1}{2}}|x|\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2n}(x,Q^{-1}x)}$$

とおく。　$(x,Q^{-1}x)^{-1}=\Delta$ とすれば　$\Delta\to 0$, $|x|\to\infty$　($\because$ Q は positive definite) 従って

$$S(x)=\frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}|Q|^{-\frac{1}{2}}|x|}{(x,Q^{-1}x)}\sum_{n=1}^{\infty}(n\Delta)^{-\frac{3}{2}}e^{-(2n\Delta)^{-1}}\cdot\Delta$$

となり，$\Delta\to 0$ のとき 級数は 積分

$$\int_0^{\infty}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2t}}dt=\sqrt{2\pi}$$

に収束する。よって

$$S(x)\sim\frac{(2\pi)^{-1}|Q|^{-\frac{1}{2}}|x|}{(x,Q^{-1}x)}\quad,\quad |x|\to\infty$$

以下剰余項が，$|x|\to\infty$ のとき 0 に収束することを示す。(4,1) を $[|x|^2]<n<\infty$, (4,2) を $1\leqq n\leqq[|x|^2]$ の範囲で使う。

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^{-1}\sum_{n=1}^{[|x|^2]}n^{-\frac{1}{2}}|E_2(n,x)|+\lim_{|x|\to\infty}|x|\sum_{n>[|x|^2]}n^{-\frac{3}{2}}|E_1(n,x)|=0$$

をいえばよい。

第1項；$E_2(n,x)$ は $n\to\infty$ のとき，x に一様に 0 に収束したから，$\varepsilon>0$ に対して　$^{\exists}M>0$ で　$n\geqq M$ ならば，$|E_2(n,x)|<\varepsilon$. $1\leqq n<M$ については明らかに　$|x|\to\infty$ のとき 0 に収束する。だから　$M\leqq n\leqq[|x|^2]$ の範囲を評価すればよい。

$$|x|^{-1}\sum_{n=M}^{[|x|^2]}n^{-\frac{1}{2}}|E_2(n,x)|\leqq\varepsilon\,|x|^{-1}\sum_{n=M}^{[|x|^2]}n^{-\frac{1}{2}}$$

$$\leqq\varepsilon\,|x|^{-1}\sum_{n=1}^{[|x|^2]}n^{-\frac{1}{2}}\leqq\varepsilon\,k$$

ここで $k>0$ は　ε, x に無関係な定数。

第2項；

$$|x|\sum_{n>[|x|^2]}n^{-\frac{3}{2}}|E_1(n,x)|\leqq|x|\sup_{n>[|x|^2]}|E_1(n,x)|\sum_{n>[|x|^2]}n^{-\frac{3}{2}}$$

$$\leqq k'\sup_{n>[|x|^2]}|E_1(n,x)|$$

ここで $k'>0$ は　x に無関係な定数。

以上のことから，$|x|U\{A+x\}$ の漸近的評価として上で定義した

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$S(x)$が相当することがいえた。

$$\therefore \quad U\{A+x\} \sim \frac{1}{2\pi}|Q|^{-\frac{1}{2}}(x, Q^{-1}x)^{-\frac{1}{2}} \qquad |x|\to\infty$$

これで，定理の証明は完了する。

5. 追記

$d \geq 4$ の場合は Fが lattice であるときの結果から

$$U\{A+x\} \sim \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{d\pi^{\frac{d}{2}}}|Q|^{-\frac{1}{2}}(x, Q^{-1}x)^{1-\frac{d}{2}} \qquad |x|\to\infty$$

と予想される。しかしながら，この場合は$d=3$のときのように2つの補助定理だけからでは剰余項が消えない。今のところ，それだけの理由でしかなく，何が本質であるかは，未知のままである。なお lattice の場合は $2(d-2)$次のモーメントの存在を仮定すればできる。

6. 参考文献

1. F. Spitzer, Principles of Random Walk. Van Nostrand 1964
2. C. Stone, A Local Limit Theorem for Nonlattice Multi-dimensional Distribution Function. Ann. Math. Statist 36 1965 546-551

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Homogenization of Certain One-dimensional Markov Processes

犬塚忠貴　　田中 洋　　堀江雅幸

§1. 序　　この報告では，ある種の不連続な1次元Markov過程に対するHomogenizationの問題を，Bensoussan, Lions, Papanicolaou ([1], [2]) が多次元拡散過程に対して行った方法を用いて，取り扱う．

生成作用素が滑らかな函数 f に対して

$$(1.1)\qquad A_1 f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x+y) - f(x) - f'(x)y\}\, a(x,y)\, \nu(y)\, dy + b(x) f'(x)$$

により与えられるMarkov過程 $\{X_1(t)\}$ を考える．ここで $a(x,y)$, $b(x)$ は次の条件をみたすものとする．

(1.2a)　$a(x,y)$ は非負，有界な C^1-函数で，$a(x,0)>0$ をみたし，各 y に対して周期1の x に関する周期函数．

(1.2b)　$b(x)$ は周期1の連続な周期函数．

$\nu(y)$ は $\gamma_+, \gamma_- \geq 0$, $\gamma_+ + \gamma_- > 0$, $1<\alpha<2$ をみたす定数 $\gamma_+, \gamma_-, \alpha$ によって次のように与える．

$$(1.3)\qquad \nu(y) = \begin{cases} \gamma_+ / y^{\alpha+1}, & y>0, \\ \gamma_- / |y|^{\alpha+1}, & y<0. \end{cases}$$

Markov過程 $\{X_1(t)\}$ に対して "$t \to t/\varepsilon^\alpha$, $x \to \varepsilon x$" なる操作を施すことによって得られるMarkov過程 $\{X_\varepsilon(t)\}$ の生成作用素は次のようになる．

$$(1.4)\qquad A_\varepsilon f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x+y) - f(x) - f'(x)y\}\, a(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y)\, \nu(y)\, dy + \varepsilon^{-\alpha+1} b(\varepsilon^{-1}x) f'(x)$$

今 W を $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ 上の右連続，左極限をもつ実数値函数の全体とし，出発点が x のMarkov過程 $\{X_\varepsilon(t)\}$ の W 上の確率測度を P_ε^x で表わす．われわれの目的は "$a(x,y)$, $b(x)$ に関するどのような条件があれば，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき P_ε^x が W 上のある確率測度に収束するか"

について調べることである．[1], [2]と同様に，$\{X_1(t)\}$ を1次元 torus $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上のMarkov過程と見なし，$m(dx)$をその(一意的な)不変確率測度とし，さらに次の条件をおく．

(1.5) $\bar{a}_\pm = \lim_{y\to\pm\infty} y^{-1}\int_0^y \bar{a}(z)dz$ が存在する．ただし $\bar{a}(z)=\int_0^1 a(x,z)m(dx)$.

(1.6) $\int_0^1 b(x)m(dx) = 0$.

われわれの結果は，次のようにのべられる．

「(1.2), (1.5), (1.6) の下で，$\varepsilon\downarrow 0$ のとき，P^x_ε は

(1.7) $$L_0 f(x) = \bar{a}_+\int_0^\infty \{f(x+y)-f(x)-f'(x)y\}\nu(y)dy$$
$$+\ \bar{a}_-\int_{-\infty}^0 \{f(x+y)-f(x)-f'(x)y\}\nu(y)dy$$

で生成される安定過程から定まるW上の確率測度P^x_0に弱収束する．」

§2．A_1によって生成されるMarkov過程の性質

この§では，A_1によって生成されるMarkov過程X_1を torus $\mathbb{T}$ 上の確率過程と見なしたときそれに対する不変測度$m(\cdot)$を見つけ，さらに$\int_0^1 f dm = 0$ をみたす周期函数fに対して$-A_1 u = f$の周期解を捜す．概略だけを述べる．

今後使われる函数空間を列挙しておく．

$C_0(\mathbb{R})$: 無限遠点で0になる$\mathbb{R}$上の実数値連続函数の全体．

$C_0^2(\mathbb{R})$: $C_0(\mathbb{R})$の元であって2階までの導函数がすべて$C_0(\mathbb{R})$に入るものの全体．

$C_u(\mathbb{R})$: $\mathbb{R}$上の有界，一様連続な実数値函数の全体．

$C_u^1(\mathbb{R})$: $C_u(\mathbb{R})$の元であって1階の導函数も$C_u(\mathbb{R})$に入るものの全体．

$B(\mathbb{R})$: $\mathbb{R}$上の有界，Borel可測な実数値函数の全体．

また$\mathbb{R}^2$においても同様な函数空間を考える．函数の supremum norm は $\|\cdot\|$ で表わす．

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

次の作用素

$$Lf(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x+y)-f(x)-f'(x)y\}\nu(y)dy$$

を考える．ここで $\nu(y)$ は (1.3) で表わされるものとする．$p(t,x,y)$ をLで生成される安定過程の遷移確率密度とすると，それは次の式

(2.1a) $\quad p(t,x,y)=p(t,y-x)$

(2.1b) $\quad p(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}e^{-c_0t|\xi|^{\alpha}(1+ih\,\mathrm{sgn}\,\xi)}d\xi,\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}$

で与えられることはよく知られている．ここで $c_0=-(\gamma_++\gamma_-)\Gamma(2-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)/\alpha(\alpha-1)>0$，$h=(\gamma_+-\gamma_-)\tan(\pi\alpha/2)/(\gamma_++\gamma_-)$ である．またLによって生成される安定過程に対応する半群，Green 作用素は

$$S^tf(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)p(t,y-x)dy,\quad G^{\lambda}f(x)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}S^tf(x)dt,\quad t>0,\ \lambda>0$$

で与えられる．このほかに space-time の作用素

$$\underline{\underline{S}}^t\underline{\underline{f}}(s,x)=S^t\underline{\underline{f}}(s+t,x),\quad \underline{\underline{G}}^{\lambda}\underline{\underline{f}}(s,x)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\underline{\underline{S}}^t\underline{\underline{f}}(s,x)dt$$

も考える．よく知られているように，$\{\underline{\underline{S}}^t\}$ を $C_0(\mathbb{R}^2)$ で考えるとそれは強連続半群となり，その生成作用素を $\underline{\underline{L}}$ とおくと $\mathcal{D}(\underline{\underline{L}})\supset C_0^2(\mathbb{R}^2)$ であり $\underline{\underline{f}}\in C_0^2(\mathbb{R}^2)$ に対して $\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{f}}=(\partial/\partial s+L)\underline{\underline{f}}$ が成立する．次の補題は $\frac{\partial^n}{\partial x^n}p(t,x)=\frac{\partial^n}{\partial x^n}p(1,t^{-1/\alpha}x)t^{-(n+1)/\alpha}$ と $\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}p(1,x)\right|\leq \mathrm{const.}|x|^{-(2+n)}$ に注意すると容易に示すことが出来る．

補題1．(i) 各 $\underline{\underline{f}}\in B(\mathbb{R}^2)$ に対して，$\frac{\partial}{\partial x}\underline{\underline{G}}^{\lambda}\underline{\underline{f}}$ が存在して

$$\frac{\partial}{\partial x}\underline{\underline{G}}^{\lambda}\underline{\underline{f}}(s,x)=-\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda t}\underline{\underline{f}}(s+t,y)\frac{\partial}{\partial x}p(t,y-x)\,dtdy,$$

(2.2) $\quad \left\|\frac{\partial}{\partial x}\underline{\underline{G}}^{\lambda}\underline{\underline{f}}\right\|\leq c_1\lambda^{-(\alpha-1)/\alpha}\|\underline{\underline{f}}\|,\quad c_1=\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial}{\partial x}p(1,x)\right|dx,$

が成立する．

(ii) $0<\beta<\alpha-1$ なる β に対して，α,β のみに依存する正の定数 c_2 が存在して

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\underline{\underline{G}}^{\lambda}\underline{\underline{f}}(s,x_1)-\frac{\partial}{\partial x}\underline{\underline{G}}^{\lambda}\underline{\underline{f}}(s,x_2)\right|\leq C_2\lambda^{-(\alpha-1-\beta)/\alpha}\|\underline{\underline{f}}\|\,|x_1-x_2|^{\beta}$$

が成立する．

Markov 過程 $\mathbb{X}_1$ の存在について説明する前に

$$Af(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x+y)-f(x)-f'(x)y\}\,a_0(x,y)\nu(y)dy+b_0(x)f'(x)$$

で生成される Markov 過程について調べる．ここで $a_0(x,y)=a(x,y)/a(x,0)$，$b_0(x)=b(x)/a(x,0)$ とする．そのために次の作用素

$$\Lambda f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x+y)-f(x)-f'(x)y\}\,a_1(x,y)\,\nu(y)dy+b_0(x)f'(x)$$

を導入する．ここで $a_1(x,y)=a_0(x,y)-1$．$\underline{\underline{u}}$ を $\underline{\underline{u}}=\underline{\underline{G}}^{\lambda}\underline{\underline{f}}$，$\underline{\underline{f}}\in C_0(\mathbb{R}^2)$ とすれば補題 1 より次の評価

(2.3) $\|\Lambda\underline{\underline{u}}\|=\|\Lambda\underline{\underline{G}}^{\lambda}\underline{\underline{f}}\|\leq(\|b_0\|+2c_3)\,C_1\lambda^{-(\alpha-1)/\alpha}\|\underline{\underline{f}}\|$,

$$c_3=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\sup_x|a_1(x,y)|\,\nu(y)dy$$

が成立する．この評価により $\mathcal{D}(\underline{\underline{L}})$ の元 $\underline{\underline{u}}$ に対して $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{u}}=\underline{\underline{L}}\underline{\underline{u}}+\Lambda\underline{\underline{u}}$ で定義される作用素 $\underline{\underline{A}}$ は，$(\partial/\partial s+A)|_{C_0^2(\mathbb{R}^2)}$ の smallest closed extension であり，さらに strong negative property をもっている．故に [6] により $C_0(\mathbb{R}^2)$ 上に生成作用素として $\underline{\underline{A}}$ をもつ sub-Markov 半群 $\{\underline{\underline{T}}^t\}$ が存在する．また $T^tf(x)=\underline{\underline{T}}^t\underline{\underline{f}}(s,x)$，$f(x)=\underline{\underline{f}}(s+t,x)$ により $C_0(\mathbb{R})$ 上の強連続な sub-Markov 半群 $\{T^t\}$ が一意的に定まる．$\{T^t\}$ に対応する Markov 過程 $\mathbb{X}=\{W,w(t),P^x,x\in\mathbb{R}\}$ が作用素 A によって生成される Markov 過程に他ならなく，$P(t,x,\cdot)$ をこの Markov 過程の遷移確率とすると，その strong Feller property が次の (i)，(ii) から導かれる．

(i) $\underline{\underline{f}}\in B(\mathbb{R}^2)$ に対して

$$\underline{\underline{K}}^{\lambda}\underline{\underline{f}}(s,x)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt\int_{-\infty}^{\infty}\underline{\underline{f}}(s+t,y)P(t,x,dy)$$

とおくと，十分大きな λ に対して

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

(2.4) $\underline{\underline{K}}^{\lambda}\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{G}}^{\lambda}(I-\Lambda\underline{\underline{G}}^{\lambda})^{-1}\underline{\underline{f}}$.

