Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 40

Markov過程の研究

1973

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.40　1973年
P1-98

ま　え　が　き

１９７３年１月１１日から１３日まで東京工業大学で*Markov*過程に関するシンポジュームが行なわれた。そこでの報告のうち半数以上がここに収められている．残りのものもいずれ別の形で発表されると思う。

尚，同種のシンポジュームが過去既に２度行なわれ，その報告集が数理解析研究所講究録１１２及び１３８として出されている。

１９７３年５月

国田　寛

福島正俊

2/8

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

目　　次

1. 確率過程の Filtering Problem から生じたある方程式について 3
小松 考, 藤崎正敏

2. 斜めに反射する半平面上のブラウン運動の1点への到達確率 23
本尾 実

3. 分枝過程の超過測度と双対性 .... 長沢正雄 49

4. 1次元 Lévy 過程のリゾルベント密度と1点への到達の問題 73
高田俊雄

5. 1次元 diffusion の one parameter family としての Bessel diffusions 78
志賀徳造, 渡辺信三

6. A general convergence theorem for the numerical function and the nonstationary stochastic processes 95
川畑茂徳

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

確率過程のFiltering Problemから生じたある方程式について

小松　孝，藤崎正敏

§0. まえがき

確率過程(Z_t, ζ_t)があって，ζ_tは直接観測出来るが，Z_tは$\mathcal{F}_t = \sigma(\zeta_s: s \leqq t)$を通してしか知ることが出来ないとき，$\pi_t(dx) = P[Z_t \in dx | \mathcal{F}_t]$について調べることを*Filtering Problem*という。(Z_t, ζ_t)がある型の確率過程であるとき，π_tは非線型の確率微分方程式を満足することが知られている([2]参照)。ところが、簡単な変換によってπ_tと互に移りあい、かつ線型の確率微分方程式を満たす測度が存在する(§3)。(Z_t, ζ_t)にある種の制限をすれば、その測度は*random*な係数の放物型方程式を満たす(§1)。これらの方程式は$(\zeta_s; \ 0 \leqq s \leqq T)$が与えられたものとして、それ自身閉じた意味を持っている。従って、最初の問題とは一応別に、これらの方程式について調べる問題が生じる。その解はtを助変数に持つ測度であるが、§2ではある条件のもとでその測度の密度関数が存在することを示す。解の一意性は、元の問題に戻る時に必要であり，最も重要な問題であるが、今の段階では未だ不十分な解答しか得られていない。その例を§2，§3で述べる.

なお、§1, 2と§3の内容は独立しているが、両者の比較を容易にするため、出来る限り記号は統一してある．筆者は[7]，[4]から多くの示唆を得ている。

§1. *Filter*と放物型方程式

確率空間$(\Omega, \mathcal{G}, P)$に増大する*σ-algebra*の族$\mathcal{G}_t \subset \mathcal{G}$, $0 \leqq t \leqq T < \infty$, が与えられていて，その上で定義された$d+e$次元の確率過程$(Z_t, \zeta_t)$が次の確率微分方程式を満たしているとする．

$$(1.1) \quad \begin{cases} dZ_t = dN_t + B(t, \zeta, Z_t)dt \\ d\zeta_t = d\mu_t + (b(t, \zeta) + a(t, \zeta)h(t, \zeta, Z_t))dt, \quad \zeta_0 = 0 \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(4)

$$\begin{cases} N_t^i \in \mathcal{M}_\ell(\mathcal{G}_t, P), & d\langle N_t^i, N_t^j\rangle = A^{ij}(t, \zeta, Z_t)\,dt \\ \mu_t^i \in \mathcal{M}_\ell(\mathcal{G}_t, P), & d\langle \mu_t^i, \mu_t^j\rangle = a^{ij}(t,\zeta)\,dt, \quad d\langle N_t^i, \mu_t^j\rangle = 0, \end{cases}$$

ただし，$\mathcal{M}_\ell$ は連続な local martingale（$t=0$ での値は 0）の空間を表わし，ζ は（ζ_s；$s \leqq t$）の略記である．この確率過程（Z_t，ζ_t）の ζ_t だけが直接観測出来ると考える。$\sigma(\zeta_s\,;\, s \leqq t) = \mathcal{F}_t$ とし，$E[f(Z_t) \mid \mathcal{F}_t] = \pi_t f$（$f$ は R^d 上の関数）のことを Filter とよぶ．

以下次のことを仮定する。

(1.2) $$E\left[\int_0^T h\cdot ah\,dt\right] < \infty$$

このとき、$\pi_t h = \bar{h}$ が定義出来て、$d\bar{\mu}_t = d\mu_t + a(h-\bar{h})dt$，$\bar{\mu}_0 = 0$ と置けば、$\bar{\mu}_t^i \in \mathcal{M}_\ell(\mathcal{F}_t, P)$ となる．次に、

(1.3) $$\varphi_t = exp\left\{\int_0^t \bar{h}\,d\nu_s - \frac{1}{2}\int_0^t \bar{h}\cdot a\bar{h}\,ds\right\}, \qquad \nu_t = \mu_t + \int_0^t ah\,ds$$

と置けば、S が $E[\varphi_S^{-1}] = 1$ である $(\mathcal{F}_t)$-stopping time（以下 stopping time といえば、すべてこの種類を指す）である限り，変換された確率測度 $d\tilde{P} = \varphi_S^{-1}\,dP$ に関して、$\nu_t \in \mathcal{M}_\ell(\mathcal{F}_t, \tilde{P})$，$t \leqq S$，となり，$\zeta_t$（$t \leqq S$）は次の確率微分方程式を満たす。

(1.4) $$d\zeta_t = d\nu_t + b(t,\zeta)\,dt\,, \quad d\langle \nu_t^i, \nu_t^j\rangle = a^{ij}(t,\zeta)\,dt$$

このことを、$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \tilde{P}\,;\, \zeta_t, t \leqq S)$ は (a,b)-process であるということにしよう．後の定理のため次の仮定を用意しておこう。

仮定 A．　$a(t,\cdot)$，$b(t,\cdot)$ は次の性質を持つ：$(\Omega', \mathcal{G}', \mathcal{G}'_t, P'\,;\, \zeta'_t, t \leqq S')$ が (a,b)-process であれば、$\mathcal{M}_\ell(\sigma(\zeta'_s\,;\, s \leqq t), P')$ は ν'_t によって生成される．ただし ν'_t は ζ'_t の martingale 部分（$d\nu'_t = d\zeta'_t - b(t,\zeta')dt$）である．

この仮定が満たされる場合の例として次のものがある．

例 1.　$a = a(t, \zeta_t)$，$b = b(t, \zeta_t)$ であって、$a(t,y)$ は正定値で連続、$b(t,y)$ は局所有界．

例 2.　a，b は t のみに関係する。

例 3.　$a(t,\zeta)$ は正定値で、a, b は Lipshitz 連続、すなわち $[0,T]$ 上の有界測度 Γ が存在して、

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$\sum_{ij}|a^{ij}(t,\zeta)-a^{ij}(t,\zeta')|+\sum_{i}|b^{i}(t,\zeta)-b^{i}(t,\zeta')|\leqq\int_0^t|\zeta_s-\zeta'_s|\Gamma(t-ds)\quad a.s.。$$

(例1については Kunita, Watanabe [5] と同様, 例3については Fujisaki, Kallianpur, Kunita [2] にある。)

π_t と同様な働きを持つ測度 U_t を定義しよう。まず、

(1.5) $$\Psi(t,\zeta,x)=exp\left\{\int_0^t h(s,\zeta,x)\,d\nu_s-\frac{1}{2}\int_0^t h\cdot ah(s,\zeta,x)\,ds\right\},\quad x\in R^d$$

と置く. Ψ が x について連続であれば、

(1.6) $$U_t f=\varphi_t\,E[f\Psi^{-1}(t,\zeta,Z_t)|\mathcal{F}_t],\quad f\in\mathcal{D}(R^d)\quad(R^d\text{ 上の test function})$$

によって σ-有界な測度 U_t が定義される. これについて次のことが分る.

(1.7) $$\varphi_t=U_t(\Psi),\qquad \pi_t f=\frac{U_t(f\Psi)}{U_t(\Psi)}\quad(f\in\mathcal{D}(R^d))$$

π_t の満たす方程式は Fujisaki, Kallianpur, Kunita [2] によって我々のよりも一般な場合について得られているが, 上に定義した U_t はより簡単な方程式を満たす。それを次に述べよう.

定理1. 仮定Aが満たされ, さらに、任意の $R>0$ に対して、

(1.8) $$\begin{cases}\displaystyle\sum_{|\alpha|\leqq[\frac{d}{2}]+3}\int_0^T\int_{|x|\leqq R}\partial^\alpha h\cdot a\,\partial^\alpha h(t,\zeta,x)\,dt\,dx<\infty & a.e.\\[2ex] \displaystyle\int_0^T\sup_{|x|\leqq R}(\text{trace }A+|B|)(t,\zeta,x)\,dt<\infty & a.e.\end{cases}$$

($\partial_i=\partial/\partial x_i$, $\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_d^{\alpha_d}$, $|\alpha|=\sum_i\alpha_i$) であれば、$f\in\mathcal{D}(R^d)$ に対し

(1.9) $$\frac{d}{dt}U_t f=U_t(\Psi L\Psi^{-1}f),\quad L=\frac{1}{2}\sum_{ij}A^{ij}(t,\zeta,x)\partial_i\partial_j+\sum_i B^i(t,\zeta,x)\partial_i$$

が成立する.

<u>補題1.</u> β_t を1次元 Brown 運動, $F=F(t,\omega,x)$ とする.

a) $\displaystyle\int_0^T\int_{R^d}(1+|x|^2)^{[\frac{d}{2}]+1}|F|^2\,dt\,dx<\infty$ a.e. ならば

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(6)

$$\int\left(\int_0^T F\, d\beta_t\right) dx = \int_0^T\left(\int F\, dx\right) d\beta_t \ .$$

b) $\int_0^T\int_{R^d} \sum_{|\alpha|\leqq[\frac{d}{2}]+1+p} |\partial^\alpha F|^2 dt\, dx < \infty$ a.e. $(P\geqq 0)$ ならば，ほとんどすべてのωについて，$\int_0^t F\, d\beta_s$ はxに関してP回連続微分可能.

Brown 運動の代りに martingale による確率積分にしても、同様のことが成立する．（あとで用いるのはその様に一般化したもの.）

補題 2. Z_t, ζ_t その他は前の通りとする．いま、

$$F(t,\zeta,x)-F(0,\zeta,x)=\int_0^T V(s,\zeta,x)\, d\nu_s+\int_0^t W(s,\zeta,x)ds \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\delta\downarrow 0}\ \sup\limits_{t,|x-x'|\leqq\delta} |\partial^\alpha F(t,\zeta,x)-\partial^\alpha F(t,\zeta,x')|=0, & |\alpha|\leqq 2 \\ \lim\limits_{\delta\downarrow 0}\int_0^T \sup\limits_{|x-x'|\leqq\delta} |a^{\frac{1}{2}}(t,\zeta)(V(t,\zeta,x)-V(t,\zeta,x'))|^2 dt=0 \\ \lim\limits_{\delta\downarrow 0}\int_0^T \sup\limits_{|x-x'|\leqq\delta} |W(t,\zeta,x)-W(t,\zeta,x')|\, dt=0 \end{cases} \tag{1.11}$$

ならば、次の式が成立する。

$$\begin{aligned} &F(t,\zeta,Z_t)-F(0,\zeta,Z_0) \\ &=\int_0^t \partial F(s,\zeta,Z_s)\, dN_s+\int_0^t LF(s,\zeta,Z_s)ds+\int_0^t V(s,\zeta,Z_s)\, d\nu_s+\int_0^t W(s,\zeta,Z_s)ds \end{aligned} \tag{1.12}$$

（定理1の証明） $f\in\mathcal{D}$ とし，$F(t,\zeta,x)=f(x)\Psi^{-1}(t,\zeta,x)$ と置けば、

$$dF(t,\zeta,x)=-Fh(t,\zeta,x)d\nu_t+F\, h\cdot ah(t,\zeta,x)dt.$$

補題1より，任意の有界領域Dに対し，$\log\Psi(t,\zeta,x)$ のxに関する2階までの微分は $[0,T]\times D$ 上で一様連続である。これより、F, $V=-Fh$ 及び $W=F\, h\cdot ah$ は補題2の条件を満たすことが確かめられる。従って、

$$F(t,\zeta,Z_t)-f(Z_0) \tag{1.13}$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$= \int_0^t \partial F(s, \zeta, Z_s)\, dN_s + \int_0^t LF(s, \zeta, Z_s)\, ds - \int_0^t Fh(s, \zeta, Z_s)\, d\mu_s$$

が成立し、さらに次の式を得る。

(1.14) $$\varphi_t F(t, \zeta, Z_t) - f(Z_0) - \int_0^t \varphi_s\, LF(s, \zeta, Z_s)\, ds$$

$$= \int_0^t \varphi_s\, \partial F(s, \zeta, Z_s)\, dN_s + \int_0^t \varphi_s F(\overline{h} - h)(s, \zeta, Z_s)\, d\mu_s$$

条件(1.8)より上の式の各項は$(\mathcal{F}_t)$-*locally integrable*となり,

(1.15) $$\overline{M}_t = \varphi_t\, \pi_t(F) - \pi_0(f) - \int_0^t \varphi_s \pi_s(LF)\, ds$$

が矛盾なく定義される．しかも、(1.14)の右辺が$\mathcal{M}_\ell(\mathcal{G}_t, P)$に属することより$\overline{M}_t \in \mathcal{M}_\ell(\mathcal{F}_t, P)$であることが容易に証明出来る．

我々の目的は$\overline{M}_t \equiv 0$を示すことである．$\overline{Y}_t$を任意の$\mathcal{M}_\ell(\mathcal{F}_t, P)$の元とすると、仮定$A$より$\overline{Y}_t\, \varphi_t$は次のように表現される。

(1.16) $$\overline{Y}_t\, \varphi_t = \int_0^t \alpha_s\, d\nu_s = Y_t \qquad (\alpha_t : (\mathcal{F}_t)\text{-}adapted)$$

必要ならば$P(T_n < T) \to 0$ $(n \to \infty)$となる*stopping time*の列T_nで止めて計算することにすると、

$$E[\overline{Y}_t \overline{M}_t] = E[\overline{Y}_t\, \varphi_t\, \pi_t(F)] - E[\overline{Y}_t \pi_0(f)] - E[\overline{Y}_t \int_0^t \varphi_s \pi_s(LF)\, ds]$$

$$= E[Y_t\, \pi_t(F)] - E[\int_0^t Y_s\, \pi_s(LF)\, ds]$$

$$= E[Y_t F(t, \zeta, Z_t) - \int_0^t Y_s\, LF(s, \zeta, Z_s)\, ds]$$

ところが(1.13)と(1.16)より、

$$Y_t F(t, \zeta, Z_t) - \int_0^t Y_s\, LF(s, \zeta, Z_s)\, ds$$

$$= \int_0^t Y_s\, \partial F(s, \zeta, Z_s)\, dN_s + \int_0^t F(s, \zeta, Z_s)(-Y_s h(s, \zeta, Z_s) + \alpha_s)\, d\mu_s$$

従って$E[\overline{Y}_t\, \overline{M}_t] = 0$であることが分る．特に$\overline{Y}_t = \overline{M}_t$と置けば$\overline{M}_t \equiv 0$であることが分る.

Q.E.D.

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

この証明からすぐ分るように, $h(t,\zeta,x)=H(t,\zeta)k(x)$ (H は $e\times N$-matrix, k は N-vector) の場合、H に対する可積分性の条件と、k が2回連続微分可能という条件があれば、h に対する他の仮定なしに、定理が成立する. また上と同様の証明によって次の系を得る.

系1.1. 仮定 A と条件 (1.8) が満たされているとする. $f(t,\zeta,x)$ が、

$$(1.17)\quad \begin{cases} R^d \text{ の有界集合 } D \text{ が存在し、} [0,T]\times D^c \text{ 上で } f\equiv 0, \\ f \text{ は } x \text{ に関して2回微分可能で、各微分は } (t,x) \text{ に関して連続}, \\ \lim_{\delta\downarrow 0}\int_0^T \sup_{|x-x'|\leqq\delta}\left|\frac{\partial f}{\partial s}(s,\zeta,x)-\frac{\partial f}{\partial s}(s,\zeta,x')\right|ds=0, \end{cases}$$

を満たすならば、次の式が成立する.

$$(1.18)\quad \frac{d}{dt}U_tf=U_t([\Psi L\Psi^{-1}+\frac{\partial}{\partial t}]f)$$

注意. 今まで $d\langle N_t^i,\mu_t^j\rangle=0$ であることを前提としてきたが、次の様な場合も同様に取り扱うことが出来る.

$$(1.19)\quad d\langle N_t^i,\mu_t^j\rangle=\Xi^{ij}(t,\zeta)dt,\qquad \Xi \text{ は } d\times e-matrix.$$

まず、$a\tilde{a}=\tilde{a}a=\chi_a$, $\Xi\chi_a=\Xi$ をみたす行列 $\tilde{a}$, χ_a が存在する. a が正定値の時は $\tilde{a}$, χ_a はそれぞれ a の逆行列, e 次元単位行列である. そこで $\tilde{a}$ を a^{-1} と書くことにしよう.

次に $A-\Xi a^{-1}\Xi^*$ が非負対称行列であることに注意して、

$$(1.20)\quad \check{N}_t=N_t-\int_0^t\Xi a^{-1}(s,\zeta)d\mu_s,\quad \check{Z}_t=Z_t-\int_0^t\Xi a^{-1}(s,\zeta)d\nu_s$$

と置けば、$\check{N}_t^i\in\mathcal{M}_\ell(\mathcal{O}_t,P)$, $d\langle\check{N}_t^i,\check{N}_t^j\rangle=(A-\Xi a^{-1}\Xi^*)^{ij}dt$, さらに $d\langle\check{N}_t^i,\mu_t^j\rangle=0$ であり, $(\check{Z}_t,\zeta_t)$ は次の方程式を満たす.

$$(1.21)\quad \begin{cases} d\check{Z}_t=d\check{N}_t+(\check{B}(s,\zeta,\check{Z}_s)+\Xi\check{h}(s,\zeta,\check{Z}_s))dt \\ d\zeta_t=d\mu_t+(b(s,\zeta)+a\check{h}(s,\zeta,\check{Z}_s))\,dt \end{cases}$$

ただし、$\check{B}$, $\check{h}$ は次の規約によって定義されたものとする.

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$F(t,\zeta,x) \longrightarrow \check{F}(t,\zeta,\check{x}) = F\left(t,\zeta,x+\int_0^t \Xi\alpha^{-1}(s,\zeta)\,d\nu_s\right)$$

方程式(1.21)は最初に考えた形態であり，$\check{\pi}_t f = E[f(\check{z}_t)\mid \mathcal{F}_t]$ に対して今までの結果を適用することが出来る。これらを π_t についての事実に置き換えることは容易であろう。

§2. Filter の密度関数

測度 U_t の形式的密度関数を $u(t,\zeta,x)$ とする．定理1より形式的には、

$$(2.1)\qquad (\partial/\partial t)u = \tilde{L}^* u,\quad \text{ただし}\quad \tilde{L}^* = (\psi L \psi^{-1})^* = \psi^{-1}L^*\psi\ ,$$

が満たされる．（真に）放物型である方程式の超関数としての解は、方程式の係数が十分なめらかであれば真の解になることは良く知られている．作用素 $\tilde{L}^*$ の係数は t についてはなめらかではない。ところが定理1から分るように，u は方程式(2.1)の、$(0,T)\times R^d$ 上の超関数としての解というよりも強い意味の解である．従って、$\tilde{L}^*$ の係数が t に関してなめらかでなくとも x に関して十分なめらかであれば、u は方程式(2.1)の真の解となることが予想されるであろう．実際このことは正しく、次の定理が成立する．記号の注意として、$f(t,x)\in C_x^m$ (C_t^m) は、f の x に関する（t に関する）m 階までの微分が (t,x) に関して連続であることを意味する．

<u>定理2.</u>　仮定 A が満たされ、

$$(2.2)\quad \begin{cases} \inf_{|\xi|=1} \xi\cdot A(t,\zeta,x)\xi > 0 \quad a.e. \\[2ex] \tilde{\forall}\zeta,\quad A^{ij}(t,\zeta,x)\in C_x^{[\frac{d}{2}]+5},\quad B^i(t,\zeta,x)\in C_x^{[\frac{d}{2}]+4} \\[2ex] \forall R>0,\quad \sum_{|\alpha|\leq 2[\frac{d}{2}]+6}\int_0^T\int_{|x|\leq R} \partial^\alpha h\cdot a\,\partial^\alpha h(t,\zeta,x)\,dt\,dx<\infty \quad a.e. \end{cases}$$

ならば、次のような $u(t,\zeta,x)$ が $0<t<T$ なる範囲で存在する。

$$(2.3)\quad \begin{cases} \tilde{\forall}\zeta,\quad u(t,\zeta,x)\in C_t^1\cap C_x^2,\quad (\partial/\partial t)u = \tilde{L}^* u\ , \\ \tilde{\forall}\zeta,\quad \forall f\in\mathcal{D}(R^d),\quad U_t f = \int u(t,\zeta,x)f(x)\,dx\ , \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$\left\lfloor (\forall x,\ u(t,\zeta,x)\right.$ は ($\mathcal{F}_t$-adapted な確率過程.)

