Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 41

Markov過程の研究

（1975年1月シンポジウム報告）

1975

論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

ま え が き

1975年1月9日から12日まで東京工業大学でマルコフ過程のシンポジウムが行われた．このノートはその時講演された方々から寄稿をいただいて出来たものである（講演された方のうちには別の形での発表を予定している方もあり、ここにあるのは全体の講演の約3分の1である）．

内容は必ずしも講演そのままではなく，講演と関連する問題について報告者の方々に自由にまとめていただいた．

志村道夫
本尾　実

題名は vol. 40 と同じにしたが，此のノートは別にシンポジウムの報告で，従って内容も vol. 40 と直接関係はない．

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

目 次

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

絶対連続性と情報量の計算へのマルチンゲールの応用

名工大 櫃田倍之

前半§1～§5では，マルチンゲールの絶対連続性問題への応用を取り扱う。この部分は主にLiptzer－Shiryaev の近著〔10〕や，Orey の東京教育大での講義録〔15〕と重複する。主に結果の紹介だけに留める。証明は〔10〕に系統的に詳しく述べられている。後半§6では応用の一例として，情報理論に関連した量の計算を取り扱う。Kadota－Zakai－Ziv〔6〕及びHitsuda－Ihara〔4〕の内容のまとめでもある。各所に（筆者にとって）興味のある問題点を指摘しておいた。不勉強のため解決されたことを知らないでいるかもしれないので，御教示くだされば幸と思う。

§1 非負 Super－martingale の表現

確率空間を(Ω, F, P)とする。$\{\mathcal{F}_t\}$ を $\mathcal{F}$ の sub－σ－algebra の増大列とする。$\mathcal{F}_t$ はすべて P－測度ゼロの集合をふくむこととする。$W=(W_t, \mathcal{F}_t)$ を Wiener 過程，γ_t を $\mathcal{F}_t$－可測（各tで）な確率過程で（このとき，$\gamma=(\gamma_t, \mathcal{F}_t)$とかく）

$$(1.1) \qquad P\left(\int_0^T \gamma_s^2 ds < \infty\right) = 1$$

をみたすものとする。

Wiener 過程に関する絶対連続性の問題では，次の形の非負確率過程 $\zeta=(\zeta_t, \mathcal{F}_t)$が重要な役割りをはたす：

$$(1.2) \qquad \zeta_t = 1 + \int_0^t \gamma_s dW_s$$

<u>補題1.1</u>. $\gamma=(\gamma_t, \mathcal{F}_t)$ が(1.1)をみたすとして $\zeta_t \geq 0$ ならば $(\zeta_t, \mathcal{F}_t)$は Super－martingale である，特に $E\zeta_t \leqq 1$ である。
(∵) Fatouの定理による。

<u>定理1.1</u> （表現定理：Liptzer－Shiryaev 及び Kailath）
非負 Super－martingale $\zeta=(\zeta_t, \mathcal{F}_t)$が(1.2)で与えられるとき

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$(1.3)\qquad \zeta_t = \exp\left(\Gamma_t(\beta) - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds\right)$$

但し、$\beta_s = \zeta_s^+ \gamma_s$, $\zeta_s^+ = \begin{cases} 1/\zeta_s & \zeta_s > 0 \\ 0 & \zeta_s = 0 \end{cases}$

$$\Gamma_t(\beta) = P\text{-}\lim_n \chi\left(\int_0^t \beta_s^2 ds < \infty\right) \int_0^t \beta_s^{(n)} dW_s$$

$$\beta_s^{(n)} = \beta_s \chi\left(\int_0^s \beta_u^2 du \leqq n\right)$$

とかける。

この定理は $\zeta_T > 0$ (a.e) の場合に Kunita - Watanabe [8] によって得られた表現

$$\zeta_t = \exp\left(\int_0^t \beta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds\right) (= \varphi_t(\beta))$$

の一般化である。

§2 非負 martingale

まず簡単な補題を用意する。

補題 2.1 $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$ を非負 super-martingale とする。$E\xi_0 = E\xi_T$ ならば ξ は martingale である。

このことによって、$E[\zeta_T] = [\varphi_T(\beta)] = 1$ となる条件を見出すことが重要である。一般論としての十分条件は NoviKov [13] による結果がある。

定理 2.1 $\beta = (\beta_t, \mathcal{F}_t)$ が条件

$$E \exp \frac{1}{2}\left\{\int_0^T \beta_s^2 ds\right\} < \infty$$

をみたせば、$E\varphi_T(\beta) = 1$ がなりたつ。

よりクラスを限定した場合には、次のようなある程度コンクリートな結果が得られている。

定理 2.2 (Hitsuda [3]) β_t が W の線形関数

$$\beta_t = \int_0^t R(t, u) dW_u$$

と書けて、$R \in L^2(dt, du)$ ならば、$E\varphi_T(\beta) = 1$ である。

[注意] この $\varphi_T(\beta)$ によって、平均 0 の Gauss 過程で Wiener 過程と同等なものの密度関数のすべてを与えている。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

定理 2.3 (Orey [14]) $\beta_t = b(W_t)$ と書ける場合には，
$b \in L^2_{loc}$

かつ

(2.1) $\int_c^{\infty}\left(\frac{1}{B(y)}\int_y^{\infty}B(u)\,du\right)dy = \int_{-\infty}^{c}\left(\frac{1}{B(y)}\int_{-\infty}^{y}B(u)\,du\right)dy = \infty,$

$B(+) = \exp\left\{-2\int_0^y b(z)\,dz\right\}$

ならば，$E\,\varphi_T(\beta) = 1$ である．

［注意 1］ この条件は，1次元 Brown 運動から Multiplicative functional によって得られるすべての拡散過程を与える必要十分条件として導かれた．条件 (2.1) は Feller によって与えられた $-\infty, \infty$ が exit boundary でないことと同値である．

［注意 2］ 十分条件については，Maruyama [11]，Motoo [12] 等によって与えられている．

Orey の結果に関しては，次のことが問題であろう。

1° $\beta_t = b(t, W_t)$ のとき（時間的に homogeneous でないとき），$E\,\varphi_T(\beta) = 1$ となるための条件は何か．

2° 多次元のときはどうか．

3° Orey の場合 $E\,\varphi_T(\beta) = 1$ ($\beta_t = b(W_t)$ として) が，任意の $T < \infty$ についてなりたつのであるが，T を $(\mathcal{F}_t)$ − stopping time $\tau(\omega)$ としたとき

$$E[\varphi_\tau(\beta)] = E\left[\exp\left(\int_0^\tau b(W_t)\,dW_t - \frac{1}{2}\int_0^\tau b(W_t)^2\,dt\right)\right] = 1$$

がなりたつための条件を b によって述べること．

4° 境界条件のついた拡散過程ではどうか．

§3 Girsanov の定理の一般化

Girsanov の定理はよく知られているが，仮定 $E[\mathfrak{z}_T] = 1$ 及び $\mathfrak{z}_T > 0$ (a.e) をみたす場合であった．定理 1.1 と関連して，$\mathfrak{z}_T = 0$ となる場合を許すと次の形になる。

定理 3.1 $E[\mathfrak{z}_T] = 1$ とする．$\tilde{P}(dw) = \mathfrak{z}_T(w)\,P(dw)$ によって確率測度を変換すると，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P})$ 上で

$\tilde{W} = (\tilde{W}_t, \mathcal{F}_t) \quad t \le T$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

但し

$$\tilde{W} = W_t - \int_0^t \mathfrak{z}_s^t \gamma_s ds \quad (\mathfrak{z}_s^t は 定理1.1 で定義したもの)$$

は Wiener 過程である.

この定理の証明は，本[10]にある.

§4 Itô 過程及び diffusion 型過程の Winer 測度に関する絶対連続性

Itô 過程及び diffusion 型過程の定義は以下に述べるが，この命名は Liptzer-Shiryaev による。

定義4.1 $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$ が Wiener 過程 $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$ に関して Itô 過程であるとは，ある確率過程 $\beta = (\beta_t, \mathcal{F}_t)$ で，

$$P\left\{\int_0^T |\beta_t| dt < \infty\right\} = 1$$

をみたすものが存在して

(4.1) $\quad \xi_t = \xi_0 + \int_0^t \beta_s(w) ds + W_t$

と書けるときに言う.

定義4.2 $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$ が diffusion型であるとは，$\beta = (\beta_t, \mathcal{F}_t(\xi))$ で $P\{\int_0^T |\beta_t| dt < \infty\}$ であるとは，$\beta = (\beta_t, \mathcal{F}_t(\xi))$ で，$P\{\int_0^T |\beta_t| dt < \infty\} = 1$ をみたすものが存在して，(4.1) と書けるときに言う。但し $\mathcal{F}_t(\xi) = \sigma\{\xi_s ; s \leqq t\}$

〔注意〕 元の定義は，W_t の部分が W_t に関する確率積分で与えられるマルチンゲールの場合になされているが，ここでは必要な場合だけに限定した。

Itô 過程でも diffusion型であっても，(4.1)で定義される ξ は連続な確率過程であるから，連続関数の空間 $C[0,T]$ 上の測度 μ_ξ を導びく。μ_ξ と W の導く Wiener 測度 μ_W の間の絶対連続性に関しては，次の諸定理がある.

定理4. 1 (Liptzer-Shiryaev[10]) $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $t \leqq T$, を(4.1)で与えられる Itô 過程とすると，

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$P(\int_0^T \beta_t^2\, dt < \infty)$ ならば $\mu_\xi \ll \mu_w$ である。

〔注意〕 $\Leftarrow$ は必ずしも言えない．しかし，ξ が diffusion 型であれば，定理 4.2 の意味で必要十分である。

定理 4.2 $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$，$t \leq T$，が (4.1) で与えられる diffusion 型であれば $P(\int_0^T \beta_t^2\, dt < \infty)$ と，$\mu_\xi \ll \mu_w$ は同値である．

§5 Innovation process

$\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$ を (4.1) で与えられる Itô 過程で，特に $\xi_0 = 0$ をみたすものとする。Itô 過程から，diffusion型に表現しなおすことが，"innovation" の 1 つの意義である．innovation を使って，$d\mu_\xi / d\mu_w$ の具体的な形を導びくことができる．

定理 5.1 $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$，$t \leqq T$ を Itô 過程とする．

(5.1) $\int_0^T E|\beta_t(w)|\, dt < \infty$

であるとき，$\alpha_t(w) = E[\beta_t \mid \mathcal{F}_t(\xi)]$ とおくと

$$\overline{W} = (\overline{W}_t,\ \mathcal{F}_t(\xi)),\quad 0 \leqq t \leqq T$$

但し $$\overline{W}_t = \xi_t - \int_0^t \alpha_s(w)\, ds$$

は Wiener 過程である．

ここで導いた $\overline{W}$ を ξ の "innovation process" という。ξ は $\overline{W}$ に関して diffusion 型に書かれていることに注意しよう。この結果は，Kailab [7] 及び Shiryaev [16] によるものである．応用として

定理 5.2 $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$ は (4.1) で定義されるものとする．仮定

(5.2) $P(\int_0^T \beta_t^2(w)\, dt < \infty) = 1$

及び

(5.3) $E \exp(-\int_0^T \beta_t\, dw_t - \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2\, dt) = 1$

をみたせば $\mu_\xi \sim \mu_w$ であり かつ

$$P(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\, ds < \infty) = P(\int_0^T \alpha_s^2(W)\, ds < \infty) = 1$$

がなりたつ．但し $\alpha_s(X)$ は $\alpha_s(\xi) = \alpha_s(w)$ が各 s で a.e. P でなりたつ

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

関数とする．そのとき $C[0,T]$ 上の密度関数

$$(5.4)\quad \frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(w) = \exp\left(\int_0^T \alpha_s(w)\, dw_s - \frac{1}{2}\int_0^T \alpha_s^2(w)\, ds\right)$$

及び

$$(5.5)\quad \frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(\xi) = \exp\left(-\int_0^T \alpha_s(\xi)\, d\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\, ds\right)$$

で与えられる．

〔注意〕 Girsonov の定理によると，確率空間 $\tilde{P}(dw) = \varphi_T(\beta)\, P(dw)$，但し

$$\varphi_T(\beta) = \exp\left(-\int_0^T \beta_s\, dw_s - \frac{1}{2}\int_0^T \beta_s^2\, ds\right)$$

$$= \exp\left(-\int_0^T \beta_s\, d\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^T \beta_s^2\, ds\right)$$

でみると，$\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$ は Wiener 過程であるから，

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(\xi) = E[\varphi_T(\beta) \mid \mathcal{F}_T(\xi)]$$

で与えられる （5.5）とあわせて（さらに $T=t$ を動かして） 各 t に対して

$$E\left[\exp\left\{-\int_0^t \beta_s\, d\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2\, ds\right\} \Big| \mathcal{F}_t(\xi)\right]$$

$$= \exp\left\{-\int_0^t E[\beta_s \mid \mathcal{F}_s(\xi)]\, d\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^t E[\beta_s \mid \mathcal{F}_s(\xi)]^2\, ds\right\} \quad (a.e)$$

がなりたつ．このことに関連して 一般の $(\mathcal{F}_t)$－martingale に対して，$\mathcal{F}_t(\xi)$（$\subset \mathcal{F}_t$） での条件付平均値と確率積分との交換可能性が保証されるための条件は何であろうか？

§6 情報量の計算への応用

送信符号として，確率過程 $\theta = (\theta_t, \mathcal{F}_t)$ を考える． $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$ は θ と独立な Wiener 過程とする．また，$\alpha_t(w)$ は $\mathcal{F}_t(\theta, \xi) = \sigma\{\theta_s, \xi_s;\ s \le t\}$ 可測な確率過程としよう。もちろん $\mathcal{F}_t(\theta, \xi) \subset \mathcal{F}_t$ である． $\alpha_t(w)$ は $\alpha_t(\theta, \xi)$ と書けることが保証されるが，これは‘符号化’を示す．“Channel” は次の式で与えられる．

$$(6.1)\quad d\xi_t = \alpha_t(\theta \cdot \xi)\, dt + dW_t,$$

但し、仮定

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$P\left(\int_0^T |a_t(\theta,\xi)|dt < \infty\right) = 1$$

をみたすとする．$a_t(\theta,\xi)$ が θ のみの関数 $a_t(\theta)$ と書けるとき，(6.1) を"*channel without feedback*"という。そうでないとき，"*channel with feedback*"という．(6.1) は雑音 dw_t に妨げられた受信号 ξ を与えている．このとき，ξ は θ についてどれだけの情報を伝えているかを問題にする．

μ_θ, μ_ξ 及び $\mu_{(\theta,\xi)}$ をそれぞれの確率過程 W, ξ 及び (θ,ξ) の導びく関数空間上の測度とすると，θ と ξ の間の情報量は

$$I_T(\theta,\xi) = \sup_{\Delta} \sum \log \frac{\mu_{(\theta,\xi)}(\Delta i)}{\mu_\theta\times\mu_\xi(\Delta i)}$$

(但し，Δ はすべての有限分割を動くとする) で与えられる．

Gelfand - Yaglom [2] によれば，

$$I_T(\theta,\xi) = E\log\frac{d\mu_{(\theta,\xi)}}{d(\mu_\theta\times\mu_\xi)}(\theta,\xi) \qquad (\mu_{(\theta,\xi)} < \mu_\theta\times\mu_\xi \text{ のとき})$$

$$= \infty \qquad\qquad (\mu_{(\theta,\xi)} \not< \mu_\theta < \mu_\xi \text{ のとき})$$

である。我々の場合その具体的な量は次の定理できまる．

<u>定理 6.1</u> (*Kadota - Zakai - Ziv* [6])

[仮定 1] (6.1) は唯一の $\mathcal{F}_t(\theta,W) = \sigma\{\theta, w_s;\ s\le t\}$ - 可測な解 ξ を持つ．(この仮定は，*feedback* がない *channel* では自動的にみたされる)

及び

[仮定 2] $\int_0^T E a_t^2(\theta,\xi)dt < \infty$

がなりたてば

$$I_T(\theta,\xi) = \frac{1}{2}E\int_0^T [a_t(\theta,\xi)^2 - \overline{a_t}^2(\xi)]dt$$

但し，$\overline{a_t}(\xi) = E[a_t(\theta,\xi) \mid \mathcal{F}_t^\xi]$

とする。

<u>補題</u> 定理の仮定のもとで，$\mu_{(\theta,\xi)}$ は $\mu_\theta\times\mu_W$ に絶体連続であり，

$$\frac{d\mu_{(\theta,\xi)}}{d(\mu_\theta\times\mu_\xi)}(\theta,W) = \exp\left[\int_0^T a_t(\theta,W)dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T a_t^2(\theta,W)dt\right]$$

である．

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

証明 各θに対して，方程式

$$d\xi_t = a_t(\theta, \xi)\,dt + dw_t$$

の解を $\xi^\theta = (\xi_t^\theta)$ とかく．$\mu_\theta \times \mu_W$ について確率1で，

$$\frac{d\mu_{(\theta,\xi)}}{d(\mu_\theta \times \mu_W)}(a, x) = \frac{d\mu_{\xi^\theta}}{d\mu_W}(x)$$

がなりたち，さらに密度関数は

$$\frac{d\mu_{\xi^\theta}}{d\mu_W}(W) = \exp\left(\int_0^T a_t(\theta, W)\,dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T a_t^2(\theta, W)^2\,dt\right)$$

であることを示す．実際，$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ （Γ_1, Γ_2 をそれぞれ，θ, W の path 空間の可測集合とする）に対して，

$$\begin{aligned}
\mu_{(\theta,\xi)}(\Gamma) &= P\{\omega; \theta \in \Gamma_1, \xi \in \Gamma_2\} \\
&= \int_{\Gamma_1} P\{\xi^\theta(w) \in \Gamma_2\}\,\mu_\theta(d\theta) \\
&= \int_{\Gamma_1} \mu_{\xi^\theta}(\Gamma_2)\,\mu_\theta(d\theta) \\
&= \int_{\Gamma_1}\left[\int_{\Gamma_2} \frac{d\mu_{\xi^\theta}}{d\mu_W}(x)\,\mu_W(dx)\right]\mu_\theta(d\theta) \quad \left(\begin{array}{l}\text{各}\theta\text{について}\\ \text{定理4.2を使う}\end{array}\right) \\
&= \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \frac{d\mu_{\xi^\theta}}{d\mu_W}(x)\,\mu_\theta \times \mu_W(d\theta, dx)
\end{aligned}$$

であるから，（補題の証明終り）

定理の証明 まず等式

$$\frac{d\mu_{(\theta,\xi)}}{d(\mu_\theta \times \mu_\xi)}(\theta, \xi) = \frac{d\mu_{(\theta,\xi)}}{d(\mu_\theta \times \mu_\xi)}(\theta, \xi) \Big/ \frac{d(\mu_\theta \times \mu_\xi)}{d(\mu_\theta \times \mu_\xi)}(\theta, \xi)$$

$$= \frac{d\mu_{(\theta,\xi)}}{d(\mu_\theta \times \mu_W)}(\theta, \xi) \Big/ \frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(\xi)$$

が確率1でなりたつことに注意する。この式の中に現れる $\frac{d\mu_{(\theta,\xi)}}{d(\mu_\theta \times \mu_W)}(\theta\xi)$ は補題により $\exp\left(\int_0^T a_t(\theta, \xi)\,d\xi_t - \frac{1}{2}\int_0^T a_t^2(\theta, \xi)\,dt\right)$ である。また

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W} = \exp\left(\int_0^T \bar{a}_t(\xi)\,d\xi_t - \frac{1}{2}\int_0^T \bar{a}_t(\xi)^2\,dt\right)$$

（但し，$\bar{a}_t(\xi) = E[a_t(\theta, \xi) \mid \mathcal{F}_t(\xi)]$）である（定理5.2），［仮定2］

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

により，

$$\int_0^T E\,\bar{a}_t^2(\xi)\,dt \leqq \int_0^T E a_t^2(\theta,\xi)\,dt < \infty$$

に注意すれば，

$$\log \frac{d\mu_{(\theta,\xi)}}{d(\mu_\theta\times\mu_\xi)}(\theta,\xi) = \int_0^T [a_t(\theta,\xi) - \bar{a}_t(\xi)]\,d\xi_t$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T [a_t^2(\theta,\xi) - \bar{a}_t^2(\xi)]\,dt$$

$$= \int_0^T [a_t(\theta,\xi) - \bar{a}_t(\xi)]\,a_t(\theta,\xi) - \frac{1}{2}[a_t^2(\theta,\xi) - \bar{a}_t^2(\xi)]\,dt$$

$$+ \int_0^T [a_t(\theta,\xi) - \bar{a}_t(\xi)]\,dW_t$$

である。再び［仮定2］に注意して平均をとれば，

$$E \log \frac{d\mu_{(\theta,\xi)}}{d(\mu_\theta\times\mu_\xi)}(\theta,\xi) = \frac{1}{2}\int_0^T E[a_t^2(\theta,\xi) - \bar{a}_t^2(\xi)]\,dt$$

が得られる．（定理の証明終）

最後に，channel の容量についてふれよう．

$$C_T = \sup I_T(\theta,\xi),$$

但し，(θ,ξ) は［仮定1］［仮定2］及び“エネルギー制約”

(6.2) $\quad E[a_t^2(\theta,\xi)] \leq P_0$

をみたす範囲を動くものとする．このとき，C_T を制約条件（6.2）の下での channel（6.1）の容量とよぶ．明らかに，定理6.1により任意に固定したTに対して，

$$0 \leqq I_T(\theta,\xi) \leq \frac{1}{2}P_0T$$

がなりたつから $C_T \leq \frac{1}{2}P_0T$ がわかる．実は $C_T = \frac{1}{2}P_0T$ であり，$I_T(\theta,\xi) = \frac{1}{2}P_0T$ となるものが，次のように構成できる．

定理6.2（Ihara [5]） $\theta = (\theta(t), \mathcal{F}_t)$ を平均0の Gauss 過程で W と独立とする。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$\int_0^T E[\theta(t)^2]\,dt < \infty$$

で，各 t で $E[\theta(t)^2] \neq 0$ ならば，$\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$ を次のように線型に構成して，

$$I_T(\theta, \xi) = \frac{1}{2} P_0 T$$

となるようにできる：

$$\xi(t) = \int_0^t A(s)[\theta(t) - \hat{\theta}(t)]\,dt + W(t)$$

$$A^2(t)\,E[\theta(t) - \hat{\theta}(t)] = P_0$$

$$\hat{\theta}(t) = E[\theta(t) \mid \mathcal{F}_t(\xi)]$$

定理6.1及び6.2に相当することは，一般のGauss型channel（雑音が必ずしもホワイトでないとき）にも拡張される（Hitsuda－Ihara〔4〕），Liptzer〔9〕にも関係する話題がある。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

引 用 文 献

[1] M.P. Ershov: On absolutely continous measures related to processes of diffusion type. Теория Вероятн. и ее Примен. 17 (1972) 173-178 (ロシア語).

[2] I.M. Gelfand and A.M. Yaglom: Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function. Amer. Math. Soc. Transl, Ser 2 12 (1957) 199-247.

[3] M. Hitsuda: Representation of Gaussian processes equivalent to Wiener process, Osaka J. Math. (1968) 299-312.

[4] M. Hitsuda and S. Ihara: Gaussian channels and the optimal coding. J. Mult. Anal. 5 (1975)

[5] S. Ihara: Coding theory in white Gaussian channel with feedback. J. Mult. Anal. 4 (1974) 74-87.

[6] T. Kadota, M. Zakai and J. Ziv: Mutual information of white Gaussian channel with and wihout feedback IEEE Trans Infomation Th IT-17 (1971) 368-371.

[7] T. Kailath: An innovations approvach to least-square estimation, Parts I, II. IEEE Trans. Auto. Control AC-13 (1968) 646-660.

[8] H. Kunita and S. Watanabe: On square integrable martingales, Nagoya M.J. 30 (1967) 209-245.

[9] R.Sh. Liptzer: Optimal coding and decoding for transmisson of Gaussian Markov signals over channels with noiseless feedback. Проб. Перепатии. Инфор. 10 (1974) 3-16 (ロシア語).

[10] R.Sh. Liptzer and A.N. Shiryaev: Statistics of stochastic processes. Nauka (1974) (ロシア語)

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

[11] G. Maruyama : On the transition probability functions of the Markov process. Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 5 (1954) 10-20.

[12] M. Motoo : Diffusion process corresponding to $\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, Ann. Inst. Stat. Math, 12 (1960) 37-61.

[13] A. A. Novikov : On an equality for stochastic integrals. Теория. вероя. иее Примен 17 (1972) 761-765.

[14] S. Orey : Conditions for the absolutely continuity of two diffusions. Trans. Amer. Math. Soc. (1974) 413-426.

[15] S. Orey : 東教大での講義録 (1974).

[16] A. N. Shiryaev : Stochastic equations for non-linear filteration of jump-type Markov processes, Проб, перед. инфор 2 (1966) 3-22.

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

Singular drift をもつ反射壁 Brown 運動

兼田 均

§0. はじめに

容器中の一粒子の運動を考える。容器は，いわば粒子に対し異方透過性をもつ膜によって幾つかの領域に分けられていて（例えば細胞の様に），粒子は各領域においてBrown運動を行うものとする。ここで問題にするのは，この様な運動のイメージにふさわしいMarkov過程の構成と，その過程の時間無限大での挙動である。この際，単純ではあれ，Wentzellの境界条件とは異なるある種の境界条件を導入することになる。

§1. 記号，定理及び証明の概略

よく知られている如く，連続Feller半群にはpathが右連続な強Markov過程（詳しくはstandard process）が対応する。つまるところ，特殊な連続Feller半群の存在とその時間無限大での性質を調べることになるけれど，半群の特殊性を対応するMarkov過程Xの性質として述べるために記号を準備する。n－次元ユークリッド空間R^n（$n \geq 3$）の滑らかな超曲面$\partial\Omega$を境界にもつ有界領域をΩ，さらに領域Ωは互に交わることのないℓ個の単連結領域Ω_i（$i=1,\cdots,\ell$）を含み，各Ω_iの境界$\partial\Omega_i$は滑らかな超曲面であるとする。そして，

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega, \quad \Omega_0 = \Omega \setminus \cup_{i=1}^{\ell} \Omega_i, \quad \partial\Omega_0 = \partial\Omega$$

とする。構成すべき連続Feller半群に対応する過程Xが次の(i) (ii) (iii)の特徴をもつようにしたい。

(i) Xは各領域Ω_i（$i=0,1,\cdots,\ell$）上でBrown運動的である。即ち，Xのcharacteristic operater $\mathfrak{U}$は，Ω_i上の二回連続可微分関数fとLaplacian $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j^2}$に対し

$$\mathfrak{U}f(x) = \Delta f(x) \qquad x \in \Omega_i 。$$

(ii) $\partial\Omega_i$（$i=1,\cdots,\ell$）上である特異性をもっていて，次の$\bar{\Omega}$上の測度mを不変測度とする。

$$m(dx) = \sum_{i=0}^{\ell} d_i \, I_{\Omega_i}(x)\, dx \qquad d_i；正値定数$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

(iii) $\partial\Omega_0$ は反射壁である.

結論を述べるため,今少し新たな記号を準備する。Σ, $\bar{\Sigma}$ を各々,ユークリッド空間 R^n の領域及びその閉包とするとき,$C^r(\Sigma)$ で Σ 上の実数値 rー回連続可微分関数全体,$C^r(\bar{\Sigma})$ で $C^r(R^n)$ の元を $\bar{\Sigma}$ に制限して得られる関数全体,$C_0^r(\Sigma)$ で $C^r(\Sigma)$ の *support* コンパクトな元全体を表わす($r=0,1,\cdots,\infty$)。$C^0(\Sigma)$, $C^0(\bar{\Sigma})$ を単に $C(\Sigma)$, $C(\bar{\Sigma})$ と書く。連続 Feller 半群の *infinitestimal operator* の定義域に関連して次の関数空間が必要である. $\mathcal{D}_0=\{u\in C^2(\bar{\Omega})\mid \frac{\partial u}{\partial n_i}(x)=0 \quad x\in\partial\Omega_i \ (i=0,1,\cdots,\ell)\}$, 但し $\frac{\partial u}{\partial n_i}(x)$ は,$u(x)$ の $\bar{\Omega}_i$ への制限の境界 $\partial\Omega_i$ における外法線方向微分である. $\mathcal{D}'=\{u\in C(\bar{\Omega})\mid u$ の $\bar{\Omega}_i$ への制限は $C^1(\bar{\Omega}_i)$ に属し, Ω_i への制限は $C^2(\Omega_i)$ に属す ($i=0,1,\cdots\ell$)。$d_0\frac{\partial u}{\partial n_0}(x)+d_i\frac{\partial u}{\partial n_i}=0 \quad x\in\partial\Omega_i \ (i=1,\cdots,\ell)$。$\frac{\partial u}{\partial n_0}(x)=0 \quad x\in\partial\Omega_0\}$, 但し $d_0\frac{\partial u}{\partial n_0}+d_i\frac{\partial u}{\partial n_i}=0$ における $\frac{\partial u}{\partial n_0}$ は, u の $\bar{\Omega}_0$ への制限の $\partial\Omega_i$ 上での Ω_0 に関する外法線方向微分。$\mathcal{D}'$ の元 u に対し, $\bigcup_{i=0}^{\ell}\Omega_i$ 上の連続関数 Δu が定まる。Δu を $\bar{\Omega}$ 上の連続関数に拡張できるとき,その拡張を $\bar{\Delta}u$ で表わし, $\mathcal{D}=\{u\in\mathcal{D}'\mid \bar{\Delta}u$ が存在する$\}$ とする。この時,次のことがいえる。*Infinitesimal operator* A とその定義域 $\mathcal{D}_A$ が次の条件を充たす $C(\bar{\Omega})$ 上の連続 Feller 半群が存在する。

(i) $\mathcal{D}\subset\mathcal{D}_A$, $\quad Au=\bar{\Delta}u \quad u\in\mathcal{D}$ 。

そして,対応する *Markov* 過程(実は *path* が連続である)は $m(dx)$ を不変測度にもち, T_tf は $L^2(\Omega m)$ で $t\to\infty$ に応じて $\int_\Omega fdm/m(\Omega)$ に収束する。

一般に,コンパクト距離空間 $\bar{\Omega}$ 上に連続 Feller 半群を導く *conservative Markov* 過程であれば,不動点定理によって $\bar{\Omega}$ 上の不変確率測度 μ が存在し,次の作用素達 $\{P_t\}$ は,

$$P_t f(x) = \int_{\bar{\Omega}} P_t(x,xy)f(y)$$

$L^p(\bar{\Omega},\mu)$ ($1\leqq p\leqq\infty$) 上の *positive* かつ *contractive* な連続半群を定める。そこで $C(\bar{\Omega})$ 上の連続 Feller 半群を構成するために,まず $L^2(\Omega,m)$ 上の連続半群(あるいは *resolvent*)を構成し,偏微分方程式の解の正則性に関する結果の助けを借りることにより,この半群が $C(\bar{\Omega})$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

上の連続 Feller 半群を一意的に定めることを示す，これが証明の方針である。$L^2(\Omega, m)$ の連続半群から出発するという idea は M. Fukushima の〔3〕に負う。K. Sato による例として〔3〕を引用している場合が，ここで扱う場合の一般化になっているのかどうか筆者にはよく分からない。Markov 過程の存在を証明するためここでは徹底して解析的方法に依ったけれど，確率微分方程式の立場からのアプローチがもっと容易であることをシンポジュウムの折，池田さんから指摘された。

§2、Resolvent の構成とその性質

$\partial\Omega_0$ は $C^{3V([\frac{n}{2}]+1)}$－クラス，$\partial\Omega_i$ は C^3－クラス（$i=1, \cdots, \ell$）を以後仮定する。

Lemma 1. $\mathcal{D}_0$ は $C(\bar{\Omega})$ で dense である。

Proof. $x \in \partial\Omega_i$（$i=0, 1, \cdots, \ell$）に対し，$x \in R^n$ としての開近傍 $U^a(x)$ とある写像 τ で，次の条件を充たすものが存在することに注意する。

$$\tau : U^{a(x)} \longrightarrow \tau(U^{a(x)}) \text{ は } C^2\text{-diffeo}$$

$$\tau(U^{a(x)}) = \{ y \in R^n \mid |y_j| < a \quad j=1, 2, \cdots, n \}$$

$$\tau(U^{a(x)} \cap \partial\Omega_i) = \{ y \in R^n \mid y_n = 0,\ |y_j| < a \quad j=1, \cdots, n-1 \}$$

$$\tau^* \frac{\partial}{\partial n_i} = -\frac{\partial}{\partial y_n} \quad \text{on } \tau(U^{a(x)} \cap \partial\Omega_i)。 \qquad (Q.E.D.)$$

次に，$\mathcal{D}$ 上の bilinear form B_α による $\mathcal{D}$ の完備化を $\bar{\mathcal{D}}$，その内積を同じく B_α で表わす，但し

$$B_\alpha(u, \varphi) = \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^n u_{x_j} \varphi_{x_j} + \alpha u \varphi \Big) dm .$$

Lemma 2. $\bar{\mathcal{D}}$ の有界集合は $L^2(\Omega, m)$ の集合として相対コンパクト。

Proof. $C'(\bar{\Omega}_i)$ 上の bilinear form $\int_{\Omega_i} \big(\sum_{j=1}^n u_{x_j}\varphi_{x_j} + \alpha u \varphi \big) dm$ による $C'(\bar{\Omega}_i)$ の完備化によって得られる Hilbert 空間を $H'(\Omega_i, m)$ とする。次の関係に注意して，Rellich の定理（定理 3.8〔1〕）を用いる。

$$\bar{\mathcal{D}} \underset{\text{isometry}}{\hookrightarrow} \sum_{i=0}^{\ell} \oplus H'(\Omega_i, m) \underset{\text{injection}}{\hookrightarrow} L^2(\Omega, m) \qquad (Q.E.D.)$$

Lemma 3. 任意の $\alpha > 0$ に対し，$L^2(\Omega, m)$ から $\bar{\mathcal{D}}$ への線型作用素 G_α で次の条件を充たすものが存在し，唯一に限る。

$$B_\alpha(G_\alpha f, \varphi) = \int_\Omega f \varphi \, dm \qquad {}^\forall \varphi \in \bar{\mathcal{D}} 。$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$\{G_\alpha\}_{\alpha>0}$ の性質として

(i) $\mathcal{D} \subset G_\alpha L^2(\Omega, m)$

(ii) G_α は一対一の連続写像で resolvent 方程式を充たす

$$G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta = 0$$

(iii) αG_α は $L^2(\Omega, m)$ 上の作用素として，完全連続対称作用素かつ Markov 作用素でもある。Markov 作用素とは

$$0 \leq f \leq 1 \quad m\text{-}a.e \Rightarrow 0 \leq \alpha G_\alpha f \leq 1 \quad m\text{-}a.e.$$

proof. G_α の存在と一意性は Riesz 表現定理であり，完全連続性は Lemma 2から出る。以下 (i) と Markov 性だけを示す。残りは直ちに確かめられるから。$u, \varphi \in \mathcal{D}$ かつ $f = (\alpha - \overline{\Delta}) u$ としよう。

greenの公式により

$$B_\alpha(u, \varphi) = \alpha \int_\Omega u \varphi \, dm + \sum_{i=0}^{n} \int_{\Omega_i} (-\Delta u) \varphi \, dm + \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial n_i} \varphi \, dS + \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial n_0} \varphi \, dS + \sum_{i=1}^{n} c_0 \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial n_0} \varphi \, dS$$

$$= \int_\Omega \varphi (\alpha - \overline{\Delta}) u \, dm = \int_\Omega f \varphi \, dm.$$

よって $G_\alpha f = u$. 即ち $\mathcal{D} \subset G_\alpha L^2(\Omega, m)$。 $1 = \alpha G_\alpha 1$ に注意して，$f \geq 0 \quad m\text{-}a.e.$ のとき $G_\alpha f \geq 0 \quad m\text{-}a.e.$ を示す。

$\forall \delta > 0$ に対し，$C^2(R^1)$ の非減少関数 $\varphi_\delta(t)$ で

$$\varphi_\delta(t) = \begin{cases} -\delta & t \leq -2\delta \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

$$0 \leq \frac{d}{dt} \varphi_\delta(t) \leq 1 \qquad -2\delta < t < 0$$

を充たすものは，次の性質をもつ。$v \in \overline{\mathcal{D}}$ に対し $\varphi_\delta(v) \in \overline{\mathcal{D}}$ かつ

$\varphi_\delta(v)_{x_j} = \left(\frac{d}{dt} \varphi_\delta\right)(v) \, v_{x_j}$ （$\mathcal{D} \subsetneq \sum_{i=0}^{n} \oplus H^1(\Omega_i, m)$ だった）。さらに $\overline{\mathcal{D}}$ 上の functional $\Phi_f(v)$ を

$$\Phi_f(v) \equiv B_\alpha(v - w, v - w)$$
$$= B_\alpha(v, v) + B_\alpha(w, w) - 2\int_\Omega f \, dm$$

で定義する，但し $w = G_\alpha f$。 容易に，$\Phi_f(\varphi_\delta(w)) \leq \Phi_f(w)$.