(ii) $f\in B(\mathbb{R})$ に対して

$$\underline{g}(s,x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\chi_{[0,t]}(s)\,e^{\lambda s}f(y)\,P(t-s,x,dy)$$

とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(y)P(t,x,dy) = \underline{\underline{K}}^{\lambda}\underline{g}(0,x).$$

われわれの求めるべき，A_1によって生成されるMarkov過程$\mathbb{X}_1$は，上で求めたMarkov過程$\mathbb{X}$よりtime changeで容易に作ることが出来る．$a(x,y)$, $b(x)$はxに関して周期1の周期函数であるから，Markov過程$\mathbb{X}$, $\mathbb{X}_1$よりtorus $\mathbb{T}$上のMarkov過程$\tilde{\mathbb{X}}$, $\tilde{\mathbb{X}}_1$が自然に導かれる．例えば$\tilde{\mathbb{X}}$の遷移確率$\tilde{P}(t,\tilde{x},\cdot)$は$\tilde{P}(t,\tilde{x},\tilde{U}) = P(t,x,U)$で与えられる．ここで$U=\{y\in\mathbb{R};\ \exists n\in\mathbb{Z}\ \ y+n\in\tilde{U}\}$である．次の補題が容易に示される．

補題2. 各$t>0$, $\tilde{x}\in\mathbb{T}$と空でない開集合$\tilde{U}$に対して$\tilde{P}(t,\tilde{x},\tilde{U})>0$である．

$\tilde{\mathbb{X}}$はstrong Feller propertyをもつので，Mokobodzki ([5])の定理により，それはstrong Feller property in the strict senseをもつ．このことおよび補題2により$\tilde{\mathbb{X}}$の一意的な不変測度$m_0(\cdot)$と正の定数c_4, c_5が存在して

(2.5) $\|\tilde{T}^t\tilde{f} - m_0(\tilde{f})\| \le c_4 e^{-c_5 t}\|\tilde{f}\|$, $t>0$, $\tilde{f}\in B(\mathbb{T})$

が成立する．ここで$m_0(\tilde{f}) = \int_{\mathbb{T}}\tilde{f}\,dm_0$ ([9]を参照)．この不変測度$m_0(\cdot)$に対して $m(dx) = c\,m_0(dx)/a(x,0)$, $c=\{\int_{\mathbb{T}}m_0(dx)/a(x,0)\}^{-1}$, とすると$m(\cdot)$は$\tilde{\mathbb{X}}_1$の一意的な不変測度となる．

$\{T^t\}$は$C_u(\mathbb{R})$上においても強連続半群であるので，その生成作用素$\underset{=}{A}$の定義域を$\mathfrak{D}_u$とおくと補題1より$\mathfrak{D}_u\subset C_u^1(\mathbb{R})$がいえる．以上のことを合わせると次の命題を得る．

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

命題3. (i) $\tilde{\mathbb{X}}_1$ の一意的な不変測度 $m(\cdot)$ が存在する.
(ii) $\int_0^1 f dm = 0$ をみたす $\mathbb{R}$ 上の周期1の周期函数 f に対して, $u = \int_0^\infty T^t(f/a(\cdot,0))dt$ が存在して $\mathfrak{D}_u$ ($\subset C_u^1(\mathbb{R})$) に入り, u は $-A_1 u = f$ (厳密には $-\underset{\sim}{A} u = f/a(\cdot,0)$) の周期解である.

§3. 主定理とその証明

この§では, §1 の最後に述べた次の定理を証明する.

定理 (1.2), (1.5), (1.6) の下で, P_ε^x は $\varepsilon\downarrow 0$ のとき P_0^x に弱収束する.

われわれは, この定理を [1], [2] と同様に確率積分を用いて証明する. 各 $\varepsilon>0$, $x\in\mathbb{R}$ に対して, Markov 過程 $\mathbb{X}_\varepsilon$ の x から出発する path は次の確率積分方程式

$$(3.1)\qquad X_\varepsilon(t) = x + \varepsilon\int_0^t\int_{-\infty}^\infty \sigma(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s-), \varepsilon^{-1}y)M(dsdy) + \varepsilon^{-\alpha+1}\int_0^t b(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s))ds$$

の解として実現される. 詳しく言うと適当に確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ と, $\mathcal{F}$ の部分 σ-fields の増大族 $\{\mathcal{F}_t\}$ を選ぶと, $dt\nu(y)dy$ を characteristic measure とする $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ 上の ($\mathcal{F}_t$ に適合した) Poisson random measure $N(dtdy)$ と, $\mathcal{F}_t$ に適合し左極限をもつ右連続な $\mathbb{R}$ 上の確率過程 $\{X_\varepsilon(t)\}$ が存在して (3.1) をみたす (例えば[4]を参照). ただし $M(dtdy) = N(dtdy) - dt\nu(y)dy$ で, $\sigma(x,y)$ は次の式で定義される.

$$(3.2)\qquad \sigma(x,y) = \begin{cases} \inf\{y'>0 : \int_y^\infty \nu(z)dz > \int_{y'}^\infty \lambda(x,z)\nu(z)dz\}, & y>0, \\ \sup\{y'<0 : \int_{-\infty}^y \nu(z)dz > \int_{-\infty}^{y'} \lambda(x,z)\nu(z)dz\}, & y<0. \end{cases}$$

補題4. (1.2), (1.5), (1.6) のもとで, 各 x に対して $\{P_\varepsilon^x, 0<\varepsilon\le 1\}$ は tight である (W上では Skorohod 位相を考える).

証明　$\delta>0$, $n\geq 1$ に対して, $\mathcal{V}_\delta^n(X_\varepsilon)$ と $\mathcal{W}_\delta^n(X_\varepsilon)$ を

$$\mathcal{V}_\delta^n(X_\varepsilon) = \sup \max_{1\leq i\leq r} \sup_{t_{i-1}\leq s,t<t_i} |X_\varepsilon(s)-X_\varepsilon(t)|,$$

$$\mathcal{W}_\delta^n(X_\varepsilon) = \inf \max_{1\leq i\leq r} \sup_{t_{i-1}\leq s,t<t_i} |X_\varepsilon(s)-X_\varepsilon(t)|,$$

で定義する. ここで inf, sup は, $[0,n]$ の分割 Δ: $0=t_0<t_1<\cdots<t_r=n$ で $\delta<t_i-t_{i-1}\leq 2\delta$, $1\leq i\leq r$ をみたすもの全体にわたって取る. 補題の証明のためには, [3] の定理 15.2 より

$$(3.3)\begin{cases}(a) & \lim_{\ell\to\infty} \sup_{0<\varepsilon\leq 1} P\{\sup_{0\leq t\leq n}|X_\varepsilon(t)|>\ell\}=0, \quad n\geq 1\\ (b) & \lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{0<\varepsilon\leq 1} P\{\mathcal{W}_\delta^n(X_\varepsilon)>\eta\}=0, \quad n\geq 1,\ \eta>0\end{cases}$$

を示せば十分である. (1.6) と命題3により $-A_1\varphi=b$ の周期解 φ が $\mathcal{D}_u$ に存在する. この φ に対して $Y_\varepsilon(t)=X_\varepsilon(t)+\varepsilon\varphi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(t))$ とおくと, 確率積分の変換公式により次の式を得る(もし必要なら φ を滑らかな函数で近似する).

$$\begin{aligned}(3.4)\quad Y_\varepsilon(t) &= X_\varepsilon(t)+\varepsilon\varphi(\varepsilon^{-1}x)+\int_0^t\varphi'(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s-))\,dX_\varepsilon(s)\\ &\quad+\sum_{s\leq t}\{\varepsilon\varphi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s))-\varepsilon\varphi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s-))-\varphi'(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s-))(X_\varepsilon(s)-X_\varepsilon(s-))\}\\ &= x+\varepsilon\varphi(\varepsilon^{-1}x)+\varepsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_\varepsilon M(dsdy)+\varepsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s-))\sigma_\varepsilon M(dsdy)\\ &\quad+\varepsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\{\varphi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s-)+\sigma_\varepsilon)-\varphi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s-))-\varphi'(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s-))\sigma_\varepsilon\}M(dsdy)\\ &\quad+\varepsilon^{-\alpha+1}\int_0^t b(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s))ds+\varepsilon^{-\alpha+1}\int_0^t\varphi'(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s))b(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s))ds\\ &\quad+\varepsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\{\varphi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s)+\sigma_\varepsilon)-\varphi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s))-\varphi'(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s))\sigma_\varepsilon\}ds\,\nu(y)dy\\ &= x+\varepsilon\varphi(\varepsilon^{-1}x)+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\varepsilon,s,y)M(dsdy)\end{aligned}$$

ここで $\sigma_\varepsilon=\sigma(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s-),\varepsilon^{-1}y)$, $\rho(\varepsilon,t,y)$ は次のように定義される $\mathcal{F}_t$- predictable process を表わす.

$$\rho(\varepsilon,t,y)=\rho_1(\varepsilon,t,y)+\rho_2(\varepsilon,t,y),$$

$$\rho_1(\varepsilon,t,y)=\varepsilon\sigma(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(t-),\varepsilon^{-1}y),$$

$$\rho_2(\varepsilon,t,y) = \varepsilon\varphi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(t-)+\sigma(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(t-),\varepsilon^{-1}y)) - \varepsilon\varphi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(t-))$$

条件(1.2a)より $|\sigma(x,y)| \le \mathrm{const.}|y|$ が成立し，このことから

(3.5) $\quad |\rho(\varepsilon,t,y)|,\ |\rho_1(\varepsilon,t,y)|,\ |\rho_2(\varepsilon,t,y)| \le c_6|y|$

を得る．従って

$$\begin{aligned}
&P\{\sup_{0\le t\le n}|X_\varepsilon(t)| > \ell\} \\
&\le P\{\sup_{0\le t\le n}|\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\varepsilon,s,y)M(dsdy)| > \ell-|x|-2\|\varphi\|\} \\
&\le E\{|\int_0^n\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\varepsilon,s,y)M(dsdy)|\}/(\ell-|x|-2\|\varphi\|) \\
&\le \Big[E\{\int_0^n\int_{|y|\le 1}|\rho(\varepsilon,s,y)|^2 ds\,\nu(y)dy\}^{1/2} \\
&\qquad +2E\{\int_0^n\int_{|y|>1}|\rho(\varepsilon,s,y)|ds\,\nu(y)dy\}\Big]/(\ell-|x|-2\|\varphi\|) \\
&\le \mathrm{const.}\,n/(\ell-|x|-2\|\varphi\|)
\end{aligned}$$

が成立する．これは(3.3)の(a)を示している．次に $\theta>0$ に対して

$$\begin{aligned}
Z_{1,\varepsilon}(t) &= Z_{1,\varepsilon}^{(1)}(t) - Z_{1,\varepsilon}^{(2)}(t) + Z_{1,\varepsilon}(t), \\
Z_{1,\varepsilon}^{(1)}(t) &= \int_0^t\int_{|y|>\theta}\rho_1(\varepsilon,s,y)N(dsdy), \\
Z_{1,\varepsilon}^{(2)}(t) &= \int_0^t\int_{|y|>\theta}\rho_1(\varepsilon,s,y)ds\,\nu(y)dy, \\
Z_{1,\varepsilon}^{(3)}(t) &= \int_0^t\int_{|y|\le\theta}\rho_1(\varepsilon,s,y)M(dsdy),
\end{aligned}$$

とおき，同様に ρ_1 を ρ に変えて，それぞれ $Z_\varepsilon(t)$, $Z_\varepsilon^{(1)}(t)$, $Z_\varepsilon^{(2)}(t)$, $Z_\varepsilon^{(3)}(t)$ とおく。$\varepsilon_0>0$ をしばらくの間固定しておく。このとき(3.1)を使うと $\varepsilon\ge\varepsilon_0$ に対して

$$\begin{aligned}
W_\delta^n(X_\varepsilon) \le W_\delta^n(Z_{1,\varepsilon}^{(1)}) &+ V_\delta^n(Z_{1,\varepsilon}^{(2)}) + V_\delta^n(Z_{1,\varepsilon}^{(3)}) \\
&+ V_\delta^n(\varepsilon^{-\alpha+1}\int_0^t b(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s))ds),
\end{aligned}$$

(3.6) $$\begin{aligned}
P\{W_\delta^n(X_\varepsilon) > \eta\} &\le P\{W_\delta^n(Z_{1,\varepsilon}^{(1)}) > \eta/2\} + P\{V_\delta^n(Z_{1,\varepsilon}^{(3)}) > \eta/2\} \\
&\le P\{W_\delta^n(Z^{(1)}) > \eta/2\} + 4\eta^{-1}E\{|Z_{1,\varepsilon}^{(3)}(n)|\} \\
&\le P\{W_\delta^n(Z^{(1)}) > \eta/2\} + c_7\eta^{-1}(n\theta^{2-\alpha})^{1/2}
\end{aligned}$$

が得られる．ここで $c_7 = 4c_6(2-\alpha)^{-1/2}(\gamma_+ + \gamma_-)^{1/2}$, $\eta' = 2^{-1}\eta - 2\delta\{c_6 \int_{|y|>\theta}|y|\nu(y)dy + \varepsilon_0^{-\alpha+1}\|b\|\}$, $Z^{(1)}(t) = c_6\int_0^t\int_{|y|>\theta}|y|N(dsdy)$. $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ に対しては (3.4) を使うと

$$\begin{aligned} W_\delta^n(X_\varepsilon) &\le W_\delta^n(Z_\varepsilon) + V_\delta^n(\varepsilon\varphi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(t))) \\ &\le W_\delta^n(Z_\varepsilon^{(1)}) + V_\delta^n(Z_\varepsilon^{(2)}) + V_\delta^n(Z_\varepsilon^{(3)}) + 2\varepsilon_0\|\varphi\| \end{aligned}$$

$$(3.7)\quad P\{W_\delta^n(X_\varepsilon) > \eta\} \le P\{W_\delta^n(Z^{(1)}) > \eta''\} + c_7\eta^{-1}(n\theta^{2-\alpha})^{1/2}$$

を得る．ここで $\eta'' = 2^{-1}\eta - 2\{c_6\delta\int_{|y|>\theta}|y|\nu(y)dy + \varepsilon_0\|\varphi\|\}$. (3.6), (3.7) より (b) が導かれ，補題が証明された．

補題 5． compact supp. の C^∞－函数 f と $0\le s<t$ に対して

$$E\{f(X_\varepsilon(t))|\mathcal{F}_s\} - f(X_\varepsilon(s)) = E\{\int_s^t L_0 f(X_\varepsilon(\tau))d\tau | \mathcal{F}_s\} + o(1)$$

が成立する．ここで $o(1)$ はその絶対値の平均が，有界な区間上に s,t がある限り，ε とともに一様に 0 に行くことを表わす．

証明　補題 4 の証明におけるのと同じ記号を用いる．f, s, t を補題の仮定をみたすものとすれば (3.4) より

$$\begin{aligned} &E\{f(Y_\varepsilon(t))|\mathcal{F}_s\} - f(Y_\varepsilon(s)) \\ &= E\{\int_s^t\int_{-\infty}^{\infty}\{f(Y_\varepsilon(\tau)+\rho) - f(Y_\varepsilon(\tau)) - f'(Y_\varepsilon(\tau))\rho\}d\tau\nu(y)dy|\mathcal{F}_s\} \end{aligned}$$

ここで $\rho = \rho(\varepsilon,\tau,y)$．このことより

$$\begin{aligned} &E\{f(X_\varepsilon(t))|\mathcal{F}_s\} - f(X_\varepsilon(s)) \\ &= E[\int_s^t\int_{-\infty}^{\infty}\{f(Y_\varepsilon(\tau)+\rho) - f(Y_\varepsilon(\tau)) - f'(Y_\varepsilon(\tau))\rho\}d\tau\nu(y)dy|\mathcal{F}_s] + o(1) \\ &= E[\int_s^t\int_{-\infty}^{\infty}\{f(X_\varepsilon(\tau)+\rho_1) - f(X_\varepsilon(\tau)) - f'(X_\varepsilon(\tau))\rho_1\}d\tau\nu(y)dy|\mathcal{F}_s] \\ &\quad + o(1) + \text{残余項} \end{aligned}$$

を得る．ここで $\rho_1 = \rho_1(\varepsilon,\tau,y)$．残余項については，$f$ が十分滑らかな函数であることおよび ρ, ρ_1 の定義に注意すると，やはり $o(1)$ であることがわかる．したがって次の式

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$(3.8)\quad E\{f(X_\varepsilon(t)) \mid \mathcal{F}_s\} - f(X_\varepsilon(s))$$

$$= E\left[\int_s^t\int_{-\infty}^{\infty}\{f(X_\varepsilon(\tau)+y) - f(X_\varepsilon(\tau)) - f'(X_\varepsilon(\tau))y\}\,\lambda(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(\tau), \varepsilon^{-1}y)\,d\tau\,\nu(y)\,dy \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$+ o(1)$$

が成立する。ここで

$$g(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\{f(\eta+y) - f(\eta) - f'(\eta)y\}\{\lambda(\xi, \varepsilon^{-1}y) - \bar{\lambda}(\varepsilon^{-1}y)\}\,\nu(y)\,dy$$

とおく。$\int_0^1 g(\xi, \eta)\,m(d\xi) = 0$ であるから命題3より

$$\psi(\cdot, \eta) = \int_0^{\infty} T^t(g(\cdot, \eta)/a(\cdot, 0))\,dt$$

は $-A_1\psi(\cdot, \eta) = g(\cdot, \eta)$ をみたす。そして f が compact supp の C^∞-函数であるから $\psi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(t), X_\varepsilon(t))$ に対して確率積分の変換公式が適用出来るまで ψ は十分滑らかとなる。結局

$$(3.9)\quad \varepsilon^\alpha E\{\psi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(t), X_\varepsilon(t)) \mid \mathcal{F}_s\} - \varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(s), X_\varepsilon(s))$$

$$= \varepsilon\, E\left\{\int_s^t \psi_\eta(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(\tau), X_\varepsilon(\tau))\,b(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(\tau))\,d\tau \mid \mathcal{F}_s\right\}$$

$$- E\left\{\int_s^t g(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(\tau), X_\varepsilon(\tau))\,d\tau \mid \mathcal{F}_s\right\}$$

$$+ \varepsilon^\alpha E\left[\int_s^t\int_{-\infty}^{\infty}\{\psi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(\tau) + \varepsilon^{-1}\rho_1, X_\varepsilon(\tau)+\rho_1)\right.$$

$$\left. - \psi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(\tau)+\varepsilon^{-1}\rho_1, X_\varepsilon(\tau)) - \psi_\eta(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(\tau), X_\varepsilon(\tau))\,\rho_1\}\,d\tau\,\nu(y)\,dy \mid \mathcal{F}_s\right]$$

を得る。この等式の最後の項は ρ の定義より

$$E\left[\int_s^t\int_{-\infty}^{\infty}\{\psi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(\tau)+y, X_\varepsilon(\tau)+\varepsilon y) - \psi(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(\tau)+y, X_\varepsilon(\tau))\right.$$

$$\left. - \psi_\eta(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(\tau), X_\varepsilon(\tau))\,\varepsilon y\}\,\lambda(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(\tau), y)\,d\tau\,\nu(y)\,dy \mid \mathcal{F}_s\right]$$

と等しい。またこれは，単純な計算により，$o(1)$ と評価出来る。従って (3.9) より

$$E\left\{\int_s^t g(\varepsilon^{-1}X_\varepsilon(\tau), X_\varepsilon(\tau))\,d\tau \mid \mathcal{F}_s\right\} = o(1), \quad \varepsilon \downarrow 0.$$

これと (3.8) より

$$E\{f(X_\varepsilon(t)) \mid \mathcal{F}_s\} - f(X_\varepsilon(s))$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$= E\left[\int_s^t \int_{-\infty}^{\infty} \{f(X_\varepsilon(\tau)+y) - f(X_\varepsilon(\tau)) - f'(X_\varepsilon(\tau))y\} \bar{a}(\varepsilon^{-1}y)\, d\tau\, \nu(y)\, dy \mid \mathcal{F}_s\right] + o(1)$$

$$= E\left\{\int_s^t L_0 f(X_\varepsilon(\tau))\, d\tau \mid \mathcal{F}_s\right\} + o(1).$$

ここで条件 (1.5) を用いた.