証明は Mckean[6]に紹介されている方法と平行して行なう。まず，いくつかの注意をしよう．

$\mathcal{H}_\infty = \{f(t,\zeta,x);\ \forall\zeta,\ f(t,\zeta,x) \in \mathcal{D}([0,T)\times R^d)\}$ とし、$n \in \mathbb{Z}$ に対して $f \in \mathcal{H}_\infty$ の norm $\|f\|_n$ を次のように定義する．

(2.4) $\quad \|f\|_n = \int_0^T\int |\hat{f}|^2(1+|y|^2)^n dt\,dy, \quad \hat{f}(t,\zeta,y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{-ixy} f(t,\zeta,x)dx$

$\mathcal{H}_\infty$ を $\|\cdot\|_n$ によって完備化した空間を $\mathcal{H}_n$ とし，$\mathcal{H} = \bigcup_n \mathcal{H}_n$ と置く．$\mathcal{H}$ は超関数の空間であり，$f \in \mathcal{H}$ ならば、

(2.5) $\quad \langle f(t,\zeta,x),\varphi(x)\rangle = (2\pi)^d\int \hat{f}(t,\zeta,y)\,\bar{\hat{\varphi}}(y)\,dy \qquad (\forall\varphi \in \mathcal{D}(R^d))$

が成立する．さらに $f \in \mathcal{H}$ の Fourier 変換 $\hat{f}(t,\zeta,y)$ が t に関して絶対連続であり，$(\partial/\partial t)\hat{f} \in \hat{\mathcal{H}}$ ($\hat{\mathcal{H}} = \{\hat{f};\ f \in \mathcal{H}\}$) であれば、$(\partial/\partial t)f \in \mathcal{H}$ が次の式により矛盾なく定義される。

(2.6) $\quad \langle \frac{\partial f}{\partial t},\varphi\rangle = (2\pi)^d\int \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}\cdot\bar{\hat{\varphi}}\,dy = \frac{d}{dt}\langle f,\varphi\rangle \qquad (\forall\varphi \in \mathcal{D})$

$\mathcal{H}_n \supset \mathcal{H}_{n+1}$ であり $\mathcal{H}_\infty$ は $\mathcal{H}_n$ の中で dense であること，及び $\|\partial^\alpha f\|_n \leq \|f\|_{n+|\alpha|}$ であることは明らか．さらに、負でない整数 n に対し、

(2.7) $\quad |g|_n = \sum_{|\alpha|\leq n} \sup_{t,x} |\partial^\alpha g(t,\zeta,x)|$

と定義し、$\mathcal{B}_n = \{g(t,\zeta,x);\ \forall\zeta,\ g \in C_x^n,\ |g|_n < \infty\}$ と置くと，次の補題が成立する（証明は省略）。

補題 3. $\quad g \in \mathcal{B}_{|n|},\ f \in \mathcal{H}_n$ ならば、$\|gf\|_n \leq |g|_0\|f\|_n + c\|f\|_{n-1}$

（ただし、c は $|g|_{|n|}$ のみに関係する定数）

次に A_0 を（t には関係してもよいが）x には関係しない正定値の行列とし、$Q_0 = \sum_{ij} A_0^{ij}\partial_i\partial_j - \partial/\partial t$ とすると、Jones[3] の結果を用いて、次のことが証明出来る。

補題 4. $\quad$ 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し、

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$\|f\|_{n+2} \leqq c_1 \|Q_0 f\|_n + c_2 \|f\|_{n+1} \qquad ({}^\forall f \in \mathcal{H}_\infty)$$

ただし、c_1, c_2 は $\inf_{t,|\xi|=1} \xi\cdot A_0(t,\zeta)\xi$, $\sup_{t,|\xi|=1} \xi\cdot A_0(t,\zeta)\xi$ のみに関係する定数。

（定理２の証明）　まず、$\rho \in \mathcal{D}([0,\infty))$ を $0 \leqq \rho \leqq 1$, $[0, 1/2]$ 上で $\rho \equiv 1$, $[1, \infty)$ 上で $\rho \equiv 0$ である関数とし

$$(2.8) \qquad \rho_R(t,x) = \rho(|x|/R)\{1-\rho(Rt)\}\{1-\rho(R(T-t))\}$$

と置く。$u(t,\zeta,x)$ を U_t の形式的密度関数とすると，$u\rho_R$ は t に関して一様に有界な R^d 上の測度であることより、$u\rho_R \in \mathcal{H}_{-[d/2]-1}$ が分る。ところが系1.1より、

$$(2.9) \qquad u\rho_R(t,\zeta,x) = \int_0^t v(s,\zeta,x)\,ds, \quad v = \rho_R \tilde{L}^*(u\rho_{2R}) + \frac{\partial \rho_R}{\partial t}\cdot u\rho_{2R}$$

であり、補題１より $\psi \in C_x^{[d/2]+5}$ であるから、補題３より $v \in \mathcal{H}$ が分る。つまり、$\widehat{u\rho_R}$ の t による微分 $\hat{v}$ が $\hat{\mathcal{H}}$ の中に存在する。従って（2.6）と定理１より、$f \in \mathcal{D}(R^d)$ の台が $\{|x| \leqq R\}$ に含まれているなら、

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(u\rho_{2R}), f \right\rangle = \frac{d}{dt}\langle u\rho_{2R}, f\rangle = \langle \tilde{L}^*(u\rho_{2R}), f\rangle$$

が $1/2R \leqq t \leqq T - 1/2R$ なる範囲で成立する。$Q = \tilde{L}^* - (\partial/\partial t)$ と定義すると、上のことは $\rho_R Q(u\rho_{2R}) = 0$ であることを意味する。

さて、補題３，４より次のことが証明出来る：任意の有界領域 $D \subset R^d$ を固定したとき，$|n| \leqq [d/2]+3$ に対して、$f \in \mathcal{H}_\infty$ の台が $(0,T)\times D$ に含まれている限り，次の不等式が成立する。

$$(2.10) \qquad \|f\|_{n+2} \leqq c_1 \|Qf\|_n + c_2 \|f\|_{n+1}$$

ただし，c_1, c_2 は D と A，B 及び ψ のみに関係する値である。

そこで特に $n+2 = -[d/2] = m$, $f \longrightarrow u\rho_R$ とすれば、

$$\|u\rho_R\|_m \leqq c_1 \|Q(u\rho_R)\|_{m-2} + c_2 \|u\rho_R\|_{m-1}$$

$$\leqq c_1 \{ \|(Q\rho_R - \rho_R Q)(u\rho_{2R})\|_{m-2} + \|\rho_R Q(u\rho_{2R})\|_{m-2} \} + c_2 \|u\rho_R\|_{m-1}$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$\leqq c_3 \| u\rho_{2R} \|_{m-1} + c_2 \| u\rho_R \|_{m-1} < \infty \qquad a.e.$$

つまり、$u\rho_R \in \mathscr{H}_{-[d/2]}$ が分る．$m \leqq [d/2]+5$ に対してこれを繰り返すことによって、$u\rho_R \in \mathscr{H}_{[d/2]+5}$ $({}^{\forall}R>0)$ であることが分る。すると、(2.9) の v は $\mathscr{H}_{[\frac{d}{2}]+3}$ に属することになり、簡単な計算によって、

$$(2.11) \qquad \int \sup_t |\widehat{u\rho_R}|(1+|y|^2)\,dy \leqq \int_0^T \int |\hat{v}|(1+|y|^2)\,dt\,dy < \infty$$

であることが示される。$\widehat{u\rho_R}$ が t に関して連続であることと (2.11) より、

$$u_R(t,\zeta,x) = \int e^{ixy}\, \widehat{\rho_R u}\,(t,\zeta,y)\,dy \;,$$

によって u_R を定義すれば $u_R \in \mathscr{C}_2$ であることが分る．ところが一方任意の $f \in \mathscr{D}(R^d)$ に対し、$U_t(\rho_R f) = \langle u_R, f\rangle$ であることが示されるから，$u\rho_R = u_R \in \mathscr{C}_2$ でなければならない．従ってまた $(\partial/\partial t)(u\rho_R) = v \in \mathscr{C}_0$ でなければならない．$[1/R,\ T-1/R] \times \{|x| \leqq R/2\}$ の上で、$u\rho_R = u$ であり，R は任意であるから定理２の結論を得る．

Q.E.D.

(2.2) において、A, B, h に対する条件の微分の階数をそれぞれ２つずつ下げたとき、(2.3) において、$u \in C_t^1 \cap C_t^2$ であるかどうかは分らないが、u は連続で、$(\partial/\partial t)u$, $\partial_i u$, $\partial_i\partial_j u$ が存在し、これらは x に関して連続で t に関して可積分である、ということは分る．このように条件を弱くしても、次の系 2.1 の主張は成立する．

系 2.1．　定理２の条件が満たされているとする．$U_0 = \pi_0$ が３回連続微分可能な密度関数 $p_0(x)$ を持つならば、U_t の密度関数 $u(t,\zeta,x)$ は、$t \downarrow 0$ のとき $p_0(x)$ に各点収束する．

(証明)　まず、任意の $x_0 \in R^d$ の近傍で $\tilde{L}^*$ 及び p_0 と一致する L_1 及び p_1 について、初期値問題：$(\partial/\partial t)u_1 = L_1 u_1$, $u_1(+0,\zeta,x) = p_1(x)$ の解 $u_1(t,\zeta,x)$ を具体的に１つ構成する．次に、

$$\langle u_2(t,\zeta,x),\ f(x)\rangle = U_t f - \int u_1(t,\zeta,x) f(x)\,dx \qquad ({}^{\forall}f \in \mathscr{D})$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

によって汎関数 u_2 を定義する．(2.8) の代りに、

$$\rho_R(t, x) = \rho(|x-x_0|/R)\{1-\rho(R(T-t))\}$$

としよう。R を十分小さくとれば、$u_2\rho_R$ は (2.9) と同様の関係を満たし、定理2の証明と同様にして $u_2\rho_R \in \mathcal{B}_2$ であることが分る．従って，$t\downarrow 0$ のとき $u\rho_R = (u_1+u_2)\rho_R \to 0$ であることが分る． Q.E.D.

定理2，系2.1の証明には U_t が Z_t から式(1.6)によって定義されたものであるということを必要としない．この意味を、少し詳しく述べてみよう．$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \tilde{P}; \zeta_t, 0 \leqq t \leqq S)$ を (1.4) で述べた意味での (a,b)-process とする．$\mathcal{F}_t = \sigma(\zeta_s; s \leqq t)$ で，S は有界な stopping time であってもよいことにする．一意に決まる ζ_t の martingale 部分を ν_t とし，ψ を式(1.5)で定義する．A, B, h は条件(1.8)を満たしているとする．π_0 を R^d 上の有限測度とし、次の方程式を考えよう．

F-方程式. $\frac{d}{dt}U_t(f) = U_t(\psi L \psi^{-1} f)$, $U_0(f) = \pi_0(f)$ $\forall f \in \mathcal{D}$

(2.12) $$\sup_t U_t(\psi) < \infty \quad a.e.$$

ただし，$U_t(dx)$ は R^d 上の σ-有限測度であり，$\forall f \in \mathcal{D}$ に対して $U_t(f)$ は $(\mathcal{F}_t)$-adapted で連続な確率過程であるとする．定理2及び系2.1はこの F-方程式について成立する事実である。

いま π_0 を特に Z_0 の分布測度とし、F-方程式の解が一意であれば、その解 U_t は Z_t から式(1.6)によって定義したものと一致する．従って F-方程式の解が一意であるかどうかは理論上重要な問題である．この問題について、満足出来る結果は未だ得ていないが，例はいくつか述べることは出来る．次の系はその1つである．

系2.2. $A = A(t,\zeta)$，$h = H(t,\zeta)k(x)$ (H は $e\times N$-行列，k は N-vector) とする．A, B, h が、

(2.13) $$\begin{cases} A\text{は連続であり、} \inf_{|\xi|=1} \xi\cdot A(t,\zeta)\xi > 0 \quad a.e. \\ \tilde{\forall}\zeta, \quad B^i \in \mathcal{B}_{[\frac{d}{2}]+2}, \quad k^j \in \mathcal{B}_{[\frac{d}{2}]+3}, \ \int_0^S |\sqrt{a}H|^2 dt < \infty \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(14)

を満たすならば、 F- 方程式の解は一意に決まる.

（証明） 同じ初期値 π_0 に対する F- 方程式の任意の2つの解の差を U_t としよう. ψ^{-1} が有界であるから (2.12) より U_t は、parameter t について有界な、符号付き測度でなければならない. 系 2.1 により存在が保証される U_t の密度関数を $u(t, \zeta, x)$ としよう. $\sigma_R(t) = 1 - \rho(R(S-t))$ と置けば、定理2の場合と同様に $\sigma_R u \in \mathcal{H}_{[d/2]+3}$ であること及び $\sup_t |\widehat{\sigma_R u}|$ が R^d 上で可積分であることが証明される。$\widehat{\sigma_R v}$ は t に関して連続だから、

$$\sup_x |\sigma_R u(t, \zeta, x) - \sigma_R u(t', \zeta, x)| \leqq \int |\widehat{\sigma_R u}(t, \zeta, y) - \widehat{\sigma_R u}(t', \zeta, y)| dy$$

$$\longrightarrow 0 \qquad (|t-t'| \to 0 \text{ のとき})$$

が分る. 一方 t を固定すれば Riemann-Lebesgue の定理より、

$$\sup_{|x|>r} |\sigma_R u(t, \zeta, x)| = \sup_{|x|>} \left| \int e^{ixy} \widehat{\sigma_R u}(t, \zeta, y) dy \right| \to 0 \qquad (r \to \infty)$$

が分る. 従って、任意の $\tau < S$ に対して次のことが成立する.

$$\text{(2.14)} \qquad \lim_{r\to\infty} \sup_{t<\tau, |x|>r} |u(t, \zeta, x)| = 0$$

このことと $\widetilde{L}^* 1$ が有界関数であることより、最大値原理が使えて、u が恒等的に 0 であることが分る。すなわち解は一意である。 Q.E.D.

注意 F-方程式の解の存在についてはどうだろうか。これは問題になったとしても比較的容易である. A が正定値で、$\widetilde{L}^*$ の係数が有界であれば、偏微分方程式論における方法で F-方程式の解を求めることが出来るだろうし、その他の場合でも次の方法がある.

$(W, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, Q)$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \widetilde{P})$ と他の確率空間 $(\Omega', \mathcal{F}', \mathcal{F}'_t, P')$ の直積空間とする. $\widetilde{L} = 1/2 \sum_{ij} A^{ij} \partial_i \partial_j + \sum_i \widetilde{B}^i \partial_i + \widetilde{C}$ とし, d 次元の Brown 運動 $(\Omega', \mathcal{F}'_t, P'; \beta_t)$ に対して次の Itō-type の確率微分方程式の (pathwise の) 解 $X_t = X_t^x$ を求める.

$$\text{(2.15)} \qquad dX_t = A^{1/2}(t, \zeta, X_t) d\beta_t + \widetilde{B}(t, \zeta, X_t) dt \qquad X_0 = x \ .$$

次の式によって汎関数 U_t を定義しよう.

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(2.16) $$U_t(f) = \int \pi_0(dx)\, E_Q[f(X_t^x)\, e^{\int_0^t \hat{c}(s,\zeta,X_s^x)ds} \mid \mathcal{F}_t] \quad \forall f \in \mathcal{D}$$

可積分性が保証されるとして、 U_t がF-方程式の解であることを示すのは容易である。なお、このような方法で *Filter* を求めることについては *Ershov* [1] を参照するとよい。

§3. *Filtering Equation* の変換と解の一意性

この章では、§1 における式(1.1)とは少し異なった場合について議論する. *Signal process* (z_t) $(0 \le t \le T)$ を R^d を *state space* に持つ *conservative Feller process* (*conservative*, 時間的に一様なマルコフ過程で, その半群を T_t とすれば, T_t は $C_0(R^d)$ から $C_0(R^d)$ の中への写像である. ただし、 $C_0(R^d)$ は無限遠点で 0 となる様な連続函数の全体の作る空間) とする。

Observation process (ζ_t) $(0 \le t \le T)$ を、次の式で与えよう。

(3.1) $$\zeta_t = \int_0^t h(z_s)\,ds + \mu_t \qquad \mu_0 = 0\ .$$

ここで、

(3.2) (μ_t) は e 次元 *standard Wiener process* で、かつ (z_t) と独立であり、

(3.3) $h(x)$ は R^d で定義された e 次元(ベクトル)連続函数であって、

$$\int_0^T E[\,|h(z_s)|^2]\,ds < \infty$$

を満たしていると仮定する。

$\mathcal{F}_t$, $\pi_t(\cdot)$ 及び $\bar{h}$ を §1 と同様に定義する. さらに $(\bar{\mu}_t)$ を次式;

(3.4) $$\bar{\mu}_t = \zeta_t + \int_0^t \bar{h}_s\,ds$$

で与えれば、次の事実を得る。(*Fujisaki-Kallianpur-Kunita* [2])

<u>定理 3.</u> (i) $(\bar{\mu}_t)$ は $\mathcal{F}_t$-*adapted* e 次元 *standard Wiener process* であって、かつ各 t について $\mathcal{F}_t$ と $\sigma\{\bar{\mu}_v - \bar{\mu}_u;\ t \le u < v\}$ とは独立である。

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(ii) Lをマルコフ過程(Z_t)の生成作用素，$D(L)$をその定義域とするとき，$\pi_t(f)=E[f(Z_t)|\mathcal{F}_t]$，$f\in D(L)$ は次の様な確率微分方程式を満たす。

(3.5) $$\pi_t(f)=\pi_0(f)+\int_0^t\pi_s(Lf)\,ds+\int_0^t(\pi_s(f\cdot h)-\pi_s(f)\pi_s(h),\ d\bar{\mu}_s)$$

I (3.5)に現われる作用素Lは一般には有界ではないので，この式を$\pi_t(\cdot)$に関する一般的な方程式を見なして取り扱う際に困難が生じる。そこで扱い易い様にするために(3.5)式を変形する。

定義 $C_0(R^d)$ から $C_0(R^d)$ への有界線型作用素の系 $\{L_\lambda,\ \lambda>0\}$ を次式で与える。

(3.6) $$L_\lambda=LI_\lambda,\qquad ただし\quad I_\lambda=\lambda(\lambda-L)^{-1}$$

そうすると，良く知られている様にL_λは以下の性質を持つ；

(3.7) $$L_\lambda:\ C_0(R^d)\longrightarrow C_0(R^d)$$

(3.8) $$L_\lambda=\lambda(I_\lambda-I)$$

(3.9) $$\|L_\lambda f-Lf\|\longrightarrow 0\quad as\ \lambda\to\infty\quad (\|\cdot\|\ は\ sup\text{-}norm)$$

(3.10) $$\|(\lambda-L)^{-1}\|\le\frac{1}{\lambda}$$

定理4. filter $\pi_t(f)$ は式(3.11)を満たす；

(3.11) $$\pi_t(f)=\pi_0(T_tf)+\int_0^t(\pi_s(h\cdot T_{t-s}f)-\pi_s(h)\pi_s(T_{t-s}f),\ d\bar{\mu}_s)$$

$$for\ \ \forall f\in C_0(R^d)$$

ここで、T_t は Z_t の半群である。

(証明) filtering equation (3.5)はすべての$f\in D(L)$に対して成り立っているから，これを上に導入したL_λを用いて次の形に直す。

$$\pi_t(f)=\pi_0(f)+\int_0^t\pi_s(L_\lambda f)\,ds+\int_0^t\pi_s((L-L_\lambda)f)\,ds$$
$$+\int_0^t(\pi_s(f\cdot h)-\pi_s(f)\pi_s(h),\ d\bar{\mu}_s)$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$f\in D(L)$ ならば $L_\lambda f\in D(L)$ だから，右辺第二項に再び上の式に用いて整理すれば，

$$\pi_t(f)=\pi_0(f+tL_\lambda f)+\int_0^t\int_0^s\pi_\sigma(L_\lambda^2 f)\,d\sigma\,ds+\int_0^t\pi_s((L-L_\lambda)f$$
$$+(t-s)(L-L_\lambda)L_\lambda f)\,ds+\int_0^t(\pi_s(hf+(t-s)hL_\lambda f)$$
$$-\pi_s(h)\pi_s(f+(t-s)L_\lambda f),\ d\bar{\mu}_s)$$

この操作を繰り返すことによって

$$\pi_t(f)=\pi_0\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^kL_\lambda^k}{k!}f\Big)+\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_n}\pi_{t_{n+1}}(L_\lambda^{n+1}f)\,dt_{n+1}\cdots dt_1$$
$$+\int_0^t\pi_s\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-s)^k}{k!}L_\lambda^k(L-L_\lambda)f\Big)ds$$
$$+\int_0^t\Big(\pi_s\Big(h\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-s)^k}{k!}L_\lambda^k f\Big)-\pi_s(h)\pi_s\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-s)^k}{k!}L_\lambda^k f,\ d\bar{\mu}_s\Big)$$

がすべての $\lambda>0$，n について成立つ．ところが $\|L_\lambda\|\leq C$（C は定数），$|\pi_t(f)|\leq\|f\|$ だから，右辺第二項 $\leq(tC)^{n+1}\|f\|/(n+1)!\to 0\ (n\to\infty)$。一方，$T_t^\lambda\equiv\sum_0^\infty(tL_\lambda)^k/k!$ とおくとき，上式において $n\to\infty$ とすれば，

$$\pi_t(f)=\pi_0(T_t^\lambda f)+\int_0^t\pi_s(T_{t-s}^\lambda(L-L_\lambda)f)\,ds$$
$$+\int_0^t(\pi_s(h\cdot T_{t-s}^\lambda f)-\pi_s(h)\pi_s(T_{t-s}^\lambda f),\ d\bar{\mu}_s)$$

さらに，$\|T_t^\lambda\|\leq 1$，$\|(L-L_\lambda)f\|\to 0$ as $\lambda\to\infty$ (3.9)，及び Hille-Yosida の定理から $T_t^\lambda f\to T_t f$ as $\lambda\to\infty$ だから，両辺において $\lambda\to\infty$ とすれば、右辺第二項 $\to 0$ となって，結局求める式 (3.11) を得る。任意の $C_0(R^d)$ の元については $D(L)$ の要素で以て近似すれば良い．　Q.E.D.

