SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 43

正規過程とその周辺

— 51年度科研費シンポジウム報告集 —

河野敬雄
大平坦 編

1977
確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

ま　え　が　き

この報告集は昭和５１年度科学研究費（総合Ａ，数理統計学の研究，研究代表者，渡辺信三氏）により，昭和５１年１２月１３日より１７日まで関西地区大学セミナーハウス（神戸市）において行われたシンポジウム「正規過程とその周辺」における講演報告をまとめたものである。

シンポジウムでは，正規過程のＰＡＴＨの性質およびＢＡＮＡＣＨ空間上の確率測度を主要なテーマとし，単に報告者自身の研究成果の発表だけではなく，広く諸外国における最近の結果，研究の動向の紹介を含め，綜合報告的なものになることを意図した。参加者は３１名で各報告について熱心な討論がなされ，夜間にもひきつづいて研究会が開かれた。

この報告集が単にシンポジウムの記録であるにとどまらず，この分野に関心のある方々のお役にたち，また若い研究者の方々に急速に発展しつつあるこの方面の研究に参加していただける１つのきっかけともなれば幸いである。

昭和５２年３月１８日

河　野　敬　雄
大　平　　　坦

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

目 次

次頁へ続く

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

正規性の立場から見たBrown運動のpathの性質

河野 敬雄

一次元Brown運動のpathの性質はLévy, Wiener以後詳細に研究され，又現在も研究されつつあって，確率過程の研究に大きな影響を与えて来たし，今後も影響を与えるであろうと思われる。 Brown運動の数学的構造は典型的な性質をいくつか兼ね備えているが，中でも従来は強マルコフ性，加法性，Martingale性に着目した研究が多かったように思われる。しかしながら，少くともpathの性質に限ってみると，一見上記三つの性質から導かれる事実も，実は正規過程であるという性質だけから導かれ得る場合がある。本稿は，Brown運動をもっぱら，正規過程という立場からながめることによって，知られているpathの性質が，より一般の正規過程に対してはどうなるのかを調べることが目的である。 従来，正規過程はまず，定常性を仮定して，正規定常過程として研究される傾向があった。(例えば[1],[2],[3])。 しかし，pathの性質を調べる場合，定常性はさほど必要ではなく，せいぜいstationary incrementsを仮定すれば十分である。又そのスペクトル表現は必要とせずに証明される場合が多い。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

以下では，$\{X(t); 0 \leq t \leq 1\}$ を平均０の一次元正規過程とし，差の分散が，ある関数 $\sigma(x)$ によって，

(1) $$E[(X(t)-X(s))^2] = \sigma^2(|t-s|)$$

と表わされていると仮定する。Brown 運動の場合は $X(0)=0$ で，$\sigma(x)=\sqrt{x}$ である。正規過程は平均０を仮定すれば $X(0)=0$ のあいまいさを除いて，$\sigma(x)$ のみによって完全に決定されるから，特に path の性質は $\sigma(x)$ によって完全に表現される。$\sigma^2(x)$ はいわゆる conditionary positive definite な関数であり，逆にこのような関数に対しては，平均０，$X(0)=0$ なる正規過程が唯一つ対応して (1) を満す。よく知られているこのような関数としては

(2) $$\sigma(x) = x^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1,$$

がある。以下に述べる正規過程においては，場合によって $\sigma(x)$ に様々な regularity conditions を課す必要があるが（本稿では具体的には書かないが，くわしくはそれぞれの引用文献を参照のこと）(2) のような関数に対しては常に満たされる。我々は (2) よりさらに広い class

(3) $$\sigma(x) \asymp x^{\alpha}s(x), \quad 0<\alpha<1,$$

を考察の対象にする。ここで $s(x)$ はいわゆる slowly varying function i.e. $\forall t>0$ に対し $\lim_{x\downarrow 0} s(tx)/s(x) = 1$ で，このような条件を満す conditionary positive

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

definiteな関数が十分多く存在することは，定常過程の場合で，スペクトル関数を具体的に与えることによって構成できる。注意として，

$$E[(X(t)-X(s))^{2\beta}] = C_\beta (\sigma(|t-s|))^{2\beta}$$

であるから，(2)又は(3)を満す正規過程に対しては，古典的な結果によって，適当なversionを選べばpathは確率1で連続であるから，以後すべてpathは連続関数であると仮定する。

以下に(2)ないし(3)と若干のregularity conditionsを満すような正規過程に対し，いくつかのpathの性質を述べる。

(a) modulus of continuity

まず，局所連続性と一様連続性については，

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{X(t+h)-X(t)}{\sigma(h)\sqrt{2\log\log 1/h}} = 1 \quad , \quad a.s.,$$

と

$$\overline{\lim_{\substack{|t-s|\downarrow 0\\ 0\le t,s\le 1}}} \frac{X(t)-X(s)}{\sigma(|t-s|)\sqrt{2\log 1/|t-s|}} = 1, \ a.s.$$

が知られている。([4], [5])

さらに，いわゆるtwo-sided local continuityにつ

いては，

$$\overline{\lim_{u,v\downarrow 0}} \frac{X(t+u)-X(t-v)}{\sigma(u+v)\sqrt{2\log\log 1/(u+v)}} = 1 \ , \ a.s.$$

（［6］，［7］）で，局所連続性と同じ order を与えるが，次に述べる，よりくわしい上級関数，下級関数は異なる integral-test で与えられる。

(b) 上級関数と下級関数

$\varphi(x) \uparrow +\infty \ (x \downarrow 0)$ なる関数に対して

$$P(\exists\delta>0,\ 0<\forall h<\delta\ ,\ X(t+h)-X(t)<\sigma(h)\varphi(h)) = 1$$
$$(=0\ ,\ resp.)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_{+0} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(x)}}{\sigma^{-1}(\sigma(x)/\varphi(x))\,\varphi(x)}\,dx < +\infty \ (=+\infty,\ resp.),$$

ここで，$\sigma^{-1}(x)$ は $\sigma(x)$ の逆関数。

$$P(\exists\delta>0,\ \forall|t-s|<\delta,\ 0\le t,s\le 1$$
$$X(t)-X(s)<\sigma(|t-s|)\varphi(|t-s|)) = 1 \ (=0,\ resp.)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_{+0} \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(x)}}{[\sigma^{-1}(\sigma(x)/\varphi(x))]^2\,\varphi(x)}\,dx < +\infty \ (=+\infty,\ resp.)$$

（［5］，［8］，［9］）

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$$P(\exists\delta>0,\ \forall u,v>0,\ u+v<\delta$$

$$X(t+u)-X(t-v)<\sigma(u+v)\varphi(u+v))=1,\ (=0,\ \text{resp.})$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int_{+0}\frac{x\,e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(x)}}{[\sigma^{-1}(\sigma(x)/\varphi(x))]^2\varphi(x)}dx<+\infty\ (=+\infty\ \text{resp.})$$

([6], [10])

(c) variation

$P=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1\}$, $\delta(P)=\max|t_i-t_{i-1}|$,

$\Pi=\{[0,1]$ の分割全体$\}$,

$Q(\delta)=\{P\in\Pi;\ \delta(P)<\delta\}$, とおくと,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\sigma^{-1}(|X(k2^{-n})-X((k-1)2^{-n})|)=c\quad \text{a.s.}\ ([11],[12])$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{P\in Q(\delta)}\sum_{P}\psi(|X(t_i)-X(t_{i-1})|)=c'\quad \text{a.s.}\ ([7],[13])$$

ここで, $\psi=\sigma(t)\sqrt{\log\log 1/t}$ の逆関数。

(d) nowhere non-differentiability

$\lim_{h\downarrow 0} h/\sigma(h)=0$ ならば, path は確率1で$[0,1]$上殆んど至るところ微分不可能であることは Fubini の定理より直ちにわかるが, さらに適当な条件を課すと,

$$P\left(\overline{\lim_{h\downarrow 0}}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}=+\infty \text{ for all } 0\le t<1\right)=1,$$

つまり，確率１で $[0,1)$ 上到るところ微分不可能である。
（[14]，[15]，[16]）．

(e) local time

$x(s)$ を $[0,t]$ 上で定義された実数値ルベーグ可測関数とする。$[0,t]$ 上でルベーグ測度 ds を考えると，$x(s)$ によって，実数軸上に測度 $d\mu$ が induce される。$d\mu$ が実数軸上のルベーグ測度に対し絶対連続である時，その密度関数 $\varphi(t,x)$ を $x(s)$ の local time と呼ぶ。(2) 又は (3) と適当な条件を満す正規空経の path の local time $\varphi(t,x,\omega)$ は存在して，かつ (t,x) 2変数に関して確率１で連続となる。（[17]）さらにその Hölder 連続性は，

$$\overline{\lim_{h\downarrow 0}}\frac{|\varphi(t+h,X(t),\omega)-\varphi(t,X(t),\omega)|}{h/\sigma(h/\log\log 1/h)}\le c<+\infty \quad a.s.,$$

$$\overline{\lim_{\substack{|t-s|\downarrow 0\\ 0\le t,s\le 1}}}\frac{|\varphi(t,x,\omega)-\varphi(s,x,\omega)|}{|t-s|/\sigma(|t-s|/\log 1/|t-s|)}\le c'<+\infty \quad a.s.$$

（[18]，[19]）

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

(f) Hausdorff measure of the zero sets

正規定常過程で，そのスペクトル関数 $f(\lambda)$ が

$$f(\lambda) = \frac{c}{(\lambda^2 + a^2)^{\alpha + 1/2}}, \quad 0 < \alpha < 1/2,$$

で与えられる時

$$\psi_\alpha\text{-}m(\{t; X(t,\omega) = 0\}) = c' \quad a.s. (0 < c' < +\infty)$$

ここで，$\psi_\alpha = h^{1-\alpha}(\log\log 1/h)^\alpha$ で h-$m(A)$ は A の関数 h による Hausdorff 測度．([19]) もう少し広い class の正規過程に対しては Hausdorff dimension が $1-\alpha$ であることしか知られていない。([20], [21])

(g) Hausdorff measure of exceptional points

path の非常に例外的な性質をもつような時間の集合（確率1で，空集合ではないが，ルベーグ測度0となる集合）の Hausdorff 測度ないしは Hausdorff dimension については Brown 運動の場合しか知られていないものが多い。結果は予想されるが，証明は Brown 運動の場合，加法性を非常に有効に使ってある部分が，一般の正規過程の場合に容易に拡張出来ないところに原因があるように思われる。

Brown 運動を $B(t)$ と記すと，

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$$E(\alpha) = \left\{ 0 \le t \le 1 ;\ \overline{\lim_{h \downarrow 0}} \frac{B(t+h) - B(t)}{\sqrt{2\alpha h \log 1/h}} \ge 1 \right\},\quad 0 < \alpha \le 1,$$

$$F(\beta) = \left\{ 0 \le t \le 1 ;\ \overline{\lim_{h \downarrow 0}} \frac{B(t+h) - B(t)}{\sqrt{2\beta h \log\log 1/h}} \ge 1 \right\},\quad \beta > 1,$$

に対し、 $\varphi_{\alpha'} = x^{\alpha'}$ とおくと

$$\varphi_{\alpha'}\text{-}m(E(\alpha)) = 0 \quad (\alpha' > 1-\alpha)$$
$$= +\infty \quad (\alpha' < 1-\alpha),$$

つまり、$E(\alpha)$ の Hausdorff dimension $= 1-\alpha$ で、

$\varphi_{\beta'} = x(\log 1/x)^{\beta'}$ とおくと

$$\varphi_{\beta'}\text{-}m(F(\beta)) = 0 \quad (\beta' < \beta - 1)$$
$$= +\infty \quad (\beta' > \beta - 1), \quad ([22]).$$

もっとくわしく、

$$E(\varphi) = \{ t ;\ {}^{\exists} u_n, v_n \ge 0,\ u_n + v_n \downarrow 0$$
$$B(t+u_n) - B(t-v_n) > \sqrt{u_n+v_n}\, \varphi(u_n+v_n) \}$$

とおくと、φ と h に適当な条件を課して、

$$h\text{-}m(E(\varphi)) = 0 \quad (= +\infty,\ resp.)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_{+0} \frac{\varphi^3(x)\, e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(x)}\, h(x)}{x^2}\, dx < +\infty \quad (= +\infty,\ resp.)$$

([23])

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

(k) integrability of sup.

$\{X(t)\}$ を，連続な path をもつ正規過程とすると，これ以外の条件をまったく仮定せずに $\exists\alpha>0$ で

$$E[\exp\{\alpha\sup_{0\le t\le 1}|X(t)|\}^2] < +\infty$$

([24], [25])

Brown 運動の場合 $P(\sup_{0\le t\le 1} B(t)>x)=2P(B(1)>x)$ より明らかである。

(i) open problems.

non-increasing everywhere([14]) や Lévy の double points の問題等 Brown 運動の path について知られていることは他にもいろいろあるが，それらは Brown 運動の非常に深い性質を使って証明することが多く，現在のところより一般の正規過程に対しては証明する手がかりすらないのが現状である。しかし，少くとも(2)を満すclassで $0<\alpha<1/2$ の場合（$\alpha=\frac{1}{2}$ が Brown運動）に拡張することは比較的容易であろうと信じられる。

次に，値が d-次元の Brown 運動を考える。この場合は強マルコフ過程の典型としてくわしく研究されているが，

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

マルコフ過程論で考察されている path の性質がどこまで正規過程に対しても成立するかをみる。正規過程の場合は、分布の計算と評価しか使えないことが多く、従って結果も不十分なことしかわからない。しかし、ある程度のことまでは計算できる。ここで d-次元正規過程とは、d個の独立同分布な一次元正規過程を並べたもの：

$$X^d(t) = \{ (X_1(t), \cdots, X_d(t)) \}$$

と理解する。これは d-次元 Brown 運動のもっとも単純な拡張であって、座標間に相関がある場合は将来の問題であると思われる。さらに、我々の立場では、マルコフ過程論と違って、パラメーターが半直線（時間）であることは本質的ではないから、パラメーター空間として、N次元ユークリッド空間 R^N をとることが出来る。この時、値の次元によって異なる性質の典型である recurrency - transiency をみると Brown 運動の場合は、2次元がその境目であるが、(2) 又は (3) と付帯条件を満す R^N をパラメーター空間に持つ d-次元正規過程は $\alpha d = N$ がその境目となる。

(i) recurrent - transient properties

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$\alpha d > N$ の時

$$P(\exists\delta>0,\ 0<t<\delta,\ \|X^d(t)-X^d(0)\|>\sigma(\|t\|)\varphi(\|t\|))$$
$$=1 \quad (=0,\ resp.)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_{+0} \frac{x^{N-1}\varphi(x)^d}{[\sigma^{-1}(\sigma(x)\varphi(x))]^N}\,dx < +\infty \ (= +\infty\ resp.)$$

$\alpha d = N$ で (2) を満す時

$$\int_{+0} \frac{dx}{x \log 1/\varphi(x)} = +\infty$$

ならば，上記の確率は 0 。収束の場合は未解決（[26]）

$\alpha d > N$ の時 $\forall B>0$ に対し

$$P(\exists\delta>0,\ \forall \|t\|>\delta,\ \|X^d(t)-X^d(0)\|>B)=1,$$

$\alpha d \leq N$ で (2) を満す時 上の確率は 0 。

$\alpha d > N$ の時

$$P(\forall t\in R^N, \|t\|\neq 0,\ \|X^d(t)-X^d(0)\|\neq 0)=1.$$

(d) Sojourn time and hitting time.

以下では，再び $N=1$ の場合を考える。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$$\rho_d(a) = \inf\{r;\ \sup_{0\le t\le r} \|X^d(t) - X^d(0)\| > a\}$$

とおくと，

$$\overline{\lim_{a\downarrow 0}} \frac{\rho_d(a)}{\sigma^{-1}(a)\log\log 1/a} \le c < +\infty \quad a.s.$$

([27]).

Brown 運動の場合は，上式は，等号でかつ c は $J_{d/2-1}$ の最初の正の零点という事までわかっている。([28]) しかし，一般の正規過程の場合，0-1 law によって，確率 1 で定数であることは疑いないが，その値を求めることは，現在の水準では不可能のように思われるが，非常に興味ある問題であると思う。

$$\int_0^{+\infty} I_x(\|X^d(t) - X^d(0)\|)\,dt = T_d(x)$$

とおく。　ここで　$I_x(s) = 1 \quad (|s| \le x)$

$= 0 \quad (|s| > x)$。

この時　$\alpha d > 1$　ならば

$$\overline{\lim_{x\downarrow 0}} \frac{T_d(x)}{\sigma^{-1}(x)\log\log 1/x} \le c < +\infty \quad a.s. \ ([27])$$

これも Brown 運動の場合 $\alpha = \frac{1}{2}$ だから $d > 2$ に対し上の式は等号で成立し，かつ c は $J_{d/2-2}$ の最初の正の零

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

点であるということまでわかっている([28])。さらに$d=2$の場合も知られている。([29])

以上，羅列点にBrown運動で知られている事実を，正規過程に拡張する話を並べてみたが，現在のところ，使われている手段は初等的で，単に少々複雑な計算をするだけで得られることが多い。Brown運動の場合に匹敵する結果を得るには，何らかの飛躍が必要な時期に来ているように思われる。いずれにしろ，この方面の研究が一層発展することを期待する次第である。

1977年1月17日

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

References

[1] Maruyama, G. ;The harmonic analysis of stationary stochastic processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 4(1949),45-106.

[2] Hunt, G.A. ;Random Fourier transforms, Trans. Amer.Math. Soc. 71(1951),38-69.

[3] Belyaev, Yu.K.; Continuity and Hölder's conditions for sample functions of stationary Gaussian processes, 4th Berkeley Symp. II (1961),23-33.

[4] Marcus, M.B.; Hölder conditions for Gaussian processes with stationary increments, Trans Amer.Math. Soc. 134(1968), 29-52.

[5] Kôno, N.; On the modulus of continuity of sample functions of Gaussian processes, J.Math. Kyoto Univ. 10(1970),493-536. Correction, J.Math.Kyoto Univ. 12(1972),571-572.

[6] Jain, N.C.-Taylor, S.J. ;Local asymptotic laws for Brownian motion, Annal. Prob. 1-4(1973),527-549.

[7] Kawada,T- Kôno, N.; On the variation of Gaussian processes, Proc. Second Japan-U.S.S.R. Symposium on probability theory, Springer lecture note in Mathematics 330(1973),176-192.

[8] Chung, K.L.-Erdös, P.-Sirao, T.; on the Lipshitz' conditions for Brownian motion, J.Math. Soc. Japan, 11-4 (1959), 263-274.

[9] Sirao, T.- Watanabe, H.; On the upper and lower class for stationary Gaussian processes, Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970), 301-331.

[10] Kôno, N.; Asymptotic behavior of sample functions of Gaussian random fields, J. Math. Kyoto Univ. 15-3(1975),671-707.

[11] Baxter, G.; A strong limit theorem for Gaussian processes, Proc. Amer. Math. Soc. 7(1956), 522-527.

[12] Kôno, N.; Oscillation of sample functions in stationary Gaussian processes, Osaka J. Math. 6(1969), 1-12.

[13] Taylor, S.J.; Exact asymptotic estimates of Brownian path variation, Duke Math. J. 39(1972),219-241.

[14] Dvoretsky, A.- Erdős, P.-Kakutani, S.;Non-increasingness everywhere of the Brownian motion processes, Proc. 4th Berkeley Symp. vol. II (1961),103-116.

[15] Yeh, J.; Differentiability of sample functions of Gaussian processes, Proc. Amer. Math. Soc. 18(1967),105-108.

[16] Kawada, T.- Kôno, N.; A remark on nowhere differentiability of sample functions of Gaussian processes, Proc.Japan Acad. 47,suppl. II (1971),932-934.