定理の証明　今 $\mathcal{B}_s = \sigma\{w(\tau);\ \tau \le s\}$ とおくと補題5より

$$E_\varepsilon^x\{f(w(t)) \mid \mathcal{B}_s\} - f(w(s)) = E_\varepsilon^x\left\{\int_s^t L_0 f(w(\tau))\, d\tau \mid \mathcal{B}_s\right\} + o(1)$$

が成り立つ. このことから $0 \le s < s_1 < t < t_1$ と有界連続な $\mathcal{B}_s$ 可測函数 $\Phi(w)$ に対して

$$(3.10) \quad E_\varepsilon^x\left\{(t_1-t)^{-1}\int_t^{t_1} f(w(\tau))\, d\tau\, \Phi(w) - (s_1-s)^{-1}\int_s^{s_1} f(w(\tau))\, d\tau\, \Phi(w)\right\}$$

$$= E_\varepsilon^x\left\{(t_1-t)^{-1}\int_t^{t_1} d\tau_1\ (s_1-s)^{-1}\int_s^{s_1} d\tau_2 \int_{\tau_2}^{\tau_1} L_0 f(w(\tau))\, d\tau\, \Phi(w)\right\} + o(1)$$

が成立する. 今 $\{P_\varepsilon^x\}$ が部分列 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots \downarrow 0$ に沿って $\varepsilon \downarrow 0$ のとき収束するとすれば, (3.10) において先ず (その部分列に沿って) $\varepsilon \downarrow 0$, 次に $s_1 \downarrow s$ そして $t_1 \downarrow t$ とすることにより

$$E_0^x\{f(w(t)) \mid \mathcal{B}_s\} - f(w(s)) = E_0^x\left\{\int_s^t L_0 f(w(\tau))\, d\tau \mid \mathcal{B}_s\right\}$$

を得る. このことより P_0^x が L_0 によって生成される安定過程に対応する確率測度であることがわかる.

条件 (1.6) をみたす例: $\gamma_+ = \gamma_- > 0$, $a(x, y) = a(1-x, -y)$, $b(x) = -b(1-x)$ と仮定すると $(T_1^t b)(x) = -(T_1^t b)(1-x)$ が成立し, したがって (1.6) が成り立つ.

文　献

[1] A. Bensoussan, J. L. Lions and G. C. Papanicolaou, Sur quelques phénomènes asymptotiques stationnaires, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 281 (1975), 89-94.

[2] A. Bensoussan, Homogenization and ergodic theory, Lecture

delivered at the International Symposium on Stochastic Differential Equations, Kyoto, 1976.

[3] P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, John Wiley & Sons, Inc., New York · London · Sydney · Toronto, 1968.

[4] J. P. Lepeltier and B. Marchal, Problème des martingales et équations différentielles stochastiques associées à un opérateur intégro-différentiel, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B 12 (1976), 43-103.

[5] P. A. Meyer, Les résolvantes fortement fellériennes, d'après Mokobodzki, Lecture Notes in Mathematics, No. 51. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968.

[6] K. Sato, Semigroups and Markov processes, Lecture note, University of Minnesota, 1968.

[7] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, Diffusion processes with continuous coefficients, I and II, Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969), 345-400 and 479-530.

[8] M. Tsuchiya, On a small drift of Cauchy process, J. Math. Kyoto Univ. 10 (1970), 475-492.

[9] H. Watanabe, Potential operator of a recurrent strong Feller process in the strict sense and boundary value problem, J. Math. Soc. Japan 16 (1964), 83-95.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

Galton-Watson Processes の個数の増大法則とその応用

筑波大学　　志村道夫

平均個数が有限の一粒子型離散時間 Galton-Watson process（DGWS）の個数の変動に関する研究は様々な観点から詳細に進められてきた。一方平均個数が無限大のDGWPの研究は解析上の困難さもあって最近まで手が付けられずにきた。Seneta [11], [12] は functional iteration の理論（Kuczma [9] に詳細にまとめられている）を巧みに用いて，平均個数が有限の場合の研究の統一的方法を与えると同時に，平均個数が無限大のある種の場合について新しい型の個数の変動法則が成立することを示した。筆者は当報告で Seneta の approach の簡単な紹介（3節、4節）と平均個数が無限大で個数の変動法則が未解決な興味ある例を連続時間 Galton-Watson process（CGWP）から導く（5節）。最後に5節の問題の解決が同じ分枝法則を持つ branching Lévy process の爆発，非爆発条件を求める為に必要であることを Ito-McKean [7] と筆者 [13]-[15] の結果から指摘する（6節）。

1．Z_n, $n = 0,1,2,\cdots$, を確率空間 (Ω, P) 上のDGWPとする。$F_n(x)$, $n = 0,1,2,\cdots$, $0 \leq x \leq 1$, を Z_n の確率母関数，即ち

$$F_n(x) = E[x^{Z_n}] = \sum_{m=0}^{\infty} x^m P(Z_n = m)^{(*)}$$

とする。$F_0(x) = x$ であり，又 $F_1(x) = F(x)$ と記す。

DGWPの個数の変動法則で最も基本的なものは次の定理1

(*) $E[*] = E[* | Z_0 = 1]$, $P(*) = P(* | Z_0 = 1)$ と略記する。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

である。

定理1. (i) (trangience of DGWP) $P(Z_n \to 0$ or $Z_n \to \infty) = 1$。
(ii) 消滅確率 $q = P(Z_n \to 0)$ は方程式; $x = F(x)$, $0 \leq x \leq 1$ の最小解である。
(iii) $m = EZ_1$ とするとき, $m \leq 1$ ならば $q = 1$, $m > 1$ ならば $0 \leq q < 1$, である。

当報告は $Z_n \to \infty$ の様子を調べることを目的とするので今後考えるDGWPは全て $m > 1$ (super-critical) とする。

2. Senetaの approachで基本的役割を果す functional iteration の3つの定理を述べる。 $I = [0, d)$, $0 < d \leq \infty$, とし, $h(x)$ は $h(x)\colon I \to I$ なる狭義単調増大な連続関数で $h(0) = 0$, $h(x) < x$ $x \in I \setminus \{0\}$, を満すものとする。 そのとき (Kuczma [9])

定理A. $h \in C^1(I)$, かつ正の定数K, μ, s, $0 < s < 1$ があって U_0 を0のある近傍とするとき

(1) $$|h'(x) - s| \leq Kx^{\mu} \quad x \in I \cap U_0$$

が成立するものとする。 そのとき $h_n(x)$ を $h(x)$ の n 回の iteration とすれば

(2) $$\lim_{n \to \infty} s^{-n} h_n(x) = \varphi(x) \quad x \in I$$

が存在する。 ここで $\varphi(x)$ は Schröder 方程式

(3) $$\varphi[h(x)] = s\varphi(x) \quad x \in I$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

の任意定数ηを持つ狭義単調($\eta>0$なる増大，$\eta<0$なる減小)で$C'(I)$に属する定数倍の違いを除いて唯一の解である。

定理B． $h'(0)=s\in(0,1)$ かつ $h(x)/x$ は $I\setminus\{0\}$ で単調増大とする。 そのときx_0を$I\setminus\{0\}$に属する任意の固定点とするとき

$$\eta \lim_{n\to\infty} [h_n(x_0)]^{-1} h_n(x) = \varphi(x) \quad x\in I \tag{4}$$

が存在する。 ここで$\varphi(x)$は Schröder 方程式 (2) の狭義単調で$C'(I)$に属する定数倍の違いを除いて唯一の解である。

定理C． $h\in C'(I)$，かつ正の定数 a δ μ M，$\mu>1$ があってU_0を0のある近傍とするとき

$$|h'(x)-a\mu x^{\mu-1}| \leq M x^{\mu-1+\delta} \quad x\in I\cap U_0 \tag{5}$$

が成立するものとする。 そのとき

$$\eta \lim_{n\to\infty} \mu^{-n} \log \frac{1}{h_n(x)} = \varphi(x) \quad x\in I\setminus\{0\} \tag{6}$$

が存在する。 ここで$\varphi(x)$は Schröder 方程式

$$\varphi[h(x)] = \mu\varphi(x) \quad x\in I\setminus\{0\} \tag{7}$$

の狭義単調で$C^1(I\setminus\{0\})$に属する定数倍の違いを除いて唯一の解である。

定理Cに関する注意． $g(x)=-1/\log x$ ($g_{-1}(x)=e^{-1/x}$) $x\in I\setminus\{0\}$ とし、

$$f(x)\equiv g(h[g_{-1}(x)]) \quad x\in(0,\infty), \quad f(0)\equiv 0 \tag{8}$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

と定義すれば $f(x)\in C^1([0,\infty))$ かつ狭義単調増大な関数で０の近傍で不等式 $|f'(x)-1/\mu|\le Kx$, K は正の定数，が成立する。従って $f(x)$ に定理Ａが適用できて，$\lim_{n\to\infty}\mu^{-n}f_n(x)=\psi(x)$ が存在し $\psi(x)\in C^1([0,\infty))$ かつ狭義単調増大となる。故に(8)より $x\in(0,1)$ で $\lim_{n\to\infty}\mu^{-n}\log\{1/h_n(x)\}=1/\psi[1/(\log 1/x)]\equiv\varphi(x)$ が存在して定理Ｃが示される。

(2)あるいは(4)で与えられた $\varphi(x)$（又は(6)で与えられた $\varphi(x)$）は Schröder 方程式(3)（又は(7)）の principal solution と呼ばれる。

３． $m=EZ_1<\infty$ のＤＧＷＰの規格化

定理２．（Seneta [11], Athreya-Ney [1]） $m=EZ_1<\infty$ のＤＧＷＰに対して正の定数列 C_n, $n=0,1,2,\cdots$ で次の条件を満すものが存在する。

$$C_n\to\infty\ (n\to\infty)\ \text{で}\ Z_n/C_n\to W\ \text{a.s.}\ (n\to\infty)$$

ここでＷは確率１で有限値をとる非縮退確率変数で $P(W=0)=q$ である。この正の定数 C_n をＤＧＷＰの規格化定数という。

証明の要点． (i) 規格化定数の存在．$k(x)$ を Z_1 の cumulent generating function，即ち，$k(x)=-\log F(e^{-x})$ $0\le x<\infty$ とする。$k(x)$ は狭義単調増大な連続関数でＤＧＷＰが trivial でないかぎり狭義に凸となる（ＤＧＷＰが trivial，即ち，$F(x)=x^N$ のとき $k(x)=Nx$ となる）。又 $k'(0)=m$ かつ $\lim_{x\to\infty}k(x)=-\log F(0)=r_0$ である。$h(x)$ を $k(x)$ の逆関数 $k_{-1}(x)$ とする。$h(x)$ は狭義単調増大な連続関数で狭義に凹となる。又 $h'(0)=1/m$ かつ $\lim_{x\to r_0-0}h(x)=\infty$ である。次の関係が容易に示せる。

(9) $\quad k_n(x) = -\log F_n(e^{-x}) \quad n = 1, 2, \cdots.$

(10) $\quad h_n(x) = (k_n)_{-1}(x) \quad n = 1, 2, \cdots.$

$\tilde{h}_n(x) \equiv h_n(x)/h_n(x_0)$ $\ x \in [0, r_n)$ $\ x_0$は$(0, r)$に属する任意の固定点とし，$r_n = -\log F_n(0)$ $\ r = \lim_{n\to\infty} r_n = -\log q$ とする。定理Bより$x \in [0, r)$で $\lim_{n\to\infty} \tilde{h}_n(x) \equiv H(x)$ が存在する。ここで$H(x)$は狭義単調増大な連続関数で凹であり，$H(0) = 0$ かつ $\lim_{x\to r-0} H(x) = \infty$ である。このことから$x \in [0, \infty)$で $\lim_{n\to\infty} (\tilde{h}_n)_{-1}(x) = \lim_{n\to\infty} k_n[h_n(x_0)x] = K(x) = H_{-1}(x)$ となる。従って

(11) $$\lim_{n\to\infty} F_n[e^{-x h_n(x_0)}] = \lim_{n\to\infty} E[e^{-x h_n(x_0) Z_n}] = e^{-K(x)} \quad x \in [0, \infty)$$

が成立する。ここで$K(x)$は狭義単調増大な連続関数で凸である。また

(12) $\quad K(0) = 0 \quad \lim_{x\to\infty} K(x) = r$

が成立する。(11)より $c_n = 1/h_n(x_0)$ とおけば $Z_n/c_n \to W$ in law が成立し，(12)よりWは確率1で有限値を取る非縮退な確率変数で $P(W=0) = q$ となる。

(ii) $Z_n/c_n \to W$ a.s. について．$Y_n \equiv e^{-h_n(x_0) Z_n}$, $n = 0, 1, \cdots$ とおく。そのとき

$$E[Y_{n+1} \mid Y_0, \cdots Y_n] = E[e^{-h_n(x_0) Z_{n+1}} \mid Z_n] = \{F[e^{-h_{n+1}(x_0)}]\}^{Z_n}$$

$$= e^{-k[h_{n+1}(x_0)] Z_n} = e^{-h_n(x_0) Z_n} = Y_n$$

従ってY_n, $n = 0, 1, \cdots$ は $0 \leq Y_n \leq 1$ a.s. な martingale となる。故に $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$ a.s. であり $\lim_{n\to\infty} Z_n/c_n = W$ a.s. とできる。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

定理3．（Seneta [11], Athreya-Ney [1]） $m = EZ_1 < \infty$ とするとき規格化定数 C_n は，$EZ_1 \log Z_1 < \infty$ のとき $C_n \sim (\text{const.})\, m^n$，$EZ_1 \log Z_1 = \infty$ のとき $C_n = o(m^n)$ である。

4． $m = EZ_1 = \infty$ のDGWPの規格化．

$m = EZ_1 = \infty$ のDGWPでは定理2の主張が成立しない，既ち

定理4．（Seneta [11]） $m = EZ_1 = \infty$ のDGWPでは Z_n / C_n, $n = 0, 1, \cdots$ が非縮退かつ確率1で有限値をとる確率変数に法則収束する規格化定数列 C_n, $n = 0, 1, \cdots$ は存在しない。

定理4は定理2で定義した $h(x)$ は $h'(0) = 0$ となって定理1ないし3が適用できないことから導かれることに注意する。ところで Seneta [11], [12] 及び Darling [2] は次の新しい型の極限定理の成立することを示した。