注意 1．　$0<t_0\leq t$ なる任意の t については (3.11) は次の様になる；

(3.12)　$$\pi_t(f)=\pi_{t_0}(T_{t-t_0}f)+\int_{t_0}^t(\pi_s(h\cdot T_{t-s}f)-\pi_s(h)\pi_s(T_{t-s}f),\ d\bar{\mu}_s)$$

注意 2．定理 4 において得られた式は，すでに Kunita [4] によって知られているが，その証明が異なっている．そして証明方法の相違が及ぼす影響について検討してみたけれども何ら得るものはなかった．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

式(3.11)又は(3.12)をある意味で更に簡単化することができる．それは以下の様にやれば良い．φ_t を

(3.13) $$\varphi_t = exp\left\{\int_0^t (\bar{h}_s,\ d\bar{\mu}_s) + \frac{1}{2}\int_0^t |\bar{h}_s|^2 ds\right\}$$

とおき，*stopping time* の増加列 $\{T_n\}$ を

(3.14) $$T_n = inf\left\{t>0;\ \int_0^T |\bar{h}_s|^2 ds > n \quad or \quad \varphi_t > n\right\}$$

$$= T \qquad if\ \{\cdots\} = \phi$$

によって与える．そうすると $T_n \uparrow T$ as $n\to\infty$．また $(\varphi^{-1}_{t\wedge T_n},\ \mathcal{F}_t,\ P)$ は一様可積分な *martingale* となり，$d\tilde{P}_n \equiv \varphi^{-1}_{t\wedge T_n}\, dP$ は確率測度である．以下 n を固定して話を進めよう（従って $\tilde{P}_n$ を $\tilde{P}$，$\varphi_{t\wedge T_n}$ を φ_t で代用することにする）．なお（3.13）の φ_t は§1と同じであると思って良い．$\tilde{\pi}_t(f)$ を次式；

(3.15) $$\tilde{\pi}_t(f) = \varphi_t \pi_t(f) = \varphi_t E[f(Z_t) \mid \mathcal{F}_t]$$

で定義する．そうすると，$\tilde{\pi}_t(1) = \varphi_t$ だから，

(3.16) $$\pi_t(f) = \frac{\tilde{\pi}_t(f)}{\tilde{\pi}_t(1)}$$

となって，π_t の代りに $\tilde{\pi}_t$ について議論すれば十分である．なお，Girsanov の定理によって，$(\zeta_t,\ \mathcal{F}_t,\ \tilde{P})$ は *standard Wiener process* となることを注意しておく．定理4と同様な証明方法によって系4.1を得る．

<u>系4.1</u>　　$\tilde{\pi}_t(f)$ は次の式を満たす；

(3.17) $$\tilde{\pi}_t(f) = \pi_0(T_t f) + \int_0^t (\tilde{\pi}_s(h\cdot T_{t-s} f),\ d\zeta_s) \quad for \quad {}^\forall f \in C_0(R^d)$$

II. *filtering equation* の解の一意性

$(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{l}, Q)$ を確率空間とし，この上に e 次元 *standard Wiener process* $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{l}_t, \eta_t)$ が与えられているものとする．T_t を $T_t 1 = 1$ であるような $C_0(R^d)$ 上の *Feller* 半群とする．h を R^d 上の連続函数として、次の方程式を考えよう。

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(3.18) $V_t(f) = V_0(T_t f) + \int_0^t (V_s(h \cdot T_{t-s} f), d\eta_t)$ for $\forall f \in C_0(R^d)$

(V_0 は与えられた R^d 上の有界測度)

ここで V_t が V_0 を初期値とする方程式(3.18)の解であるとは、tを止めた時に R^d 上の符号付き測度であって、

(3.19) $\int_0^t E[|V_s(h)|^2]\, ds < \infty$ ($E[\cdot]$ はQによる積分)

を満たし，さらに各tについて V_t は $\mathfrak{A}_t$-可測，かつ方程式(3.18)を満たすことをいう。

注意. 今、$(\Omega, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_t, Q; \eta_t, V_0)$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \widetilde{P}; \zeta_t, \pi_0)$ とすれば，系4.1より $\widetilde{\pi}_t(f)$ が(3.18)の解になっていることがわかる。

補助定理. hを $C_0(R^d)$ の要素とすれば，任意に与えられた初期値 V_0 に対する(3.18)の解 V_t が一意に存在して，次の性質を満たす;

(i) $E[|V_t(f)|^2] \leq C\|f\|^2$

(ii) $V_t(f)$ は $\sigma(\eta_s, s \leq t)$ — 可測である，

(iii) $V_t^{(p)}$ と $V_t^{(q)}$ を，それぞれ初期条件 $V_0 = p$, $V_0 = q$ に対応する解とする。

ここに，p, q は R^d 上の有限測度で $a.e.\,Q$で定数とする。そうすると，任意の $t > 0$ に対して，

$$\lim_{p \to q} E[|V_t^{(p)}(f) - V_t^{(q)}(f)|^2] = 0 \qquad \text{for} \quad \forall f \in C_0(R^d)$$

但し，$p \to q$ は測度の弱収束の意味である。
(証明は Kunita [4] と同様にやれば良い。)

次に $h(x)$ が有界でない場合を述べる。

定理5. V_0 を与えられた有限な測度，$h(x)$ が連続で，

(3.20) $\exists \delta > 0, \exists C_1 \quad |h(x)|^2 \leq C_1(1+|x|^2)^{1-\delta} \quad \forall x$

とし，$a_N(x) = |x|^2 I_{(|x| \geq N-1)}$ に対して (V_0, T_t) が

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(3.21) $\qquad {}^{\exists}\varepsilon>0,\ {}^{\exists}C_2\ ,\quad V_0(T_t a_N) \leqq C_2 e^{-\varepsilon N^2} \qquad {}^{\forall}t$

を満たすものとしよう．そのとき，

(3.22) $\quad V_t$ は（正の）測度であり，$0 < V_t(1) \leqq C_3 \quad {}^{\forall}t\ , \quad a.e.$

を満足する（3.18）の解 V_t は一意である．

（証明）　$\rho_N(x) \in \mathcal{D}(R^d)$ （test function）を，$0 \leq \rho_N(x) \leq 1$，$\rho_N(x)=1$ if $|x| \leq N-1$，$\rho_N(x)=0$ if $|x|>N$ なる函数とする．$h_N(x)$ を，$h_N(x)=h(x)\cdot\rho_N(x)$ とおけば $h_N(x) \in C_0(R^d)$ である。

V_t を（3.22）を満足する（3.18）の任意の解とする。また V_t^N を（3.18）式において，$h=h_N$ としたときの解としておく．補助定理によってその存在は保証されている。定理の主張を得るためには $|V_t^N(f)-V_t(f)| \to 0$ as $N \to \infty$ を示せば十分である．

初期条件 V_0 が与えられているから，V_t の式と V_t^N の式の両辺の差を取る；

$$V_t(f)-V_t^N(f) = \int_0^t (V_s(h\cdot T_{t-s} f) - V_s^N(h_N\cdot T_{t-s} f),\ d\eta_s)$$

次に両辺の２乗平均を取れば，$\rho(t,f)=E_Q[|V_t(f)-V_t^N(f)|^2]$ として，

$$\rho(t,f) = \int_0^t E[|V_s(h\cdot T_{t-s}f)-V_s^N(h_N\cdot T_{t-s}f)|^2]\,ds$$

$$\leqq 2\int_0^t E[|V_s((h-h_N)T_{t-s}f)|^2]\,ds + 2\int_0^t \rho(s,\ h_N T_{t-s}f)\,ds$$

右辺第二項に同じ操作を何回も繰り返すことによって，

(3.23) $\qquad \rho(t,f) \leq \sum_{k=1}^{n} I_k(t,f) + 2^n\int_0^t\cdots\int_0^{t_{n-1}} \rho(t_n, h_N T_{t_{n-1}-t_n} h_N \cdots T_{t-t_1} f)\,dt_n\cdots dt_1$

ただし，$\qquad I_k(t,f) = 2^k\int_0^t\cdots\int_0^{t_{k-1}} E[|V_{t_k}((h-h_N)T_{t_{k-1}-t_k}h_N\cdots \ T_{t-t_1}f|^2]\,dt_k\cdots dt_1$

を得る。補助定理と（3.22）より，

$$E[V_t(g)^2] \leqq E[V_t(g^2)\cdot V(1)] \leqq C_3 E[V_t(g^2)] = C_3 V_0(T_t(g^2))$$
$$\rho(t,g) \leqq 2(E[V_t(g)^2]+E[V_t^N(g)^2]) \leqq C.(V_0(T_t(g^2))+\|g\|^2) \leqq C.\|g\|^2$$

であるから（3.23）の最後の項は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．一方，

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$I_k(t,f) \leq 2^k (c_1(1+N^2)^{1-\delta})^{k-1} \|f\|^2 \int_0^t \cdots \int_0^{t_{k-1}} E[|V_{t_k}(|h-h_N|)|^2]\, dt_k \cdots dt_1$$

$$\leq 2^k (c_1(1+N^2)^{1-\delta})^{k-1} \|f\|^2 c_3 \int_0^t \cdots \int_0^{t_{k-1}} V_0(T_{t_k} a_N)\, dt_k \cdots dt_1$$

条件（3. 21）を使えば，

$$I_k(t,f) \leq 2^k (c_1(1+N^2)^{1-\delta})^{k-1} \|f\|^2 c_3 \frac{t^k}{k!} c_2 e^{-\varepsilon N^2}$$

ゆえに，（3. 23）より

$$\rho(t,f) \leq \sum_{k=0}^{\infty} I_k(t,f) \leq \frac{c_2 c_3 \|f\|^2}{c_1(1+N^2)^{1-\delta}} e^{2c_1(1+N^2)^{1-\delta} t - \varepsilon N^2}$$

$N \to \infty$ とすることによって $\rho(t,f)=0$ が分る。 Q.E.D.

例． T_t が d 次元 Brown 運動の半群であり，V_0 が有界な台を持つ測度であれば，仮定（3. 21）は満たされる。

上の証明から分るように，T_t，h が（3. 20），（3. 21）を満たす場合，もし（3. 22）を満たす（3. 18）の解 V_t があれば，V_t は補助定理の（i），（ii）の性質を持つ．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

引　用　文　献

[1] Ershov, M.P.; *Sequential estimation of diffusion processes, Th. Prob. Appl. 15 (1970), pp 688-700.*

[2] Fujisaki, M., Kallianpur, G., Kunita, H.; *Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem, Osaka J. Math. 9 (1972), pp 19-40.*

[3] Jones, B.F.; *A class of singular integrals, Am. J. Math. 86 (1964) pp 441-462.*

[4] Kunita, H; *Asymptotic behavior of the nonlinear filtering errors of Markov processes, J. Multiv. Anal. 1 (1971) pp 365-393.*

[5] Kunita, H., Watanabe, S.; *On square integrable martingales, Nagoya Math. J. 30 (1967), pp 209-245.*

[6] Mckean, H.P.; *Stochastic integrals, Academic Press, New York (1969), pp 85-90.*

[7] Rozovskii, B.L., Shiryaev, A.N.; *On infinite system of stochastic differential equations arising from the theory of optimal nonlinear filter, Th. Prob. Appl. 17 (1962), No. 2.*

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

斜めに反射する半平面上のブラウン運動の一点への到達確率

本　尾　実

1. 序

上半平面を　$D=\{z=(x,y):\ y>0\}$
実軸を　$R=\{\xi=(\xi,0):\ -\infty<\xi<\infty\}$
とおく。

$\theta(\xi)$ を $R-\{0\}$ 上の連続函数で

(1.1)　$|\theta(\xi)|<\frac{\pi}{2}$

(1.2)　或る $K>0$ に対して　$|\xi|\geqq K$ なら

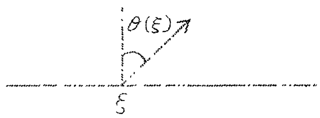
$$\theta(\xi)=0$$

(1.3)　任意の $a>0$ に対して，$\xi,\eta>a$ 又は $\xi,\eta<-a$ のときリッシッツ条件

$$|\theta(\xi)-\theta(\eta)|\leq P_a|\xi-\eta|$$

（P_a は a に依存する定数）
をみたしているとする。

$M=\{P_z\}_{z\in R-\{0\}}$ を 0 を吸収壁とし D 内ではブラウン運動，境界 R では，R の垂直方向に対して角 $\theta(\xi)$ の方向に反射する確率過程（マルコフ過程）とする。



σ_0 を 0 への到達時間とするとき，我々の問題にするのは 0 への有限時間での到達確率

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$u(z) \equiv P_z(\sigma_0 < \infty) \qquad (z \in D)$$

が恒等的に 0 又は正になるための $\theta(\xi)$ の条件を求めることである。

注意① $u(z)$ は D で非負調和なので

$u(z) \equiv 0$ 又は $u(z) > 0$ $(\forall z \in D)$ が成立する.

② $u(z) \equiv 0$ 又 $u(z) > 0$ の条件には $\theta(\xi)$ の $\xi = 0$ の近くでの行動だけが問題になる. 従って条件 (1.2) は本質的でない。

③ (1.2) のもとでは実際には $u(z) \equiv 0$ 又は $u(z) \equiv 1$ が成立つ.

σ_1 を $R_1 = \{z = (x, y) :\ y = 1\}$ への到達時間

σ_n を $U_n = \{\xi \in R;\ |\xi| < \frac{1}{n}\}$ への到達時間とし

$$\hat{u}(z) \equiv P_z(\sigma_0 < \sigma_1)$$

$$\hat{u}_n(z) \equiv P_z(\sigma_n < \sigma_1)$$

とおくと

$$(1.4) \qquad \hat{u}_n(z) \longrightarrow \hat{u}(z) \qquad (n \to \infty)$$

$$(1.5) \qquad \hat{u}(z) \equiv 0 \rightleftarrows u(z) \equiv 0$$

$\hat{u}(z)$ は恒等的に 0 又は正 (但し $z \in D_1 = \{(x, y) :\ 0 < y < 1\}$) がわかる。

(1.5) より我々の問題は $\hat{u}(z)$ が恒等的に 0 又は正になる条件を求める問題に帰着する。

面倒を省くため (幾分不自然であるが) 以後 M を正確に定義することはしないで, §2 に於て M の近似過程 M_n を定義し, それから $\hat{u}_n(z)$ を定義し, その極限として $\hat{u}(z)$ を定義する。

2. $\hat{u}_n(z)$, $\hat{u}(z)$ の定義

$\theta_n(\xi)$ を $\theta(\xi)$ から次の様に定める.

$\theta_n(\xi)$ は R 上の連続函数で

$$(2.1) \qquad |\theta_n(\xi)| < \frac{\pi}{2}$$

$$(2.2) \qquad \theta_n(\xi) = \theta(\xi) \qquad \xi \notin U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$$(2.3) \qquad |\theta_n(\xi) - \theta_n(\eta)| \leq p_{\frac{1}{n}} |\xi - \eta| \qquad \forall \xi, \eta \in R$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

をみたすとする。

このとき次の性質を持つ $\overline{D}$ 上の連続強マルコフ過程 $M_n = \{P_z^n\}$ が唯一つ存在する。

即ち M_n の $\alpha(\alpha>0)$ 次のグリーン函数を

$$G_\alpha^n f(z) = E_z^n\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(z_t)\,dt\right)$$

とすると，D 上コムパクトな台を持つ滑らか（例えば連続微分可能）な函数 $f(z)$ に対して

$$(M_n.1)\qquad \lim_{\substack{z\in\overline{D}\\ |z|\to\infty}} G_\alpha^n f(z) = 0$$

$$(M_n.2)\qquad (\alpha-\Delta)\,G_\alpha^n f(z) = f(z) \qquad z\in D$$

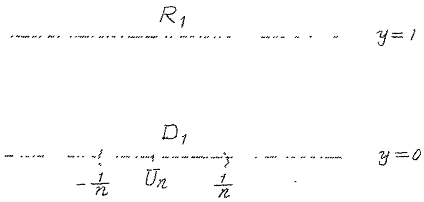
$$(M_n.3)\qquad \cos\theta_n(\xi)\frac{\partial G_\alpha^n f}{\partial y}(\xi) + \sin\theta_n(\xi)\frac{\partial G_\alpha^n f}{\partial x}(\xi) = 0 \qquad \xi\in R.$$

$z=(x,y)$ に対して $(b_1(t),\ b_2(t))$ を (x,y) を出発点とするブラウン運動，$\underline{\underline{t}}(t)$ を $b_2(t)$ の 0 での local time とする。P_z^n は例えば

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} Y^n(t) &= |b_2(t)| \\ X^n(z) &= b_1(t) + \int_0^t \tan\theta_n(X_n(s))\,d\underline{\underline{t}}(s) \end{aligned}$$

の一意的な解 $z_n(t)=(X_n(t),\ Y_n(t))$ の分布としてあたえることができる。

$$R_1 = \{z=(x,y):\ y=1\}$$
$$D_1 = \{z=(x,y):\ 0<y<1\}$$



σ_1，σ_n を夫々 R_1，U_n への到達時間とし

$$\hat{u}_n(z) \equiv P_z^n(\sigma_n<\sigma_1) \qquad z\in\overline{D}_1$$

とおく。

(2.4) より次の結果は自明である。

(2.5) $\hat{u}_n$ は D_1 で調和，$\overline{D}_1$ で連続

$$\hat{u}_n(z) = 0 \qquad z\in R_1$$
$$\hat{u}_n(\xi) = 1 \qquad \xi\in U_n$$

(2.6) $\hat{u}_n(z)$ は ((2.1), (2.2), (2.3)) をみたす $\theta_n(\xi)$ のとり方に無関係

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(26)

で，nに関し単調に減少する．

(2.7) $$\hat{u}(z) = \lim_{n\to\infty} \hat{u}_n(z)$$ とおく．

$\hat{u}_n(z)$ は

$$\hat{u}_n(x, y) = -\hat{u}_n(x, 2-y) \qquad 0 < y < 2$$

として $\{z = (x, y): 0 < y < 2\}$ の（nに関し一様有界な）調和函数に拡張できるので，

(2.8) $\hat{u}_n$ 及びその導函数は $D_1 \cup R_1$ 上のコンパクト集合上連続で，夫々$\hat{u}$及びその導函数に一様有界収束する．

(1.2) より M_n は $|z| > K$ では反射壁ブラウン運動と一致するから

(2.9) $$\lim_{\substack{z\in\bar{D}_1\\ |z|\to\infty}} \sup_n |\hat{u}_n(z)| = 0$$

$\hat{u}_n(z)$ が $\{z = (x, y): |x| > K, |y| < 2\}$ の有界調和函数に拡張できることと (2.9) より

(2.10) $$\lim_{\substack{z\in\bar{D}_1\\ |z|\to\infty}} \sup_n \left|\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x}(z)\right| = 0 \qquad \lim_{\substack{z\in\bar{D}_1\\ |z|\to\infty}} \sup_n \left|\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial y}(z)\right| = 0$$

3. 函数 $M(z) = m(z) + in(z)$ と $M[\cdot]$

$z \in D$ に対して

$$\theta(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2}\, \theta(\xi)\, d\xi$$

$$s(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}\, \theta(\xi)\, d\xi$$

$$M(z) = m(z) + in(z) = \exp(s(z) - i\theta(z))$$

$$(m(z) = e^{s(z)} \cos\theta(z), \quad n(z) = -e^{s(z)} \sin\theta(z))$$

とおく．(1.2)，(1.3) から

(3.1) $M(z)$, $M(z)^{-1}$ はDで analytic，$\bar{D} - \{0\}$

で連続である．特に $\lim_{z\to\xi} \theta(z) = \theta(\xi) \quad \xi \in R - \{0\}$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(3.2) $$\lim_{\substack{z\in D_1\\|z|\to\infty}} M(z) = 1$$

(1.1) より

(3.3) $m(z) > 0 \qquad z \in \bar{D} - \{0\}$

Dの開集合Uで連続微分可能な函数hに対して

$$M[h] = m(z)\frac{\partial h}{\partial y}(z) - n(z)\frac{\partial h}{\partial x}(z)$$

$$= e^{s(z)}\left(\cos\theta(z)\frac{\partial h}{\partial y}(z) - \sin\theta(z)\frac{\partial h}{\partial x}(z)\right)$$

とおく.

hが U で調和のとき，kをhの（局所）共軛調和函数とすると

$$M[h] = -\mathcal{J}_m M(z)\frac{d}{dz}\{h(z)+ik(z)\}$$

であるから

(3 4) hがUで調和なら $M[u]$もUで調和である.