[17] Berman, S.M.;Gaussian processes with stationary increments: local times and sample function properties, Ann. Math. Stat. 41(1970),1260-1272.

[18] davies, P.L.; Local Hölder conditions for the local times of certain stationary Gaussian processes, Annal Prob. 4-2(1976),277-298.

[19] Kôno, N.; Hölder consitions for the local times of some Gaussian processes.(pre-print).

[20] Orey, S.; Gaussian sample functions and the Hausdorff dimension of level cressings, Z.Wahr. Geb. 15(1970),249-256.

[21] Ostrouskii, E.I.; A limit theorem for local time and the dimension of the set of zeros of a Gaussian process, Moscow Univ. Math. Bull. 28(1973),58-62.

[22] Orey, S.-Taylor, S.J.; How often on a Brownian path does the law of iterated logarithm fail? Proc. Loncon Math. Soc. 3-27(1973), 174-192.

[23] Kôno, N.; The exact Hausdorff measure of irregularity points for a Brownian path.(Submited to Z.Wahr.)

[24] Landau, H.J.-Shepp, L.A.; On the supremum of a Gaussian process, Sankya, Ser. A. 32(1970), 369-378.

[25] Fernique, X.; Intégrabilité des vecteurs gaussiens, C.R. Acad. Sc. Paris, 270(1970), Ser. A, 1689-1699.

[26] Kôno, N.; Sru la minolation asymptotique et le caractère transitoire des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs dans R^d, Z.Wahr. Geb. 33(1975),95-112.

[27] ________; Evolution asymptotique des temps d'arrêt et des temps de séjour liés aux trajectoires de certains fonction aléatoires gaussiennes, Proc. 3rd Japan-U.S.S.R.Symposium on

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

Prob. Theory, Springer lecture note.
[28] Ciesielski, Z.- Taylor, S.J.; First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path, Trans. Amer. Math. Soc. 103(1962), 434-450.
[29] Ray, D.; Sojourn times and the exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc. 106(1963), 436-444.

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

Continuity of Gaussian Sample Functions and Central Limit Theorems for C(S)-valued Random Variables

河野 敬雄

§1 Continuity of Gaussian sample functions

正規過程の path の連続性の十分条件（ある場合は必要条件）については，最近 Fernique によってほぼ解決されたので，Dudley や Jain-Marcus の結果とも比較しながらまとめてみたい。これらの条件や方法は，自然に C(S)-値確率変数列の中心極限定理や重複対数の法則に応用されるので，結果を合せて記す。

正規過程を考える場合，パラメーター空間が直線であることは特別な意味を持たない場合が多い。特に path の連続性を考える場合，パラメーター空間が最初から位相空間である必要はなく，正規過程から自然に導入される位相による連続性を考察すれば十分である。そこでまず正規確率場の定式化から始める。

T を空でない抽象集合，$(\Omega, \mathcal{O}\!\iota, P)$ を完備確率空間とする。任意の $t \in T$ に対し，$(\overline{R}, \mathcal{B}(\overline{R}))$ の値をとる確率変数が定義されている時 $\{X(t); t \in T\}$ を T 上の確率場ということにする。ここで $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$.

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

<u>定義1</u>. 確率場$\{X(t); t\in T\}$が，正規確率場であるとは，Tの任意の有限個の点$t_1,\cdots,t_n$と任意の実数$c_1,\cdots,c_n$に対し，一次元確率変数

$$c_1X(t_1)+\cdots+c_nX(t_n)$$

の分布が正規分布である時をいう。(特異分布も正規分布とみます。)さらに，任意の$t\in T$に対し$EX(t)=0$の時中心化された正規確率場という。

次に，Tにsemi-metric ($d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$が成立するとは限らない場合，従って，Hausdorffの分離公理を満すとは限らない) dが定義されている場合を考える。今

$$N_\varepsilon(T,d)=\min\{k; T=\bigcup_{i=1}^{k}A_i,\ d(A_i)<\varepsilon\}$$

とおく。ここで$d(A)$は集合Aの直径。以後，次の条件を仮定する。

(F) $\forall\varepsilon>0$, $N_\varepsilon(T,d)<+\infty$

仮定(F)より(T,d)は第2可算公理を満す。

仮定(F)の下で，Doobのseparabilityの概念は次のように定式化される。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

<u>定義2.</u> (T, d) を仮定(F)を満す semi-metric space とする。確率場 $\{X(t); t \in T\}$ が (T, d)-separable であるとは，Tの countable dense subset S と，確率1の可測集合 Ω_0 が存在して，Tの任意の開集合 U と任意の閉区間 J に対して，

$$\Omega_0 \cap \{\omega; X(U) \subset J\} = \Omega_0 \cap \{\omega; X(U \cap S) \subset J\}$$

が成り立つ時をいう。

$\{X(t); t \in T\}$ を中心化された正規確率場とする時，

$$d_X(s, t) = \sqrt{E[(X(s) - X(t))^2]}$$

とおけば，(T, d_X) は semi-metric space となるから正規確率場が与えられた時，Tの位相として (T, d_X) を考えるのが最も自然である。Doob の定理に対応して

<u>定理1</u>. (Fernique [1]). $\{X(t); t \in T\}$ を正規確率場とする。(T, d_X) が仮定(F)を満す時，$\{X(t); t \in T\}$ は常に (T, d_X)-separable version をもつ。即ち (T, d_X)-separable な正規確率場 $\{\tilde{X}(t); t \in T\}$ が存在して

$$\forall t \in T \text{ に対し，} P(\tilde{X}(t) = X(t)) = 1,$$

が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

Tに最初から semi-metric d が与えられている場合，d_X が d に関して一様連続ならば，定義から直ちに，(T,d)-separable であれば (T,d_X)-separable であり，path $X(t,\omega)$ が (T,d_X)-連続ならば (T,d)-連続である。逆に Fernique は証明なしに，次の定理が成り立つと主張している。（証明できる）

定理2. (T,d) が pre-compact であって，$\{X(t); t\in T\}$ を (T,d) separable な正規確率場とする。$X(t,\omega)$ が確率1で (T,d)-連続ならば，確率1で (T,d_X)-連続である。

次に path の連続性の十分条件を考察する。$T=R^N$ の場合，正規性のみに着目して，非常に simple な方法で十分よい条件を与えた Fernique [2] 1964 年の結果を述べる。

定理3. $\{X(t); t\in T\}$, $T=R^N$ を中心化された正規確率場とする。非増加連続関数 φ が存在して，$\forall t, s\in T$ に対して，

$$E[(X(t)-X(s))^2] \leq \varphi^2(\|t-s\|)$$

が満たされていると仮定する。ここで $\|\ \|$ はユークリッ

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

ドの距離を表わす。 この時，

$$\int^{+\infty}\varphi(e^{-x^2})\,dx < +\infty$$

ならば，$\{X(t)\}$ は path が確率 1 で $\|\ \|$-連続な version をもつ。

一方，Dudley [5] は1967年 Fernique と別な立場から正規確率場の path の連続性について次のような十分条件を得た。

<u>定理4</u> $\{X(t);\ t\in T\}$ を中心化された (T, d_X)-separable な正規確率場とする。

$$H_\varepsilon = \log N_\varepsilon(T, d_X)$$

とおくと

$$(*)\qquad \int_{+0}\sqrt{H_\varepsilon}\,d\varepsilon < +\infty$$

ならば，path は確率 1 で d_X-連続である。

Fernique [3] は1971年定理3の立場を発展させて，次の十分条件を得た。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

定理５ $\{X(t)\,;\,t\in T\}$ を中心化された (T, d_X)-separable 正規確率場とする。 T の d_X-Borel field を $B_X(T)$ とする。 この時，$(T, B_X(T))$ 上の確率測度 μ が存在して

$$(**)\quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \sup_{t\in T}\int_0^{\varepsilon}\sqrt{\log 1/\mu(s\,;\,d_X(s,t)<u)}\,du = 0$$

ならば，path は確率１で d_X 連続である。

定理４と定理５の関係は，$(*)\Rightarrow(**)$ である。 実際，S_n を T の 2^{-n}-net とし，S_n の各点 s に point mass ε_s を置き、

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sum_{s\in S_n\cap E}\varepsilon_s/N_{2^{-n}}(T,d_X)$$

と置けばよい。 逆の関係は，一般には知られていないが，特に $T=[0,1]$ で，連続関数 φ が存在して $d_X(s,t)=\varphi(|s-t|)$ (stationary increments) の時は $(**)\Rightarrow(*)$ である。 発表された証明はないようであるが，次に述べる補題が本質的である。

補題 $([0,1],\lambda)$ をルベーグ測度，$([0,1],\mu)$ を任意のボレル確率測度とする。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$$I(t,\mu)=\int_0^{\varphi(1)}\sqrt{\log 1/\mu(s;\varphi(|s-t|)<u)}\,du$$

とおくと，

$$\sup_{t\in T} I(t,\lambda)\leq\varphi(1)\sqrt{\log 2}+\sup_{t\in T} I(t,\mu)$$

証明　$g(t,\mu,u)=\mu(s;\varphi(|s-t|)<u)$

$f(x)=\sqrt{\log 1/x}$

とおく。　$f(x)$ は 凸 関数であるから

$$\int_0^{\varphi(1)} f\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\big(\tfrac{k}{n},\mu,u\big)\Big)du$$

$$\leq\int_0^{\varphi(1)}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(g\big(\tfrac{k}{n},\mu,u\big)\Big)du$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I\big(\tfrac{k}{n},\mu\big)\leq\sup_{t\in T} I(t,\mu).$$

一方，Fatou の Lemma より

$$\varliminf_{n\to+\infty}\int_0^{\varphi(1)} f\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\big(\tfrac{k}{n},\mu,u\big)\Big)du$$

$$\geq\int_0^{\varphi(1)}\varliminf_{n\to+\infty} f\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\big(\tfrac{k}{n},\mu,u\big)\Big)du$$

$$=\int_0^{\varphi(1)} f\Big(\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\big(\tfrac{k}{n},\mu,u\big)\Big)du.$$

今，$\chi_u(s,t)$ を $\varphi(|s-t|)<u$ ならば 1，他の場合は 0 となる関数とすると，$\chi_u(s,t)$ は Rieman 可積分な関数で

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

あるから

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n},\mu,u\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \chi_u\left(s,\frac{k}{n}\right)d\mu(s)$$

$$=\int_0^1 \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_u\left(s,\frac{k}{n}\right)d\mu(s)$$

$$=\int_0^1\int_0^1 \chi_u(s,t)\,dt\,d\mu(s)$$

$$\leq 2\lambda(t\,;\varphi(t)<u)\,.$$

故に，

$$\int_0^{\varphi(1)} f\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n},\mu,u\right)\right)du$$

$$\geq \int_0^{\varphi(1)} f(2\lambda(t\,;\varphi(t)<u))\,du$$

$$=\int_0^{\varphi(1)}\sqrt{\log 1/\lambda(t\,;\varphi(t)<u)}\,du-\varphi(1)\sqrt{\log 2}$$

証明終り

後は，

$$1/\{2\lambda(t\,;\varphi(t)<2^{-k})\}\leq N_{2^{-k}}(T,d_X)$$

$$\leq 3/\lambda(t\,;\varphi(t)<2^{-k-2})$$

に注意すれば (**) ⇒ (*) が証明される。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

以上によって，stationary increments の場合，定理4と定理5は同値であることが証明されたわけであるが，Fernique [4] は，逆に，定常性を仮定すると，path が d_X-連続（従って定理2 ~~を信用すれば~~ より，普通の意味で連続）であるための必要十分条件は，上の記号を用いると

$$\int_0^{\varphi(1)} \sqrt{\log 1/\lambda(t\,;\,\varphi(t)<u)}\,du < +\infty$$

であることを証明して，結果的に Dudley の条件は定常性を仮定する限り，必要十分であることがわかった。

なお，$T=[0,1]^n$ の場合，Jain-Marcus [6] は，stationary increment を持つ場合，定理3の表現の拡張として，定理4,5と同値な次の表現を得た。

定理6． $F(y)=\lambda\{h\in[0,1]\,;\,\varphi(h)<y\}$,

$\overline{\varphi}(h)=\sup\{y\,;\,F(y)<h\}$,

とおくと，

$$\int_{+0} \overline{\varphi}(e^{-x^2})\,dx < +\infty$$

と，定理4の (*) は同値である。特に $\varphi(x)$ が，単調増加

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

関数であれば，$\varphi(x)=\overline{\varphi}(x)$である。

§2. Central limit theorem and the law of the iterated logarithm for C(S) valued random variables

(S,d)をcompact metric spaceとし，$C(S)$を，S上の連続関数の全体からなる集合で，sup-normを与えたBanach spaceとする。$\mathcal{B}$を$C(S)$上のBorel fieldとする。Xを$(C(S),\mathcal{B})$の値をとる確率変数とする時$(C(S),\mathcal{B},\mu_X)$をXの分布といい，$X\sim\mu_X$と記す。$X_1, X_2, \cdots$をXのindependent copiesとし，その部分和$X_1+\cdots+X_n=S_n$とする。この時，

<u>定義3</u>　Xに対してCentral limit theorem (C.L.T.)が成立するとは，$S_n/\sqrt{n}\sim\mu_n$とする時，μ_nがある確率測度μに弱収束する時をいう。μは有限次元の中心極限定理から，必然的にGaussianでなければならない。

<u>定義4</u>　Xに対して，Law of the iterated logarithm

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

(L.I.L) が成立するとは $C(S)$ の compact subset K が存在して

$$P\left(\lim_{n\to+\infty} d\left(S_n/\sqrt{2n\log\log n}, K\right)=0\right)=1$$

かつ

$$P\left(\left\{S_n/\sqrt{2n\log\log n} \text{ の極限点の全体}\right\}=K\right)=1$$

が成立する時をいう。 K は Gauss 測度 μ の再生核 Hilbert 空間の単位球である。

この節では，Dudley，Giné の結果を拡張し，証明を簡単にした Jain-Marcus の結果と，Fernique の方法を一般化した Heinkel の結果を述べる。

<u>定理7</u> (Jain-Marcus [7])

(i) $\forall f\in C(S)^*$ に対し

$$E[f(X)]=0, \quad \sup_{t\in S} E[X(t)^2]=1$$

(ii) 正の実確率変数 M と d-一様連続な S 上の距離 ρ が存在して

(a) $|X(s,\omega)-X(t,\omega)|\leq M(\omega)\rho(s,t)$, $\quad EM^2=1$

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

(ℬ) $\int_{+0} \sqrt{H_u(S,\rho)}\, du < +\infty$

$\Rightarrow$ X に対し C.L.T が成立

定理8 (Heinkel [8]) 定理7の条件(ℬ)を

(ℬ′) $(S, \mathcal{B}_d)$ 上の確率測度 μ が存在して

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{t \in S} \int_0^{\varepsilon} \sqrt{\log 1/\mu(s;\rho(s,t)<u)}\, du = 0$$

として, **X** は C.L.T. と L.I.T が成立する。
(定理7においてもL.I.T. が成立すると思われる。)

References

[1] Fernique, X.; Ecole d'Eté de Probabilités de Sait-Flour IV, 1974, Lecture note in Mathematics(Springer),480.
[2] ____________ ; Continuité des processus gaussiens, C.R. Acad, Sc. Paris, t.258(1964),6058-6060.
[3] ____________ ; Regularité de processus gaussiens, Inventions Math. 12(1971), 304-320.
[4] ____________; Des résultats nouveaux sur les processus gaussiens, Ann. Inst. Fourier 24-2,(1974).
[5] Dudley, R.M.; The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes, J. Functional Anal. 1(1967),290-330.
[6] Jain, N.C.-Marcus, M.B. ; Sufficient conditions for the continuity of stationary Gaussian processes and applications

to random series of functions, Ann. Inst. Fourier 24-2(1974), 117-141.

[7] ____________ ; Central limit theorems for C(S) valued random variables, J.Functional Anal. 19(1975), 216-231.

[8] Heinkel, B. ; Théorème central limite et loi du logarithme itéré dans C(S), C.R.Acad. Sc. Paris, t. 282 (1976), Sèr,A 711-713.

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

局所凸空間上の GAUSS 測度

佐藤 坦

E を局所凸ハウスドルフ実位相線形空間（以下単に局所凸空間と言う），E′ を topological dual space, $\langle x, \xi \rangle$ を $E \times E'$ 上の canonical bilinear form とする。このとき，E の部分集合のなす algebra として，次のようなものが定義される。

cylindrical algebra $\mathfrak{A}(E, E')$: E 上の連続線形汎関数全体 $\{\langle x, \xi \rangle ; \xi \in E'\}$ を可測にする最小の algebra.

cylindrical σ-algebra $\mathfrak{C}(E, E')$: $\mathfrak{A}(E, E')$ を含む最小の σ-algebra.

weak Borel field $\mathfrak{W}(E, E')$: 弱位相 $\sigma(E, E')$ についての Borel field.

Borel field $\mathfrak{B}(E)$: E の initial topology についての Borel field.

μ が E 上の GAUSS 測度であるとは，$\mathfrak{C}(E, E')$ 上の確率測度であって，全ての $\xi \in E'$ について $\langle x, \xi \rangle$ が

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

μ についてGAUSS確率変数になっているものとする。このとき平均を $m_\mu(\xi)$，分散を $V_\mu(\xi)$ と書くことにする。

μ がある位相空間 X 上のRADON測度であるとは X のBorel field上に定義された確率測度であって，任意のBorel集合 A について

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K);\ K \subset A,\ \text{compact}\}$$

の成立するものとする。

この一文では，局所凸空間上のGAUSS測度に関する最近の研究を，筆者とその周辺の人達のものを中心にまとめてみた。まず，このような問題との出会いについて述べよう。それはabstract Wiener spaceである。

1 ABSTRACT WIENER SPACE

$\mathcal{H}$ をseparable Hilbert spaceとする。よく知られているように

$$e^{-\frac{1}{2}\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2} = \int_{\mathcal{H}} e^{i(x,\xi)_{\mathcal{H}}}\, d\mu_{\mathcal{H}}(x), \quad \xi \in \mathcal{H}$$

によって $(\mathcal{H}, \mathfrak{A}(\mathcal{H},\mathcal{H}))$ 上の有限加法的測度 $\mu_{\mathcal{H}}$ が

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

定まる。 これが"White Noise"である。 しかしながら $\mu_{\mathcal{H}}$ は $(\mathcal{H}, \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{H}))$ 上の確率測度(可算加法的)には拡張されない。 そこで, $\mathcal{H}$ をもう少し広い空間に埋め込むことによって, $\mu_{\mathcal{H}}$ を確率測度に拡張することが考えられて来た。

例えば L. Gross [4] は, $\mathcal{H}$ 上の適当な連続ノルムで $\mathcal{H}$ を完備化して得られる Banach 空間を E とするとき, E 上に

$$(1.1) \qquad e^{-\frac{1}{2}\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2} = \int_E e^{i\langle x, \xi\rangle} d\mu(x), \quad \xi \in E'$$

となるような確率測度 μ が導入されることを示し, pair $(E, \mathcal{H}, \mu)$ を"abstract Wiener space"と名付けた。

実際, Hilbert空間 $\mathcal{H}$ として

$$\mathcal{H} = \left\{ x = x(t);\ \begin{array}{l}[0,1]\text{ 上の絶対連続関数で, 2乗}\\ \text{可積分な Radon-Nikodym derivative}\\ \text{を有し, } x(0)=0 \text{ なるもの}\end{array} \right\}$$

$$(x, y)_{\mathcal{H}} = \int_0^1 x'(s)y'(s)\,ds, \quad x, y \in \mathcal{H}$$

を考え, これをノルム $\|x\| = \max_{0\le t\le 1}|x(t)|$ で完備化して得られる Banach 空間

$$E = \left\{ x = x(t);\ \begin{array}{l}[0,1]\text{ 上の連続関数で}\\ x(0) = 0 \text{ なるもの}\end{array} \right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

に（1.1）で定められた確率測度 μ が Wiener measure である。この事から、上記の命名が妥当であることが分る。

さて、ここでこの逆が成立しないか？という問題が起る。即ち、Banach 空間 E 上に GAUSS 測度 μ が与えられたときに、ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が E に埋込まれて（1.1）をみたすように出来ないか？言いかえれば、（E, $\mathcal{H}$, μ）が abstract Wiener space になるように、Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を選べないか？という問題である。

これについては、E が separable または reflexive Banach 空間であれば肯定的であることが示される。(H. Sato [7])。その証明の本質は、Banach 空間 E に上記のような条件のあるとき、$\mathcal{C}(E, E')$ 上に与えられた確率測度は、$\mathcal{B}(E)$ 上の RADON 測度に拡張されることである。しかしながら、l^∞ のような non-separable, non-reflexive な Banach 空間については分っていない。そこで次の問題が提起される。

［問題 1］ Banach 空間 E 上の任意の GAUSS 測度（$\mathcal{C}(E, E')$ 上に与えられている!!）は $\mathcal{B}(E)$ 上の RADON 測度に拡張されるか？

この問題については、1976 年 W. Schachermayer [11]

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

によって．与えられたGAUSS測度の平均が0でない場合については反例が与えられた。しかし平均0の場合については分っていない。そこで．逆にRADON測度に拡張されるようなGAUSS測度は．どのような性質を持つか．が問題になってくる。

2 局所凸空間上のRADON·GAUSS測度

一般の局所凸空間上のRADON-GAUSS測度の持つ興味深い性質として．そのL^2とsupportのseparabilityが挙げられる。まず．次の基本定理を述べる。

<u>THEOREM 2-1</u>. μを局所凸空間E上のGAUSS測度．μ^*をμから導かれる外測度．即ち任意の$A \subset E$について

$$\mu^*(A) \equiv \inf\{\mu(B);\ B \supset A,\ B \in \mathcal{C}(E, E')\}$$

とする。今．E'上にある局所凸なpseudo-metric ρが定義されて，(E', ρ)の共役空間を$(E', \rho)'$とするとき

$$\mu^*(E \cap (E', \rho)') = 1$$

が成立すれば．$L^2(E, \mathcal{C}(E, E'), \mu)$はseparable.
(H. Sato & Y. Okazaki [8]).