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

よって，$\varphi_\delta(w) = w$ m-a.e.，δ が任意であったから $w = G_\alpha f \geq 0$ m-a.e. が分かる．　(Q.E.D.)

Lemma 3 によって $\{G_\alpha\}$ は，infinitesimal operator が $\alpha - G_\alpha^{-1}$ に等しい $L^2(\Omega, m)$ 上の連続半群を唯一つ定める。

$x \in \partial\Omega_i$ $(i \neq 0)$ とし，Lemma 1 の証明のとき述べた開近傍 $U(x)$ と写像 τ を固定する。写像 $\sigma : R^n \to R^n$ を次の様に定義する。

$$\sigma(y)_j = y_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$\sigma(y)_n = \begin{cases} y_n/d_0 & y_n \leq 0 \\ y_n/d_i & y_n > 0 \end{cases}$$

$\bar{\Omega}$ 上の関数 u に対し，$\hat{u}(z) = u \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}(z)$ によって $W = \sigma \circ \tau(U(x))$ 上の関数を定める．$H^1(W)$ でもって $C^1(\bar{W})$ の bilinear form

$$\int_W \left(\sum_{j=1}^n u_{z_j} \varphi_{z_j} + \alpha u \varphi \right) dz$$

による完備化から生ずる Hilbert 空間を表わす。

Lemma 4. 上の記号の下で，$u \in \bar{D} \Rightarrow \hat{u} \in H^1(W)$。

proof. $u, v \in D$ ならば $\hat{u}, \hat{v} \in C^1(\bar{W})$ かつ

$$\int_U \left(\sum_{j=1}^n u_{x_j} v_{x_j} + \alpha u v \right) dm = \int_W \left(\sum_{j,k=1}^n a_{jk} \hat{u}_{z_j} \hat{v}_{z_k} + \alpha \hat{u} \hat{v} \right) dz.$$

但し，$a_{jk}(z) = a_{kj}(z)$，$C(z)$ は．u, v によらぬ適当な正定数 γ_1, γ_2 があって

$$\gamma_1 \|\xi\|^2 \leq \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(z) \xi_j \xi_k \leq \gamma_2 \|\xi\|^2 \qquad \forall \xi \in R^n$$

$$\gamma_1 \leq C(z) \leq \gamma_2$$

を充たす。　(Q.E.D.)

Lemma 5. $\alpha G_\alpha f = f \Rightarrow f$ は定数 m-a.e.，特に $1/\alpha$ は G_α の simple eigenvalue。

Proof. 仮定より $\int_\Omega \sum_{j=1}^n f_{x_j}^2 \cdot dm = 0$。よって，$f$ は各 Ω_i 上で定数 m-a.e. Lemma 4 により $f =$ 定数 m-a.e　(Q.E.D.)

Lemma 6. $G_\alpha : C^\infty(\bar{\Omega}) \to C(\bar{\Omega})$.

Lemma 7. $G_\alpha : C(\bar{\Omega}) \to C(\bar{\Omega})$，$\|G_\alpha\| = 1/\alpha$.

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

αG_α がMarkov 性をもつので Lemma 7は Lemma 6から分かる。
Proof of Lemma 6. $f\in C^\infty(\bar\Omega)$ としよう。$\partial\Omega_0$ は十分滑らかなので, $\bar\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{\ell}\partial\Omega_i$ 上で連続な $G_\alpha f$ の version が存在することはよく知られている([1] の§9)。問題は $\partial\Omega_i$ ($i\neq 0$)の近傍で連続な $G_\alpha f$ の version の存在を示すことである。Lemma 4と同じ記号を用いることにする。$\hat\varphi(z)\in C_0^\infty(W)$ と $u=G_\alpha f$ に対し,

$$B_\alpha(u,\varphi)=\int_\Omega f\varphi\,dm$$

であり($supp\,\varphi\subset U(\alpha)$と考える), これを Lemma 4の証明に用いた変数交換により書き替えると,

$$(*)\quad \int_W\Big(\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\hat u_{z_j}\cdot\hat u_{z_k}+\alpha c\hat u\hat\varphi\Big)dz=\int_W c\hat f\hat\varphi\,dz.$$

ここで

$$V(z)=-\omega_n\int_W c\hat f(t)\Big/\|z-t\|^{n-2}\,dt$$

$$\omega_n=\Gamma(n/2)\Big/2(n-2)\pi^{n/2}$$

とすれば, distribution sense で $\Delta V=-c\hat f$ であるから

$$(*)=\int_W\sum_{j=1}^{n}V_{z_j}\hat\varphi_{z_j}\,dz.$$

但し

$$V_{z_j}(z)=(n-2)\omega_n\int_W(z_j-t_j)c\hat f(t)\Big/\|z-t\|^{n-1}\,dt.$$

さらに, $p>n$のとき $V_{z_j}\in L^p(W)$ になるので([5]の§115 lemma1), 次の Lemma 8によって $\hat u\in C(W)$, 即ち $u\in C(U(\alpha))$ がわかる。(Q.E.D.)

Lemma 8. (theorem 7.2 [6]) ΣをR^n($n\geqq 3$)の有界領域, Σ上の実数値可測関数 $a_{jk}(z)=a_{kj}(z)$, $b_j(z)$, $c(z)$, $d_j(z)$, $f_j(z)$ ($j,k=1,2,\cdots,n$)が次の条件を充たすとする.

$$|a_{jk}(z)|\leqq M$$

$$\nu\|\xi\|^2\leqq\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}(z)\xi_j\xi_k\qquad\forall\xi\in R^n$$

$$c(z)\in L^{r/2}(\Sigma),\quad b_j(z)\in L^r(\Sigma),\quad d_j(z)\in L^r,\ f_j(z)\in L^p(\Sigma)$$

但し, M, ν, p, r は正の定数で, $p,r>n$。$u\in H^1_{loc}(\Sigma)$ が

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma)$ に対し

$$\int_\Sigma \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} u_{z_k} + d_j u\right) \varphi_{z_j} dz + \int_\Sigma \left(\sum_{j=1}^n b_j u_{z_j} + cu\right) \varphi dz = \int_\Sigma \sum_{j=1}^n f_j \varphi_{z_j} dz$$

を充たせば $u(z)$ は Σ 上 Hölder 連続である。

§3. Theorem と Remarks

Theorem. $\mathcal{D}_A = G_\alpha(\bar{\Omega})$ を定義域とする作用素 $A = \alpha - G_\alpha^{-1}$ は $C(\bar{\Omega})$ 上の連続 Feller 半群 T_t の infinitesimal operator で，T_t は次の性質をもつ．

(i) $T_t 1 = 1$　　(ii) $\int_\Omega f T_t g \, dm = \int_\Omega g T_t f \, dm$

(iii) 正定数 σ が存在して　$\top$

$$\| T_t f - \int_\Omega f dm / m(\Omega) \|_{L^2(\Omega, m)} \leq e^{-\sigma t} \|f\|_{L^2(\Omega, m)}.$$

Proof. A が $C(\bar{\Omega})$ 上の contractive な連続半群の infinitesimal operator であるのは一般論からわかる。positive 及び (i) (ii) は

$$T_t f = s\text{-}\lim_{\alpha \to \infty} \exp(-t\alpha) \exp(t\alpha^2 G_\alpha) f$$

からわかる。$-A = -(\alpha - G_\alpha^{-1})$ は $L^2(\Omega, m)$ 上の非負自己共役作用素でもあり，G_α が $L^2(\Omega, m)$ で完全連続で $1/\alpha$ がその simple eingenvalue であることから $-A$ のスペトルはディスクリートで ∞ にのみ集積する。従って (iii) がわかる。　(Q. E. D.)

Remark 1 (対応する Markov 過程 X の local property) path の連続性は，$\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_A$ 及び [2] の theorem 2.2, 3.14 からわかる。Markov 過程の characteristic operator $\mathfrak{U}$ が局所性をもつことと $\mathfrak{U}$ と A の関係を論じた [2] の theorem 5.5 によって

$$\mathfrak{U} f(x) = \Delta f(x) \qquad \forall f \in C^2(\Omega_i) \qquad x \in \Omega_i$$

もわかる．$\dot{X}$ で R^n の Brown 運動を表わすとき，各 part process X_{Ω_i} と $\dot{X}_{\Omega_i}$ $(i = 0, 1, \cdots, \ell)$ が同値であることの証明を筆者は知らない (c.f. [2] の chapter X)。

Remark 2. (不変測度と遷移確率の $t \to \infty$ での挙動) Theorem (ii) より $\mu = m/m(\Omega)$ が X の不変測度であることがわかる。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

しかしながら

$$\| P_t(x,\cdot) - \mu(\cdot) \|_{Var} \to 0 \quad \text{as } t \to \infty$$

を示すことが出来なかった。$\{P_t(x,\cdot)\}_{t>0}$ が Lebesgue 測度と互に絶対連続なことが収束が言えるための十分条件である(例えば[4]の lemma 5.3)。

Remark 3. $n=2$ を除外したのは Stampacchia の結果がこの場合どんな内容になるのか筆者は知らなかったからである. $n=2$ でも類似の結果が知られているはず(Kanda)。X は $n=1$ のとき, いわゆる speed measure と scale measure が特異点を境に異なる定密度を持つ場合に相当する。

References

[1] S. Agmon ; Lectures on elliptic boundary problem. Van Nostrand Comp. 1965. (邦訳:吉岡書店)

[2] E. B. Dynkin ; Markov process, Springer-Verlag, 1965.

[3] M. Fukushima ; On the generation of Markov processes by symmetric forms, Japan-USSR sympo. on probability theory, Lecture Notes in Math., no. 330 (1973) 46-79

[4] H. Kaneta ; On the asymptotic behaviour of a diffusion process with singular drift, to appear in Nagoya Math. J. vol. 57.

[5] V. I. Smirnov ; 高等数学教程(共立出版) vol. 12.

[6] G. Stampacchia ; Le problème de Dirichlet pour les équation elliptignes du second ordre à colfficients discontinus, Ann. Inst. Fourier, 15, 1 (1965), 189-258.

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

Wentzellの境界条件をみたす多次元拡散過程のPoisson point processによる構成

渡 辺 信 三

§0 Introduction

境界のある多様体上の拡散過程(連続なpathをもつ強Markov過程,ただし境界上では高々第一種の不連続性を許す)を記述する解析的データは,
 (i) 内部の行動を記述する2階楕円形(一般には退化する)微分作用素
 (ii) 境界での行動を記述する境界条件

として与えられ,後者の一般的な形はWentzellの境界条件として知られている(Wentzell [16])。この論説であつかう問題は,このようなデータ(i)(ii)を具体的に与えて対応する拡散過程を構成することである。この問題は多次元拡散過程論の一つの基本的問題として今まで色々と研究されてきた。まず作用素論的方法で(i)(ii)のデータから対応する拡散過程を構成する基本的な筋道がSato-Ueno [6]によって与えられた。この筋道にしたがい,Bony-Courrége-Priouret [1]はSchauder estimate等の解析的手段を用いて十分一般の場合の拡散過程の構成を行った。これらは一応解析的方法と云われるものであるが,一方確率論的方法では,Ikeda [3]が伊藤の確率微分方程式を境界条件のある場合に拡張して拡散過程を構成し,さらにWatanabe [12]ではこの確率微分方程式を一般的に境界条件をもつ確率微分方程式として定式化し十分一般の場合にその解の存在と一意性,したがって拡散過程が構成出来ることを示した。又Stroock-Varadhan [8], Stroock [9]等ではこの構成の問題を"martingale problem"として定式化し係数に対する弱い仮定(uniform ellipticでcontinuousであればよい)のもとでこの問題を解くのに必要なsingular integralの理論を展開している。

ここでは,上の問題に対する今一つの確率論的方法として,最近K. ITÔ [4]によってその一般論が展開されたところの"path spaceの値をとるPoisson point process"を用いる方法について論ずる。この方法によると,確率微分方程式を用いた場合(cf. [12])に比べてより一般の場合の構成が可能になる。特に境界から内部へjumpがある場合や,境

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

界の各部分で反射があったりなかったりする場合がこの方法によると一般的に構成可能である点は注目さるべきことと思われる．

§1では，K，I七今 [4] に従って Poisson point process の基本事項をのべる．

§2では，以下の構成に基本的な2種類の Poisson point process（それらは第1種及び第2種の Poisson point process of Brownian excursions と呼ばれる）を準備する．前者は n 次元半空間上の反射壁 Brown 運動の excursion 全体が作る point process である．

§3では，上の解析的データ (i) (ii) を具体的に与え，それらの満すべき必要な仮定を明確にする．仮定の主なものは，解の一意性を保証する Lipschitz 条件と，確率論的に当然な条件である transversality condition である．

§4で 構成さるべき拡散過程の excursion のうちで境界から内部に連続に入るもの（このような excursion を第1種 (of the first kind) の excursion と呼ぶ）を構成する．そのラフな考え方をのべると，第1種の Poisson point process of Brownian excursions の各 excursion は無限の entrance law をもつ Brown 運動であり，この Brown 運動に関する確率微分方程式を解くことにより，一つ一つの Brownian excursion の上に構成さるべき diffusion の excursion をのせるのである．このためには無限の entrance law をもった Brown 運動に関する stochastic calculus をきっちり準備する必要があり それは§2で行う．それからもう一つの重要な点は，与えられた解析的データにおける反射の係数の大きさに比例して構成さるべき diffusion の第1種の excursion の多さをもたらすメカニズムをどのようにして与えるかということで，ここではそのためにBrownian excursion の space-time relation を利用する．尚[13]では もっと直観的にわかりよい方法でこのメカニズムを与えたが，この方法は2次元以上だと境界上の process (cf. §6) の一意性を保証するのが困難になる。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

§5では，構成さるべき diffusion の excursion のうちで境界から jump するもの（このような excursion を第2種（of the 2nd kind）の excursion と呼ぶ）を，第2種の Poisson point process of Brownian excursions を用いてその上に構成する。ここでも Brownian excursion の space-time relation を用いることが一つの key point になる。

あとはこのようにして得られた第1種及び第2種の excursion を境界でつなぎ合せればよいが，そのつなぎ合せの役割をはたすのが"境界上の process"といわれるもので，その構成を§6で行う。

§7では，inverse local time を定義し，つなぎ合された excursions をその時間で計り直せば求める拡散過程の path function が得られる（§8）。

§1 Point process と Poisson point process

$(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする。

Def. 1.1 X-値 point function $p: (0,\infty) \to X$ とは $(0,\infty)$ のある countable subset $D_p \subset (0,\infty)$ で定義された map

$$p: D_p \ni t \longmapsto p(t) \in X$$

のことである。X-値 point function の全体を Π_X であらわす。$p \in \Pi_X$ により $(0,\infty) \times X$ 上の point measure（i.e. δ-measure の高々可算和）N_p が

$$N_p(dt\,dx) = \sum_{t \in D_p} \delta_{(t,p(t))}(dt\,dx)$$

により定まる。逆に $(0,\infty) \times X$ 上の point measure で各 t-section 上高々一点に mass をもつものはこの関係で point function を定める。このようにして point function とこの性質をもつ point measure とは一対一に対応するので両者を同一視して考えることもよくある。$\mathcal{B}(\Pi_X)$ を $\{N_p((0,t] \times E)\}_{t>0,\, E \in \mathcal{B}(X)}$ をすべて可測にする最小

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

の(Π_X 上の)σ-field とする。

<u>Def 1.2</u> <u>X-値point process</u> pとは，ある確率空間で定義された$\{\Pi_X, \mathcal{B}(\Pi_X)\}$-値確率変数のことである．$X$-値 point process pが <u>σ-discrete</u> であるとは，ある$E_n \in \mathcal{B}(X)$, $n=1,2,\cdots$, $\bigcup_n E_n = X$が存在して

$$N_p((0,t] \times E_n) < \infty \quad a.s \quad \forall t>0, \ \forall n=1,2,\cdots$$

となることである．

<u>Def 1.3</u> X-値 point process pが <u>Poisson point process</u> であるとは，pはσ-discrete であって各$B \in \mathcal{B}(0,\infty) \times \mathcal{B}(X)$に対し$N_p(B)$がPoisson分布に従い，$B_1, B_2, \cdots, B_n \in \mathcal{B}(0,\infty) \times \mathcal{B}(X)$が互いに disjoint のとき $N_p(B_1), N_p(B_2) \cdots, N_p(B_n)$が互いに独立になることである．(尚，前の条件は後の条件より従う)

<u>Def 1.4</u> X-値 point process pが <u>stationary</u> であるとは，任意の $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $E_i \in \mathcal{B}(X)$ $i=1,2\cdots,n$, $h>0$ に対し $\{N_p((t_{i-1}, t_i] \times E_i)\}_{i=1}^n$ と $\{N_p((t_{i-1}+h, t_i+h] \times E_i)\}_{i=1}^n$ とが同法則になることである．

<u>Theorem 1.1</u> (K. Itô [4]) pをX値，stationary Poisson point processとするとき

(1.1) $\quad E(p((0,1] \times E)) = n(E), \quad E \in \mathcal{B}(X)$

は$(X, \mathcal{B}(X))$上のσ-finite, positive measure nを定義する．逆に$(X, \mathcal{B}(X))$上のσ-finite positive measure nに対しX-値 stationary Poisson point process が(1.1)によって唯一つ(明らかな同値をのぞいて)存在する．

<u>Def. 1.5</u> このnをstationary Poisson point process pの <u>characteristic</u> <u>measure</u> (又はLévy measure)という。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

以下で Poisson point process に関する確率積分が必要になるのでその準備をしておく。ある確立空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に $\mathcal{F}$ の sub σ-fields の右連続な increasing family $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, \infty)$ が与えられているとする。Ω 上で定義された X-値 point process p が $\mathcal{F}_t$ に adapted であるとは、$\forall E \in \mathcal{B}(X)$ に対し $N_p((0, t] \times E)$ が $\mathcal{F}_t$-可測 ($\forall t > 0$) なることである。

Def. 1.6 Ω 上で定義された X 値 (stationary) Poisson point process p が X-値の $\mathcal{F}_t$-(stationary) Poisson point process であるとは、p が $\mathcal{F}_t$ に adapted かつ $\{N_p((t, t+h] \times E), h > 0, E \in \mathcal{B}(X)\}$ と $\mathcal{F}_t$ が independent なることである。

$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ に関し次のクラスを導入する：

$\mathcal{M}_1$ = $\mathcal{F}_t$-マルチンゲール M_t で $M_0 = 0$ a.s なるものの全体

$\mathcal{M}_{1,c}$ = $\mathcal{M}_1$ のうち連続なものの全体

$\mathcal{M}_2$ = $\mathcal{F}_t$-2乗可積分マルチンゲール M_t で $M_0 = 0$ a.s なるものの全体

$\mathcal{M}_{2,c}$ = $\mathcal{M}_2$ のうち連続なものの全体

$\mathcal{M}_1^{loc}$, $\mathcal{M}_{1,c}^{loc}$, $\mathcal{M}_2^{loc}$, $\mathcal{M}_{2,c}^{loc}$ はそれぞれ対応する局所マルチンゲールの空間である (例えば $M \in \mathcal{M}_2^{loc}$ とは M が $\mathcal{F}_t$-局所2乗可積分マルチンゲールで $M_0 = 0$ a.s なることである。$\mathcal{M}_{1,c}^{loc}$ と $\mathcal{M}_{2,c}^{loc}$ とは一致する)

$\mathcal{A}^+$ = $\mathcal{F}_t$ に適合した可積分な右連続 increasing process A で $A_0 = 0$ a.s. なるものの全体

$\mathcal{A}_c^+$ = $\mathcal{A}^+$ のうちで連続なるものの全体

$\mathcal{A}$ = $\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^+$: $\mathcal{F}_t$ に適合した可積分な bounded variation process A で $A_0 = 0$ なるものの全体

$\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_c^+ - \mathcal{A}_c^+$

$\mathcal{A}^{+,loc}$, $\mathcal{A}_c^{+,loc}$, $\mathcal{A}^{loc}$, $\mathcal{A}_c^{loc}$ はそれぞれ対応する局所可積分なものの作る空間である。

p を X 値, $\mathcal{F}_t$-adapted な point process で次の条件

(QL) $\exists E_n \in \mathcal{B}(X)$, $n = 1, 2, \cdots$, $\bigcup E_n = X$ such that

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

(28)

$$E\{(X_t^{(n)}-X_s^{(n)})/\mathcal{F}_s\}=E\{(\varphi_t^{(n)}-\varphi_s^{(n)})/\mathcal{F}_s\}\quad \forall t\geqq s \quad n=1,2,\cdots,$$

(QL)をみたす point process p に対し

(1.2) $\Gamma_p=\{E\in\mathcal{B}(X),\ \exists n,\ E\subset\bigcup_{i=1}^{n}E_i\}$

とおく，このとき $E\in\Gamma_p$ に対し $\exists_1\ \varphi(t)\in\mathcal{O}_c^+$ such that

$$N_p((0,t]\times E)-\varphi(t)\in\mathcal{M}_2$$

となる。

Def. 1.7 この $\varphi(t)$ を $\varphi_p(t,E)$ とあらわす.

明らかに p が $\mathcal{F}_t$ − stationary Poisson point process のときは条件（QL）をみたし $\varphi_p(t,E)$ は

(1.3) $\varphi_p(t,E)=n(E)\cdot t \quad \forall E\in\Gamma_p \quad \forall t>0$

で与えられる．逆に

Theorem 1.2 (stationary Poisson point process の martingale characterization) 条件（QL）をみたす $\mathcal{F}_t$-adapted point process p である（X, $\mathcal{B}(X)$）上の σ-finite positive measure n に対し（1.3）をみたすものは n を characteristic measure にもつ $\mathcal{F}_t$-stationary Poisson point process である。

証明は［11］にあるが後述の伊藤の公式からもすぐに導ける。この定理をもとにして stationary Poisson point process の強マルコフ性（Itô［4］では strong renewal property と呼ばれている）をより一般の形で証明することができる。

Theorem 1.3 p を n を characteric measure にもつ $\mathcal{F}_t$-stationary Poisson point process，τ を有限な $\mathcal{F}_t$-stopping time とするとき

$$N_{\hat{p}}((0,t]\times E)=N_p((\tau,\tau+t]\times E),\quad t>0\quad E\in\mathcal{B}$$

で定義される $\hat{p}$ は，$\tilde{\mathcal{F}}_t=\mathcal{F}_{t+\tau}$ とおくとき，$\tilde{\mathcal{F}}_t$ − stationary Poisson point process でその characteristic measure は n である。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

以後 $(X, \mathcal{B})$ は *standard space*（又は *analytic space*）と仮定する。このとき（QL）をみたす X－値 $\mathcal{F}_t$-*adapted point process* p に対し，Def. 1.6 の $\hat{N}_p(t, E)$ は a.a. ω に対し $(t, x) \in (0, \infty) \times X$ 上の測度になるようにえらべる．これを $\hat{N}_p(dt, dx)$ とあらわす：

$$(1.4) \qquad \hat{N}_p(t, E) = \int_{(0,t]\times E} \hat{N}_p(dt, dx)$$

（p が $\mathcal{F}_t$-*stationary Poisson point process* のときは $\hat{N}_p(dt\, dx) = dt\; n(dx)$ に他ならない）

今 $[0, \infty) \times X$ と Ω で定義された実関数 $f(t, x, \omega)$ が $\underline{\mathcal{F}_t\text{-}}$ $\underline{\textit{prévisible}}$ であるとは

$$(t, x, \omega) \longmapsto f(t, x, \omega) \in \mathbb{R}$$

が $\mathcal{S}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$－可測なることである。ここで $\mathcal{S}$ は次のような $f(t,x,\omega)$ をすべて可測にする $[0, \infty) \times X \times \Omega$ 上の最小の σ-*field*：

(i) t を fix するとき

$(x, \omega) \longmapsto f(t, x, \omega)$ は $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{F}_t$－可測

(ii) (x, ω) を fix するとき

$t \longrightarrow f(t, x, \omega)$ は左連続

<u>Def. 1.8</u> $\quad \mathbb{F} = \{f(t, x, \omega) : \mathcal{F}_t\text{-}\textit{previsible}\}$

又（QL）をみたす p に対し

$$\mathbb{F}_p = \left\{ f(t, x, \omega) \in \mathbb{F} \,;\, \int_0^{t+}\!\!\int_X |f(s, x, \omega)|\, N_p(ds, dx, \omega) < \infty \quad a.s. \ \forall t > 0 \right\}$$

$$\mathbb{F}_p^1 = \left\{ f(t, x, \omega) \in \mathbb{F} \,;\, E\left[\int_0^{t}\!\!\int_X |f(s, x, \omega)|\, \hat{N}_p(ds, dx)\right] < \infty \quad \forall t > 0 \right\}$$

明らかに $\mathbb{F}_p^1 \subset \mathbb{F}_p$ であり $f \in \mathbb{F}_p^1$ に対し

$$\int_0^{t+}\!\!\int_X f(s, x, \omega) N_p(ds, dx, \omega) - \int_0^{t}\!\!\int_X f(s, x, \omega)\, \hat{N}_p(ds, dx, \omega) \in \mathcal{M}_1$$

である．

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

Def. 1.8 $f \in \mathbb{F}_p$ に対し

(1.5) $P_f^p(t) = \int_0^{t+}\int_X f(s,x,\omega) N_p(ds,dx,\omega)$

Def. 1.9 $\mathbb{F}_p^2 = \{f(t,x,\omega) \in \mathbb{F}$; $\forall t > 0$ に対し

$E[\int_0^t\int_X |f(s,x,\omega)|^2 \varphi_p(ds,dx,\omega)] < \infty$

$f \in \mathbb{F}_p^2 \cap \mathbb{F}_p^1$ に対し

(1.6) $Q_f^p(t) = P_f^p(t) - \int_0^t\int_X f(s,x,\omega)\varphi_p(ds,dx,\omega)$

とおくと $Q_f^p \in \mathcal{M}_2$ かつ $\langle Q_f^p \rangle = \int_0^t\int_X |f(s,x,\omega)|^2 \varphi_p(ds,dx,\omega)$

となる。故にいつもの議論で $\forall f \in \mathbb{F}_p^2$ に対し $Q_f^p \in \mathcal{M}_2$ を(1.6)の極限として定義することができる。(cf. [13] [2])

Def. 1.10 $f \in \mathbb{F}_p^2$ に対し、上のように $Q_f^p \in \mathcal{M}_2$ を定義し、これを

(1.7) $Q_f^p(t) = \int_0^t\int_X f(s,x)[N_p(ds,dx) - \varphi_p(ds,dx)]$

とあらわす。

$\mathbb{F}_p^{2,loc} = \{f(t,x,\omega) \in \mathbb{F}$; $\exists \sigma_m$: $\mathcal{F}_t$-stopping time の列で $\sigma_m \uparrow \infty$ a.s なるもの, $E[\int_0^{t\wedge\sigma_m}\int_X |f(s,x,\omega)|^2 \varphi_p(ds,dx,\omega)] < \infty \ \forall t>0\}$

とおくと、いつもの議論で $f \in \mathbb{F}_p^{2\,loc}$ に対し $Q_f^p \in \mathcal{M}_2^{loc}$ が定義される。これも(1.7)の右辺のようにあらわす。

Theorem 1.4 (一般化された伊藤の公式)

M_t^i, $i=1,2,\cdots,n \in \mathcal{M}_{2,c}^{loc}$, φ_t^i, $i=1,2,\cdots,n \in \mathcal{O}_c^{loc}$,

p は(QL)をみたす X-値 $\mathcal{F}_t$-adapted point process,

$f_1^i = f_1^i(t,x,\omega)$, $i=1,2,\cdots,n \in \mathbb{F}_p$, $f_2^i = f_2^i(t,x,\omega)$, $i=1,2,\cdots,n$ $\in \mathbb{F}_p^{2\,loc}$ で $f_1^i \cdot f_2^j = 0$, $i,j=1,2,\cdots,n$ なるものとする。

A_0^i, $i=1,2,\cdots,n$ を $\mathcal{F}_0$-可測 random variable とし

$A_t^i = A_0^i + M_t^i + \varphi_t^i + P_{f_1^i}^p(t) + Q_{f_2^i}^p(t)$, $i=1,2,\cdots,n$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$\mathbb{A}_t = (A_t^1, A_t^2, \cdots\cdots, A_t^n)$

$\mathbb{f}_1 = (f_1^1, f_1^2, \cdots\cdots, f_1^n)$, $\mathbb{f}_2 = (f_2^1, f_2^2, \cdots, f_2^n)$ とおく.

このとき $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$(1.8)\quad F[\mathbb{A}_t] - F[\mathbb{A}_0] = \sum_{i=1}^n \int_0^t F'_{x_i}[\mathbb{A}_s]\,dM_s^i + \sum_{i=1}^n \int_0^t F'_{x_i}[\mathbb{A}_s]\,d\varphi_s^i$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^t F''_{x_i x_j}[\mathbb{A}_s]\,d\langle M^i, M^j\rangle_s + P_{g_1}^p(t) + Q_{g_2}^p(t)$$
$$+ \int_0^t \int_X \Big\{ F[\mathbb{A}_s + \mathbb{f}_2(s,x)] - F[\mathbb{A}_s] - \sum_{i=1}^n f_2^i(s,x)\,F'_{x_i}[\mathbb{A}_s]\Big\}\,\hat{\varphi}_p(ds,dx),$$

ここで $g_1(s,x) = F[\mathbb{A}_{s-} + \mathbb{f}(s,x)] - F[\mathbb{A}_{s-}]$

$g_2(s,x) = F[\mathbb{A}_{s-} + \mathbb{f}_2(s,x)] - F[\mathbb{A}_{s-}]$

(cf. Kunita - Watanabe [5], Doleans-Dade et Meyer [2])

§2. Poisson point processes of Brownian excursions of the 1st and the 2nd kinds

$\mathbb{R}_+^r = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_r) : x_1 \geq 0\}$: r 次元 Euclid 空間の上半空間

$\partial\mathbb{R}_+^r = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_r) : x_1 = 0\}$: その境界

(2.1) $W_0^r = \{\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+^r$, continuous, $\omega(0) = 0$,

かつ $\sigma(w) = \inf\{t > 0\,;\, w(t) \in \partial\mathbb{R}_+^r\}$ とおくとき $\sigma(w) > 0$ かつ

$w(t) = w(t \wedge \sigma(w))\}$

$\mathcal{B}(W_0^r)$: Borel cylinder sets から生成される σ-field.

$$(2.2)\quad K(t,x) = (2\pi)^{-\frac{r}{2}}\, t^{-\frac{r}{2}-1}\, x_1\, e^{-\frac{|x|^2}{2t}}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}_+^r$$

$$(2.3)\quad p(t,x,y) = (2\pi t)^{-\frac{r}{2}} \Big\{ e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x_1+y_1)^2}{2t}} \Big\} \prod_{i=2}^r e^{-\frac{(x_i-y_i)^2}{2t}}$$
$$t > 0,\quad x, y \in \mathbb{R}_+^r$$

明らかに (2.3) は $\mathbb{R}_+^r$ 上の吸収壁 Brown 運動の transition probality density であり, $K(t,x)$ はその entrance law の density である:

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$(2.4)\quad K(t+s,x)=\int_{\mathbb{R}_+^r} K(s,y)\,p(t,y,x)\,dy$$

このとき，よく知られているように $\{W_0^r, \mathcal{B}(W_0^r)\}$ 上の σ-*finite measure* Q で

$$(2.5)\quad Q\{w: w(t_1)\in E_1, w(t_2)\in E_2, \cdots, w(t_n)\in E_n, \sigma(w)>t_n\}$$

$$=\int_{E_1}\cdots\int_{E_n} K(t_1,x_1)\,p(t_2-t_1,x_1,x_2)\cdots p(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n)\, dx_1\, dx_2, \cdots, dx_n$$

$$0<t_1<t_2<\cdots<t_n,\quad E_i\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^r)$$

をみたすものが唯1つ存在する．(*pinned Brownian motion* から簡単に構成できるし，(cf.[10]) 又，一般論もある [14])．*Theorem 1.1* によって Q を *characteristic measure* とする．W_0^r－値 *stationary Poisson point process* Π_1 が存在する．

<u>Def. 2.1</u>　この W_0^r－値 *Poisson point process* Π_1 を <u>*Poisson point process of Brownian excursions of the 1st kind*</u> という．

次に

$$(2.6)\quad W_1^r=\left\{\begin{array}{l} w:[0,\infty)\longrightarrow \mathbb{R}_+^r,\ \text{continuous} \\ w(0)=(1,0,0,\cdots 0)\in\mathbb{R}_+^r,\ \text{かつ}\ \sigma(w)=\inf\{t\geq 0: w(t)\in\partial\mathbb{R}_+^r\} \\ \text{とおくとき}\quad w(t)=w(t\wedge\sigma(w)) \end{array}\right\}$$

$\mathcal{B}(W_1^r)$: *Borel cylinder sets* から生成される σ-*field*

P を $\{W_1^r, \mathcal{B}(W_1^r)\}$ 上の $(1,0,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}_+^r$ から出発する吸収壁 Brown 運動の測度とする：

$$(2.7)\quad P\{w: w(t_1)\in E_1, w(t_2)\in E_2, \cdots, w(t_n)\in E_n, \sigma(w)>t_n\}$$

$$=\int_{E_1}\cdots\int_{E_n} p(t_1,(1,0,\cdots 0),x_1)\,p(t_2-t_1,x_1,x_2)\cdots p(t_n-t_{n-1}, x_{n-1},x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$E_i : \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^r_+)$, (p は (2.3) で与えられる)

$\{W_1^r \times (\mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}), \mathcal{B}(W_1^r)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell\setminus\{0\})\}$ 上の σ- finite measure $P(d\omega)\times\frac{du}{|u|^{\ell+1}}$ を characteristic measure にもつ $W_1^r\times(\mathbb{R}^\ell\setminus\{0\})$-値 stationary Poisson point process が Theorem 1.1 によって定まる。

<u>Def. 2.2</u> この $W_1^r\times(\mathbb{R}^\ell\setminus\{0\})$ - 値 Poisson point process Π_2 を <u>Poisson point process of Brownian excursions of the 2nd kind</u> という。

以下で，(2.5) で定義される W_0^r. $\mathcal{B}(W_0^r)$ 上の σ - finite measure Q を考え，$\{W_0^r, \mathcal{B}(W_0^r), Q\}$ の上での stochastic calculus を論ずる．$\mathcal{B}_t(W_0^r)$ を t までの Borel cylinder sets によって生成される σ - field とする，$t\in[0,\infty)$。あきらかに

$$(2.8)\quad E^Q(\omega_i(t_2)-\omega_i(t_1)\,|\,\mathcal{B}_{t_1})=0 \qquad t_2>t_1>0$$

$$(2.9)\quad E^Q([\omega_i(t_2)-\omega_i(t_1)][\omega_j(t_2)-\omega_j(t_1)]\,|\,\mathcal{B}_{t_2}) \quad t_2>t_1>0$$

$$=\delta_{ij}\,E^Q([t_2\wedge\sigma(\omega)-t_1\wedge\sigma(\omega)]\,|\,\mathcal{B}_{t_1}) \qquad t_2>t_1>0$$

$$(2.10)\quad E^Q\Big(\int_0^{\sigma(\omega)} f(\omega(s))ds\Big)=\int_{\mathbb{R}^r_+} f(x)dx$$

がなりたつ．$\Phi(s,\omega)$ を $\mathcal{B}_t$ に adapted な measurable process で

$$E^Q\Big(\int_0^{t\wedge\sigma}\Phi^2(s,\omega)ds\Big)<\infty \qquad (\forall t>0)$$

をみたすものとする。各 $i=1,2,\cdots,r$ に対し stochastic integral

$$X(t)=\int_0^t \Phi(s,\omega)\,dw_i(s)$$

が次の手順で定義される．まず $\Phi(t,\omega)$ が step i.e.

$$\Phi(t,\omega)=\sum_k \Phi(S_k,\omega)\,I_{[S_k,S_{k+1})}(t)$$

のとき，$\int_0^t\Phi(s,\omega)\,dw_i(s)=\sum_k\Phi(S_k,\omega)\,(w_i(S_{k+1}\wedge t)-w_i(S_k\wedge t))$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