(2.5), (2.8), (3 1) より

(3.5) $M[\hat{u}_n]$ は D_1 で調和，$D_1 \cup R_1$ で連続である.

又 (2.8) (2.9) (3.2) より

(3.6) $M[\hat{u}_n]$ は $D_1 \cup R_1$ のコムパクト集合上で一様有界であって

$$\lim_{\substack{z\in \bar{D}_1\\|z|\to\infty}} \sup_n |M[\hat{u}_n]| = 0$$

次の二つの結果は附録で証明の概略を示す.

(3.7) $\hat{u}_n$ の導函数は $\bar{D}_1 - U_n$ で連続で

$$M[\hat{u}_n](\xi) = 0 \qquad \xi \notin U_n$$

(3.8) $$\overline{\lim_{\substack{z\in D_1\\z\to\xi}}} M[\hat{u}_n] \le 0 \qquad \xi \in R$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

4. $\hat{M}[\cdot]$ と $\hat{u}$ の諸性質

h を $D_1 \cup R_1$ 上の函数で，h 及びその導函数が $D_1 \cup R_1$ で連続 R_1 で有界とする。

$H[h]$ を D_1 で調和，$\bar{D}_1$ で連続有界

$$H[h](\xi) = 0 \qquad \xi \in R$$

$$H[h](z) = M[v](z) \qquad z \in R_1$$

をみたす函数とする。

$\hat{M}[h] = M[h] - H[h]$ とおく.

(3.5), (3.6), (3.8) より

(4.1) $\hat{M}[\hat{u}_n]$ は D_1 で調和で

$$\hat{M}[\hat{u}_n](z) \leq 0 \qquad z \in D_1$$

又 (3.6) (3.7) より

(4.2) $\hat{M}[\hat{u}_n]$ は D_1 の非正調和函数としてマルチン表現の台を $\bar{U}_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ 上のみにもつ.

(2.8) を用いて次の命題を得る.

[命題] (4.2) u は D_1 で調和，$\lim\limits_{\substack{z \in D_1 \\ |z| \to \infty}} u(z) = 0$

(4.3) $\hat{u}$ 及びその導函数は $\bar{D}_1 - \{0\}$ で連続であり

$$M[\hat{u}](\xi) = \hat{M}[\hat{u}](\xi) = 0 \qquad \xi \neq 0 \qquad \text{(附録}(a.7)\text{ 参照)}$$

(4.4) $\hat{M}[\hat{u}]$ は D_1 上の非正調和函数で，そのマルチン表現の台を $\{0\}$ のみにもつ.

(4.2) は (2.5) と (2.9) からわかる.

(4.3) は (3.7) と附録 (a,) よりわかる.

(4.4) は $\lim\limits_{n \to \infty} M[\hat{u}_n](z) = M[\hat{u}](z)$

$$\lim_{n \to \infty} H[\hat{u}_n](z) = H[\hat{u}](z) \qquad z \in D$$

従って $\lim\limits_{n \to \infty} \hat{M}[\hat{u}_n](z) = \hat{M}[\hat{u}](z) \qquad z \in D$

が成立することからわかる.

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$g(z) = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad z = (x, y)$$

$$\hat{g}(z) = g(z) - \tilde{g}(z) \qquad \text{とおく.}$$

但し $\tilde{g}(z)$ を D_1 で調和，$\bar{D}_1$ で連続有界

$$\tilde{g}(\xi) = 0 \qquad \xi \in R$$

$$\tilde{g}(z) = g(z) \qquad z \in R_1$$

をみたす函数とする．

$\{0\}$ にのみ台をもつ D_1 の非負調和函数は $\hat{g}(z)$ の（非負）定数倍に限る．従って次の命題を得る．

［命題］ 適当な定数 $d \geqq 0$ があって

(4.5) $\qquad \hat{M}[\hat{u}] = -d\hat{g} \qquad$ とあらわせる．

或いは

(4.6) $\qquad M[\hat{u}] = -dg + \rho \qquad \left(g = \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

但し ρ は D_1 で有界調和 $|\rho(z)| \leq Ky$ をみたす。」

(4.6) は ρ を D_1 で有界調和 $\bar{D}_1$ で連続

$$\rho(\xi) = 0 \qquad \xi \in R$$

をみたす函数とすると

$$|\rho(z)| \leq \|\rho\| y \quad (\|\rho\| = \sup|\rho(z)|)$$

であることに注意すればよい．

5. バーリヤ $v(z)$ 及び主定理

(4.5) 又 (4.6) より

(5.1) $\qquad M(v) \equiv m\frac{\partial v}{\partial y} - n\frac{\partial v}{\partial x} = -g$

の解 v がマルコフ過程 M の $\{0\}$ でのバーリヤの役割を果すことが予想できる．或いは $\tilde{A}$ を M の境界上のマルコフ過程の生成作用素とすると，(5.1) は

$$\tilde{A}v \equiv -\delta_0$$

になるはずで，v は 0 に於けるグリーン函数になっていることが予想できる．

今 w を v の共軛調和函数とし，（v を調和函数と仮定して）

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(30)

$$V(z) = v(z) + iw(z)$$

とおくと，5.1 は

$$M(v) \equiv -\mathcal{I}_m M(z)\,V'(z) = \frac{y}{x^2+y^2} = -\mathcal{I}_m \frac{1}{z}$$

実定数を 0 にとれば

$$M(z)V'(z) = -\frac{1}{z} \qquad \text{又は} \qquad V'(z) = -\frac{1}{zM(z)} \quad ,$$

以上はお話として，$M(z)$ から $z \in D$ に対して

(5.2) $\displaystyle V(z) = -\int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta M(\zeta)} \qquad v(z) = \mathcal{R}e\ V(z) \qquad (z,\ z_0 \in D)$

で $v(z)$ を定義する．（定数の差を除いて一意的に定まる.） 明かに

(5.3) $\displaystyle M[v] = -\frac{y}{x^2+y^2}$

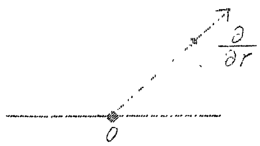
定義と (3.1) (3.2) から

(5.4) $v(z)$ は $\bar{D}-\{0\}$ で連続微分可能で，D で調和である．

$$|v(z)| \le C_R \log|z| \qquad z \in D \quad |z| \geqq R > 0$$

但し C_R は R に依存する定数である．

(5.5) $\displaystyle \frac{\partial v}{\partial r}(z) < 0 \qquad z \in D-\{0\}$



但し $\frac{\partial}{\partial r}$ は radial 方向の微分である．

実際 $V'(z) = v_x - iv_y = -\dfrac{1}{zM(z)}$ より

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{e^{-s(z)}}{|z|}\cos\theta(z)$$ を得る．（$|\theta(z)| < \frac{\pi}{2}$ である）

我々の前半の目標は次の定理を証明することである。

[定理 1] $\hat{u}(z) > 0 \quad z \in D_1$ であるための必要充分条件は $v(z)$ が上に有界であることである．

6. 定理 1 の証明（必要性）

$$V_a = \{z = (x, y) \in D_1 : |z| < a\} \qquad (a > 1)$$

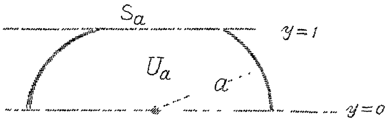
Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

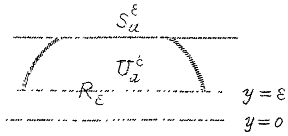
$S_a = \partial U_a - R$

$R_\varepsilon = \{z=(x,y): \ y=\varepsilon\} \quad (0<\varepsilon<1)$

$U_a^\varepsilon = \{z=(x,y)\in U_a: \ y>\varepsilon\}$

$S_a^\varepsilon = \partial U_a^\varepsilon - R_\varepsilon \subset S_a$





[lemma 1]　$\varphi(z)$ を U_a^ε で調和，$\overline{U}_a^\varepsilon$ で連続

$$\varphi(z)\le 0 \qquad z\in S_a^\varepsilon \quad \text{とし}$$

$\varphi(z)$ が $\zeta=(\xi,\varepsilon)\in R_\varepsilon\cap\overline{U}_a^\varepsilon$ で正の最大値 δ をとると

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\zeta)\le -\frac{\delta}{1-\varepsilon} \qquad 」$$

証明）　$\varphi(z)\leqq P_z^{Br}(\sigma_\varepsilon<\sigma_{S_a})\delta + P_z^{Br}(\sigma_{S_a}<\sigma_\varepsilon)\cdot 0$

但し σ_ε, σ_{S_a} は夫々 R_ε, S_a への到達時間.
$P_\cdot^{Br.}$ はブラウン運動の確率測度とする.

$$\varphi(z)-\varphi(\zeta)\leqq -P_z^{Br}(\sigma_{S_a}<\sigma_\varepsilon)\delta$$

$$\le -P_z^{Br}(\sigma_1<\sigma_\varepsilon)\delta \leqq -\frac{y-\varepsilon}{1-\varepsilon}\delta \qquad (z=(x,y))$$

σ_1 は R_1 への到達時間である.

[lemma 2]　$\varphi(z)$ を U_a で調和，$U_a\cup S_a$ で連続

$$\varphi(z)\le 0 \qquad z\in S_a$$

$$M[\varphi](z)\geqq p\,\frac{y}{x^2+y^2}-q\,y \qquad p,q>0 \qquad z=(x,y)\in U_a$$

とすると　$\varphi(z)\le 0 \quad z\in U_a$　」

証明）　$\varphi(z_0)>0$ となる $z_0=(x_0,y_0)\in U_a$ が存在すれば $\varepsilon<y_0$ に対し φ は $\overline{V}_a^\varepsilon$ で正の最大値 $\delta_\varepsilon\geq\varphi(z_0)>0$ をとる. φ は U_a で調和，$\varphi\le 0\ (z\in S_a)$ より $\zeta_\varepsilon=(\xi_\varepsilon,\varepsilon)\in R_\varepsilon\cap U_a$ で $\varphi(\zeta_\varepsilon)=\delta_\varepsilon$ となる.

今　$r>0$ を $\frac{p}{r^2}>q$ とえらぶ.

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\zeta_\varepsilon)=0$ であるから，

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$M[\varphi](\zeta_\varepsilon) = m(\zeta_\varepsilon)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\zeta_\varepsilon) \geqq p\,\frac{\varepsilon}{\xi^2+\varepsilon^2} - q\varepsilon$$

lemma 1 より

$$-m(\zeta_\varepsilon)\frac{\delta_\varepsilon}{1-\varepsilon} \geqq \varepsilon\left(\frac{p}{|\zeta_\varepsilon|^2} - q\right)$$

或る $\varepsilon>0$ に対し $|\zeta_\varepsilon|<r$ なら　$\delta_\varepsilon \leq 0$ となって矛盾

全ての $\varepsilon>0$ に対し $|\zeta|\geqq r$ なら　$\delta_\varepsilon \leqq \dfrac{q}{\inf\limits_{\substack{r\le|\zeta|\le a\\ \zeta\in R_\varepsilon}} m(\zeta)}\varepsilon \leqq \dfrac{q}{\inf\limits_{r\le|\zeta|\le a} m(\zeta)}\varepsilon$

(3.3) より分母は正の定数で $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon = 0$ となり矛盾.」

[命題]　$m_a = \sup\limits_{z\in S_a} (z)$,　$M_a = \sup\limits_{z\in S_a}|v(z)|$

d を (4.6) にあらわれた定数とする.

今 $\bar{d} > d > \underline{d} \geqq 0$ とすると

(6.1)　$\bar{d}(v(z)+M_a) \geqq \hat{u}(z) - m_a$,　$z\in U_a$

(6.2)　$\hat{u}(z) \geqq \underline{d}(v(z)-M_a)$,　$z\in \bar{U}_a$ 」

証明) ((6.1)の証明)

$\varphi(z) = \hat{u}(z) - m_a - \bar{d}(v(z)+M_a)$ とおく.

φ は U_a で調和 $U_a\cup S_a$ で連続, $\varphi\leq 0$ $z\in S_a$, 又 (4.6), (5.3) より

$$M[\varphi] = (\bar{d}-d)\frac{y}{x^2+y^2} - \rho(z) \geqq (\bar{d}-d)\frac{y}{x^2+y^2} - Ky$$

従って lemma 2 より $\varphi(z)\leq 0$　$z\in U_a$

((6.2)の証明)

$\varphi(z) = \underline{d}(v(z)-M_a) - \hat{u}(z)$ とおく.

φ は $\bar{U}_a$ で調和　$U_a\cup S_a$ で連続, $\varphi\leq 0$ $z\in S_a$,

又 (4.6) (5.) より

$$M[\varphi] = (-\underline{d})\frac{y}{x^2+y^2} - \rho(z) \geqq (d-\underline{d})\frac{y}{x^2+y^2} - Ky$$

従って lemm 2 より $\varphi(z)\leq 0$　$z\in \bar{U}_a$ 」

(6.3)　$\hat{u}\equiv 0$ の必要充分条件は, (4.6) に於ける d が 0 になることである.

(証明)　$\hat{u}\equiv 0$ なら $M[\hat{u}]\equiv 0$ であるから $d=0$.

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

逆に $d=0$ なら，全ての $\bar{d}>0$ に対し (6.1) より

$$\bar{d}(v(z)+M_a) \geqq \hat{u}(z)-m_a$$

故に　$\hat{u}(z) \leq m_a \qquad z \in U_a$

一方 (4.2) より　$\lim_{a\to\infty} m_a = 0$　従って　$\hat{u}(z) \equiv 0$

(定理 1 の必要性の部分の証明)

$\hat{u} \not\equiv 0$ とする．(6.3) より $d>0$ である．(6.2) より $d>0$ に対して (6.2) より　$\frac{1}{d}+M_a \geqq v(z) \qquad z \in U_a$

(5.5) より v は　$z \in D-U_a$ で上に有界であるから

v は D で上に有界になる．

7. 定理 1 の証明 (充分性)

U_a，S_a は前節どおりとする。

Lemma　$\varphi(z)$ を U_a で調和．

$\bar{U}_a-\{0\}$ で連続微分可能

$\varphi(z) \leq 1 \qquad z \in U_a$

$M[\varphi](\xi) \geqq 0 \qquad \xi \neq 0 \qquad \xi \in R$

$\Rightarrow \quad \varphi(z) \leqq \hat{u}(z) \qquad z \in U_a$　⊣

(証明)　$\psi_n(z) = \varphi(z) - \hat{u}_n(z)$　とおく．

ψ_n は U_a で調和．(2.5) により　$\bar{U}_a-\{0\}$　で連続．

$$\lim_{z\to\zeta} \psi_n(z) \leq 0 \qquad \zeta \in S_a \cup \bar{U}_n$$

$\psi_n(z)$ が U_a で正になれば，$\xi \in R \cap \bar{U}_a - U_n$ で正の最大値をとるはずである。

$M[\varphi] \geqq 0$ と (3.7) より　$M[\psi_n](\xi) \geqq 0$

他方　$\frac{\partial \psi_n}{\partial x}(\xi) = 0 \qquad \frac{\partial \psi_n}{\partial y}(\xi) < 0$　より

$$0 > M[\psi_n](\xi) = m(\xi)\frac{\partial \psi_n}{\partial y}(\xi) \geqq 0 \quad 矛盾$$

故に　$\psi_n(z) \leq 0 \qquad z \in U_a$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

即ち　$\varphi(z) \leq \hat{u}_n(z) \qquad z \in U_a$

(2.7) より　$\varphi(z) \leq \hat{u}(z) \qquad z \in U_a$　を得る．

(定理1の充分性の証明)

$v(z)$ を上に有界とする．即ち

$$\sup_{z \in U_a} v(z) = L_a < \infty$$

又　$$\sup_{z \in S_a} v(z) = N_a$$　とおく．

(5.5) より

(*)　$N_a < L_a$

$$\varphi(z) = \frac{1}{L_a - N_a}(v(z) - N_a)$$

は (5.3), (5.4) から lemma の条件をみたす．故に

$$\varphi(z) \leq \hat{u}(z) \qquad z \in U_a$$

(*)より　$\hat{u}(z) \neq 0$　を得る．

8. 比 較 定 理

(1.1) (1.2) (1.3) をみたす二つの θ, θ^* に対し夫々対応して $\hat{u}$, v 及び $\hat{u}^*$, v^* を作る．

定理 2.　$\theta^*(\xi) \geqq \theta(\xi) \qquad \xi < 0 \qquad \xi \in R$

$\theta^*(\xi) \leq \theta(\xi) \qquad \xi > 0 \qquad \xi \in R$

のと　$\hat{u} \neq 0$　ならば　$\hat{u}^* \neq 0$ ．

(証明)　$\hat{u} \neq 0$ とすると定理1より v は上に有界

$$\sup_{z \in U_a} v(z) = L_a \qquad \sup_{z \in S_a} v(z) = N_a$$

とおくと　(*) $N_a < L_a < \infty$　((5.5)による)

(5.5) から　$$\frac{\partial v}{\partial x}(\xi) > 0 \qquad \xi < 0 \qquad \xi \in R$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\xi) < 0 \qquad \xi > 0 \qquad \xi \in R$$

であるから　$\xi \neq 0$　$\xi \in R$　に対して

$$M^*[v](\xi) = m^*(\xi)\left(\frac{\partial v}{\partial y}(\xi) + \tan\theta^*(\xi)\frac{\partial v}{\partial x}(\xi)\right)$$

$$\geqq m^*(\xi)\left(\frac{\partial v}{\partial y}(\xi) + \tan\theta(\xi)\frac{\partial v}{\partial x}(\xi)\right)$$

$$= \frac{m^*(\xi)}{m(\xi)} M[v](\xi) = 0$$

従って　$\varphi(z) = \dfrac{1}{L_a - N_a}(v(z) - N_a)$

は　$\theta^*(M^*[\quad])$ に対して §7 *Lemma* の条件をみたす．

$$\varphi(z) \leq \hat{u}^*(z) \qquad z \in U_a$$

(*) より　$\hat{u}^* \neq 0$.