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

一見分り難(にく)いこの定理から，次の定理が導かれる。

THEOREM 2-2 [8]. μ を Fréchet 空間 E 上の GAUSS 測度とすると $L^2(E, \mathcal{C}(E,E'), \mu)$ は separable.

この定理は，μ には何の位相的な性質も仮定せず，単に E の空間的制約のみから L^2 の separability が導かれるものとして興味深い。また，この定理については，H. Sato [7]，J. Kuelbs [5] にも述べられていたが証明に誤りがあった。[8] ではそれに正しい証明を与えたものである。

さて，μ が局所凸空間 E 上の RADON・GAUSS 測度であるとは，E の Borel field $\mathcal{B}(E)$ 上に定義された RADON 測度であって，その $\mathcal{C}(E,E')$ への制限が GAUSS 測度になっているものとする。

THEOREM 2-3 [8] μ を局所凸空間 E 上の RADON・GAUSS 測度とすると $L^2(E, \mathcal{B}(E), \mu)$ は separable.

この定理も TH. 2-1 の系として証明される。また，TH. 2-3 は C. Borell [2] によっても "convex 測度" の立場から証明された。なお R. Dudley, J. Feldman & L. LeCam [3] には TH. 2-3 は一般には成立しない，との記述があるが，これは誤りである。

次に support について考えてみよう。 E を局所凸空間，μ をその上の RADON-GAUSS 測度とする。 今，E' から $L^2(\mu) = L^2(E, \mathcal{B}(E), \mu)$ への写像を，$R_\mu : \xi \in E' \to \langle x, \xi \rangle \in L^2(\mu)$ によって定義し，H_μ を $R_\mu(E')$ の $L^2(\mu)$ での closure とする。 H_μ は Hilbert 空間であるから，共役空間 H_μ' と H_μ とを同一視し，R_μ の共役写像を R_μ^* とすると，R_μ^* は 1-1 写像である。 また，E の μ-測度 1 の closed linear subspace の中で最小のものを <u>topological linear support</u> と言い E_μ と書く。

<u>THEOREM 2-4</u>　　μ を局所凸空間 E 上の RADON-GAUSS 測度とする。 このとき次のことが成立する。

(a)　$m_\mu \in E_\mu$ が存在して

$$\langle m_\mu, \xi \rangle = \int_E \langle x, \xi \rangle d\mu(x) \quad , \quad \xi \in E'$$

と出来る。([2])

(b)　R_μ^* は H_μ から E_μ の中への 1-1 連続写像であり，$R_\mu^*(H_\mu)$ は E_μ で稠密，従って E_μ は separable. ([8])

(c)　μ の <u>topological support</u> S_μ (μ 測度 1 の閉集合の中で最小のもの) は $m_\mu + \overline{R_{\mu_0}^*(H_{\mu_0})}^\tau$ で与えられる。 但し $\overline{}^\tau$ は Mackey 位相 $\tau(E, E')$ に関する closure，μ_0 は $\mu_0(A) = \mu_0(m_\mu + A)$，$A \in \mathcal{B}(E)$ によ

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

って定義される E 上の RADON-GAUSS 測度。

(a), (b) は μ がさらに convex tight, 即ち任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある absolutely convex compact set K で $\mu(K) > 1-\varepsilon$ となるものが存在する場合には [3] によって証明されていたが, 一般の RADON-GAUSS については, (a) は [2] によって GAUSS 測度の対称性を使って, (b) は GAUSS 測度の絶対連続性を使って [8] によって証明された。なお次の予想が広く行われているが証明はない。

[問題2] 局所凸空間上の全ての RADON-GAUSS 測度は convex tight である。?

(b) で特に平均 0 の場合を考えると, $R_\mu^* H_\mu$ は再生核 Hilbert 空間であり, (b) は再生核 Hilbert 空間が μ の topological support に含まれていることを意味している。

また (b) の逆として「complete separable 局所凸空間上の全ての GAUSS 測度は RADON 測度に拡張されるか?」という問題があるが, これは一般には正しくない。例えば区間 $I = [0, 1]$ 上の関数全体の空間 R^I は complete separable である。ここに平均 0 分散 1 の 1 次元 GAUSS 測度の直積測度 μ を導入すると, μ は $\mathcal{B}(E)$ 上の BOREL 測度に拡張はされる ([1], [11]) が RADON 測度

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

には拡張されない。

μ の support については、さらに次のような問題が提起されている。

［問題３］ 局所凸空間上の全ての RADON・GAUSS 測度の topological support は Souslin 空間である。？

3 BANACH SUPPORT

2 では、与えられた位相に関する support を考えた。逆に、与えられた測度に対し、suitable な位相を導入してもよいのではないだろうか？

E を局所凸空間、μ を $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の確率測度、$\mathcal{B}_\mu(E)$ を $\mathcal{B}(E)$ の μ-completion とする。このとき $Z \subset E$ が μ の "<u>Banach support</u>" であるとは、$Z \in \mathcal{B}_\mu(E)$、$\mu(Z) = 1$ 且つ、あるノルム $\| \ \|_Z$ に関して Z は Banach 空間であり、injection $(Z, \| \ \|_Z) \to E$ は連続となるもの。

Z が μ の Banach support であるとき、μ を $(Z, Z \cap \mathcal{B}(E))$ 上の確率測度に制限することが出来る。しかしながら一般には μ は Z のノルム位相に関する Borel field には拡張されるかどうかは分らない事に注意しておく。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

<u>THEOREM 3-1 [9]</u> E を局所凸空間，μ を $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の convex tight 確率測度で次の 0-1 法則をみたすものとする。即ち任意の $\xi_1, \xi_2, \cdots \in E'$ について

$$(\star) \qquad \mu\left(x \in E \,;\, \sup_n |\langle x, \xi_n \rangle| < +\infty\right) = 0 \text{ or } 1.$$

このとき μ の Banach support が存在する。

0-1 法則 $(\star)$ をみたす確率測度として GAUSS 測度，Stable 測度，ルベーグ測度に関して絶対連続な 1 次元確率測度の直積測度が挙げられる。特に，TH.3-1 の応用として，

<u>THEOREM 3-2</u> E を quasi-complete な局所凸空間，μ を E 上の RADON-GAUSS 測度とすると，μ の Banach support は存在する。

さらに，この定理の系として，

<u>THEOREM 3-3</u> μ を数列全体の空間 $R^{\mathbb{N}}$ 上の GAUSS 測度とすると，μ は Banach support を持つ。

TH.3-1 の証明の本質は，$\mu(K) > 0$ となる absolutely convex compact set K に対し，$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} nK$ は E の線形部分空間である。さらに $(\star)$ より $\mu(F) = 1$ が示され，このとき $\|x\|_F = \inf\{\alpha > 0 \,;\, x \in \alpha K\}$ と定義すると

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

F は $\|x\|_F$ に関して Banach 空間となる。 F はまた、E' に semi-norm $\|\xi\|_{E'} = \sup_{x \in K} |\langle x, \xi \rangle|$ を導入したときの semi-normed space $(E, \|\ \|_{E'})$ の共役空間と言ってもよい。

4 Dual Banach space 上の GAUSS 測度

3 では、かなり一般の RADON-GAUSS 測度が、ある semi-norm 空間の共役 Banach 空間に support を持つことが示された。 しかしながら、共役 Banach 空間のノルム位相に関する RADON 測度には拡張されない。

例えば、GAUSS 確率変数列 $\mathbb{X} = \{X_n\}$ について

$$\sup_n |X_n| < +\infty \quad a.s.$$

が成立すれば、$\mathbb{X}$ は数列全体の空間 R^N に GAUSS 測度 μ を導き、$\mu(l^\infty) = 1$ である。 l^∞ は l^1 の共役 Banach 空間である。 このとき、l^∞ のノルムに関する RADON 測度には拡張されないもののあることが知られている。(N. Vakhania [12])。 それでは、どのような条件の下に、ノルムに関する RADON 測度に拡張されるであろうか？

<u>THEOREM 4-1</u> [6], [10]. F を semi-norm 空間、

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

Eを F の共役 Banach 空間，$\mathcal{C}(E,F)$ を F に属する全ての関数を可測にする最小の σ-algebra，$\|x\|_E$ を E の共役バナッハノルムとする。μ を $(E, \mathcal{C}(E,F))$ 上の GAUSS 測度とするとき，μ が E のノルム $\|x\|_E$ に関する RADON 測度に拡張されるための必要十分条件は，ある $x_0 \in E$ が存在して，任意の正数 $\rho > 0$ について

$$\mu\left(x \in E : \|x - x_0\|_E \leq \rho\right) > 0$$

と出来ること。

さて TH.4-1 の仮定の下で，

$$\varphi_\mu(z) = \int_E \|z - x\|_E \, d\mu(x), \qquad z \in E$$

と定義する。$\varphi_\mu(m) = \inf_{z \in E} \varphi_\mu(z)$ となるような $m \in E$ を μ の <u>minimal point</u> と言うことにする。

<u>THEOREM 4-2</u> [6]．　TH.4-1 の仮定の下で，μ が $\| \; \|_E$ について RADON 測度に拡張可能であれば，μ の minimal point は一意に存在し，それは平均ベクトル $\left(\langle m_\mu, \xi \rangle = m_\mu(\xi)\right)$ である。

しかしながら，一般には minimal point は一意的ではない。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

文　　献

[1] I. Amemiya, S. Okada and Y. Okazaki : Pre-Radon measures on topological spaces. (to appear).

[2] C. Borell : Gaussian Radon measures on locally convex spaces. Math. Scand. 38(1976), pp.265-284.

[3] R. M. Dudley, J. Feldman and L. Lecam : On seminorms and probabilities, and abstract Wiener spaces. Ann. of Math. 93(1971), pp.390-408.

[4] L. Gross : Abstract Wiener spaces. Proceedings of the Fifth Berkley Symposium, Vol. 2, Part 1, (1965), pp.31-42.

[5] J. Kuelbs : Some results for probability measures on linear topological vector spaces with an application to Strassen's loglog law. J. of Func. Anal., 14(1973), pp.28-43.

[6] I. Mitoma and H. Sato : Minimal point of a Gaussian measure. (to appear).

[7] H. Sato : Gaussian measure on a Banach space and abstract Wiener measure. Nagoya Math. J., 36(1969), pp.65-81.

[8] H. Sato and Y. Okazaki : Separabilities of a Gaussian Radon measure. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 11, No. 3, 1975,

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

pp.287-298.

[9] H. Sato : Banach support of a probability measure in a locally convex space. Probability in Banach spaces, Lecture Notes in Mathematics, 526(1975), pp.221-226.

[10] H. Sato et A. Tortrat : Théorie des probabilités.

—— Prolongements τ-réguliers de lois de probabilité et application aux lois gaussiennes. C. R. Acad. Sc. Paris, t.280(1975), pp.909-911.

[11] W. Schachermayer : Zylindrische Masze und die Radon-Nikodym-Eigenschaft von Banachräumen. Dissertation, Wien (1976).

[12] N. N. Vakhania : On a property of Gaussian distributions in Banach spaces. Sankhyā, Ser. A, Vol. 35, Part 1, (1973), pp.23-28.

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

測度のτ-smooth拡張について

岡崎悦明(九大理)

$(X_\alpha, p_{\alpha\beta}, \mathcal{B}(X_\alpha), \mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ を位相空間 X_α 上の Borel 測度（開集合全体の生成する Borel σ-algebra $\mathcal{B}(X_\alpha)$ 上の測度）の逆系とする。即ち，$\mu_\beta(p_{\alpha\beta}^{-1}(A)) = \mu_\alpha(A)$, $A \in \mathcal{B}(X_\alpha)$, $\alpha<\beta$ とする。このとき測度の逆極限 μ，即ち，$p_\alpha : X = \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$ を projection とするとき，$\bigcup_{\alpha\in A} p_\alpha^{-1}(\mathcal{B}(X_\alpha))$ の生成する σ-algebra 上の測度 μ で $\mu(p_\alpha^{-1}(A)) = \mu_\alpha(A)$, $A \in \mathcal{B}(X_\alpha)$ なるものの存在については，Kolmogorov, Tulcea, Bochner, Raoult らによりいくつかの条件が知られている。ここではこの極限 μ が，$X = \varprojlim X_\alpha$ 上の τ-smooth Borel 測度に拡張できるための条件について調べる。直積測度の場合は[1]において考察されている。そこでは各 μ_α が τ-smooth Borel 測度のとき，直積測度 $\bigotimes_{\alpha\in A}\mu_\alpha$ は，直積空間 $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ 上の τ-smooth Borel 測度に拡張できることが示されている。

1. 空間族が有限個の場合。　S を位相空間とし，μ を Borel 測度とする。μ が τ-smooth とは，上に有向な開集合族 $\{O_\beta\}$ に対して $\sup_\beta \mu(O_\beta) = \mu(\bigcup_\beta O_\beta)$ なることである。

S, T を位相空間とするとき，transition probability P_T^S :

$S \times \mathcal{B}(T) \longrightarrow [0,1]$ が "LSC τ-smooth" とは；(1) 任意の $s \in S$ について，$P^S_T(s,\cdot)$ は τ-smooth (2) T のある開集合の基 $\mathcal{O}$ が存在して，$\forall V \in \mathcal{O}$ に対して，$P^S_T(\cdot, V)$ は S 上で下半連続 の二条件をみたすことである。このとき次を得る。

定理　P^S_T を LSC τ-smooth transition probability, P_S を S 上の τ-smooth Borel 測度とする。このとき $\mathcal{B}(S \times T)$ 上の τ-smooth 測度 P で，$A \in \mathcal{B}(S)$, $B \in \mathcal{B}(T)$ に対して，

$$P(A \times B) = \int_A P_S(ds)\, P^S_T(s, B)$$

なるものが存在する。

証明　Bourbaki [3] §2 n°6 補題 3 と同様な方法で，$f \geqq 0$ が $S \times T$ 上の下半連続関数のとき，$\int f(s,t) P^S_T(s,dt)$ は S 上で下半連続であることがわかる。とくにこのことから，$A \in \mathcal{B}(S \times T)$ に対して，$P^S_T(s, A_s)$ （A_s は s での切り口）は $\mathcal{B}(S)$ - 可測となる。従って $P(A) = \int P_S(ds)\, P^S_T(s, A_s)$, $A \in \mathcal{B}(S \times T)$ で測度が定義される。一般に μ が τ-smooth でかつ f_α が下半連続，$f_\alpha \uparrow f$ のとき，$\mu(f_\alpha) \uparrow \mu(f)$ であるから，ここに定義した P は τ-smooth であり，かつ，定理の条件をみたしている。

上の定理において，P_S が regular τ-smooth 測度であり，P^S_T

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

がより強い条件；(1)′ $P^S_T(s,\cdot)$ は regular τ-smooth (2)′ Tの開集合の基 $\mathcal{O}$ が存在して，$\forall V\in\mathcal{O}$ について，$P^S_T(\cdot,V)$ は S上連続 がみたされていたとする。この時 $\mathbb{P}$ は regular τ-smooth 測度となる。

2. 空間族が可算個の場合。　$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ とする。最初に transition probability の与えられた可算系を考える。

補題　E_i $(i=0,1,\cdots n)$ を位相空間とし，$\forall i$ について LSC τ-smooth transition probability $P^{0,1,\cdots i}_{i+1}:\prod_{j=0}^{i}E_j\times\mathcal{B}(E_{i+1})\to[0,1]$ が与えられているとする。このとき $\forall x_0\in E_0$ に対して，次の式は $\mathcal{B}(\prod_{j=0}^{n}E_j)$ 上の τ-smooth Borel測度を与える。

$$\mathbb{P}_{x_0}(A)=\int_{E_1}\mathbb{P}^0_1(x_0;dx_1)\int_{E_2}\mathbb{P}^{0,1}_2(x_0,x_1;dx_2)\cdots\int_{E_n}\mathbb{P}^{0\cdots n-1}_n(x_0,\cdots,x_{n-1};dx_n)\cdot 1_A(x_0\cdots x_n)$$

但し 1_A は $A\in\mathcal{B}(\prod_{j=0}^{n}E_j)$ の特性関数である。

証明　可算加法性については Neveu[4] 5章，τ-smooth 性については第1節の定理の証明と同様である。

定理　E_i $(i\in\mathbb{N})$ を位相空間とし，LSC τ-smooth transition probability $P^{0,1,\cdots n}_{n+1}:\prod_{i=0}^{n}E_i\times\mathcal{B}(E_{n+1})\to[0,1]$ が与えられているとする。このとき $\forall x_0\in E_0$ に対して，$\mathcal{B}(\prod_{i=0}^{\infty}E_i)$ 上の τ-smooth 測度 $\mathbb{P}_{x_0}$ が存在して，次をみたす。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$A = F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_n \times \prod_{i>n} E_i$ なる形の Borel 集合に対して,

$$P_{x_0}(A) = 1_{F_0}(x_0) \int_{F_1} P^0_1(x_0; dx_1) \cdots \int_{F_n} P^{0,\cdots,n-1}_n(x_1, \cdots x_{n-1}; dx_n).$$