とおく，このとき $E^Q([\int_0^t \Phi(s,\omega)dw_i(s)]^2)=E^Q(\int_0^{t\wedge\sigma(\omega)} \Phi^2(s,\omega)ds)$

がなりたつ，一般の場合は Φ を step で近似することによりいつものように定義される。このとき $\begin{cases} t\rightsquigarrow X(t) \text{ は連続で } X(0)-X(0+)=0 \quad a.s. \\ X(t)=X(t\wedge\sigma) \quad a.s \end{cases}$

がなりたつ．$X(t)=\int_0^t \Phi(s,\omega)\,dw_i(s)$, $Y(t)=\int_0^t \Psi(s,\omega)dw_j(s)$

のとき

$$(2.11)\quad E^Q([X(T)-X(S)]/\mathcal{B}_S)=0$$

$$(2.12)\quad E^Q([X(T)-X(S)][Y(T)-Y(S)]/\mathcal{B}_S)=E^Q(\int_{S\wedge\sigma}^{T\wedge\sigma}\Phi(s,\omega)\Psi(s,\omega)/\mathcal{B}_S)$$

($0\leq S\leq T$ は有界な $\mathcal{B}_t$-stopping times)

又，Kolmogorov の不等式

$$(2.13)\quad Q\{\omega:\max_{t\in[T,S]}|X(t)-X(T)|>\lambda\}\leq\frac{E^Q[\int_T^S\Phi^2(s,\omega)ds]}{\lambda^2}$$

がなりたつ，又 最大不等式

$$(2.14)\quad E^Q\{\max_{t\in[T,S]}|X(t)-X(T)|^2\}\leq K\cdot E^Q[\int_T^S\Phi^2(s,\omega)ds]$$

がなりたつ　　　　　　　　　　　　　　　　($K>0$ は定数)
特に

$$(2.15)\quad E^Q\{\max_{t\in[0,S]}|X(t)|^2\}\leq K\,E^Q[\int_0^S\Phi^2(s,\omega)ds]$$

次に $\Phi(s,\omega)$ に対し $\mathcal{B}_t$-stopping time の列 S_n で $S_n\uparrow\sigma\ (n\to\infty)$ なるものが存在し

$$(2.16)\quad E^Q[\int_0^{t\wedge S_n}\Phi^2(s,\omega)ds]<\infty\quad n=1,2,\cdots,\ \forall\, t>0$$

となるとき，いつもの議論で $X(t)$ が唯一つ定まり $X(t\wedge S_n)=\int_0^t I_{\{u<S_n\}}\Phi(u,\omega)dw_i(s)$ 　$n=1,2,\cdots$ となる。これを $X(t)=\int_0^t\Phi(s,\omega)dw_i(s)$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

と定義する。明らかに $t \rightsquigarrow X(t)$ は連続で $X(0)=X(0+)=0$，かつ $X(t\wedge\sigma)=X(t)$ である．

Proposition 2.1　$\mathcal{B}_t$-adapted measurable process $\Phi(s,\omega)$ が有界のとき(2.16)をみたす $\mathcal{B}_t$-stopping time の列 $S_n \uparrow \sigma$ が存在する．そのような S_n の具体的例として

(2.17)　$S_n(\omega) = \begin{cases} \inf\{t : |\omega(t)| \geqq n\} \\ \sigma(\omega) \quad \text{if } \{\quad\} = \phi \end{cases}$

ととることができる。

Proof　Φ が有界だから $E^Q(S_n)<\infty$　$\forall n=1,2,\cdots$ を云えばよいが，$U_n=\{x\in \mathbb{R}^r_+ : |x|\leq n\}$ とおくと

$$E^Q(S_n) \leq E^Q\left(\int_0^\sigma I_{U_n}(\omega(s))\right) = U_n \text{ の Lebesgue measure} <\infty$$

より明らか．

以上の準備のもとに測度空間 $(W_0^r, \mathcal{B}_t(W_0^r), Q)$ の上で確率微分方程式を考える．今　$a(x) : x\in\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^r$

$b(x) : x\in\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$

とし 共に有界かつ uniformly Lipschitz continuous とする．

$x\in\mathbb{R}^n$ に対し方程式

(2.18)　$X(t) = x + \int_0^t a(X(s))\,dw(s) + \int_0^{t\wedge\sigma} b(X(s))\,ds$

（もちろん成分でかくと $X_i(t) = x_i + \sum_{k=1}^r \int_0^t a_{ik}(X(s))\,dw_k(s) + \int_0^{t\wedge\sigma} b_i(X(s))\,ds$）　$i=1,2,\cdots,n$

を考える．

Theorem 2.2　(2.18)の一意的な解 $X(t)$ が存在する。しかも写像

$$F : (x,\omega)\in\mathbb{R}^n\times W_0^r \rightsquigarrow F(x,\omega)\in W^n \equiv C([0,\infty)\to\mathbb{R}^n)$$

で各 $t>0$ に対し $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}_t(W_0^r)/\mathcal{B}_t(W^n)$ －可測なるものが存在して上の解 $X(t)$ は $X(\cdot)=x+F(x,\omega)$ とあらわされる．

Proof　(2.17)の S_n で truncate して考えれば通常の確率微分方程式の場合と同様に証明できる．

次の Lemma は後で用いられる．

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

Lemma 2.1　各mに対しS_mを(2.17)で定義するとき，定数$K_m>0$が存在し

(2.19)　$$\mathbb{E}^Q\{|F(x,\omega)(\sigma(\omega))-F(y,\omega)(\sigma(\omega))|^2;\ \sigma(\omega)\leqq 1\wedge S_m(\omega)\}$$
$$\leqq K_m|x-y|^2 \qquad {}^\forall x,y\in\mathbb{R}^n$$

Lemma 2.2　各mに対しS_mを(2.17)で定義するとき

(2.20)　$$Q\{\omega:\sigma(\omega)>1\wedge S_m(\omega)\}<\infty.$$

Pf of Lemma 2.1

以下でK_1, K_2, ‥‥ は正の定数とする（mにはdependする）

$$|F(x,\omega)-F(y,\omega)|^2\leqslant K_1\Big\{\Big|\int_0^t a(x+F(x,\omega)(s))\,d\omega(s)-\int_0^t a(y+F(y,\omega))\,d\omega(s)\Big|^2+\Big|\int_0^t b(x+F(x,\omega)(s))\,ds-\int_0^t b(y+F(y,\omega)(s))\,ds\Big|^2\Big\}$$

故に

$$\mathbb{E}^Q|F(x,\omega)(t\wedge S_m)-F(y,\omega)(t\wedge S_m)|^2$$
$$\leqslant K_2\Big[\mathbb{E}^Q(|x-y|^2 t\wedge S_m)+\mathbb{E}^Q\Big(\int_0^{t\wedge S_m}|F(x,\omega)(s)-F(y,\omega)(s)|^2ds\Big)\Big]$$
$$\leqslant K_3|x-y|^2+K_4\int_0^t\mathbb{E}^Q(|F(x,\omega)(s\wedge S_m)-F(y,\omega)(s\wedge S_m)|^2)\,ds$$

故に

$$\mathbb{E}^Q|F(x,\omega)(t\wedge S_m)-F(y,\omega)(t\wedge S_m)|^2\leqslant K_3|x-y|^2e^{K_4t}$$

すると

$$\mathbb{E}^Q(|F(x,\omega)(\sigma(\omega))-F(y,\omega)(\sigma(\omega))|^2:\sigma(\omega)\leqq 1\wedge S_m(\omega))$$
$$\leqq \mathbb{E}^Q(|F(x,\omega)(1\wedge S_m\wedge\sigma)-F(y,\omega)(1\wedge S_m\wedge\sigma)|^2)$$
$$=\mathbb{E}^Q(|F(x,\omega)(1\wedge S_m)-F(y,\omega)(1\wedge S_m)|^2)$$
$$\leqslant K_m|x-y|^2 \qquad \text{q.e.d.}$$

Pf. of Lemma 2.2

$$Q\{\omega:\sigma(\omega)>1\wedge S_m(\omega)\}\leqslant Q\{\omega:\sigma(\omega)>1\}+Q\{\omega:\sigma(\omega)>S_m(\omega)\}$$
$$=\int_{\mathbb{R}_+^r}K(1,x)\,dx+Q\{\omega:\sigma(\omega)>S_m(\omega)\}$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

第1項はあきらかに有限であるので第2項が有限であることをいう。

$$Q\{\omega;\sigma(\omega)>S_m(\omega)\}=\lim_{t\downarrow 0} Q\{\omega;\sigma(\omega)>S_m(\omega)>t\}$$

$$=\lim_{t\downarrow 0}\int_U K(t,x)P_x(S_m<\sigma)dx+\lim_{t\downarrow 0}\int_{U^c}K(t,x)P_x(S_m<\sigma)dx$$

$$=I_1+I_2$$

ここで $U=\{x\in\mathbb{R}_+^r;|x|\leqq m-1\}$ 又 P_x は Brown 運動の測度，

$x\in U$ のとき $P_x(S_m<\sigma)=O(x_1)$ に注意すると

$$I_1\leqq \text{const}\ \overline{\lim_{t\downarrow 0}}\int_U \frac{x_1^2}{t^{\frac{r}{2}+1}}e^{-\frac{|x|^2}{2t}}dx$$

$$\leqq O\left(\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\int_0^\infty \frac{\rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{2t}}\rho^{r-1}d\rho}{t^{\frac{r}{2}+1}}\right)=O(t\cdot t^{\frac{r-1}{2}}t^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{r}{2}-1})$$

$$=O(1)<\infty$$

$$I_2\leqq \lim_{t\downarrow 0}\int_{U^c}K(t,x)dx$$

$$=\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\ O\left(t^{-\beta}e^{-\frac{(m-1)^2}{2t}}\right)=0$$

§3 係数に関する条件

ここで§0でのべた解析的データを具体的に与え，それらに対する仮定を明確にする。

$D=\mathbb{R}_n^+=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n);x_1\geqq 0\}$ ．n 次元上半空間

$\mathring{D}=\{x\in D\ ;\ x_1>0\}$

$\partial D=\{x\in D\ ;\ x_1=0\}$

D 上の $C_0^2(\mathbb{R}_n^+)$ を定義域とする微分作用素 A：

$$Af(x)=\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^n A_{ij}(x)f''_{x_ix_j}(x)+\sum_{i=1}^n b_i(x)f'_{x_i}(x)-C(x)f(x) \tag{3.1}$$

（但し $A_{ij}(x)$ は対称で non-negative definite，$C(x)\geqq 0$）

及び $C_0^2(\mathbb{R}_n^+)$ を境界 ∂D 上の関数へ移す作用素 L：

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$(3.2)\quad Lf(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{n}\tilde{A}_{ij}(x)f''_{x_i x_j}(x)+\sum_{i=2}^{n}\beta_i(x)f'_{x_i}(x)-\gamma(x)f(x)$$

$$+\mu(x)f'_{x_1}(x)+\int_{u\in\mathbb{R}^{\ell}\setminus\{0\}}\Big[f(x+g(x,u))-f(x)-I_{\{|u|\leqq 1\}}\sum_{i=2}^{n}g_i(x,u)f'_{x_i}(x)\Big]$$

$$\frac{du}{|u|^{\ell+1}}-\rho(x)Af(x)$$

（但し $\tilde{A}_{ij}(x)$ は対称で non-negative difinite, $\gamma(x)\geqq 0$, $\mu(x)\geqq 0$, $\rho(x)\geqq 0$ $(x\in\partial D)$, 又 $g(x,u)=(g_i(x,u))_{i=1}^{n}$ $x\in\partial D$, $u\in\mathbb{R}^{\ell}$, は $g(x,0)\equiv 0$ $g_1(x,u)\geqq 0$ $\int_{|u|\leqq 1}\big(g_1(x,u)+\sum_{i=2}^{n}g_i^2(x,u)\big)\frac{du}{|u|^{\ell}}<\infty$ をみたすもの）

今 $A_{11}(x)>0$, $x\in D$ と仮定すると time change によって $A_{11}(x)\equiv 1$ の場合に帰着される。座標変換又は drift の変換により, $b_1(x)\equiv 0$ と仮定してよい。又 $C(x)$, $\gamma(x)$ は killing に対応するから $C(x)=\gamma(x)=0$ の場合のみ考察する。この注意によって次の仮定をおく.

(A.I) $A_{11}(x)\equiv 1$, $b_1(x)\equiv 0$, $c(x)\equiv 0$, $\gamma(x)\equiv 0$

次に 係数の正則性に関し次の仮定（AII）をおく.

$(A.\mathrm{II})_1$ $\exists\, a(x)=(a_{ik}(x)) : x\in D \rightsquigarrow a(x)\in\mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^r$

ここで $a_{ik}(x)$ $\binom{i=1,2,\cdots,n}{k=1,2,\cdots,r}$ は <u>bounded</u>, <u>Lipschitz</u> <u>continuous</u>

さらに $a_{11}(x)\equiv 1$, $a_{1k}(x)\equiv 0$, $k=2,\cdots,r$ そして

$A(x)=a(x)^t a(x)$ i.e $A_{ij}(x)=\sum_{k=1}^{r}a_{ik}(x)a_{jk}(x)$

<u>N.B</u> $A\in C_b^2(\mathbb{R}_n^+)$ ならばこのような a は $r=n$ として存在する.

$(A\mathrm{II})_2$ $b(x)=(b_i(x))_{i=1}^{n}$（但し $b_1(x)\equiv 0$）は <u>bounded</u> <u>Lipchitz</u> <u>continuous</u> in $x\in D$

$(A\mathrm{II})_3$ $\exists\,\alpha(x)=(\alpha_{ik}(x))$: $x\in\partial D \rightsquigarrow \mathbb{R}^{n-1}\otimes\mathbb{R}^s$

ここで $\alpha_{ik}(x)$ $\binom{i=2,\cdots,n}{k=1,2,\cdots,s}$ は <u>bounded</u> <u>Lipschitz</u> <u>continuous</u>

そして $\tilde{A}(x)=\alpha(x)^t\alpha(x)$ i.e. $\tilde{A}_{ij}(x)=\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}(x)\alpha_{jk}(x)$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$(A\mathrm{II})_4$ $\beta(x) = (\beta_i(x))_{i=2}^{n} : x \in \partial D \leadsto \mathbb{R}^{n-1}$ は bounded Lipschitz continuous

$(A\mathrm{II})_5$ $\mu(x) : x \in \partial D \leadsto [0, \infty)$ は bounded Lipschitz continuous

$(A\mathrm{II})_6$ $g(x,u) = (g_i(x,u))_{i=1}^{n} : (x,u) \in \partial D \times \mathbb{R}^{\ell} \leadsto \mathbb{R}^n_+ = D$

は次の条件をみたす：

(i) $g(x,0) \equiv 0$

(ii) 関数 $h_1(u), h_2(u)$ defined on $\{u \in \mathbb{R}^{\ell} ; |u| \leq 1\}$,

$h_1(0) = h_2(0) = 0, \quad 0 \leqslant h_1(u) \leqslant h_2(u) \leqslant {}^{\exists}K$ (const.)

$$\int_{|u|\leqslant 1} \left\{ h_2(u) + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2(u) \right\} \frac{du}{|u|^{\ell+1}} < \infty$$

をみたすものが存在し

(イ) $0 \leqslant g_1(x,u) \leqslant h_1(u)$, $\quad |g_1(x,u) - g_1(y,u)| \leqslant h_1(u)|x-y|$

$\qquad {}^{\forall}u \in \mathbb{R}^{\ell} \cap \{|u| \leq 1\}, \ x, y \in \partial D$

(ロ) $\sum_{i=2}^{n} |g_i(x,u)|^2 \leqslant h_2(u)$, $\quad \sum_{i=2}^{n} |g_i(x,u) - g_i(y,u)|^2 \leqslant h_2(u)|x-y|^2$

$\qquad {}^{\forall}u \in \mathbb{R}^{\ell} \cap \{|u| \leq 1\}, \ x, y \in \partial D$

N.B. このような $h_1(u), h_2(u)$ の例として $h_1(u) = |u|^{\alpha}$, $h_2(u) = |u|^{\beta}$,

$(1 < \beta < \beta + \frac{1}{2} < \alpha)$

$(A\mathrm{II})_7$ $\rho(x) : x \in \partial D \leadsto [0, \infty)$ は bounded measurable

最後に確率論的に当然な "transversality condition" (AIII) を仮定する。

ラフにいって境界で反射か内部へすぐに jump するか，滞留するかのいづれかであることを仮定する。

$(A\mathrm{III})_1$ ${}^{\forall}x \in \partial D$ で $\mu(x) > 0$ であるか $\int_{|u|\leq 1} I\{g_1(x,u) > 0\} \frac{du}{|u|^{\ell+1}} = \infty$ であるか $\rho(x) > 0$ である。

$(A\mathrm{III})_2$ 正定数 $K > 0$ が存在し

$$\mu^2(x) + \int_{\mathbb{R}^{\ell} \setminus \{0\}} [g_1^2(x,u) \wedge 1] \frac{du}{|u|^{\ell+1}} + \rho(x) \geq K, \quad {}^{\forall}x \in \partial D$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

§4 第1種の excursion の構成

$$\left.\begin{array}{l} W_0(D)=\{w:[0,\infty)\to D\ ;\ \text{continuous},\ w(0)\in\partial D,\\ \sigma(w)=\inf\{t>0;\ w(t)\in\partial D\}\ \text{とおくとき}\ w(t\wedge\sigma(w))=w(t)\end{array}\right\}$$

$w\in W_0(D)$ を D 上の第1種の excursion という．特に $\sigma(w)=0$ のときは w は constant path ; $w(t)\equiv w(0)\in\partial D$ である．

以下で，上に与えられたデータ $a(x): x\in D \rightsquigarrow \mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^r$, $b(x): x\in D \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ (但し $a_{11}(x)\equiv 1$, $a_{1k}(x)\equiv 0$, $k=2,\cdots,r$, $b_1(x)\equiv 0$) と $\mu(x): x\in\partial D \rightsquigarrow [0,\infty)$ から写像 $\Phi:(x,w)\in\partial D\times W_0^r \rightsquigarrow \Phi(x,w)\in W_0(D)$ を定義する．

$x\in\partial D$ と定数 $c\geqq 0$ に対し $X^{x,c}=(X^{x,c}(t))_{t\geqq 0}$ を $\{W_0^r, \mathcal{B}_t(W_0^r), Q\}$ 上の確率微分方程式 (cf. §2)

$$(4.1)\quad \begin{cases} dX(t)=c\,a(X(t))\,dw(t)+c^2\cdot b(X(t))I_{\{t<\sigma(w)\}}dt\\ X(0)=x\end{cases}$$

の解とする．このとき明らかに

$$(4.2)\quad X_1^{x,c}(t)=c\,w_1(t),\qquad X^{x,c}(t)=X^{x,c}(t\wedge\sigma(w))$$

である。そして $Y^{x,c}=(Y^{x,c}(t))_{t\geqq 0}$ を

$$(4.3)\quad Y^{x,c}(t)=\begin{cases} X^{x,c}(\frac{t}{c^2}), & c>0\\ x & c=0\end{cases}$$

で定義する。 $Y^{x,c}(w)$ は Q-a.e. に一意的に定まる $w\in W_0^r$ の関数である。

今 $c\geqq 0$ に対し $T_c: W_0^r\longrightarrow W_0^r\cup\{\underline{0}\}$ を

$$(T_c w)(t)=\begin{cases} c\,w(\frac{t}{c^2}) & c>0\\ 0 & c=0\end{cases}$$

で定義する，ここで $\underline{0}$ は $\underline{0}(t)\equiv 0$ で定義される path．

<u>Lemma 4.1</u> (i) $T_c\circ Q=c\cdot Q$ $\quad(c>0)$

(ii) $Y^{x,c}(w)=(Y^{x,c}(t,w))$ $c\geqq 0$ $x\in\partial D$ は確率微分方程式

$$(4.4)\quad \begin{cases} dY(t)=a(Y(t))\,d(T_c w)(t)+b(Y(t))I_{\{t<\sigma(T_c w)\}}dt\\ Y(0)=x\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

の解である．

(i)の証明は (2.2) (2.3) (2.5) より直ちにえられる．(ii) は明らかである．

N.B. $\sigma(T_c\omega) = c^2\sigma(\omega)$, $\omega \in W_0^{\tau}$

Def. 4.1 $\Phi : (x,\omega) \in \partial D \times W_0^{\tau} \rightsquigarrow \Phi(x,\omega) \in W_0(D)$

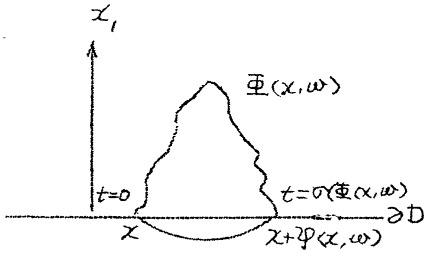
を次の式で定義する：

(4.5) $\Phi(x,\omega)(t) = Y^{x,\mu(x)}(t,\omega)$, $t \geq 0$, $x \in \partial D$, $\omega \in W_0^{\tau}$

$\Phi(x,\omega)$を〈$x \in \partial D$から出発する〉Brownian excursion ω に対応する第1種の excursion という．ω の関数としては Q-a.e. に定まる．

(cf. Fig.1)

Fig. 1



定義より

(4.6) $\Phi(x,\omega)(0) = x$

(4.7) $\sigma(\Phi(x,\omega)) = \mu^2(x)\sigma(\omega)$

したがって 特に，

(4.8) $\mu(x)=0$ ならば $\Phi(x,\omega)(t) \equiv x$, $\mu(x)>0$ ならば $\sigma(\Phi(x,\omega))>0$

Def. 4.2 $\varphi : (x,\omega) \in \partial D \times W_0^{\tau} \rightsquigarrow \varphi(x,\omega) \in \partial D$ を

$$
\begin{aligned}
(4.9)\quad \varphi(x,\omega) &= \Phi(x,\omega)[\sigma(\Phi(x,\omega))] - x \\
&= X^{x,\mu(x)}(\sigma(\omega)) - x \\
&= Y^{x,\mu(x)}(\mu^2(x)\sigma(\omega)) - x
\end{aligned}
$$

によって定義する．すなわち $\varphi(x,\omega)$ は excursion $\Phi(x,\omega)$の始点と終点の変位をあらわす．

$\mu(x)=0$ のときは $\varphi(x,\omega)=0$ である．

Lemma 4.2 正定数 K が存在して

$$
(4.10)\quad E^Q\{|\varphi(x,\omega)-\varphi(y,\omega)|^2 : \sigma(\omega) \leq 1 \wedge S_1(\omega)\} \leq K|x-y|^2, \quad \forall x, y \in \partial D
$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

(4.11) $Q[\{w : \sigma(w) \leqq 1 \wedge S_1(w)\}^c] < \infty$

ここで

(4.12) $S_1(w) = \begin{cases} \inf\{t : |w(t)| \geqq 1\} & \\ \sigma(w) & \text{もし}\{\ \ \} = \phi \end{cases}$

<u>Proof</u> (4.11) は Lemma 2.2で示された．(4.10)を示す．

(4.1) の解 $X^{x,c}$ に対し $F_c(x,w)$ を $F_c(x,w)(t) = X^{x,c}(t) - x$ で定義する． $C > 0$ を固定する。$c, c' \in [0, C]$ に対し $a_c(x) = ca(x)$，$b_c(x) = c(x)$ とおくとき c, c' に無関係な定数K があって

$$|a_c(x)|^2 + |b_c(x)|^2 \leq K$$
$$|a_c(x) - a_{c'}(x)|^2 + |b_c(x) - b_{c'}(y)|^2 \leq K|c - c'|^2$$
$$|a_c(x) - a_c(y)|^2 + |b_c(x) - b_{c'}(y)|^2 \leq K|x - y|^2$$

とすることは明らかである．

$$|F_c(x,w)(\sigma(w)) - F_{c'}(y,w)(\sigma(w))|^2$$
$$\leqslant 2|F_c(x,w)(\sigma(w)) - F_c(y,w)(\sigma(w))|^2 + 2|F_{c'}(y,w)(\sigma(w)) - F_c(y,w)(\sigma(w))|^2$$
$$= I_1 + I_2$$

$E^Q(I_1 ; \sigma(w) \leqq 1 \wedge S_1(w)) \leqslant K_1|x-y|^2$ (以下定数 $K_1, K_2, \cdots$ は C のみに depend する) は Lemma 2.1 で示した．又

$$|F_{c'}(y,w)(t) - F_c(y,w)(t)|^2$$
$$\leqslant K_2\Big(\Big|\int_0^t [a_c(y + F_c(y,w)(s)) - a_{c'}(y + F_{c'}(y,w)(s))]\,dw(s)\Big|^2$$
$$+ \Big|\int_0^t [b_c(y + F_c(y,w)(s)) - b_{c'}(y + F_{c'}(y,w)(s))]\,ds\Big|^2\Big)$$
$$\leqslant K_3\Big(\Big|\int_0^t [a_c(y + F_c(y,w)(s)) - a_{c'}(y + F_c(y,w)(s))]\,dw(s)\Big|^2$$
$$+ \Big|\int_0^t [a_{c'}(y + F_c(y,w)(s)) - a_{c'}(y + F_{c'}(y,w)(s))]\,dw(s)\Big|^2$$
$$+ \Big|\int_0^t [b_c(y + F_c(y,w)(s)) - b_{c'}(y + F_c(y,w)(s))]\,ds\Big|^2$$
$$+ \Big|\int_0^t [b_{c'}(y + F_c(y,w)(s)) - b_{c'}(y + F_{c'}(y,w)(s))]\,ds\Big|^2\Big)$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

故に

$$\mathbb{E}^Q|F_{c'}(y,\omega)(t\wedge S_1)-F_c(y,\omega)(t\wedge S_1)|^2$$
$$\leqslant K_4\left\{|c-c'|^2\mathbb{E}^Q(t\wedge S_1)+\mathbb{E}^Q\left\{\int_0^{t\wedge S_1}|F_c(y,\omega)-F_{c'}(y,\omega)|^2ds\right\}\right\}$$

これより Lemma 2.1 の証明と全く同様にして

$$\mathbb{E}^Q(I_2:\sigma(\omega)\leqq 1\wedge S_1(\omega))<K_5|c-c'|^2.$$

すると

$$\mathbb{E}^Q(|\mathcal{Y}(x,\omega)-\mathcal{Y}(y,\omega)|^2:\sigma(\omega)\leqq 1\wedge S_1(\omega))$$
$$\leqq K_1|x-y|^2+K_5|\mu(x)-\mu(y)|^2\leqq K|x-y|^2$$

(q.e.d)

§5 第2種の excursion の構成

$W_1(D)=\{\omega:[0,\infty)\rightsquigarrow D:\text{continuous},\ \omega(t)=\omega(t\wedge\sigma(\omega))$
ここで $\sigma(\omega)=\inf\{t\geqq 0;\ \omega(t)\in\partial D\}\}$

特に $\omega\in W_1(D)$ で $\omega(0)\in\partial D$ なら ω は constant path: $\omega(t)\equiv\omega(0)$ である．したがって $W_0(D)\cap W_1(D)=\{$constant path $\omega(t)\equiv\omega(0)\in\partial D\}$ である。

以下で与えられたデータ $a(x):x\in D\rightsquigarrow\mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^r$, $b(x):x\in D\rightsquigarrow\mathbb{R}^n$ (但し $a_{11}(x)\equiv 1$, $a_{1k}(x)\equiv 0$, $k=2,\cdots,r$, $b_1(x)\equiv 0$) と $g(x,u)$: $(x,u)\in\partial D\times\mathbb{R}^\ell\rightsquigarrow D$ から写像

$$(x,\omega,u):\partial D\times W_1^r\times\mathbb{R}^\ell\rightsquigarrow\Psi(x,\omega,u)\in W_1(D)$$

を定義する．P を§2 のように $(1,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}_+^r$ より出発する吸収壁 Brown 運動の測度 (cf. (2.7)) とする．$\{\omega_i(t)=\omega_i(t\wedge\sigma(\omega))\}_{i=1,2,\cdots,r}$ は $\{W_1^r,\mathcal{B}(W_1^r),P\}$ 上の $\mathcal{B}_t(W_1^r)$ に関するマルチンゲールの系である．$x\in D$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対し，$X^x=(X^x(t))_{t\geqq 0}$ を確率微分方程式

$$(5.1)\quad\begin{cases}dX(t)=x_1a(X(t))d\omega(t)+x_1^2b(X(t))I_{\{t<\sigma(\omega)\}}dt\\ X(0)=x\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

の解である．このとき明らかに

(5.2) $X_1^x(t,\omega)=x_1\omega_1(t)$, $X^x(t,\omega)=X^x(\sigma(\omega)\wedge t)$

である．そして $Y^x=(Y^x(t))_{t\geqq 0}$ を

(5.3) $$Y^x(t)=\begin{cases} Y^x(\frac{t}{x_1^2}), & x_1>0 \\ x & x_1=0 \end{cases}$$

で定義する．$Y^x(\omega)$ は P-a.e に一意的に定まる $\omega\in W_1^r$ の関数である．

今 写像 $T_{x_1}: W_1^r \to W_{x_1}^{r_1}=\{\omega:[0,\infty)\rightsquigarrow \mathbb{R}_+^r$: continuous $\omega(0)=(x_1,0,\cdots,0)$, $\omega(t)=\omega(t\wedge\sigma(\omega))$ ここで $\sigma(\omega)=\inf\{t\geqq 0;\ \omega(t)\in\partial D\}$ を

$$(T_{x_1}\omega)(t)=\begin{cases} x_1\omega(\frac{t}{x_1^2}) & x_1>0 \\ 0 & x_1=0 \end{cases}$$

で定義する．

<u>Lemma 5.1</u> (i) $T_{x_1}\cdot P$ は $W_{x_1}^{r_1}$ 上の（$(x_1,0,0,\cdots,0)$ より出発する $\mathbb{R}_+^r$ 上の）吸収壁 Brown 運動の測度

(ii) $Y^x(\omega)=(Y^x(t,\omega))_{t\geqq 0}$ は確率微分方程式

(5.4) $$\begin{cases} dY(t)=a(Y(t))\,d(T_{x_1}\omega)(t)+b(Y(t))I_{\{t<\sigma(T_{x_1}\omega)\}}dt \\ Y(0)=x \end{cases}$$

の解である．

証明はすぐわかるから省略する．

<u>N.B.</u>

<u>Def. 5.1</u> $\Psi:(x,\omega,u)\in\partial D\times W_1^r\times\mathbb{R}^l\rightsquigarrow\Psi(x,\omega,u)\in W_1(D)$

を次の式で定義する．

(5.5) $\Psi(x,\omega,u)(t)=Y^{x+g(x,u)}(t,\omega)$

$\Psi(x,\omega,u)$ を第２種の Brownian excursion (ω,u) に対応する（$x\in\partial D$ から出発する）第２種の excursion という．ω, u の関

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

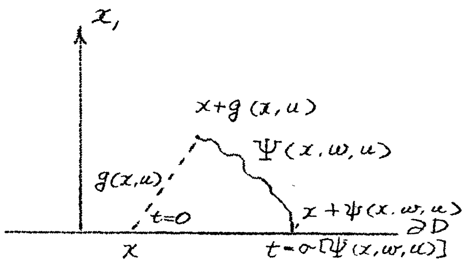
数としては $P \times \frac{du}{|u|^{\ell+1}}$ $-a.s.$ に定まる。

定義より

(5.6) $\Psi(x, w, u)(0) = x + g(x, u)$

(5.7) $\sigma[\Psi(x, w, u)] = g_1(x, u)^2 \sigma(w)$

特に $g_1(x, u) > 0$ ならば x から直ちに $x+g(x,u)$ へ jump して excursion Ψ が始まり，$g_1(x,u) = 0$ ならば Ψ は x から直ちに $x+g(x,u) \in \partial D$ に jump して以後 constant path になる。



<u>Def. 5.2</u> $\psi : (x, w, u) \in \partial D \times W_1^r \times \mathbb{R}^\ell \rightsquigarrow \psi(x, w, u) \in \partial D$ を

(5.8)
$$\begin{aligned}\psi(x, w, u) &= \Psi(x, w, u)[\sigma(\Psi(x, w, u))] \\ &= X^{x+g(x,u)}(\sigma(w)) - x \\ &= Y^{x+g(x,u)}(g_1^2(x,u)\sigma(w)) - x\end{aligned}$$

によって定義する。すなわち $\psi(x, w, u)$ は excursion $\Psi(x, w, u)$ の始点 x と終点との変位をあらわす。

<u>Lemma 5.2</u> 正定数 $K > 0$ が存在して

(5.9)
$$\int_{|u| \leq 1} E^P\{|\psi(x, w, u) - \psi(y, w, u)|^2 ; \sigma(w) \leq h_2^{-2}(u)\} \frac{du}{|u|^{\ell+1}} \leq K|x-y|^2 \qquad {}^\forall x, y \in \partial D$$

(5.10)
$$\int_{W_1^r}\int_{\mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}} I_{\{\sigma(w) \leq h_2^{-2}(u),\ |u| \leq 1\}^c} \cdot P(dw) \frac{du}{|u|^{\ell+1}} < \infty$$

<u>証明</u> 方程式 (5.1) の解 X^x に対し $H^x(w) = \{X_2(\sigma(w)) - x_2, X_3(\sigma(w)) - x_3, \cdots, X_n(\sigma(w)) - x_n\} \in \partial D$ とおく，次の Lemma をまず示す。

<u>Lemma 5.3</u> 定数 $K > 0$ が存在し，すべての $x, y \in D$, $t > 1$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

(5.11) $E^P\{|H^x(\omega)-H^y(\omega)|;\sigma(\omega)\le t\}$

$\leqslant K\{|x_1-y_1|^2[t+t^2(x_1^2+y_1^2)+t^3x_1^4]+|x'-y'|^2\times(tx_1^2+t^2x_1^4)\}$

$\cdot\exp[Kx_1^2t(1+x_1^2t)]\equiv\Xi(x.y;t)$

(ここで $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$ に対し $x'=(0,x_2,\cdots,x_n)\in\partial D$)

証明 $\xi_i(t)=X_i(t)-x_i$, $\eta_i(t)=Y_i(t)-y_i$ $i=2,3,\cdots,n$ とおく。

$\xi_i(t)=x_1\int_0^{t\wedge\sigma}a_i(x,\omega_1(s),x'+\xi(s))d\omega(s)+x_1^2\int_0^{t\wedge\sigma}b_i(x,\omega_1(s),$
$x'+\xi(s))ds$

$\eta_i(t)=y_1\int_0^{t\wedge\sigma}a_i(y,\omega_1(s),y'+\eta(s))d\omega(s)+y_1^2\int_0^{t\wedge\sigma}b_i(y,\omega_1(s),y'+\eta(s))ds$

$(a_i(x)=(a_{i1}(x),a_{i2}(x),\cdots,a_{ir}(x)))$

そして $H^x(\omega)=\xi(\sigma(\omega))$, $H^y(\omega)=\eta(\sigma(\omega))$ $(\sigma(\omega)=\inf\{t:\omega_1(t)=0\})$

である。

$|\xi(t)-\eta(t)|^2\leqslant K_1\{x_1^2(\int_0^{t\wedge\sigma}[a_i(x,\omega_1(s),x'+\xi(s))-a_i(y,\omega_1(s),y'+\eta(s))]d\omega(s))^2$

$+x_1^4(\int_0^{t\wedge\sigma}[b_i(x,\omega_1(s),x'+\xi(s))-b_i(y,\omega_1(s),y'+\eta(s))]ds)^2$

$+(x_1-y_1)^2(\int_0^{t\wedge\sigma}a_i(y,\omega_1(s),y'+\eta(s))d\omega(s))^2+(x_1^2-y_1^2)^2(\int_0^{t\wedge\sigma}b_i(y,\omega_1(s),$

$y'+\eta(s))ds)^2$

したがって

$E^P|\xi(t\wedge\sigma)-\eta(t\wedge\sigma)|^2\leqslant K_2[x_1^2(x_1-y_1)^2E^P(\int_0^{t\wedge\sigma}\omega_1^2(s)ds)$

$+x_1^2|x'-y'|^2E^P(t\wedge\sigma)+x_1^2E^P(\int_0^{t\wedge\sigma}|\xi(s)-\eta(s)|^2ds)$

$+x_1^4E^P(t\wedge\sigma)\{(x_1-y_1)^2E^P(\int_0^{t\wedge\sigma}\omega_1^2(s)ds)+|x'-y'|^2E^P(t\wedge\sigma)$

$+E^P(\int_0^{t\wedge\sigma}|\xi(s)-\eta(s)|^2ds)\}+(x_1-y_1)^2E^P(t\wedge\sigma)+(x_1^2-y_1^2)^2$

$\{E^P(t\wedge\sigma)\}^2]$

これよりすべての $s\in[0,t]$ に対し ($t\geqq 1$ とする)

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$E^P|\xi(s\wedge\sigma)-\eta(s\wedge\sigma)|^2 \leqslant K[(x_1-y_1)^2\{x_1^2t^2+x_1^4t^3+t+y_1^2t^2\}$$
$$+|x'-y'|^2\{x_1^2t+x_1^4t^2\}+|x_1^2+x_1^4t\}\int_0^s E^P|\xi(u\wedge\sigma)-\eta(u\wedge\sigma)|^2du$$

故に

$$E^P|\xi(s\wedge\sigma)-\eta(s\wedge\sigma)|^2$$
$$\leqslant K[(x_1-y_1)^2\{(x_1^2+y_1^2)t^2+t+x_1^4t^3\}+|x'-y'|^2(x_1^2t+x_1^4t^2)]$$
$$\exp\{Ks(x_1^2+x_1^4t)\}$$

ところで $E^P(|\xi(\sigma)-\eta(\sigma)|^2:\sigma\leqslant t)$

$$\leqslant E^P(|\xi(\sigma\wedge t)-\eta(\sigma\wedge t)|^2$$

であるので Lemma 5.3 が証明された．この系として

<u>Cor.</u> $\xi,\eta\in\partial D$, $x,y\in D$

(5.12) $E^P(|(\xi+H^x(\omega))-(\eta+H^y(\omega)|^2:\sigma(\omega)\leqslant t\}$

$$\leqslant K'\{|\xi-\eta|^2+\Xi(x,y;t)\}$$

再び Lemma 5.2 の証明にもどる．定義より明らかに

$$\psi(x,\omega,u)=g'(x,u)+H^{x+g(x,u)}(\omega),\ x\in\partial D,\ u\in R^\ell,\ a.a.\ \omega\in W_1^r$$
$$(g'(x,u)=(0,g_2(x,u),g_3(x,u),\cdots,g_n(x,u))\in\partial D)$$

である。故に (5.12) より

$$E^P\{|\psi(x,\omega,u)-\psi(y,\omega,u)|^2;\sigma(\omega)\leqslant h_2^{-2}(u)\}$$
$$\leqslant K'\{|g'(x,u)-g'(y,u)|^2+\Xi(x+g(x,u),y+g(y,u);h_2^{-2}(u)\}$$

ここで仮定 $(A\,\mathrm{II})_6$ を右辺へ代入すると（特に $h_1\leqslant h_2$ に注意せよ）

$$\leqslant K'\{h_2(u)|x-y|^2+K[h_1^2(u)|x-y|^2\{h_2^{-2}(u)+h_2^{-4}(u)(h_1^2(u)+h_1^2(u))$$
$$+h_2^{-6}(u)h_1^4(u)\}+h_2(u)|x-y|^2\{h_2^{-2}(u)h_1^2(u)+h_2^{-4}h_1^4(u)\}]$$
$$\times\exp[Kh_1^2(u)h_2^{-2}(u)(1+h_1^2(u)h_2^{-2}(u))]\}$$
$$\leqslant K''|x-y|^2\{(\frac{h_1}{h_2})^2(u)+h_2(u)\},\qquad |u|\leq 1$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

再び（AII）$_6$ の仮定より $\displaystyle\int_{|u|\leq 1}\left\{h_2(u)+\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2(u)\right\}\frac{du}{|u|^{\ell+1}}<\infty$ である

ので（5.9）が示された。

次に（5.10）を示す.

$$\int_{W_1^r}\int_{\mathbb{R}^\ell\setminus\{0\}} I_{\{\sigma(\omega)\leq h_2^{-2}(u),\ |u|\leq 1\}^c}P\{d\omega\}\frac{du}{|u|^{\ell+1}}$$

$$\leq \iint_{\{(\omega,u):\,|u|>1\}} P\{d\omega\}\frac{du}{|u|^{\ell+1}} + \iint_{\{\sigma(\omega)>h_2^{-2}(u),\ |u|<1\}} P\{d\omega\}\frac{du}{|u|^{\ell+1}}$$

$$\text{第1項} = \int_{|u|>1}\frac{du}{|u|^{\ell+1}}<\infty$$

$$\text{第2項} = \int_{0<|u|\leq 1} P[\sigma(\omega)>h_2^{-2}(u)]\frac{du}{|u|^{\ell+1}}$$

$$= \int_{0<|u|\leq 1}\left\{\int_0^1\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,h_2(u)e^{-\frac{h_2^2(u)}{2}x^2}dx\right\}\frac{du}{|u|^{\ell+1}}$$

$$= \int_{0<|u|\leq 1}\left[\int_0^{h_2(u)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right]\frac{du}{|u|^{\ell+1}}$$

$$= \int_{0<|u|\leq 1} O(h_2(u))\frac{du}{|u|^{\ell+1}}<\infty \quad (\text{仮定 (AII)}_6\text{ より})$$

q.e.d.