定理5． DGWP Z_n, $n = 0, 1, \cdots$ は $EZ_1 = \infty$ かつ正の定数 a δ c, $0 < c < 1$ について

$$G'(x) = c^{-1} a x^{\frac{1}{c} - 1} [1 + O(x^{\delta})] \quad (x \to 0+) \tag{13}$$

が成立するものとする。ここで $G(x)$ $0 \le x \le 1 - F(0)$ は $1 - F(1 - x)$, $0 \le x \le 1$ の逆関数とする。そのとき $u \in (0, \infty)$ について

$$V(u) = \lim_{n \to \infty} E[\{1 - \exp(-c^{-n} u)\}^{Z_n}] \tag{14}$$

が存在する。ここで $V(u)$ は $(0, \infty)$ で狭義単調増大な連続関数で $V(0+) = q$ かつ $V(+\infty) = 1$ である。さらに $u \in (0, \infty)$ について

$$V(u) = \lim_{n \to \infty} P(c^n \log(Z_n + 1) \le u) \tag{15}$$

が成立する。

証明の要点。 (i) $F(0)=0$，既ち $\delta=0$ の場合。 条件(13)より定理Cとその注意から

(16) $$D_n(x) = C^{-n}\left[-\log G_n(e^{-1/x})\right]^{-1} \to \psi(x) \quad x\in[0,\infty)$$

が示される。 ここで $D_n(x)$, $\psi(x)$ は各々狭義単調増大な連続関数で $x\to\infty$ で $D_n(x)\to\infty$, $\psi(x)\to\infty$ となる。 従って

(17) $$(D_n)_{-1}(x) = -\frac{1}{\log\{1-F_n(1-e^{-1/C^n x})\}} \to \psi_{-1}(x) \quad x\in[0,\infty)$$

となり，さらに(14)が導かれる。 但し $v(u)=1-e^{-1/\psi_{-1}(1/u)}$ である。 また $\psi(x)$ の性質から $v(u)$ の求める性質も得られる。

次に(14)から(15)を導く。 (14)の両辺のラプラス変換を取れば

(18) $$\int_0^\infty e^{-\xi u} v(u)\,du = \int_0^\infty e^{-\xi u} \lim_{n\to\infty} E\left[(1-e^{-C^{-n}u})^{Z_n}\right] du$$
$$= \lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^\infty e^{-\xi u}(1-e^{-C^{-n}u})^{Z_n}du\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} E\left[C^n\int_0^1 (1-v)^{C^n\xi-1} v^{Z_n}\,dv\right] \quad (v=1-e^{-C^{-n}u})$$
$$= \frac{1}{\xi}\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{\Gamma(Z_n+1)\Gamma(C^n\xi+1)}{\Gamma(Z_n+C^n\xi+1)}\right]$$

ここで $C^n\xi\to 0$ より $\Gamma(C^n\xi+1)\to 1$。 スターリングの公式 $\Gamma(p)=\exp\{(p-1/2)\log p - p + C + R(p)\}$，但し C はある定数で $R(p)$ は $R(p)\to 0$ $(p\to\infty)$ なる剰余項，と $Z_n\to\infty$ a.s. より $\Gamma(Z_n+1)/\Gamma(Z_n+C^n\xi+1) \sim \exp\{-\xi C^n\log(Z_n+1)\}$ a.s.。 従って(18)より

$$\int_0^\infty e^{-\xi u} v(u)\,du = \frac{1}{\xi}\lim_{n\to\infty} E\left[e^{-\xi C^n\log(Z_n+1)}\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-\xi u} P\{c^n \log(Z_n+1) \le u\}\, du .$$

既ち(15)が示された。

(ii) $0<F(0)<1$ で $0<g<1$ の場合。 (i)における $1-s$、$1-x$) を $\{1-F(1-(1-g)x)\}/(1-g)$, $0\le x\le 1$ で置き換えて(i)と同じ議論を進めればこの場合の求める結果を得る。

問題 1. $c^n \log(Z_n+1)$ は a.s. の意味で収束するか?

5. 本節では1回の分枝で生成される粒子の平均個数が無限大のCGWPから得られる平均個数が無限大のDGWPについて前節4で述べたのと同種の課題の提起とその準備をする。

$\tilde{Z}_t$, $0\le t<\infty$ を確率空間(W,P)上のCGWPとする。 但し τ を最初の分枝時刻, 既ち $\tau=\inf\{t;\ Z_t \ne Z_0\}$ とするとき

(19) $$P(\tau>t) = e^{-kt} \quad t\in[0,\infty), \quad k \text{ は正の定数}$$

であり, $P(Z_\tau = n) = g_n$, $n=0,1,\cdots$ とするとき $g_0 = g_1 = 0$ かつ

(20) $$0 \le g_n \sim c n^{-2} (\log n)^{-\alpha} \qquad 2\le n\to\infty$$

但し α は $0\le\alpha\le 1$ なる定数, c は $\sum_{n=2}^\infty g_n = 1$ とする規格化定数, で定められるものとする。 $f(x)=\sum_{n=2}^\infty g_n x^n$ とする, そのとき

補題 1. $\alpha=1$ のとき $x-f(x) \sim c(1-x)\log\log\frac{1}{1-x}$ $(x\to 1-0)$。

$0\le\alpha<1$ のとき $x-f(x) \sim \frac{c}{1-\alpha}(1-x)\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^{1-\alpha}$ $(x\to 1-0)$。

補題1の証明は $f'(x)$ $x\to 1-0$ に Abel の定理 (Feller [3]) を適用して $f'(x)$ の $x\to 1-0$ の漸近式を求め、それを積分することにより得られる。 補題1及び Harris [4] より

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

補題1の系. $\tilde{Z}_t$は非爆発的、既ち $P(\tilde{Z}_t < \infty \quad \forall t \in [0,\infty)) = 1$ である。

補題2. 任意の $t > 0$ に対して $E\tilde{Z}_t = \infty$ 。

補題2は1回の平均分枝個数が無限大であることと分枝時間の法則(19)より自明である。 DGWPを $Z_n \equiv \tilde{Z}_n$, $n = 0, 1, \cdots$ で定義する。 補題1の系及び補題2より $P(0 \le Z_1 < \infty) = 1$ かつ $m = EZ_1 = \infty$ である。 さらに $F(x)$ を Z_1 の確率母関数とすれば

補題3. $\alpha = 0$ のとき $1 - F(1-x) = x^{\exp(-ck + o(1))}$ $(x \to 0+)$

$0 < \alpha < 1$ のとき $1 - F(1-x) = \exp\left(\left\{(-\log x)^{\alpha} - \frac{\alpha c k}{1-\alpha} + o(1)\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ $(x \to 0+)$

但し $o(1)$ は剰余項で $o(1) \to 0$ $(x \to 0+)$。

証明の概要. $F(t,x) = Ex^{\tilde{Z}_t}$ $(0 \le x < 1)$ が常微分方程式

(21) $$\begin{cases} \dfrac{dF}{dt}(t,x) = k\{f(F(t,x)) - F(t,x)\} \\ F(0,x) = x \end{cases}$$

の解であり $F(x) \equiv F(1,x)$ であるから(21)を解けば $F(x)$ は積分方程式

(22) $$k = \int_{F(x)}^{x} \frac{d\xi}{\xi - f(\xi)}$$

を満たす。 (22)の右辺の被積分関数に補題1を用いれば求めるべき結果を得る。

問題2. 補題3で取り上げたDGWPの規格化はどうしたらよいか。 特に4節、定理5のように適当な規格化の関数

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$\Phi(x)$と定数μ—ここで $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ で単調増大な連続関数で $\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=\infty$, 又 $0<\mu<1$ とする—を定めて $\mu^n\Phi(Z_n)$が確率1で有限値を取る非縮退確率変数に法則収束させることが出来るだろうか？

問題2に対する注意。 (i) 補題3の$\alpha=0$の特別な場合は定理5に含まれる。 たとえば本節のCGWPで $g_n=1/(n-1)n$, $n=2,3,\cdots$, とすれば $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}g_n x^n = x+(1-x)\log(1-x)$ を得る。 このとき(22)より $F(x)=Ex^{Z_1}=1-(1-x)^{\exp(-k)}$ となり定理5で $C=\exp(-k)$, $a=1$ (及び剰余項 $O(x^\rho)$ はなし)としたものになる。 このとき

$$(23)\qquad \lim_{n\to\infty}P(e^{-kn}\log(Z_n+1)\le u)=1-e^{-u},\ u\in(0,\infty)$$

となる(極限分布は指数分布になる)。
(ii) 補題3の $0<\alpha<1$ の場合は定理5で扱うことが出来ない。 $1-F(1-x)$の逆関数$G(x)$について $x\to0$ で $G(x)\to0$ となるorderが条件(13)を満さず定理6が適用できない為である(Seneta [12], 'pathological case' 参照)。

問題3. 補題3の $0<\alpha<1$ の場合に適用できるよう定理6の拡張を考える。

6. 本節では前節までの議論の有力な動機となったGWPの個数の増大法則のbranching Lévy process (BLP)の爆発問題への応用の可能性を示す。 ここでBLP $\underset{\sim}{X}=(\underset{\sim}{X}_t,\underset{\sim}{P}_{\underset{\sim}{x}},\underset{\sim}{x}\in\underset{\sim}{R})$は筆者[14]で定義されたものである。 即ち，1個の親粒子は実数直線R^1上を時間一様なLévy process $X=(X_t,P_x,x\in R^1)$に従って運動し，R^1の各点xの近傍を運動するとき微小時間間隔Δtの間に死亡する確率は $k(x)\Delta t+O[(\Delta t)^2]$ に等しい。 ここで$k(x)$はR^1上の非負，非有界な連続関数である。 親粒子の死亡

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

と同時に確率q_n, $n=2,3,\cdots$, でn個の子粒子が親粒子の死亡直前の位置に生れる。各子粒子はただちに互いに独立に親粒子と同じ確率法則で運動する・・・。我々は上述のX, $k(x)$, $\{q_n, n=2,3,\cdots\}$ をそれぞれBLP $\underset{\sim}{X}$ の base process, killing rate, splitting law という。

筆者[13]−[15]は$q_2=1$, 即ち1つの親粒子の死亡で必ず2個の子粒子が生れるBLPについて考察しかなり満足のいく爆発, 非爆発の十分条件を得た。そこでの考察は一般に splitting law q_n, $n=2,3,\cdots$, が $\tilde{m}=\sum_{n=2}^{\infty} n q_n<\infty$ であるBLPにも応用でき, その爆発, 非爆発条件は $q_2=1$ の場合の少々の修正で得られる。それでは splitting law q_n, $n=2,3,\cdots$, が(20)のように $\tilde{m}=\sum_{n=2}^{\infty} n q_n=\infty$ となるBLPの爆発, 非爆発条件はどのようなものになるだろうか? この問題は以下に述べる少々の結果と予想を除けばまだ何もわかっていないと思われる。

(i) 非爆発条件。 定理6. (Ito-McKean [7], Shimura [13]) q_n, $n=2,3,\cdots$, $\tilde{m}=\sum_{n=2}^{\infty} n q_n$ を splitting law とするBLP $\underset{\sim}{X}$ について $M_t \equiv \exp\{(\tilde{m}-1)\int_0^t k(x_u)du\}$ とするときすべての$x\in R^1$に対して $E_x M_t<\infty$ となる正数tがあれば$\underset{\sim}{X}$は非爆発的である。

定理6の base process の multiplicative functional M_t は, base process のR^1上の運動と各点$x\in R^1$での死亡・再生が起る割合が$k(x)$であることを考慮してBLPの時刻0からtまでの個数の増大率である(Ito-McKean [7])。あるいは splitting law q_n, killing rate k のCGWP $\tilde{Z}_t$の規格化定数が($E\tilde{Z}_t\log\tilde{Z}_t<\infty$ も仮定すれば) $\exp\{(\tilde{m}-1)kt\}$ になるが, そのBLPに対応するものがM_tと見なせる。$\underset{\sim}{X}$のM_tに対応する$\underset{\sim}{X}^*$のM_t^*は何か? ひとつの予想として(23)より $M_t^*=\exp[\exp\{\int_0^t k(x_u)du\}]$ と考えられる。そのとき

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

BLP $\underset{\sim}{X}^*$の非爆発条件の予想. すべての$x \in R^1$に対して$E_x M_t^* < \infty$となる正数tがあれば$\underset{\sim}{X}^*$は非爆発的である。

(補題)′ 上述の予想が正しいとする。$\underset{\sim}{X}^*$は base process が Poisson process, killing rate $k(x) \asymp (\log x)^\gamma$ $(x \to \infty)$ [(†)] なる branching Poisson process とする。そのとき$\gamma \leq 1$なる$\underset{\sim}{X}^*$は非爆発的である。

(ii) 爆発条件. 筆者[15]の Proposition 1 及び 2 の議論は$\underset{\sim}{X}^*$へ適用できる。実際$\underset{\sim}{X}^*$の base process が subordinator の場合には次の定理7が証明される。[15]のように3つの数列を準備する。

(S-1) $H_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, かつ $H_n \nearrow \infty$ $(n \nearrow \infty)$。$h_n \equiv H_{n+1} - H_n$, $n = 1, 2, \cdots$。

(S-2) $t_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, かつ $\sum_{n=2}^{\infty} t_n < \infty$。

(S-3) N_n 正の整数でかつ $\lim_{n\to\infty} N_n = \infty$。

$$I_2 \equiv \sum_n e^{-k_n t_n} \log N_n \qquad I_3 \equiv \sum_n \{P(X(t_n) \leq h_n)\}^{N_n},$$

但し $k_n = \inf_{x \geq H_n} k(x)$, とする。そのとき

定理7. base process が subordinator の BLP $\underset{\sim}{X}^*$について (S-1) - (S-3)の3つの正数列H_n, t_n, N_nをI_2とI_3が同時に収束するように選ぶことが出来れば$\underset{\sim}{X}^*$は確率1で爆発する。

定理7の証明は[15; Proof of Proposition 1]と同様にできる。但しそこでの等式(2)は次の補題4で置き換える。

補題4. $\check{Z}_t$ $t \geq 0$ は killing rate k, splitting law が δ_0

(†) $f(x) \asymp g(x)$ $(x \to a) \iff 0 < \varliminf_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq \varlimsup_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} < \infty$,

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$=g_1=0$, $g_n=1/(n-1)n \quad n\geq 2$, のしGWPとする。そのときA., Bを十分大きな正の定数として $kt\geq A \quad N\geq B$ とすれば

(24) $\qquad P(\tilde{Z}_t \leq N) \leq 2e^{-kt}\log N$

が成立する。

定理7を用いれば次の補題5を得る。

補題5. $\underset{\sim}{X}^*$を(補題)$'$と同じbranching Poisson processとする。そのとき$\gamma>1$ならば$\underset{\sim}{X}^*$は確率1で爆発する。

(補題)$'$と補題5をまとめれば次の定理8を得る。

定理8。 $\underset{\sim}{X}^*$はkilling rate $k(x)\simeq(\log x)^\gamma \quad (x\to\infty)$ のbranching Poisson processとする。そのとき正の定数γが, $\gamma=1$ならば$\underset{\sim}{X}^*$は非爆発的(予想), 又$\gamma>1$ならば$\underset{\sim}{X}^*$は確率1で爆発的, である。

参考文献

[1] Athreya, K.B. and Ney, P.E.; Branching processes, Springer (1972)
[2] Darling, D.A.; The Galton-Watson process with infinite mean, J. Appl. Prob. 7, 455-456 (1970)
[3] Feller, W.; An introduction to probability theory and its applications Vol. 2, John Wiley (1966)
[4] Harris, T.E.; The theory of branching processes, Springer (1963)
[5] Ikeda, N., Nagasawa, M. and Watanabe, S.; Branching Markov processes I, II and III, J. Math. Kyoto Univ. 8-2, 233-278, 8-3, 365-410 (1968), 9-1, 95-160 (1969)

[6] Ikeda, N. and Watanabe, S. ; On uniqueness and non-uniqueness of solutions for a class of non-linear equations and explosion problem for branching processes, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sec. I, Vol. XVII, Part 1 and 2 , 187-214 (1970)

[7] Ito, K. and McKean, H.P. ; Diffusion processes and their sample paths, Springer (1965)

[8] Karlin, S. and McGregor, J. ; Embeddability of discrete time simple branching processes into continuous time branching processes, Trans. Amer. Math. Soc. 132, 115-136 (1968)

[9] Kuczma, M. ; Functional equations in a single variable, PWN-Polish Sci. Publ. (1968)

[10] Savits, T. H. ; The explosion problem for branching Markov processes, Osaka J. Math. 6 (1969), 375-395.