証明　上の補題を使って Neveu [4] 5章と同様に証明できる。

次に，一般の可算逆系の場合を考える。$(X_i, p_{ij}, \mathcal{B}(X_i), \mu_i)$ を Borel 測度の可算逆系で各 p_{ij} $(i<j)$ は上への写像とする。ここで，$i<j$ のとき写像 $p_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$ について積分分解 (desintegration) が成立しているものとする。即ち，すべての $x_i \in X_i$ に対して，$p_{ij}^{-1}(\{x_i\})$ にのっている確率測度 $P^j_i(x_i)(\cdot)$ が存在して，$\mu_j(A) = \int_{X_i} \mu_i(dx_i) P^j_i(x_i)(A)$, $A \in \mathcal{B}(X_j)$ が成立しているものとする。もちろんこのとき，$P^j_i(\cdot)(\cdot)$ は $X_i \times \mathcal{B}(X_j) \longrightarrow [0,1]$ なる transition probability である。

定理　上の仮定のもとに，各 μ_i が τ-smooth 測度とするとき，逆極限 μ は τ-smooth Borel 測度である。

証明　可算加法的な逆極限の存在は，Raoult [ ] により知られる。ところで，$p_n : X = \varprojlim X_n \longrightarrow X_n$ を projection とするとき，$p_n^{-1}(\mathcal{B}(X_n))$ は Borel 集合族を生成するから (Tortrat [6] lemme 2)，逆極限 μ は Borel 測度である。τ-smooth 性を示せばよい。開集合 W^α が $W^\alpha \uparrow W$ のとき $\mu(W^\alpha) \uparrow \mu(W)$ を示す。X の位相の定義により，W^α の

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

中に $p_n^{-1}(O_n)$ の形の開集合 U_β^α をとって $U_\beta^\alpha \uparrow W^\alpha$（$\beta$により）とできる。$U(n)=\bigcup\{U_\beta^\alpha;\ U_\beta^\alpha$ は $p_n^{-1}(O_\beta^\alpha)$ とかけるもの$\}$ とおくと $U(n)\uparrow W$ である。従って任意の $\varepsilon>0$ に対してある n_0 が存在して $\mu(U(n_0))>\mu(W)-\frac{\varepsilon}{2}$ とできる。ここで，$\mu(U(n_0)) = \mu_{n_0}((\bigcup_\beta O_\beta^\alpha))$ であり，μ_{n_0} は τ-smooth 故に $O_{\beta_1}^{\alpha_1},\cdots O_{\beta_\ell}^{\alpha_\ell}$ が存在して $\mu_{n_0}(\bigcup_{i=1}^{\ell} O_{\beta_i}^{\alpha_i})>\mu(W)-\varepsilon$ とできる。W^α は有向だから結局ある α_0 が存在して $\mu(W^{\alpha_0})>\mu(W)-\varepsilon$ となる。

3．一般の逆系の場合．　$(X_\alpha, p_{\alpha\beta}, \mathcal{B}(X_\alpha), \mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ を Borel 測度の逆系，$p_{\alpha\beta}$ は上への写像とし，projection $p_\alpha: X=\varprojlim X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ も上への写像とする。さらにこの逆系は sequentially maximal（Bochner [2]）とする。ここで可算加法的な逆極限 μ の存在を保障するために，$p_{\alpha\beta}: X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ $(\alpha<\beta)$ に対して，積分分解が成りたつものと仮定する。例えば，μ_α, μ_β が Radon 測度であれば積分分解は成り立つ（Bourbaki [3]）。我々はここで，可算加法的な逆極限 μ を $X=\varprojlim_{\alpha\in A} X_\alpha$ 上の τ-smooth な Borel 測度に拡張することを考える。

定理　任意の可算個の順序付けられた indices $I=\{\alpha_0<\alpha_1<\cdots\}\subset A$ に対して $I_0=\{\alpha_1<\alpha_2\cdots\}=I-\{\alpha_0\}$ とおくとき，

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

条件付確率 $P^I_{I_0}(x_{I_0},\cdot)$ ($X_I \xrightarrow{\pi^I_{I_0}} X_{I_0}$ なる projection によるもの)即ち, $\mu_I(A\cap B)=\int_B P^I_{I_0}(x_{I_0},A)\,d\mu_{I_0}$, $A\in\mathcal{B}(X_{\alpha_0})$, $B\in {\pi^I_{I_0}}^{-1}(\mathcal{B}(X_{I_0}))$ は次の条件をみたすとする。

(*) 任意の開集合 $U\subset X_{\alpha_0}$ に対して, $P^I_{I_0}(x_{I_0},U)>0$ μ_{I_0} − a.s

但し $\mu_{I_0}=\varprojlim_{\alpha_n\in I_0}\mu_{\alpha_n}$ は $X_{I_0}=\varprojlim_{\alpha_n\in I_0}X_{\alpha_n}$ 上の τ− smooth Borel 測度(前定理より存在する)である。このとき,逆極限 μ は τ−smooth Borel 測度に拡張される。

証明 [1] の拡張定理によれば,開集合 W^β が, $W^\beta\uparrow X$ のとき, $\mu(W^\beta)\uparrow 1$ を示せばよい。W^β としては $\pi_\alpha^{-1}(U)$ の形のものを考えればよい。$c=\sup_\beta\mu(W^\beta)=\lim_n\mu(W^{\beta_n})$ なる $\beta_n\leqq\beta_{n+1}\cdots$ がとれる。$W=\bigcup_{n=1}^{\infty}W^{\beta_n}$ とおく。W は可算個の indices $I=\{\alpha_0<\alpha_2<\cdots\}$ で定まっているとしてよい。即ち $\pi_I: X\longrightarrow X_I$ projection に対して, $W^{\beta_n}=\pi_I^{-1}(W_0^{\beta_n})$ なる $W_0^{\beta_n}\in\mathcal{B}(X_{\alpha_n})$ が存在する。$\mu(W)=\mu_I(W_0)$, 但し $W_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}W_0^{\beta_n}\subset X$ となる。今 $c<1$ としてみる。すると $\mu_I(X_I-W_0)>0$ であり X_I-W_0 の中に μ_I の support の点 x_I が存在する。いま $x\in X$; $\pi_I(x)=x_I$ がとれる(*sequentially maximal*)。ここで $x\in W^{\beta_0}$ なる β_0 が存在するが index α_0 を大きくとり直して $W^{\beta_0}=\pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\beta_0})$ の形としてよい。すると定理の仮定より,

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$$\mu(W^{\beta_0} - W^{\beta_n}) \geqq \int_{W_0^c} P^{I}_{I_0}(x_{I_0}, U_{\beta_0})\, d\mu_{I_0} > 0$$ となる。

従って $\lim_n \mu(W^{\beta_0} \cup W^{\beta_n}) > c$ となり c の定義に反する。

文献

1. I. Amemiya, S. Okada and Y. Okazaki; Pre-Radon measure on topological space (投稿中)
2. S. Bochner; Harmonic analysis and the theory of probability, Berkeley 1955
3. N. Bourbaki; 積分論 9章 東京図書
4. J. Neveu; Mathematical foundations of the calculus of probability, Holden-Day, Inc. 1965
5. J-P. Raoult; Limites projectives des mesures σ-finies et probabilités conditionnelles, C. R. Acad Sci. Paris, t 260 p 4893 – 4896.
6. A. Tortrat; Sur les lois τ-regulieres, leur produits et leur convolution, Transaction of 6th Prague Conf., 1971 p 839–849.

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

Type 2 Banach 空間について

岡田 進(大阪市大 理)

Banach空間に値をとる独立確率変数列についての大数の強法則，中心極限定理などは空間自身の幾何学的構造と深く関連していることが近年明らかにされつつある。ここではtypeという概念と，その確率論的性質についてHoffmann-Jørgensen and Pisier [2] を中心に報告する。主な結果は次の通り。

1. Chung の条件をみたす任意の独立確率変数列に対して大数の強法則が成立することと，空間が type p であることとは同値である。

2. 独立同分布な $L^2(E)$ に属する任意の確率変数列について中心極限定理が成立することと，空間が type 2 であることとは同値である。

1．Banach空間の type． $(E, \|\ \|)$ を Banach空間，$(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{C}, \mathbb{P})$ を確率空間とする。$(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{C}, \mathbb{P})$ 上のEに値をとる確率変数X（E-v.r.v と略記する）とは，(1) X は $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{C})$ から $(E, \mathcal{B}(E))$ への可測写像（但し $\mathcal{B}(E)$ は E のノルムによる Borel field），(2) E の separable な閉部分空間 E_0 が存在して，$\mathbb{P}(X \in E_0) = 1$ の二条件がみたされるものとする。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

定義　Banach空間 E が type p であるとは，ある定数 $C>0$ が存在して，すべての平均 0 独立な有限個の E-v.r.v $X_1, \cdots, X_n$ に対して，$\mathbb{E}\|\sum_{j=1}^n X_j\|^p \leqq C \cdot \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\|X_j\|^p$ となること。但し平均 $\mathbb{E}X_j = 0$ とは Bochner 積分である。

$(\varepsilon_j)_{j=1}^\infty$ を Standard Bernoulli 列 ($\mathbb{P}(\varepsilon_j = \pm 1) = \frac{1}{2}$), $(\eta_j)_{j=1}^\infty$ を $\eta_j \sim N(0,1)$ なる正規確率変数で独立とする。

補題　次の条件は同値である。

(1). E は type p

(2). ある定数 $A>0$ が存在して，任意有限個の点 $x_1 \cdots x_n \in E$ に対して，$\mathbb{E}\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\|^p \leqq A \cdot \sum_{j=1}^n \|x_j\|^p$ が成りたつ。

(3). ある定数 $B>0$ が存在して，任意有限個の点 $x_1, \cdots, x_n \in E$ に対して，$\mathbb{E}\|\sum_{j=1}^n \eta_j x_j\|^p \leqq B \sum_{j=1}^n \|x_j\|^p$ が成りたつ。

証明　(1) $\Rightarrow$ (2) は自明。(2) $\Leftrightarrow$ (3) は Hoffmann-Jørgensen [1] による。(2) $\Rightarrow$ (1). ω' を fix して考えると (2) より，$\mathbb{E}_\omega\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j(\omega) X_j(\omega')\|^p \leqq A \cdot \sum_{j=1}^n \|X_j(\omega')\|^p$ となる。ω' について平均をとり，Fubini の定理から，$\mathbb{E}\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j X_j\|^p \leqq A \cdot \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\|X_j\|^p$ を得る。Hoffmann-Jørgensen [1] より $\mathbb{E}\|\sum_{j=1}^n X_j\|^p \leqq 8^p \cdot \mathbb{E}\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j X_j\|^p$ が成りたつから (1) を得る。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$(x_j)_{j=1}^{\infty}$ をEの点列とするとき，$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j x_j$ が確率収束すれば $L^p(E)$ $(0<p<\infty)$ で収束することが知られている(Hoffmann-Jørgensen [1])。いま $L=\{\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j x_j ;\ \sum \varepsilon_j x_j$ は確率収束する$\}$ とおくと，Lは $L^p(E)$ $(0<p<\infty)$ の閉部分空間であり，かつL上ではすべての $L^p(E)$-位相は一致する(閉グラフ定理)。

例　定義より Hilbert空間は type 2 であり，従って任意の $p\in[1,2]$ に対して type p である。これから $L^p(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$は実数) は $p\geq 2$ なら type 2 であり，$p\in[1,2]$ なら type p である。実際 $\mathbb{R}$ は type p だから，$f_1,\cdots f_n \in L^p(\mathbb{R})$ に対して $E_{\omega}|\sum_{1}^{n}\varepsilon_j(\omega)\cdot f_j(\omega')|^p \leqq C\cdot\sum_{1}^{n}|f_j(\omega')|^p$，$\omega'$ は固定しておく。ω' で平均をとって Fubini の定理を使えばよい。

例　0に収束する数列全体 c_0 は type 2 でない。実際，任意の $C>0$ に対して，$n^2>n\cdot C$ なる n をとり，$y_1\cdots y_n\in c_0$ を，

$$y_1 = (1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,\ ---,1,-1,0,0\cdots)$$
$$y_2 = (\underbrace{1,1}_{2},\underbrace{-1,-1}_{2},\underbrace{1,1}_{2},\underbrace{-1,-1}_{2},\ ---,-1,-1,0,0\cdots)$$
$$\vdots$$
$$y_n = (\underbrace{1,\cdots\cdots 1}_{2^{n-1}\text{個}},\underbrace{-1,\cdots\cdots -1}_{2^{n-1}\text{個}},0,0\cdots)$$

とおけば，y_j の k-成分を y_j^k とするとき，$\bigcup_{k=1}^{2^n}\{(y_j^k)_{j=1}^n\} = \{-1,1\}^n =$ 1と-1をn個かってにならべたもの全体，だから，$\forall\omega$ fixed について，$\|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j(\omega)y_j\|_{c_0}^2 = [\sup|\sum_1^n\varepsilon_j(\omega)y_k^j|]^2 = n^2 > n\cdot C = C\cdot\sum_{j=1}^n\|y_j\|_{c_0}^2$.

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

2. 大数の強法則. E-v.r.v の列 $\{X_n\}$ についての次の条件は Chung の条件と呼ばれている。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\,\mathbb{E}\|X_n\|^p < \infty$$

ここでは, Chung の条件のもとでの大数の強法則, i.e., $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \to 0$ (a.s), について考える。

補題(級数論における Kronecker の補題) $p_n > 0$ は単調に発散し, かつ $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ を Banach 空間 E における収束級数とする。このとき $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_n}\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = 0$ (E で収束)となる。

定理 $1 \leqq p \leqq 2$ とする. 次の条件は同値である。

(1). 任意の Chung の条件をみたす平均 0, 独立な E-v.r.v の列 $\{X_n\}$ について $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \to 0$ (a.s), 即ち大数の強法則が成りたつ。

(2). E は type p.

証明 (2) ⇒ (1) 仮定より $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} X_j$ は $L^p(E)$ で収束するから, 概収束する(ITO - Nisio [3])。従って上の補題より (1) が成立する。
(1) ⇒ (2). $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-p}\|x_j\|^p < \infty$ なる E の点列 (x_n) をとる。この時 (1) の仮定より, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \to 0$ (a.s) であり, 第一節で見たように, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \to 0$ in $L^p(E)$ $(0<p<\infty)$ となる。
ここで $F = \{(x_j) \in E^{\infty};\ \sup_n \frac{1}{n}\{\mathbb{E}\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\|\}^{\frac{1}{p}} < \infty\}$, $F_0 = \{(x_j) \in E^{\infty};$

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-p}\|x_j\|^p < \infty\}$ とおくと，F, F_0 はそれぞれノルム $|x| = \sup_n \frac{1}{n}\{\mathbb{E}\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\|^p\}^{\frac{1}{p}}$, $|x|_0 = (\sum_{j=1}^{\infty} j^{-p}\|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}}$ によってBanach空間であり，かつうめこみ $\iota : F_0 \to F$ は閉グラフを持つ。従って ι は連続である。故にある定数 $C>0$ が存在して，E の任意の有限個の点 $x_1, \cdots, x_n$ に対して，$\mathbb{E}\|\sum_{1}^{n}\varepsilon_j x_j\|^p \leqq C \cdot n^p \cdot \sum_{1}^{n} j^{-p}\|x_j\|^p$ が成りたつ。いま $x_1, \cdots x_n \in E$ と任意の整数 N に対して，$y_j = 0 \quad 1 \leqq j \leqq N$，$y_j = x_{j-N} \quad N < j \leqq N+n$ とおいてこの不等式に代入すれば，$\mathbb{E}\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\|^p = \mathbb{E}\|\sum_{j=1}^{N+n}\varepsilon_j y_j\|^p \leqq C\cdot(N+n)^p \sum_{j=N+1}^{N+n} j^{-p}\|x_{j-N}\|^p \leqq C\left(\frac{N+n}{N+1}\right)^p \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p$ となる。N は任意だから，$\mathbb{E}\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\|^p \leqq C\cdot \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p$ を得る。第一節の補題より E は type p である。

$A \in \mathfrak{A}$ のとき，1_A で A の特性関数をあらわすことにする。次に，$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ が $L^1(E)$ で 0 に収束する条件を与える。

定理　E を type p $(1 \leqq p \leqq 2)$ とし，$\{X_j\}$ を独立平均 0 の E-v.r.v の列で，次をみたすとする。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，正数列 $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ が存在して $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{a_j}{j}\right)^p < \infty$，$\mathbb{E}\{\|X_j\|\cdot 1_{(\|X_j\| \geqq a_j)}\} \leqq \varepsilon$ がすべての j について成立。

このとき $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \longrightarrow 0$ in $L^1(E)$ となる。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

証明 $X_j' = X_j$ if $\|X_j\| < a_j$, $X_j' = 0$ if $\|X_j\| \geqq a_j$ とし, $X_j'' = X_j' - \mathbb{E} X_j'$ とおく。$\|X_j''\| \leqq 2a_j$ であり, $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-p} \mathbb{E}\|X_j''\|^p < \infty$。前定理より $\frac{1}{n}\sum_1^n X_j'' \to 0$ (a.s) であるが, Kroneckerの補題を用いて計算すれば, $\frac{1}{n}\sum_1^n X_j'' \to 0$ in $L^1(E)$ となる。さらに, $\|\mathbb{E} X_j'\| \leqq \varepsilon$, $\mathbb{E}\|X_j - X_j'\| \leqq \varepsilon$ に注意すれば, $\mathbb{E}\|\sum_{j=1}^n X_j\| \leqq \mathbb{E}\|\sum_{j=1}^n X_j''\| + 2n\varepsilon$ となる。故に $\limsup \frac{1}{n}\mathbb{E}\|\sum_{j=1}^n X_j\| \leqq 2\varepsilon$.

3. 中心極限定理. E'をBanach空間Eの dualとする。μが平均0で2次のモーメントをもつ(i.e., $\int\|x\|^2\mu(dx) < \infty$), μの covariance functional $R_\mu(x', y')$ を $\int_E \langle x', x\rangle\langle y', x\rangle \mu(dx)$, $x', y' \in E'$ で定義する。E上の Radon確率測度μが pre-Gaussianとは (1) 平均0で2次のモーメントをもち (2) E上のRadon確率測度γが存在して, $\hat{\gamma}(x') = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\langle x', x\rangle^2 \mu(dx)\right)$ となることである。但し, $\hat{\gamma}(x') = \int_E e^{i\langle x', x\rangle}\gamma(dx)$。

μをE上の確率測度とし, $\{X_n\}$ を独立でμと同一分布なる E-v.r.v の列とする。いま $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n X_j$ とおき, μ_nをZ_nの分布とする。このときμが the domain of normal attraction に属するとは, E上の Gaussian Radon 測度γが存在して, $\mu_n \to \gamma$ (ノルムに関しての弱位相) なること, 即ち, 任意の$(E, \|\ \|)$上の有界連続関数fに対して, $\int f(x)\mu_n(dx) \to \int f(x)\gamma(dx)$

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

となることである。

定理 Radon 確率測度 μ が平均 0 で 2 次のモーメントをもち，かつ the domain of normal attraction に属するならば，μ は pre-Gaussian である。

証明 μ_n の極限 γ が $\hat{\gamma}(x') = \exp\left(-\frac{1}{2}R_\mu(x', x')\right)$ となることを示せばよい。よく知られた不等式 $|e^{it}-1-it+\frac{1}{2}t^2| \leqq |t|^2$, $|e^{it}-1-it+\frac{1}{2}t^2| \leqq |t|^3$ $(t \in \mathbb{R})$ により，$|\hat{\mu}(x')-1+\frac{1}{2}R_\mu(x', x')| \leqq \int_{\|x\| \geqq a}\|x'\|^2\|x\|^2\,\mu(dx) + a^3\|x'\|^3$ を得る。μ_n は Z_n の分布だから，$\hat{\mu}_n(x') = \left\{\hat{\mu}\left(\frac{x'}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n$ である。従って $\forall a > 0$, $\forall n$ について，$\left|n\left\{\hat{\mu}\left(\frac{x'}{\sqrt{n}}\right)-1\right\}+\frac{1}{2}R_\mu(x', x')\right| \leqq a^3 n^{-\frac{1}{2}}\|x'\|^3 + \int_{\|x\| \geqq a}\|x'\|^2\|x\|^2\,\mu(dx)$ となり，$n\left\{\hat{\mu}\left(\frac{x'}{\sqrt{n}}\right)-1\right\} \to -\frac{1}{2}R_\mu(x', x')$ $(x' \in E')$ となる。簡単な計算により $n\left\{\hat{\mu}\left(\frac{x'}{\sqrt{n}}\right)-1\right\}^2 \to 0$ が示されるから，$\log\hat{\mu}_n(x') \to -\frac{1}{2}R_\mu(x', x')$ が成りたつ。

(S, Σ, μ) を非負測度空間とし，$\Sigma_0 = \{A \in \Sigma\,;\ \mu(A) < \infty\}$ とする。X を平均 0 分散 μ の Gaussian random 測度とする。即ち $A \in \Sigma_0$ に対して $X(A)$ は $N(0, \mu(A))$ に従い，$A_1 \cdots A_n \in \Sigma_0$ が disjoint のとき，$\{X(A_i)\}_{i=1}^{n}$ は互いに独立であり，$X\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} X(A_i)$ がみたされるとする。X は確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ 上に実現されているものとする。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

補題 X を Gaussian random 測度とし，E を type 2 Banach 空間とする。このとき，連続線形写像 $L^2(S,\Sigma,\mu;E)\ni f \longmapsto \int f\,dX \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};E)$ が次の条件をみたすように一意に定まる。

(*) $f=\sum_1^n x_j 1_{A_j}$ とかけるとき，$\int f\,dX=\sum_{j=1}^n x_j\cdot X(A_j)$。

さらにこのとき次のことが成立する。

(1) ある定数 $C>0$ が存在して $\mathbb{E}\|\int f\,dX\|^2 \leqq C\cdot\int \|f\|^2 d\mu$ がすべての $f\in L^2(S,\Sigma,\mu;E)$ について成立.