§6. 境界上の process の構成

適当な確率空間（$\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t$）上に次のものを構成する.

(i) σ-field の増大列 $\mathcal{G}_t$ で $\mathcal{G}_t\subset\mathcal{F}_0$ （$^\forall t$）なるものと，r次元 $\mathcal{G}_t$-Brown 運動 $B(t)=(B_1(t), B_2(t), \cdots, B_r(t))$

(ii) S次元（Sは$\alpha\in\mathbb{R}^{n-1}\otimes\mathbb{R}^s$ におけるもの）$\mathcal{F}_t$-Brown 運動 $\hat{B}(t)=(\hat{B}_1(s), \hat{B}_2(s), \cdots, \hat{B}_S(t))$

(iii) 互いに独立な Poisson point processes of the (r-dim.) Brownian excursions of the 1st kind and 2nd

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

kind, Π_1 と Π_2 (cf. §2)

(iii) は次のものを与えることと同値である：sum $W_0^r + W_1^r \times (\mathbb{R}^\ell \setminus \{0\})$ −値の $\mathcal{F}_t$ − stationary Poisson point process with characteristic measure $Q + P \times \frac{du}{|u|^{\ell+1}}$ (和の意味は明らかであろう). §4で構成された第1種の excursion $\Phi(x, w)$, §5で構成された第2種の excursion $\Psi(x, w, u)$, 及び対応する始点, 終点の変位 $\varphi(x, w)$, $\psi(x, w, u)$ を準備し, 又 $\alpha(x)$: $x \in \partial D \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \otimes \mathbb{R}^s$, $\beta(s)$: $x \in \partial D \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, $\rho(x)$: $x \in \partial D \longrightarrow [0, \infty)$ は §3で与えられたものとする.

今 $x \in \partial D$ を固定し ∂D 上の確立微分方程式

$$
\begin{aligned}
(6.1)\quad \xi_t = x &+ \int_0^t \alpha(\xi_s)\, d\hat{B}_s + \int_0^t \beta(\xi_s)\, ds + \int_0^t \int_{W_0^r} I_{\{\sigma(w) \le 1 \wedge S_1(w)\}} \\
&\cdot \varphi(\xi_{s-}, w)\, [N_{\Pi_1}(ds \cdot dw) - ds\, Q(dw)] \\
&+ \int_0^t \int_{W_0^r} I_{\{\sigma(w) \le 1 \wedge S_1(w)\}^c} \cdot \varphi(\xi_{s-}, w)\, N_{\Pi_1}(ds, dw) \\
&+ \int_0^t \int_{W_1^r \times (\mathbb{R}^\ell \setminus \{0\})} I_{\{|u| \le 1,\, \sigma(w) < h_2^{-2}(u)\}} \cdot \psi(\xi_{s-}, w, u)\, [N_{\Pi_2}(ds, dw, du) \\
&- ds\, P(dw) \frac{du}{|u|^{\ell+1}}] + \int_0^t \int_{W_1^r \times (\mathbb{R}^\ell \setminus \{0\})} I_{\{|u| \le 1,\, \sigma(w) < h_2^{-2}(u)\}^c} \cdot \\
&\psi(\xi_{s-}, w, u)\, N_{\Pi_2}(ds, dw, du)
\end{aligned}
$$

(Π_1, Π_2 に関する確率積分の定義は§1をみよ)

を考える. Lemma 4.2 及び Lemma 5.2 より (6.1) に対して Lipschitz 条件を用いた通常の評価が出来て一意的な解 $\xi^x(t)$ が存在することがわかる. 又 $\xi^x(t)$ は x について連続であることも通常の場合と同様である.

<u>Theorem 6.1</u> (6.1) の一意的な解 $\xi = \xi^x$ が存在し ($\hat{B}, \Pi_1, \Pi_2$) の関数になる (すなわち, いわゆる strong solution である). 又各 t に対し $x \leadsto \xi^x(t)$ は確率1で連続である.

§7 inverse local time

$x\in\partial D$を固定し

$$(7.1)\quad A^x(t)=\int_0^t \rho(\xi_s^x)ds+\int_0^t\int_{W_0^r}\sigma[\Phi(\xi_{s-}^x,w)]N_{\Pi_1}(ds,dw)$$
$$+\int_0^t\int_{W_1^r\times\mathbb{R}^l\setminus\{0\}}\sigma[\Psi(\xi_{s-}^x,w,u)]N_{\Pi_2}(ds,dw,du)$$
$$=\int_0^t\rho(\xi_s^x)ds+\int_0^t\int_{W_0^r}\mu^2(\xi_{s-}^x)\sigma(w)N_{\Pi_2}(ds,dw)$$
$$+\int_0^t\int_{W_1^r\times\mathbb{R}^l\setminus\{0\}}g_1^2(\xi_{s-}^x,u)\sigma(w)N_{\Pi_2}(ds,dw,du)$$

とおく．

Theorem 7.1 確率1で $t\leadsto A^x(t)$はright conti-, strictly increasing かつ $A^x(\infty-)=\infty$

証明． $\forall t_1<t_2$ に対し $\int_{t_1}^{t_2}\int_{W_0^r}\sigma(w)N_{\Pi_1}(ds,dw)>0$ $\int_{t_1}^{t_2}\int_{W_1^r\times(|u|\le 1)}\sigma(w)N_{\Pi_2}(ds,dw,du)$ >0が確率1でなりたつから§3 仮定（AIII)$_1$ によって $A^x(t)$ は strictly increasing になることがわかる。

又，一般化された伊藤の公式（§1）より

$$E(e^{-A^x(t)})-1=-\int_0^t E(e^{-A^x(s)}\rho(\xi_s^x))ds$$
$$-\int_0^t\int_{W_0^r}E(e^{-A^x(s)}(1-e^{-\mu^2(\xi_s^x)\sigma(w)}))Q(dw)$$
$$-\int_0^t\int_{W_1^r\times\mathbb{R}^l\setminus\{0\}}E(e^{-A^x(s)}(1-e^{-g_1^2(\xi_s^x,u)\sigma(w)}))$$
$$P(dw)\frac{du}{|u|^{l+1}}$$

$$\leq -K_1\int_0^t E(e^{-A^x(s)}\{\rho(\xi_s^x)+\mu^2(\xi_s^x)+\int_{\mathbb{R}^l\setminus\{0\}}[g_1^2(\xi_s^x,u)\wedge 1]\frac{du}{|u|^{l+1}}\})\frac{du}{|u|^{l+1}}$$

$$\leq -K_2\int_0^t E(e^{-A^x(s)})ds \qquad (\text{仮定}(A\mathrm{III})_2\text{より})$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

すなわち $1 \geqq K_2 \int_0^t E(e^{-A^x(s)})ds$

故に $\lim_{t\uparrow\infty} E(e^{-A^x(t)}) = 0$, したがって $P[A^x(\infty-) = \infty] = 1$

q.e.d.

§8 Path function の構成

$x \in \partial D$ を固定する。$\Omega_0 = \{\omega : t \leadsto A^x(t)$ が右連続, strictly increasing かつ $A^x(\infty-) = \infty\} \subset \Omega$ とおき, Ω_0 の上で以下の議論を行う. もちろん Theorem 7.1 によって Ω_0 の確立は 1 である。

すると, すべての $t \in [0, \infty)$ に対し唯1つの $s \in [0, \infty)$ が定まって

(8.1) $\quad A^x(s-) \leqq t \leqq A^x(s)$

となる. この s を

(8.2) $\quad s = \varphi^x(t)$

とあらわす. このとき明らかに $t \leadsto \varphi^x(t)$ は連続である。

Def. 8.1 $\quad \varphi^x(t)$ を(構成さるべき拡散過程の)境界 ∂D における local time という。

以下でいくつかの場合にわけて考察する。

Case I $\quad A^x(s-) < A^x(s)$ のとき

このとき (7.1) によって次の場合のいずれかがおこり, しかもそれは同時にはおこらない。

(i) $s \in D_{\pi_1}$ (: = point function π_1 の定義域 (c.f. Def. 1.1) かつ $\mu(\xi_{s-}) > 0$

(尚 $s \in D_{\pi_1}$ は次のようにいってもよい: $\exists_1 \omega^s (= \pi_1(s)) \in W_0^r \ni N_{\pi_1}(\{s, \omega^s\}) = 1$

(ii) $s \in D_{\pi_2}$, かつ $\pi_2(s) = (\omega^s, u^s) \in W_1^r \times (R^l \setminus \{0\})$ とおくとき $g_1(\xi_{s-}, u^s) > 0$

(i)の場合には

(8.3) $\quad X^x(t) = \Phi(\xi_{s-}, \omega^s)(t - A^x(s-)) \qquad (\omega^s = \pi_1(s))$,

(ii)の場合には

(8.4) $\quad X^x(t) = \Psi(\xi_{s-}, \omega^s, u^s)(t - A^x(s-)), \quad (\omega^s, u^s) = \pi_2(s)$

とおく.

Case II $\quad A^x(s-) = A^x(s) = t$ のとき

このときは

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

(i) $s \in D_{\Pi_2}$, かつ $(w^s, u^s) \equiv \Pi_2(s) \in W_1^r \times (\mathbb{R}^l \setminus \{0\})$とおくとき
$g(\xi_{s-}, u^s) \neq 0 \in \partial D$

(ii) それ以外，すなわち，$s \notin D_{\Pi_1} \cup D_{\Pi_2}$ 又は，$s \in D_{\Pi}$，かつ$\mu(\xi_{s-})=0$，又は$s \in D_{\Pi_1}$，かつ$(w^s, u^s) = \Pi_2(s)$として$g(\xi_{s-}, u)=0$ のいずれかの場合

のどちらか一方がおこる。

(i)の場合は $\xi_s^x = \xi_{s-}^x + g(\xi_{s-}, u^s)$であり，このとき

(8.5) $X^x(t) = \xi_s^x$，

(ii)の場合は $\xi_s^x = \xi_{s-}^x$ であり，このとき

(8.6) $X^x(t) = \xi_s^x$ とおく

以上で $t \in [0,\infty) \longmapsto X^x(t) \in D$ が完全に定義された。明らかに$X^x(0) = x \in \partial D$であり，又 $t \longmapsto X^x(t)$は右連続 高々第一種不連続で $X^x(t) \neq X^x(t-0)$ならば $X^x(t-0) \in \partial D$である。

次に内部の点 $x \in \mathring{D}$から出発する *path function* $X^x = \{X^x(t)\}$ を構成する。そのため§6 (i) で与えられたr次元 $\mathcal{G}_t$-*Brown* 運動$(B(t))$を用いて次の確率微分方程式を考え，$Z^x = (Z^x(t))$をその解とする：

(8.7)
$$\begin{cases} dZ(t) = a(Z(t))\,dB(t) + b(Z(t))\,dt \\ Z(0) = x \end{cases}$$

そして

(8.8) $\theta^x = \inf\{t : Z^x(t) \in \partial D\}$

とおく．上で構成された $X^y = \{X^y(t)\}_{y \in \partial D}$ を考え

(8.9)
$$X^x(t) = \begin{cases} Z^x(t), & t < \theta^x \\ X^{Z^x(\theta^x)}(t-\theta^x); & t \geq \theta^x \end{cases}$$

によって $t \in [0,\infty) \longmapsto X^x(t) \in D$ を定義する。かくして各$x \in D$に対し $X^x = (X^x(t))$が定義された。

あと，このX^xがD上の拡散過程であり，それは§3で与えられたデータに対応するものであることを示さなければならない。しかしすでに多くの紙面をついやしたので次回にゆずることにする。ここでは，$X^x(t)$のマルコフ性の証明は*Poisson point process* に関する*Lévy measure*の公式（*strict past* に関する*conditional expectation*に関する公式 cf. *Weil* [15]）が本質的であること，強マルコフ性の証明も

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

同じ線で出来ると思われるが，現在のところ Borel field に関する困難な問題があること を注意するにとどめる。

文 献

[1] J.M. Bony, Ph. Courrège and P. Priouret : Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte Annales de l'Inst. Fourier XVIII, Fasc. 2 (1969)

[2] C. Doleans-Dade et P. Meyer : Integrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Seminaire de Probabilités IV. 77-107 Lecture Note in Math. 124, Springer (1970)

[3] N. Ikeda : On the construction of two dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problems, Mem. Coll Sci. Univ. Kyoto Ser. A, 33 (1961) 367-427

[4] K. Itô : Poisson point processes attached to Markov processes. Proc. 6th Berkeley Symp. Vol. III, 225-239 Univ. California Press (1970)

[5] H. Kunita and S. Watanabe : On square integrable martingales. Nagoya Math. Jour. 30 (1967) 209-245

[6] K. Sato and T. Ueno : Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1965), 529-605

[7] A.V. Skorohod : Studies in the theory of random processes, Addison-Wesley, 1965 (originally published in Kiev, 1961)

[8] D. Stroock and S.R.S. Varadhan ; Diffusion processes with boundary conditions, Comm. Pure Appl. Math., vol XXIV, 147-225 (1971)

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

[9] D. Stroock : Diffusion processes associated with Lévy generators (preprint)

[10] S. Watanabe : Brownian motion on a Green space and its application to potential theory, Report in Journées de Probabilités de Rennes, (1964)

[11] S. Watanabe : On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process, Jap. Jour. Math. 34 (1964) 53-70

[12] S. Watanabe : On stochastic differential equations for multidimensional diffusion processes with boundary conditions, J. Math. Kyoto Univ. Vol. 11 (1971) 169-180

[13] S. Watanabe : Application of Poisson point processes to Markov processes, Proc. Int. Conference on Prob. and Statistics. Vilnius (1973)

[14] M. Weil : Quasi-processus, Séminaire de Probabilités IV, Lecture Notes in Math. Springer 124 (1970), 216-239

[15] M. Weil : Conditionement aux passé strict

[16] A.D. Wentzell : On boundary conditions for multidimensional diffusion processes (in Russian), Teop. Veroyatnost. i Primenen 4 172-185 (1959)

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

ある種の確率微分方程式の relaxed solution について

土 谷 正 明

§0 序

Wentzell の境界条件をみたす2次元拡散過程の構成のため，池田氏は確率微分方程式による方法を開発された（[6]）．ここで考える方程式は，その特別な場合である．即ち，構成したいマルコフ過程 $\mathbb{P}$ は，上半平面 $\bar{D}=\{(x,y): y\geqq 0\}$ において，*minimal process* が吸収壁のブラウン運動で，境界条件 $\frac{\partial u}{\partial y}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}=0$ をみたすものである．それに対応する確率微分方程式は，y 軸方向の運動は $[0,\infty)$ における反射壁のブラウン運動 $y(t)$ $(y(0)=y\geqq 0)$ としてよいから，x 軸方向の運動を定めればよいが，池田氏[6] の定式化によれば，$y(t)$ の $\{0\}$ における *local time* を $\underline{\underline{t}}(t)$ とし，$y(t)$ と独立な1次元ブラウン運動 $B(t)$ $(B(0)=0)$ を用いて

(0) $\quad dX(t)=dB(t)+a(x(t))d\underline{\underline{t}}(t)$,

即ち，

(1) $\quad X(t)=X(0)+B(t)+\int_0^{\underline{\underline{t}}(t)}a(X(\underline{\underline{t}}^{-1}(s)))ds \qquad (t\geqq 0)$

を解けばよい．

$a(x)$ が *Lipschitz* 連続のときは，池田市[6]が，更に有界連続のときは，[9]とこの報告の結果を併せれば，(1)の解の存在と一意性及びそれが拡散過程になっていることが示される．ところが，$a(x)$ が不連続な場合には，現在のところ，一般に(1) の解の存在さえ分っていない。

最近，本尾氏[8]は，なめらかな $a(x)$ に対応するマルコフ過程 $\mathbb{P}$ の集合 $\mathcal{P}$ の（ある意味での）*closure* $\bar{\mathcal{P}}$ の特徴ずけを与えた．その論文の中で，$\bar{\mathcal{P}}$ と $\mathcal{L}\equiv\{\{a(x)\}: a(x)\neq\pm\infty$ (*Lebesgue Meaure* の意味で)$\}$ が1対1に対応することを示している．但し，$\{a(x)\}$ は *Lebesgne Measure* の意味での $a(x)$ の同値類を表わす．

このことを考慮して，$\{a(x)\}$ に1つの方程式が対応する様にして (0) を解きたい．そこで，(1)の代りに次の方程式を考える。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

(2) $x(t) = x(0) + B(t) + \int_{\phi(s)ds,}^{\underline{t}(t)} \phi(s)\, ds,$

for some ϕ : $\phi(s) \in A[x(\underline{t}^{-1}(s))]$ *),

但し，$A[x] = \bigcap_{\delta \to 0} \bigcap_{N:|N|=0} Co\{a(y) : |y-x| \leqq \delta,\ y \notin N\}$，
$Co\{\ \}$は集合$\{\ \}$のclosed convex hull，$|N|$ は集合 N のLebesgen measure を表わす。(2)の解をConway [3] にならって，(0)のrelaxed solutionと呼ぶ。

この報告では，(0)のrelaxed solution の存在と一意性及びそのマルコフ性等について調べる。

Conway [3] はIto-typeの確率微分方程式
$dx(t) = \sigma(x(t))\,dB(t) + b(x(t))\,dt$
に対し，relaxed solutionの概念を導入した。それは，元来は常微分方程式において Viktorovskii [10]，Filippov [5] 等が導入した概念で，この報告でも[10]，[5]の結果を使用する。

なお，定義から明らかな様に，$a(x)$が連続な場合には (0)のordinary solution（即ち(1)の解）とrelaxed solutionは一致する。

§1 定義及び結果

ある確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$（i.e. Ωはある集合，$\mathcal{F}$はΩのσ-field，Pは$\mathcal{F}$上の確率測度$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$は$\mathcal{F}$のsub σ-fieldのincreasing family）上に，$(\Omega, y(t), \mathcal{F}_t, P)$**) $(y(0) = y \geqq 0)$ は $[0,\infty)$ 上の反射壁ブラウン運動と$(\Omega, B(t)\ \mathcal{F}_t, P)$ $(B(0) = 0)$ は1次元ブラウン運動で，$\{y(t)\} \perp\!\!\!\perp \{B(t)\}$ なるものが与えられているとする。$\underline{t}(t)$ を $y(t)$ の$\{0\}$におけるlocal timeとし，$\underline{t}^{-1}(t)$をinverse local time（i.e $\underline{t}^{-1}(1) = \inf\{s : \underline{t}(s) > t\}$）とする。このとき，$(\Omega; \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の確率過程$\{x(t)\}$で，$(\mathcal{F}_t)$-adapted，そのpathは確率1で連続かつ

$$P\left[x(t) = x(0) + B(t) + \int_0^{\underline{t}(t)} \phi(s)\,ds \text{ for some } \phi : \phi(s) \in A[x(\underline{t}^{-1}(s))],\ {}^\forall t \geqq 0\right] = 1$$

をみたすとき，$\{x(t)\}$を(0)のrelaxed solutionという。

又，$a(x)$が次の条件の何れか1つをみたすとき，one-sided Lipschitz

---

* a.e. は常にLebesgne measureに関するものとする。

** この様に書いたときは$\{y(t)\}$は$(\mathcal{F}_t)$-adaptedであるとする。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

condition をみたすという.

(L-1) $\exists K>0$ (定数) : $(x-y)(a(x)-a(y)) \leqq K(x-y)^2$, $\forall x, \forall y \in \mathbb{R}^1$

(L-2) $\exists K>0$ (定数) : $-(x-y)(a(x)-a(y)) \leqq K(x-y)^2$, $\forall x, \forall y \in \mathbb{R}^1$

上の様な $y(t)$, $B(t)$ の与えられている確率空間を $\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t$) とするとき,

定理 1　$a(x)$ が有界ならば (i.e ess sup $|a(x)|<\infty$)*　適当な確率空間 ($\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t$) 上で, 各 $x \in \mathbb{R}^1$ に対し, (0)の初期値 x の relaxed solution $x_i(t,x)$ **) ($i=1,2$) が存在して次をみたす:

(1°) 初期値 x の (0) の任意の relaxed-solution $X(t,x)$ に対し,

$$P(x_1(t,x) \leqq X(t,x) \leqq x_2(t,x),\ \forall t \geqq 0) = 1 \quad \forall (x,y) \in \bar{D}$$

(2°) (Ω, ($x_i(t,x), y(t)$), $\mathcal{F}_t, P$) ($i=1,2$) は, 上半平面 $\bar{D}$ 上の拡散過程である.

(3°) 更に, $a(x)$ が one-sided Lipschitz 条件をみたせば (即ち, $\{a(x)\}$ の代表元として, その様なものが取れれば,

$$P(x_1(t,x) = x_2(t,x),\ \forall t \geqq 0) = 1, \quad \forall (x,y) \in \bar{D}.$$

§2 定理の証明

(0)から induce される境界上の確率微分方程式及びその relaxed solution を定義する.

ある確率空間 ($W, \mathcal{B}, Q; \mathcal{B}_t$) において ($W, \ell(t), \mathcal{B}_t, Q$) ($\ell(0)=0$) は 1 次元対称コーシー過程とするとき, 方程式

(3)　$d\xi(t) = d\ell(t) + a(\xi(t))\,dt$

において, ($W, \mathcal{B}, Q; \mathcal{B}_t$) 上の確率過程 $\{\xi(t)\}$ が, $\{\xi(t)\}$ は ($\mathcal{B}_t$) − adapted, その path は確率 1 で右連続かつ左極限をもち,

$$Q[\xi(t) = \xi(0) + \ell(t) + \int_0^t \phi(s)\,ds \ \text{for some}\ \phi : \phi(s) \in A[\xi(s)],\ \forall t \geqq 0] = 1$$

をみたすとき, $\{\xi(t)\}$ を (3) の relaxed solution という.

Lemma 1 (1°) (0) の relaxed solution $\{X(t)\}$ on ($\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t$) が存在すれば ($X(0)=x \in \mathbb{R}^1$ とする) $W \equiv \Omega$, $\mathcal{B}_t \equiv \mathcal{F}_{\underline{t}^{-1}(t)}$, $\mathcal{B} \equiv \vee \mathcal{B}_t$, $Q \equiv P$, $\ell(t) \equiv B(\underline{t}^{-1}(t)) - B(\underline{t}^{-1}(0))$, $\xi(t) \equiv X(\underline{t}^{-1}(t))$

---

*) Lebesgue measure に関する ess. sup.

**) $x_i(t,x)$ は $y(0)=y$ にも依存するが, 反射壁ブラウン運動の測度 P_y を使って表現すれば, そのことにより明確になるので省略して書く. なお詳しいことは 証明参照

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

とおけば $\{\xi(t)\}$ は $\xi(0)=x+B(\underline{\underline{t}}^{-1}(0))$ なる (3) の relaxed solution on $(W, \mathcal{B}, Q; \mathcal{B}_t)$ である．更に，

$$y(t) \equiv y(t,w) = \begin{cases} x+B(t,\omega) \text{ if } (t,\omega)\in\Omega^0 \\ \xi(\underline{\underline{t}}(t,\omega),\omega) \text{ if } (t,\omega)\in\Omega^1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \xi(\underline{\underline{t}}(t-\frac{1}{n},\omega),\omega) \text{ if } (t,\omega)\in\Omega^2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \xi(\underline{\underline{t}}(\sigma-\frac{1}{n},\omega),\omega)+B(t,\omega)-B(\sigma,\omega) \\ \qquad\qquad \text{if } (t,\omega)\in\Omega^3 \end{cases}$$

とおくと，

$$P[x(t,\omega)=y(t,\omega), \forall t\geqq 0]=1,$$

但し，

$$\Omega^0=\{(t,\omega) : 0\leqq t<\underline{\underline{t}}^{-1}(0,\omega)\},$$

$$\Omega^1=\{(t,\omega) : \underline{\underline{t}}^{-1}(\underline{\underline{t}}(t,\omega),\omega)=t\}\cap C\,\Omega^0 \quad {}^{*)}$$

$$\Omega^2=\{(t,\omega) : \lim \underline{\underline{t}}^{-1}(\underline{\underline{t}}(t-\tfrac{1}{n},\omega),\omega)=t<\underline{\underline{t}}^{-1}(\underline{\underline{t}}(t,\omega),\omega)\}\cap C\,\Omega^0,$$

$$\Omega^3=\{(t,\omega) : \lim_{n\to\infty}\underline{\underline{t}}^{-1}(\underline{\underline{t}}(t-\tfrac{1}{n},\omega)\,\omega)>t\}\cap C\,\Omega^0$$

$$\sigma\equiv\sigma(t,\omega)\equiv\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\underline{\underline{t}}^{-1}(\underline{\underline{t}}(t,\omega)-\frac{1}{n},\omega) & \text{if } (t,\omega)\in\Omega^3 \\ 0 & \text{other wise}\end{cases}$$

(2°) $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ において，$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$ $(t\geqq 0)$ かつ $\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ のすべての P-null set を含んでいるとする．このとき

$W\equiv\Omega$, $Q\equiv P$, $\mathcal{B}_t\equiv\mathcal{F}_{\underline{\underline{t}}^{-1}(t)}$, $\mathcal{B}\equiv\vee\mathcal{B}_t$,

$\ell(t)\equiv B(\underline{\underline{t}}^{-1}(t))-B(\underline{\underline{t}}^{-1}(0))$ として，任意の $x\in\mathbb{R}^1$ に対し，x を初期値とする (3) の relaxd solution $\{\xi(t,x,\omega)\}$ で，(t,x,ω) 一可測なものが存在するとき

$$\xi(t,\omega)=\xi(t,x+B(\underline{\underline{t}}^{-1}(0)),\omega)$$

として，(1°) で定めた $\{y(t)\}$ は (0) の初期値 x の relaxed solution で，$y(\underline{\underline{t}}^{-1}(t))=\xi(t)$ である．

Proof　$\ell(t)$ が 1 次元対称コーシー過程であることは明らか．又，(1) を $\underline{\underline{t}}^{-1}(t)$ で time hange すれば (1°) の結果は殆んど明らか。(2°) は，確率 1 で

$$y(t)=x+B(t)+\int_0^{\underline{\underline{t}}(t)}\phi(s)\,ds \quad \text{for } \phi(s)\in A[\xi(s)] \quad (\forall t\geqq 0)$$

が成立することは，$\xi(t)$ のみたす方程式 $y(t)$ の定義から明らか。よって，

---

*) $C\,\Omega^0$ は Ω^0 の補集合を表わす．

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$y(t)$ の path は連続で,

$$y(\underline{t}^{-1}(t)) = x + B(\underline{t}^{-1}(0)) + \ell(t) + \int_0^t \phi(s)\,ds$$
$$= \xi(t)$$

そこで, $\{y(t)\}$ が $(\mathcal{F}_t)$-adapted を示せばよい。$\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ のすべての P-null set を含んでいるので, 以下の集合に関する等式及び包含関係が確率1で成立する場合でも一々断らなくて, 単に等式, 包含関係で書く。以下, $t \geq 0$ は任意に固定する.

$\Omega_t^j = \{\omega : (t,\omega) \in \Omega^j\}$ $(j=0,1,2,3)$ とすると

$$\Omega_t^0 = \{\omega : 0 \leqq t < \underline{t}^{-1}(0)\} \in \mathcal{F}_t,$$

$$\Omega_t^1 = \{\omega : \underline{t}^{-1}(\underline{t}(t,\omega),\omega) = t\} \cap C\,\Omega^0_t$$
$$= \Big[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{t<u<t+\frac{1}{n} \\ u\in Q}} \{\omega : \underline{t}(t,\omega) < \underline{t}(u,\omega)\}\Big] \cap C\,\Omega^0_t \in \mathcal{F}_t{}^{*)},$$

何故なら $\{\underline{t}(t)\}$ は $(\mathcal{F}_t)$-adapted, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$.

$$\Omega^2_t = \{\omega : \lim \underline{t}^{-1}(\underline{t}(t-\tfrac{1}{n},\omega),\omega) = t < \underline{t}^{-1}(\underline{t}(t,\omega),\omega)\} \cap C\,\Omega^0_t$$
$$= C\,\Omega^0_t \cap C\,\Omega^1_t \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{t-\frac{1}{n}<s<t \\ s\in Q}} \{\omega : \underline{t}(s,\omega) < \underline{t}(t,\omega)\} \in \mathcal{F}_t$$

従って,

$$\Omega^3_t = \{\omega : \lim_{n\to\infty} \underline{t}^{-1}(\underline{t}(t-\tfrac{1}{n},\omega),\omega) > t\} \cap C\,\Omega^0_t$$
$$= \Omega \cap C\,\Omega^0_t \cap C\,\Omega^1_t \cap C\,\Omega^2_t \in \mathcal{F}_t.$$

よって, $\Omega^j_t \in \mathcal{F}_t$ $(j = 0,1,2,3)$

次に, $\sigma = \sigma(t,\omega)$ は $\mathcal{F}_t$-m'ble である. 何故なら $\forall\alpha > 0$ に対し,

$$\{\sigma < \alpha\} \cap \Omega^3_t = \{\omega : \lim_{n\to\infty} \underline{t}^{-1}(\underline{t}(t,\omega) - \tfrac{1}{n},\omega) < \alpha\} \cap \Omega^3_t$$
$$= \{\omega : \inf\{s \geq 0 : \underline{t}(s,\omega) > \underline{t}(t,\omega) - \tfrac{1}{n}\} < \alpha\} \cap \Omega^3_t$$
$$= \Big[\bigcup_{\substack{s<\alpha \\ s\in Q}} \{\omega : \underline{t}(s,\omega) > \underline{t}(t,\omega) - \tfrac{1}{n}\}\Big] \cap \Omega^3_t \in \mathcal{F}_t \quad \text{for } \alpha \leqq t$$

$$\{\sigma < \alpha\} \cap \Omega^3_t = \Omega^3_t \in \mathcal{F}_t \quad \text{for } \alpha > t,$$

$$\{\sigma < \alpha\} \cap C\,\Omega^3_t = \{\sigma = 0\} \cap C\,\Omega^3_t = C\,\Omega^3_t \in \mathcal{F}_t,$$

$\alpha \leqq 0$ のときは, $\{\sigma < \alpha\} = \phi \in \mathcal{F}_t$.

各 $t \geqq 0$ に対し, $\underline{t}^{-1}(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-stopping time で $\mathcal{B}_t \equiv \mathcal{F}_{\underline{t}^{-1}(t)}{}^{**)}$ とおくと, 各 t に対し, $\underline{t}(t)$ は $(\mathcal{B}_t)$-stopping time である. よって. $A \in \mathcal{B}_{\underline{t}(t)}$ ならば, $A \cap (\underline{t}(t) < u) \in \mathcal{B}_u \equiv \mathcal{F}_{\underline{t}^{-1}(u)}$ $(\forall u \geqq 0)$

---

*) Q は有理数全体を表わす.

**) $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_{t+}$ 等については後述の Remark 参照

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

従って，$A\cap(\underline{t}(t)<u)\cap(\underline{t}^{-1}(u)<v)\in\mathcal{F}_v$ $(\forall u, \forall v\geqq 0)$.
$\Omega'_t\in\mathcal{F}_t$ より，$\forall v>t$ に対し，

$\Omega'_t\cap A\cap(\underline{t}(t)<u)\cap(\underline{t}^{-1}(u)<v)\in\mathcal{F}_v$ $(\forall u\geqq 0)$

ところが，

$\Omega'_t\subset\bigcup_{0\leqq u\in\mathbb{Q}}[(\underline{t}(t)<u)\cap(\underline{t}^{-1}(u)<v)]$ for $\forall v>t$.