[11] Seneta, E. ; Functional equations and the Galton-Watson process, Adv. Appl. Prob. 1, 1-42 (1969)

[12] ——— ; The simple branching process with infinite mean, J. Appl. Prob. 10, 205-212 (1973)

[13] Shimura, M. ; The explosion problem of branching stable processes, J. Math. Kyoto Univ. 14-1, 29-53 (1974)

[14] ——— ; The explosion problem of branching Lévy processes, J. Math. Kyoto Univ. 16-2, 241-270 (1976)

[15] ——— ; A refinement of explosion condition for branching Lévy processes, to appear J. Math. Kyoto Univ.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

部分的に観測可能な線型確率制御問題の例

藤崎正敏

§0 はじめに

一般に確率制御問題は大別して完全に観測可能なものと部分的に観測可能なものの二つに分けられる。今迄多くの研究が為されてきたが，就中後者の場合にはあまり満足すべき結果はなく，線型の場合にのみ具体的な結果が得られているにすぎない。たとえば W. M. Wonham [6] は線型制御において制御変数の族をリプシッツ連続なものに限れば最適制御変数が具体的に求まることを示している。

ここでは，やはり線型制御問題を考え，Wonham の場合より広い，すなわち有界で non-anticipative な制御変数の族の中で簡単な評価函数を最小にするものを具体的に表現しようというものである。この例は今迄にも R. S. Liptzer [4] 等によって考察の対象と為されてきたが，筆者の知る限りではその結果は完全ではない。そこで筆者は以下に示すように，この問題をフィルタリングの理論及び確率微分方程式の解に関する比較定理を用いて解いた。比較定理の制約から制御系は極めて簡単にならざるを得なかったが，それにもかかわらず得られる結果は大変興味深い。というのは non-anticipative な制御変数の族の中に最適制御変数が存在して，しかもそれは連続でないことがわかるからである。非線型の場合にもこの様に最適制御変数が具体的に求まる例を見出すことは大変価値ある課題であると思われる。

§1 主要な結果

T を $0<T<\infty$ なる時間，もしくは有界な停止時間とする。(W_t) と (w_t)，$0\le t\le T$，を共に n 次元ブラウン運動 ($W_0 = w_0 = 0$) であって互に独立であるとする。このとき次の様な

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$2n$次元の確率微分方程式を考える；

$$(1.1)\quad \begin{cases} d\theta_t = u_t\,dt + dW_t, & \theta_0 = \theta \\ d\xi_t = \theta_t\,dt + dw_t, & \xi_0 = 0 \end{cases}$$

ここに(θ_t)，(ξ_t)，(u_t)，$0 \le t \le T$，はそれぞれチャンネルの状態，チャンネルの出力，制御変数を表わすものとし，以下(ξ_t)のみを通してこの制御系を観測できるものと仮定する。そこで我々は次の様な問題を考える；

問題：確率微分方程式（1.1）によって与えられる確率過程(θ_t, ξ_t)に対して，評価函数$J(u)$

$$(1.2)\quad J(u) = E^u\left[\int_0^T \omega(\theta_t)\,dt\right]$$

を最小にする様な制御変数uを適当に広い族の中から見出すこと。ただし，函数$\omega(x)$ $(x \in R^n)$は

$$(1.3)\quad \omega(x) = \begin{cases} 1 & (\|x\| > H) \\ 0 & (\|x\| \le H) \end{cases}$$

であって，$0 < H < \infty$とする。

ところで我々の立場は，制御変数(u_t)は(θ_t)の初期値θ_0の先験的分布μと，出力$\{\xi_s, s \le t\}$によって与えられる情報のみに依存すると考えるので，この場合，問題は部分的に観測可能と呼ばれている。そこでこれらの関係を厳密に表現しよう。まず制御変数のクラスを決める必要がある。C^nを$[0,T] \longrightarrow R^n$なる連続函数全体の作る空間とし一様位相が入っているものとする。$\mathcal{B}_t^n$をC^nの位相的Borel集合族の部分σ－加法族であって，筒集合$\{w \in C^n,\ w(t_1) \in T_1,\ w(t_2) \in T_2, \cdots, w(t_n) \in T_n\}$，（$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le T$，$T_i$は$R^n$のBorel集合）によって生成されるものとする。次にu_0を$0 < u_0 < \infty$なる数とし，Ψを，$[0,T] \times R^n \times C^n \longrightarrow R^n$なる写像であって以下の様な3条件を満たす$\psi(t,x,w)$の集まりとする。すなわち$\psi \in \Psi$であるとは，

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

1．(t, x, w) の3変数の函数として可測，
2．各 x を止める毎に，各 $t \geq 0$ に対して w の函数として $\mathcal{B}_t^n$ ー可測，
3．すべての (t, x, w) について $\|\psi(t, x, w)\| \leq u_0$．

このとき次の補助定理が成立つ。

補助定理1.1　任意の $\psi \in \Psi$，任意の $x \in R^n$ に対して $u_t = \psi(t, x, \xi)$ とおけば，初期分布 μ を持つ(1.1)の解が存在する．

証明はずれの変換に関する Girsanov の定理を用いれば容易にできるからここでは省略する。上の事実は次の定義の可能性を保証する。

定義1　制御変数 u が許容である（admissible）とは，ある $\psi \in \Psi$ が存在して，すべての t について $u_t = \psi(t, m, \xi)$ と書けるときを云う。ただし，m は初期値 θ の平均値（n 次ベクトル），ξ は(1.1)の解である。またこの様な u の集まりを $\mathcal{U}$ で表わし，許容制御変数族（admissible class）と呼ぶ。

そこで我々の問題は $\mathcal{U}$ の中で $J(u)$ を最小にする u をもとめることである。

定義2　$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} J(v)$ が成立つとき制御変数 u は最適（optimal）であると云う。またこれに対応する (θ, ξ) を最適解と云う。

定理1.2　(θ_t) の初期分布 μ が正規分布 $N(m, \sigma^2)$（m は n 次ベクトル，σ^2 は n 次行列であって $c_1 I_n$ なる型のもの，ただし $c_1 > 0$，I_n は n 次単位行列）ならば，方程式(1.1)と評価函数(1.2)に対して最適制御変数 u とそれに対応する最適解 (θ, ξ) とが存存する。そしてこの u は具体的に次のように表現される。すなわち，

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

(1.4) $u_t = U(m_t)$

ただし，U, m_t はそれぞれ

(1.5)
$$U(x) = \begin{cases} -u_0 \dfrac{x}{\|x\|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(1.6) $m_t = E^u[\,\theta_t \mid \mathcal{F}_t\,]$

であって，さらに $\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi_s,\ s \le t\}$ である。

注意 W. M. Wonham [6] と我々との間にある本質的相違は許容制御変数族にある。前者は Ψ の要素をリプシッツ連続なものに制限して考察した。従ってこの場合は任意に与えられたブラウン運動に対して評価函数を最小にする u をもとめたということができる。一方これに対して我々の場合は，何はともあれ評価函数を最小にする様な u とそれに対応するブラウン運動をもとめたということができるだろう。

§2. 定理1.2 の証明及び補助定理など

この節では定理1.2 の証明を行なう。しかしその証明は長いので幾つかの段階に分けることにする。補助定理1.1 によって，任意の $\psi \in \Psi$（従って $u \in \mathcal{U}$）に対して確率微分方程式 (1.1) の解が存在するからそれを (θ_t, ξ_t) として固定する。$\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi_s, s \le t\}$ とし，(m_t), (σ_t^2) を

(2.1) $m_t^i = E^u[\,\theta_t^i \mid \mathcal{F}_t\,]$, $1 \le i \le n$

(2.2) $(\sigma_t^2)^{ij} = E^u[\,(\theta_t^i - m_t^i)(\theta_t^j - m_t^j) \mid \mathcal{F}_t\,]$, $1 \le i, j \le n$

によって定める。A. N. Shiryaev [5] 等は次の事実を示した。

補助定理2.1 初期分布 μ が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ ならば，各 t に対して θ_t の $(\mathcal{F}_t)$ 条件付分布 $P(\theta_t \in \cdot \mid \mathcal{F}_t)$ も正規分布 $N(m_t, \sigma_t^2)$ であって，(m_t) と (σ_t^2) は次の方程式を満たす。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

(2.3) $\quad dm_t = u_t\,dt + \sigma_t^2\,d\nu_t, \quad m(0)=m$

(2.4) $\quad \dfrac{d\sigma_t^2}{dt} = 1 - (\sigma_t^2)^2, \quad \sigma_0^2 = \sigma^2$

注意 1. (2.3)における(ν_t)は

(2.5) $\begin{cases} d\nu_t = d\xi_t - E[\theta_t \mid \mathcal{F}_t]\,dt, & 0<t\leq T \\ \nu_0 = 0 \end{cases}$

によって与えられる，$(\mathcal{F}_t)$に適合したn次元ブラウン運動であって，さらに$t>s$ならば$\nu_t-\nu_s$と$\mathcal{F}_s$とは独立である。この(ν_t)は屢々 " innovation process " とも呼ばれる。

注意 2. 常微分方程式(2.4)はリッカチの方程式と呼ばれ，良く知られているように一意解が存在する。これをもめると

(2.6) $\begin{cases} \sigma_t^2 = C_2(t)\,I_n \\ C_2(t) = \dfrac{(1+C_1)e^{2t} - (1-C_1)}{(1+C_1)e^{2t} + (1-C_1)} \end{cases}$

となる。明らかに$C_2(t)>0$であって有界である。またσ_t^2はnon-random な函数で初期値のみに関係しu_tとは無関係であることがわかる。

このことから次のことがわかる。

補助定理 2.2 式(1.2)で与えられた評価函数$J(u)$は次のように書ける。

(2.7) $\quad J(u) = E^u\left[\int_0^T f(t, \|m_t\|)\,dt\right]$

ここにfは$[0,T]\times R^1$で定義された有界な正の，xについては単調増加な函数である。

証明は，$J(u) = E^u\left[\int_0^T \omega(\theta_t)\,dt\right] = E^u\left[\int_0^T E^u[\omega(\theta_t)\mid\mathcal{F}_t]\,dt\right]$
だから，これに$P(\theta_t\in\cdot\mid\mathcal{F}_t)$が正規分布$N(m_t, \sigma_t^2)$であることを

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

用いて変形すれば容易に(2.7)の形になることがわかる。

これら2つの補助定理によって，最初に考えた問題の最適制御変数をもとめることは，以下の様な完全に観測可能な制御問題を考えれば十分である。すなわち，その制御系が

$$(2.8)\quad \begin{cases} dx_t = u_t\,dt + b_t\,d\beta_t \\ x_0 = x \qquad (x \text{ は } n \text{ 次ベクトル}) \end{cases}$$

で与えられている。ここで b_t は non-random な n 次行列で一様に正定値，(β_t) は n 次元ブラウン運動，そして (u_t) は $\sigma(u_s, s\leq t) \vee \sigma(\beta_s, s\leq t)$ と $\sigma(\beta_{t''}-\beta_{t'}, t\leq t'<t'')$ とが独立であって $\|u_t\|\leq u_0$ を満たす様な函数とする。そして評価函数 $\hat{J}(u)$；

$$(2.9)\qquad \hat{J}(u) = E^u\left[\int_0^T f(t, \|x_t\|)\,dt\right]$$

ただし $f(t,x)$ は (2.7) で与えられたものと同様である，を与えたとき，すぐ上に述べた様な性質を持つ対 (u,β) の中から $\hat{J}(u)$ を最小にするものをもとめれば良い。しかしながら後者の問題に関しては既に知られた結果がある。

補助定理2.3（[3]）状態方程式と評価函数がそれぞれ(2.8)と(2.9)によって与えられるとき，(2.9)を最小にするような対 (u,β) が存在して，この u は次の様に書ける；

$$(2.10)\qquad u_t = U(x_t)$$

ただし，$U(x)$ は (1.5) で与えた函数，(x_t) は n 次元確率微分方程式

$$(2.11)\qquad dx_t = U(x_t)\,dt + b_t\,d\beta_t\ ,\quad x_0 = x$$

の一意解である。

従って我々の最初の問題において，最適制御変数は $u_t = U(m_t)$ となることがわかる。勿論この (m_t) は θ_t の $(\mathcal{F}_t)$ 条件付分布 (2.3) である。しかしながらこの u_t に対応する最適解の存在す

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

ることを示さなければならない。そのことを保証するのが次の補助定理である。

補助定理 2.4　(β_t) を n 次元ブラウン運動，$U(x)$ を (1.5) 式で与えられる函数，Q_t を non-random で有界な非負の n 次行列，そして R_t をやはり non-random で有界な正定値 n 次行列とする。このとき，確率微分方程式

$$(2.12)\quad \begin{cases} dx_t = U(x_t)\,dt - Q_t x_t\,dt + R_t\,d\beta_t \\ x_0 = x \qquad (x\text{ は } n \text{ 次ベクトル}) \end{cases}$$

は"一意的な強い解"を持つ。

証明　Yamada-Watanabe [7] に依れば，確率微分方程式の解が存在して，道ごとの一意性が成立てばそれは"一意的な強い解"を持つことが知られている。方程式 (2.12) の場合，解の存在は Girsanov の定理を適用すれば容易に示されることだから，道ごとの一意性が成立つことのみを示す。まず同じブラウン運動と同じ初期条件を持つ (2.12) の2つの解を (X_t), (Y_t) とする。次にその差を取れば

$$X_t - Y_t = \int_0^t \{U(X_s) - U(Y_s)\}\,ds - \int_0^t Q_s(X_s - Y_s)\,ds$$

となる。ここで $\Delta_t = X_t - Y_t$ （又は $\Delta_t^i = X_t^i - Y_t^i$, $1 \le i \le n$）とおく。両辺を t について微分すれば

$$\begin{cases} \dfrac{d\Delta_t^i}{dt} = U^i(X_t) - U^i(Y_t) - \displaystyle\sum_{j=1}^n Q_t^{ij}\Delta_t^j, & 1 \le i \le n \\ \Delta_0^i = 0 \end{cases}$$

となる。更に両辺に Δ_t^i をかけて i について 1 から n まで加えると

$$\sum_{i=1}^n \Delta_t^i \frac{d\Delta_t^i}{dt} = \sum_{i=1}^n \Delta_t^i \cdot (U^i(X_t) - U^i(Y_t)) - \sum_{i,j=1}^n Q_t^{ij}\Delta_t^i\Delta_t^j \; .$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

ここで仮定よりQ_tは非負だから右辺第2項≤ 0。従って右辺第1項≤ 0を示せば十分である。$U^i(x) = -u_0 x^i/\|x\|$ $(x \neq 0)$ $(x = 0 \Rightarrow U(x) = 0)$だからこれを代入すると,

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_t^i (U^i(X_t) - U^i(Y_t)) = -u_0 \sum_{i=1}^{n} (X_t^i - Y_t^i) \left(\frac{X_t^i}{\|X_t\|} - \frac{Y_t^i}{\|Y_t\|} \right)$$

$$= -u_0 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{(X_t^i)^2}{\|X_t\|} - \frac{X_t^i Y_t^i}{\|Y_t\|} - \frac{X_t^i Y_t^i}{\|X_t\|} + \frac{(Y_t^i)^2}{\|Y_t\|} \right\}$$

$$= -u_0 \left\{ \|X_t\| + \|Y_t\| - \left(\frac{1}{\|X_t\|} + \frac{1}{\|Y_t\|} \right) \sum_{i=1}^{n} X_t^i Y_t^i \right\}。$$

然るに Schwarz の不等式 $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ によって

$\{\quad\} \geq 0$ だから結局右辺≤ 0となる。

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} \Delta_t^i \frac{d\Delta_t^i}{dt} \leq 0$$

このことは $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} (\Delta_t^i)^2 \leq 0$ に等しい。また$\Delta_0^i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$だから容易に$\Delta_t^i = 0$, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq t \leq T$, がわかる。

(証明終り)

定理1.2の証明

I. 最初に次の様なn次元確率微分方程式を考えることから始めよう。

$$(2.13) \quad \begin{cases} dx_t = U(x_t)\,dt - \sigma_t^2 x_t\,dt + \sigma_t^2\,d\zeta_t \\ x_0 = m \end{cases}$$

ここで(ζ_t)はn次元ブラウン運動, $U(x)$は(1.5)の函数, σ_t^2は(2.2)(或いは(2.6))の函数とし, mはn次ベクトルとする。σ_t^2は補助定理2.1の注意2によって non-random で有界な正のn次行列だから,補助定理2.4によってこの方程式の