(2) $\mathbb{E}\{\exp(i\langle x',\int f\,dX\rangle)\}=\exp\left(-\frac{1}{2}\int_S\langle x',f(s)\rangle^2\mu(ds)\right)$ がすべての $f\in L^2(S,\Sigma,\mu;E)$ について成立.

証明 $\mathcal{S}\subset L^2(S,\Sigma,\mu;E)$ を Σ_0－step function の全体とする。$f\in\mathcal{S}$ については (*) で $\int f\,dX$ を定義する。$f\in\mathcal{S}$ は $f=\sum_1^n x_j 1_{A_j}$ $\{A_j\}$: disjoint とかけるが，E は type であるから $\mathbb{E}\|\int f\,dX\|^2\leqq C\sum_{j=1}^n\|x_j\|^2\mu(A_j)=C\int\|f\|^2d\mu$ （定数 $C>0$ 存在）となり $f\longmapsto\int f\,dX$ は $\mathcal{S}\longrightarrow L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};E)$ への連続線形写像である。$\mathcal{S}$ は $L^2(S,\Sigma,\mu;E)$ で dense だから，この写像は $L^2(S,\Sigma,\mu;E)$ へ拡張される。(2) の条件を見るには，$f\in\mathcal{S}$ なる f のみについて調べれば十分である。$f=\sum x_j 1_{A_j}$, A_j: disjoint のとき，$\mathbb{E}\exp(i\langle x',\int f\,dX\rangle)=\mathbb{E}\prod_{i=1}^n \exp(i\langle x',x_j\rangle X(A_j))=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\langle x',x_j\rangle^2\mu(A_j)\right)$
$=\exp\left(-\frac{1}{2}\int_S\langle x',f(s)\rangle^2\mu(ds)\right)$.

定理 Eが type 2 であることと，E上のすべての平均 0，2次のモーメントをもつ Radon 確率測度が pre-Gaussian であることとは同値である。

証明 (⇒). Eを type 2 とする。測度空間 $(E, \mathcal{B}(E), \mu)$ から作った Gaussian random 測度を X とする。ここに μ は任意の，平均 0，2次のモーメントを持つ Radon 確率測度である。このとき関数 $f(x)=x$ は $L^2(E, \mathcal{B}(E), \mu\ ;\ E)$ の元だから先の補題から，$\int x\,dX$ が E-v.r.v として定義される。$\int x\,dX$ の特性関数は $\exp\left(-\frac{1}{2}R_\mu(x', x')\right)$ であり，従って μ は pre-Gaussian である。(⇐). $x_j \neq 0$，$\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|^2 = 1$ なる E の点列をとる。$\lambda_j = \|x_j\|^2$，$y_j = \|x_j\|^{-1}\cdot x_j$，$\mu = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\left(\frac{1}{2}\delta_{y_j} + \frac{1}{2}\delta_{-y_j}\right)$ とおく（δ_x は x の point mass）。μ は平均 0 で 2次のモーメントをもつから，E上の Radon 測度 γ が存在して，$\hat{\gamma}(x') = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\langle x', x\rangle^2 d\mu\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\langle x', x_j\rangle^2\right)$ をみたす。いま $(\eta_j)_{j=1}^{\infty}$ を独立な正規確率変数列とするとき，$X_n = \sum_{j=1}^{n}\eta_j x_j$ とおけば，

$$E\, e^{i\langle x', X_n\rangle} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_1^n\langle x', x_j\rangle^2\right) \longrightarrow \hat{\gamma}(x') \quad (n\to\infty)$$ となる。

従って $\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j x_j$ は概収束する (ITO-Nisio [3])。従って第一節で見たように $\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j x_j$ は $L^2(E)$ で収束する。即ち Banach-Steinhaus の定理より，$\ell^2(E) \ni (x_j) \longmapsto \sum_{j=1}^{\infty}\eta_j x_j \in L^2(E)$ は連続である。第一節の補題より E は type 2 となる。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

定理　Eがtype 2であることと，E上の任意の平均0で2次のモーメントをもつRadon確率測度がthe domain of normal attractionに属することとは同値である。

証明　$\Leftarrow$は先行する二つの定理より明らかである。逆にEはtype 2としよう。μを平均0, 2次のモーメントをもつ任意のRadon確率測度とする。Σをμ-可測集合全体とし，平均0，分散μのGaussian random測度をXとする。$f \in L^2(E, \Sigma, \mu; E)$に対して$\int f dX = Tf$と書く$\left(T : L^2(E, \Sigma, \mu; E) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; E)\right)$。

$f(x) = x$なるE上のfunction fは$L^2(E, \Sigma, \mu; E)$の元だから，$U = Tf$が定義され，先の補題よりUはE-valuedなGaussian r.v.である。$\{X_n\}$をμと同分布で独立なE-v.r.v.の列とし，$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n X_j$，$Z_n$の分布を$\mu_n$とする。ここで$Z_n$の分布は，Uの分布に収束することを示せばよい。まず任意のm（整数>0）に対してstep function f_mを$\| f - f_m \|_{L^2(E,E)} \leqq 2^{-m-1}$かつ$\int f_m(x) \mu(dx) = 0$なるようにとる。このとき，

$Z_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n f_m(X_j)$，$U_m = Tf_m$とおけば$f_m$の値域は有限次元であるから，有限次元の場合の中心極限定理により，

$Z_{n,m}$の分布$\longrightarrow$ U_mの分布（弱収束，mは正の整数）となる。

Eはtype 2であるから，$\mathbb{E} \| Z_{n,m} - Z_n \| \leqq \left\{ \mathbb{E} \| Z_{n,m} - Z_n \|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$

$\leqq \left\{ C \, n^{-1} \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \| X_j - f_m(X_j) \|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$　（定数$C > 0$存在）

$= C^{\frac{1}{2}} \| f - f_m \|_{L^2(E;E)} \leqq C^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-m-1}$となる。さらに先の補

題により $\mathbb{E}\|U_m - U\| \leqq \{\mathbb{E}\|Tf_m - Tf\|^2\}^{\frac{1}{2}} \leqq \{c' \, \mathbb{E}\|f_m - f\|^2\}^{\frac{1}{2}}$ $\leqq c'^{\frac{1}{2}} \, 2^{-m-1}$ （定れ c' 存在）。いま φ を任意の有界Lipschitz関数とする，即ち，$|\varphi(x)| \leqq A \quad \forall x \in E$，$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqq A' \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in E$ とする。このとき，$|\mathbb{E}\varphi(Z_n) - \mathbb{E}\varphi(U)| \leqq \mathbb{E}|\varphi(Z_n) - \varphi(Z_{n,m})| + |\mathbb{E}\varphi(Z_{n,m}) - \mathbb{E}\varphi(U_m)| + \mathbb{E}|\varphi(U_m) - \varphi(U)| \leqq A \cdot c^{\frac{1}{2}} 2^{-m} + |\mathbb{E}\varphi(Z_{n,m}) - \mathbb{E}\varphi(U_m)|$ より，$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\varphi(Z_n) = \mathbb{E}\varphi(U)$ となる。ここでE上の有界Lipschitz関数全体はEの二点を分離し，かつEの位相はすべての有界Lipschitz関数全体を連続にする最弱位相である（例えば $\frac{\|x\|}{1+\|x\|} \equiv \varphi(x)$ は有界Lipschitz関数であることに注意）。従ってこのとき Z_n の分布は，Gaussian E-v.r.v U の分布に弱収束する。

文献

1. J.Hoffman-Jørgensen ; Studia math 52 (1974) P159-186
"Sums of independent Banach space valued random variables"

2. J. Hoffmann-Jørgensen and G. Pisier ; The Ann. of prob., 4 (1976) P587-599
"The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces"

3. K. ITO and M. Nisio ; Osaka J. Math., 5 (1968) P35-48
"On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables"

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

定常ガウス過程と定常クリフォード過程

野田明男

序　平均0のガウス分布は多くの場合 abstract Wiener space の測度と考えることができる。従って定常ガウス過程 $\{\xi(n);\, n\in\mathbb{Z}\}$ は、その不変測度が abstract Wiener space (H, B) の測度 μ であるとすると、covariance operator と呼ばれる H 上の有界作用素の列 $\{T_n\}$ によって特徴づけられる。そして $\xi(n)$ の確率空間 (Ω, Σ, P) の L^2 空間と $\xi(n)$ を $\xi(n+1)$ に移すシフトが induce する $L^2(P)$ 上のユニタリ作用素は、自由 Bose 場の理論に出てくる可分な実ヒルベルト空間 R に対する対称 Fock 空間 $\Gamma(R)$ と R 上のユニタリ U に対する second quantized operator $\Gamma(U)$ を使って次のように表現される。(H, T_n) に対し minimal unitary dilation (R, U) を構成すると、$\Gamma(R)$ が $L^2(P)$ とユニタリ同値になりシフトは $\Gamma(R)$ 上でみると $\Gamma(U)$ と一致する。このように定常ガウス過程を Γ-construction を使って定式化し、それをエルゴード性の研究に適用するのがこの報告の第一の目的である。そして一次元定常過程のよく知られた丸山の定理と合致する結果を得る。一方 Bose 場と対比して Fermi 場の理論がある。そこでは反対称 Fock 空間 $\Lambda(R)$

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

とその上の second quantized operator $\Lambda(U)$ が出てくる。この Λ-construction を Γ のかわりに使って covariance T_n によって決まる新しい定常過程を定義し、そのエルゴード性を調べるのが才二の目的である。この定常過程は非可換な測度—Clifford 分布—に従っているので、定常クリフォード過程と呼ぶことにする。

§1 Γ-construction と Λ-construction

可分な実ヒルベルト空間 H とその上の contraction T に対し、$\Gamma(H)$ と $\Gamma(T)$ 及び $\Lambda(H)$ と $\Lambda(T)$ を定義し、その基本的性質を述べる。

H_c を H の複素化、$\mathcal{F}^n(H)$ を H_c の n 重テンソル積とし、$\mathcal{F}(H)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}^n(H)$ とする。$\mathcal{F}(H)$ を H 上の Fock 空間といい、$\mathcal{F}^0(H)=\mathbb{C}$ の元 1 を Ω と書いて真空と呼ぶ。n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元 σ に対し、$\mathcal{F}^n(H)$ 上のユニタリ U_σ を

$$U_\sigma(x_1\otimes\cdots\cdots\otimes x_n)=x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\cdots\otimes x_{\sigma(n)}\qquad(x_i\in H_c)$$

によって定義し、

$$S_n=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}U_\sigma,\qquad A_n=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\sigma)\,U_\sigma$$

とする。S_n と A_n は $\mathcal{F}^n(H)$ 上の直交射影となり、その値域をそれぞれ $\Gamma^n(H)$, $\Lambda^n(H)$ と書く。$\Gamma(H)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\Gamma^n(H)$ を対称 Fock 空間、$\Lambda(H)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\Lambda^n(H)$ を反対称 Fock 空間と呼ぶ。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$x\in H_c$ に対し、 $C(x)(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=\sqrt{n+1}\,x\otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_n$ と定義すると $C(x)$ は $\mathcal{F}^n(H)\to\mathcal{F}^{n+1}(H)$ への有界作用素となり、$A(x)=C(x)^*$ は $\mathcal{F}^n(H)\to\mathcal{F}^{n-1}(H)$ への有界作用素となる。$C(x)$ を creation operator，$A(x)$ を annihilation operator という。

<u>$\Gamma(H)$ の Segal 表現</u> （I. E. Segal [9]）

$x\in H$ に対し、$\bigcup_{n=0}^{\infty}\Gamma^n(H)$ 上の作用素 $\phi(x)=SC(x)S+SA(x)S$ は essentially self-adjoint operator となる。ここに $S=\bigoplus_{n=0}^{\infty}S_n$ は $\Gamma(H)$ への射影である。このとき次の事実が示される；

(i) $\{\phi(x);x\in H\}$ は可換である。(ii) Ω は $\{\phi(x);x\in H\}$ に対し cyclic vector となる。

$\{e^{i\phi(x)};x\in H\}$ から生成される von Neumann algebra を $\mathcal{M}$ とし、$u\in\mathcal{M}$ に対し、$\mathrm{Tr}(u)=(u\Omega,\Omega)_{\Gamma(H)}$ と定義すると $(\mathcal{M},\mathrm{Tr})$ は可換な probability gage space となる。従って確率空間 (M,μ) によって次のように表現される。

$L^\infty(M,\mu)$ から $\mathcal{M}$ の上への algebraic isomorphism τ が存在して

$$\mathrm{Tr}(\tau(f))=\int_M f(m)\,d\mu(m)\qquad(f\in L^\infty(M,\mu))$$

となる。さらに L^∞ から $\Gamma(H)$ への写像 D_p : $D_p(f)=\tau(f)\Omega$ は $L^2(M,\mu)$ から $\Gamma(H)$ へのユニタリに拡張される。我々は D_p の下で $L^2(M,\mu)$ と $\Gamma(H)$ を同一視する。

<u>注意</u> $(e^{i\phi(x)}\Omega,\Omega)_{\Gamma(H)}=e^{-\frac{1}{2}\|x\|_H^2}$ となることに注意すると (M,μ) は abstract Wiener space の測度として実現される。そし

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

て$\phi(x)$に対応する(M,μ)上のGaussian random variableを$\varphi(x)$とすると、$\Gamma^n(H)$の元$\underbrace{x\otimes\cdots\otimes x}_{n}$は$n$次のWick積

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}:\varphi(x)^n:=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{\sqrt{n!}}{k!(n-2k)!}\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right)^k\varphi(x)^{n-2k}$$

に対応することを注意する。

$\Lambda(H)$のSegal表現（I. E. Segal [10]）

$x\in H_c$に対し、$B(x)=AC(x)A+AA(x^*)A$は$\Lambda(H)$上の有界作用素となる。ここにH_cの元$\xi+i\eta$に対し$(\xi+i\eta)^*=\xi-i\eta$とし、$A=\bigoplus_{n=0}^{\infty}A_n$は$\Lambda(H)$への射影である。このとき次の事実が示される；(i) $B(x)B(y)+B(y)B(x)=2(x,y^*)_{H_c}I$。(ii) Ωは$\{B(x);x\in H_c\}$に対しcyclic vectorとなる。

$\{B(x);x\in H_c\}$から生成されるvon Neumann algebraを$\mathcal{B}$とし、$u\in\mathcal{B}$に対し、$Tr(u)=(u\Omega,\Omega)_{\Lambda(H)}$と定義すると$(\mathcal{B},Tr)$はprobability gage spaceとなる。$\mathcal{B}=L^\infty(\mathcal{B},Tr)$から$\Lambda(H)$への写像$D_\Lambda: D_\Lambda u=u\Omega$は$L^2(\mathcal{B},Tr)$から$\Lambda(H)$へのユニタリに拡張される。我々は$D_\Lambda$の下で$\Lambda(H)$と$L^2(\mathcal{B},Tr)$を同一視する。$(\mathcal{B},Tr)$はClifford分布と呼ばれる。

Clifford分布の顕著な性質としてガウス分布と共有する次の事実が示される。Hの部分空間Kに対し$\{B(x);x\in K_c\}$から生成されるvon Neumann algebraを$\mathcal{B}(K)$と書く。$u\in\mathcal{B}(K)$, $v\in\mathcal{B}(K^\perp)$に対し、$Tr(uv)=Tr(u)Tr(v)$が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

Second quantization

H_1からH_2へのcontraction Tに対し、常に

$$T(y+iz)=Ty+iTz \quad (y,z\in H_1)$$

によってH_{1c}からH_{2c}へのcontractionに拡張する。そして

$$\mathcal{F}(T)(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=Tx_1\otimes\cdots\otimes Tx_n\ ,\quad \mathcal{F}(T)\Omega=\Omega$$

によって$\mathcal{F}(H_1)$から$\mathcal{F}(H_2)$へのcontraction $\mathcal{F}(T)$を定義する。明らかに$\Gamma(T)=\mathcal{F}(T)_{|\Gamma(H_1)}$は$\Gamma(H_1)$から$\Gamma(H_2)$への、$\Lambda(T)=\mathcal{F}(T)_{|\Lambda(H_1)}$は$\Lambda(H_1)$から$\Lambda(H_2)$へのcontractionとなる。以下に述べる性質と定理1は$\Gamma(T)$, $\Lambda(T)$両者に対して成立するが、Λに対してのみ記す。

TがH_1からH_2へのisometryならば、

$$\Lambda(T)B(x)=B(Tx)\Lambda(T)$$

となるので、$\Lambda(T)$は$\mathcal{B}(H_1)$から$\mathcal{B}(H_2)$への$*$-isomorphismとなる。特にH上のユニタリUに対しては、$\Lambda(U)$は$\mathcal{B}(H)$上の$*$-automorphismとなる。さらにTがH上の直交射影ならば、$\Lambda(T)$は条件付平均値の性質をもつ。つまり

$$\Lambda(T)(uwv)=u(\Lambda(T)w)v \quad (u,v\in\mathcal{B}(\mathrm{Ran}\,T),\ w\in\mathcal{B}(H))$$

が成立する。

定理1　H上のcontraction Tに対し、$\Lambda(T)$はdoubly Markovianである。つまり(i) $L^p(\mathcal{B},Tr)$上のcontraction operatorに拡張される$(1\le p\le\infty)$。(ii) completely positiveである。(iii) Ωを不

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

変にする。(ii) $Tr(\Lambda(T)u) = Tr(u)$ ($u \in L^1(\mathcal{B}, Tr)$)。

$\Gamma(T)$ の positivity は E. Nelson [5] による。$\Lambda(T)$ のそれは R. Schrader と D.A. Uhlenbrock [7] によって示された。我々は単に positive であるだけでなく、Stinespring [12] の定義した概念である completely positivity が成立することを注意した。