何故なら，$\Omega'_t\ni\omega$ に対し，$v>t$ より $\exists s\in\mathbb{Q}\ni t<s<v$ かつ
$\underline{t}(t,\omega)<\underline{t}(s,\omega)\leqq\underline{t}(v,\omega)$.
従って $\underline{t}(t,\omega)<\underline{t}(v,\omega)$ for $\forall v>t$. $\underline{t}(\cdot,\omega)$ の連続性により
$\exists\tau\ni t<\tau<v$, $\underline{t}(t,\omega)<\underline{t}(\tau,\omega)<\underline{t}(v,\omega)$ かつ

$\underline{t}(\tau,\omega)\in\mathbb{Q}$

そこで，$u=\underline{t}(\tau,\omega)$ とおくと，$\underline{t}^{-1}(u,\omega)<v$ となる。($\because$ もし
$\underline{t}^{-1}(u,\omega)\geqq v\Rightarrow u=\underline{t}(\underline{t}^{-1}(u,\omega),\omega)\geqq\underline{t}(v,\omega)$)
従って，$\Omega'_t\subset\bigcup_{0\leqq u\in\mathbb{Q}}[(\underline{t}(t)<u)\cap(\underline{t}^{-1}(u)<v)]$
よって，$\forall v>t$ に対し，

$\Omega'_t\cap A=\bigcup_{0\leqq u\in\mathbb{Q}}[\Omega'_t\cap A\cap(\underline{t}(t)<u)\cap(\underline{t}^{-1}(u)<v)]\in\mathcal{F}_v$

$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$ だから，$\Omega'_t\cap A\in\mathcal{F}_t$.

$\{\xi(s)\}$ は $(\mathcal{B}_s)$-adapted かつその path は右連続で，$\underline{t}(t)$ は $(\mathcal{B}_s)$-stopping time だから，$\xi(\underline{t}(t))$ は $\mathcal{B}_{\underline{t}(t)}$-m'ble 従って

$\xi(\underline{t}(t,\omega),\omega)\chi_{\Omega'_t}(\omega)=\xi(\underline{t}(t,\omega)\omega)\chi_{\Omega'}(t,\omega)$ は $\mathcal{F}_t$-m'ble.

$A\in\mathcal{B}_{\underline{t}(t-\frac{1}{n})}$ とすると，$A\cap(\underline{t}(t-\frac{1}{n})<u)\in\mathcal{B}_u$ $(\forall u\geqq 0)$.
従って，$A\cap(\underline{t}(t-\frac{1}{n})<u)\cap(\underline{t}^{-1}(u)<v)\in\mathcal{F}_v$ $(\forall u\geqq 0)$.
よって，$\Omega^2_t\cap A\cap(\underline{t}(t-\frac{1}{n})<u)\cap(\underline{t}^{-1}(u)<t)\in\mathcal{F}_t$ $(\forall u\geqq 0)$.
ところが，前と同様にして

$\Omega^2_t\subset\bigcup_{0\leqq u\in\mathbb{Q}}[\underline{t}(t-\frac{1}{n}<u)\cap(\underline{t}^{-1}(u)<t)]$

が示せるから，$\Omega^2_t\cap A\in\mathcal{F}_t$ が分る。

$\xi(\underline{t}(t-\frac{1}{n},\omega),\omega)$ は $\mathcal{B}_{\underline{t}(t-\frac{1}{n})}$ − m'ble だから

$\xi(\underline{t}(t-\frac{1}{n},\omega),\omega)\chi_{\Omega^2_t}(\omega)=\xi(\underline{t}(t-\frac{1}{n},\omega),\omega)\chi_{\Omega^2}(t,\omega)$

は，$\mathcal{F}_t$-m'ble. 従って，

$\lim_{n\to\infty}\xi(\underline{t}(t-\frac{1}{n},\omega)\chi_{\Omega^2}(t,\omega)$ も $\mathcal{F}_t$-m'ble.

$B(t,\omega)$ は $(\mathcal{F}_t)$-adapted かつ progressively m'ble，σ は $\mathcal{F}_t$-m'ble．かつ $\sigma<t$ だから $B(\sigma,\omega)$ は $\mathcal{F}_t$-m'ble．又，$A\in\mathcal{B}_{\underline{t}(s)}$ とすると

$A\cap(\underline{t}(s)<u)\in\mathcal{B}_u$ $(\forall u\geqq 0)$. 従って

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$(\underline{t}^{-1}(u)<v)\cap(\underline{t}(s)<u)\cap A\in\mathcal{F}_v\quad(\forall u\,\forall v\geqq 0)$.

$0<s<t$ のとき

$(\underline{t}^{-1}(u)<t)\cap(\underline{t}(s)<u)\cap A\in\mathcal{F}_t\quad(\forall u\geqq 0)$.

従って，$(\underline{t}^{-1}(u)<t)\cap(\underline{t}(s)<u)\cap A\cap(s<\sigma)\in\mathcal{F}_t\ (\forall u\geqq 0)$.

故に，$(\underline{t}^{-1}(u)<t)\cap(\underline{t}(s)<u)\cap A\cap(s<\sigma)\cap\Omega^3_t\in\mathcal{F}_t\ (\forall u\geqq 0)$.

又，$\Omega^3_t\cap(s<\sigma)\ni\omega$ に対し，$\underline{t}(s,\omega<\underline{t}(\sigma(t,\omega),\omega)\leqq\underline{t}(t,\omega)$

より，$\underline{t}(s,\omega)<\underline{t}(t,\omega)$，従って

$\exists\tau\ni\ s<\tau<t,\ \underline{t}(s,\omega)<\underline{t}(\tau,\omega)<\underline{t}(t,\omega)$ かつ

$u\equiv\underline{t}(t,\omega)\in\mathbb{Q}$，このとき，$\underline{t}^{-1}(u,\omega)<t$

となるから，

$\exists u\in\mathbb{Q}\ni\ \underline{t}(s,u)<u<\underline{t}(t,\omega)$ かつ $\underline{t}^{-1}(u,\omega)<t$.

従って，$\Omega^3_t\subset\bigcup_{0\leqq u\in\mathbb{Q}}[(\underline{t}^{-1}(u)<t)\cap(\underline{t}(s)<u)]$.

故に $A\cap(s<\sigma)\cap\Omega^3_t\in\mathcal{F}_t$.

又，$C\Omega^3_t\ni\omega$ に対し，$\sigma(t,\omega)=0$ だから

$A\cap(s<\sigma)\in\mathcal{F}_t,\quad 0<\forall s\ (<t),\ \forall A\in\mathcal{B}_{\underline{t}}(s)$.

$P[\sigma>0)\cap\Omega^3]=P[(\sigma>\underline{t}^{-1}(0)\cap\Omega^3]=P(\Omega^3)$

に注意すれば，$\Omega^3\ni(t,\omega)$ に対し，

$\lim_{n\to\infty}\xi(\underline{t}(\sigma-\frac{1}{n},\omega),\omega)$ は well-defined，

$m_s\equiv\mathcal{B}_{\underline{t}}(s)$ とおくと，$\{\eta(t)\}\equiv\{\xi(\underline{t}(t)\}$ は $\{m_t\}$-adapted で，その path は右連続かつ左極限を持つ。従って，

$\bar{\eta}(t)\equiv\lim_{n\to\infty}\eta(t-\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\xi(\underline{t}(t-\frac{1}{n}))$

とおくと，$\{\bar{\eta}(t)\}$ は (m_t)-adapted で，その path は左連続かつ右極限を持つ，又

$\bar{\eta}(\sigma)=\lim_{n\to\infty}\eta(\sigma-\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\xi(\underline{t}(\sigma+\frac{1}{n}))$ on Ω^3.

$0<s<u$ に対し

$\zeta(t)\equiv Y_s\cdot\chi(s<t\leqq u)$ （Y_s は m_s-m'ble）とおくと，

$\sigma>0$ のとき

$\zeta(\sigma)=Y_s\cdot\chi(s<\sigma\leqq u)$

$\quad=Y_s\cdot\chi(s<\sigma)-Y_s\cdot\chi(u<\sigma)$

だから，$\zeta(\sigma)\cdot\chi_{\Omega^3}(t,\omega)$ は $\mathcal{F}_t$-m'ble.

従って，$\bar{\eta}(\sigma)\chi_\Omega$

$\bar{\eta}(\sigma)\chi_{\Omega^3}(t,\omega)=\lim_{n\to\infty}\xi(\underline{t}(\sigma-\frac{1}{n},\omega),\omega)\chi_{\Omega^3}(t,\omega)$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

は $\mathcal{F}_t$ - m'ble *)

以上で $\{y(t)\}$ は $(\mathcal{F}_t)$-adapted であることが示された。 Q.E.D.

<u>Remark</u> $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ ($\forall t \geqq 0$) より、τ を $(\mathcal{F}_t)$-stopping time とするとき、

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap (\tau \leqq t) \in \mathcal{F}_t, \forall t \geqq 0\}$$
$$= \{A \in \mathcal{F} : A \cap (\tau < t) \in \mathcal{F}_t, \forall t \geqq 0\}.$$

又、$\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_{t+}$ ($\forall t \geqq 0$) となる。

実際、$A \in \mathcal{B}_{t+} \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{t+\frac{1}{n}} \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\xi^{-1}(t+\frac{1}{n})}$ とすると、$\forall n$ に対し、

$$A \cap (\xi^{-1}(t+\tfrac{1}{n}) < u) \in \mathcal{F}_u \quad (\forall u \geqq 0).$$

従って、$A \in \mathcal{F}_{\xi^{-1}(t)} \equiv \mathcal{B}_t$.

<u>Lemma 2</u> $a(x)$ が有界ならば、任意の確率空間 $(W, \mathcal{B}, Q ; \mathcal{B}_t)$ 上で、任意の $x \in \mathbb{R}^1$ に対し、(3)の初期値 x の minimum relaxed solution $\xi(t, x, w)$ と maximum relaxed solution $\xi(t, x, w)$ が存在し、任意の固定された $t > 0$ に対し、$\xi_i(s, x, w)$ ($s \in [0, t]$ $x \in \mathbb{R}^1$ $w \in W$) は $\mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \otimes \mathcal{B}_t$ - m'ble である。

更に、$a(x)$ が one-sided Lipschitz 条件をみたせば、
$\xi_1(t, x, w) = \xi_2(t, x, w)$ ($\forall t \geqq 0, \forall x \in \mathbb{R}^1, \forall w \in W$) である。

<u>Proof</u> $a(x)$ として有界 Borel 可測な代表元をとっておく。

$$f(t, z) \equiv f(t, z, w) \equiv a(z + \ell(t, w))$$

とおくと、(3) は w を parameter とする常微分方程式

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z)$$

の Cauchy 問題になる。この方程式の minimum 及び maximum relaxed solution の存在は Viktrovskii-Filippov により分っている。その構成法を[10] に従って簡単に述べる。

$T > 0$ を固定して、$[0, T]$ の初期値 z_0 の最大解は以下の様に作られる。

$$M(t) \equiv \operatorname{ess\,sup}_z |f(t, z)| + \gamma \quad (\gamma > 0 : \text{任意に固定})$$
$$E \equiv \{(t, z) : 0 \leqq t \leqq T, \ |z - z_0| \leqq \int_0^t M(s)\,ds\}$$

---

*) 例えば [2], [7] 参照

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$E_t \equiv \{z : (t, z) \in E\}$

$[0, T]$ の1つの分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ に対し．$\tilde{z}_\Delta(t_0) = 0$，$\tilde{z}_\Delta(t)$ が区間 $[t_0, t_{i-1}]$ の上で既に構成されたとするとき，

$$\tilde{z}_\Delta(t) \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{z \in \mathcal{E}_\Delta(t)} f(t, z) \qquad \text{for } t \in (t_{i-1}, t_i]，\text{ 但し}$$

$$\mathcal{E}_\Delta(t) \equiv \left\{ z \in E_t : \left| z - z_0 - \int_0^{t_{i-1}} \tilde{z}_\Delta(s)\,ds \right| \leq \int_{t_{i-1}}^t M(s)\,ds \right\} \quad \text{for } t \in (t_{i-1}, t_i]$$

$$z_\Delta(t) \equiv z_0 + \int_0^t \tilde{z}_\Delta(s)\,ds \quad \text{とおく。}$$

$|\Delta_k| \to 0$ となる分割の列 $\{\Delta_k\}$ に対し，$z_{\Delta_k}(t)$ は，t について一様にある極限 $z(t)$ に収束し（$z(t)$ は $|\Delta_k| \to 0$ となる分割の列 $\{\Delta_k\}$ のとり方に無関係になる），$z(t)$ は

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = f(t, z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

の *maximum relaxed solution* になる。

ここで，部分列を取る必要のないことに注意すれば，$\xi_i(t, x, w)$ の可測性の条件はみたされるのは明らか．

次に，$a(x)$ が *one-sided Lipschitz* 条件（L-1）をみたすときは，常微分方程式の一般論（*cf. Filippov*）より結論が従う。（L-2）をみたすときは，$\ell(t)$ は1次元対称コーシー過程だから[9]の *th* 4.2の証明と同様にやればよい．　　　　Q.E.D

定理の(2°)の証明のため，次の様な確率空間で考えられる．

$W_1 = \{w_1 : w_1$ は $[0, \infty) \to [0, \infty)$ の連続関数$\}$，

$W_1 \ni w_1$ に対し，$w(t) = y(t, w_1)$ とおく。

$\theta_s w_1(t) = w_1(t+s)$ として $\theta_s : W_1 \to W_1$ $(s \geq 0)$

を定義する。

$W_2 = \{w_2 : w_2$ は $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ なる連続関数で $w_2(0) = 0\}$

$W_2 \ni w_2$ に対し，$w_2(t) = B(t, w_2)$ とおく。

$\theta_s w_2(t) = w_2(t+s) - w_2(s)$ として

$\theta_s : W_2 \to W_2$ $(s \geq 0)$ を定義する．

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$\{W_1, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, y(t), P_y^{(1)}, y\in[0,\infty)\}$ を standard 反射壁ブラウン運動とし，

$\{W_2, \mathcal{N}, \mathcal{N}_t, B(t), P_0^{(2)}\}$ は1次元ブラウン運動とする。但し，$\mathcal{N}$ は $\sigma\{B(t) : 0\leqq t<\infty\}$ の $P_0^{(2)}$－completion で，$B_t - B_s \underset{P_0^{(2)}}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{N}_s$ $(t>s)$ かつ $\mathcal{N}_t$ は $\mathcal{N}$ のすべての P－null set を含んでいるとし，$\mathcal{N}_t=\mathcal{N}_{t+}$ となっているものとする。

$\Omega = W_1\times W_2$, $\mathcal{G}_t \equiv \mathcal{M}_t\otimes\mathcal{N}_t$, $\mathcal{F}_t\equiv\mathcal{G}_{t+}$

$\mathcal{F}\equiv\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, $P\equiv P_y\equiv P_y^{(1)}\otimes P_0^{(2)}$,

$\Omega\ni\omega=(w_1,w_2)$ に対し，$\theta_s\omega=(\theta_s w_1, \theta_s w_2)$

として，$\theta_s:\Omega\to\Omega$ を定義する。

$\underline{t}(t)$ は $y(t)$ の $\{0\}$ における local time で perfect additive functional (i.e. $\exists\widetilde{W}_1\in\mathcal{M}\ni\forall y\geqq 0$, $P_y^{(1)}(\widetilde{W}_1)=1$ かつ $\forall w_1\in\widetilde{W}_1$ に対し，

$\underline{t}(t+s, w')=\underline{t}(s,w')+\underline{t}(t,\theta_s w_1)$ for $\forall t, \forall s\geqq 0$) となっているとする。(そうとれることは Blumenthal－Getoor [1] 参照) 又，$\forall w_1\in W_1$ に対し，$\underline{t}(\cdot, w_1)$ は連続かつ non－decreasing としてよい。

$W\equiv\Omega$, $\mathcal{B}_t\equiv\mathcal{F}_{\underline{t}^{-1}(t)}$, $Q\equiv P$, $\ell(t)\equiv B(\underline{t}^{-1}(t))-B(\underline{t}^{-1}(0))$ として，初期値 $x+B(\underline{t}^{-1}(0))$ の (3) の minimum relaxed solution $\xi_1(t)$ と maximum relaxed solution $\xi_2(t)$ から，Lemma 1 (2°) の $y(t)$ を作るとき，$\xi_i(t)$ に対応するものを $X_i(t,x,\omega)$ とかく。$\mathcal{F}_t$ は completion していないが，Lemma 1 (2°) の証明をみれば分る様に，$B\times W_2\in\mathcal{F}_t$, $P_y^{(1)}(B)=0$ $(\forall y\geqq 0)$ ならばよいので，$\{X_i(t,x,\omega)\}$ は $(\mathcal{F}_t)$－adapted かつ (t,x,ω)－可測である。(実は，($\forall t>0$, $X_i(s,x,\omega)$ $(0\leqq s\leqq t$, $x\in\mathbb{R}^1$, $\omega\in\Omega)$ は $\mathcal{B}[0,t]\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)\otimes\mathcal{F}_t$ － m'ble)

<u>Lemma 3</u>　$S\equiv S(\omega)\equiv S(w_1,w_2)$ を $(\mathcal{F}_t)$－stopping time とすると，$\forall x\in\mathbb{R}^1$, $\widetilde{\forall}\omega\in\Omega$ *)，$i=1,2$ に対し

$$X_i(t+S, x, \omega)=X_i(t, X_i(S,x,\omega), \theta_S\omega) \text{ for } \forall t\geqq 0.$$

---

*) $\widetilde{\forall}\omega\in\Omega$ は $\forall y\geqq 0$, P_y－a.s. $\omega\in\Omega$ の意味

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

Proof $\omega=(w_1, w_2)\in \tilde{W}_1\times W_2$ に対し、

$$x_i(t+s,x,\omega)=x+B(t+s,\omega)+\int_0^{\underline{t}(t+s,w_1)}\phi(u)\,du,$$

for some $\phi(u)\underset{a.e.u}{\in} A[x_i(\underline{t}^{-1}(u,w_1),x,\omega)]$

$$=x_i(s,x,\omega)+B(t+s,w_2)-B(s,w_2)$$

$$+\int_{\underline{t}(s,w_1)}^{\underline{t}(t+s,w_1)}\phi(u)\,du$$

$$=x_i(s,x,\omega)+B(t,\theta_s w_2)+\int_{\underline{t}(s,w_1)}^{\underline{t}(t,\theta_s w_1)+\underline{t}(s,w_1)}\phi(u)\,du$$

$$=x_i(s,x,\omega)+B(t,\theta_s w_2)+\int_0^{\underline{t}(t,\theta_s w_1)}\psi(u)\,du,$$

$$\psi(u)\equiv\phi(u+\underline{t}(s,w_1))\underset{a.e.u}{\in}A\,[x_i^{-1}(u+\underline{t}(s,w_1),w_1),x,\omega)]$$

一方，

$$x_i(t,x_i(s,x,\omega),\theta_s\omega)=x_i(s,x,\omega)+B(t,\theta_s w_2)$$

$$+\int_0^{\underline{t}(t,\theta_s w_1)}\phi(u)\,du$$

for some $\phi(u)\underset{a.e.u}{\in}A[x_i(\underline{t}^{-1}(u,\theta_s w_1),x_i(s,x,\omega),\theta_s\omega)]$

ところが

$$x_i(\underline{t}^{-1}(t+\underline{t}(s,w_1),w_1),x,\omega)=\xi_i(t+\underline{t}(s,w_1),x+B(\underline{t}^{-1}(0,w_1),w_2),\omega)$$

$$=x+B(\underline{t}^{-1}(0,w_1),w_2)+\ell(t+\underline{t}(s,w_1),\omega)+\int_0^{t+\underline{t}(s,w_1)}\phi(u)\,du$$

for some $\phi(u)\underset{a.e.u}{\in}A\,[\xi_i(u,x+B(\underline{t}^{-1}(0,w_1),w_2)\,\omega)]$

$$=x+B(s,w_2)+B(\underline{t}^{-1}(t+\underline{t}(s,w_1),w_1),w_2)-B(s,w_2)$$

$$+\int_0^{t+\underline{t}(s,w_1)}\phi(u)\,du$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$= x + B(S, w_2) + \int_0^{\underline{\underline{t}}(S, w_1)} \phi(u)\,du + B(\underline{\underline{t}}^{-1}(t, \theta_S w_1) + S, w_2)$$

$$- B(S, w_2) + \int_{\underline{\underline{t}}(S, w_1)}^{t + \underline{\underline{t}}(S, w_1)} \phi(u)\,du$$

$$= x_i(S, x, \omega) + B(\underline{\underline{t}}^{-1}(t \theta_S w_1)\ \theta_S w_2) + \int_{\underline{\underline{t}}(S, w_1)}^{t + \underline{\underline{t}}(S, w)} \phi(u)\,du$$

$$= x_i(S, x, \omega) + B(\underline{\underline{t}}^{-1}(0, \theta_S w_1), \theta_S w_2) + \ell(t, \theta_S w) + \int_0^t \psi(u)\,du$$

$$\psi(u) = \phi(u + \underline{\underline{t}}(S, w_1)) \underset{a.e.u}{\in} A\ [\xi_i(u + \underline{\underline{t}}(S, w'), x + B(\underline{\underline{t}}^{-1}(0, w), w_2), w)]$$

又，

$$x_i(\underline{\underline{t}}^{-1}(t, \theta_S w_1),\ x_i(S, x, \omega),\ \theta_S \omega)$$

$$= \xi_i(t, x_i(S, x, \omega) + B(\underline{\underline{t}}^{-1}(0, \theta_S w_1), \theta_S w_2), \theta_S \omega)$$

$$= x_i(S, x, \omega) + B(\underline{\underline{t}}^{-1}(0, \theta_S w_1), \theta_S w_2) + \ell(t, \theta_S \omega) + \int_0^t \phi(u)\,du,$$

for some $\phi(u) \underset{a.e.u}{\in} A\ [\xi_i(u, x_i(S, x, \omega) + B(\underline{\underline{t}}^{-1}(0, \theta_S w), \theta_S w_2), \theta_S w)]$

従って

$$x_i(\underline{\underline{t}}^{-1}(t + \underline{\underline{t}}(S, \omega), w_1), x, \omega)$$

$$= \xi_i(t + \underline{\underline{t}}(S, w_1), x + B(\underline{\underline{t}}^{-1}(0, w_1), w_2), \omega)$$

$$= \xi_i(t, x_i(S, x, \omega) + B(\underline{\underline{t}}^{-1}(0, \theta_S w_1), \theta_S w_2), \theta_S w)$$

$$= x_i(\underline{\underline{t}}^{-1}(t, \theta_S w_1), x_i(S, x, \omega), \theta_S \omega)$$

そこで

$y(t) \equiv x_i(t + S, x, \omega)$ とおくと

$$y(\underline{\underline{t}}^{-1}(t, \theta_S w_1)) = x_i(\underline{\underline{t}}^{-1}(t, \theta_S w_1) + S, x, \omega)$$

$$= x_i(\underline{\underline{t}}^{-1}(t + \underline{\underline{t}}(S, w_1), w_1)\ x, \omega)$$

$$= x_i(\underline{\underline{t}}^{-1}(t, \theta_S w_1), x_i(S, x\,\omega), \theta_S \omega)$$

よって，

$$y(t) = x_i(S, x, \omega) + B(t, \theta_S w_2) + \int_0^{\underline{\underline{t}}(t, \theta_S w_1)} \psi(u)\,du$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

for some $\psi(u) \in A[y(\underline{t}^{-1}(u, \theta_S w_1))]$

従って

$$y(t) = x_i(t+S, x, \omega) = x_i(t_i(S, x, \omega), \theta_S \omega) \quad \forall t \geqq 0.$$

Q.E.D.

Lemma 4 (1°) $A \in \mathcal{F}_t$ ならば，$\forall w_1$ に対し，$A w_1 \in \mathcal{N}_t$，$\forall w_2$ に対し，$A w_2 \in \mathcal{M}_t$ *)

(2°) $S = S(w_1, w_2)$ を $(\mathcal{F}_t)$ - stopping time とする．

(i) $\forall w_1$ に対し，$S w_1 \equiv S(w_1, \cdot)$ は $(\mathcal{N}_t)$ - stopping time，$\forall w_2$ に対し，$S w_2 \equiv S(\cdot, w_2)$ は $(\mathcal{M}_t)$ - stopping time，

(ii) $A \in \mathcal{F}_S$ ならば，$\forall w_1$ に対し，$A w_1 \in \mathcal{N}_{S w_1}$，$\forall w_2$ に対し，$A w_2 \in \mathcal{M}_{S_{w_2}}$

(iii) $F(w_1)$ を $\mathcal{M}$ - m'ble とすると，$F(\theta_{S(w_1, w_2)} W_1)$ は，$\bar{\mathcal{F}} \equiv \bigcap_{y \geq 0} [\mathcal{F}$ の P_y - completion - m'ble かつ $\forall y \geqq 0$，$P_y^{(1)}$ - a.s. w' に対し，$F(\theta_{S(w_1, w_2)} W_1)$ は，w_2 について $\mathcal{N}_{S w_1}$ - m'ble．

(iv) $G(w_2)$ を $\mathcal{N}$ - m'ble とすると，$G(\theta_{S(w_1, w_2)} W_2)$ は，$\bar{\mathcal{F}}$ - m'ble かつ，各 w_1 に対し，

$$G(\theta_{S(w_1, w_2)} W_2) \underset{P_0^{(2)}}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{N}_{S w_1},$$

$$E_0^{(2)}[G(\theta_{S(w_1, w_2)} W_2 \mid \mathcal{N}_{S w_1}] = E_0^{(2)}[G(w_2)] \quad (P_0^{(2)}\text{-a.s})$$

Proof 証明は殆んど明らかだから省略する。

Lemma 5 $S = S(\omega) = S(w_1, w_2)$ を $(\mathcal{F}_t)$ - stopping time とし，$K(\omega; \hat{\omega})$ を有界かつ $\mathcal{F}_S \otimes \mathcal{F}$ - m'ble，$H(\omega = H(w_1, w_2)$ を有界，$\mathcal{F}_S$ - m'ble とするとき $\forall y \geqq 0$ に対し

$$E_y[K(\omega : \theta_S \omega) H(\omega)] = E_y[H(\omega) E_{y(S(\omega), \omega)}[K(\omega; \tilde{\omega})]]^{**)}$$

Proof $K(\omega, \tilde{\omega}) = f(\omega) g(\tilde{\omega})$，$f(\omega) = f(w_1, w_2)$ は有界，$\mathcal{F}_S$ - m'ble で，$g(\omega) = g(w_1, w_2) = F(w_1)\ G(w_2)$，$F(w_1)$ は有界，$\mathcal{M}$ - m'ble，$G(w_2)$ は有界，$\mathcal{N}$ - m'ble のとき

*) $A w_1 = \{w_2 \in W_2 : (w_1, w_2) \in A\}$，$A w_2$ も同様に定義する．

**) $y(t, \omega) \equiv y(t, w_1)$

(68)

$$E_y[K(w;\theta_S w)H(w)] = E_y^{(1)} \otimes E_0^{(2)}[K(w;\theta_S w)H(w)]$$

$$= \int_{W_1} P_y^{(1)}(dw_1) \int_{W_2} P_0^{(2)}(dw_2) K(w_1, w_2; \theta_S w_1, \theta_S w_2) H(w_1, w_2)$$

$$= \int_W P_y^{(1)}(dw_1) \int_W P_0^{(2)}(dw_2) H(w_1, w_2) f(w_1, w_2) F(\theta_S w_1) G(\theta_S w_2)$$

$$= \int_{W_1} P_y^{(1)}(dw_1) \int_{W_2} P_0^{(2)}(dw_2) H(w_1, w_2) f(w_1, w_2) F(\theta_S w_1) \int_{W_2} P_0^{(2)}(d\tilde{w}_2) G(\tilde{w}_2)$$

(by Lemma 4 (2°) (iv))

$$= \int_{W_2} P_0^{(2)}(dw_2) \int_{W_1} P_y^{(1)}(dw_1) H(w_1, w_2) f(w_1, w_2) F\theta_S w_1) \int_{W_2} P_0^{(2)}(d\tilde{w}_2) G(\tilde{w}_2)$$

$$= \int_{W_2} P_0^{(2)}(dw_2) \int_{W_1} P_y^{(1)}(dw_1) H(w_1, w_2) f(w_1, w_2) \int_{W_1} P_{y(S(w_1,w_2),w_1)}^{(1)}(d\tilde{w}) F(\tilde{w}_1) \int_{W_2} P_0^{(3)}(d\tilde{w}_2) G(\tilde{w}_2)$$

($y(t)$の強マルコフ性による)

$$= \int_{W_1} P_y^{(1)}(dw_1) \int_{W_2} P_0^{(2)}(dw_2) H(w_1, w_2) \int_{W_1} P_{y(S(w_1,w_2),w_1)}^{(1)}(d\tilde{w}_1) \int_{W_2} P_0^{(2)}(d\tilde{w}_2) K(w_1, w_2; \tilde{w}, \tilde{w}_2)$$

$$= E_y^{(1)} \otimes E_0^{(2)}[H(w) E_{y(S(w),w)}^{(1)} \otimes E_0^{(2)}[K(w)\tilde{w})]$$

$$= E_y[H(w) E_{y(S(w,w)}[K(w;\tilde{w})]].$$

一般の$K = K(w;\tilde{w})$に対して成立することは通常の論法である.

Q.E.D

<u>定理1の証明</u>　(1°), (3°)の性質はLemma 1, Lemma 2より容易に分る。(2°)の証明を次下で行う。$f(x, y)$を$\bar{D}$上の有界Borel-m'bleな関数とする。$\{(x_i(t, x, w), y(t, w))\}$は$(\mathcal{F}_t)$-adaptedだから, 任意のfinite $(\mathcal{F}_t)$-stopping time $S = S(w) = S(w_1, w_2)$に対し, Lemma 3, Lemma 5より

$$E_y^{(1)} \otimes E_0^{(2)} [f(x_i(t+s,x,\omega), \ y(t+s,\omega)) \mid \mathcal{F}_s]$$
$$= E^{(1)}_{y(s(\omega),\omega)} \otimes E_0^{(2)} [f(x_i(t,\alpha,\tilde{\omega}), y(t,\tilde{\omega}))] \mid_{\alpha = x_i(s,x,\omega)} (a.s)$$

となることから，強マルコフ性が従い，(2°) が示された。

Remark　定理1の (2°) は，$\mathcal{F}_t$ を $\overline{\mathcal{F}}_t$（$\mathcal{F}_t$ の completion）で置き換えても成立する。(cf. Dynkin [4])

極限定理にもふれる予定であったが，別の機会にゆずる。

文　　献

[1] R.M. Blumential, R.K. Getoor: Markov Processes and Potential Theory. (1968) Academic Press.

[2] K.L. Chung, J.L. Doob: Fields, optionality and measurability. Amer Jour of Math. 87(1965) 397-424.

[3] E.D. Conway: Stochastic equations with discontinuous dirift I, II. I: Trans. Amer. Math. Soc. 157 (1971) 235-245
II: Iindiana Math. Jour. 22 (1972) 91-99

[4] E.B. Dynkin: Markov Processes (1965) Springer.

[5] A.F. Filippov: Differential equations with discontinuous right-hand side, Mat. Sb. 51(93) (1960) 99-168; English transl. Amer. Math. Soc. Transl. (2) 42 (1964) 199-231

[6] N. Ikeda: On the construction of two dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary Conditions and its application to boundary value problems, Mem. Coll. Sci. Kyoto Ser A 33 (1961) 367-427

[7] P.A. Meyer: Guide détaillé de la théorie "générale" des processus. Seminaire de

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

Probabilités II Lecture notes in Math. 51 (1968) 140 – 165 (Springer)

[8] M. Motoo : Brownian motions in the halfplana with singular inclined periodic boundary conditions, Topics in Probability Theory, ed. Stroock - Varadhan. New York Univ. (1973) 163 – 179

[9] H. Tanaka, M. Tsuchiya, S. Watanabe : Perturbation of drift-type for Lévy processes, Jour. Math. Kyoto Univ. 14 (1974) 73 – 92.

[10] E.E. Viktrovskii : On a generalization of the concept of integral curves for a discontinuous field of directions. Mat. Sb. 34 (76) (1954) 213 – 248 (Russian)

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

jumpのある1次元確率微分方程式の解のpathwise uniquenessについて

清 水 昭 信

§1 preliminaries

1次元確率微分方程式

$$(1)\quad x_t(\omega) = x_0(\omega) + \int_0^t b(s, x_s(\omega))ds + \int_0^t \sigma(s, x_s(\omega))dB_s + \int_0^t\int_{|u|\le 1} f(s, x_{s-}(\omega), u)\, q(ds, du) + \int_0^t\int_{|u|>1} f(s, x_{s-}(\omega), u)\, p(ds, du)$$

の解の pathwise uniqueness について調べる。

はじめに、解の定義、pathwise uniquenessの定義をしよう。

定義1 次の条件をみたす組 $[(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t), \{B_t\}, \{p(ds, du)\}, \{x_t(\omega)\}]$

を 方程式(1)の解という。

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は、a probability space であり、$\mathcal{F}_t$ は increasing σ-field, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+0}$ かつ $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ である。

(ii) $\{B_t\}$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に $\mathcal{F}_t$-Brownian motion である。

(iii) $p(ds, du)$ は $(0, \infty)\times R^1$ 上の Poisson random measure であり

$E[p(\Delta, A)] = |\Delta|\cdot \Pi(A)$

$\left[\ |\cdot|\ \text{は Lebesgue measure}, \Pi \text{ は} \int_{|x|\le 1} |x|^2\, \Pi(dx) < +\infty, \int_{|x|\ge 1} \Pi(dx) < +\infty \text{ をみたす } R^1 \text{ 上の measure}\ \right]$

が、成りたち、かつ

$p((0, t], A)$ は $\mathcal{F}_t$-可測、$p((t, t+h], A)$ は $\mathcal{F}_t$ と独立である

(iv) $\{B_t\}$ と $\{p((0, t], A)\}$ は、independent process である。

(V) $x_t(\cdot)$ は、$\mathcal{F}_t$-可測、であり、$x_\cdot(\omega)$ は右連続、左極限をもつ、

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

(vi) $q(\Delta, A) = p(\Delta, A) - |\Delta|\,\pi(A)$ によって $q(ds, du)$ を定義すると $\{x_t(w)\}$, $\{B_t\}$, $\{q(ds, du)\}$ $\{p(ds, du)\}$ は、方程式(1)をみたす。

<u>定義2</u> 方程式(1)の任意の2つの解 $[(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t), \{B_t\}, \{p(ds, du)\}, \{x_t(w)\}]$, $[(\Omega', \mathcal{F}', P', \mathcal{F}_t'), \{B'_t\}\ \{p'(ds, du)\}, \{x'_t(w)\}]$ に対して、$(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t) = (\Omega', \mathcal{F}', P', \mathcal{F}_t')$ $\{B_t\} = \{B_t'\}$, $\{p(ds, du)\} = \{p'(ds, du)\}$, $P[x_0(w) = x'_0(w)] = 1$ ならば、$P[x_t(w) = x'_t(w),\ \textit{for any}\ t \geq 0] = 1$ が、成りたつとき、方程式(1)の解は、*pathwise unique* であるという。

方程式(1)の解の存在については *Skorokhod* [4] により、次の事実がよく知られている。

<u>*Proposition* 1</u> (*Skorokhod*) 次の条件がみたされるとしよう。

1、$\sigma(t, x)$, $b(t, x)$ は、$(t, x) \in R^1 \times [0, T]$ (但し、T は有限の正数)について連続である。

2、任意の $(t_1, x_1) \in R^1 \times [0, T]$ に対して

$$\lim_{\substack{t \to t_1 \\ x \to x_1}} \int_{|u| \leq 1} |f(t, x, u) - f(t_1, x_1, u)|^2 \frac{du}{|u|^2} = 0$$

3 次の式をみたす、定数 K が存在する.

$$|\sigma(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 + \int_{|u| \leq 1} |f(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^2} \leq K(1 + |x|^2)$$

4 $f(t, x, u)$ は、(t, x, u) について連続である。

このとき、方程式(1)の解は、存在する。(但し、定義1において、$\pi(A) = C\int_A \frac{du}{|u|^2}$ とする)

これからの解の *pathwise uniqueness* に関する議論では、確率微分方程式(1)の係数に関して、次の仮定をおく。

<u>仮定</u> (i) $\sigma(t, x)$, $b(t, x)$ は、*bounded Borel measurable* である

(ii) $f(t, x, u)$ は、(t, x, u) − *Borel measurable* で、任意の *compact set* の上で、有界であり、かつ

$$\sup_{\substack{t \in [0, T] \\ |x| \leq r}} \int_{|u| \leq 1} |f(t, x, u)|^2\, \pi(du) < +\infty \quad \textit{for any}\ T < \infty \text{ and } r > 0$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

§2 Main theorem

定義3. 十分なめらかな関数 $V(t,x,y)$, $(t,x,y)\in[0,T]\times R^1\times R^1$ (但し、Tは、有限の正数又は$+\infty$)に対して

(2) $\hat{L}V(t,x,y)\equiv V_t+\frac{1}{2}[\sigma(t,x)^2V_{xx}+2\sigma(t,x)\sigma(t,y)V_{xy}+\sigma(t,y)^2V_{yy}]+b(t,x)V_x+b(t,y)V_y$
$+\int_{|u|\le 1}[V(t,x+f(t,x,u),y+f(t,y,u))-V(t,x,y)-V_x f(t,x,u)-V_y f(t,y,u)]\pi(du)$

とおく。

(1)の解 $[(\Omega,\mathcal{F},P,\mathcal{F}_t),\{B_t\},\{p(dt,du)\},\{x_t\}]$, $[(\Omega,\mathcal{F},P,\mathcal{F}_t),\{B_t\},\{p(dt,du)\},\{y_t\}]$ が、与えられたしよう。

定義4 $r>0$として、$\tau_r(w)=\inf[\{t\,;\,|x_t(w)|\vee|y_t(w)|>r\}\cup\{T\}]$ とする。又、the process $p(dt,du\,w)$が、$|u|\ge 1$の第i番目のjumpをするMarkov timeを、$\tau_i(w)$とする。

Theorem 1 次の条件をみたす関数の列 $V^n(t,x,y)$ が存在するとしよう。

(i) V^n $[0,T]\times R^1\times R^1\to[0,\infty]$
かつ、$V^n(t,x,x)=0$ for any $t\in[0,T]$ and $x\in R^1$.