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

一意的な強い解が存在する。すなわち以下の3条件を満たす $R^n \times C^n$ 上の函数 $F(x, w)$ が唯一つ存在する。([7])

1. (x, w) の函数として可測,
2. 各 x を止める毎に, 各 $t \geq 0$ で $(C^n, \mathcal{B}_t^n) \to (C^n, \mathcal{B}_t^n)$ の写像として可測,
3. 任意のブラウン運動 (ζ_t) に対して $x(t) = F(m, \zeta)(t)$ とおけばこれは (2.13) の解である。

II. $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ を確率空間とし (ζ_t) をその上の n 次元ブラウン運動とする。次に (θ_t) をその初期分布が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ である様な, (ζ_t) と独立な n 次元ブラウン運動とする。$\mathcal{G}_t$ を $\{(\theta_t, \zeta_t), \mathcal{G}_t, Q\}$ が $2n$ 次元ブラウン運動となる様な σ-加法族の増加列とする。この (ζ_t) と (θ_t) とを用いて $2n$ 次元確率過程 (W, w) を以下の様に定めよう。

$$(2.14) \begin{cases} dW_t = d\theta_t - U(x_t)\, dt, & W_0 = 0 \\ dw_t = d\zeta_t - \theta_t\, dt, & w_0 = 0 \end{cases}$$

ここに (x_t) は I. で得られた (2.13) の解を表わす。そうすると Girsanov の定理から (W_t, w_t) は確率測度 $dP = \varphi_t|_{\mathcal{G}_t} dQ$ に関して $2n$ 次元のブラウン運動となることがわかる。ここで φ_t は

$$\varphi_t = \exp\left\{ \int_0^t U(x_s)\, d\theta_s + \int_0^t \theta_s\, d\zeta_s - \frac{1}{2}\int_0^t \{U(x_s)^2 + \theta_s^2\}\, ds \right\}$$

によって定義される, $(\mathcal{G}_t, Q)$ に関する一様可積分な martingale である。(2.14) 式を書き換えると,

$$(2.15) \begin{cases} d\theta_t = U(x_t)\, dt + dW_t, & \theta_0 = \theta \\ d\zeta_t = \theta_t\, dt + dw_t, & \zeta_0 = 0 \end{cases} .$$

III. $\mathcal{F}_t = \sigma\{\zeta_s, s \leq t\}$ とし, (2.15) 式の (θ_t) の $(\mathcal{F}_t)$ 条件付平均値 $m_t = E[\theta_t | \mathcal{F}_t]$ に対する filtering equation をもとめれば

$$(2.16) \quad dm_t = U(x_t)\, dt + \sigma_t^2\, d\nu_t, \quad m_0 = m$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

ここに (ν_t) は(2.5)式で与えられたものである。従って(2.16)は次の様にも書ける。

$$(2.17)\quad \begin{cases} dm_t = U(x_t)\,dt + \sigma_t^2\,d\xi_t - \sigma_t^2 m_t\,dt \\ m_0 = m \end{cases}$$

ところがI.において (x_t) は同じ (ξ_t) と同じ初期条件に対する(2.13)の解であるから，x_t と m_t との差を取ってみると

$$x_t - m_t = -\int_0^t \sigma_s^2 (x_s - m_s)\,ds$$

となり，σ_s^2 が有界よりすべての t について $x_t = m_t$ (a.e.)が成立つ。ゆえに(2.15)は(2.18)に等しい。

$$(2.18)\quad \begin{cases} d\theta_t = U(m_t)\,dt + dW_t \\ d\xi_t = \theta_t\,dt + dw_t \end{cases}$$

IV. I〜IIIに依って $u_t = U(m_t)$ が我々が最初に考えた問題の最適制御変数であり，また構成した (θ_t, ξ_t) がそれに対応する最適解となっていることはほとんど明らかである。何故ならば，まず $U(x)$ はその定義より $R^n \to R^n$ なる可測写像であってすべての $x \in R^n$ について $\|U(x)\| \leq u_0$ を満たす。従って $\psi(t, x, w) \equiv U(F(x, w)(t))$ とおくと明らかに $\psi \in \Psi$ であって，ゆえに $u_t \equiv \psi(t, m, \xi)$ とおけば $u \in \mathcal{U}$ である。またIIIで示したことからこれは $U(m_t)$ に等しい。

$u_t = U(m_t)$ が最適であることも次のようにして直ちに知られる。(u', θ', ξ', m') を任意の(許容)制御系とすると，<u>補助定理2.2</u> より，

$$E^{u'}\left[\int_0^T \omega(\theta_t')\,dt\right] = E^{u'}\left[\int_0^T f(t, \|m_t'\|)\,dt\right]$$

同様にして，$(u = U(m_t), \theta, \xi, m)$ に対して

$$E^{u}\left[\int_0^T \omega(\theta_t)\,dt\right] = E^{u}\left[\int_0^T f(t, \|m_t\|)\,dt\right].$$

然るに<u>補助定理2.3</u>より $E^{u}\left[\int_0^T f(t, \|m_t\|)\,dt\right] \leq E^{u'}\left[\int_0^T f(t, \|m_t'\|)\,dt\right.$

だから結局 $E^{u}[\int_0^T w(\theta_t)dt] \leq E^{u'}[\int_0^{T'} w(\theta'_t)dt]$ となる。

（証明終り）

定理1.2の証明から直ちに次の系が成立つ。

系2.5 (θ_t) の $(\mathcal{F}_t)$ 条件付平均値 m_t に対して, $R^n \times C^n \longrightarrow C^n$ なる写像であって強い解の条件1及び2を満たす $F(x,w)$ が存在して, $m_t = F(m,\xi)(t)$ と書けるならばその時 $v(m_t)$ は最適制御変数であり, また (θ_t, ξ_t) は対応する最適解となる。

参考文献

[1] 藤崎正敏；Wiener過程のStochastic Control, 「商大論集」第27巻，第5·6号，昭和51年3月．20～28．

[2] Girsanov, I.V.; On transforming a certain class of stochastic process by absolutely continuous substitution of measures, Theory of Prob. and its Appl. 5 (1960) 285～301,

[3] Ikeda, N and S, Watanabe; A comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications, preprint.

[4] Liptzer, R.S; On the control of a Wiener process by incomplete data, Kibernetica (Kiev) 1965, No.6 81～84

[5] Shiryaev, A.N.: Statistics of diffusion type processes, Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory, Kyoto, 8 (1972) vol.1, 69～87

[6] Wonham, W.M.; On the separation theorem of stochastic control, SIAM.J. Control. vol 6. No 2 (1968) 312～326.

[7] Yamada, T. and S.Watanabe; On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. Vol 11. No.1 (1971) 155～167.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

種競合のモデルとその性質

伊藤栄明

-1- モデル

モデルI

モデルIは次を満すとする

1) $0, 1, 2, \ldots, 2s$ の $2s+1$ 種があり それぞれの粒子数は $n_0, n_1, \ldots, n_{2s}$ である。

2) 二体衝突が単位時間に1回おきるものとする。

3) 衝突する2粒子は等確率でえらばれるものとする。

4) $i-j \equiv 0, 1, \ldots, s \pmod{2s+1}$ であれば衝突により 種 i の1粒子と種 j の1粒子は種 i の2粒子になる。

モデルII

モデルIにおいて2)を次の2)′でおきかえたものをモデルIIとする。

2)′ それぞれの粒子は dt 時間に平均して dt 回衝突する。

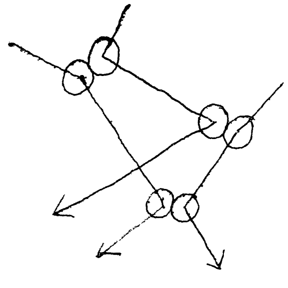
モデルIII

モデルIにおいて2), 3)を次の2)″, 3)″でおきかえたものをモデルIIIとする。

2)″ それぞれの粒子は dt 時間に平均して dt 回三体衝突する。三体衝突は図にあるようにあいついでおきる3つの二体衝突よりなる。

3)″ 三体衝突する3粒子は等確率でえらばれるものとする。

上記三つのモデルにおいて 粒子の総数は時間によらず一定である。



Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

-2- 衝突代数と推競合の方程式

衝突代数 S^{2s+1}

「衝突代数 S^{2s+1} は次の 1), 2), 3) により定義される。

1) S^{2s+1} は $E_0, E_1, \cdots, E_{2s}$ を基底とする線型空間である。

2) 基底の間の積は次のように与えられる。

$E_i \circ E_j = E_j \circ E_i$ for every i, j

$E_i \circ E_j = E_i$ if $i-j \equiv 0, 1, \cdots, s \pmod{2s+1}$。

3) 2つの要素 x, y の積は

$x \circ y = \sum_{i,j=0}^{2s} x_i y_j E_i \circ E_j$ ただし $x = \sum_{i=0}^{2s} x_i E_i$, $y = \sum_{j=0}^{2s} y_j E_j$。」

モデルIIを考える。n も十分大とし $n_i(t)/n = P_i(t)$ とおく。

$P(t) = \sum_{i=0}^{2s} P_i(t) E_i$ とすると $\frac{d}{dt} P(t) = P(t) \circ P(t) - P(t)$

がみちびかれる。このとき $\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{2s} \log P_i(t) = 0$ となる。

n を十分大と仮定しモデルIIIを考える。この場合

$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) \circ (P(t) \circ P(t)) - P(t)$ がみちびかれる。

「定理1. モデルIIIについて

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{2s} \log P_i(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2s} \Big(\sum_{j=i-s}^{i-1} P_j(t) - \sum_{j=i+1}^{i+s} P_j(t) \Big)^2 \geq 0$$」

$P \circ (P \circ P) - P = P \circ (P \circ P - P) + P \circ P - P$ に注意し S^{2s+1} の性質を使い証明することができる。

「系. モデルIIIにおいて

$\lim_{t \to \infty} P_i(t) = \frac{1}{2s+1}$ が $i = 0, 1, \cdots, 2s$ についてなりたつ。」

衝突代数 A^m

議論をより一般的にする。衝突代数 A^m を次のように定義する。

「A^m は次の 1), 2), 3) により定義される。

1) A^m は $E_1, E_2, \cdots, E_m$ を基底とする線型空間である。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

2) 基底の間の積は次のように与えられる。

$E_i \circ E_j = (\frac{1}{2} + a_{ij})E_i + (\frac{1}{2} + a_{ji})E_j$ ただし $a_{ij} = -a_{ji}$,
$-\frac{1}{2} \leq a_{ij} \leq \frac{1}{2}$。

3) 2つの要素 x, y の積は $x \circ y = \sum_{i,j=1}^{m} x_i y_j E_i \circ E_j$
ただし $x = \sum_{i=1}^{m} x_i E_i$, $y = \sum_{j=1}^{m} y_j E_j$。

今 $q \circ q - q = 0$, $q_i > 0$ $i = 1, 2, \cdots, m$ が成りたつとする。$P(t) = \sum_{i=1}^{m} P_i(t) E_i$ とおく。$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) \circ P(t) - P(t)$ を考えると
$$\sum_{i=1}^{m} q_i \log P_i(t) = 0$$
がなりたつ。

$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) \circ (P(t) \circ P(t)) - P(t)$ について次の定理を得る。

「定理2
$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{m} q_i \log P_i(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} q_i \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} P_j(t)\Big)^2 \geq 0。」$$

「系 $\lim_{t \to \infty} P_i(t) = q_i$ が $i = 1, 2, \cdots, m$ についてなりたつ。」

−3− トーナメントと種競合の方程式

tournament $[T]$ は m 個の node よりなり node i と node j は向きづけられた辺 $\vec{ij}$ または $\vec{ji}$ によりつながっている。$\vec{ji}$ が $[T]$ にあるとき i は j より強いと言い $i > j$ と書く。
tournament $[T]$ と $[T']$ の間に強弱関係を保つ一対一の対応があれば2つの tournament は同型であり $[T] \simeq [T']$ と書く。

次を満す tournament を $[T_r]$ と書く。
i) $2r+1$ 個の node $\{0, 1, \cdots, 2r\} = T_r$ を持つ。
ii) $i - j \equiv 1, 2, \cdots, r \pmod{2r+1}$ であれば $i > j$ である。

$X \subset T_r$ を考える。$i, j \in X$ について $i - j \equiv 1, 2, \cdots, r \pmod{2r+1}$ のとき $i > j$ とするような tournament を $[X]$ と書く。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$V, W \subset T_s$ について同様にさだめられた tournament を $[V]$, $[W]$ と書く。

$[T_s]$ の node i, j について

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \succ j \\ 0 & \text{if } i = j \\ -1 & \text{if } i \prec j \end{cases}$$ とさだめる。

$j \cap W = \phi$ なる j, W について $\sum_{i \in W} a_{ij} < 0$ なるとき $j \succ [W]$ と書く。$\sum_{i \in W} a_{ij} > 0$ のとき $j \prec [W]$ と書く。

モデルIIにおいてnを十分大とすると次の定理を得る。

「定理3 $T_{s,r} = \{X \mid [T_r] \simeq [X],\ X \subset T_s\}$ とし，すべての $i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, 2s$ について $P_i(t) > 0$ とすると $r = 0, 1, 2, \cdots\cdots, s$ について

$$\sum_{X \in T_{s,r}} \prod_{i \in X} P_i(t) = C(r)$$ がなりたつ。ただし $C(r)$ は時間によらない量である。」

証明には次の性質が基本的である。

「$[X] \simeq [T_r]$, $[X] \prec i$ なるとき，$X' \cup i' = X \cup i$, $[X'] \simeq [T_r]$, $i' \prec [X']$ なる X', i' がただひとつ存在する。」

tournament に関し次の定理を証明することができる。

「定理4. $\mathrm{Max}\{r \mid [T_r] \simeq [X],\ X \subset V\} = M$ とすると次を満すWがただひとつある。$W \subset V$, $[W] \simeq [T_M]$, すべての $v_i \in V \setminus W$ について $v_i \prec [W]$。」

これを種類会の方程式に応用する。

「定理5 $\frac{d}{dt} P_i(t) = P_i(t) \sum_{i \in V} a_{ij} P_j(t)$, $P_i(t) > 0$, がすべての $i \in V$ についてなりたつとする。そのとき

$$\frac{d}{dt} \prod_{i \in W} P_i(t) = \left(\prod_{i \in W} P_i(t)\right)\left(\sum_{j \in V \setminus W} P_j(t)\right) \geq 0,\quad \frac{d}{dt} \sum_{i \in V} P_i(t) = 0$$

がなりたつ。」

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

「系 $i\in W$ なる種は存在をつづけ $i\in V\setminus W$ なる種はなくなる。」

-4- マルコフ連鎖と種競合のモデル

モデルIを考える。次のベクトルはそれぞれの種の粒子数をあらわす。

$\vec{n}=(n_0, n_1, \cdots\cdots, n_{2s})$。

$\vec{n}_{ij}$ は $i\neq j$ について定義されるベクトルであり $\vec{n}$ の i 成分と j 成分がそれぞれ n_i+a_{ij} と n_j+a_{ji} でおきかえられたものとする。

モデルIより次のように定義されるマルコフ連鎖がみちびかれる。

$$P(\vec{X}(u+1)=\vec{n}_{ij}\mid\vec{X}(u)=\vec{n})=2\frac{n_i n_j}{n(n-1)}$$

$$P(\vec{X}(u+1)=\vec{n}\mid\vec{X}(u)=\vec{n})=\sum_{j=0}^{2s}\frac{n_j(n_j-1)}{n(n-1)}$$

「定理6 F_u を $\vec{X}(0), \vec{X}(1), \cdots\cdots, \vec{X}(u)$ により生成される σ-代数とする。

$$W_{s,r}(u)=\left(1-2\frac{{}_{2r+1}C_2}{n(n-1)}\right)^{-u}\sum_{V\in T_{s,r}}\prod_{i\in V}X_i(u)$$

とおくと $r=1,2,\cdots,s$ について $\{W_{s,r}(u), F_u, u=0,1,2,\cdots\cdots\}$ はマルチンゲールである」

$E_s(V)=\{(n_0, n_1, \cdots\cdots, n_{2s})\mid n_i$ は非負の整数, $\sum_{i=0}^{2s}n_i=n$, $i\in V$ のとき $n_i>0$, $i\notin V$ のとき $n_i=0\}$ とする。

$$E_{s,r}=\bigcup_{V\in T_{s,r}}E_s(V),\quad H_{s,r}(\vec{y})=\sum_{V\in T_{s,r}}\prod_{i\in V}y_i,$$

$$n(r)=\left(\frac{1}{N_{2r}}\sum_{E_{r,r}}n_0 n_1\cdots n_{2r}\right)^{-1}$$

ここに N_{2r} は $E_{r,r}$ の要素の数とする。

「定理7 $r=1,2,\cdots,s$ について

$$\lim_{u\to\infty}\frac{P(\vec{X}(u)\in E_{s,r}\mid\vec{X}(0)=\vec{y})}{H_{s,r}(\vec{y})\,n(r)\left(1-2\frac{{}_{2r+1}C_2}{n(n-1)}\right)^{u}}=1$$