§2 定常ガウス過程と定常クリフォード過程

可分な実ヒルベルト空間 H に対し、abstract Wiener space とその測度を (H, B, μ) で表わす。μ を不変測度にもつ B 上の定常ガウス過程 $\{\xi(n); n \in \mathbb{Z}\}$ を考えよう。$\xi(n)$ を定義する確率空間を (Q, Σ, P) とする。$x \in H$ に対し、$\langle \xi(n), x \rangle$ は $L^2(P)$ の元として定義され、平均 0、分散 $\|x\|^2$ のガウス分布に従う。$\xi(n)$ の covariance は H 上の有界作用素の列 $\{T_n\}$ によって

$$(\langle \xi(n), x \rangle, \langle \xi(m), y \rangle)_{L^2(P)} = (T_{n-m}x, y)_H$$

と表わされる。T_n は次の (i)(ii)(iii) をみたす。

(i) $T_0 = I$, (ii) $T_{-n} = T_n^*$, (iii) 正定値性。

逆に (i)(ii)(iii) をみたす T_n に対し、それを covariance operator とする定常ガウス過程 $\xi(n)$ が存在する。

$\{\langle \xi(n), x \rangle; x \in H, n \in \mathbb{Z}\}$ から生成される $L^2(P)$ の実閉部分空間を $\mathcal{R}$ とする。$\langle \xi(n), x \rangle$ を $\langle \xi(n+1), x \rangle$ に移すシフト U は $\mathcal{R}$ 上のユニタリになる。$x \in H$ に $\langle \xi(0), x \rangle \in \mathcal{R}$ を対応させる写像 i

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

は isometry となり、$T_n = i^* \circ U^n \circ i$ となるので、(R, U) は (H, T_n) の minimal unitary dilation となる。$\{\langle \xi(n), x \rangle ; x \in H\}$ を可測にする最小の σ-field を Σ_n とする。$\Sigma = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma_n$ と仮定しても一般性を失なわない。$L^2(Q, \Sigma_0, P)$ は $L^2(B, \mu)$ と考えられ、従って Segal 表現によって $\Gamma(H)$ と同一視される。同様に $L^2(Q, \Sigma, P)$ は $\Gamma(R)$ と同一視される。シフトが induce する $L^2(Q, \Sigma, P)$ 上のユニタリは $\Gamma(R)$ 上でみると $\Gamma(U)$ に他ならないことがわかる。こうして

$$(H, T_n) \xrightarrow[\text{minimal unitary dilation}]{} (R, U) \xrightarrow[\Gamma\text{-construction}]{} (\Gamma(R), \Gamma(U), \Gamma(H))$$

という手順で定常ガウス過程を定式化することができる。$\Gamma(H)$ は時刻 0 の状態を、$\Gamma(U)$ はシフトの automorphism を表わす。我々は Γ-construction のかわりに Λ-construction を用い、$(\Lambda(R), \Lambda(U), \Lambda(H))$ を構成する。$\Lambda(H)$ は時刻 0 の状態、$\Lambda(U)$ は時間発展を表わす automorphism と考えて、これを定常クリフォード過程と呼ぶことにする。

covariance T_n に対し、その minimal unitary dilation U を R_c 上のユニタリに拡張すると、$U^n = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n} dF(\lambda)$ とスペクトル表現される。従って $T_n = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n} dE(\lambda)$, $(E(\lambda) = i^* \circ F(\lambda) \cdot i)$ と表現され、$E(\lambda)$ は H_c 上の作用素で λ について増大し右連続、$E(0) = 0$, $E(2\pi) = I$ となる。$E(\lambda)$ を T_n のスペク

トル測度と呼ぶ。

さてcovariance T_nによって決まる二種類の定常過程のエルゴード性を考察しよう。まず混合性に対しては、二つの定常過程の間に差異はなく、$\mathcal{F}(R)$上のユニタリ$\mathcal{F}(U)$の混合性と同値になる。そしてそれはUに対する条件：

$$n\to\infty \text{ のとき、} (U^n a, b)_R \to 0 \quad (a, b \in R)$$

で表わされる。同様に弱混合性も条件：

$$n\to\infty \text{ のとき、} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |(U^k a, b)_R| \longrightarrow 0 \quad (a, b \in R)$$

に帰着される。このことから次の定理2を得る。

<u>定理2</u> (i) 混合的であるための必要十分条件は、$n\to\infty$のときT_nが0に弱収束することである。従ってスペクトル測度$E(\lambda)$が絶対連続ならば混合的となる。
(ii) 弱混合的であるための必要十分条件は、スペクトル測度$E(\lambda)$が連続となることである。

混合性と異なり二つの定常過程のエルゴード性は同値ではない。その違いは次の定理3によってわかる。

<u>定理3</u> (i) 定常ガウス過程がエルゴード的となるための必要十分条件は、スペクトル測度$E(\lambda)$が連続となることである。 (ii) 定常クリフォード過程がエルゴード的となるための必要十分条件は、$E(\lambda)$の不連続点が存在してもπのみで、しかも$\|z\| \leq 1$なる$z \in H$が存在して

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$$(E(\pi)-E(\pi-0))x = (x, z)_H z \quad (x \in H)$$

となることである。

covarianceの簡単で重要な例としてH上のρ-contraction Tで与えられるものを考えよう。

$$T_n = \rho^{-1} T^n \ (n \geqq 1),\ T_0 = I,\ T_n = \rho^{-1} T^{*|n|} \ (n \leqq -1)。$$

このT_nをcovarianceにもつ二つの定常過程のエルゴード性を調べよう。

Tは次のように標準分解される（Racz [1]）。
分解$H = H_0 \oplus H_1$はTをreduceし、$T|H_0$はユニタリとなり、$T|H_1$はそれから作られるminimal unitary dilation U_1のスペクトルが絶対連続となる。

<u>定理4</u> (i) $0<\rho<1$のとき、ρ-contraction Tに対応する二つの定常過程は常に混合的である。
(ii) $\rho \geqq 1$のとき、ρ-contraction Tに対応する定常過程が混合的であるための必要十分条件は、$T^n|H_0$が0に弱収束することである。弱混合的であるための必要十分条件は、$T|H_0$が連続なスペクトルをもつことである。
(iii) ρ-contraction Tに対応する定常ガウス過程がエルゴード的となるための必要十分条件は、$T|H_0$が連続なスペクトルをもつことである。
(iv) ρ-contraction Tに対応する定常クリフォード過程がエルゴ

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

ード的となるための必要十分条件は、$T|_{H_0}$の点スペクトルが存在しても−1のみでしかもsimpleであることである。

$p=1$の場合は特に重要で、H上のcontraction Tに対応する二つの定常過程はマルコフ性をもち、$\Gamma(T)^n$と$\Lambda(T)^n$がマルコフ過程の半群を表わしている。このことから次の命題を示すことができる。

__命題5__ contraction Tに対応する定常ガウス過程がエルゴード的であることと、$\Gamma(H)$上のcontraction $\Gamma(T)$がエルゴード的であることとは同値である。ΓをΛに、ガウス過程をクリフォード過程にかえても成立する。

命題5と定理4(iii)(iv)から、second quantized operator $\Gamma(T)$と$\Lambda(T)$のエルゴード性の必要十分条件を得る。

参考文献

[1] J. M. Cook : The mathematics of second quantization, Trans. Amer. Math. Soc. __74__ (1953)

[2] L. Gross : Abstract Wiener spaces, Proc. of the 5-th Berkeley Sympo. on Math. Stati. and Prob. II (1965)

[3] L. Gross : Existence and uniqueness of physical ground states, J. Functional Anal. __10__ (1972)

[4] H.-H. Kuo : Gaussian measures in Banach spaces,

Lecture Notes in Math. 463 (1975) Springer-Verlag

[5] E. Nelson : The free Markoff field, J. Functional Anal. 12 (1973)

[6] A. Racz : Unitary skew dilations, Stud. Cerc. Math. 26 (1974)

[7] R. Schrader and D. A. Uhlenbrock : Markov Structures on Clifford algebras, J. Functional Anal. 18 (1975)

[8] I. E. Segal : A non-commutative extension of abstract integration, Ann. of Math. 57 (1953)

[9] I. E. Segal : Tensor algebras over Hilbert spaces. I, Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956)

[10] I. E. Segal : Tensor algebras over Hilbert spaces. II, Ann. of Math. 63 (1956)

[11] B. Simon : The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton Series in Physics (1974)

[12] W. F. Stinespring : Positive functions on C^*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955)

[13] B. Sz.-Nagy and C. Foias : Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space, North Holland (1970)

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

ヒルベルト空間上の確率測度の或る汎関数とその正規過程への応用

近藤亮司

論文[3]において田中(洋)氏は1次元の確率分布に対し、一つの興味ある汎関数を定義し、その基本的性質を研究すると共に、それをボルツマン方程式の解である確率分布の極限分布を導くのに利用している。またその結果の一部は村田-田中[2]によって多次元ユークリッド空間に拡張されている。

根本と筆者はその汎関数に興味を持ち、それを適当な関数空間の上の確率測度の上で考え、確率過程の分布の収束に用いたいと考えた。このノートは、それをヒルベルト空間上で試みた論文[1]の概略を示したものである。たゞ[1]では述べることの出来なかった補足的注意をつけ加えてあるので、合せて読んで頂けるとよいと考えている。

1. 汎関数の定義

Eを可分な実ヒルベルト空間、$\langle\ ,\ \rangle$をその内積、$\mathcal{E}$をEのボレル部分集合から成るσ-集合体とする。$(E, \mathcal{E})$上の

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

確率測度 μ で $\int_E \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$ をみたすもの、全体を $\mathcal{P}(E)$ で表わす。各 $\mu \in \mathcal{P}(E)$ に対し、Riesz の定理により、

$$\int \langle x, y \rangle d\mu(x) = \langle m, y \rangle \qquad (\forall y \in E)$$

$$\int \langle x-m, y \rangle \langle x-m, z \rangle d\mu(x) = \langle V y, z \rangle \qquad (\forall y, z \in E)$$

をみたすEの元 m（平均）とE上の線型作用素 V（共分散）が定まる。作用素 V は非負対称であるが更に核型であることが分るので、E上に平均 m，共分散 V をもつガウス測度 γ_μ が唯一つ存在する。即ち γ_μ は

$$\int \exp(i\langle x, y\rangle) d\gamma_\mu(x) = \exp\left(i\langle m, y\rangle - \frac{1}{2}\langle V y, y\rangle\right)$$

となるE上の測度である。$(E\times E, \mathcal{E}\otimes\mathcal{E})$ 上の測度 M で、周辺分布がそれぞれ μ 及び γ_μ となるもの（$M(A\times E) = \mu(A)$，$M(E\times A) = \gamma_\mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{E}$）の全体を $\mathfrak{M}(\mu)$ で表わし、$\mathfrak{M}(\mu)$ 上の関数：

$$M \longmapsto e[\mu; M] = \iint_{E\times E} \|x-y\|^2 dM(x, y)$$

の下限：

$$e[\mu] = \inf_{M\in\mathfrak{M}(\mu)} e[\mu : M]$$

により、$\mathcal{P}(E)$ 上の汎関数 e を定義する。（上記 [ ]，[ ] では確率変数に対して定義してあるが同じことである）。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$C(E^2)$ を E^2 上の有界連続関数全体の作るバナッハ空間(ノルムは一様ノルム)、$C^*(E^2)$ をその位相的共役空間とする。この時、$\mathfrak{M}(\mu)$ が一様に tight であることを示すことにより、$\mathfrak{M}(\mu)$ が $C^*(E^2)$ の位相 $\sigma(C^*(E^2), C(E^2))$ によるコンパクト部分集合であることが示される。又関数 $e[\mu;\cdot]$ は $\mathfrak{M}(\mu)$ 上で下半連続であるから、

<u>補題1</u>　関数 $e[\mu;\cdot]$ は $\mathfrak{M}(\mu)$ で最小値をとる。即ち、
$e[\mu] = e[\mu;M_0]$ となる $M_0 \in \mathfrak{M}(\mu)$ が存在する。
が導かれる。

このことを用いれば次の系の証明は容易に出来る。

<u>系</u>　$e[\mu]=0$ 　となるための必要十分な条件は $\mu=\gamma_{\mu}$。

これは汎関数 e の大きさが或る意味で、正規分布からのへだたりの大きさを表わしていることを示す。

補題1における M_0 が唯一つであることが、この段階で証明されることが望ましいが筆者達には出来なかった。$e[\mu] = e[\mu;M]$ となる M の集合を $\mathfrak{M}_0(\mu)$ で表わすことにする。

2. 汎関数の基本的性質

上記 $\mathfrak{M}_0(\mu)$ に属する測度は著るしい性質をもつ。即ち

<u>定理1</u>　$M_0 \in \mathfrak{M}_0(\mu)$ に対し、E から E への $\mathcal{E}/\mathcal{E}$-可測な写像 f が存在して、$M_0(dx,dy) = \varepsilon_{f(y)}(dx)\gamma_{\mu}(dy)$ となる。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

たゞし、ε_a は $\{a\}$ に台を持つ単位分布を表わす。

この定理の証明には、次の二つの補題が必要である。必要があれば、閉部分空間に制限して定理を証明し、後は自明な方法で f を定義すればよいのでこれから以后、この節では ∇ は非特異（0を固有値としない）と仮定する。補題を説明するために若干の記号を準備する。

$$\Gamma = \{(x, y, x', y') \in E^4 \mid \langle x - x', y - y' \rangle \geqq 0\}$$

$$\mathfrak{M}_\Gamma(\mu) = \{M \in \mathfrak{M}(\mu) \mid M \otimes M(\Gamma) = 1\}$$

とおく。たゞし、"$\otimes$" は測度の直積を表わす。

<u>補題 2</u>　$\mathfrak{M}_0(\mu) \subset \mathfrak{M}_\Gamma(\mu)$.

一般に、任意の $M \in \mathfrak{M}(\mu)$ に対し、

$$\iiiint \| x - x' - y + y' \|^2 dM(x, y) dM(x', y')$$

を計算することにより、

$$e[\mu : M] = 2\int \|x - m\|^2 d\mu(x) - \iiiint \langle x - x', y - y' \rangle dM(x, y) dM(x', y')$$

が得られる。従って、もし $M \otimes M$ の測度が Γ 以外の部分に載っている場合、周辺分布を変えることなく、その部分の測度を Γ に移すことが出来れば、$e[\mu ; M]$ の値をより小さく出来る。そのような移動は実際可能であり、確率空間（E^2, $\mathcal{E}^2$, M）上のエルゴード的保測変換を用いる。その具体的方法は [1]

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

を参照して頂きたい。その考えは、(そればかりでなく、この節全体の考えも) 田中 [3] に含まれている。

次に任意の $M \in \mathfrak{M}(\mu)$ に対し、$\mathcal{E} \times E$ で定義された関数 P_M が、条件：(i) $\forall y \in E$ に対し、$P_M(\cdot, y)$ は $(E, \mathcal{E})$ 上の確率測度、(ii) $\forall A \in \mathcal{E}$ に対し $P_M(A, \cdot)$ は $\mathcal{E}$ - 可測関数、(iii) $\forall A, B \in \mathcal{E}$ に対し、$\int_B P_M(A, y)\,\gamma_\mu(dy) = M(A \times B)$、をみたすとき、M の正則な条件つき確率と呼ぶことにしよう。E^2 が完備可分な距離空間であるので、そのような条件つき確率は存在するが更に詳しく

<u>補題 3</u> 任意の $M \in \mathfrak{M}_\Gamma(\mu)$ に対し、γ_μ 測度 0 の集合 N と、M の正則な条件つき確率 P_M をえらんで、$y, y' \notin N$ である限り $P_M(\cdot, y) \otimes P_M(\cdot, y')(\Gamma(y, y')) = 1$ と出来る。

ただし、$\Gamma(y, y') = \{(x, x') \in E^2 \mid (x, y, x', y') \in \Gamma\}$。

が証明される。証明は正則な条件つき確率を作る方法、即ち次々に細分になっているEの有限分割の列をとり、マーチンゲールをうまく定義して、マーチンゲールの収束定理を用いる方法一によって出来る。

定理1の証明の方針は次のようになる。$M_0 \in \mathfrak{M}_0(\mu)$ とすると補題2より、$M_0 \in \mathfrak{M}_\Gamma(\mu)$ であり、従って補題3の条件をみたす正則な条件つき確率 P_{M_0} および γ_μ に関する零集合Nが定まる。$P_{M_0}(\cdot, y)$ の台 (測度1を持つ最小の閉集合)

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

を $S(y)$ で表わすと、補題3より、$y, y' \notin N$ であれば $S(y) \times S(y') \subset \Gamma(y, y')$, 即ち、任意の $x \in S(y)$, $x' \in S(y')$ に対し、$\langle x - x', y - y' \rangle \geqq 0$ であることが分る。このことは、ある γ_μ 測度0の集合を除けば $S(y)$ の要素の数は1個であり、それを $f(y)$ とかくと、$y \longmapsto f(y)$ は $\langle f(y) - f(y'), y - y' \rangle \geqq 0$ という意味で単調増加な関数になることを意味することになる。最後の部分の論証は、完全正規直交系をとって、1次元の場合の命題：$(C(\eta))_{\eta \in R^1}$ を空でない R^1 の部分集合の族とし、ルベーグ測度0の集合Nに属さない η, η' に対し、$\forall \xi \in C(\eta)$, $\forall \xi' \in C(\eta')$ が $(\xi - \xi')(\eta - \eta') \geqq 0$ をみたすならば、$\mathrm{card}(C(\eta)) = 1$, $\forall \eta \notin N$. に帰着させることにより得られる。従って、殆んどすべての y に対し、$P_{M_0}(dx, y) = \varepsilon_{f(y)}(dx)$ となり定理1の証明が得られる。

<u>定理2</u>　$\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(E)$, $\mu_1 * \mu_2$ をその合成積とすると、

$$e[\mu_1 * \mu_2] \leqq e[\mu_1] + e[\mu_2]$$

が成り立ち、等号が成立するのは、μ_1, μ_2 が共にガウス測度の場合で、かつ、その時に限る。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

不等号の証明は意味から考えて容易に出来る。又、μ_1, μ_2 がガウス測度であれば、両辺とも0となり等号が成立する。

今、等号が成り立っていると仮定すると、定理1より、

$$e[\mu_1] = e[\mu_1, M_1] \qquad M_1(dx, dy) = \varepsilon_{f_1(y)}(dx)\gamma_{\mu_1}(dy)$$

$$e[\mu_2] = e[\mu_2, M_2] \qquad M_2(dx, dy) = \varepsilon_{f_2(y)}(dx)\gamma_{\mu_2}(dy)$$

と書けるが

$$e[\mu_1 * \mu_2, M_1 * M_2] = e[\mu_1, M_1] + e[\mu_2, M_2]$$

$$= e[\mu_1] + e[\mu_2] = e[\mu_1 * \mu_2]$$

となるので、再び定理4を用いると、

$$M_1 * M_2(dx, dy) = \varepsilon_{f(y)}(dx)\gamma_{\mu_1 * \mu_2}(dy)$$

とかける。このことは、

$$f(y+y') = f_1(y) + f_2(y') \qquad \gamma_{\mu_1} \otimes \gamma_{\mu_2}\text{-}a.e.$$

を意味する。有限次元のときは、∇_1, ∇_2 が非特異であるという仮定から、$\gamma_{\mu_1} \otimes \gamma_{\mu_2}$ はルベーグ測度と同値になり、ルベーグ測度が平行移動で不変であることを用いれば、f_1, f_2 共に1次式であることが分る。そしてこれば、μ_1, μ_2 共にガウス測度であることを意味する。無限次元のときは、同じ推論は出来ないが、一度有限次元におとして上記推論を行ない、極限操作を一度行なって、上記結論を得ることが出来る。