(ii) V^n はtについて1回, (x,y)について、2回連続的微分可能であり

$$\lim_{n\to\infty}E\left[\int_0^{t\wedge\tau_r\wedge\tau_i}\hat{L}V^n(s,x_s(w),y_s(w))ds\right]\le 0$$

が、任意の$t\in[0,T]$, $r>0$ に対して成りたつ

(iii) $V^n(t,x,y)$は、$n\to\infty$とすると、ある関数$V(t,x,y)$に各点収束し、「$V(t,x,y)=0$ for some $t\in[0,T]$ ならば $x=y$」が、成りたつ、

$\Rightarrow$ このとき「$P[x_0(w)=y_0(w)]=1$ ならば、$P[x_t(w)=y_t(w)$, for any $t\in[0,T]]=1$ が成りたつ。

(証明)、一般化された Ito の公式(Kunita-Watanabe[2])により、

(3) $V^n(t,x_t,y_t)-V^n(0,x_0,y_0)$

$$= \int_0^t (V_x^r + V_y^r)\, dB_s + \int_0^t \int_{|u|\leq 1} \{V^r(s, x_s + f(x, x_s, u), y_s + f(s, y_s, u))$$
$$- V^r(s, x_s, y_s)\}\, \tilde{g}(ds, du) + \int_0^t \hat{L} V^r(s, x_s, y_s)\, ds$$
$$+ \sum_{\tau_i \leq t} \Big(V^r(\tau_i, x_{\tau_i -} + f(\tau_i, x_{\tau_i -}, u_i), y_{\tau_i -} + f_2(\tau_i, y_{\tau_i -}, u_i))$$
$$- V^r(\tau_i, x_{\tau_i -}, y_{\tau_i -}) \Big)$$

である。ここで u_i は 時刻 τ_i における *the process* $p(dt, du, \omega)$ の *jump* の大きさである。

$$\therefore\ E[V^n(t\wedge\tau_r\wedge\tau_1,\ x_{t\wedge\tau_r\wedge\tau_1 -},\ y_{t\wedge\tau_r\wedge\tau_1 -})] = \int_0^{t\wedge\tau_r\wedge\tau_1} \hat{L} V^n (s, x_s, y_s)\, ds$$

定理の条件 (ii), (iii) により

$$E[V(t\wedge\tau_r\wedge\tau_1,\ x_{t\wedge\tau_r\wedge\tau_1 -},\ y_{t\wedge\tau_r\wedge\tau_1 -})] \leqq 0$$

定理の条件 (i) (iii) により、

$$P[x_{t\wedge\tau_r\wedge\tau_1 -} = y_{t\wedge\tau_r\wedge\tau_1 -}] = 1$$

$\therefore\ P[x_t = y_t \quad \text{for any} \quad t < \tau_r \wedge \tau_1] = 1$

$r \to \infty$ のとき $\tau_r \to T$ となるから

$$P[x_t = y_t \quad \text{for any} \quad t < \tau_1 \wedge T] = 1$$

$x_{\tau_1 -} = y_{\tau_1 -}$ となって、(3)式の $\sum_{\tau_i \leq t}$ の項の中から $i = 1$ を消すことが出来る。

こうして、

$$E[V^r(t\wedge\tau_r\wedge\tau_2, x_{t\wedge\tau_r\wedge\tau_2 -}, y_{t\wedge\tau_r\wedge\tau_2 -})] = E\int_0^{t\wedge\tau_r\wedge\tau_2} \hat{L} V(s, x_s, y_s)\, ds$$

を得る。前と同様の議論により、

$P[x_t = y_t,\ \text{for any}\ t < \tau_2 \wedge T] = 1$

を得る。こうして、$\tau_2 \leqq T$ のとき、$x_{\tau_2 -} = y_{\tau_2 -}$ を得る。

同様の議論をくりかえして

$P[x_t(\omega) = y_t(\omega),\ \text{for any}\ t < \tau_i \wedge T] = 1$ が任意の i に対して成りたつ。

$i \to +\infty$ とすれば $\tau_i \to \infty$ となるから

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$P[\ x_t(\omega) = y_t(\omega) \ ;\ \text{for any } t \in [0, T]\ ] = 1$$

を得る。

証明終り。

jump のない 1次元確率微分方程式

(4) $x_t(\omega) = x_0(\omega) + \int_0^t b(s, x_s(\omega))ds + \int_0^t \sigma(s, x_s(\omega))dB_s$

の解の Pathwise uniqueness に関する結果を次に紹介しておく。Okabe－Shimizu [3] の多次元の確率微分方程式の Pathwise uniqueness についての結果を1次元の場合にかけば、次のようになる。

(5) $\dot{L}_0 V(t, x, y) \equiv V_t + \frac{1}{2}[\sigma(t,x)^2 V_{xx} + 2\sigma(t,x)\sigma(t,y)V_{xy} + \sigma(t,y)^2 V_{yy}] + b(t,x)V_x + b(t,y)V_y$

とおく

方程式 (4) の2つの解 $[(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t), \{B_t\}, \{x_t(\omega)\}]$, $[(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t), \{B_t\}, \{y_t(\omega)\}]$ が与えられたする。MarKov time τ_r は 定義4と同様に定義する。

このとき、次の Proposition を得る。T は有限の正数又は $+\infty$ とする。

Proposition 2 (OKabe－Shimizu) 次の条件をみたす関数の列 $V^n(t, x, y)$ が存在するとしよう。

(i) $V^n : [0, T] \times R^1 \times R^1 \longrightarrow [0, \infty]$

かつ、$V^n(t, x, x) = 0$ for any $t \in [0, T]$ and $x \in R^1$

(ii) V^n は、t について1回, (x, y) について2回連続的微分可能であり、

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ E\left[\int_0^{t\wedge\tau_r} \dot{L}_0 V^n(s, x_s(\omega), y_s(\omega))ds\right] \leq 0$$

が、任意の $t \in [0, T]$, $r > 0$ に対して成りたつ。

(iii) $V^n(t, x, y)$ は $n \to \infty$ とすると、ある関数 $V(t, x, y)$ に各点収束し、「$V(t, x, y) = 0$ for some $t \in [0, T]$ ならば、$x = y$」が成りたつ。

$\Rightarrow$ このとき「$P[x_0(\omega) = y_0(\omega)] = 1$ ならば、$P[x_t(\omega) = y_t(\omega),\ \text{for any } t \in [0, T]] = 1$」が成りたつ。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

§3 Some application

Theorem 2

$g(x,y)=(x-y)^2$ とする。任意の正数T，に対して

$$\hat{L}_0\, g(x,y) \leqq K_T\,(x-y)^2$$

$$\int_{|u|\leq 1} |f(t,x,u)-f(t,y,u)|^2\, \pi(du) \leqq K_T(x-y)^2$$

が、$\forall(t,x,y)\in[0,T]\times R^1\times R^1$ に対して、成りたつとする。

$\Rightarrow$ このとき、確率微分方程式(1)の解は Pathwise unique である。

(証明) $V^n(t,x,y)=V(t,x,y)=e^{-2K_{T,r}t}\,(x-y)^2$

とおけば Theorem 1の条件が成りたつ.

Theorem 3 $g_n(\xi)$は、C^2級の関数の列で、$0\leqq g_n(\xi)\uparrow|\xi|$，$(n\to\infty)$，$|g_n'(\xi)|\leqq 1$，$\sup_{\xi}|g_n''(\xi)|=n$，$g_n''(\xi)=0$ if $|\xi|\geqq\frac{1}{n}$，をみたすものとする。

$h_n(x,y)=g_n(x-y)$ とおけば

$$\hat{L}_0\, h_n(x,y)\leqq C_T|x-y|+d_{T,r}\quad (C_{T,r},\ d_{T,r}\text{は定数})$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \hat{L}_0\, h_r(x,y)\leqq C_T|x-y|$$

が、$\forall(t,x,y)\in[0,T]\times R^1\times R^1$ に対して成りたち

(6) $|f(t,x,u)-f(t,y,u)|\leqq C\,|x-y|\qquad 0<C<1$，

for any $t\in(0,T)$，$(x,y)\in R^1\times R^1$

and $|u|\leq 1$，

(7) $\int_{|u|\leq 1}|f(t,x,u)-f(t,y,u)|^2\,\pi(du)\leqq K_T\,|x-y|^2$

for any $t\in[0,T]$，$(x,y)\in R^1\times R^1$

$\Longrightarrow$ このとき 確率微分方程式(1)の解は、pathwise uniqueである。

(証明) (2)式で定義したoperatorを$\hat{L}$，(5)式て定義したoperatorが$\hat{L}_0$であるが、$\hat{L}_1$を

(8) $\hat{L}_1=\hat{L}-\hat{L}_0$

で、定義する。

$V^n(t,x,y)=e^{-kt}\,h_n(x,y)$ とおく

ここで $k>C_T+K_T$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$\hat{L}_0 V^n(t,x,y)$ は、(t,x,y)を compact set に限定すれば、一様有界であり、かつ

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \hat{L}_0 V^n(t,x,y) \leqq 0$ となる。

従って

(9) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ E\left[\int_0^{t\wedge\tau_r\wedge\tau_\varepsilon} \hat{L}_0 V^n(t,x_s,y_s)\,ds\right] \leqq 0$

である。

$$\hat{L}_1 V^n(t,x,y) = e^{-kt}\int_{|u|\leq 1}\left[g_n(x-y+f(t,x,u)-f(t,y,u))\right.$$
$$\left.-\,g_n(x-y)-g_n'(x-y)(f(t,x,u)-f(t,y,u))\right]\pi(du)$$
$$= e^{-kt}\int_{|u|\leq 1}\frac{1}{2}g_n''\left(x-y+\theta(f(t,x,u)-f(t,y,u))\right)(f(t,x,u)-f(t,y,u))^2\,\pi(du)$$

である。

もし $0 \leqq |x-y| \leqq \frac{1}{1-c}\,\frac{1}{n}$ ならば

$$\hat{L}_1 V^n(t,x,y) \leqq e^{-kt}\,\frac{1}{2}\sup_{\xi}|g_n''(\xi)|\int_{|u|\leq 1}(f(t,x,u)-f(t,y,u))^2\,\pi(du)$$
$$\leqq \frac{1}{2}e^{-kt}\cdot n\cdot K_T\cdot|x-y|^2 \leqq \frac{1}{2}e^{-kt}\cdot\frac{1}{n}K_T\cdot\frac{1}{(1-c)^2}$$

もし、$|x-y| > \frac{1}{1-c}\cdot\frac{1}{n}$

$|x-y+\theta(f(t,x,u)-f(t,y,u))| > \frac{1}{n}$ となる。

実際、$x-y>0$ とすると (6)式により

$$x-y+\theta(f(t,x,u)-f(t,y,u)) \geq x-y-C\cdot\theta\,|x_1-x_2|$$
$$\geqq x-y-C\,|x-y| = (1-C)\,|x-y| > \frac{1}{n}$$

$x-y<0$ のときも同様にして

$$x-y+\theta(f(t,x,u)-f(t,y,u)) < -\frac{1}{n}$$

を得る。

従って $|x-y| > \frac{1}{1-c}\cdot\frac{1}{n}$ ならば $\hat{L}_1 V^n(t,x,y) = 0$

$$\therefore\ E\left[\int_0^{t\wedge\tau_r\wedge\tau_\varepsilon}\hat{L}_1 V^n(s,x_s,y_s)\,ds\right]$$
$$= E\left[\int_0^{t\wedge\tau_r\wedge\tau_\varepsilon}\hat{L}_1 V^n(s,x_s,y_s)\,\chi_{[0\leqq|x_s(\omega)-y_s(\omega)|\leqq\frac{1}{1-c}\cdot\frac{1}{n}]}\,ds\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$\leqq \frac{1}{2}\frac{1}{n} K_T \cdot \frac{1}{(1-c)^2} E\left[\int_0^{t\wedge\tau_r\wedge\tau_i} e^{-ks}\chi_{[0\leqq|x_s(\omega)-y_s(\omega)|\leqq\frac{1}{1-c}\cdot\frac{1}{n}]} ds\right]$$

$\therefore$

(10) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} E\left[\int_0^{t\wedge\tau_r\wedge\tau_i} \hat{L}_1 V^n(s, x_s, y_s)\, ds\right] \leqq 0$$

(9) と(10) により

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E\left[\int_0^{t\wedge\tau_r\wedge\tau_i} \hat{L} V^n(s, x_s, y_s)\, ds\right] \leqq 0$$

を得る。従って、$V^n(t, x, y)$ は、*Theorem* 1 の条件をみたすことが分った。

証明終り

Corollary

任意の正数 T に対して

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leqq K_T|x-y|^{\frac{1}{2}}$$
$$|b(t,x)-b(t,y)| \leqq K_T|x-y|$$
$$|c(t,x)-c(t,y)| \leqq K_T|x-y|$$

が $^\forall(t,x,y)\in[0,T]\times R^1\times R^1$ に対して成りたち、

$$f(t,x,u) = c(t,x)\cdot u$$

とする。

このとき、(1)の解は *pathwise unique* である。

(証明) *Theorem* 3 の条件、(6) の *check* のみが問題である。

$$|f(t,x,u)-f(t,y,u)| \leqq K_T|u|\cdot|x-y| \leqq \frac{1}{2}|x-y|$$

が $^\forall(t,x,y)\in[0,T]\times R^1\times R^1$ と $^\forall u\in[-\frac{1}{2K},\frac{1}{2K}]$ に対して成りたつ。

(1) において、$\int_0^t\int_{|u|\leq 1} f\, q(ds,du)+\int_0^t\int_{|u|>1} f\, p(ds,du)$ を

$$\int_0^t\int_{|u|\leq\frac{1}{2K}} f\cdot q(ds,du)+\int_0^t\int_{|u|>\frac{1}{2K}} f\, p(ds,du)-\int_0^t c(s,x)\int_{1\geq|u|\geq\frac{1}{2K}} u\,\pi(du)ds$$

でおきかえればよい。

Remark *Theorem* 3 の証明をみれば、次の場合にも、(1)の解の *pathwise uniqueness* が成りたっていることが分る。

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leqq K_T|x-y|^{\frac{1}{2}}$$
$$|b(t,x)-b(t,y)| \leqq K_T|x-y|$$
$$|c(t,x)-c(t,y)| \leqq K_T|x-y|^{\frac{1}{2}}$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

かつ. $C(t,x) - C(t,y) \geq 0$ if $x \geq y$
for $\forall (t,x,y) \in [0,T] \times R^1 \times R^1$

$$f(t,x,u) = C(t,x) \cdot |u|$$

References

[1] G. L. Kulinič, On the existence and uniqueness of solutions of a stochastic differential equation with martingale differential, Theory Prob. and its appl. 1974.

[2] H. Kunita and S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. Jour. 30(1967), 209-245

[3] Y. Okabe and A. Shimizu, On the pathwise uniqueness of solutions of stochastic differential equation, to appear.

[4] A.V. Skorokhod, Studies in the theory of random process, Kiev, 1961.

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

Controlled Galton-Watson Process と φ-Branching Process

金沢大学　藤曲哲郎

§0 序

ある家系の男子の数を世代ごとに追って行くとそれが途絶えることがしばしばあり、その確率を計算するという問題から始った。**Galton-Watson** *process* $\{Z_n\}$（以下GWPと略記する。なお*Seneta*によれば*Galton*より28年程前に同様の問題を**Bienaymé**が考察していたとのことであるが、ここでは従来通り単に**Galton-Watson process**と呼ぶことにする）は次の様に定義することができる。独立同分布非負整数値の確率変数 $\xi_j(n)$，$j=1,2,\cdots$，$n=0,1,2\cdots$ が与えられたとき、

$$\begin{cases} Z_0 = r \\ Z_n = k \text{ のとき } Z_{n+1} = \sum_{j=0}^{k} \xi_j(n),\ n \geq 0 \end{cases}$$

として逐次定義される。ただしここで $\xi_0(n)=0$，$n\geq 0$ とする。明かにGWP $\{Z_n\}$ は $N_+=\{0,1,2\cdots\}$ 上の*Markov chain* である。また $F(s)=\sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi_j(n)=k\}s^k$ は１つの個体から生れる子供の数の母関数を表わす。

GWPは始めのモデルとは別に宇宙線によって大気中で発生する各種のカスケードの研究、原子炉内部の中性子の個数の増減に関する問題、ある種の生物の集団でその個体数の変動に関する問題、及び岩石を繰り返し粉砕するときの粒子の質量分布に関する問題等、物理学、化学、生物学、及び工学にもそのモデルが見い出され、問題によっては修正された形（一般には**branching process**という。**age-dependent branching process, branching process with immigration, branching process with energy** 等）で非常に多くの研究がなされてきた。既に*Harris*〔6〕、*Sevastyanov*〔10〕，*Mode*〔9〕，及び*Athreya-Ney*〔2〕のような成書も出版されている。また，*Markov* 過程論の立場からもその基礎的な研究がなされている（*Skorohod*〔13〕，*Ikeda-Nagasawa*

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

— Watanabe〔7〕等）。これらの文献では各個体の行動及び分裂に関する独立性の条件が基本的な仮定になっている。ところが例えばある生物の集団を考えてみると、そこでは各個体は必ずしも他の個体と独立ではあり得ず、したがって相互に作用を及ぼし合いながら行動すると考えた方がより現実的なものになる。すなわち各個体の間に相互作用があるような branching process が問題になる。しかしながらこの問題については Sevastyanov が彼の本〔10〕の序文でも述べているように、一般的でしかも有効な研究手段というようなものは未だ知られていないように思われる。個別には Smith — Wilkinson〔14〕, Athreya — Karlin〔1〕等の branching process in random environments の研究、Daley〔3〕の bisexual Galton — Watson process の消滅条件、Foster〔4〕の branching process with state-dependent immigration の研究等の他、Labkovskii〔8〕, Fujimagari〔5〕等の controlled Galton — Watson process の研究などがある。また最近の Sevastyanov〔11〕, Sevastyanov — Zubkov〔12〕、及び Zubkov〔15〕による φ — branching process はその定式化において上のモデルの多くを含み、特に Zubkov〔15〕の結果から Controlled Galton — Watson process の漸近的な性質がかなり明かになった。そこでここでは Controlled Galton — Watson process について Fujimagari〔5〕, Zubkov〔15〕によって明かになった漸近的性質のいくつかの結果（定理6は除く）について述べる。

Controlled Galton process $\{Z_n\}$（以下CGWPと略記する）は次のように定義することができる。独立な非負整数値確率変数 $\xi_{ij}(n)$, $i=0,1,2,\cdots$, $j=1,2,\cdots$, $n=0,1,2,\cdots$ が与えられ、これらは j 及び n については同じ分布に従い、その母関数を

$$F_i(s)=\sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi_{ij}(n)=k\}s^k, \quad i=0,1,2,\cdots$$

とする。このとき

$$\begin{cases} Z_0 = \nu \in N_b, \\ Z_n = k \text{ のとき}, \ Z_{n+1}=\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \xi_{kj}(n), \quad n=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

として逐次定義される。ここで $\xi_{k0}(n)=0$ とする。さらに上の第2式は

$$\varphi_i(k) = k\delta_{ik}, \quad i,k=0,1,2\ \cdots$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

とおくと次の様にも書ける；

$$Z_{n+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\varphi_i(k)} \xi_{ij}(n).$$

明かに $\{Z_n\}$ は N_+ 上の Markov chain であり、次に定義する Sevastyanov − Zubkov [12] の φ − branching process にもなっている。

φ − controllable branching process $\{Z_n\}$（以下 φ − branching process, φ − BP と略記する）は次のように定義される。独立で $N_+^d = \{k=(k_1, \cdots, k_d) \mid k_1, \cdots, k_d \in N_+\}$ $(d \geq 1)$ に値をとる d 次元確率ベクトル $\xi_{ij}(n)$, $i=0, 1, 2, \cdots$, $j=1, 2, \cdots$, $n=0, 1, 2, \cdots$ が与えられ、$\xi_{ij}(n)$ は j 及び n については同じ分布に従い、その母関数を

$$F_i(s_1, \cdots, s_d) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_d=0}^{\infty} P\{\xi_{ij}(n) = (k_1, \cdots k_d)\} s_1^{k_1} \cdots s_d^{k_d}$$

とする。さらに N_+^d 上の非負整数値関数 $\varphi_i(k)$, $i=0, 1, 2 \cdots\cdots$, $k=(k_1, \cdots k_d)$ が与えられたとき、Z_n は

$$\begin{cases} Z_0 = r \in N_+^d \\ Z_n = k \text{ のとき}, \ Z_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\varphi_i(k)} \xi_{ij}(n), \quad n=0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

として逐次定義される。ここで $\xi_{i0}(n) = 0 = (0, \cdots, 0)$ とする。明かに $\{Z_n\}$ は N_+^d 上の Markov chain であり、特に $\varphi_i(0)=0$, $i=0, 1, 2 \cdots$ のときは state $k=0$ は trap になる。

GWP やCGWPが φ − BP であることは既に明かであるが、その他に次のような例がある。

<u>例1</u>　$d=1$, $\varphi_0(k)=1$, $\varphi_1(k)=k$, $\varphi_i(k)=0$ $(i \geq 2)$ のとき、φ − BP は $F_1(s)$, $F_0(s)$ をそれぞれ子供の数の分布 immigration の母関数とする通常の GWP with immigration となる。

<u>例2</u>　$d=1$, $\varphi_0(k)=\min\{k, 1\}$, $\varphi_1(k)=k$, $\varphi_i(k)=0$ $(i \geq 2)$ のとき、φ − BP は例1の process を $k=0$ で stop したものとなる。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

例3 $d=1$, $\varphi_0(k)=\max\{1-k, 0\}$, $\varphi_1(k)=k$, $\varphi_i(k)=0$ $(i\geq 2)$のとき, φ－BPは$k=0$のときだけ immigration のある process となる(Foster [4]

例4 $d>1$, $k=(k_1,\cdots,k_d)$のとき, $\varphi_i(k)=k_i$ $(1\leq i\leq d)$ $\varphi_0(k)=\varphi_i(k)=0$ $(i>d)$のとき. φ－BPは通常の multitype GWPとなる。

例5 例4で$\varphi_0(k)$を$\varphi_0(k)=1$と変えると、φ－BPは multitype GWP with immigration となる。

例6 $d=2$, $\varphi_0(k)=\varphi_i(k)=0$ $(i\geq 2)$, $\varphi_1(k_1, k_2)=k_1 \min\{k_2, 1\}$; 或いは$\varphi_1(k_1, k_2)=\min\{k_1, Dk_2\}$ ($D\geq 1$は整数)とすると, φ－BPはk_1, k_2 をそれぞれ female, male の数とする bisexual GWP となる(Daley [3]。

以上の例の他、$\varphi_i(k)$が世代nにも依存するとして$\varphi_i(k, n)$とすれば, branching process in random environments をφ－BPとして考えることができる。さらに age-dependent branching process (one type, discrete time) $\{Z_n\}$ を次のように定義することもできる。$S=\bigcup_{\ell=1}^{\infty}\{\{k_1,\cdots,k_\ell\}\mid k_1,\cdots,k_\ell\in N_+\}\cup\{\partial\}$, $\partial=\phi$ は空集合とし、$S\ni k, r$に対して$k+r=k\cup r$とする。さらに,

$$\begin{cases}\varphi_i(k_1,\cdots,k_\ell)=\sum_{j=1}^{\ell}\delta_i(k_j), & i\geq 0, \ \ell\geq 1\\ \varphi_i(\partial)=0, & i\geq 0\end{cases}$$

を定義する。ここで$k=\{k_1,\cdots,k_\ell\}$は年令が$k_1,\cdots,k_\ell$ の個体が全部でℓ個あることを表わす。さらに life time を表わす整数値確率変数$T\geq 1$, 及び1つの個体から生れる子供の数を表わす整数値確率変数$\xi\geq 0$が与えられたとき、$\xi_{ij}(n)$, $i=0, 1, 2,\cdots$, $j=1, 2,\cdots$, $n=0, 1, 2,\cdots$は独立な S－値確率変数でその分布は

$$\begin{cases}P\{\xi_{ij}(n)=\{\underbrace{0,\cdots,0}_{\ell}\}\}=P\{T=i, \xi=\ell\mid T\geq i\}, & \ell\geq 1\\ P\{\xi_{ij}(n)=\partial\}=P\{T=i, \xi=0\mid T\geq i\}\\ P\{\xi_{ij}(n)=\{i+1\}\}=P\{T>i\mid T\geq i\}\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

によって与えられるものとする。このとき、

$$\begin{cases} Z_0 = r \in S, \\ Z_n = k \text{ のとき、} Z_{n+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\varphi_i(k)} \xi_{ij}(n), \quad n = 0, 1, 2 \cdots \text{。} \end{cases}$$

ここで $\xi_{i0}(n) = \partial$ とする。

§1 "subcritical" case

これからはCGWP $\{Z_n\}$ についてだけ考える。さらに次のことを仮定する。

仮定A $P\{\xi_{ij}(n) \leq 1\} < 1, \quad \forall i, j, n \geq 0 \ (j \neq 0)$.

このとき次の定理が知られている。

定理1 ([5]) CGWP $\{Z_n\}$ が仮定Aを満たすならば、

$$P\{\lim Z_n = 0 \text{ or } \infty \mid Z_0 = r\} = 1, \quad \forall r \geq 0$$

今 $a_i = E\xi_{ij}(n) \ (= F_i'(1-)), \quad i \geq 0$ とおくと、

$$(1) \qquad E\{Z_{n+1} \mid Z_n = k\} = E\{\sum_{j=0}^{k} \xi_{kj}(n) \mid Z_n = k\}$$

また $\{Z_n\}$ がGWPのときには $E\{Z_{n+1} \mid Z_n = k\} < k, = k, > k$ ($\forall k \geq 1$) に対応してそれぞれ subcritical, critical, supercritical と分類されているように、CGWPのときにも a_k についての条件に応じて $\{Z_n\}$ を一応 "subcritical", "critical", "supercritical" と分けて見る（厳密な分類ではない）。

定理2 ([5]) CGWP $\{Z_n\}$ が仮定Aを満たし、さらに

$$a_k \leq 1, \quad \forall k \geq N$$

となる整数 $N \geq 1$ が存在するならば

$$P\{\lim_{n \to \infty} Z_n = 0 \mid Z_0 = r\} = 1, \quad \forall r \geq 0$$

定理2は $a_k \leq 1$ がすべての $k \geq 0$ について成立すれば(1)式から $\{Z_n\}$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

は nonnegativ supermartingale となり確率 1 で有限な極限値に収束するから、定理 1 よりその極限値が 0 に等しいということから分る。

§2 "supercritical" case

次の定理は Zubkov [15] による φ－BP についての結果を CGWP について言い換えたものである。

定理3 ([15]) CGWP $\{Z_n\}$ が仮定Aを満たし、さらに次の2条件が成り立つような整数 $N \geq 0$ が存在するとする：

i) $a_k \geq A$, $\forall k \geq N$ となる $A > 1$ が存在する,

(ii) $$\sup_{k \geq N} \frac{E\,\xi_{kj}(n)\, m(\xi_{kj}(n))}{a_k} < \infty$$

となる concave な関数 $m(t)$; $m(0) = 0$, $m(t) \longrightarrow \infty$ $(t \to \infty)$ が存在する。このとき

$$P\{\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty \mid Z_0 = r\} > 0, \ \forall r \geq 1,$$

さらに $\forall \gamma$ $(1 < \gamma < A)$ に対して,

$$P\{\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{\gamma^n} = \infty \mid Z_0 = r\} > 0, \ \forall r \geq 1.$$

定理 3 の条件 (ii) を除いて他は満たす例として

$$P\{\xi_{ij}(n) = 0\} = (1-\varepsilon)^{1/i}, \ i, j \geq 1, \ n \geq 0$$

の場合 $(0 < \varepsilon < 1)$ を考えると、このとき

$$P\{\lim_{n\to\infty} Z_n = 0 \mid Z_0 = r\} = 1, \ \forall r \geq 0$$

が成立する ([5])。この場合さらに

$$P\{\xi_{ij}(n) = ki\} = 1-(1-\varepsilon)^{1/i}, \ i, j \geq 1, \ n \geq 0$$ とすれば,

$$E[\xi_{ij}(n)]^2 = k i^2 \{1-(1-\varepsilon)^{1/i}\}$$

一方

$$E\,\xi_{ij}(n) = ki\{1-(1-\varepsilon)^{1/i}\} \geqq A > 1$$

より $E[\xi_{ij}(n)]^2 \geq A^2\{1-(1-\varepsilon)^{1/i}\}^{-1} \longrightarrow \infty \ (i \to \infty)$

となり、定理3 の結果が成り立つ為にはその条件 (ii) に相当する条件を取り除くことはできないということが分る。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

特別な場合として次の定理も成り立つ。

定理4（[5]） 仮定Aを満たすCGWP $\{Z_n\}$ について、$F_k(S) = F_N(S)$，$\forall k \geq N$ となる整数 $N \geq 1$ が存在するとき，

$$A = a_k > 1, \quad k \geq N$$

ならば、

$$P\{\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty \mid Z_0 = r\} > 0, \ \forall r \geq 1$$

さらに

$$P\{\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{A^n} = W \mid Z_0 = r\} = 1, \ \forall r \geq 0,$$

ここで

$$P\{W > 0 \mid Z_0 = r\} > 0, \quad r \geq 1$$

となる為の必要十分条件は

$$E\,\xi_{kj}(n) \log \xi_{kj}(n) < \infty, \quad k \geq N$$

§3. "critical" case

次の定理は Zubkov [15] の φ-BPについての結果をCGWPの場合に言い換えたものである。

定理5（[15]） 仮定Aを満たすCGWP $\{Z_n\}$ が さらに次の2条件を満たすとする：

(i) $$a = \sup_k a_k < \infty, \quad \sup_{k;\, a_k > 0} \frac{Var\, \xi_{kj}(n)}{a_k} \equiv 2C^* < \infty$$

(ii) $$a_k > 1 + \frac{C}{k}, \quad \forall k \geq N$$

が成り立つような $C > C^*$ 及び整数 $N \geq 1$ が存在する。このとき

$$P\{\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty \mid Z_0 = r\} > 0, \quad \forall r \geq 1$$

例 $\xi_{kj}(n)$ の分布が

$$P\{\xi_{kj}(n) = 0 \text{ or } 2\} = 1,$$

$$P\{\xi_{kj}(n) = 2\} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3k}\right), \quad k \geq 1$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

によって与えられるとする。このとき、

$$a_k = 1 + \frac{2}{3k}, \quad Var\, \xi_{kj}(n) = 1 - \frac{4}{9k^2}$$

$$C^* = \frac{1}{2} \sup_{k \geq 1} \frac{Var\, \xi_{kj}(n)}{a_k} = \frac{1}{2}$$

となり、Cが $\frac{1}{2} < C < \frac{2}{3}$ のとき

$$a_k > 1 + \frac{C}{k}, \quad k \geq 1$$

であるから、定理5の条件は満される。したがってこの場合

$$P\{\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty \mid Z_0 = r\} > 0, \quad \forall r \geq 1$$

定期5に対して次の定理も成り立つ

<u>定理6</u>　仮定Aを満たすCGWP $\{Z_n\}$ について

$$F_k(S) = f(S)\, g_k(S), \quad \forall k \geq N$$

となる~~整数~~ ~~$N \geq 1$~~が存在するとする。ここで $f(S)$, $g_k(S)$ は母関数であって

$$f'(1-) = 1, \quad f''(1-) \equiv 2C_* < \infty$$

また $0 < C \leq C_*$ なる C に対して

$$a_k = 1 + g_k'(1-) \equiv 1 + \alpha_k \leq 1 + \frac{C}{k}, \quad \forall k \geq N$$

が成り立つとする。このとき、

$$P\{\lim_{n\to\infty} Z_n = 0 \mid Z_0 = r\} = 1, \quad \forall r \geq 0$$

<u>例</u>　$f(S) = \frac{1}{2}(1 + S^2)$, $g_k(S) = 1 - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} S$, $k \geq 1$

$$F_k(S) = f(S)\, g_k(S) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} S + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) S^2 + \frac{1}{2k} S^3\right\}, k \geq 1$$

とする。このとき明かに

$$f'(1-) = 1, \quad C_* = \frac{1}{2} f''(1-) = \frac{1}{2}, \quad \alpha_k = \frac{1}{2k}$$

であるから、$C = \frac{1}{2}$ として定理の条件は満たされる。したがってこの場合

$$P\{\lim_{n\to\infty} Z_n = 0 \mid Z_0 = r\} = 1, \quad \forall r \geq 0。$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

定理5、定理6の例では共に $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$ であるが Z_n の $n \to \infty$ のときの様子は対照的である。この2つの定理はその辺の事情について述べているものと考えてもよい。

<u>定理6の証明</u>　定理1より $\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$ or ∞ a.s. であるから、$r \geq N$ かつ $F_k(s) = 1$, $\forall k < N$ としても一般性を失わない。

$$F(n;s) = E[s^{Z_n} \mid Z_0 = r]$$

とおくと、

$$F(n+1;s) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{Z_n = k \mid Z_0 = r\}[F_k(s)]^k$$

$$= P\{Z_n < N \mid Z_0 = r\} + \sum_{k=N}^{\infty} P\{Z_n = k \mid Z_0 = r\} f(s)^k [g_k(s)]^k.$$

ここで

$$B_n = P\{Z_n < N \mid Z_0 = r\},$$

$$g(s) = \Big[\inf_{\substack{k \geq N \\ d_k > 0}} g_k^{1/d_k}(s)\Big]^c$$

とおくと、

$$[g_k(s)]^k = [g_k^{1/d_k}(s)]^{k d_k} \geq [g_k^{1/d_k}(s)]^c \geq g(s), \quad k \geq N$$

であるから

(2)
$$F(n+1;s) \geq B_n + g(s) \sum_{k=N}^{\infty} P\{Z_n = k \mid Z_0 = r\} f(s)^k$$
$$\geq (1 - g(s))B_n + g(s) F(n; f(s)).$$

$f_n(s)$ を $f(s)$ の n 回反復；$f_0(s) = s$, $f_{n+1}(s) = f(f_n(s))$, とし

$$\gamma_n(s) = \prod_{t=0}^{n-1} g(f_t(s)), \quad \gamma_0(s) = 1$$

とおくと次の補題が成り立つ。

<u>補題1</u>　すべての $n \geq 1$ に対して

(3)
$$F(n;s) \geq \sum_{t=1}^{n} [\gamma_{t-1}(s) - \gamma_t(s)] B_{n-t} + \gamma_n(s) F(0; f_n(s)).$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

証明　$n=1$のとき(3)式は明らか。よってnで成り立つとして(2)式を用いて$n+1$でも成り立つことを示せばよい。

$$F(n+1;s) \geqq (1-g(s))B_n$$
$$+g(s)\left\{\sum_{t=1}^{n}[\gamma_{t-1}(f(s))-\gamma_t(f(s))]B_{n-t}+\gamma_n(f(s))F(0;f_{n+1}(s))\right\}$$
$$=(1-g(s))B_n+\sum_{t=1}^{n}[\gamma_t(s)-\gamma_{t+1}(s)]B_{n-t}$$
$$+\gamma_{n+1}(s)F(0;f_{n+1}(s))$$
$$=\sum_{t=1}^{n+1}[\gamma_{t-1}(s)-\gamma_t(s)]B_{n+1-t}+\gamma_{n+1}(s)F(0;f_{n+1}(s)).$$

補題2　$T \geqq 1$に対して

$$(4)\quad \sum_{n=1}^{T}(F(n;s) \geq \sum_{n-1}^{T}[1-\gamma_n(s)]B_{T-n}+\sum_{n=1}^{T}\gamma_n(s)F(0;f_n(s)).$$

証明
$$\sum_{n=1}^{T}\sum_{t=1}^{T}[\gamma_{t-1}(s)-\gamma_t(s)]B_{n-t}$$
$$=\sum_{t=1}^{T}[\gamma_{t-1}(s)-\gamma_t(s)]\sum_{n=t}^{T}B_{n-t}$$
$$=\sum_{t=1}^{T}[\gamma_{t-1}(s)-\gamma_t(s)]\sum_{n=t}^{T}B_{T-n}$$
$$=\sum_{n=1}^{T}B_{T-n}\sum_{t=1}^{n}[\gamma_{t-1}(s)-\gamma_t(s)]$$
$$=\sum_{n=1}^{T}[1-\gamma_n(s)]B_{T-n}$$

であるから、(3)式をnについて1からTまで加えれば(4)式を得る。

(4)式で$s=0$とおいて変形すると，

$$(5)\quad F(T;0) \geq \sum_{n=1}^{T}\gamma_n(0)[F(0;f_n(0))-B_{T-n}]$$
$$+\sum_{n=1}^{T-1}[B_n-F(n;0)]$$
$$\geq \sum_{n=1}^{T}\gamma_n(0)[F(0;f_n(0))-B_{T-n}]$$

$\gamma_n(0)=\prod_{t=0}^{n-1}g(f_t(0))$において$f_t(s)$は critical なGWPの$t$世代目の母関数であるから

$$f_t(s)=1-\frac{1-s}{C_* t(1-s)+1}(1+o(1)),\quad t\to\infty$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

したがって

(6) $$f_t(0) = 1 - \frac{1}{C_* t + 1}(1 + o(1)), \quad t \longrightarrow \infty$$

であることはよく知られている。さらに次の

補題3 $g'(1-) = C$

証明 $h(S) = \inf_{\substack{k \geq N \\ \alpha_k > 0}} g_k^{1/\alpha_k}(S)$ とおくと. $g(S) = h(S)^C$

かつ $h(1) = 1$ であるから $h'(1-) = 1$ を示せばよい。$g_k(S) = ES^{\eta_k}$ とすると.

$$g_k(S) \geq S^{E\eta_k} = S^{\alpha_k}$$

よって $h(S) \geq S$, 一方, $\frac{d}{dS} g_k^{1/\alpha_k}(S) \Big|_{S=1-} = 1$ より.

$$1 - S \geq 1 - h(S) \geq 1 - g_k^{1/\alpha_k}(S)$$

$$1 \geq \frac{1-h(S)}{1-S} \geq \frac{1-g_k^{1/\alpha_k}(S)}{1-S} \longrightarrow 1 \quad (S \to 1-)。$$

したがって $h'(1-) = 1$。

(6) 式と補題3より

$$\gamma_n(0) = \prod_{t=0}^{n-1}\left(1 - \frac{C}{C_* t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$\frac{\gamma_n(0)}{\gamma_{n+1}(0)} = 1 + \frac{C}{C_* n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

さらに $C/C_* \leq 1$ であるから

(7) $$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(0) = \infty$$

そこで, $q = P\{\lim_{n\to\infty} Z_n = 0 \,[\, Z_0 = r\} < 1]$ と仮定する。

$$B_{T-n} = P\{Z_{T-n} < N \mid Z_0 = r\} \leq q, \quad T \geq n$$

かつ $f_n(0) \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$ であるから、nを十分大きくとって.

$$F(0; f_n(0)) = [f_n(0)]^r > \frac{1+q}{2}$$

となるようにすると、

$$F(0;f_n(0))-B_{T-n} > \frac{1-q}{2} > 0, \quad T \geq n.$$

よって(5)の右辺は

$$\sum_{n=1}^{T} \gamma_n(0)[F(0;f_n(0)-B_{T-n}] \to \infty \quad (T \to \infty).$$

一方、$F(T;0) = P\{Z_T = 0 \mid Z_0 = r\} \leq 1$ であるから、これは(5)式と矛盾する。したがって $q = 1$ でなければならない。証明終り。

文献

[1] Athreya, K.B., S.Karlin: On branching processes in random environments I, Extinction probability; II, Limit theorems, Ann Math Statist 42(1972), 1499-1520; 1843-1858.