。」

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

証明には マルコフ連鎖の推移行列の2番目の固有値および それに対応する固有ベクトルの性質を使う。さらに定理4および定理6を応用する。

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

クラスLの分布について

佐藤健一

§1. 定義

$\mathbb{R}^1$の上の確率分布 μ がクラスLに属するとは，$X_1, X_2, \cdots$ という独立確率変数列（同分布は仮定しない）と定数 $b_n > 0$ と a_n を適当に選ぶと，

（i）Z_n を

$$(1) \qquad Z_n = \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} X_k - a_n$$

で定義するとき Z_n の分布が，$n \to \infty$ のとき，μ に弱収束．

（ii）$1 \leq k \leq n$ に対し $X_{nk} = \frac{X_k}{b_n}$ とおくとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$(2) \qquad \max_{1 \leq k \leq n} P(|X_{nk}| > \varepsilon) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

の2つが成り立つことである．クラスLに属することを，L分布であるとも，loi-limite であるとも，self-decomposable であるともいう．クラスLに属する分布について現在知られていること，その文献などを紹介することにする．

上の定義は，L分布が安定分布の自然な拡張であり，無限分解可能分布の中の1つの自然なクラスであることを示している．なぜならば，μ が安定分布（ここでは Gnedenko-Kolmogorov [6], Loève [15] などの用語をつかう．Lévy [14] の用語では loi quasi-stable）であるとは $X_1, X_2, \cdots$ という独立同分布な確率変数列と $b_n > 0$ と a_n が存在して（i）が成り立つことであり（このとき（ii）は自動的にみたされる），また，μ が無限分解可能分布であるとは，X_{nk}（$k = 1, 2, \cdots, r_n$；$n = 1, 2, \cdots$）という確率変数と数列 a_n が存在して，n を固定すると $X_{n1}, \cdots, X_{nr_n}$ が独立，$\sum_{k=1}^{r_n} X_{nk} - a_n$ の分布が μ に弱収束，しかも，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$\max_{1 \leq k \leq r_n} P(|X_{nk}| > \varepsilon) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つということであるから．

なお，L分布の定義は，(ii)の代りに，$n \to \infty$ のとき $b_n \to \infty$，$b_{n+1}/b_n \to 1$ としても同値であり，また $b_n = n$ としても同値である．

§2. 特性関数

その特性関数を特徴づけるという意味でL分布をすべて求めるということは，既に1930年代に Lévy [14] において，ヒンチンの提起した問題として扱われ，完全に解決されている．それは，次の定理である．

<u>定理1.</u> μ を $\mathbb{R}^1$ の上の確率分布，$\varphi(t)$ をその特性関数とするとき，次の5つは互いに同値である．

(i) μ はL分布である．

(ii) 任意の $0<c<1$ に対し，ある分布の特性関数 $\psi_c(t)$ が存在し $\varphi(t) = \varphi(ct)\psi_c(t)$ とかける．

(iii) μ は無限分解可能で，その Lévy 測度を $\nu(du)$ とするとき $\int_{[e^x, \infty)} \nu(du)$，$\int_{(-\infty, -e^{-x}]} \nu(du)$ が共に $x \in \mathbb{R}^1$ の凸関数．

(iv) $(-\infty, 0)$ で非減少，$(0, \infty)$ で非増加の関数 $k(u)$ が存在して

$$\varphi(t) = \exp\left[i\gamma t - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \int_{\mathbb{R}_0} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{k(u)}{|u|} du \right] \tag{3}$$

と書ける．ただし，$\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$，$\gamma$ は実数，$\sigma^2 \geq 0$，$k(u) \geq 0$，$\int_{\mathbb{R}_0} \frac{|u|}{1+u^2} k(u) du < \infty$（すなわち，$\mu$ は無限分解可能でその Lévy 測度が $\frac{k(u)}{|u|} du$）．

(v) $\mathbb{R}_0$ の上の有限な測度 $\tilde{\nu}$ が存在して

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

(4)
$$\varphi(t)=\exp\left[i\gamma t-\frac{\sigma^2}{2}t^2+\int_{\mathbb{R}_0}\left(\int_0^{tu}\frac{e^{iv}-1}{v}\,dv-it\arctan u\right)\frac{1}{\log(1+u^2)}\,\check{\nu}(du)\right]$$
と書ける．ただし γ は実数，$\sigma^2 \geqq 0$.

(i)—(iv) の同値性の証明は Lévy [14] のほか Gnedenko-Kolmogorov [6], Loève [15], Feller [2], Petrov [18], Lukacs [16] などに見ることができる．これらでは (iv) は Lévy 測度の左右の微分を使って書いてあるが，凸関数は絶対連続でその密度が非減少であることに注意すれば，上の形になる．(v) の形は Kubik [12], [13] に関連しており，Urbanik [22] によって与えられた．表現 (3) も表現 (4) も μ から一意的である（$k(u)$ は Lebesgue 測度 0 の u における値を除いて）．(3) の γ, σ^2 と (4) の γ, σ^2 とは同じものである．なお (ii) で特徴づけられることが self-decomposable といわれる理由である．

§3. 絶対連続性

1点に集中している分布を，退化しているという．

<u>定理2</u>. 退化した場合を除き，L分布は絶対連続である．

Mathematical Reviews (Vol. 30, #1537) によるとこの証明は Hsu [8] が最初とのことであるが，私は見ていない．Zolotarev [34] と Fisz-Varadarajan [5] は，より一般に，Lévy 測度の絶対連続部分の全測度が ∞ であるような無限分解可能分布は絶対連続であるという形で，これを示した．もっと弱く，退化していないL分布が連続であることは，Fisz [3] が注意したように，Hartman-Wintner [7], Blum-Rosenblatt [1] の定理（Lévy 測度の全測度が ∞ であるような無限分解可能分布は連続）から明かである．これと §5 で述べる山里の結果（単峰性）とからの系としても，定理2がいえる（山里の定理3の証明には絶対連続性を用いない）．
さらに，退化していないL分布の密度関数は，高々1点を除

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

いて連続であるようにとれる(Zolotarev [34] など). 以下, μ が退化していないL分布のとき, μ の密度関数のこのような version を $f(x)$ で表わす. Ibragimov-Linnik [9] や Lukacs [16] にあるように, 安定分布では $f(x)$ のかなり詳しい性質(漸近展開, 解析関数による表現など)が知られているが, 一般のL分布ではあまり多くのことは知られていない. 現在知られていることで最も著しいのは, 山里の示した単峰性(§5)と, Wolfe の示したなめらかさ(§6)である.

§4. 例

密度関数 $f(x)$ の explicit な形が分っているようなL分布の例は少いが, 次のようなものがよく知られている.

例1. Γ分布.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqq 0\end{cases}\tag{5}$$

ただし $\lambda>0$ である. このときは

$$\varphi(t)=(1-it)^{-\lambda}=\exp\left[\lambda\int_0^\infty(e^{itu}-1)\frac{e^{-u}}{u}du\right]$$

したがって

$$k(u)=\begin{cases}\lambda e^{-u}, & u>0\\ 0, & u<0\end{cases}\tag{6}$$

である(Gnedenko-Kolmogorov [6], p. 86).

例2. 指数 1/2 の片側安定分布.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2x}}, & x>0\\ 0, & x\leqq 0\end{cases}$$

$$\varphi(t)=\exp\left[-|t|^{\frac{1}{2}}(1+i\,\mathrm{sgn}\,t)\right]=\exp\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty(e^{itu}-1)\frac{du}{u^{3/2}}\right].$$

例3. Cauchy 分布.

$$f(x)=\frac{c}{\pi(c^2+x^2)}$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$\varphi(t)=e^{-c|t|}=\exp\left[\frac{c}{\pi}\int_{\mathbb{R}_0}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{du}{u^2}\right]$$

ただし $c>0$.

例4. Gauss 分布.

なお，指数 α $(0<\alpha<2)$ の安定分布では

$$k(u)=\begin{cases} c_1 u^{-\alpha}, & u>0 \\ c_2 |u|^{-\alpha}, & u<0 \end{cases}$$

ただし $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$ である.

§5. 単峰性

単峰性 (unimodality) に関しては，最近，山里 [32] が決定的な結果を与えた．すなわち，

定理3. すべての L 分布は単峰である.

このことは，誤った証明で Gnedenko-Kolmogorov [6] の原著 (1949) に述べられて以来，いくつかの特別な場合が示されたが一般には分らず，「L 分布は単峰とは限らない」と主張して書かれた論文も間違っていたなど，いろいろの経過があった．安定分布の場合でも，単峰の証明が Ibragimov-Linnik の本[9]や Lukacs の本 [16] に紹介してあるがそれも論法が間違っていることが最近指摘された．それらについては，この Seminar on Probability の中に山里が書いているので，ここでは文献をあげない．単峰の定義もそれを見て欲しい．

単峰な無限分解可能分布が L 分布以外にもあることはもちろんである．たとえば，Medgyessy [17] の示したことであるが，μ の特性関数が (3) の形で $k(u)=k(-u)$ の場合には，$\frac{k(u)}{u}$ が $(0,\infty)$ で非増加ならば ($k(u)$ が非増加でなくても) 単峰である．また，片側に集中している無限分解可能な μ の場合の例としては，Wolfe [28] が次のことを注意した．特性関数が

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$\varphi(t) = \exp\left[\lambda \int_0^\infty (e^{itu}-1)e^{-u}du\right]$$

の場合，$0<\lambda\leq 2$ ならば μ は単峰，$\lambda>2$ ならば μ は単峰でない．2つの単峰分布の convolution は必ずしも単峰にならないが，この Wolfe の注意はその例をも与えている（Chung の例が [6] p. 254 にあり，他の例が Feller [2] p. 167–168 にある）．

注意しなければならないが，unimodal といっても，モードは1つとは限らない．たとえば，μ の密度関数が $-\infty<x\leq a$ で非減少，$a\leq x\leq b$ で平坦，$b\leq x<\infty$ で非増加であるならば，μ は単峰で，$[a,b]$ のどの点もモードである．そこで，単峰よりも強い次の定義を与える．

<u>定義</u>. 分布 μ が真に単峰（strictly unimodal）であるとは，$b=\inf\{x:\ \mu(-\infty,x]>0\}$，$c=\sup\{x:\ \mu(-\infty,x]<1\}$ とするとき，ある a が存在して，μ が1点 a 以外では絶対連続で密度関数 $f(x)$ が (b,a) で真に（strictly）増加，(a,c) で真に減少であることである．

真に単峰ならば，モードは上の定義における a に限る．佐藤–山里 [20] は，L分布が真に単峰であるかどうかを調べて次の2つの定理を証明した．

<u>定理 4</u>. μ をL分布とする．次の (7), (8) の2つの場合を除き，μ は真に単峰である．

(7) $\begin{cases} \sigma^2=0 \text{ で，かつ } (-\infty,0) \text{ で } k(u)=0. \text{ ある } a>0 \text{ が存在} \\ \text{して } (0,a) \text{ で } k(u)=1. \end{cases}$

(8) $\begin{cases} \sigma^2=0 \text{ で，かつ } (0,\infty) \text{ で } k(u)=0. \text{ ある } a<0 \text{ が存在} \\ \text{して } (a,0) \text{ で } k(u)=1. \end{cases}$

(7), (8) の場合，μ は真に単峰ではない．

退化していない片側L分布 μ は，平行移動と折り返しにより特性関数が

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

(9) $$\varphi(t) = \exp\left[\int_0^\infty (e^{itu}-1)\frac{k(u)}{u}du\right]$$

の場合になる．ただし $k(u)$ は非負，非増加，$k(0+)>0$，$\int_0^1 k(u)du + \int_1^\infty \frac{k(u)}{u}du < \infty$ である．このとき μ の support は $[0,\infty)$ である．

定理5．μ が片側L分布，その特性関数が (9) とする．

(i) $k(0+) < 1$.

(ii) $1 < k(0+) \leqslant \infty$.

(iii) $k(0+)=1$ で，すべての $u>0$ に対し $k(u)<1$.

(iv) ある $a>0$ が存在して $(0,a)$ で $k(u)=1$，(a,∞) で $k(u)<1$.

の4つの場合に分ける．定理3，4により (i)，(ii)，(iii) では μ は真に単峰，(iv) では真に単峰ではない単峰であるが，さらに，

(i) ではモードは0で，$f(0+)=\infty$.

(ii) ではモードは正で，$f(0+)=0$.

(iii) ではモードは0で，$f(0+)$ は有限のことも ∞ のこともある．

(iv) では $f(x)$ は $(0,a]$ で平坦で，$[a,\infty)$ では真に減少である．

(i)―(iv) のいずれの場合にも，$f(x)$ は $(0,\infty)$ で連続で

(10) $$f(0+) = \exp\left[\int_0^\infty \frac{e^{-u}-k(u)}{u}du\right]$$

である．

Γ分布（例1）は $k(0+)<\infty$ で (i)，(ii)，(iii) の例を与えており，例2は $k(0+)=\infty$ の例を与えている．上の定理5の (ii) の場合，モードの位置については Wolfe [30]，佐藤-山里 [20]，Johnson-Rogers [10] によって次のことが分る．

定理6．μ の特性関数が (9) で，$1<k(0+)\leqslant\infty$ とする．μ のモードを a，平均を m とし $b=\sup\{u: k(u)\geqslant 1\}$ とする（$0<a<\infty$，$0<m\leqslant\infty$，$0<b<\infty$）．このとき

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$b < a < m$ である．また，v を μ の分散とすると，$m - \sqrt{3v} \leqslant a$ である．さらに $c = \sup\{u : k(u) > 0\} < \infty$ ならば，$m - c < a$ である．

山里 [31] とその拡張として，Tauber 型定理を用いて，$k(0+) < \infty$ のとき $f(x)$ の $x \downarrow 0$ における挙動をもっと詳しく調べることもできる．すなわち

定理7．特性関数が (9) で $k(0+) = \lambda < \infty$ とする．このとき

$$f(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} \exp\left[\int_x^\infty \frac{\lambda e^{-u} - k(u)}{u} du\right], \qquad (x \downarrow 0)$$

である．特に $\int_{0+}^1 \frac{\lambda - k(u)}{u} < \infty$ ならば，$f(x) \sim \text{const}\ x^{\lambda-1}$ となる．

なお，$k(0+) = \infty$ の場合にも，ある程度の結果が得られている．

定理4，5（および6の大部分）を示すときに使うのは，$f(x)$ のみたす次のような等式である（佐藤-山里 [20]）．片側の無限分解可能分布（L分布に限らず一般の）では類似の式が Steutel [21] に示されている．次の定理における仮定の下で $f(x)$ が $\mathbb{R}^1$ 上で C^1 であることは，§6 で述べる．

定理8．μ をL分布で $\sigma^2 > 0$ または $k(0+) + k(0-) > 2$ とする．このときすべての $x \in \mathbb{R}^1$ において

$$(11) \qquad (x - \gamma_1) f(x) - \int_{|y| \leqslant 1} (f(x-y) - f(x))(\operatorname{sgn} y) k(y) dy - \int_{|y| > 1} f(x-y)(\operatorname{sgn} y) k(y) dy + \sigma^2 f'(x) = 0$$

ただし，$\gamma_1 = \gamma + \int_{|u| \leqslant 1} (\operatorname{sgn} u) \frac{u^2 k(u)}{1+u^2} dy - \int_{|u| > 1} (\operatorname{sgn} u) \frac{k(u)}{1+u^2} du$ である．

山里 [32] による定理3の証明では，ある種のL分布に対し $f(x)$ の log がある部分で凹になることが重要である．特に次のことがいえる．

定理9. μ をL分布で $\sigma^2=0$, $(-\infty,0)$ で $k(u)=0$, $k(0+)>1$ とする. a を μ のモード, $b=\inf\{x:\mu(-\infty,x]>0\}$ とする. このとき, $(b,a]$ において $\log f(x)$ が凹である.

§6. なめらかさ

μ をL分布とし, その密度関数のなめらかさなどについて知られていることをまとめておく. $\sigma^2>0$ すなわち μ にGauss部分のあるときには, 次のことが簡単にわかる(これはL分布に限らない).

定理10. $\sigma^2>0$ ならば $f(x)$ は複素平面上の整関数に拡張できる.