以上で、大体の説明を終り、応用を考えてみたい。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

3. 応用

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間、$X=(X_t)_{0\leq t\leq 1}$ をその上の可測な確率過程で、$\int_0^1 E|X_t|^2 dt < \infty$ なるものとする。フビニの定理から、殆んどすべての $\omega\in\Omega$ に対し、見本過程 $X_\cdot(\omega)$ は $L_2[0,1]$ に属する。即ち、X は $L_2[0,1]$-値確率変数と考えられる。その $L_2[0,1]$ における分布を μ_X で表わすことにする。$m(t)=E[X_t]$ $(t\in[0,1])$, $v(s,t)=E[(X_s-m(s))(X_t-m(t))]$ $(s,t\in[0,1])$ とおくと、μ_X の平均は m, 共分散は v を核とする積分作用素：$Vx(s)=\int_0^1 v(s,t)x(t)dt$ となる。この節では $\mathcal{C}[\mu_X]$ のことを $\mathcal{C}[X]$ で表わす。

$\{\xi_{nj} : j=1,2,\cdots,2^n-1,\ n=1,2,\cdots\}$ を Ω 上の確率変数の列で (i) 同一分布 (ii) $E\xi_{nj}^4=c<\infty$, $E\xi_{nj}^2=1$, $E\xi_{nj}=0$、(iii) 各 $n\geq 1$ に対し $(\xi_{nj})_{1\leq j<2^n}$ は独立、という条件をみたすものとする。$S_{nj}=\sum_{1\leq i\leq j}\xi_{ni}$ $(1\leq j<2^n)$ とおき確率過程の列 $(X_n)_{n\geq 1}$ を

$$X_n(t,\omega)=2^{-n/2}\sum_{1\leq j<2^n} S_{nj}(\omega)f_{nj}(t)$$

$$(t,\omega)\in[0,1)\times\Omega$$

により定義する。たゞし、f_{nj} は $[j2^{-n},(j+1)2^{-n})$ の指示関数とする。X_n の分布がブラウン運動の分布に近づくことは知られている。こゝではそのことを汎関数 $\mathcal{C}$ を用いて $L_2[0,1)$ 上の分布として証明しよう。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$E[\int_0^1 (X_n(t))^2 dt] = (1-2^{-n})/2 < \infty$ であるから、X_n は $L_2[0,1]$ の値をとる確率変数と考えられる。又 $m(t)=0$, $v_n(s,t)=E[X_n(s)X_n(t)] = ([s2^{-n}] \wedge [t2^{-n}])/2^n$ ([ ] はガウスの記号）である。X_n の分布が平均 0，共分散作用素が核 $v(s,t)=s\wedge t$ により定義されるガウス分布に収束することは次のようにして示される。$S^0_{nj} = \sum_{1\leq i\leq j} \xi_{n+1,2i}$, $S^1_{nj} = \sum_{1\leq i\leq j} \xi_{n+1,2i-1}$ $(1\leq j < 2^n)$ とおき

$$X^0_n = 2^{-n/2} \sum_{1\leq j<2^n} S^0_{nj} f_{nj}$$

$$X^1_n = 2^{-n/2} \sum_{1\leq j<2^n} S^1_{nj} \tilde{f}_{nj} \quad (\tilde{f}_{nj} = f_{n+1,2j-1} + f_{n+1,2}$$

$$Z_n = 2^{-(n+1)/2} \xi_{n+1,2^{n+1}-1} f_{n+1,2^{n+1}-1}.$$

と定義する。仮定から (X^0_n, X^1_n, Z_n) は独立な確率過程の組で、X_n, X^0_n, X^1_n は (2^n-1) 次元空間の値をとる確率変数と考えれば同一分布をもっている。

$$X_{n+1} = 2^{-1/2}(X^0_n + X^1_n) + Z_n$$

で $e[Z_n] \leq 4^{-n}$ であるから $e[X_{n+1}] \leq e[X_n] + 4^{-n}$ が分る。従って $\alpha = \lim_n e[X_n]$ が存在する。$(\mu_{X_n})_{n\geq 1}$ は相対コンパクトであるので $L_2[0,1)$ 上の確率測度 μ に収束する部分列をもつ。仮定(ii) より $e[\mu] = \lim_i e[X_{n_i}]$ となることが示される。μ_0, μ_1 をそれぞれ $2^{-1/2}X^0_{n_i}$, $2^{-1/2}X^1_{n_i}$ の分布の極限とすると $\mu = \mu_0 * \mu_1$ となる。一方

$$\alpha = e[\mu] \leq (e[\mu_0] + e[\mu_1])$$

$$\leq \varliminf_i \left(e[2^{-1/2} X^0_{n_i}] + e[2^{-1/2} X^1_{n_i}] + e[Z_{n_i}] \right)$$
$$= \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$$

であるから $e[\mu] = e[\mu_0] + e[\mu_1]$ で、定理2より μ はガウス分布である。

4. 補　足

定理1の証明はかなり難かしいが、結果から眺めてみると次のようになっている。$M_0 \in \mathfrak{M}_0(\mu)$ とすれば、$P_{M_0}(dx, y) = \varepsilon_{f(y)}(dx)$ となるので、$f(y) = \int x P_{M_0}(x, dy)$ (γ_M-a.e) である。このことは、f が条件つき期待値 —— L_2 理論の枠組の中では、ある閉部分空間への正射影 —— となっていることを示している。

$M \in \mathfrak{M}(\mu)$ とし、Φ が $E \times E$ から E への $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} / \mathcal{E}$-可測関数のとき、$|||\Phi|||_M^2 = \iint \|\Phi(x, y)\|^2 dM(x, y)$ とおく。$\mathbb{L}_2(M) = \{\Phi \mid |||\Phi|||_M < \infty\}$ とおくと、$\mathbb{L}_2(M)$ は内積：

$$\langle\langle \Phi, \Psi \rangle\rangle_M = \iint \langle \Phi(x, y), \Psi(x, y) \rangle dM(x, y)$$

をもったヒルベルト空間となる。今 $E \times E$ から E への写像 π_1, π_2 を $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y$ によって定めると、$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{L}_2(M)$ で、$e[\mu : M] = |||\pi_1 - \pi_2|||_M^2$ と書ける。今 $\mathbb{L}_2(M)$ の元で、第2座標 y のみの関数であるもの、全体を $\mathbb{N}_2(M)$ とかくと、これは $\mathbb{L}_2(M)$ の閉部分空間である。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$\wedge_2(M)$ への正射影作用素を E_M で表わそう。一般には

$$e[u : M] = |||\pi_1 - E_M\pi_1|||_M^2 + |||E_M\pi_1 - \pi_2|||_M^2$$
$$\geqq |||E_M\pi_1 - \pi_2|||_M^2$$

であるが、特に最小値を与える $M_0 \in \mathcal{M}_0(u)$ ときには

$$e[u] = e[u \cdot M_0] = |||E_{M_0}\pi_1 - \pi_2|||_{M_0}^2$$

となるのであって、従って $f = E_{M_0}\pi_1$ で与えられる。

このようにして、定理1が示されれば、分り易いと筆者達は考えたが、今の所、実現はしていない。

[1] R. Kondo, A. Negoro : Certain functional of probability measures on Hilbert spaces, Hiroshima Math. J. 6 (1976)

[2] H. Murata, H. Tanaka : An inequality for certain functional of multidimensional probability distributions, Hiroshima Math. J. 4 (1974) 75-81

[3] H Tanaka : An inequality for a functional of probability distributions and its application to Kac's one-dimensional model of Maxwellian gas, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 27 (1973) 47-52.

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

extreme term を除いたときの独立同分布の確率変数の和の安定性

森 俊夫

§1. $\{X_n\}$ を独立同分布の確率変数列，$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とし，$X_1, \cdots, X_n$ のうちで絶対値が r 番目に大きいものを $X_n^{(r)}$ と書く．ただしこれら n 個の変数のうちに絶対値が等しいものが2個以上ある場合は，それらの間の順序は適当な規約によって定めるものとする．以下の議論ではこの規約はどのようなものでもかまわない．r が正の整数のとき $X_1, \cdots, X_n$ から絶対値の大きい順に r 個だけ取り除き，残ったものの和を ${}^{(r)}S_n$ と書くことにする．すなわち

$$ {}^{(r)}S_n = S_n - (X_n^{(1)} + \cdots + X_n^{(r)}) $$

なお ${}^{(0)}S_n$ は S_n 自身と解する．

X_n の分布に関するある種の条件の下では $X_1, \cdots, X_n$ のうちに極端に大きいかまたは小さいものが少しだけあり，和 S_n に対してこれら少数個の項が大きく寄与し，残りの項の S_n に対する寄与は漸近的に無視できると見なせることがある．

例えば Darling [1] は $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$ として，あ

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

る条件の下で S_n/M_n が 1 に確率収束することを示した。

Feller [2] は X_n の分布が対称で $EX_1=0$，$EX_1^2=\infty$ のとき ρ_n を

$$\rho_n^2 = n\, E[X_1^2 \cdot I(|X_1| \le \rho_n)]$$

で定義すると，適当な条件の下で Hartman-Wintner の重複対数の法則の拡張

$$\limsup \frac{S_n}{\sqrt{2\rho_n^2 \log\log \rho_n}} = 1 \quad a.s.$$

が成立することを示した。しかし彼はまた別の条件の下では

$$\limsup \frac{S_n}{\sqrt{2\rho_n^2 \log\log \rho_n}} = \infty \quad a.s.$$

であるにもかかわらず

$$\limsup \frac{S_n - M_n}{\sqrt{2\rho_n^2 \log\log \rho_n}} = 1 \quad a.s.$$

が成立し得ることを示した。

このように場合によっては $\{S_n\}$ よりも $\{{}^{(r)}S_n\}$ の方がおだやかに変動し，したがって $\{S_n/a_n\}$ が有界でなくとも $\{{}^{(r)}S_n/a_n\}$ は有界となることがあり得る。ここでは適当な normalizing constant a_n に対し，$\{{}^{(r)}S_n/a_n\}$ の安定性に関する一つの結果を述べる。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

§2. 比較のために ${}^{(0)}S_n = S_n$ の安定性に関する次の定理を挙げておく(Feller [2], Stout [7])。

定理 1　数列 $\{a_n\}$ はある α, $0 < \alpha < 2$, に対して $0 < a_n / n^{1/\alpha} \uparrow$ をみたし，さらに $a_n/n \uparrow$ または $a_n/n \downarrow$ とする。$E|X_1| < \infty$ のときは $EX_1 = 0$ と仮定する。このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > a_n\} = \infty$$

ならば

$$\limsup |S_n|/a_n = \limsup |X_n|/a_n = \infty \quad \text{a.s.}$$

であり，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > a_n\} < \infty$$

ならば

$$\limsup |S_n|/a_n = \limsup |X_n|/a_n = 0 \quad \text{a.s.}$$

である。

特に $a_n = n^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 2$, のときは次の結果(Marcinkiewicz の大数の強法則)が周知である [7]。

定理 2　(i) ある α, $0 < \alpha < 1$, に対し $E|X_1|^\alpha < \infty$ ならば $S_n / n^{1/\alpha} \to 0$ a.s.

(ii) ある α, $1 \le \alpha < 2$, に対し $E|X_1|^\alpha < \infty$ ならば

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$(S_n - nEX_1)/n^{1/\alpha} \to 0$ a.s.

(iii) 逆にある α, $0<\alpha<2$, とある数列 $\{c_n\}$ に対し

$S_n/n^{1/\alpha} - c_n \to 0$ a.s. ならば $E|X_1|^\alpha < \infty$.

以下 ${}^{(m)}S_n$ に対してこれら二つの定理に対応する結果を述べよう。こゝでは normalizing constant a_n は次の二つの条件をみたすことを仮定しておく。

(A1) ある α, $0<\alpha<2$, に対して $\{a_n/n^{1/\alpha}\}$ は単調非減少,

(A2) $\sup(a_{2n}/a_n) < \infty$.

$\{a_n\}$ がこの二条件をみたすとき, $[0,\infty)$ 上の絶対連続な単調増加関数 A で $A(0)=0$, $A(n)=a_n$, $n \geq 1$, をみたし, かつ次の二条件を満足するものが存在する。

(A1′) $A(x)/x^{1/\alpha}$ は単調非減少,

(A2′) $\sup_{x>0} A(2x)/A(x) < \infty$.

このような関数 A はもちろん一意的には定まらないが, 以下の議論は A の選び方に関係しない。A の逆関数を B と書くと, $A(\infty)=\infty$ だから B は $[0,\infty)$ で定義される絶対連続関数で, $B(0)=0$, $B(\infty)=\infty$ である。

X_n の分布関数を F で表わし, $\mathcal{F}(x) = P\{|X_1|>x\}$ とする。

積分

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$$\int_0^\infty \mathcal{F}^r(x)\, dB^r(x)$$

を J_r で表わす．ここに $\mathcal{F}^r(x) = \{\mathcal{F}(x)\}^r$, $B^r(x) = \{B(x)\}^r$.

ある $r > 0$ に対し $J_r < \infty$ ならば

$$\lim_{x\to\infty} \mathcal{F}(x) B(x) = 0$$

である．このことは

$$(\mathcal{F}(x) B(x))^r = \int_0^x \left(\frac{\mathcal{F}(x)}{\mathcal{F}(y)}\right)^r \mathcal{F}^r(y)\, dB^r(y)$$

に優収束定理を適用すればわかる．また $0 < r < s$ のとき

$$J_s = \frac{s}{r} \int_0^\infty (\mathcal{F}(x) B(x))^{s-r} \mathcal{F}^r(x)\, dB^r(x)$$

と書けるから，$J_r < \infty$ ならば $J_s < \infty$ であることがわかる．

<u>定理 3</u>（[5]）　$r \geq 0$ とし，$\{a_n\}$ は（A1），（A2）をみたす数列とする．$J_{r+1} < \infty$ ならば

（1）　$$\lim \frac{X_n^{(r+1)}}{a_n} = 0 \quad a.s.$$

であり，かつある数列 $\{c_n\}$ が存在して

（2）　$$\lim \left(\frac{{}^{(r)}S_n}{a_n} - c_n \right) = 0 \quad a.s.$$

となる．$J_{r+1} = \infty$ ならば

（3）　$$\limsup \frac{|X_n^{(r+1)}|}{a_n} = \infty \quad a.s.$$

であり，かつ任意の数列 $\{c_n\}$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$$\text{(4)} \qquad \limsup \left| \frac{{}^{(r)}S_n}{a_n} - c_n \right| = \infty \qquad \text{a.s.}$$

である．

注意． $J_{r+1} < \infty$ のとき，任意の $k \ge 1$ に対し

$$\lim X_n^{(k)} / a_n = 0 \qquad \text{in prob.}$$

したがって (2) から

$$\lim \left(\frac{S_n}{a_n} - c_n \right) = 0 \qquad \text{in prob.}$$

となり，c_n は公式

$$c_n = \frac{n}{a_n} \int_{|x| \le \tau a_n} x \, dF(x)$$

によって定めることができる [3]．ここに $\tau > 0$ は任意の定数である．

定理 3 から次の結果が導かれる．これは定理 2 の拡張である．

定理 4 ([5]) (i) ある α, $0 < \alpha < 1$, とある $r \ge 0$ に対して

$$\text{(5)} \qquad \int_0^\infty x^{\alpha(r+1)-1} \mathcal{F}^{r+1}(x) \, dx < \infty$$

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

ならば

$$\frac{{}^{(r)}S_n}{n^{1/\alpha}} \longrightarrow 0 \qquad a.s.$$

(ii) $\alpha = 1$ およびある $r \geq 0$ に対し (5) が成立すれば

$$\frac{{}^{(r)}S_n}{n^{1/\alpha}} - \int_{|x| \leq n\tau} x\, dF(x) \longrightarrow 0 \qquad a.s.$$

(iii) ある α, $1 < \alpha < 2$, とある $r \geq 0$ に対し (5) が成立すれば $E|X_1| < \infty$ で

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}}\left({}^{(r)}S_n - nEX_1\right) \longrightarrow 0 \qquad a.s.$$

(iv) 逆にある α, $0 < \alpha < 2$, とある $\{c_n\}$ に対し

$$\frac{{}^{(r)}S_n}{n^{1/\alpha}} - c_n \longrightarrow 0 \qquad a.s.$$

ならば (5) が成立する.

§ 3. 定理 3 は [5] に証明してある. ここではそのあらすじを簡単に説明しておく. 次の二つの補助定理は Borel-Cantelli の lemma からでる.

<u>補助定理 1</u> $0 < b_n \uparrow \infty$ とすると $\sum_{n=1}^{\infty} n^r \mathcal{F}^{r+1}(b_n)$ が $< \infty$ であるか, $= \infty$ であるかにしたがって $P\{|X_n^{(r+1)}| > b_n \ i.o.\}$ は

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

0または1である。

<u>補助定理2</u>　$\{a_n\}$ は(A1),(A2)をみたすとする。
$P\{|X_n^{(r+1)}| > \varepsilon a_n \ \ i.o.\}$ は $\varepsilon > 0$ の値に関係せず，その値は $J_{r+1} < \infty$ か $J_{r+1} = \infty$ かにしたがって0または1である。

関数 $\mathcal{F}$ が $(0, \infty)$ で正でかつ微分可能のとき

$$\psi(x) = \left(B(x)/\mathcal{F}(x)\right)^{1/2}, \qquad x \ge 0,$$

で ψ を定義し，ψ の逆関数を φ とする。さらに

$$\theta_n = \varphi(2^m), \qquad 2^m \le n < 2^{m+1} \text{ のとき}$$

によって θ_n を定め，

$$X_n' = X_n \cdot I(|X_n| < \theta_n), \qquad S_n' = \sum_{k=1}^{n} X_k'$$

とする。ここに $I(A)$ は集合Aの定義関数。
次の結果[5]は定理3の証明に主要な役割を果す。これは Nagaev [6] の方法を用いて証明される。

<u>補助定理3</u>　$\mathcal{F}$ は $(0, \infty)$ で正で微分可能とする。ある $r \ge 0$ に対し $J_{r+1} < \infty$ ならば

$$S_n'/a_n - c_n \longrightarrow 0 \qquad a.s$$

となるような数列 $\{c_n\}$ が存在する。

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

定理3の証明のあらすじ　補助定理2から $J_{r+1} < \infty$ かまたは $J_{r+1} = \infty$ かにしたがって

$$\limsup |X_n^{(r+1)}| / a_n = 0 \quad \text{または} \quad 1$$

がわかる．

$J_{r+1} < \infty$ から (2) を導くには，$\mathcal{F}$ が $(0, \infty)$ で正で微分可能と仮定してよい [4]．$\varepsilon > 0$ に対し

$$S_n(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} X_j \cdot I(|X_j| \leq a_n \varepsilon)$$

とすると，補助定理1を用いて

$$\limsup \frac{1}{a_n} | S_n(\varepsilon) - S_n' | \leq 5(2r+1)\varepsilon \quad a.s.$$

が証明される．また補助定理2から

$$\limsup \frac{1}{a_n} | {}^{(r)}S_n - S_n(\varepsilon) | \leq r\varepsilon \quad a.s.$$

が示される．これから

$$\limsup \frac{1}{a_n} | {}^{(r)}S_n - S_n' | = 0 \quad a.s.$$

したがって補助定理3から (2) が出る．

次にある $\{c_n\}$ に対し

$$\limsup \left| \frac{{}^{(r)}S_n}{a_n} - c_n \right| < \infty \quad a.s.$$

とすると，これから

$$\limsup \frac{1}{a_n} | {}^{(r)}S_{n+1} - {}^{(r)}S_n | < \infty \quad a.s.$$

が導かれるが，一方 $J_{r+1} = \infty$ とすると (3) から任意の M に対し

$$P\{ | {}^{(r)}S_{n+1} - {}^{(r)}S_n | > a_n M \quad i.o. \} = 1$$

が出る．したがって任意の $\{c_n\}$ に対し (4) が成立する．

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

参考文献

1. Darling, D. A. : The influence of the maximum term in the addition of independent random variables Trans Amer Math. Soc 73, 95-107 (1952)

2. Feller, W. : An extension of the law of the iterated logarithm to variables without variance. J. Math. Mech. 18 343-354 (1968)

3. Gnedenko, B. V., Kolmogorov A. N. : Limit distributions for sums of independent random variables Reading Addison-Wesley 1954

4. Mori, T. : The strong law of large numbers when extreme terms are excluded from sums. Z Wahrscheinlichkeits. 36, 189-194 (1976)

5 Mori, T. : Stability for sums of i. i. d. random variables when extreme terms are excluded. (submitted for publication)

6. Nagaev, S. V. : On sufficient and necessary conditions for the strong law of large numbers. Teor. Verojatnost. Primenen 17, 604-618 (1972)

7. Stout, W. F. : Almost sure convergence New York Academic Press 1974

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

absolutely regular な確率変数列の部分和の分布の，Skorokhod 表現を用いた近似とその応用

横浜国立大学工学部
吉原健一

§1. 定義. $\{\xi_j\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ の上で定義された強定常な確率変数の列とする．また，$a \leqq b$ に対し $\mathcal{M}_a^b$ を $\xi_a, \cdots, \xi_b$ で生成される事象の σ-集合体とする．$\{\xi_j\}$ が

$$\beta(n) = E\left\{ \sup_{A \in \mathcal{M}_n^\infty} |P(A \mid \mathcal{M}_{-\infty}^0) - P(A)| \right\} \downarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

を満たすとき，$\{\xi_j\}$ は absolutely regular であるという．

さらに，$\{\xi_j\}$ が

$$\phi(n) = \sup_{B \in \mathcal{M}_{-\infty}^0,\, A \in \mathcal{M}_n^\infty} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| / P(B) \downarrow 0 \ (n \to \infty)$$

を満たすとき，ϕ-mixing であるといい，

$$\alpha(n) = \sup_{B \in \mathcal{M}_{-\infty}^0,\, A \in \mathcal{M}_n^\infty} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \downarrow 0 \ (n \to \infty)$$

を満たすとき，strong mixing であるという．

$\alpha(n) \leqq \beta(n) \leqq \phi(n)$ という関係はつねに成立するので，

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

ϕ-mixing ならば absolutely regular, absolutely regular ならば strong mixing であることは知られている.（[4] 参照）.