[2] Athreya, K.B., P.E.Ney: Branching processes, Springer (1972)

[3] Daley, D.J.: Extinction conditions for certain bisexual Galton-Watson branching processes, Zeits. Wahrsheinlichkeitstheorie 9 (1968) 315-322

[4] Foster, J.H.: A limit theorem for a branching process with state-dependent immigration. Ann, Math. Statist 42 (1971), 1773-1776.

[5] Fujimagari, T.: Controlled Galton-Watson process and its asymptotic behavior, Second Japan-USSR symposium on prob. theory 2, Kyoto (1972), 252-262

[6] Harris, T.E: The theory of branching processes, Springer (1963)

[7] Ikeda, N., M, Nagasawa, S, Watanabe: Branching Markov processes I; II; III. J. Math. Kyoto Univ. 8 (1968), 233-278; 365-410; 9 (1969), 95-160.

[8] Labkovskii, V.A.: A limit theorem for generalized random branching processes depending on the size of the population. Theory prob. Appl. 17(1972) 72-85.

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

[9] Mode, C. J. : Multitype branching processes American Elsevier (1971).

[10] Sevastyanov, B. A. : Branching processes, Moscow (1971). (Russ)

[11] ---------- : Some generalization of branching processes, Second Japan-USSR symposium on prob. theory 1. Kyoto (1972). 61-68.

[12] ----------,: A. M. Zubkov : Controlled branching processes. Teor. Veroyat, Primen. 19 (1974), 15-25 (Russ).

[13] Skorohod, A. V. : Branching diffusion processes, Theory Prob. Appl. 9 (1964). 492-497.

[14] Smith, W. L., W. E. Wilkinson : On branching processes in random environments. Ann. Math. Statist. 40 (1969), 814-827

[15] Zubkov. A. M. : Analogues between Galton-Watson processes and φ-branching processes, Teor. Veroyat. Primen, 19 (1974), 319-339 (Russ).

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

集団遺伝学に現れるマルコフ連鎖の漸近的性質と、大きな偏差に対する極限定理

佐藤健一

S. Wright の遺伝モデルのマルコフ連鎖の最も簡単な場合は、次のようなものである（Karlin [8]，Feller [6]参照）、a型，A型の2つの型のあるN個（一定数）のものの集団があって、順々に世代が進んで行く、現在の世代はN個のうちj個がa型、$N-j$個がA型とすると、次の世代の定め方は、現在の世代から、1回毎にもとに戻してランダムな抜き取りをN回行い、その結果を次の世代の構成とする。すなわち、第n世代におけるa型のものの数をZ_nとすると、

(1) $$P(Z_{n+1}=k \mid Z_n=j)=P_{jk},$$

(2) $$P_{jk}=\binom{N}{k}\left(\frac{j}{N}\right)^k\left(1-\frac{j}{N}\right)^{N-k}$$

とする。$\{Z_n; n=0,1,2,\cdots\}$は$\{0,1,\cdots,N\}$を状態空間とする有限マルコフ連鎖である。0とNは吸収状態で、遺伝学のことばではホモの状態（homozygosity）といわれ、これに達することは固定(fixation)といわれる。固定の速さは行列（P_{jk}）の1と異る最初の固有値λ_2で定まるが、その値は

(3) $$\lambda_2=1-\frac{1}{N}$$

である（Wright）。以上は最も簡単なモデルで、集団遺伝学ではさらに突然変異（mutation），淘汰（selection），移住（migration）を考慮に入れたもの、型が3つ以上のもの、あるいは全く違った機構のモデルを扱っている。

1964年にS. Karlin と J. McGregor は[10]で、直積分枝過程から誘導されるマルコフ連鎖をはじめて考察した。彼等はまず、それが集団遺伝学で扱われているマルコフ連鎖モデルの多くを特殊な場合として含むことを示し、淘汰のない場合にその固有値、固有ベクトルを一般に見出し、最初のいくつかの固有値、固有ベクトルの確率論的意味を見出した（[8]

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

〔11〕も参照）、そして、さらに拡散過程への収束を主張しているが、この部分は証明がまだ出ていない。

直積分枝過程から誘導されるマルコフ連鎖とは、最も簡単な場合には次のようなものである。$\{X_n ; n = 0, 1, 2 \cdots\}$ を Galton－Watson 過程とする。すなわち、X_n 個の粒子から成る第 n 世代があるとし、各粒子は独立に同分布に従っていくつかの子を生み、それが第 $n+1$ 世代を形成する。$\{Y_n ; n = 0, 1, 2, \cdots\}$ を $\{X_n ; n = 0, 1, \cdots\}$ と独立なもう1つの Galton－Watson 過程とし、1粒子から生れる子の数の分布は同じとする。$X_n + Y_n$ が一定数Nであるという条件をつけて確率

(4) $P^{(N)}_{jk} = P(X_{n+1} = k \mid X_n = j,\ Y_n = N - j,\ X_{n+1} + Y_{n+1} = N)$ を考える。$(P^{(N)}_{jk})$ を推移確率行列とする $\{0, 1, \cdots, N\}$ の上の Markov 連鎖が、誘導されたマルコフ連鎖である。Karlin－McGregor の基本的な結果の1つは、次のような事実である。1個の親から生れる子の数の分布の母関数を $f(s)$ とする。すなわち

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k,$$

$$c_k = P(X_{n+1} = k \mid X_n = 1) = P(Y_{n+1} = k \mid Y_n = 1)$$

とする。このとき

<u>定理</u> 行列 $(P^{(N)}_{jk})$ は対角化可能で、その固有値は

(5) $1 = \lambda^{(N)}_0 = \lambda^{(N)}_1 \geq \lambda^{(N)}_2 \geq \lambda^{(N)}_3 \geq \cdots \geq \lambda^{(N)}_N \geq 0,$

(6) $$\lambda^{(N)}_r = \frac{f(s)^{N-r}(f'(s))^r \text{ における } s^{N-r} \text{ の係数}}{f(s)^N \text{ における } s^N \text{ の係数}}$$

である。もし $c_0\, c_1\, c_2 > 0$ ならば（5）の $\geq$ はすべて $>$ となる。

この定理の証明の本質的な部分は、行列 $(P^{(N)}_{jk})$ が、線形写像として，多項式を同次数の多項式に写すことを示す.

Karlin－McGregor は3つの例をあげている。第1に、分布 $\{c_k\}$ が パラメーターλのポアソン分布のときは，$P^{(N)}_{jk}$ は λによらなくなり（2）の P_{jk} に一致する。従って（3）は

(7) $\lambda^{(N)}_2 = 1 - \frac{1}{N}$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

とかける。第2の例として分布 $\{C_k\}$ が2項分布のときは、$f(s) = (1-p+ps)^{\gamma}$, $0<p<1$, γ=整数 >1 という形なので P_{jk} は j を固定したとき超幾何分布となり、特に $\gamma=2$ のときは多染色体遺伝の木村資生のモデルになる。このときは $\lambda_2^{(N)} = 1-(\gamma-1)/(\gamma N-1)$, ゆえに

(8) $$\lambda_2^{(N)} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (N\to\infty)$$

である。3番目の例として分布 $\{C_k\}$ が負の2項分布，すなわち $f(s) = \{(1-p)/(1-ps)\}^{\alpha}$, $\alpha>0$, $0<p<1$ のときは $\lambda_2^{(N)} = 1-(1+\alpha)/(\alpha N+1)$, したがって

(9) $$\lambda_2^{(N)} = 1 - \frac{1+\alpha}{\alpha}\frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (N\to\infty)$$

となる。

$\lambda_2^{(N)}$ がホモの状態への固定の速さを表わす重要な量であること，特にNが大きい時のその値が重要であることを知って私は、(7),(8),(9)のような結果が一般にいえないだろうかと考えた。すなわち次のような問題をたてた。

十分広いクラスの分布 $\{C_k\}$ に対して

(10) $$\lambda_2^{(N)} = 1 - \frac{A}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (N\to\infty)$$

を証明すること、定数 A が分布からどのようにして定まるかを求めること．問題を一般化すれば、固有値 $\lambda_r^{(N)}$ の $N\to\infty$ における漸近的評価を求めること．

$f(s)^N$ の展開における s^n の係数を $\alpha_{N,n}$ とし．$f(s)^{N-r}(f'(s))^r$ の展開における s^n の係数を $\beta_{N,n}^{(r)}$ とすると，(6)は

(11) $$\lambda_r^{(N)} = \frac{\beta_{N,N-r}^{(r)}}{\alpha_{N,N}}$$

と書ける．固定した r に対して $\lambda_r^{(N)}$ の漸近的評価を求めることは．$\alpha_{N,N}$ と $\beta_{N,N-r}^{(r)}$ の $N\to\infty$ における漸近的評価を求めればよい．ところで、$\alpha_{N,N}$ は大きな偏差(large deviation)に対する確率の一種である。すなわち，$\{U_r;\ n=1,2,\cdots\}$ を独立同分布の確率変数列で各 U_n の分布の母関数が $f(s)$ であるとし．$S_n = U_1+\cdots+U_n$ とする．すると．$\alpha_{N,N} = P(S_N = N)$ である．$\{U_n\}$ が同分布とはしな

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

いで，$U_1, \cdots, U_r$ は分布の母関数が $Cf'(s)$（ただし $C=1/f'(1)$），$n \geq r+1$ では U_n の分布の母関数が $f(s)$ とすれば，$\beta^{(r)}_{N,N-r} = P(S_N = N-r)/C^r$ である。大きな偏差の確率に対する極限定理には多くの研究があるので、そこで使われている手法がこれらの評価でも使えるのではないだろうかと私は考えた。

大きな偏差に対する極限定理は1938年の H. Cramér の論文［3］からはじまり、その後の研究はほとんどが Cramér の着想を発展させたものといえるであろう。それらをかなりよくまとめたものに Ibragimov-Linnik の本［7］と Petrov の本［15］がある。Cramér は積分型の極限定理すなわち $n \to \infty$ のとき a_n が適当な速さで無限大になるとして確率 $P(S_n' \geq a_n)$（ただし $S_n' = S_n - ES_n$）を評価したが、$P(S_n' = a_n)$ の形のものの評価は局所型の極限定理である。しかしそれもほとんど同じ方法で得られることが Richter［16］によって示されている。その方法は鞍点法（saddle point method）による積分の評価である。これらの論文とさらに［1］,［2］,［5］などに示唆されて考えた結果、問題の $\alpha_{N,N}$, $\beta^{(r)}_{N,N-r}$ などの非常にくわしい評価も同じ方法で得られることが分った。こうして得られた結果を述べよう。

分布 $\{c_k\}$ のモーメント母関数を $M(x)$ とする。すなわち

$$M(x) = f(e^x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{kx} \qquad (x\text{は実数})$$

とする。$M(x)$ を有限にするような x の上限を β_0 とする。明らかに $\beta_0 \geq 0$ である。$F(x) = M(x)e^{-x}$ とし、以下，次のような仮定のもとで考える。

仮定　$c_0 > 0$, $c_0 + c_1 < 1$ で，分布 $\{c_k\}$ の maximum span は1である（すなわち，$c_k > 0$ となるすべての k を $k = b + d\nu$（ν は整数）と表わすような $d > 1$ と b は存在しない）。さらに $\sum_{k=0}^{\infty} kc_k = a$ とするとき，次の3つのうちどれかが成立する。(i) $1 < a \leq +\infty$. (ii) $a = 1$ かつ $\beta_0 > 0$. (iii) $a < 1$ かつ $\lim_{x \uparrow \beta_0} F'(x) > 0$.

なお (iii) の場合には自動的に $\beta_0 > 0$ となる。$a < 1$ の場合，$\beta_0 = \infty$ ならば (iii) が成立するし、$a < 1$, $0 < \beta_0 < +\infty$ でも $\lim_{x \uparrow \beta_0} M(x) = +\infty$ ならば (iii) が成立する．したがって前に挙げた3つの例はいずれも上の仮定をみたすことが分る。

この仮定から容易に次のことがいえる。$K(x) = \log M(x)$ としよう。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

補題1. $F'(\beta)=0$ となる $\beta<\beta_0$ がただ1つ存在する。この β ではさらに $K'(\beta)=1$, $K''(\beta)>0$ である。

$K(x)$ は $x<\beta_0$ において実解析的である。$\sigma=\sqrt{K''(\beta)}$, $K_j=K^{(j)}(\beta)/j!$ と書こう. 主な結果は次の通りである。

定理 整数 $r>1$ を固定し、Nを動かす. このとき A_1, A_2 ---- という定数が存在して, 任意の正整数 ν に対し

$$(12)\qquad \lambda_r^{(N)}=1+\frac{A_1}{N}+\frac{A_2}{N^2}+\cdots\cdots+\frac{A_\nu}{N^\nu}+O\left(\frac{1}{N^{\nu+1}}\right)\qquad(N\to\infty)$$

が成り立つ. A_1, A_2, ---- は K_j $(j=3,4,\cdots\cdots)$, σ^2, $1/\sigma^2$, r の多項式である。特に

$$(13)\qquad A_1=-\frac{\sigma^2}{2}r(r-1)$$

$$(14)\qquad A_2=\frac{\sigma^4}{8}r(r-1)(r-2)(r-3)+2K_3r(r-1)(r-2)+\left(-\frac{9K_3^2}{\sigma^4}+\frac{6K_4}{\sigma^2}\right)r(r-1)$$

である。

この結果を証明するには, $\lambda_r^{(N)}$ の表現 (11) の分母分子のそれぞれを評価すればよいが、A_1, A_2 等の具体的な形を求めるには,
$f(s)^{N-r}(f'(s))^{r-1}f''(s)$ の展開における s^n の係数を $\gamma_{N,n}$ とするとき (11) を変更して

$$(15)\qquad \lambda_r^{(N)}-\lambda_{r+1}^{(N)}=\frac{r}{N-r}\cdot\frac{\gamma_{N,N-r-1}^{(r)}}{\alpha_{N,N}}$$

と書けること ([8] p.403) を用いる方が楽である。

$\alpha_{N,n}$ は次のように表現される。まず $M(x)$ を拡張して $\mathrm{Re}\,z<\beta_0$ の複素数 z に対して

$$M(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{kz}$$

と定義する。

$$(16)\qquad M(z)^N=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{N,k}e^{kz}$$

であるから、任意の $x<\beta_0$ に対して

$$(17)\qquad \alpha_{N,n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\pi}^{x+i\pi}M(z)^N e^{-nz}\,dz$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

である。ただし積分は $x-i\pi$ から $x+i\pi$ への線分に沿った線積分とする。(17) は、右辺の $M(z)^N$ に (16) を入れ Fubini の定理が適用できることに注意すれば容易にいえる。 $n=N$ の場合すなわち $\alpha_{N,N}$ の評価は $x=\beta$ にとったときの表現

$$(18)\qquad \alpha_{N,N}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\pi}^{\beta+i\pi} M(z)^N e^{-Nz}\,dz$$

から得られる。β はちょうど関数 $M(z)e^{-z}$ の鞍点になっている。実際、z が実軸上を動くときには，β の定義から $M(z)e^{-z}$ は $z=\beta$ で最小となり、z が虚軸に平行に $z=\beta+iy$ を動くときには $M(z)e^{-z}$ は $z=\beta$ で絶対値が最大となる。$\gamma^{(r)}_{N,N-r-1}$ の評価も，上と同様な表現

$$(19)\qquad \gamma^{(r)}_{N,N-r-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\pi}^{\beta+i\pi} M(z)^{N-r}M'(z)^{r-1}(M''(z)-M'(z))e^{-Nz}\,dz$$

から得られる。

次のように (18), (19) のような形の積分を一般に評価することができる。

補題2　r を固定した整数とし、$L(z)$ を $z=\beta+iy$, $-\pi<y<\pi$ で有界，可測な関数で $z=\beta$ の近傍で正則とする。整数 $N\geq r$ に対し

$$(20)\qquad \tilde{\alpha}_N=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\pi}^{\beta+i\pi} M(z)^{N-r}L(z)e^{-Nz}\,dz$$

とする。

$$\tilde{\kappa}_j=\frac{1}{j!}\frac{d^j}{dz^j}\left(M(z)^{-r}L(z)\right)\Big|_{z=\beta}$$

とする。このとき、N によらない定数 $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ----$ が存在して、任意の正整数 ν に対し

$$(21)\qquad \tilde{\alpha}_N=\frac{e^{N(K(\beta)-\beta)}}{\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{N}}\left\{\tilde{\kappa}_0+\frac{\tilde{a}_1}{N}+\frac{\tilde{a}_2}{N^2}+\cdots+\frac{\tilde{a}_\nu}{N^\nu}+O\left(\frac{1}{N^{\nu+1}}\right)\right\}\ (N\to\infty)$$

が成り立つ。$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ----$ は $\kappa_j\ (j=3,4,---)$, $\tilde{\kappa}_j=0,1,----)$, $1/\sigma^2$ の多項式である。特に

$$\tilde{a}_1=\tilde{\kappa}_0\left(\frac{3\kappa_4}{\sigma^4}-\frac{15\kappa_3^2}{2\sigma^6}\right)+\tilde{\kappa}_1\frac{3\kappa_3}{\sigma^4}-\tilde{\kappa}_2\frac{1}{\sigma^2}$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

この補題を証明すれば $\alpha_{N,N}$, $\gamma_{N,N-r-1}^{(r)}$ の漸近評価が得られ、したがって定理が証明される。$\beta \neq 0$ のときは $K(\beta)-\beta<0$ になるので (21) の形から分るように $\alpha_{N,N}$ も $\gamma_{N,N-r-1}^{(r)}$ も同じ order で指数的に小さくなり、$\gamma_{N,N-r-1}^{(r)}/\alpha_{N,N}$ の漸近的行動はそれよりもこまかい factor で決まるわけである。

以上は r を固定したときの $\lambda_r^{(N)}$ の評価であるが、r が N と共に大きくなる場合の $\lambda_r^{(N)}$ の評価にも、$r=O(\sqrt{N})$ ならば類似の方法が使える。たとえば、η を固定し $r=[\eta\sqrt{N}]$ とすると

$$\lambda_r^{(N)} = e^{-\sigma^2\eta^2/2}\left(1+O\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right)\right)$$

がいえる。この場合には $\lambda_r^{(N)}$ が 0 と 1 の間の数に近ずくのである。

直積分枝過程から誘導されるマルコフ連鎖として最も簡単な場合(すなわち型が2つで淘汰も突然変異もない場合)について以上では述べたが、型が3つ以上で突然変異を考慮に入れた場合にも、固有値は (6) の $\lambda_r^{(N)}$ を使って表わされる([8],[10],[11])ので、その漸近評価を与えることができる。しかし、淘汰がないという仮定(すなわち $\{X_n\}$ でも $\{Y_n\}$ でも1個の親からの子の数の分布が同じであるという仮定)は、Karlin-McGregor の固有値ベクトルの議論において決定的であり、除くことはできない。

集団遺伝学では、マルコフ連鎖の種々の量を計算するのに、拡散過程で近似して求めることがさかんに行われている。木村[12]によればそれは R.A. Fisher の1922年の論文にはじまるということであるから、Kolmogorov の拡散方程式の研究よりはるかに前からである。木村[12][13], Crow-木村[4] などには境界で退化した種々の拡散過程が現れており、それらの固有関数展開などが求められている。Feller の1次元拡散過程の境界条件の研究がこれらの方程式の深い研究からはじまったことはよく知られている。しかし、集団遺伝学において拡散過程がマルコフ連鎖を近似しているという議論は、平均値と分散が拡散方程式の係数に収束しているということを除けば、直観的説明と実験結果に合うこととを基礎にしており、数学的には厳密でない。そこには数学の問題が残されており、私の知る限り、Karlin-McGregor [9] [10] と Kushner [14] がそのうちの一部を扱っているだけである。(もっとも、文献をあまり広く調べていないので、他にもある可能性がある。御教示いただければ幸いである。)

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

ところで、補題２あるいはその拡張を繰り返し使い計算を進めることによって、直積分枝過程から誘導されるマルコフ連鎖の多くについて拡散過程への収束を証明できるであろうということ、これにより集団遺伝学における拡散過程のかなり多くが極限として現れることが、最近わかった。たとえば、（４）の $P_{jk}^{(N)}$ を推移確率とする $\{0, 1, \cdots, N\}$ の上のマルコフ連鎖を $\{Z_n^{(N)};\ n=0, 1, \cdots\}$ とし、$\{W^{(N)}(t)\ ;\ 0 \leq t < \infty\}$ を，$W^{(N)}(n/N) = Z_n^{(N)}/N$，それ以外の t では直線で結んで定義する。$\{W(t)\ ; 0 \leq t < \infty)$ を，

$$(22) \qquad \frac{\sigma^2}{2} x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}$$

を生成作用素とする区間 $[0, 1]$ の上の拡散過程とする。この時、$N \to \infty$ において $\{Z^{(N)}(t)\ ;\ 0 \leq t < \infty\}$ は $\{Z(t)\ ;\ 0 \leq t < \infty)$ に収束する（収束の意味は、$[0, \infty)$ から $[0, 1]$ への連続関数の全体に広義一様収束の位相を入れたときの位相的 Borel field の上に定まる確率測度の弱収束）、ただし $Z^{(N)}(0)$，$Z(0)$ は non-random とし、$Z^{(N)}(0) \to Z(0)$ とする。これは最も簡単な場合で、型が３つ以上ある場合、突然変異のある場合、さらに淘汰のある場合をも扱うことができる。おそらく、Karlin − McGregor による収束の証明は固有値、固有ベクトルの収束を証明して使うために、固有値、固有ベクトルの表現の得られていない淘汰のある場合は扱えないのであろうと思われる。なお、収束の証明では補題２あるいはその拡張を，$\nu=1$ の場合しか使わない。$\nu \geq 2$ の場合を使うことによって、収束の速さに関することが分るのではないだろうか。

なお、定理で A_1 が（１３）の形であることは極限の拡散過程の固有値の現われ方に対応していることを池田信行氏は教示された。これは次のようなことである。（２２）を生成作用素とする $[0, 1]$ の上の拡散過程の $(0, 1)$ における推移確率密度（ルベーグ測度に対する）を $p(t, x, y)$ とすると、固有関数展開は

$$(23) \qquad p(t, x, y) = \sum_{r=2}^{\infty} e^{-\sigma^2 r(r-1)t/2}\, r(r-1) F(2-r, r+1, 2; x)\, F(2-r, r+1, 2; y)\, y(1-y)$$

となる（Goldberg，木村）、ただし F は超幾何関数

$$F(\alpha, \beta, \gamma\, ; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{n!\,\Gamma(\gamma+n)} x^n$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

である。一方 $\{Z_n^{(N)} ; n=0, 1 \cdots\cdots\}$ の n 回の推移確率は

$$P(Z_n^{(N)}=k \mid Z_0^{(N)}=j)=\sum_{r=0}^{N}(\lambda_r^{(N)})^n \varphi_{N,r}(j)\psi_{N,r}(k)$$

の形に書け、しかも：$k \neq 0, N$ では $\psi_{N,0}(k)=\psi_{N,1}(k)=0$ である。ゆえに $t=n/N$, $x=j/N$, $y=k/N$, $y \neq 0, 1$ に対しては

$$(24) \quad P(W^{(N)}(t)=y \mid W^{(N)}(0)=x) \sum_{r=2}^{N}(\lambda_r^{(N)})^{Nt}\varphi_{N,r}(Nx)\psi_{N,r}(Ny)$$

である。（23）と（24）を比較すれば

$$(25) \quad (\lambda_r^{(N)})^{Nt} \longrightarrow e^{-\sigma^2 r(r-1)t/2} \qquad (N \to \infty)$$

となるのが自然であるが．（25）はちょうど定理の A_1 の形からいえることである。

最後に、文献〔13〕を教えられ種々の有益な示唆を与えられた池田信行氏，文献〔14〕を教えられた安田正実氏に感謝したい。

文　　献

〔1〕 R. R. Bahadur and R. Ranga Rao, On deviations of the sample mean. Ann. Math. Stat. 31 (1960). 1015 − 1027.

〔2〕 D. Blackwell and J. L. Hodges, Jr., The probability in the extreme tail of a convolution, Ann. Math. Stat, 30 (1959), 1113 − 1120.

〔3〕 H. Cramér, Sur un nouveau théoréme-limite de la théorie des probabilités, Actualités Scientifiques et Industrielles No. 736 (Les sommes et les fonctions de variables aléatoires) 5 − 23

〔4〕 J. F. Crow and M. Kimura, An introduction to population genetics theory, Harper and Row, 1970.

〔5〕 H. E. Daniels, Saddlepoint approximation in Statistics, Ann. Math. Stat. 25 (1954), 631 − 650.

〔6〕 W. Feller, Diffusion processes in genetics, Proc. Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

and probability (1951). 227-246.

[7] I. A. Ibragimov and Ju. V. Linnik. Independent and Stationary sequences of random variables. Nauka, 1965 (ロシヤ語、英訳あり)

[8] S. Karlin, A first Course in stochastic processes, Academic press, 1966 (邦訳あり)

[9] S. Karlin and J. McGregor, On a genetics model of Moran, Proc. Camb. Phil. Soc. 58 (1962), 299-311.

[10] S. Karlin and J. McGregor, Direct product branching processes and related Markov chains. proc. Nat. Acad. Sci. USA 51 (1964), 598-602.

[11] S. Karlin and J. McGregor, Direct product branching processes and related induced Markov chains I Calculation of rates of approach to homozygosity, "Bernoulli, Bayes, Laplace, Anniversary Volume", Proc. International Research Seminar at Berkeley (1965), 111-145.

[12] 木村資生, 集団遺伝学概論, 培風館, 1960

[13] M. Kimura, Diffusion models in population genetics, J. Appl. Prob. 1 (1964). 177-232 (同じものが Mathuen's Review Series in Applied Probability, Vol. 2 としても出ている)

[14] H. J. Kushner, On the Weak Convergence of interpolated Markov chains to a diffusion, Ann. Prob. 2 (1974), 40-50.

[15] V. V. Petrov, Sums of independent random Variables Nauka, 1972 (ロシヤ語)

[16] W. Richter, Local limit theorems for large deviations, Teor. Verojat. Primen. 2 (1957). 214-229 (ロシヤ語, 英訳あり).

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

1次元一般化拡散過程の推移密度の漸近性質

池田信行
小谷眞一
渡辺信三（連絡責任者）

区間 (ℓ_1, ℓ_2) で与えられた（non-negative）Radon measure $dm(x)$ に対し、generalised second oder differential operator $L = \frac{d}{dm}\frac{d}{dx}$ が定義される。ℓ_1, ℓ_2 が regular ならば そこである Feller の境界条件をあたえて、L で生成される、generalised diffusion X が定まる。X の transition probality density $p(t, x, y)$（もちろん dm に関する）が存在し $(0, \infty) \times (\ell_1, \ell_2) \times (\ell_1, \ell_2)$ で連続である。この $p(t, x, y)$ の $t \downarrow 0$ のときの挙動に関していくつかの結果をまとめてみた。

1° 滑らかな場合

$L = \frac{1}{2} a(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} + b(\xi) \frac{d}{d\xi}$ のとき；このとき座標変換 $\xi \to x = \int_c^\xi e^{-2\int_c^\eta \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi} d\eta$（$\ell_1 < c < \ell_2$ は fixed）によって L は $\frac{d}{d\hat{m}}\frac{d}{dx}$ の形になる ただし、$d\hat{m}$ は、測度 $dm(\xi) = 2e^{2\int_c^\xi \frac{b(\xi)}{a(\eta)} d\eta} a^{-1}(\xi) d\xi$ の上の座標変換 $\xi \to x$ による image measure である。

この場合の transition probalility density の $t \downarrow 0$ の挙動を座標変換しない、元の ξ－座標でもとめると次のようになる。（a, b が十分滑らかな場合は Malchanov の結果の特別な場合である）

Theorem 1 $a \in C^1(\ell_1, \ell_2)$, $a(x) > 0$, $\forall x \in (\ell_1, \ell_2)$
b (ℓ_1, ℓ_2) で連続とする。

このとき、$\forall \xi, \eta \in (\ell_1, \ell_2)$ に対し

$$(1) \quad p(t, \xi, \eta) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(S(\xi) - S(\eta))^2}{2t}} e^{-\left[\int_c^\xi \frac{b(u)}{a(u)} du + \int_c^\eta \frac{b(u)}{a(u)} du\right]} \times \sqrt[4]{a(\xi)\, a(\eta)} \qquad (t \downarrow 0)$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

かつ評価は、(ℓ_1, ℓ_2) 内の任意の有界区間上で一様である。

但し、$S(\xi) = \int_c^{\xi} \frac{du}{\sqrt{a(u)}}$

Remark よく知られた変換 $\xi \to s = \int^{\xi} \sqrt{\frac{1}{a(u)}}\, du$

$$f \rightsquigarrow a^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}\int^{\xi}\frac{b}{a}} \cdot f$$

により Lf は $L'f'$、ただし $L' = \frac{d^2}{ds^2} + q(s)$

に変換され、これより上の定理はただちに得られる、しかし、この方法によると、a'' の存在を仮定しなければならないようである。

証明

次の一般的結果（これも Molchanov の結果の特別な場合と考えられる）を、まずしめす。

Proposition R^d で作用素 $L = \frac{1}{2}\Delta + b\cdot\nabla$（$b(x) = (b^1(x), \ldots, b^d(x))$ は有界連続）を考え、熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$ の基本解を $p(t,x,y)$ とする。このとき

(2) $p(t,x,y) \sim e^{\int_0^1 \langle b(x+(y-x)s),\, y-x\rangle ds} \cdot (2\pi t)^{-d} \cdots \frac{|x-y|^2}{2t}$ $(t \downarrow 0)$

（評価は x, y が有界集合上を動くとき一様）

略証 $p^B(t, x-y) = (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$, $t>0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ とおく pinned Brownian motion $P_{0,x}^{t,y}$ を用いると、形式的には

(3) $p(t,x,y) = E_{0,x}^{t,y}\left(e^{\int_0^t \langle b(x_s),\, dx_s\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t |b(x_s)|^2 ds}\right) p^B(t,x,y)$

とかける，この正確な意味づけは pinned Brownian motion $\hat{x}_s = \hat{x}_s(0\,x\,;\,t,y)$ の確率微分方程式

(4) $\begin{cases} d\hat{x}_s = dw_s + \frac{y-\hat{x}_s}{t-s}\, ds \\ \hat{x}_0 = x \end{cases}$ （w_s は Wiener process）

を考えることにより次のように得られる；(4) の解 $(\hat{x}_s, w_s)$ を用いると

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

(5) $$p(t,x,y) = E\left(e^{\int_0^t \langle b(\hat{x}_s), dW_s\rangle + \int_0^t \langle b(\hat{x}_s), \frac{y-\hat{x}_s}{t-s}\rangle ds - \frac{1}{2}\int_0^t |b(x_s)|^2 ds} \right) \times p^B(t, x-y)$$

明らかに $\int_0^t \langle b(\hat{x}_s, dW_s\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t |b(x_s)|^2 ds \to 0 \quad (t\downarrow 0) \quad a.s.$

又 $\int_0^t \langle b(\hat{x}_s), \frac{y-\hat{x}_s}{t-s}\rangle ds = \int_0^1 \langle b(\hat{x}_{ts}), \frac{y-\hat{x}_{ts}}{1-s}\rangle ds$

ところで $\{\hat{x}_{ts},\ 0\leq s\leq 1\}$ は

$$\hat{x}_{ts} = x + W_{ts} + \int_0^{ts} \frac{y-\hat{x}_u}{t-u} du$$
$$= x + W_{ts} + \int_0^s \frac{y-\hat{x}_{tu}}{1-u} du$$

一方 "$W_{ts} \to 0$ unif. in $s\in[0.1]$ when $t\downarrow 0$" より
"w.P.1 $\hat{x}_{ts} \to \phi(x)$ unif in $s\in[0.1]$ when $\epsilon\downarrow 0$"

ここで $\phi(s)$ は

$$\phi(x) = x + \int_0^s \frac{y-\phi(u)}{1-u} du$$

i.e $\phi(x) = x + (y-x)s$

故に $\int_0^1 \langle b(\hat{x}_{ts}), \frac{y-\hat{x}_{ts}}{1-s}\rangle ds \to \int_0^1 \langle b(x+(y-x)s, y-x\rangle ds \quad a.s$

これより(すこし評価が必要であるが)

$$P(t,x,y) \sim e^{\int_0^1 \langle b(x+(y-x)s,\ y-x\rangle ds} P_B(t,x,y) \quad (t\downarrow 0)$$

定理の証明にもどる、この拡散過程 X の sample path は次の確率微分方程式

$$dX_t = \sqrt{a(X_t)}\, dB_t + b(X_t)\, dt$$

の解として与えられる

$$S(\xi) = \int_c^\xi \frac{du}{\sqrt{a(u)}} \implies S\in C^2$$

Itoの公式より、 $Y_t = S(X_t)$ とおくと、

$$dY_t = dB_t - \frac{1}{4}\frac{a'(X_t)}{\sqrt{a(X_t)}} + \frac{b(X_t)}{\sqrt{a(X_t)}}\, dt$$
$$= dB_t + \beta(Y_t)\, dt$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$B(x) = \frac{b(S^{-1}(x))}{\sqrt{a(S^{-1}(x))}} - \frac{1}{4}\frac{a'(S^{-1}(x))}{\sqrt{a(S^{-1}(x))}}$$

故に，上の proposition より

Y_t の座標 S における ds に関する density

$\hat{p}(t, S_1, S_2)$ は

$$\hat{p}(t, S_1, S_2) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(S_2-S_1)^2}{2t}} e^{\int_{S_1}^{S_2} \beta(x)\,dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(S(\xi_1)-S(\xi_2))^2}{2t}} e^{\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[\frac{b(u)}{a(u)} - \frac{1}{4}\frac{a'(u)}{a(u)}\right] du}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(S(\xi_1)-S(\xi_2))^2}{2t}} e^{\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{b(u)}{a(u)} du} \sqrt[4]{\frac{a(\xi_1)}{a(\xi_2)}} \qquad (t \downarrow 0)$$

故に X_t の $d\xi$ に関する density $\tilde{p}(t, \xi, \eta)$ は

$$\tilde{p}(t,\xi,\eta) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(S(\xi)-S(\eta))^2}{2t}} e^{\int_{\xi}^{\eta}\frac{b(u)}{a(u)} du}\, a(\xi)^{\frac{1}{4}} a(\eta)^{-\frac{3}{4}}$$

$(t \downarrow 0)$

q.e.d.