Gauss部分をもたない無限分解可能分布では, おおむね, Lévy測度の0の近傍における様子から μ のなめらかさが決まる. 特にL分布では $k(0+)+k(0-)$ の値が決定的である. $\sigma^2=0$ で $k(0+)+k(0-)<\infty$ のL分布は, 平行移動により特性関数が

(12)
$$\varphi(t)=\exp\left[\int_{\mathbb{R}_0}(e^{itu}-1)\frac{k(u)}{|u|}du\right]$$

の形になる. これに対する次の定理は, Zolotarev [34] の結果を強めて Wolfe [24] の得た著しい結果である. 以下, f が C^n のとき, その n 階導関数を $f^{(n)}$ で表わす. C^0 であるとは連続であることとし, $f^{(0)}=f$ とする. また, $f^{(-1)}$ は μ の分布関数を表わすとする.

定理11. μ の特性関数が(12)であるとし, 非負の整数 p を

(13)
$$p<k(0+)+k(0-)\leqq p+1$$

で定める. このとき

(i) $p\geqq 1$ ならば, f は $\mathbb{R}^1$ で C^{p-1} である.

以下 $p\geqq 0$ とする.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

(ii) f は $\mathbb{R}^1$ で C^p ではない.

(iii) $f^{(p-1)}$ は $\mathbb{R}^1$ で絶対連続で, その Radon-Nikodym 導関数を $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ で有限値, 連続にとれる. これを $f^{(p)}$ で表わす. $f^{(p)}(x)$ は $x=0$ では有限値連続に拡張できない.

(iv) $0 \leqq n \leqq p$ に対し $f^{(n)} \in L^1(-\infty, \infty)$ かつ $f^{(n)}(x) \to 0$ $(|x| \to \infty)$.

(v) $xf(x)$ は $\mathbb{R}^1$ で C^p であり, $0 \leqq n \leqq p$ に対し $(xf(x))^{(n)} \to 0$ $(|x| \to \infty)$ である. ただし $p=0$ のとき $x=0$ では $xf(x)=0$ と定義する.

証明には, (12) で

$$k(u) = \begin{cases} \lambda_1 & b_1 \leqq u < 0 \\ \lambda_2 & 0 < u \leqq b_2 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

の場合の f を詳しく調べ, 一般の (12) のときは, このようなものとかこのようなものの factor を factor として含むことを使って結論を出すのである.

Γ分布 (例1) は, (6) によって丁度 $k(0+)=\lambda$, $k(0-)=0$ の場合であり, 定理 11 の例となっている. Γ分布の場合この定理にのべた性質を f が持つことは (5) から容易に確かめられる.

$k(0+)+k(0-)=\infty$ のときは次のことがいえる.

<u>定理 12.</u> μ の特性関数が (3) で, $\sigma^2=0$, $k(0+)+k(0-)=\infty$ とする. このとき f は $\mathbb{R}^1$ において C^∞ で, 任意の n に対し, $f^{(n)} \in L^1(-\infty, \infty)$ で, $|x| \to \infty$ のとき $f^{(n)}(x)$, $(xf(x))^{(n)}$ は 0 に近ずく.

$f(x)$ が実解析的になる場合として, Zolotarev [34] は次のことを示している.

<u>定理 13.</u> μ の特性関数が (3) で, $\sigma^2=0$,

$\liminf_{x \downarrow 0} x(k(x)+k(x-)) = \lambda^* > 0$ （$\lambda^* = \infty$ でもよい）とする。このとき $f(x)$ は $|\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{2}\lambda^*$ という帯の上の解析関数 $f(z)$ に拡張できる．係数 $\frac{\pi}{2}$ は最良である．

例3の Cauchy 分布では $f(z) = \dfrac{c}{\pi(c^2+z^2)}$ で，丁度 $\lambda^* = \frac{2}{\pi}c$ となる．

山里［33］は片側L分布（9）の $f(x)$ の高階導関数に対し，0の近くでの挙動を調べている．

§7．遠方における状態

前節の定理11，12の一部分は，遠方における $f(x)$ の状態について述べている．μ のモーメントの存在などについては，一般の無限分解可能分布について知られている Kruglov［11］と佐藤［19］の結果をこの場合にあてはめると，次の2つの定理がいえる．

$(1,\infty)$ の上の非負関数 $h(x)$ が劣乗法的（submultiplicative）であるとは，ある a が存在して，任意の $x, y \in (1,\infty)$ に対し $h(x+y) \leq a\, h(x) h(y)$ が成り立つこととする．たとえば，$\alpha>0$ のとき x^α，$e^{\alpha x}$，$(\log x)^\alpha$，$(\log\log x)^\alpha$ などは劣乗法的であり，2つの劣乗法的関数の積は劣乗法的である．

定理 14． $h(x)$ を $(1,\infty)$ の上の劣乗法的な非負，可測関数とする．μ は特性関数（3）をもつとする．このとき，$\int_{(1,\infty)} h(x)\mu(dx) < \infty$ になる必要十分条件は $\int_{(1,\infty)} h(u)\frac{k(u)}{u}du < \infty$ である．

定理 15． μ は特性関数（3）をもつとし，ある $c>0$ に対し，$(0,c)$ で $k(u)>0$，(c,∞) で $k(u)=0$ とする．このとき $x \to \infty$ において

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

$$\frac{\mu(x,\infty)}{x^{-\alpha x}} \longrightarrow \begin{cases} 0 & (0<\alpha<1/c) \\ \infty & (\alpha>1/c) \end{cases}$$

であり，さらに

$$\int_{(1,\infty)} x^{\alpha x}\mu(dx) \begin{cases} <\infty & (0<\alpha<1/c) \\ =\infty & (\alpha>1/c) \end{cases}$$

である．

もちろん，$x\to-\infty$ のときの μ の挙動についても定理14，15と同様のことがいえる．

定理13で $\lambda^*=\infty$ の場合の $f(z)$ の挙動は，その order と type を Zolotarev [34] が調べている．order に関する結果は次の通りである．

定理16． μ の特性関数 (3) において $\sigma^2=0$，$k(u)=k(-u)$（対称性）で，ある $0<\alpha<1$ に対し $0<c_1\leq c_2<\infty$ が存在して，十分小さいすべての $u>0$ に対し $c_1\leq u^{1+\alpha}k(u)\leq c_2$ であるとする（従って定理13により $f(x)$ は複素平面上の整関数 $f(z)$ に拡張できる）．このとき $f(z)$ の order ρ は $\rho=1+\frac{1}{\alpha}$ である．

念のため，f の order が ρ であることの定義をあげておく．

$$\rho=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r;f)}{\log r}, \qquad M(r;f)=\max_{|z|\leq r}|f(z)|.$$

§8．多次元の場合

$a\in\mathbb{R}^d$ の通常のノルムを $|a|$ で表わし，$a,b\in\mathbb{R}^d$ の内積を $\langle a,b\rangle$ で表わす．$\mathbb{R}^d$ $(2\leq d<\infty)$ のクラス L の分布を定義するには，2通りが考えられる．§1 の最初にのべた X_1，X_2，…… を $\mathbb{R}^d$ に値をとる確率変数列とし，Z_n を (1) のように定義するのであるが，その際 $a_n\in\mathbb{R}^d$ とするのは当然であるが，b_n の方を単なる正数とするか，それとも $1/b_n$ の代りに

今度は $d\times d$ の正則行列を考えるかである。後者の方がずっと大きなクラスを与える。Urbanik [23], [24] に従ってこれらを次のように呼ぶ。

定義. $\mathbb{R}^d$ の上の確率分布 μ が self-decomposable であるとは、$X_1, X_2, \cdots$ という $\mathbb{R}^d$ に値をとる独立確率変数列と $b_n>0$ と $a_n\in\mathbb{R}^d$ を適当に選ぶと、(1) で定義した Z_n の分布が μ に弱収束し、しかも $X_{nk}=\frac{X_k}{b_n}$ とおくとき任意の $\varepsilon>0$ に対し (2) が成り立つことである。

これを self-decomposable と呼ぶのは、μ の特性関数が定理1 (ii) の形で (c はやはり $0<c<1$ の実数を動く) 特徴づけられるからである。

定義. $\mathbb{R}^d$ の上の確率分布 μ が Lévy の分布であるとは、$\mathbb{R}^d$ に値をとる独立確率変数列 $X_1, X_2, \cdots$ と $a_n\in\mathbb{R}^d$ と $d\times d$ 正則行列 B_n を適当に選ぶと $Z_n=B_n\sum_{k=1}^n X_k-a_n$ の分布が μ に弱収束し、しかも、$X_{nk}=B_nX_k$ とおくとき任意の $\varepsilon>0$ に対し (2) が成り立つことである。

Urbanik は [23] で self-decomposable な分布の特性関数が (4) に類似した形で表わされることを示し、[24] で Lévy の分布の特徴づけも与えた。それは次の2定理である。前者の証明はあまり難しくないが、後者は多くの考察を必要とする。いずれも、考えているクラスの中である意味での端点を見つけ、Choquet の表現定理を用いる。[27] はその解説である。

定理17. $t\in\mathbb{R}^d$ の関数 $\varphi(t)$ が $\mathbb{R}^d$ の上の self-decomposable な分布の特性関数であることは、次の形に表わされることと同値である。

$$\varphi(t)=\exp\Big[i\langle\gamma,t\rangle-\frac{1}{2}\langle At,t\rangle \tag{14}$$
$$+\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\Big(\int_0^{\langle t,u\rangle}\frac{e^{is}-1}{s}ds-i\frac{\langle t,u\rangle}{|u|}\arctan|u|\Big)\frac{1}{\log(1+|u|^2)}\tilde{\nu}(du)\Big]$$

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

ただし，$\gamma \in \mathbb{R}^d$，A は $d \times d$ の非負定値の実対称行列，$\tilde{\nu}$ は $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ の上の有限な測度である．$\gamma, A, \tilde{\nu}$ は φ から一意的に定まる．

$\mathbb{R}^d$ の上の分布が full であるとは，どんな $d-1$ 次元超平面にも集まっていないことである．

定理18. $\mathbb{R}^d$ の上の full の分布 μ が Lévy の分布である必要十分条件は，μ の特性関数 $\varphi(t)$，$t \in \mathbb{R}^d$，が次のように表わされることである．

$$\varphi(t) = \exp\Big[i\langle \gamma, t\rangle - \frac{1}{2}\langle At, t\rangle + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \Big(\int_0^\infty \Big(e^{i\langle t, e^{sQ}u\rangle} - 1 - \frac{i\langle t, e^{sQ}u\rangle}{1+|e^{sQ}t|^2}\Big) ds \Big) \frac{1}{\log(1+|u|^2)} \tilde{\nu}(du) \Big] \tag{15}$$

ただし，Q はすべての固有値の実数部分が負であるような $d \times d$ の実行列，$\gamma \in \mathbb{R}^d$，A は非負定値の実対称行列で $QA + AQ^*$ が非負定値であるようなもの，$\tilde{\nu}$ は $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ の上の有限な測度である．(15)のような φ の表現が2つあるとき，Q が同じならば $\gamma, A, \tilde{\nu}$ も同じである．

§9. その他の研究

$\mathbb{R}^1$ の上のL分布の全体を $\mathcal{L}_0$ とする．Urbanik [25], [26] は，$\mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{L}_\infty$ という $\mathcal{L}_0$ の部分クラスの列を，L分布を定義する際の独立確率変数列 $X_1, X_2, \cdots$ のある種の性質によって定義し，それの特性関数による表現を求めた．$\mathcal{L}_\infty$ は，安定分布を含み convolution と弱収束に関して閉じているようなクラスの中で最小のものに一致する．

安定分布を推移確率とする加法過程は，安定過程として，path のこまかい性質やポテンシャル論的性質がいろいろ研究されているが，L分布を推移確率とする加法過程を特に研究しているものはほとんどないようである．私の気づいたのは，Fisz [4] が，このような加法過程が2つあるとき，その path space に定める測度が互いに特異になる十分条件を与え

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

ているだけである．L分布を推移確率とする加法過程のクラスと，Urbanik の $\mathcal{L}_\infty$ に属する分布を推移確率とする加法過程のクラスは，安定過程より広いクラスの中で最も自然なものであろうから，研究に値する対象であろう．

引用文献

[1] J. R. Blum and M. Rosenblatt, On the structure of infinitely divisible distribution functions, Pacific J. Math. 9 (1959), 1-7.
[2] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, Vol. II, 2nd ed., John Wiley, New York, 1971.
[3] M. Fisz, On the continuity of the L-distribution functions, Z. Wahrsch. 1 (1962), 25-27.
[4] M. Fisz, On the orthogonality of measures induced by L-processes, Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 185-192.
[5] M. Fisz and V. S. Varadarajan, A condition for absolute continuity of infinitely divisible distribution function, Z. Wahrsch. 1 (1963), 335-339.
[6] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, Limit distributions for sums of independent random variables, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, 1968.
[7] P. Hartman and A. Wintner, On the infinitesimal generators of integral convolutions, Amer. J. Math. 64 (1942), 273-298.
[8] L. H. Hsu, Acta Scientiarum Naturalium Universitasis Pekinensis, 4 (1958), 145-150.
[9] I. A. Ibragimov and Yu. V. Linnik, Independent and stationary sequences of random variables, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.
[10] N. L. Johnson and C. A. Rogers, The moment problem for unimodal distributions, Ann. Math. Stat. 22 (1951), 433-439.
[11] V. M. Kruglov, A note on infinitely divisible distributions, Theory Prob. Appl. 15 (1970), 319-324.
[12] L. Kubik, A characterization of the class L of probability distributions, Studia Math. 21 (1961/62), 245-252.
[13] L. Kubik, Some analogies between the class of infinitely divisible distributions and the class L of distributions, Studia Math. 22 (1962/63), 197-209.
[14] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, Paris, 1937; 2e ed., 1954.
[15] M. Loève, Probability theory, 3rd ed., Van Nostrand, Princeton, 1963.
[16] E. Lukacs, Characteristic fuctions, 2nd ed., Griffin, London, 1970.
[17] P. Medyessy, On a new class of unimodal infinitely divisible distribution functions and related topics, Studia Sci. Math. Hungar. 2 (1967), 441-446.
[18] V. V. Petrov, Sums of independent random variables, Springer, Berlin, 1975.
[19] K. Sato, A note on infinitely divisible distributions and their Lévy measures, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A, 12 (1972), 101-109.

[20] K. Sato and M. Yamazato, Strict unimodality of infinitely divisible distributions of class L (準備中).
[21] F. W. Steutel, Preservation of infinite divisibility under mixing and related topics, Mathematical Centre Tracts No. 33, Methematisch Centrum Amsterdam, 1970.
[22] K. Urbanik, A representation of self-decomposable distributions, Bull. Acad. Pol. Sci., Série sci. math. astr. phys. 16 (1968), 209-214.
[23] K. Urbanik, Self-decomposable probability distributions on R^m, Zastos. Mat. 10 (1969), 91-97.
[24] K. Urbanik, Lévy's probability measures on Euclidean spaces, Studia Math. 44 (1972), 119-148.
[25] K. Urbanik, Slowly varying sequences of random variables, Bull. Acad. Pol. Sci., Série sci. math. astr. phys. 20 (1972), 679-682.
[26] K. Urbanik, Limit laws for sequences of normed sums satisfying some stability conditions, Multivariate Analysis III (ed. by P. R. Krishnaiah, Acad. Press, New York, 1973), 225-237.
[27] K. Urbanik, Extreme point method in probability theory, Probability-Winter School, Karpacz, Poland, 1975 (Lecture Notes in Math., No. 472, Springer, Berlin, 1975), 169-194.
[28] S. J. Wolfe, On the unimodality of distribution functions of class L, Ann. Math. Stat. 42 (1971), 912-918.
[29] S. J. Wolfe, On the continuity properties of L-functions, Ann. Math. Stat. 42 (1971), 2064-2073.
[30] S. J. Wolfe, Inequalities for modes of L-functions, Ann. Math. Stat. 42 (1971), 2126-2130.
[31] M. Yamazato, Some results on infinitely divisible distributions of class L with applications to branching processes, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A, 13 (1975), 133-139.
[32] M. Yamazato, Unimodality of infinitely divisible distribution functions of class L (提出中).
[33] M. Yamazato, Properties of higher-order derivatives of infinitely divisible distribution functions of class L (準備中).
[34] V. M. Zolotarev, The analytic structure of infinitely divisible laws of class L (ロシヤ語), Litovsk. Math. Sb. 3 (1963), 123-140.

Sem. on Probab.
Vol.44 1977年
P1-162

1977年5月　確率論セミナー発行