最近, 独立な確率変数列の和に関する種々の極限定理を, 独立でない場合, 特に strong mixing または ϕ-mixing の条件が満たされる場合に拡張しようとする試みが盛んになされている.（[5] 参照）. しかし, 現段階では $P(\max_{1\le k\le n}|\sum_{j=1}^{k}\xi_j|>z)$ 等の一般に使える効果的な不等式がないため, 時によっては, 独立な確率変数列の和に対して成立する極限定理をそのまま拡張できない場合が起こる.

ここでは, $\{\xi_j\}$ が absolutely regular であるとき, 次節で述べるような, 独立な確率変数列の Skorokhod 表現を用いて $\{\xi_j\}$ の関数の平均値を近似する方法を考えて, invariance principle に対する収束の速さ, integral type functional に対する収束の速さや r-quick convergence に関する定理を証明することができることを示す.

§2. 基本定理. $\{\xi_j\}$ が absolutely regular ならば, 次の補助定理が成り立つ.

補助定理（[11] Lemma 1） δ をある正数とし, $g(x_1,\cdots,x_k)$ を Borel 関数で次の式を満たすものとする.

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$$\int \cdots \int_{R^k} |g(x_1, \cdots, x_k)|^{1+\delta} dF^{(1)}(x_1, \cdots, x_j) dF^{(2)}(x_{j+1}, \cdots, x_k) \leqq M_1$$

ただし，$F^{(1)}$, $F^{(2)}$ はそれぞれ確率ベクトル $(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_j})$, $(\xi_{i_{j+1}}, \cdots, \xi_{i_k})$ の分布関数，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ とする．

そのとき，もし $E|g(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_k})|^{1+\delta} \leqq M_1$ ならば

$$\Big| E g(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_k}) - \int \cdots \int_{R^k} g(x_1, \cdots, x_k) dF^{(1)}(x_1, \cdots, x_j) dF^{(2)}(x_{j+1}, \cdots, x_k) \Big|$$
$$\leqq 4 M_1^{1/1+\delta} \{ \beta(i_{j+1} - i_j) \}^{\delta/1+\delta}$$

特別な場合として，もし $g(x_1, \cdots, x_k)$ が有界，すなわち，$|g(x_1, \cdots, x_k)| \leqq M_2$ ならば，上の最後の式は $2M_2 \beta(i_{j+1} - i_j)$ でおきかえられる．

以下この節では，$\{\xi_j\}$ は次の条件を満たすものと仮定する．

$$E\xi_1 = 0, \quad Var(\xi_1) = a^2 > 0,$$
$$E|\xi_1|^{2+\delta} < \infty \quad (\delta \text{ はある正の定数}).$$

また，$w = \{w(t) : 0 \leqq t < \infty\}$ は確率空間 $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ の上で定義された standard Wiener process とする．このとき，$\{\xi_j\}$ と w は確率測度 P に関して独立であると仮定できる．

<u>定理</u> ([14] Theorem 2.1)　$g(y_1, \cdots, y_k)$ を R^k の上の有界な Borel 関数，すなわち，$|g(y_1, \cdots, y_k)| \leqq M_3$ とする．その

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

とき，次の性質をもつ非負で，互いに独立に同じ分布に従う確率変数 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k$ が存在する：

$$\Big| E\, g(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \cdots, \xi_{i_k}) - E\, g(w(T_1), w(T_2)-w(T_1), \cdots, w(T_k)-w(T_{k-1}))\Big| \leqq 2 M_3\, k\, \beta(d)$$

ただし，$T_0 = 0$，$T_j = \tau_1 + \cdots + \tau_j$ $(j = 1, \cdots, k)$

$$d = \min_{1 \leqq j \leqq k-1} (i_{j+1} - i_j)$$

$$E\tau_i = a^2$$

$E\tau_i^j \leqq M_j'\, E|\xi_i|^{2j}$ $(j = 1, 2, \cdots)$ （M_j' は定数）

証明は補助定理を k 回繰返して用い，得られた結果に Skorokhod 表現に関する Rosenkrantz の方法（[7] 参照）を適用すれば容易に得られる．

§3．条件と記号．議論を簡単にするため，次の条件を考える．

<u>条件 A</u>　$\{\xi_j\}$ は強定常，absolutely regular な確率変数列で次の条件を満たすものとする：

(i)　$E\xi_j = 0$，$E|\xi_j|^{4+\delta} < \infty$ $(\delta > 0)$

(ii)　$\beta(n) = O(e^{-\gamma n})$ $(\gamma > 0)$

(iii)　$\sigma^2 = E\xi_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} E\xi_0 \xi_j > 0$

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

注. (i), (ii) が成立すれば (iii) の級数は絶対収束することは知られている.([5] 参照)

$S_0 = 0$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ とおく. 条件 A の下では, 次のような不等式が成立する:

(I) 十分大きなすべての n に対して

$$\left| Var(S_n) - n\sigma^2 \right| \leqq M_4 \qquad ([14]\ Lemma\ 3.1)$$

(II) $E\, S_n^4 \leqq M_5 n^2$ $\qquad$ ([14] Lemma 3.2)

(III) $P(|n^{-\frac{1}{2}} S_n| \geqq 2a\sigma_0 \log n) \leqq M_6 n^{-1} a^{-4}$

ただし, $a > 0$, $\sigma_0^2 = Var(\xi_1) > 0$. $\qquad$ ([12] Theorem 5.2)

以下では正整数 n, $m\ (< n)$ に対し $r = [n m^{-1}]$ とし, $q\ (< r)$ に対し $p = r - q$ とおき

$$\hat{S}_n(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{p} \xi_{(j-1)r+i} & (t = lr,\ l = 0, 1, \cdots, m) \\ \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{p} \xi_{(j-1)r+i} & (mr \leqq t \leqq n) \\ \text{linearly interpolated for } t \in [(l-1)r, lr) & (l = 1, \cdots, m) \end{cases}$$

と定義する.

§ 4. Invariance principle に対する収束の速さ.

<u>定理</u> ([14] Theorem 4.1) 条件 A の下では

$$\sup_{z} \left| P\left(\sup_{0 \leqq t \leqq 1} \left| \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}\,\sigma} \right| \leqq z \right) - P\left(\sup_{0 \leqq t \leqq 1} |w(t)| \leqq z \right) \right|$$

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$$\leqq M_7\, n^{-\frac{1}{8}} \log^{\frac{1}{2}} n$$

証明は次の補助定理とRosenkrantzの方法[7]を用いる.

<u>補助定理</u>. $m = [n^{\frac{5}{13}}]$, $r = [nm^{-1}]$ とすると

$$P\left(\sup_{0 \leqq t \leqq n} |S_{[t]} - \hat{S}_n(t)| \geqq \varepsilon_n \sigma n^{\frac{1}{2}}\right) = o\left(n^{-\frac{1}{8}} \log^{\frac{1}{2}} n\right)$$

ただし, $\varepsilon_n = n^{-\frac{1}{8}} \log^{\frac{1}{2}} n$, $q = [c \log n]$ $(c\gamma > 2)$

証明には(I)−(III)を用いる.

<u>補助定理</u>. 次の性質をもつ, 非負で, 独立に同じ分布に従う確率変数 $\tau_1, \cdots, \tau_m$ が存在する:

$$P\left(\max_{1 \leqq j \leqq m} w(T_j) \leqq z - \varepsilon_n\right) + o\left(n^{-\frac{1}{8}} \log^{\frac{1}{2}} n\right)$$

$$\leqq P\left(\sup_{0 \leqq t \leqq n} \frac{\hat{S}_n(t)}{\sigma\sqrt{n}} \leqq z\right)$$

$$\leqq P\left(\max_{1 \leqq j \leqq m} w(T_j) \leqq z + \varepsilon_n\right) + o\left(n^{-\frac{1}{8}} \log^{\frac{1}{2}} n\right)$$

ただし, $T_0 = 0$, $T_j = \tau_1 + \cdots + \tau_j$ $(j = 1, \cdots, m)$

$$E\,\tau_1 = \sigma^{-2} n^{-1} E\, S_{r-q}^2$$

$$E\,\tau_1^j \leqq M_j'\, n^{-j} E\,|S_{r-q}|^{2j} \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

ε_n, r, q は前補助定理と同じ.

証明には§3定理を用いる.

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

補助定理. $T_0, T_1, \cdots, T_m$ を前補助定理で得られたものとする. そのとき

$$P\left(\max_{1\leqq j\leqq m}\left|w(T_j)-w\left(\frac{j}{m}\right)\right|\geqq \varepsilon_n\right)=O\left(n^{-\frac{1}{8}}\log^{\frac{1}{2}}n\right).$$

§5. 積分型汎関数に対する収束の速さ.

条件B. $f(s,x)$は次の形の不等式を満足する:

$$|Df(s,x)| \leqq M_8(1+|x|^a)$$

ただし, aはある正の定数で, Dは identity, $\frac{\partial}{\partial s}$ または $\frac{\partial}{\partial x}$ を表わす.

条件C.

$$F(z)=P\left(\int_0^1 f(t,w(t))\,dt\leqq z\right)$$

は才1次 Lipschitz 条件を満たす.

定理 ([13] Theorem) 条件A－Cの下では

$$\sup_z\left|P\left(\int_0^1 f\left(t,\frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}\right)dt\leqq z\right)-P\left(\int_0^1 f(t,w(t))\,dt\leqq z\right)\right|$$
$$=O\left(n^{-\frac{1}{5}}(\log n)^{1+a'}\right)$$

ただし, $a'>a>0$.　　　([8], [1] 参照)

証明の基本的な考え方は§4の場合と同様であるが, 次の補助定理が重要な役割を果たす.

補助定理 ([13] Lemma 3.3) 任意のnに対し, $m=[n^{\frac{2}{5}}]$,

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$r=[m^{-1}n]$, $q=[c\log n]$ $(c>1/\gamma)$ とすると，次の条件を満たす，独立に同じ分布に従う確率変数 $\tau_1,\cdots,\tau_m$ が存在する：

(i) $E\tau_1 = Var\left(\frac{1}{\sqrt{p}\,\sigma} S_{p-r}\right)$

$E\tau_1^j \leqq M_j'\left(\frac{1}{\sqrt{p}\,\sigma}\right)^j E|S_{p-r}|^{2j}$ $(j=1,2,\cdots)$

(ii) $$P\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f\left(\frac{j}{m}, w\left(\sum_{i=1}^{j}\tau_i\right)\right) \leqq z-\varepsilon_n'\right) + o(n^{-\frac{1}{5}})$$

$$\leqq P\left(\int_0^1 f\left(t, \frac{\hat{S}_n(nt)}{\sigma\sqrt{n}}\right)dt \leqq z\right)$$

$$\leqq P\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f\left(\frac{j}{m}, w\left(\sum_{i=1}^{j}\tau_i\right)\right) \leqq z+\varepsilon_n'\right) + o(n^{-\frac{1}{5}})$$

ただし，$\varepsilon_n' = n^{-\frac{1}{5}}(\log n)^{1+a'}$

証明には §3 定理を用いる．

§6. r-quick convergence. Strassen は [10] で r-quick limit の概念を導入した．([6] 参照) $\{\theta_n\}$ を，実数値をとる確率変数列とする．任意の実数 c に対し

$$T_c = \sup_{n\geqq 1}\{n\geqq 1 : \theta_n \geqq c\} \qquad (\sup\phi = 0)$$

とする．

<u>定義</u>．$r>0$ と y を実定数とする．2条件

(i) $ET_c^r < \infty$ $(c>y)$ (ii) $ET_c^r = \infty$ $(c<y)$

が成り立つとき

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \theta_n = y \quad (r\text{-quickly})$$

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

という.

<u>定義</u>. $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$は$\mathcal{X}$の Borel 集合からなるσ-集合体)を距離空間とし, $\{X_n\}$を$\mathcal{X}$に値をとる確率要素の列とする. 任意の$\varepsilon>0$に対して

$$E(\sup\{n : X_n \notin U\})^r < \infty$$

を満たす$\mathcal{X}$のε-sphere の有限個の合併Uが存在するとき, $\{X_n\}$は$\mathcal{X}$で r-quickly relatively compact であるという.
また, 任意の$x_0 \in \mathcal{X}$を考えるとき, x_0の任意の近傍Vに対し

$$E(\sup\{n : X_n \in V\})^r = \infty \qquad (X_n \in \mathcal{X})$$

のとき, x_0を$\{X_n\}$の r-quick limit point という.

このとき, Strassen [10] や Lai [6] の結果に対応するものが得られる.

$C = C[0,1]$は$[0,1]$の上の連続関数の全体とし, 距離は sup-norm で定義する.

<u>定理</u>. $r>0$とし, 条件 A (ii), (iii) と (i) の代りに

(i′) $E\xi_i = 0$, $E|\xi_i|^a < \infty$ $(a > 2(2+r))$

が成り立つものと仮定する. $X_n = \{X_n(t) : 0 \leqq t \leqq 1\}$ $(n=1,2,\cdots)$をCの要素で次の式で定義されたものとする.

$$X_n(t) = \begin{cases} (2\sigma^2 n \log n)^{-\frac{1}{2}} S_n & (t = \frac{j}{n},\ j = 0, 1, \cdots, n) \\ \text{linearly interpolated for } t \in [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}],\ j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

そのとき, 任意の$\varepsilon>0$に対してUを$r^{\frac{1}{2}}\mathcal{K}$の$\varepsilon$-近傍とすると

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

$$E(\sup\{n : X_n \notin U\})^r < \infty$$

従って，$\{X_n : n \geqq 2\}$ は C で r-quickly relatively compact となる．C での r-quick limit point の集合は $r^{\frac{1}{2}}K$ となる．ただし，

$$r^{\frac{1}{2}}K = \left\{ h \in C : h(0) = 0,\ h \text{ は絶対連続},\ \int_0^1 (h'(t))^2 dt \leqq r \right\}$$

証明には次の補助定理が必要となる．

<u>補助定理</u>. 定理の条件の下で，各 $n\,(\geqq 1)$ に対し次の条件を満たす，非負で，独立に同じ分布に従う確率変数 $\tau_1^{(n)}, \cdots, \tau_{k_n}^{(n)}$ が存在する：

$$E(\max\{n : 2^{-\frac{1}{2}} b_n^{-1} \max_{1 \leqq j \leqq k_n} |w(T_j^{(n)})| > \varepsilon\})^r - M_9$$

$$\leqq E(\max\{n : 2^{-\frac{1}{2}} \sigma^{-1} b_n^{-1} \sup_{0 \leqq t \leqq n} |\hat{S}_n(t)| \geqq \varepsilon\})^r$$

$$\leqq E(\max\{n : 2^{-\frac{1}{2}} b_n^{-1} \max_{1 \leqq j \leqq k_n} |w(T_j^{(n)})| > \varepsilon\})^r + M_{10}$$

ただし，$T_0^{(n)} = 0$，$T_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{j} \tau_i^{(n)} \quad (j = 1, \cdots, k_n)$

$$E\tau_1^{(n)} = \sigma^{-2} E\, S_{p_n - q_n}^2$$

$$E(\tau_1^{(n)})^j \leqq M_j'\, E|S_{p_n - q_n}|^{2j} \quad (j = 2, 3, \cdots)$$

$$p_n = b_n = (n \log n)^{\frac{1}{2}}, \quad k_n = [n p_n^{-1}]$$

$$q_n = [c \log n] \quad (c\gamma > \tfrac{1}{3}(a + r + 2))$$

証明には §3 定理を用いる．

参考文献

1. Bhattacharya, R. N., Rao, R. R. : Normal approximation and asymptotic expansions. New York : Wiley : 1976

2. Borisov, I. S. : On the rate of convergence for the distributions of integral type functionals. Teo. Ver. Prim. 21, 294-308 (1976)

3. Borokov, A. A. : On the rate of convergence for the invariance principle. Theory Probab. Appli. 18, 207-225 (1973)

4. Ibragimov, I. I., Rozanov, Yu. A. : Gaussian stochastic processes (In Russian) Moscow : Izd. Nauk (1970)

5. Ibragimov, I. I., Linnik, Yu. V. : Independent and stationary sequences of random variables. Groningen : Wolters-Noordhoff : 1971

6. Lai, T. L. : On r-quick convergence and a conjecture of Strassen. Ann. Probab. 4, 612-627 (1976)

7. Rosenkrantz, W. A. : On rates of convergence for the invariance principle. Trans. Amer. Math. Soc. 129, 542-552 (1967)

8. Sawyer, S. : Rates of convergence for some functionals in probability. Ann. Math. Statist. 43, 273-284 (1972)

9. Skorokhod, A. V. : Studies in the theory of random processes. Reading : Addison-Wisley : 1965

10. Strassen, V. : Almost sure behavior of sums of independent random variables and martingales. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 2, 315-343 (1967)

11. Yoshihara, K. : Limiting behavior of U-statistics for stationary, regular processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 35, 237-252 (1976)

12. Yoshihara, K. : Probability inequalities for sums of absolutely regular processes and their applications (Submitted)

13. Yoshihara, K. : Convergence rates for integral type functionals of

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

absolutely regular processes. (Submitted).

14. Yoshihara, K. : Convergence rates of the invariance principle for absolutely regular processes. (Submitted)

15. Yoshihara, K. : r-Quick convergence for absolutely regular processes. (Submitted)

16. Yoshihara, K. : Almost sure invariance principles for absolutely regular processes. (Submitted)

Sem. on Probab.
Vol.43 1977年
P1-105

1977年4月　確率論セミナー発行