9．定 理 *1* の 変 形

(5.5) より $v(z)$ は D 内で $z=0$ の近くでは下から有界な調和函数である．
従って　$z=0$　の近くで

$$(9.1) \qquad v(z) = \varphi(z) + \frac{1}{\pi}\int_{|\xi|<a} \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2} v(\xi)d\xi + \frac{cy}{x^2+y^2}$$

（但し C は非負の定数 φ は $z=0$ の近くで調和）
と表現できる．$\frac{c}{\pi}$ は v のマルチン表現の *supporting measure* の $\{0\}$ に於ける大きさをあらわす．

(9.1) と (5.5) より

(9.2)　　v が上に有界のための必要充分条件は
　　$c=0$　且つ　$v(\xi)$　$\xi \in R$　が $\xi=0$ の近くで有界なことである．

$$\frac{1}{M(z)} = e^{-s(z)}(\cos\theta(z) + i\sin\theta(z))$$

又 (5.2) より

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\xi) = -\mathcal{R}e\,\frac{1}{\xi M(\xi)} = -\frac{e^{-s(\xi)}}{\xi}\cos\theta(\xi) \quad \xi \in R \quad \xi \neq 0$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

従って定理1と(9.2)を合せて

「定理3］　$\hat{u} \neq 0$ のための必要充分条件は

$$c = 0 \quad 且つ \quad \int_{|\xi|<a} \frac{e^{-s(\xi)}}{|\xi|} \cos\theta(\xi)\, d\xi < \infty \qquad (a > 0) \quad 」$$

(9.1)を用いて(5.2)のVは $z=0$ の近くで

$$V(z) = \Phi(z) + \frac{1}{\pi}\int_{|\xi|<a} \frac{i}{z-\xi}\, v(\xi)\, d\xi + \frac{ic}{z} \qquad (z = x + iy)$$

（但し $\Phi(z)$ は $z=0$ の近くで解析的）

と書け，又，$V'(z) = -\dfrac{1}{zM(z)}$ であるから

$$(9.3) \qquad \lim_{y\downarrow 0} y\, v(0,y) = \lim_{y\downarrow 0} yV(iy) = c$$

$$(9.4) \qquad \lim_{y\downarrow 0} y^2 |V''(iy)| = \lim_{y\downarrow 0} \frac{y}{|M(iy)|} = \lim_{y\downarrow 0} y\, e^{-s(0,y)} = c$$

（注意）　(9.3)又は(9.4)を c の定義と思ってもよい。

次の結果は応用上有効である。

［命題］　(9.5)　$\displaystyle\varliminf_{\xi\to 0-} \theta(\xi) > -\frac{\pi}{2}$ 又は $\displaystyle\varlimsup_{\xi\to 0+} \theta(\xi) < \frac{\pi}{2}$

ならば $c = 0$ である．

（証明）　$\displaystyle\varliminf_{\xi\to 0-} \theta(\xi) > -\frac{\pi}{2}$ とする．$\varepsilon > 0$ 及び $M < \dfrac{\pi}{2}$ が存在して

$-\varepsilon < \xi < 0$ で $\theta(\xi) > -M$ となる．

$$s(0,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{0-\xi}{(0-\xi)^2+y^2}\,\theta(\xi)\, d\xi$$

$\theta(\xi) = 0 \quad |\xi| > K$ 且つ $|\theta(\xi)| \leq \dfrac{\pi}{2}$ より

$$s(0,y) \geqq \frac{1}{\pi}\int_{-K}^{-\varepsilon} \frac{|\xi|}{\xi^2+y^2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{0} \frac{|\xi|}{\xi^2+y^2}(-M)\, d\xi$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{K} \frac{|\xi|}{\xi^2+y^2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) d\xi$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

第一項 $= -\frac{1}{4}\left[\log(\xi^2+y^2)\right]_{\xi=\varepsilon}^{\xi=K} \geqq -A_1(\varepsilon, K) > -\infty$

第二項 $= -\frac{M}{2\pi}\left[\log(\xi^2+y^2)\right]_{\xi=0}^{\xi=\varepsilon} \geqq -\frac{M}{\pi}\log\frac{1}{y} - A_2(\varepsilon, M)$

$A_2(\varepsilon, M) > -\infty$

第三項 $= -\frac{1}{4}\left[\log(\xi^2+y^2)\right]_{\xi=0}^{\xi=K} \geqq -\frac{1}{2}\log\frac{1}{y} - A_3(K)$

$A_3(K) > -\infty$

$e^{-S(0,y)} \leqq y^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{M}{\pi}\right)} e^{A_4}$

但し A_4 は ε, K, M に依存する定数

$\frac{1}{2}+\frac{M}{\pi} < 1$ より　$C = \lim_{y\downarrow 0} y\, e^{-S(0,y)} = 0$

$\lim_{\xi\to 0+} \theta(\xi) < \frac{\pi}{2}$ のときも同様である。　」

定理3と(9.5)を合せて

[定理4]　$\lim_{x\to 0-} \theta(\xi) > -\frac{\pi}{2}$ 又は $\lim_{x\to 0+} \theta(\xi) < \frac{\pi}{2}$ のとき

$\hat{u} \neq 0$ のための必要充分条件は

$$\int_{|\xi|<a} \frac{e^{-S(\xi)}}{|\xi|} \cos\theta(\xi)\, d\xi < \infty \qquad a > 0 \quad \text{である。}$$ 」

10. $S(\xi)$ の評価

$$\pi S(\xi) = {}^{\xi *}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\eta)}{\xi-\eta}\, d\eta$$

但し ${}^{\xi *}\!\!\int_a^b = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\int_a^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^b\right] \qquad a < \xi < b$

(10.1)　$$\left|\int_{p\xi}^{q\xi} \frac{d\rho}{\rho}\right| \leq \frac{q-p}{p}$$

但し　$0 < p < q$　且つ　$\xi \neq 0$

Sem. on Probab.
Vol.40　1973年
P1-98

（証明）　左辺 $\leq \int_{p|\xi|}^{g|\xi|} \frac{d\rho}{p|\xi|}$ より明らか．

［記号］　二つの ξ の函数 $f(\xi)$, $g(\xi)$ が

$$|f(\xi)-g(\xi)| \leq K \qquad (K\text{は定数})$$

をみたすとき　$f(\xi) \approx g(\xi)$ と書く．

(10.2)
$$\int_{|\eta-\xi|>\frac{|\xi|}{2}} \frac{\theta(\eta)}{\xi-\eta}\,d\eta \approx \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{\theta(-\eta)-\theta(\eta)}{\eta}\,d\eta \qquad (\xi \neq 0)$$
」

（証明）　$\xi > 0$ とする $|\theta(\eta)| \leq \frac{\pi}{2}$ と (10.1) より

$$\text{左辺} \approx \int_{-\infty}^{-\xi} \frac{\theta(\eta)}{\xi-\eta}\,d\eta + \int_{2\xi}^{\infty} \frac{\theta(\eta)}{\xi-\eta}\,d\eta$$

$$= -\int_{-\infty}^{-\xi} \frac{\theta(\eta)}{\eta}\,d\eta + \int_{-\infty}^{-\xi} \frac{\xi\theta(\eta)}{(\xi-\eta)\eta}\,d\eta$$

$$-\int_{2\xi}^{\infty} \frac{\theta(\eta)}{\eta}\,d\eta + \int_{2\xi}^{\infty} \frac{\xi\theta(\eta)}{(\xi-\eta)\eta}\,d\eta$$

$$\approx \int_{\xi}^{\infty} \frac{\theta(-\eta)-\theta(\eta)}{\eta}\,d\eta + \left\{\int_{-\infty}^{-\xi} + \int_{2\xi}^{\infty}\right\} \frac{\xi\theta(\eta)}{(\xi-\eta)\eta}\,d\eta$$

$$|\text{第二項}| \leq \frac{\pi}{2}\left(\int_{\xi}^{\infty} \frac{\xi}{\eta^2}\,d\eta + \int_{2\xi}^{\infty} \frac{\xi}{\frac{1}{2}\eta^2}\,d\eta\right) \leq \frac{3}{2}\pi$$

$\xi < 0$ のときも同様である．

(1.3) より

(10.3)
$$\int^{*}_{|\eta-\xi|\leq\frac{|\xi|}{2}} \frac{\theta(\eta)}{\xi-\eta}\,d\eta = -\int_{0}^{\frac{|\xi|}{2}} \frac{\theta(\xi+\rho)-\theta(\xi-\rho)}{\rho}\,d\rho$$

は明らか．

［仮定 A］　$\xi < \eta < 0$　又は　$0 < \eta < \xi$　のとき

$$\left|\frac{\theta(\xi)-\theta(\eta)}{\xi-\eta}\right| \leq \frac{p}{|\eta|}$$

(10.4)　「仮定 A］の下で　$\int^{*}_{|\eta-\xi|\leq\frac{\xi}{2}} \frac{\theta(\eta)}{\xi-\eta}\,d\eta \approx 0$

（証明）

$$\int_{0}^{\frac{|\xi|}{2}} \frac{|\theta(\xi+\rho)-\theta(\xi-\rho)|}{\rho}\,d\rho$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$\leqq \int_0^{\frac{|\xi|}{2}} \frac{2P}{|\xi|-\rho}\, d\rho \leq 2P$$ による. 」

(10.2) (10.4) を合せて

［命題］ 仮定 A の下で

$$s(\xi) \approx \frac{1}{\pi}\int_{|\xi|}^{\infty} \frac{\theta(-\eta)-\theta(\eta)}{\eta}\, d\eta \tag{10.5}$$

又は

$$c_1 e^{t(\xi)} \leq e^{-s(\xi)} \leq c_2 e^{t(\xi)} \tag{10.6}$$

但し c_1, c_2 は正の定数で

$$t(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{|\xi|}^{\infty} \frac{\theta(\eta)-\theta(-\eta)}{\eta}\, d\eta$$

11. 判定条件と例

定理4と(10.6)を合せると

［定理5］ θ が次の条件をみたすとする.

$$\varliminf_{x\to 0-} \theta(\xi) > -\frac{\pi}{2}, \quad \varlimsup_{x\to 0+} \theta(\xi) < \frac{\pi}{2} \tag{11.1}$$

(11.2) §10の［仮定 A］をみたす.

このとき $t(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{\theta(\eta)-\theta(-\eta)}{\eta}\, d\eta$ とおくと

$\hat{u} \neq 0$ のための必要充分条件は

$$\int_{|\xi|<a} \frac{e^{t|\xi|}}{|\xi|} \cos\theta(\xi)\, d\xi < \infty$$ である.

系、 $|\theta(\xi)| \leq M < \frac{\pi}{2}$ のときは

$\theta(\xi)$ が［仮定 A］をみたすならば

$\hat{u} \neq 0$ のための必要充分条件は

$$\int_{|\xi|<a} \frac{e^{t(\xi)}}{|\xi|}\, d\xi < \infty$$ である。

（証明） $\cos M \leq \cos\theta(\xi) \leq 1$ による.

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(注意1) $\theta(\xi)$ が $\xi\to 0+$, $\xi\to 0-$ のとき極限をもち，かつ条件(11.1)をみたさないとすると

$$\lim_{\xi\to 0-}\theta(\xi)=-\frac{\pi}{2}\qquad \lim_{\xi\to 0+}\theta(\xi)=\frac{\pi}{2}$$

であって，此のときは次の例2により $\hat{u}\equiv 0$ となる．

(注意2) (11.2)は $\theta(\xi)$ が $\xi=0$ の近くで極端に振動しないことを示す．

例1.
$$\alpha^+(\xi)=A^+ + \frac{B^+}{\log\frac{1}{|\xi|}}+\frac{C^+}{\log\frac{1}{|\xi|}\log\log\frac{1}{|\xi|}}$$

$$\alpha^-(\xi)=A^- + \frac{B^-}{\log\frac{1}{|\xi|}}+\frac{C^-}{\log\frac{1}{|\xi|}\log\log\frac{1}{|\xi|}}\qquad |A^+|<\frac{\pi}{2},\quad |A^-|<\frac{\pi}{2}$$

$\xi=0$ の近くで

$$\theta(\xi)=\begin{cases}\alpha^+(\xi) & \xi>0\\ \alpha^-(\xi) & \xi<0\end{cases}$$ とすると

(11.3) $A^+<A^-$ 又は $A^+=A^-$, $B^- - B^+>\pi$

又は $A^+=A^-$, $B^- - B^+=\pi$, $C^- - C^+>\pi$

のとき $\hat{u}\not\equiv 0$

その他の場合，即ち

(11.4) $A^+>A^-$ 又は $A^+=A^-$, $B^- - B^+<\pi$

又は $A^+=A^-$, $B^- - B^+=\pi$ $C^- - C^+\leqq \pi$

のとき $\hat{u}\equiv 0$

これは系の判定条件を使えばよい。

例2. 比較定理を用いると

(11.3)が成立し， $\theta(\xi)\geqq\alpha^-(\xi)$ $\xi<0$, $\theta(\xi)\leqq\alpha^+(\xi)$ $\xi>0$

であれば $\hat{u}\not\equiv 0$

(11.4)が成立し， $\theta(\xi)\leqq\alpha^-(\xi)$ $\xi<0$, $\theta(\xi)\geqq\alpha^+(\xi)$ $\xi>0$

であれば $\hat{u}\equiv 0$ である.

(1) 特に $\lim_{\xi\to 0-}\theta(\xi)<\lim_{\xi\to 0+}\theta(\xi)$ なら $\hat{u}\equiv 0$

$\lim_{\xi\to 0-}\theta(\xi)>\lim_{\xi\to 0+}\theta(\xi)$ なら $\hat{u}\not\equiv 0$

(2) $\theta(\xi)$ がヘルダー連続($\xi=0$で)なら $\hat{u}\equiv 0$ 」

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

以下 $\lim_{\xi\to 0-}\theta(\xi)=\frac{\pi}{2}$ の場合を述べる（$\lim_{\xi\to 0+}\theta(\xi)=\frac{\pi}{2}$ のときも同様である）.

例2より

(11.5) $\lim_{\xi\to 0-}\theta(\xi)=\frac{\pi}{2}$ $\quad \overline{\lim_{\xi\to 0+}}\,\theta(\xi)<\frac{\pi}{2}$ なら $\hat{u}\neq 0$

(11.6) $\lim_{\xi\to 0-}\theta(\xi)=\lim_{\xi\to 0+}\theta(\xi)=\frac{\pi}{2}$ のとき

$\theta(\xi)$ が［仮定A］をみたすとする。

$\rho(\xi)=\frac{\pi}{2}-\theta(\xi)$ とおけば

$\hat{u}\neq 0$ となる必要充分条件は

$$\int_{|\xi|<a}\rho(\xi)\frac{e^{\varphi(\xi)}}{|\xi|}\,d\xi<\infty$$

但し $\varphi(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{|\xi|}^{\infty}\frac{(\rho(-\eta)-\rho(\eta))}{\eta}\,d\eta$ である。

（証明） $\xi=0$ の近くで $C_1\cos\theta(\xi)\leq\rho(\xi)\leq C_2\cos\theta(\xi)$ $(0<C_1\leqq C_2)$ より明らか。

［定理6］ $\theta_0^-(\xi)$ を $\xi<0$, $\xi\in R$ で定義され（$\xi<0$ で）(1.1)(1.2)(1.3) 及び［仮定A］をみたし，$\lim_{\xi\to 0-}\theta^-(\xi)=\frac{\pi}{2}$ とする。

$\theta(\xi)=\theta^-(\xi)$ $\xi<0$ をみたす任意の $\theta(\xi)$ に対して $\hat{u}\neq 0$ となる必要充分条件は

(11.7) $$\int_{-a}^{0}\frac{\rho^-(\xi)e^{\varphi^-(\xi)}}{|\xi|}\,d\xi<\infty \qquad (0<a<1)$$

但し $\rho^-(\xi)=\frac{\pi}{2}-\theta^-(\xi)$ $\quad \varphi^-(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{|\xi|}^{1}\frac{\rho^-(-\eta)}{\eta}\,d\eta$ 」.

（証明）（必要性）

特に $\theta(\xi)=\begin{cases}\theta^-(\xi) & \xi<0\\ \frac{\pi}{2}-\xi & 0\leq\xi<1\end{cases}$ $\qquad \rho(\xi)=\frac{\pi}{2}-\xi$

の様な θ に対し $\hat{u}\neq 0$. (11.6) から

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$\int_{-a}^{0} \rho^{-}(\xi)\, \frac{e^{\varphi(\xi)}}{|\xi|}\, d\xi < \infty \qquad (0 < a < 1)$$

$$\varphi(\xi) = \varphi_0^{-}(\xi) - \frac{1}{\pi}\int_{|\xi|}^{1} \frac{\rho(\eta)}{\eta}\, d\eta + \frac{1}{\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{\rho(-\eta)-\rho(\eta)}{\eta}\, d\eta$$

$0 < \eta < 1$ で $\rho(\eta) = \eta$

$|\eta| \geqq K$ で $\rho(-\eta) - \rho(\eta) = \theta(\eta) - \theta(-\eta) = 0$ であるから

$\varphi(\xi) \approx \varphi^{-}(\xi)$, よって

$$\int_{-a}^{0} \rho^{-}(\xi)\, \frac{e^{\varphi^{-}(\xi)}}{|\xi|}\, d\xi < \infty$$

(充分性) 任意の $\theta(\xi)$ に対して $\tilde{\theta}^{+}(\xi)$ を

$\tilde{\theta}^{+}(\xi)$ は $\xi > 0$ で定義され

$0 < \xi < 2$ で、$\tilde{\theta}^{+}(\xi) \geqq \theta(\xi)$, $\theta(-\xi) = \theta^{-}(-\xi)$, $\frac{\pi}{2} - \xi$

をみたす最小の凸函数(上に凸)

$2 \leq \xi \leq 3$ で 充分なめらか

$3 \leq \xi < \infty$ で 0 とする.

$$\tilde{\theta}(\xi) = \begin{cases} \tilde{\theta}^{+}(\xi) & \xi > 0 \\ \theta^{-}(\xi) & \xi < 0 \end{cases}$$ とおく.

$2 > \xi > 0$ で $\tilde{\theta}(\xi)$ は凸であるから

$0 < \eta < \xi \leqq 1$ に対して $\left|\dfrac{\tilde{\theta}(\xi) - \tilde{\theta}(\eta)}{\xi - \eta}\right| \leq |\tilde{\theta}(2) - \tilde{\theta}(1)|$

従って $\tilde{\theta}$ は [仮定 A] をみたす.

$\tilde{\theta}$ より $\tilde{\rho}$, $\tilde{\varphi}$, $\hat{\tilde{u}}$ を作る.

$\tilde{\rho}(\xi) \leq \rho^{-}(-\xi)$, ξ $0 < \xi \leq 1$ より必要性の証明と同様にして

$\tilde{\varphi}(\xi) \approx \tilde{\varphi}^{-}(\xi) = \varphi^{-}(\xi) = \varphi^{-}(-\xi)$

従って $\displaystyle\int_{|\xi|<\alpha} \tilde{\rho}(\xi)\, \frac{e^{\varphi(\xi)}}{|\xi|}\, d\xi \leq C\int_{-a}^{0} \rho^{-}(\xi)\, \frac{e^{\varphi^{-}(\xi)}}{|\xi|}\, d\xi < \infty$

(11.6) より $\tilde{u} \neq 0$, 比較定理より $u \neq 0$ 」

(註) 此の定理の証明は佐藤健一氏の助言による.

(注意) (11.7) が成立することは, 直感的には, $\xi > 0$ に到達せずに $\{0\}$ へ到達する確率が正であることを示している.

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$\overline{\lim_{\xi\to 0-}}\,\theta(\xi)<\frac{\pi}{2}$ ならば，$\theta(\xi)$ $\xi>0$ を適当にとると 0 へは到達しなくなる。この場合 $\xi>0$ を通らないでは 0 には到達しない。

例3. $\theta^-(\xi)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{(\log\frac{1}{|\xi|})^\alpha}$ $\alpha>0$ $-a<\xi<0$

とすると 定理6が使えて，$\theta(\xi)=\theta^-(\xi)$ $\xi<0$ のとき

1) $\alpha>1$ なら $\theta(\xi)$ $(\xi>0)$ には関せず $\hat{u}\neq 0$

2) $\alpha\leq 1$ なら 適当な $\theta(\xi)$ $(\xi>0)$ に対して $\hat{u}\equiv 0$

((2) の場合も常に適当な $\theta(\xi)$ $(\xi>0)$ に対して $\hat{u}\neq 0$ とできる)

例4. $\lim_{\xi\to 0-}\theta^-(\xi)=\frac{\pi}{2}$，$\theta^-(\xi)$ が $\xi=0$ でもヘルダー連続なら任意の $\theta(\xi)$ $(\theta(\xi)=\theta^-(\xi)$ $\xi<0)$ に対して $\hat{u}\neq 0$

これは比較定理（定理2）より明らかである。

A. 附　録

(3. 8) の証明

簡単のため，$\theta(\xi)$ を $R-\{0\}$ で2回連続微分可能で (1. 1), (1. 2) をみたす函数とする。

§2と同様 $\theta^*(\xi)$ $\xi\in R$ を

(2.1) $$|\theta^*(\xi)|<\frac{\pi}{2}$$

(2.2) $$\theta^*(\xi)=\theta(\xi)\qquad \xi\in U_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\subset R$$

(2.3)* θ^* は R で（0 も含めて）2回連続微分可能とする。

又 $(b_1(t), b_2(t))$ を $z=(x,y)$ を出発点とするブラウン運動 $\underline{\underline{t}}^y(t)$ を $b_2(t)$ の $t=0$ に於ける局所時間とする。

$$Y_t(z)=|b_2(t)|$$

$$X_t(z)=b_1(t)+\int_0^t\tan(\theta^*(X_s(z)))\,d\underline{\underline{t}}^y(s)\quad .$$

$P_z(z\in\cdot)\equiv P((X(z),Y(z))\in\cdot)$ （但し $\{z_t\}_{t\geq 0}$ は $\bar{D}$ の連続な $path$）

とおくと $\{P_z\}$ は§2で与えたマルコフ過程であって，σ_1, σ_n を R_1, $U_n=$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$\{x \in R : |x| < \frac{1}{n}\}$ への到達時間とすると

$$\hat{u}_n(z) = P_z(\sigma_n < \sigma_1) \quad \text{である.}$$

$t < \sigma_n$ では $(X_t(z), Y_t(z))$ は θ^* のとり方によらず θ だけで定まるから,

(a.1) $\hat{u}_n(z)$ は θ^* のとり方に関せず θ だけで定まる.