2° 一般の場合

dm が，全く一般の区間 (l_1, l_2) 上の non-negative Radon measure のとき，その $p(t, x, y)$ について一般的になりたつ定理は，次のようなものである。

<u>Theorem 2</u> $l_1 < x \leqq y < l_2$ とする，又 $x, y \in \mathrm{Supp}.(dm)$ とする。このとき，

$$\lim_{t\downarrow 0}(2t)(-\log p(t,x,y)) = \left(\int_x^y \sqrt{\frac{1}{2}\frac{dm}{dx}}\,dx\right)^2$$

ここで，$\frac{dm}{dx}$ は dm の絶対連続部分の density をあらわす。

<u>Cor</u>. dm が singular $\Longleftrightarrow$ $l_1 < \forall x \leqq \forall y < l_2$
$\lim_{t\downarrow 0}(2t)(-\log p(t,x,y)) = 0$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

証明

方程式 $(\lambda - L)u = 0$ の正の増加解 $g_1(x;\lambda)$, 正の減少解 $g_2(x;\lambda)$ が定数倍をのぞいて一意的にきまる．（ただし、ℓ_1 又は ℓ_2 が regular のときは．そこで与えられた Feller の境界条件をみたすもの）．

Lemma 1 $\ell_1 < a < \ell_2$ とする．

(i) もし $\displaystyle\lim_{x \downarrow 0} \frac{\int_a^{a+x} dm(y)}{x^{\alpha}} = A$ ならば，$(\alpha > 0,\ A \geqq 0)$

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \lambda^{-\frac{1}{\alpha+1}} \left[\frac{-g_2^{+}(a)}{g_2(a)}\right] = A^{\frac{1}{\alpha+1}} \left[\left(\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}\right)\right]^{-1}$$

(ii) もし $\displaystyle\lim_{x \downarrow 0} \frac{\int_{a-x}^{a} dm(y)}{x^{\alpha}} = A$ ならば，$(\alpha > 0)$

$$\lim \lambda^{-\frac{1}{\alpha+1}} \left[\frac{g_1^{-}(a)}{g_1(a)}\right] = A^{\frac{1}{\alpha+1}} \left[\left(\frac{\alpha}{(\alpha+1)^2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}\right)\right]^{-1}$$

（g^{+} は 右微分，g^{-} は 左微分をあらわす）

（注） $\alpha = 1$ のとき $\left\{\left[\frac{\alpha}{(\alpha+1)^2}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}\right)\right\}^{-1} = 2 \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

（証） この Lemma は $\alpha = 1$ のとき McKean & Ray [7] にあるが、その証明は誤っている。上の一般的な結果は本質的に I.S. Kac [3], [4] によるが、Kac の結果自身は spectral function に関するものなので、以下での注意が必要になる。(注)

dm の右の部分から得られる $[0, \tilde{\ell})$ 上の measure（boundary condition をこめて考えるときは．inextensible measure と考えると便利） $d\tilde{m}$ を

$$\int_{x_1}^{x_2} d\tilde{m}(x) = \int_{a+x_1}^{a+x_2} dm(x) \qquad 0 \leqq x_1 < x_2$$

で定義する．

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$d\tilde{m}$ から通常のごとく

$$\{\varphi_a(x;\lambda),\ \psi_a(x;\lambda)\}\ x\in[0,\tilde{l})\ \text{を}$$

$$\begin{cases}\varphi_a(x) = 1-\lambda\int_0^x (x-s)\,\varphi_a(s)\,d\tilde{m}(s)\\ \psi_a(x) = x-\lambda\int_0^x (x-s)\,\psi_a(x)\,d\tilde{m}(s)\end{cases}$$

で定める，上の増加解，減少解 g_1, g_2 は Wronskion が1になるようにとっておくと

$$\varphi_a(x;-\lambda) = g_1^+(a)\,g_2(a+x) - g_2^+(a)\,g_1(0+x)$$

$$\psi_a(x;-\lambda) = g_2(a)\,g_1(a+x) - g_1(a)\,g_2(a+x)$$

なることは容易にわかる，故に

$$(※)\quad \frac{\psi_a(x;-\lambda)}{\varphi_a(x;-\lambda)} = \frac{g_2(a)\,g_1(a+x) - g_1(a)\,g_2(a+x)}{g_1^+(a)\,g_2(a+x) - g_2^+(a)\,g_1(a+x)}$$

$$= \frac{g_2(a)\left[1 - \dfrac{g_1(a)}{g_1(a+x)}\cdot\dfrac{g_2(a+x)}{g_2(a)}\right.}{-g_2^+(a)\left[1 - \dfrac{g_2(a+x)}{g_2^+(a)}\,\dfrac{g_1^+(a)}{g_1(a+x)}\right.}$$

(注) 尚、Kac の結果は 最近笠原氏（49年度京大修論）によって完全なものになり．又その証明も明快、簡単なものになった。

まず $A>0$ のときを考える．I．S．Kac［4］によると $0<{}^\forall x<\tilde{e}$ に対し

$$\lim_{\lambda\uparrow\infty}\ \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}}\,\frac{\psi_a(x;-\lambda)}{\varphi_a(x;-\lambda)} = A^{-\frac{1}{\alpha+1}}\left[\frac{\alpha}{(\alpha+1)^2}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\Gamma\!\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\Gamma\!\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}\right)^{-1}$$

又 $[0,x]$ に $M(x)\sim Ax^\alpha$ の mass をもつことより

$$0<\frac{g_1(a)}{g_1(a+x)}\le O(\lambda^{-n}),\quad \lambda\uparrow\infty$$

$$0<\frac{g_1^+(a)}{g_1(a+x)}\le O(\lambda^{-n}),\quad \lambda\uparrow\infty$$ なることがわかる。

実際，$g_1(a+x) = g_1(a)\,\varphi_a(x;-\lambda) + g_1^+(a)\,\psi_a(x;-\lambda)$

より $\dfrac{g_1(a+x)}{g_1(a)}\ge\varphi_a(x;-\lambda)$，$\dfrac{g_1(a+x)}{g_1^+(a)}\ge\psi_a(x;-\lambda)$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

がなりたつ、同様に、$g_1^+(a+x) = g_1(a)\varphi_a^+(x;-\lambda) + g_1^+(a)\psi_a^+(x;-\lambda)$ より $\dfrac{g_1^+(a+x)}{g_1(a)} \geq \varphi_a^+(x;-\lambda)$，これより $O\ \dfrac{g_1(a)}{g_1^+(a+x)} \leq O(\lambda^{-n})$ $\lambda\uparrow\infty$，$(\forall n)$ もわかる。

さらに $\varphi_a(x;-\lambda)$，$\psi_a(x;-\lambda)$ は 正の係数をもつ λ の巾級数である。これより明らか。

dm の点 a の左側の部分に左端点の境界条件を合せて考えて得られる inextensible measure $d\check{m}(x)$ on $[0, \check{\ell}]$

$$\int_{x_1}^{x_2} d\check{m}(x) = \int_{a-x_2}^{a-x_1} dm(x) \qquad 0 \leq x_1 < x_2$$

で定義する。

$d\check{m}$ から $\{\check{\varphi}_a(x;\lambda),\ \check{\psi}_a(x;\lambda)\}$ $x\in[0, \hat{\ell})$ を

$$\check{\varphi}_a(x) = 1 - \lambda\int_0^x (x-s)\check{\varphi}_a(s)\,d\check{m}(s)$$

$$\check{\psi}_a(x) = x - \lambda\int_0^x (x-s)\check{\psi}_a(s)\,d\check{m}(s)$$

で定義する 上と同様にして

$$\frac{g_2(a-x)}{g_2(a)} \geq \check{\varphi}_a(x;-\lambda) \qquad \frac{-g_2^-(a-x)}{g_2(a)} \geq \check{\psi}_a(x;-\lambda)$$

これより $x>0$ を固定したとき $\forall n>0$

$$0 < \frac{g_2(a)}{g_2(a-x)} \leq O(\lambda^{-n}),\ 0 < \frac{g_2(a)}{-g_2^-(a-x)} \leq O(\lambda^{-n}) \qquad (\lambda\uparrow\infty)$$

なることがわかる，ここで $a-x$ が a，a が $a+x$ になったと思えば全く同じ理由によって

$$0 < \frac{g_2(a+x)}{g_2(a)} < O(\lambda^{-n}),\quad 0 < \frac{g_2(a+x)}{-g_2^+(a)} \leq O(\lambda^{-n}), \qquad (\lambda\uparrow\infty)$$

故に (*) より

$$\lim_{\lambda\uparrow\infty} \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} \frac{\psi_a(x,-\lambda)}{\varphi_a(x;-\lambda)} = \lim_{\lambda\uparrow\infty} \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} \left(\frac{g_2(a)}{-g_2^+(a)}\right)$$

これより Lemma 1 の (i) がしたがう。

同様に、a の左側の measure $d\check{m}(x)$ で考えることにより Lemma 1 の (ii) が示せる。

次に $A=0$ のときを考える，本質的に同じであるから a の右側の場合 (i.e. Lemma 1 (i) の場合) のみ考える。

上の $d\tilde{m}$ のかわりに，$c>0$ に対して，

$d\hat{m}^c$ を

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$\int_{x_1}^{x_2} d\tilde{m}^c(x) = \int_{a+x_1}^{a+x_2} dm(x) + c\alpha \int_{x_1}^{x_2} y^{\alpha-1}\, dy, \quad 0 \leq x_1 < x_2$$

によって定義する，このとき $\lim_{x \downarrow 0} \dfrac{\int_0^x d\tilde{m}(y)}{x^\alpha} = c > 0$ である．

$d\tilde{m}^c$ から 同様に $\{\varphi_a^c(x;\lambda),\ \psi_a^c(x;\lambda)\}\ x \in [0, \tilde{\ell})$ を

$$\varphi_a^c(x) = 1 - \lambda \int_0^x (x-s)\varphi_a^c(s)\, d\tilde{m}^c(s)$$

$$\psi_a^c(x) = x - \lambda \int_0^x (x-s)\psi_a^c(s)\, d\tilde{m}^c(s)$$

で定義するとあきらかに $\forall x \in [0, \ell)$ に対し

$$\varphi_a(x;-\lambda) \leq \varphi_a^c(x;-\lambda)$$

$$\psi_a(x;-\lambda) \leq \psi_a^c(x;-\lambda)$$

がなりたつ。

すると、

$$\frac{\psi_a^c(x;-\lambda)}{\varphi_a^c(x;-\lambda)} = \int_0^x \frac{\alpha y}{[\varphi_a^c(y;-\lambda)]} \qquad (\lambda > 0$$

$$\leq \int_0^x \frac{\alpha y}{\{\varphi_a(y;-\lambda)\}^2} = \frac{\psi_a(x;-\lambda)}{\varphi_a(x;-\lambda)}$$

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} \frac{\psi_a^c(x;-\lambda)}{\varphi_a^c(x;-\lambda)} = c^{-\frac{1}{\alpha+1}} \left[\frac{\alpha}{(\alpha+1)^2}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) \Gamma\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}\right)^{-1}$$

$$\leq \varliminf_{\lambda \uparrow \infty} \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} \frac{\psi_a(x;-\lambda)}{\varphi_a(x;\lambda)}$$

c は任意故，

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} \frac{\psi_a(x;-\lambda)}{\varphi_a(x;-\lambda)} = \infty$$

すると上と同様に $\lambda^{-\frac{1}{\alpha+1}} \left(\dfrac{-g_2^+(a)}{g_2(a)}\right) \to 0 \quad (\lambda \uparrow \infty)$

が示せる　　　　q.e.d

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

Proposition. $l_1 < x \leqq y < l_2$

$$\lim_{\lambda\uparrow\infty} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(-\log E_x\left(e^{-\lambda\sigma_y}\right)\right) = \int_x^y \sqrt{\frac{1}{2}\frac{dm}{dx}}\,dx$$

$$= \lim_{\lambda\uparrow\infty} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(-\log E_y\left(e^{-\lambda\sigma_x}\right)\right)$$

Proof $\quad E_x(e^{-\lambda\sigma_y}) = \dfrac{g_1(x)}{g_1(y)}, \quad x<y$

故に，$-\log E_x(e^{-\lambda\sigma_y}) = \log g_1(y) - \log g_1(x)$

$$= \int_x^y \frac{g_1^-(u)}{g_1(u)}\,du$$

故に $\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(-\log E_x\left(e^{-\lambda\sigma_y}\right)\right)$

$$= \int_x^y \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\frac{g_1^-(u)}{g_1(u)}\,du \qquad \text{--------} \quad (*)$$

今 uが dm の Lebesgue set: $\exists\lim_{\varepsilon\uparrow 0}\dfrac{\int_{u-\varepsilon}^u dm(y)}{\varepsilon} = \exists\lim_{\varepsilon\uparrow 0}\dfrac{\int_u^{u+\varepsilon} dm(y)}{\varepsilon}$

$\left(:= \dfrac{dm}{dx}(u)\right)$ に属するとき Lemma 1 で $\alpha = 1$ として

$\lim_{\lambda\uparrow\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}\dfrac{g_1^-(u)}{g_1(u)} = \sqrt{\dfrac{1}{2}\dfrac{dm}{dx}(u)}$. となる。特にa.a $u\in[x,y]$でなりたつ.
故に..(※)で $\lambda\uparrow\infty$とするとき、積分との順序変更が出来ればよいが、それは次のようにしてわかる。

$e_1(u) = \dfrac{g_1^-(u)}{g_1(u)}$ とおく.

$$de_1(u) = -\frac{g_1^-(u)^2}{g_1(u)}\,du + \frac{dg_1^-(u)}{g_1(u)}$$

$$= -e_1(u)^2\,du + \lambda\,dm$$

故に $\displaystyle\int_x^y e_1(u)^2\,du = -e_1(y) + e_1(x) + \lambda\int_x^y dm(u)$

$$< e_1(x) + \lambda\int_x^y dm(u)$$

xを Lebesgue set に属するとすると $e_1(x) = O(\sqrt{\lambda}),\ \lambda\uparrow\infty$, (Lemma 1)

故に $\displaystyle\int_x^y e_1(u)^2\,du = O(\lambda)$.

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

故に $\int_x^y \left(\frac{e_1(u)}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 du = O(1)$, $\lambda \uparrow \infty$

故に $\left\{ \frac{e_1(u)}{\sqrt{\lambda}} \right\}_{\lambda > \lambda_0}$ は $L^2(x, y)$ の有界集合で，したがって *uniformly integrable*，故に (*) で $\lambda \uparrow \infty$ とすると順序変更が許されて

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} (\log E_x(e^{-\lambda \sigma_y})) = \int_x^y \lim_{\lambda \uparrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \frac{g_1^-(u)}{g_1(u)} \right) du = \int_x^y \sqrt{\frac{1}{2} \frac{dm}{dx}(u)}\, du.$$

$y < x$ のときは，

$$E_x(e^{-\lambda \sigma_y}) = \frac{g_2(x)}{g_2(y)}$$

で 上と同様にして

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} (-\log E_x(e^{-\lambda \sigma_y})) = \int_y^x \lim_{\lambda \uparrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \cdot \frac{g_2^+(u)}{g_2(u)} \right) du$$
$$= \int_y^x \sqrt{\frac{1}{2} \frac{dm}{dx}(u)}\, du .$$

q. e. d.

Th 2 の証明． *exponential type* の *Tauberian theorem* (cf. Varadham [9]，Fukushima [1]) より

$$\lim_{t \downarrow 0} 2t (-\log P_x(\sigma_y \le t)) = \left(\int_a^b \sqrt{\frac{1}{2} \frac{dm}{dx}(u)}\, du \right)^2$$

がなりたつ。

$$p(t, x, y) = \int_0^t p(t-s, y, y)\, P_x(\sigma_y \in ds),$$

$A = \min_{0 \le s \le t} p(t-s, y, y) > 0$ である。故に

$p(t, x, y) \ge A P_x(\sigma_y \le t)$ で，これより

$$\overline{\lim_{t \downarrow 0}}\, 2t(-\log p(t, x, y)) \le \lim_{t \downarrow 0} 2t(-\log P_x(\sigma_y \le t))$$
$$= \left[\int_x^y \sqrt{\frac{1}{2} \frac{dm}{dx}(u)}\, du \right]^2.$$

又，$c \neq y$ とすると

$\infty > M = \max_{0 \le s \le t} p(t-s, c, y)$,　　$x < c < y$.

故に $p(t, x, y) = \int_0^t p(t-s, c, y)\, P_x(\sigma_y \in ds) \le M P_x(\sigma_c \le t)$

となり，これより

$$\underline{\lim_{t \downarrow 0}}\, 2t(-\log p(t, x, y)) \ge \lim_{t \downarrow 0} 2t(-\log P_x(\sigma_c \le t))$$
$$= \left[\int_x^c \sqrt{\frac{1}{2} \frac{dm}{dx}(u)}\, du \right]^2.$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$c \uparrow y$として,

$$\varliminf_{t \downarrow 0} 2t(-\log P(t,x,y)) \geq \left[\int_x^y \sqrt{\frac{1}{2}\frac{dm}{dx}(u)}\, du\right]^2$$

故に $\displaystyle \lim_{t \downarrow 0} 2t(-\log P(t,x,y)) = \left[\int_x^y \sqrt{\frac{1}{2}\frac{dm}{dx}(u)}\, du\right]^2$

q.e.d

Th.2 より もし

$$\lim_{t \downarrow 0} (2t)(-\log P(t,x,y)) = 0$$

ならば $\frac{dm}{dx}(u) = 0 \quad a.a.\ u \in [x,y]$

がわかる.

例えば, $[x,y]$上の測度 dm が discrete :

$$dm \mid [x,y] = \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{x_i} \qquad x_0 = x < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = y$$

のときは

$$P(t,x,y) \sim C \cdot t^n \qquad (t \downarrow 0)$$

$dm \mid [x,y]$ が $[x,y]$上の continuous singular measure のとき. $P(t,x,y)$は 色々な挙動を示す

$\forall\, 0 < \beta < 1$ に対し.

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{\beta}(-\log P(t,x,y)) = C$$

となるような continuous singlar measure の例がある。

Cf, McKean − Ray [7] この方向のことを より精しく調べることは興味がある問題と思われる。

3° $\int_{0+} t^{-\beta} P(t,a,a)\, dt$ の発散収束

左端点 l_1が regular で. それが反射壁の場合は

$$\int_{0+} t^{-\beta} P(t, l_1, l_1)\, dt < \infty \iff \int_{0+} U(x)^{-\beta} dx < \infty$$

$$\text{where } U(x) = \int_0^x dy \int_0^y dm(z)$$

がなりたつ. このことは I.S Kac, M.G. Kreĭn [5] における spectral measure の発散収束に関する結果

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$dm \longleftrightarrow d\sigma$$

のとき

$$\int^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^{\alpha}} < \infty \iff \int_{0+} U(x)^{\alpha-1} dx < \infty$$

より直ちに従う。又 富崎〔8〕は この事実を直接 time change を用いて示した。

以下では 内点 a ; $l_1 < a < l_2$ における

$\int_{0+} t^{-\beta} p(t, a, a)\, dt$ の発散収束を論ずる。

$l_1 < a < l_2$ とし、

$$M_+(x) = \int_0^{a+x} dm(y) \qquad x > 0$$

$$M_-(x) = \int_{a-x}^{a} dm(y)$$

$$M(x) = M_+(x)\, M_-(x)$$

$$U_+(x) = \int_0^x M_+(y)\, dy$$

$$U_-(x) = \int_0^x M_-(y)\, dy$$

$$U(x) = \int_0^x M(y)\, dy = U_+(x) + U_-(x)$$

とおく。以下 $m\{a\} = 0$, $m([a, a+\varepsilon))\, m((a-\varepsilon, a]) > 0$, $^{\forall}\varepsilon > 0$ を仮定するが、そうでないときも結論が正しいことは簡単な考察によってわかる。

<u>Theorem 3</u>

$$\int_{0+} t^{-\beta} p(t, a, a)\, dt < \infty \iff \int_{0+} U(x)^{-\beta} dx < \infty \qquad (\beta > 0)$$

<u>Proof</u>

X^+ : the quasi diffusion on $[a, l_2)$ corresponding to $\frac{d}{dm}\frac{d}{dx}$ with a as reflecting and l_2 the same boundary condition as X,

X^- : the quasi diffusion on $[l_1, a]$ defined similarly,

上の $M_+(x)$, $M_-(x)$ は X^+, X^- に対応する inextensible measure より得られたものと考える。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$M_+ \longleftrightarrow d\sigma$
$M_- \longleftrightarrow d\sigma^-$ をKreinの対応とする。

$$g_\lambda^+(a) = \int_0^\infty \frac{d\sigma^+(\xi)}{\lambda+\xi},$$

$$g_\lambda^-(a) = \int_0^\infty \frac{d\sigma^-(\xi)}{\lambda+\xi}, \qquad \text{とおく} \quad (\lambda > 0)$$

$\hat{g}_\lambda(a)$ を

$$\frac{1}{\hat{g}_\lambda(a)} = \frac{1}{g_\lambda^+(a)} + \frac{1}{g_\lambda^-(a)}$$

で定義する。

<u>Lemma 1</u> (Ito – McKeam [2])

$$\hat{g}_\lambda(a) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, p(t, a, a)\, dt$$

証明は省略し、これの probabilistic な意味を注意しておく。$\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, a, a)\, dt\right]^{-1}$ は diffusion Xの点aにおける inverse local time の exponent であり、$g_\lambda^+(a)^{-1}, g_\lambda^-(a)^{-1}$ は、それぞれ diffusion X^+, X^- の inverse local time の exponent である。したがって Lemmaの主張は Xの inverse local time が X^+, X^- の inverse local time の独立な和になるということで、実際これは 正、負の側の excursion でXの inverse local time を分解したことに対応する。

$$\hat{g}_\lambda(a) = \int_0^\infty \frac{d\hat{\sigma}(\xi)}{\lambda+\xi} \qquad \lambda > 0$$

となる 非負 Radon measure $d\hat{\sigma}$ が存在する。仮定により

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma^+(\xi)}{\xi} = \infty, \qquad \int_0^\infty \frac{d\sigma^-(\xi)}{\xi} = \infty$$

であるので

$$\int_0^\infty \frac{d\hat{\sigma}(\xi)}{\xi} = \infty$$

Kreinの対応で $d\hat{\sigma}$ に対応する inextensible measure を $\hat{M}(x) = \int_0^x d\hat{m}(y)$ on $[0, \ell]$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

2つの inextensible measure $M_1(x)=\int_0^x dm_1(y)$ on $[0, l_1]$

$M_2(x)=\int_0^x dm_2(y)$ on $[0, l_2]$ を考える。(但し $M_i(\varepsilon)>0, \forall\varepsilon>0$

$(i=1, 2)$ とする)。

$M_i \longleftrightarrow d\sigma_i \quad i=1, 2$ を Krein の対応とし、

$$T_i(\lambda)=\int_0^\infty \frac{d\sigma_i(\xi)}{\lambda+\xi} \qquad i=1, 2$$

とする。

<u>Def. 1</u> $M_1 \ll M_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\alpha>0\ \exists\beta>0,\ \exists\delta>0$

$\ni \alpha M_1(\beta x) \leq M_2(x)$, $\forall x\in[0, \delta]$

<u>Def. 2</u> $T_1 \gg T_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\lambda_0>0$
$\exists k>0$

$\ni \forall\lambda\geq\lambda_0$
$k T_2(\lambda) \leq T_1(\lambda)$

<u>Lemma 2</u> (I. S Kac [4]

$M(x)=\int_0^x dm(y)$: inextensible measure $\longrightarrow d\sigma$ (スペクトル測度) を Krein の対応
on $[0, l]$

とする。 そして $T(\lambda)=\int_0^\infty \frac{d\sigma(\xi)}{\lambda+\xi}$ とおく

このとき、$\forall b\in[0, l)$ に対し、

$$\frac{1}{\lambda M(b)+\frac{1}{b}} \leq T(\lambda) \leq b+\frac{1}{\lambda M(b)}$$

<u>Lemma 3</u> $M(x)=\int_0^x dm(y)$; inextensible measure on $[0, l]$

$\longleftrightarrow d\sigma$ を Krein 対応とする。

このとき、$c\,d\sigma \longleftrightarrow M^c(x)=\frac{1}{c}M\left(\frac{x}{c}\right)$ on $[0, l_c]$

(cf Krein [6])

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

Lemma 4

$M_i = \int_0^x dm_i(y)$: inextensible measure on $[0,\ l_i]$ $(i=1,2)$

$M_i(\varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

$M_i \longleftrightarrow d\sigma_i$ を the Krein correspondence $(i=1,2)$ とする

$$T_i(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\sigma(\xi)}{\lambda + \xi}$$

このとき、次の (i) (ii) がなりたつ。

(i) $T_1 \ll T_2 \implies M_1 \gg M_2$

(ii) $M_1 \gg M_2$ かつ 次の条件のいづれかが

みたされているとする :

① $\exists \delta > 0 \ni x \in (0\ \delta) \longrightarrow M_2(x)$: continuous

② $d(M_1 - M_2) \geq 0$ on $[0,\ b]$ $(\exists b > 0)$. i.e. $(M_1 - M_2)(x)$ is non-decreasing on $[0,\ b]$ $(\exists\ b > 0)$

このとき $T_1 \ll T_2$

㊟ (ii) の附帯条件は、のぞかれることが望ましい。

Proof

i) $T_1 \ll T_2$ と仮定する。この仮定より $\exists\ k > 0,\ \lambda_0 > 0$

$$\frac{T_2(\lambda)}{T_1(\lambda)} \geq k, \quad \forall \lambda \geq \lambda_0$$

$T_2(\lambda) \longleftrightarrow M_2$ のとき

Lemma 3 より

$$c\,T_2(\lambda) \longleftrightarrow M_2^c(x) = \frac{1}{c} M_2\left(\frac{x}{c}\right)$$

Lemma 2 より $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (0,\ \delta)$

$$\frac{1}{\lambda M_1(x) + \frac{1}{x}} \leq T_1(\lambda) \qquad \forall \lambda > 0$$

$$c\,T_2(\lambda) \leq x + \frac{1}{\lambda M_2^c(x)} \qquad \forall \lambda > 0$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$\therefore\ ck \leq \left(\lambda M_1(x) + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{\lambda M_2^c(x)}\right)$$

$$= 1 + \frac{M_1(x)}{M_2^c(x)} + \lambda x M_1(x) + \frac{1}{\lambda x M_2^c(x)}$$

$\lambda = \dfrac{1}{x M_2^c(x)}$ とおく，又 c を $ck \geq 4$ なるようにとる。すると $0 < {}^{\exists}\delta_1 < \delta$

$$4 \leq ck \leq 2\left(1 + \frac{M_1(x)}{M_2^c(x)}\right) \qquad \forall x \in (0, \delta_1)$$

$\therefore\ M_1(x) \geqq M_2^c(x) = cM_2\left(\frac{x}{c}\right)$，

このことは $M_1 \gg M_2$ を意味する。

(ii) $M_1 \gg M_2$ を仮定する．

① $\exists \delta \ni x \in [0, \delta) \longrightarrow M_2(x)$ が *continuous* のときは (i) の部分の証明を逆にたどって．$T_1 \ll T_2$ が示せる；この際、$\lambda = \dfrac{1}{xM_2(x)}$ が $x \in (0, \delta)$ を動くとき、$\lambda \geq {}^{\exists}\lambda_0$ なるすべての λ を動くことに注意すればよい。

② $dM_1 \geq dM_2$ の場合

M_i に対し．対応する $\varphi_i(x; -\lambda)$ $(i = 1, 2)$ ；

$$\varphi_i(x) = 1 + \lambda \int_0^x (x - s)\varphi_i(s)\, dM_i(s)$$

を考えると 仮定より

(*) $\varphi_1(x; -\lambda) \geq \varphi_2(x; -\lambda)$ $\forall x \in [0, b]$ $({}^{\exists} b > 0)$

今 $M_i' = M_i \,|\, [0, b] + \infty \cdot \delta_b$ ：（b を吸収壁にした）

inextensible measure on $[0, b]$ を考えると $(i = 1, 2)$

$$M_i' \longleftrightarrow T_i'(\lambda) = \frac{\psi_i(b; -\lambda)}{\varphi_i(b; -\lambda)} = \int_0^b \frac{dx}{[\varphi_i(x; -\lambda)]^2}$$

$i = 1, 2$

(*) より

$$T_1'(\lambda) \leq T_2'(\lambda)$$

他方 $|T_i'(\lambda) - T_i(\lambda)| \leq O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ $(\lambda \uparrow \infty)$ (cf. I.S. Kac [ ])

に注意すれば、明らかに $T_i'(\lambda) \sim T_i(\lambda)$ $(\lambda \uparrow \infty)$, $i = 1, 2$,

したがって $\forall c > 1$ に対し $\exists \lambda_0$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$T_1(\lambda) \leq C\, T_2(\lambda) \qquad \forall \lambda > \lambda_0$$

特に $T_1(\lambda) \ll T_2(\lambda)$ である　　q. e. d

Proof of Theorem 3

$$\hat{g}_\lambda(a) = \int_0^\infty \frac{d\hat{\sigma}(\xi)}{\lambda+\xi}, \qquad \lambda > 0$$

かつ $d\hat{\sigma}$ に対応する *inextensible measure* を $\hat{M}(x)$ としたので、Kac – Krein の結果より

$$\int_{0+} t^{-\beta}\, p(t,a,a)\,dt < \infty \iff \int^\infty \hat{g}_\lambda(a)\lambda^{\beta-1}\,d\lambda < \infty$$

$$\iff \int_{0+} \hat{U}(x)^{-\beta}\,dx < \infty$$

ここで $\hat{U}(x) = \int_0^x \hat{M}(y)\,dy$

なることがわかっている。

もし $M(x) = M_+(x) + M_-(x)$ に対し

“ $M(x \ll \hat{M}(x)$ かつ $M(x) \gg \hat{M}(x)$

なることが示せると

$$\int_{0+} \hat{U}(x)^{-\beta}\,dx < \infty \iff \int_{0+} U(x)^{-\beta}\,dx < \infty$$

となるので、定理が示せたことになる。

“　　　　　” の証明

$$\frac{1}{\hat{g}_\lambda(a)} = \frac{1}{g_\lambda^+(a)} + \frac{1}{g_\lambda^-(a)} \qquad \text{より}$$

$$\hat{g}_\lambda(a) \leq g_\lambda^+(a)$$

$$\hat{g}_\lambda(a) \leq g_\lambda^-(a)$$

故に Lemma 4 (i) より

$$\hat{M}(x) \gg M^+(x)$$

$$\hat{M}(x) \gg M^-(x)$$

故に $\hat{M}(x) \gg M^+(x) + M^-(x) = M(x)$

次に

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

$$M \geqslant M^+$$
$$M \geqslant M^- \qquad \text{は明らか}$$

故に Lemma 4 (ii) より、Mに（適当な境界条件を与えて inextensible measure と考えて）対応する spectral measure を $d\sigma$, $T(\lambda)=\int_0^\infty \frac{d\sigma(\xi)}{\lambda+\xi}$ とするとき

$$g_\lambda^+(a) \gg T(\lambda)$$

$$g_\lambda^-(a) \gg T(\lambda)$$

故に $\frac{1}{\hat{g}_\lambda(a)} = \frac{1}{g_\lambda^+(a)} + \frac{1}{g_\lambda^-(a)}$

より $\hat{g}_\lambda(a) \gg T(\lambda)$,

故に再び Lemma 4 (i) より

$$\hat{M}(x) \leqslant M(x)$$

かくして " " は証明されて q. e. d

応用例

1次元 diffusion $\frac{d}{dm}\frac{d}{dx}$ と1次元 Brown 運動との直積の一点 $(a, 0)$ への hitting の可能性について：

$$P_x(\sigma_{(a,0)} < \infty) > 0 \iff \int_{0+} \left\{ \int_0^x dy \int_{a-y}^{a+y} dm(z) \right\}^{-\frac{1}{2}} dx < \infty$$

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

[1] M. Fukushima : On the spectral distribution of a disordered system and the range of a random walk, Osaka J. Math 11 (1974).

[2] Itô - McKean : Diffusion processes and their sample paths Springer, 1965.

[3] I. S. Kac : Power asymptotic estimates for spectral functions of generalized boundary value problems of second order Soviet Math. Dokl. Vol. 13 (1972) No. 2

[4] I. S. Kac ; Generalization of an asymptotic formula of V. A. Marcenko for spectral functions of a second order boundary value problem, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 37 (1973) 422-436

[5] I. S. Kac and M. G. Krein : On the spectral functions of the string, Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 103 1974.

[6] M. G. Krein : On some cases of effective determination of the density of an inhomogeneous cord from its spectral function, Dokl. Akad Nauk SSSR 93 (1953)

[7] H. P. McKean, Jr & D. B. Ray : Spectral distribution of a differential operator, Duke Math. J. 29 (1962)

[8] M. Tomisaki : 九大修論 (1948)

[9] S. R. S. Varadhan : On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coeffients, Comm. Pure Appl. Math. Vol. 20 (1967).

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

附記．マルコフ過程シンポジウムに於いて次の講演がなされた。

櫃田倍之；マルチンゲールの絶対連続性への応用

清水昭信「確率微分方程式の解の一意性について」

土谷正明「確率微分方程式のrelaxed, solutionと半平面のブラウン運動の境界問題」

岡部靖憲「$P[L\frac{d}{dx}]X(t)=Z'(t)$ の解である確率過程Xはマルコフ性をもつ」

中尾慎太郎「On the spectral distribution of the Schrödinger operator with a random potential」

笠原勇二「一次元一般化２階微分作用素のスペクトル漸近定理とその応用」

池田信行、小谷真一、渡辺信三
「一次元一般化２階微分作用素のスペクトル理論とその一般拡散過程の推移確率密度の漸近性質への応用」

長井英生「On the asymptotic behariour of spectra of a rondom difference cperator」

山里真「L'evy measureが片側に分布しているL－分布の単峰性」

塩谷幸七、小倉幸雄
「多タイプ、クリティカルGalton－Watson processの不変測度」

佐藤健一「直積分枝過程から誘導されるマルコフ連鎖の固有値と拡散過程への収束」

藤田哲郎「Controled branching processとφ－bronching process」

志村道夫「分枝安定過程の爆発について」

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

渡 辺 信 三 「Wentzel 境界条件をもつ多次元拡散過程の Poisson point process による構成」

兼 田 均 「連続 Feller 半群の構成」

渡 辺 信 三、池 田 信 行
「多様体上の拡散過程」

福 島 正 俊 「多次元拡散過程と integro differential forms」

Sem. on Probab.
Vol.41 1975年
P1-123

1975年5月発行　確率論セミナー