(3.8) を証明するためには θ, θ^* より M, M^*; $M[\ ]$, $M^*[\ ]$; $\hat{M}[\ ]$; $\hat{M}^*[\ ]$ を §2, 3, 4 に於けるように定義すると

(a.2) $\hat{M}^*[u_n](z) \leq 0 \qquad z \in D_1$

を証明すれば充分である。

何となれば $\theta_N^*(\xi)d\xi \to \theta(\xi)d\xi$ (weak*) となるように θ^* をえらぶと $M_N^*(z) \to M^*(z)$ $z \in D$ 且つこの収束は $\{z : y \geq a\}$ $(a > 0)$ で一様有界収束である。

従って $\hat{M}[u_n](\ ) = \lim \hat{M}_N^*[u_n](z) \leq 0, \ z \in D_1$.

$$\overline{\lim_{z \to \xi}}\ \hat{M}[u_n\ \ z) = \lim_{z \to \xi} M[u_n](z) \qquad \xi \in R$$

より (3.8) が得られ .

以下 (a.2) を証明 る。

(a.3) $z = (x, y)$ 対して, $X_t(z)$ は x に関して 2回連続微分可能で,

$$X_t^{(1)}(z) - \frac{\partial}{\partial x} X_t(z), \quad X_t^{(2)}(z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} X_t(z)$$

は夫々, 確率微分方程式

$$X_t^{(1)}(z) = 1 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} \tan \theta^*(X_s(z)) X_s^{(1)}(z)\, d\underline{\underline{t}}(s)$$

$$X_t^{(2)}(z) = \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tan \theta^*(X_s(z))(X_s^{(1)}(z))^2 + \frac{\partial}{\partial \xi} \tan \theta^*(X_s(z)) X_s^{(2)}(z) \right\} d\underline{\underline{t}}(s)$$

の一意的な解である. 」

σ_p $(p > 0)$ を $R_p = \{z : y\ \ p\}$ への到達時間とする. 又 $C_2^b(R)$ を 2 回連続有界微分可能な R 上の関数の全体とする。

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(a 4)　$w \in C_2^b$ のとき,

$$v(\xi) = E_{(\xi,0)}(w(z_{\sigma_p})) = E(w(X_{\sigma_p}(\xi, 0)))$$

とおくと $v \in C_2^b$.

(証明)　$(\xi, 0)$を出発点とする. (X_t, Y_t) に対し σ_p は ξ に無関係であるから,

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi) = E\Big(\frac{d}{dx} w(X_{\sigma_p}(\xi, 0)) \frac{\partial}{\partial \xi} X_{\sigma_p}(\xi, 0)\Big) \quad 等と$$

なることより(9.3)より明らか。

(a.5)　$G^* f(z) = E_z\Big(\int_0^{\sigma_1} f(z_t)\,dt\Big)$

　但し f は D_1 の台コンパクトな函数とする.

このとき　$G^* f(\xi, 0) \in C_2^b$　(ξの関数として)

　　　$M^*[G^* f](\xi) = 0 \qquad \xi \in R$.

(証明)　fの台が $\{z : y > p_1\}$ に含まれるように $p_1 > 0$ をとると $G^* f$ は $\{z : 0 < y < p_1\}$ 調和である. $0 < p < p_1$ とすると $G^* f(\xi, p) \in C_2^b$ (ξの関数として)

　一方　$G^* f(\xi, 0) = E_{\xi.0}(G^* f(z_{\sigma_p}))$ であるから

(a.4) より $G^* f(\xi, 0) \in C_2^b$ を得る.

　これと $G^* f$ が $\{z : 0 < y < p_1\}$ で調和なことを合せると $G^* f$ は $\{z : 0 \leq y < p_1\}$ で 連続微分可能なことがわかる. $M^*[G^* f](\xi) = 0$ は確率微分方程式の変数変換の公式を用いて得られる.　」

　$\hat{G} f(z)$　$z \in \overline{D}_1$ を, D_1 で有界調和

$$\hat{G} f(z) = \begin{cases} G^* f(z) & z = \xi \in R \text{ のとき} \\ 0 & z \in R_1 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく。

(a.6)　$f \geqq 0$ のとき　$M^*[\hat{G} f](\xi) \leqq 0 \qquad \xi \in R$

(証明)　$\xi \in R$ で $\hat{G} f(\xi, 0) = G^* f(\xi, 0) \in C_2^b$ であるから

　　$\hat{G} f$ は $D_1 \cup R$ で連続微分可能である.

　一方　$f \geqq 0$ より　$G^* f$ は D_1 で優調和, 従って

(46)

$$\hat{G}f(z) \leq G^*f(z) \qquad z \in D_1 .$$

故に $\quad \dfrac{\partial \hat{G}f}{\partial y}(\xi, 0) \leq \dfrac{\partial G^*f}{\partial y}(\xi, 0) \qquad \xi \in R .$

このことから $\quad M^*[\hat{G}f](\xi, 0)$

$$= e^{s^*(\xi)}\left(\cos\theta^*(\xi)\frac{\partial \hat{G}f}{\partial y} + \sin\theta^*(\xi)\frac{\partial \hat{G}f}{\partial x}\right)$$

$$\leq e^{s^*(z)}\left(\cos\theta^*(\xi)\frac{\partial G^*f}{\partial y} + \sin\theta^*(\xi)\frac{\partial \overset{*}{G}f}{\partial x}\right)$$

$$= M^*[G^*f](\xi, 0) = 0$$

((a.2) の証明)

$\hat{M}^*[\hat{G}f](z) = 0 \quad z \in R_1$ ($\hat{M}^*$ の定義による (4.1) 参照) と (a.6) から $f \geqq 0$ に対して $\hat{M}^*[Gf](z) \leqq 0 \quad z \in D_1$ を得る. $\hat{u}_n$ は $D_1 \cup R$ で $\{P_z\}$ に関し *excessive* であるから $f_N \geqq 0$ が存在して

$$\hat{u}_n = \lim_{N\to\infty} G^* f_N, \quad z \in \bar{D}_1 \quad \text{とできる(有界収束).}$$

$G^* I_R \equiv 0$ より f_N を D_1 で台がコムパクト函数にとれる.

故に $\quad \hat{u}_n(z) = \lim_{N\to\infty} \hat{G}f_N(z) \qquad z \in R_1 \cup R$ (有界収束)

$\hat{u}_n$, $\hat{G}f_N$ 共 D_1 で有界調和であるから, 実は上の収束は全ての $z \in \bar{D}_1$ に対して成立し,

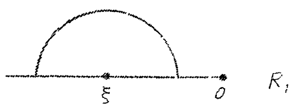
$$\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x}(z) = \lim_{N\to\infty}\frac{\partial \hat{G}f_N}{\partial x}(z), \quad \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial y}(z) = \lim_{N\to\infty}\frac{\partial \hat{G}f_N}{\partial y}(z)$$

$z \in D_1$ も成立つ. ($\hat{u}_n = 0$, $\hat{G}f_N = 0 \quad z \in R_1$ に注意). 従って

$$\hat{M}^*[\hat{u}_n] = \lim_{N\to\infty} \hat{M}^*[\hat{G}f] \leq 0 \qquad z \in D_1$$

(3.7) (4.3) の証明

$\xi \in R$ とし, U を $\bar{D}_1$ 内に於ける ξ の近傍で, $\bar{U} \not\ni 0$ とする.



(a.7) $\quad v_n$, v を $D_1 \cap U$ で調和, $\lim v_n(z) = v(z) \quad z \in D_1 \cap \bar{U}$ (有界収束)

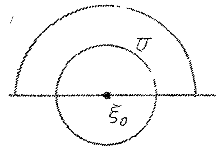
Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$M[v_n](\xi)=0 \qquad \xi\in R_1\cap U \quad (\,v_n\ \text{は}\ U\ \text{で連続微分可能とする}\,)$$
$$M[v_n](z)\leqq 0 \qquad z\in D_1\cap U$$

とする．このとき v は U で連続微分可能で

$$M[v](\xi)=0 \qquad \xi\in R_1\cap U \qquad \text{“}$$

（証明） $\xi_0\in R_1\cap U$ を定め $S_r=\{z:|z-\xi_0|<r\}\cap\overline{D}_1$ $\overline{S}_r\subset U$ とする．



$M[v_n]$ が $D_1\cap U$ で調和，$M[v_n](\xi)=0$ $\xi\in R_1\cap U$ より

$$M[v_n](z)=\frac{1}{2\pi}\int Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-\frac{\zeta^*+z}{\zeta^*-z}\right)M[v_n](\zeta)\,d\theta \qquad z\in S_R\cap\overline{D}_1$$

但し $\zeta=(\xi_0+r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$\zeta^*=(\xi_0+r\cos\theta,\ -r\sin\theta)$

$z\in U$ で $M[v](z)=\lim_{n\to\infty}M[v_n](z)$

と $M[v_n](z)\leqq 0$ であることから，適当な ∂S_r 上の有界測度 $\rho(d\theta)$ があって適当に部分列をとると $M[v_n](\zeta)\longrightarrow\rho(d\theta)$ weak*

$$M[v](z)=\frac{1}{2\pi}\int Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-\frac{\zeta^*+z}{\zeta^*-z}\right)\rho(d\theta)$$

w を v の S_r に於ける共軛調和函数

$V(z)=v(z)+iw(z)$ とおくと

$J_m\,M(z)\,V'(z)=-M[v](z)$ より

$$M(z)V'(z)=-\frac{i}{2\pi}\int\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-\frac{\zeta^*+z}{\zeta^*-z}\right)\rho(d\theta)+c$$

（c は実数）

$M^{-1}(z)$，$F(z)=-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-\frac{\zeta^*+z}{\zeta^*+z}\right)\rho(d\theta)$ は共に S_r で連続，よって $V'(z)$ は S_r で連続，即ち v は S_r で連続微分可能である．

$Re\,F(z)=0 \quad z\in R\cap S_r$ より

$$M[v](\xi)=0 \qquad \xi\in R \quad \text{を得る．} \qquad \lrcorner$$

(3 7) を示すためには，(a.7) で $M=M^*$ とし，ポテンシャル G^*f のうち f の台が $\xi\notin[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]\subset R$ の近傍上にないようなもので u_n が近似できるこ

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

とを用いる((a.5) 参照)。

(4.3) では (3.7) を既知として (a.7) で $v_n = \hat{u}_n$, $v = \hat{u}$ とおけばよい。

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

分枝過程の超過測度と双対性

長　沢　正　雄

§1. 連続時間の Galton-Watson 過程

生存係数 $c>0$，及び分枝法則 $\{q_n;\ n=1,2,\cdots\}$[注1] によって定まる連続時間系数の Galton-Watson 過程 X_t（以後，簡単のために，CGW 過程と呼ぶ[注2]）を考えよう。それは状態空間 $\{0,1,2,\cdots\}$ 上のマルコフチェインであって，各状態の滞在時間 τ は $P_n[t<\tau]=e^{-nct}$ なる法則をもち，[注3] 状態 n から出発して時刻 τ で m にとぶ確率が

$$P_n[X_\tau=m]=q_{m-n+1}\quad ,\qquad n\geqq 1$$

で与えられている．なお，$P_0[X_t=0]=1$ ，　$t\geqq 0$ である．

状態 n を粒子の個数と考え，各粒子がそれぞれ独立に，滞在時間 τ の後に q_m の確率で m 個に分裂するとしたとき，時刻 t における粒子の個数が X_t であると考えることが出来る．[注4] このマルコフ過程を特徴づける重要な性質は，その半群のもつ分枝性

(1)　　$$T_t\hat{f}(n)=[T_t\hat{f}(1)]^n$$

である．この性質は推移確率 $T_t(n,m)$ を用いて表わせば，

(2)　　$$T_t(n_1+n_2,m)=\sum_{\substack{m_1+m_2=m\\ m_1,m_2\geq 0}} T_t(n_1,m_1)T_t(n_2,m_2)$$

（注1）　$q_n\geqq 0$ ，$\sum_{n=0}^{\infty}q_n=1$ ，　$q_1=0$ とする．

（注2）　普通には時間系数が離散的のとき，Galton-Watson 過程と呼び，連続時間のときには「連続時間のマルコフ分枝過程」と呼んでいる本が多いが，我々は「連続時間の分枝マルコフ過程」という呼び方を，もっと広いクラスに対して使っている．

（注3）　$P_n[X_0=n]=1$. すなわち，P_n は時刻 0 に状態 n を出発する法則である．

（注4）　くわしくは池田，長沢，渡辺[2]参照．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

である.[注1)]

今後この論文では，状態空间から状態 $\{0\}$ は死点として除外し状態空間は $S=\{1,2,3,\cdots\}$ であるとする.[注2)]

CGW 過程の半群 T_t の生成作用素

$$Af=\lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t f-f}{t}$$

は

(3) $$Af(n)=cn\left\{\sum_{m=n-1}^{\infty} q_{m-n+1}f_m-f_n\right\}$$

で与えられる．ここで $f=\{f_n\}$ である.[注3)]

§2. CGW過程の超過測度

状態空間 S 上の非負測度 $\pi=\{\pi_n\}_{n\geqq 1}$ が，

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n T_t(n,m)\leqq \pi_m \quad , \quad t\geqq 0\ ,$$

を満たすとき，π を超過測度と呼ぶ．ここで $\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n<\infty$ であることは仮定していない．(1) で等号が成立する場合に π を平衡測度（又は不変測度）と呼ぶ。

特に CGW 過程の平衡測度に関しては次の事実が知られている。以下では $\{q_n\}$ の母函数を $h(u)$ とする．すなわち

(2) $$h(u)=\sum_{n=0}q_n u^n\ .$$

定理（Harris [1] P. 111） $q_0>0$ とせよ．このとき

$$\pi(u)=\int_0^u\frac{ds}{h(s)-s}$$

（注 1） 長沢 [5] 参照.

（注 2） $\{0\}$ はいわゆる「わな」であって，状態 $\{0\}$ に到達するとすると，そこに静止し，たまってしまう。最初に $\{0\}$ にどんな分布値を与えても，時間とともにそれは増加（非減少）するので，この論文の主題である超過測度を $\{0\}$ を含めた状態空間上で考えることは出来ない。

（注 3） S 上の函数 f の n での値を場合により f_n 又は $f(n)$ で表わす。

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

は $|s|<q$ に対して非負係数 π_n をもつ u の巾級数であって（すなわち，$\pi(u)=\sum_{n=1}\pi_n u^n$），$\pi=\{\pi_n\}_{n\geq 1}$ は CGW 過程 X_t の平衡測度を与える．ここで q は X_t の消滅確率，すなわち，$h(u)=u$ の非負最小根である．さらに平衡測度は定数倍の不確定さを除いて一意的である．

簡単な計算からわかるように，上で与えられた平衡測度 $\pi=\{\pi_n\}$ が巾級数の形をしている（すなわち，ある $\mu>0$ があって，$\pi_n=\mu^n$ と書ける）のは，$g_0=\frac{1}{2}$，$g_2=\frac{1}{2}$ の場合に限り，このとき，$\pi_n=1$，$n=1,2,3,\cdots$，である.[注1)]

この論文では，CGW 過程の超過測度であって，巾級数の形で与えられるものを全て求める．以下では $\mu>0$ により，$\pi_n=\mu^n$，$n=1,2,3,\cdots$ の形で与えられる (1) を満たす測度を巾型超過測度と呼び，それを $\hat{\mu}$ と書くことにする．

超過測度はマルコフ過程の双対性（及び時間反転）において重要な役割を演ずる.[注2)] 特に巾型の超過測度 $\hat{\mu}$ が存在する場合には，CGW 過程の $\hat{\mu}$ に関する双対マルコフ過程はボルツマン方程式に関連して現われる「衝突型」のマルコフ過程になっている.[注3)] これが重要な点であって，CGW 過程の巾型超過測度を調べる一つの動機である．

§3. マルコフ過程の超過測度

この節では後の議論で必要となる超過測度についての一般論を述べる．

(X_t, P_x) を可算基をもつ局所コンパクト空間 S を状態空間とする右連続マルコフ過程としよう．

定理．　μ は S 上の測度で，コンパクト集合 K に対しては $\mu(K)<\infty$ とする．このとき，次の命題は同等である．

(i) μ は X_t の超過測度である，すなわち $\int \mu T_t(K)\leq \mu(K)$，$\forall t\geq 0$，$\forall K$ はコンパクト．

(注1)　$\alpha\sum_{n=1}^{\infty}(\mu u)^n=\alpha\frac{\mu u}{1-\mu u}=\int_0^u\frac{ds}{h(s)-s}$．これから，$h(s)=\frac{1}{2}(\mu s^2-(2-\alpha)s+\frac{1}{\mu})$．これより $\alpha=2$，$\mu=1$ を得る．

(注2)　長沢 [4] 参照．

(注3)　暗示的な形で田中 [7] に，又明確な形で高橋 [6] による．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(ii) $\int\mu T_t f \leqq \int\mu f$, $\forall t \geqq 0$, $\forall f \in C_K^+$,[注1)]

(iii) $\int\mu(\alpha G_\alpha f) \leqq \int\mu f$, $\forall\alpha > 0$, $\forall f \in C_K^+$,[注2)]

(iv) $\int\mu A u \leqq 0$, $\forall u \in \{G_\alpha f;\ \alpha > 0,\ f \in C_K^+\}$[注3)]

（証明） (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らか．(iii) $\Longrightarrow$ (ii) は長沢－佐藤 [3], Lemma 3.5 による．一方，$A G_\alpha f = \alpha G_\alpha f - f$ であるから，(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) も明らかである．

注意． $u = G_\alpha f$, $f \in C_K^+$ 且つ $\int\mu Au \leqq 0$ ならば，

$$\int\mu|Au| < \infty$$

である。

何故なら，$0 \geqq \int\mu A G_\alpha f = \int\mu(\alpha G_\alpha f) - \int\mu f$，これより $\int\mu(\alpha G_\alpha f) \leq \int\mu f < +\infty$．従って，$\int\mu|A G_\alpha f| \leqq \int\mu(\alpha G_\alpha f) + \int\mu f < +\infty$．このことから，(iv) を云うには，$\forall u \in \mathcal{D}_A^+$ 且つ $\int\mu|Au| < +\infty$ となる u に対して $\int\mu A u \leqq 0$ であることを示せば十分である．

§4. CGW過程の巾型超過測度

この節ではCGW過程の巾型超過測度を全て求めるが，それによると，そのようなものが存在しない場合があり，なお，存在する場合でも，値μにある制限がつくことがわかる。

命題 1. $\mu > 0$ とする．$\hat{\mu} = \{\mu^n\}_{n\geqq 1}$ が CGW 過程の超過測度であるための必要十分条件は，任意の $m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$\eta = \mu^{-1}$ として，

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{m} (m+1-k)\, g_k\, \eta^k - m\eta \leqq 0$$

が成立することである．

証明） §3 の定理により，$\hat{\mu}$ が超過的であるための必要十分条件は，$g = G_\alpha f$, $f \in C_K^+$ に対して，[注4)] $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^n A g(n) \leqq 0$ となることである．

（注 1） C_K^+ はコンパクトな台をもつ S 上の非負連続函数の全体。

（注 2） G_α は半群 T_t のレゾルベント。

（注 3） A は T_t の生成作用素．その定義域を $\mathcal{D}_A$ と書く．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$0 \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n A g(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n c n \left\{ \sum_{m=n-1}^{\infty} q_{m-n+1} g_m - g_n \right\}$$

§3の注意により　$\Sigma\hat{\mu}|Ag|<+\infty$　であるから,

$$= c\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m+1} n q_{m-n+1}\mu^n - m\mu^m\right\} g_m$$

となる．$f\in C_K^+$ を適当にえらんで，$g_m>0$ とすることが出来るので，任意の $m=1, 2, 3, \cdots$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{m+1} n q_{m-n+1}\mu^n - m\mu^n \leqq 0$$

である．μ^{-m-1} をかけて，$m-n+1=k$ と置きかえれば,

$$\sum_{k=0}^{m}(m+1-k)\,q_k\,\mu^{-k}-m\mu^{-1}\leqq 0$$

を得る．すなわち(1)である．

CGW過程は　$\{q_n\}_{n\geqq 0}$　の母函数

$$h(u) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n$$

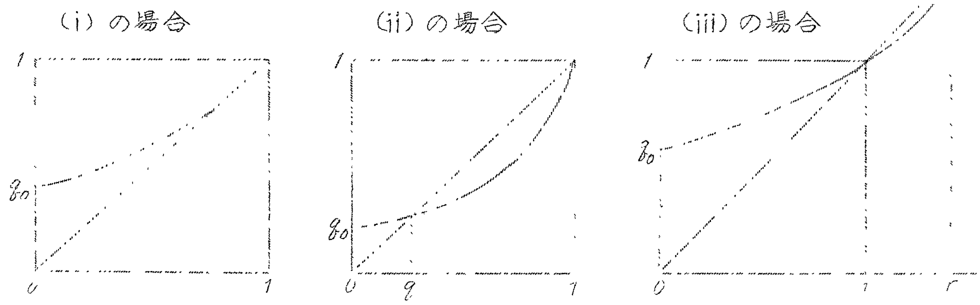
の性質によって次の様に分類される．

i)　$h'(1) = 1$ のとき[注5)] 臨界的,

ii)　$h'(1) > 1$ のとき，優臨界的,

iii)　$h'(1) < 1$ のとき，劣臨界的.

と呼ぶ．（図参照）



(注4)　$f\in C_K^+$ は $f_n\geqq 0$ 且つ有限個の n を除いてゼロとなる数列.

(注5)　$h'(1)=\sum_{n=1}^{\infty} n q_n$ は分裂の平均個数である。

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

以下では (iii) の場合，簡単のため $h(u)$ の収束半径は図 (iii) の r 以下ではないとする．r 及び q は $h(u)=u$ の正根で $q \leq r$ とする．(i) では $q=r=1$，(ii) では $q<1=r$，(iii) では $q=1<r$ である．

命題 2. $\hat{\mu}$ が超過的であるための必要十分条件は

(a) $\quad 2q_0 \leqq \frac{1}{\mu}$，　且つ

(b) $\quad h(\mu^{-1}) \leqq \mu^{-1}$，（図から $q \leqq \frac{1}{\mu} \leqq r$ である．）

を満たすことである．

注意. (a), (b) よりただちに，$r<2q_0$ ならば巾型超過測度は存在しないことがわかる．

証明）$\hat{\mu}$ が超過的であるとせよ．命題 1 により (1) 式で $m=1$ として，

(a) $\quad 2q_0 \leqq \frac{1}{\mu}$

が必要である．更に条件 (1) を

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^m q_k (\mu^{-1})^k - \frac{m}{m+1} \cdot \mu^{-1} \leqq 0$$

ただし，

$$a_k^m = 1 - \frac{k}{m+1}, \qquad k \leqq m$$

$$= \qquad\qquad , \qquad k > m,$$

と書きかえて，$m \uparrow \infty$ とすると，$a_k^m \uparrow 1$ であるから，

(b) $\quad h(\mu^{-1}) - \mu^{-1} \leqq 0$

を得る．従って，(a), (b) は必要条件である．(a), (b) が十分条件でもあることは次の様に帰納的に証明される[注1]．(a) により命題 1 の (1) 式は $m=1$ で成立している．$m \geqq 1$ で (1) 式が成立するとせよ．

$$\sum_{k=0}^{m+1} (m+2-k) q_k \eta^k - (m+1)\eta$$

（注 1）　藤曲哲郎氏による．種々討論していただいた同氏に感謝します．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$= \sum_{k=0}^{m}(m+1-k)\,q_k\eta^k + \sum_{k=0}^{m+1} q_k\eta^k - m\eta - \eta$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{m+1} q_k\eta^k - \eta \leqq h(\eta) - \eta \leqq 0\ ,$$

となり (1) は $m+1$ でも成り立つことがわかる．又，図から $h(\eta) \leqq \eta$ となるのは

$$q \leqq \eta \leqq r$$

の場合であることは明らかである。

定理． CGW過程の巾型超過測度 $\hat{\mu}$ は

(i) 臨界的な場合； $q_0 = q_2 = \frac{1}{2}$ のとき，かつそのときのみ存在し，$\mu = 1$ である。このとき $\hat{\mu} = \{1, 1, 1, \cdots\}$ は平衡測度である．注1)

(ii) 優臨界的の場合； $q_0 \leqq 1/2$ のとき，かつそのときのみ存在し，このとき $1 \leqq \mu \leqq \frac{1}{2q_0}$ である．注2)

(iii) 劣臨界的の場合； $\frac{1}{2} \leqq q_0 \leqq \frac{r}{2}$ のとき，かつそのときのみ存在し，このとき $\frac{1}{r} \leqq \mu \leqq \frac{1}{2q_0}$ である．

証明） (i), (ii), (iii) の順序で証明しよう．

(i) このとき $q = r = 1$ であるから，命題2の (b) により $\mu = 1$ である．従って (a) より $2q_0 < 1$ 又は $2q_0 = 1$ である．いま，$2q_0 < 1$ とすると，$\sum_{n=2}^{\infty} q_n > 1/2$ であるが，そうすると

$$\sum_{n=2}^{\infty} nq_n \geqq 2\sum_{n=2}^{\infty} q_n > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

となり，臨界性の条件 $h'(1) = \sum_{n=2}^{\infty} nq_n = 1$ に矛盾する．一方，$2q_0 = 1$ のとき，

$$\sum_{n=2}^{\infty} nq_n \geqq 2\sum_{n=2}^{\infty} q_n = 1$$

であるから，臨界性の条件と両立するのは，上で等号が成立する場合，すな

（注1） §2の定理に関連して注意したように，巾型平衡測度が存在するのはこのときのみである．

（注2） 従って，(i), (ii) の場合には $\hat{\mu}$ の全測度は無限大である．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

わち，$q_2=1-q_0=\frac{1}{2}$，且つ $q_3=q_4=\cdots=0$ のときのみである。

(ii) この場合，$q<1=r$ である．命題２の (a), (b) より，$2q_0\leqq 1$ が巾型超過測度の存在のために必要であり．他方 $0\leqq u\leqq 1$ ならば，

$$(2)\qquad h(u)-u=q_0+\sum_{n=2}^{\infty} q_n u^n - u$$

$$\leqq q_0+u^2\sum_{n=2}^{\infty} q_n - u$$

$$=q_0+(1-q_0)u^2-u$$

である．いま $2q_0\leqq 1$ であるとしよう．(2) 式により

$$h(2q_0)-2q_0\leqq q_0+(1-q_0)4q_0^2-2q_0$$

$$=-q_0(1-2q_0)^2\leqq 0,$$

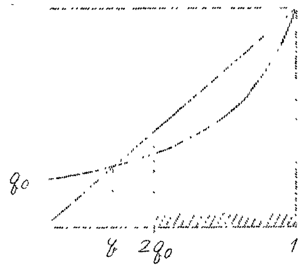
となり

$$q\leqq 2q_0$$

であることがわかる．従って命題２により

$$2q_0\leqq \frac{1}{\mu}\leqq 1$$

なる μ が巾型超過測度 $\hat{\mu}=\{\mu^n\}$ を与える．（下図参照）



(iii) この場合，仮定から，$q=1<r$ である．まず $1\leqq 2q_0$ が必要であることがわかる．何故なら，$2q_0<1$ とすると，(2) 式により $h(2q_0)-2q_0<0$ となり，これは $q<2q_0<1$ を意味し，劣臨界的であることに矛盾する。一方，$1\leqq 2q_0\leqq r$ であれば，$2q_0\leqq\frac{1}{\mu}\leqq r$ なる μ は命題２の条件をみたし，巾型超過測度 $\hat{\mu}$ を与える。

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

§5. いくつかの例

例1. $q_0=0$ のとき，この場合 優臨界的であって，$q=0$，$r=1$ であるから，$\mu \geqq 1$ が巾型超過測度 $\hat{\mu}$ を与える．

例2. $q_0+q_2=1$ のとき．（但し，$q_0 \neq 0$ とする）．この場合 CGW 過程は q_0 の値によって分類され，その全ての場合に巾型超過測度は存在する．注1)

(i) 臨界的（$q_0=\frac{1}{2}$）のとき，$\mu=1$ のみ．

(ii) 優臨界的（$q_0<1/2$）のとき，$1 \leqq \mu \leqq 1/2q_0$．

(iii) 劣臨界的（$q_0>1/2$）のとき，$\frac{q_2}{q_0} \leqq \mu \leqq 1/2q_0$ （<1）．

がそれぞれ巾型超過測度 $\hat{\mu}$ を与える．

証明） $h(u)=q_0+q_2u^2$ である．従って $h(u)-u=0$ の根は 1 と q_0/q_2 であるから定理を適用して上記の結論を得る．

例3. $q_0+q_3=1$ （ただし $q_3 \neq 0$ とする）のとき．

(i) 臨界的（$q_0=1/3$）：巾型超過測度は存在しない．

(ii) 優臨界的（$q_0<2/3$）：$q_0 \leqq 1/2$ のとき，且つそのときにかぎり $1 \leqq \mu \leqq 1/2q_0$ が $\hat{\mu}$ を与える．

従ってこの場合 $1/2<q_0<2/3$ なる q_0 の CGW 過程に対しては巾型超過測度が存在しないことがわかる．

(iii) 劣臨界的（$2/3<q_0<1$）：$q_0 \geqq \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ のとき，且つそのときのみ $\hat{\mu}$ が存在し，$1/r \leqq \mu \leqq 1/2q_0$ である．ここで

(1) $$r=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+4q_0/q_3}\right)$$

である．従って q_0 が，$2/3<q_0<1/4(1+\sqrt{5})$ の範囲にある場合には巾型超過測度は存在しない．

証明） (i), (ii) は定理から明らかである．(iii) の場合 $h(u)-u=(u-1)\times$

（注1） 臨界性の分類が丁度 q_0 の値 $1/2$ を境界にしているという偶然性による．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$(q_3u^2+q_3u-q_0)=0$ であるから，正根は $q=1$ と $r=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4q_0/q_3})$ である．他方，$2q_0\leqq r$，すなわち，$4q_0^2-2q_0-1\geqq 0$ でなくてはならないから，これより

$$q_0\geqq 1/4\,(1+\sqrt{5}\,)$$

を得る．

例4． 上の例では $q_1=0$ としたが，$q_0+q_2+q_3=1$ $(q_3\neq 0)$ としても，(i) (ii) の場合は例3と全く同様であり，(iii) の場合には例3での r を

$$(2)\qquad r=\frac{1}{2q_3}\left(q_0-1+\sqrt{(q_0-1)^2+4q_3q_0}\right)$$

に置き換えればよい。

証明） $h(u)-u=(u-1)(q_3u^2+(1-q_0)u-q_0)$．
これより r は (2) となる．条件 $2q_0\leqq r$ は

$$4q_3q_0\leqq(q_0-1)+\sqrt{(q_0-1)^2+4q_3q_0}$$

となり，これより

$$(3)\qquad 1\leqq 2(1-2q_3)q_0,$$

である．劣臨界的であるから $q_3<1/3$．従って，$1-2q_3>0$．
$q_0\leqq 1-q_3$ であるから

$$1\leqq 2(1-2q_3)(1-q_3)$$

となり，これより $0<q_3\leqq 1/4\,(3-\sqrt{5})$ を得る．(3) より $q_0\geqq 1/4\,(1+\sqrt{5})$ を得る。

§6. CGW過程の $\hat{\mu}$-双対マルコフ過程

$\pi=(\pi_0,\pi_1,\cdots)$ 及び $\nu=(\nu_0,\nu_1,\cdots)$ の合成積 $\pi*\nu$ は

$$(\pi*\nu)_n=\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1,n_2\geqq 0}}\pi_{n_1}\nu_{n_2}$$

で与えられる．$f=(f_1,f_2,\cdots)$ 及び $g=(g_1,g_2,\cdots)$ に対しては $f_0=g_0=1$ として $\{0,1,2,\cdots\}$ 上に拡張し，その $\{1,2,\cdots\}$ 上への制限を $f*g$ とする.注1)

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

補題． $(\pi T_t)(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n T_t(n, m)$ とすると

(1) $$(\pi * \nu T_t)(m) = (\pi T_t) * (\nu T_t)(m)$$

が成り立つ．

証明） 分枝性 §1，(2) により

$$(\pi * \nu T_t)(m) = \sum_{n \geqq 0} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1, n_2 \geqq 0}} \pi_{n_1} \nu_{n_2} T_t(n_1+n_2, m)$$

$$= \sum_n \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{\substack{m_1+m_2=m \\ m_1, m_2 \geqq 0}} \pi_{n_1} T_t(n_1, m_1) \nu_{n_2} T_t(n_2, m_2)$$

$$= \sum_{m_1+m_2=m} \left\{ \sum_{n_1 \geqq 0} \pi_{n_1} T_t(n_1, m_1) \right\} \left\{ \sum_{n_2 \geqq 0} \nu_{n_2} T_t(n_2, m_2) \right\}$$

$$= (\pi T_t) * (\nu T_t)(m) .$$

証明おわり．

CGW 過程の $\hat{\mu}$- 双対マルコフ過程の推移確率 $H_t(n, m)$ は

(2) $$H_t(n, m) = \mu^m T_t(m, n) \frac{1}{\mu^n} , \quad n, m \geqq 1 ,$$

で与えられる．$\{0\}$ は死点であって

(2′) $$H_t(0, 0) = 1, \quad H_t(0, m) = 0 , \quad m \geqq 1 ,$$

である．T_t と H_t の間には双対性の条件

(3) $$\sum_{n \geqq 1} \mu^n \, T_t f(n) g(n) = \sum_{m \geqq 1} \mu^m f(m) H_t g(m)$$

が成立している．

記号に多少の混乱をまねくかも知れないが，(2) の定義の形式的な拡張として，

(4) $$H_t^0(0, m) = \mu^m T_t(m, 0) , \quad m \geqq 1 ,$$

(注 1) f，g を $f_0 = g_0 = 0$ として拡張してもよい．ただし，その場合には
$$f * g = \{0, f_1 g_1, f_1 g_2 + f_2 g_1, \cdots\}$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

とおくことにする．勿論 $H_t(0,m)$ と $H_t^0(0,m)$ は同じものではない．ただし，分枝法則が，$q_0=0$ のときには $T_t(m,0)=0$，$m\geqq 0$ であるから，$H_t^0(0,m)=0=H_t(0,m)$ となって一致する．

命題　$f=(f_1,f_2,\cdots)$，$g=(g_1,g_2,\cdots)$ に対して，

$$(5)\qquad H_t(f*g)(n)=(H_tf*H_tg)(n)+H_tf(n)H_t^0g(0)+H_t^0f(0)H_tg(n),\quad n\geqq 1$$

が成立する．

注意．上で注意したように，$q_0=0$ のときには (5) 式は

$$(5')\qquad H_t(f*g)(n)=(H_tf*H_tg)(n)$$

となる．高橋 [6] で取扱われたのはこの場合である．

（命題の証明）　$n\geqq 1$ とする．

$$\begin{aligned}H_t(f*g)(n)&=\sum_{m=1}^{\infty}H_t(n,m)(f*g)(m)\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\mu^m T_t(m,n)(f*g)(m)\frac{1}{\mu^m}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}(f\hat{\mu}*g\hat{\mu})(m)T_t(m,n)\frac{1}{\mu^n}\quad\text{注1)}\end{aligned}$$

補題により

$$=(f\hat{\mu}T_t)*(g\hat{\mu}T_t)(n)\frac{1}{\mu^n}$$

$$=\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1,n_2\geqq 0}}(f\hat{\mu}T_t)(n_1)(g\hat{\mu}T_t)(n_2)\frac{1}{\mu^n}$$

一方，

$$f\hat{\mu}T_t(n)=\begin{cases}H_tf(n)\mu^n, & n\geqq 1\\ H_t^0f(0), & n=0,\end{cases}$$

であるから，

$$=\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1,n_2\geqq 1}}H_tf(n_1)H_tg(n_2)+H_t^0f(0)H_tg(n)+H_tf(n)H_t^0g(0)$$

となり，これは (5) 式の右辺である．

（注1）　$m=0$ の項は 0 であるから形式的に加えている。

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(5) 式（又は(5')）が成立するときに，その半群（又はそれに対応するマルコフ過程）は「衝突的」であると呼ぶことにする．この性質はボルツマン方程式の衝突モデルを特徴づけるものとして定式化されたものである．CGW 過程が「独立な粒子の分裂による増殖及び死滅」を記述しているのに対して，「衝突」過程は何個かの粒子の「衝突」による個数の（実はその速度の）「縮退」，及び $g_0 \neq 0$ のときには粒子の「流入」を記述していると考えることが出来る．

§7. $\hat{\mu}$-双対マルコフ過程の巾型超過測度

命題 1. $\hat{\mu}$-相対マルコフ過程の生成作用素 B は

$$(1) \qquad Bh(m) = c\left\{\sum_{n=1}^{m+1} n\mu^{n-m} g_{m+1-n}\, h_n - m h_m\right\}, \qquad m \geqq 1$$

である．

証明） $\hat{\mu}$-双対性の定義により

$$\sum_{n\geqq 1} \mu^n h(n) A f(n) = \sum_{m\geqq 1} \mu^m B h(m) f(m)$$

である．

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n h_n c n \left\{\sum_{m=n-1}^{\infty} g_{m-n+1} f_m - f_n\right\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m f_m \sum_{n=1}^{m+1} c n \mu^{n-m} g_{m+1-n}\, h_n - \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m f_m\, c m h_m \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m f_m\, c\left\{\sum_{m=1}^{m+1} n\mu^{n-m} g_{m+1-n}\, h_n - m h_m\right\}
\end{aligned}$$

これより (1) が出る．

命題 2. $\hat{\lambda}$ が $\hat{\mu}$-相対マルコフ過程の超過測度であるための必要十分条件は

$$\mu q \leqq \lambda \leqq \mu r$$

が成り立つことである．ただし $q \leqq r$ は $h(u) - u = 0$ の二つの正根．

（証明）

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m Bh(m) &= c\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \sum_{n=1}^{m+1} n\mu^{n-m} g_{m+1-n}\, h_n - c\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m m h_m \\
&= c\sum_{n=1}^{\infty} n h_n \lambda^n \left\{\sum_{m=n-1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m-n} g_{m-(n-1)} - 1\right\} \\
&= c\sum_{n=1}^{\infty} n h_n \lambda^n \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1} g_k - 1\right\}
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

従って，§3，定理により$\hat{\lambda}$が超過測度であるための必要十分条件は

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1} - 1 \leqq 0,$$

すなわち，

$$h\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \leqq \frac{\lambda}{\mu}.$$

これより $q \leqq \frac{\lambda}{\mu} \leqq r$ を得る．

注意． (i) 臨界的（$g_0 = g_2 = 1/2$ のみ）の場合には $\lambda = 1$ のみ．
(ii) 優臨界的の場合は $q\mu \leqq \lambda \leqq \mu$，(iii) 劣臨界的の場合は $\mu \leqq \lambda \leqq \mu r$ である．

§8. 分枝マルコフ過程の生成作用素

この節以後では，これまでに得られたCGW過程に関する結果を一般の分枝マルコフ過程に拡張することを考えよう．

よく知られているように，[注1] S上のマルコフ推移確率 P_t と，[注2] S上の非負函数 $c(x)$，非負函数の列 $\{g_n(x)\}_{n\geqq 0}$（$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = 1$），及び $S\times S^n$ 上の確率核の列 $\{\pi_n(x, d\underline{y})\}_{n\geqq 0}$ が与えられると，$\underline{S}^\partial = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^n$（$S^0 = \{\partial\}$）上に分枝マルコフ過程を構成することが出来る．$P_t$ は一個の粒子の動きを記述し，cは分裂の時間を定め，$g_n(x)$は一個の粒子が場所xでn個の同種の粒子に分裂する確率を与え，π_n は分裂によって生じたn個の粒子の分布法則である．以下では $(P_t, c, \{g_n\}, \{\pi_n\})$ から定まる分枝マルコフ過程を取扱う．

分枝マルコフ過程の半群 T_t は次の「分枝性」によって特徴づけられる：「Fを乗法的函数とすると，T_tF も乗法的である．」

すなわち，

(1) $$T_tF(\underline{x}\cdot\underline{y}) = T_tF(\underline{x})\,T_tF(\underline{y}), \quad T_tF(\partial) = 1.$$

である．ここで $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$，$\underline{y} = (y_1, \cdots, y_m)$ のとき，$\underline{x}\cdot\underline{y} = (x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots, y_m)$ である．又，$F(\underline{x}\cdot\underline{y}) = F(\underline{x})F(\underline{y})$，$F(\partial) = 1$ のとき

（注1） 池田，長沢，渡辺 [2]，長沢 [5] 参照．

（注2） 以下では，Sは可算基をもつコンパクト，ハウスドルフ空間とする．又，P_t が右連続な強マルコフ過程の推移確率になっているとき，マルコフ推移確率と呼ぶ．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

Fを乗法的と呼んでいる．いま取扱っている場合には(注1)乗法的函数Fは，FのS上への制限fによって定まる。それを $F=\hat{f}$ と書く．すなわち，$\hat{f}(\underline{\underline{x}})=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$ ($\underline{\underline{x}}=(x_1,\cdots,x_n)$のとき)，$\hat{f}(\partial)=1$ である．

P_t^0 を P_t のcによる部分半群として，(注2) P_t^0 の直積 $\underline{\underline{P}}_t^0$ を $\underline{\underline{x}}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\underline{\underline{y}}=(y_1,\cdots,y_n)$, $n=1,2,3,\cdots$ のとき，

$$\underline{\underline{P}}_t^0(\underline{\underline{x}},d\underline{\underline{y}})=P_t^0(x_1,dy_1)\times\cdots\times P_t^0(x_n,y_n)$$

とおき，$\underline{\underline{x}}\notin S_n$ のときには $\underline{\underline{P}}_t^0(\underline{\underline{x}},S^n)=0$ とする．

<u>命題 1.</u> 分枝マルコフ過程の半群 T_t は対称な函数 $F=(F_n)$に対して，(注3) $\underline{\underline{x}}=(x_1,\cdots,x_n)$ のとき，

$$(2)\qquad T_tF(\underline{\underline{x}})=P_t^0F(\underline{\underline{x}})+\int_0^t dr\int_{S^n}\underline{\underline{P}}_r^0(\underline{\underline{x}},d\underline{\underline{y}})\,\Phi_{\underline{\underline{y}}}(T_{t-r}F)$$

をみたす．ここで

$$(3)\qquad \Phi_{\underline{\underline{x}}}(F)=\sum_{k=1}^{n}c(x_k)\sum_{m=0}^{\infty}q_m(x_k)\int_{S^m}\pi_m(x_k,d\underline{\underline{z}})F_{n-1+m}(x_1,\cdots,x_{k-1},z_1,\cdots,z_m,x_{k+1},\cdots,x_n)$$

である．

（証明） 乗法的函数$\hat{f}$に対して，いわゆる M-方程式(注4) を少し書きかえると，$\underline{\underline{x}}\in S^n$ のとき，

$$T_t\hat{f}(\underline{\underline{x}})=\underline{\underline{P}}_t^0\hat{f}(\underline{\underline{x}})+\int_0^t dr\int_{S^n}\underline{\underline{P}}_r^0(\underline{\underline{x}},d\underline{\underline{y}})\,\Phi_{\underline{\underline{y}}}(T_{t-r}\hat{f})$$

を得る．$\{\hat{f}: f\in C(S), \|f\|<1\}$ の線型包は $C_0(\underline{\underline{S}}^\partial)$ の対称函数の全体の中で稠密であるから，(注5) 命題の式を得る．

半群理論の適用を容易にするために，以下では $\underline{\underline{P}}_t$, $\underline{\underline{P}}_t^0$, T_t は $C_0(\underline{\underline{S}}^\partial)/\sim$ 上で，(注6) 強連続な半群であるとする．この仮定は例えば，P_t が強フェラー型（特に拡散

（注1） その他の例については長沢 [5] 参照．

（注2） $P_t^0(x,B)=E_x[\exp(-\int_0^t c(x_s)ds)I_B(x_t)]$． たとえば [2] 参照．

（注3） $\underline{\underline{S}}^\partial$ 上の函数Fを S^n 上の成分を F_n として，$F=(F_n)$ と書く．任意の$\underline{\underline{x}},\underline{\underline{y}}$に対して $F(\underline{\underline{x}}\cdot\underline{\underline{y}})=F(\underline{\underline{y}}\cdot\underline{\underline{x}})$ をみたすとき，Fは対称であるという．

（注4） 池田，長沢，渡辺 [2] P.66～§3.1 参照．

（注5） [2] P.40, Lemma 2.1 参照．

（注6） $C_0(\underline{\underline{S}}^\partial)/\sim$ は対称な函数を同一視した空間．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

型)で，$c \in C(S)$ ならば満たされる.

何故なら，P_t が強フェラー型ならば，まず $\underline{\underline{P}}_t$ が強フェラー型であることは明らかである。次に $f \in C(S)$, $\|f\| < 1$ に対して，$\|\underline{\underline{P}}_t \hat{f} - \hat{f}\| \to 0\ (t \downarrow 0)$ が成り立ち[注1]，さらに $\{\hat{f}: f \in C(S),\ \|f\| < 1\}$ の線型包は $C_0(\underline{\underline{S}}^c)/\sim$ で稠密であるから，$\underline{\underline{P}}_t$ はそこで強連続である．$\underline{\underline{P}}_t^0$ が強連続で強フェラー型であることはカッツの定理による[注2]．

命題2　$\underline{\underline{P}}_t$ 及び T_t の生成作用素をそれぞれ $\underline{\underline{G}}$ 及び A とすると $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{\underline{\underline{G}}}$ であって，

$$(4)\qquad AF(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{G}}F(\underline{\underline{x}}) + \Phi_{\underline{\underline{x}}}(F) \quad , \qquad F \in \mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{\underline{\underline{G}}}$$

がなりたつ．ここで $\underline{\underline{x}} = (x_1, \cdots, x_n)$ のとき，

$$(5)\qquad \Phi_{\underline{\underline{x}}}(F) = \phi_{\underline{\underline{x}}}(F) - \sum_{k=1}^{n} c(x_k) F_n(x_1, \cdots, x_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c(x_k) \Big\{ \sum_{m=0}^{\infty} q_m(x_k) \int_{S^m} \pi_m(x_k, d\underline{\underline{z}}) F_{n-1+m}(x_1, \cdots, x_{k-1}, z_1, \cdots, z_m, x_{k+1}, \cdots, x_n) - F_n(x_1, \cdots, x_n) \Big\}$$

である．

（証明）　命題1から

$$\frac{T_t F(\underline{\underline{x}}) - F(\underline{\underline{x}})}{t} = \frac{\underline{\underline{P}}_t^0 F(\underline{\underline{x}}) - F(\underline{\underline{x}})}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t dr\, \underline{\underline{P}}_r^c(\underline{\underline{x}}, d\underline{\underline{y}})\, \phi_{\underline{\underline{y}}}(T_{t-r}F)$$

である．$t \downarrow 0$ のとき，右辺の第二項は $\phi_{\underline{\underline{x}}}(T_{t-r}F)$ に一様に近ずく．従って，$(T_tF - F)/t \to AF$ と $(\underline{\underline{P}}_t^0 F - F)/t \to \underline{\underline{G}}^0 F$ は同等である。すなわち，$\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{\underline{\underline{G}}^0}$ であって，

$$AF(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{G}}^0 F(\underline{\underline{x}}) + \phi_{\underline{\underline{x}}}(F)$$

が成立する．一方 $\mathcal{D}_{\underline{\underline{G}}} = \mathcal{D}_{\underline{\underline{G}}^0}$ であって $\underline{\underline{x}} = (x_1, \cdots, x_n)$ のとき，$\underline{\underline{G}}^0 F(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{G}}F(\underline{\underline{x}}) - \sum_{k=1}^{n} c(x_k) F(\underline{\underline{x}})$ であるから，$AF(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{G}}F(\underline{\underline{x}}) + \Phi_{\underline{\underline{x}}}(F)$ となる。

（注1）　[2] P. 77, Lemma 3.2 参照。

（注2）　カッツの定理により P_t^o は強フェラーで，強連続である。

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

§9. 分枝マルコフ過程の巾型超過測度

CGW 過程に対する巾型測度の概念を一般化する．S^n 上では S 上の測度 $\mu(dx)$ の n 重直積

$$\mu(dx_1)\times\cdots\times\mu(dx_n)$$

となっている $\underline{\underline{S}}=\bigcup_{n=1}^{\infty}S^n$ 上の測度を巾型測度と呼び，それを $\hat{\mu}$ と書くことにする。

分枝マルコフ過程の超過測度について議論する場合も，CGW 過程のときと同様に，状態空間は $\underline{\underline{S}}^{\partial}=\bigcup_{n=0}^{\infty}S^n$；$(S^0=\{\partial\})$ ではなくて，$\underline{\underline{S}}=\bigcup_{n=1}^{\infty}S^n$ の上で考える．理由は CGW 過程のときと同じである．

この節では次の仮定をおく．

仮定 A．　(i) $\mu(dx)$ は S 上のある確率測度（それを dx と書く）に関して絶対連続であって，密度函数 $\mu(x)$ をもつ。

(ii) $\pi_n(x, d\underline{\underline{z}})$ は $\widehat{dz}$ に関して[注1] 絶対連続で密度函数 $\pi_n(x;\underline{\underline{z}})$ をもつ．

(iii) $c=1$[注2]

補題 1．　密度函数 $\mu(x)$ は正とする．$\underline{\underline{S}}$ 上の任意の非負対称な函数 F に対して，

$$\int_{\underline{\underline{S}}}\hat{\mu}(d\underline{\underline{x}})\,\Phi_{\underline{\underline{x}}}(F)\leq 0,$$

となるための必要十分条件は

$$(1)\quad \sum_{k=0}^{m}(m+1-k)\int_S\mu(x)\,dx\,q_k(x)\pi_k(x;z_1,\cdots,z_k)\frac{1}{\prod_{i=1}^{k}\mu(z_i)}-m\leq 0,$$

$$a.e.\ z_1,\cdots,z_m$$

が全ての $m=1,2,\cdots$ に対して成り立つことである．

（証明）　仮定 A の下で，

$$\int_{\underline{S}}\hat{\mu}(d\underline{\underline{x}})\Phi_{\underline{\underline{x}}}(F)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_{S^n}\hat{\mu}(\underline{\underline{x}})dx_1\cdots dx_n\sum_{m=0}^{\infty}q_m(x_1)\int_{S^m}\pi_m(x_1,d\underline{\underline{z}})F_{n-1+m}(z_1,\cdots,z_m,x_2,\cdots,x_n)$$

（注 1）　(i) で現われた S 上の確率測度 dx から作った $\underline{\underline{S}}$ 上の巾型測度を $\widehat{dx}$ と書いている。

（注 2）　$c=$ 定数でもよい．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n \int_{S^n} \hat{\mu}(\underline{\underline{x}})\, dx_1 \cdots dx_n\, F_n(x_1 \cdots x_n).$$

$$\equiv I - II.$$

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{S^m} dz_1 \cdots dz_m\, F_m(z_1, \cdots, z_m) \sum_{k=0}^{m} (m+1-k) \int_S \mu(x) dx\, q_k(x) \pi_k(x; z_1, \cdots, z_k) \hat{\mu}(z_{k+1}, \cdots, z_m)$$

である．従って

$$\int_{\underline{\underline{S}}} \hat{\mu}(d\underline{\underline{x}}) \Phi_{\underline{\underline{x}}}(F)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{S^m} d\underline{\underline{z}}\, F_m(\underline{\underline{z}}) \hat{\mu}(z_1, \cdots, z_m) \left\{ \sum_{k=0}^{m} (m+1-k) \int_S \mu(x) dx\, q_k(x) \pi_k(x; z_1, \cdots, z_k) \frac{1}{\hat{\mu}(z_1, \cdots, z_k)} - m \right\}.$$

これより補題を得る．

以下では，簡単のため，次の仮定をおく．

仮定B. (i) $\mu =$ 定数 > 0.

(ii) $\bar{q}_0 = \int_S q_0(x) dx$, $\bar{q}_k = \int_S dx\, q_k(x) \pi_k(x; z_1, \cdots, z_k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とおくと，$\bar{q}_k$ は定数であって，$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{q}_k = 1$ をみたす．

補題2. $\eta = \frac{1}{\mu}$ とおく．任意の非負対称函数 F に対して $\int \hat{\mu}(d\underline{\underline{x}}) \Phi_{\underline{\underline{x}}}(F) \leqq 0$ となるための必要十分条件は

(a) $2\bar{q}_0 \leqq \eta$,

(b) $\bar{h}(\eta) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \bar{q}_k \eta^k \leqq \eta$

が成り立つことである．

証明はCGW過程の場合の§4，命題2と同じである．

命題 (i) P_t-確率平衡測度が存在するとし，それを dx と書く．そのとき，$\mu(dx) = \mu\, dx$ として（μは定数）$\hat{\mu}$が分枝マルコフ過程の超過測度であるための必要十分条件は補題2の(a), (b)をみたすことである．

(ii) dx を P_t-確率超過測度とする．$\mu(dx) = \mu \cdot dx$ として$\hat{\mu}$が分枝マルコフ過程の超過測度になるための十分条件は補題2の(a), (b)をみたすことである．

（証明） $\hat{\mu}$が分枝マルコフ過程の超過測度であるための必要十分条件は§3の定理により，任意の非負対称な $F \in \mathcal{D}_A$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(2) $$0 \geqq \int_{\underline{\underline{S}}} \hat{\mu}(d\underline{\underline{x}}) AF(\underline{\underline{x}}) = \int_{\underline{\underline{S}}} \hat{\mu}(d\underline{\underline{x}}) \underline{\underline{G}}F(\underline{\underline{x}}) + \int_{\underline{\underline{S}}} \hat{\mu}(d\underline{\underline{x}}) \Phi_{\underline{\underline{x}}}(F)$$

が成立することである。もし $\mu(dx)$ が P_t-平衡測度ならば，各 n に対して $\int_{S^n} \hat{\mu}(d\underline{\underline{x}}) \underline{\underline{G}}F(\underline{\underline{x}}) = 0$ であるから，(2) 式の第一項は消える。従って，補題2により (i) を得る。(ii) の証明を μ が P_t-超過測度ならば，$\int_{S^n} \hat{\mu}(d\underline{\underline{x}}) \underline{\underline{G}}F(\underline{\underline{x}}) \leqq 0$ であるから，これも補題2からほとんど明らかであろう。

従って，仮定 A, B の下では CGW 過程に対して得られた結果が，そこでの g_k を $\bar{g}_k$ におきかえて平行的に成立する。重複するが定理として書いておこう。

定理. P_t-確率平衡測度 dx が存在し，仮定 A, B をみたすとせよ。$\bar{h}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{g}_n u^n$ とおく。巾型超過測度 $\widehat{\mu \cdot dx}$ は

(i) $\bar{h}'(1) = 1$（臨界的）の場合； $\bar{g}_0 = \bar{g}_2 = \frac{1}{2}$ のとき，かつそのときのみ存在し，$\mu = 1$ である。（このとき $\widehat{dx}$ は平衡測度である。）

(ii) $\bar{h}'(1) > 1$（優臨界的）の場合； $\bar{g}_0 \leqq \frac{1}{2}$ のとき，かつそのときのみ存在し，このとき，$1 \leqq \mu \leqq 1/2\bar{g}_0$ である。

(iii) $\bar{h}'(1) < 1$（劣臨界的）の場合； $1/2 \leqq \bar{g}_0 \leqq \bar{r}/2$ のとき[注1] かつそのときのみ存在し，このとき $1/\bar{r} \leqq \mu \leqq 1/2\bar{g}_0$ である[注1]。

例 なめらかな境界をもつ有界領域の反射壁拡散過程を基礎のマルコフ過程とする。そのとき，dx をリーマン計量から定まる確率測度とすると，dx は平衡測度である。特に，g_n = 定数，$\pi_n(x, \underline{\underline{z}}) = 1$ ならば，$h(u) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n u^n$ として定理が成立する。

§10. 分枝マルコフ過程の双対性

この節では次の仮定をおく。

仮定 測度 $\mu(dx)$ に関する推移確率密度 $P_t^0(x, y)$ が存在して，

$$P_t^0(x, dy) = P_t^0(x, y)\, \mu(dx)$$

と表わされる。

命題1. 上の仮定の下で，分枝マルコフ過程の推移確率密度 $T_t(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}})$ が存在して，

（注1） $\bar{h}(u) = u$ の根を $\bar{q} \leqq \bar{r}$ とする。

$$T_t(\underline{\underline{x}}, d\underline{\underline{y}}) = T_t(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}})\hat{\mu}(d\underline{\underline{y}})$$

と表わされる.[注1) $T_t(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}})$ は $\underline{\underline{x}} \in S^n$ $(n=1, 2, \cdots)$ のとき,

(1) $$T_t(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) = \underline{\underline{P}}_t^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) + \int_0^t dr \int_{S^n} \underline{\underline{P}}_r^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{w}})\hat{\mu}(d\underline{\underline{w}}) \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^\infty c(w_k) q_m(w_k) \int_{S^m} \pi_m(w_k, d\underline{\underline{z}}) T_{t-r}(w_1, \cdots, w_{k-1}, z_1, \cdots, z_m, w_{k+1}, \cdots, w_n; \underline{\underline{y}})$$

をみたす。

(証明) [2] §7.2 の記号に従う. まず

$$T_t^{(0)}(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) = P_t^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}).$$

である. 逐次に

$$T_t^{(n)}(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) = \int_0^t \int \Psi(\underline{\underline{x}}, ds, d\underline{\underline{z}}) T_{t-s}^{(n-1)}(\underline{\underline{z}}, \underline{\underline{y}})$$

として,

$$T_t(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) = \sum_{n=0}^\infty T_t^{(n)}(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}})$$

とおけば, それが求める密度である. 一方定義の仕方から, $T_t(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}})$ は

$$T_t(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) = P_t^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) + \int_0^t \int \Psi(\underline{\underline{x}}, ds, d\underline{\underline{z}}) T_{t-s}(\underline{\underline{z}}, \underline{\underline{y}})$$

を満たすが, これを具体的に書き下したものが命題の(1)式である.

定義

$$H_t(\underline{\underline{x}}, d\underline{\underline{y}}) = \hat{\mu}(d\underline{\underline{y}}) T_t(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{x}}), \quad \underline{\underline{x}} \in \underline{\underline{S}}, \quad d\underline{\underline{y}} \subset \underline{\underline{S}},$$
$$H_t(\partial, \underline{\underline{S}}) = 0, \quad H_t(\partial, \{\partial\}) = 1$$

とおく.

H_t は T_t の $\hat{\mu}$ に関する双対半群であり, 特に $\hat{\mu}$ が超過測度ならば, H_t は推移確率である. 我々に興味のあるのはこの場合である.

$\underline{\underline{S}}$ 上の測度 μ, ν の合成積 $\mu * \nu$ を

(2) $$\int_{\underline{\underline{S}}^\partial} \mu * \nu F = \int_{\underline{\underline{S}}^\partial} \int_{\underline{\underline{S}}^\partial} \mu(d\underline{\underline{x}}) \nu(d\underline{\underline{y}}) F(\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{y}})$$

で定義する. ただし, $\mu(\{\partial\}) = \nu(\{\partial\}) = \delta_\partial$ として拡張しておくのである.[注2)

T_t の分枝性は

(注1) ここで $\hat{\mu}(\{\partial\}) = 1$ としている.

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(3) $$\int_{\underline{\underline{S}}^\partial} \mu * \nu \, T_t \hat{f} = \left(\int_{\underline{\underline{S}}^\partial} \mu T_t \hat{f}\right)\left(\int_{\underline{\underline{S}}^\partial} \nu T_t \hat{f}\right)$$

が成立することと同等である。[注3)]

<u>定義</u>　$\underline{\underline{S}}^\partial$ 上の函数 $\varphi=(\varphi_n)_{n\geqq 0}$, $\psi=(\psi_n)_{n\geqq 0}$ の「合成積」$\varphi*\psi$ を

(4) $$(\varphi*\psi)_n(\underline{\underline{x}}) = \sum_{\substack{k+j=n\\ k,j\geqq 0}} \varphi_k(\underline{\underline{x}}_1)\psi_j(\underline{\underline{x}}_2) \quad , \quad n\geqq 0$$

で定義する。ここで $\underline{\underline{x}}=\underline{\underline{x}}_1\cdot\underline{\underline{x}}_2$, $\underline{\underline{x}}_1\in S^k$, $\underline{\underline{x}}_2\in S^j$ である。

<u>命題2</u>　φ, ψ, $\varphi*\psi$ は有界とする。更に $\varphi_0=0$, $\psi_0=0$ とする。このとき，

(5) $$H_t(\varphi*\psi)(\underline{\underline{x}}) = (H_t\varphi)*(H_t\psi)(\underline{\underline{x}}) + H_t\varphi(\underline{\underline{x}})H_t^0\psi(\partial) + H_t^0\varphi(\partial)H_t\psi(\underline{\underline{x}})$$

が $\hat{\mu}-a.e$ で成り立つ。ここで

$$H_t^0(\partial, d\underline{\underline{y}}) = \hat{\mu}(dy)T_t(\underline{\underline{y}}, \partial)$$

である。[注4)]

（証明）　$\mu_1=\varphi\hat{\mu}$, $\mu_2=\psi\hat{\mu}$ とおくと，$\mu_1*\mu_2=(\varphi*\psi)\hat{\mu}$ である。

$$\int_{\underline{\underline{S}}} H_t(\varphi*\psi)(\underline{\underline{x}})\hat{f}(\underline{\underline{x}})\hat{\mu}(d\underline{\underline{x}}) = \int_{\underline{\underline{S}}}\int_{\underline{\underline{S}}} (\varphi*\psi)(\underline{\underline{y}})\hat{\mu}(d\underline{\underline{y}})T_t(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{x}})\hat{f}(\underline{\underline{x}})\hat{\mu}(d\underline{\underline{x}})$$

$$= \int_{\underline{\underline{S}}} (\varphi*\psi)(\underline{\underline{y}})\hat{\mu}(d\underline{\underline{y}})T_t\hat{f}(\underline{\underline{y}}) - \int_{\underline{\underline{S}}} (\varphi*\psi)(\underline{\underline{y}})\hat{\mu}(d\underline{\underline{y}})T_t(\underline{\underline{y}}, \partial)$$

$= I - II$，とおく。

T_t の分枝性により

$$I = \int_{\underline{\underline{S}}^\partial} \mu_1*\mu_2(d\underline{\underline{y}})T_t\hat{f}(\underline{\underline{y}}) = \left(\int_{\underline{\underline{S}}^\partial} \mu_1 T_t\hat{f}\right)\left(\int_{\underline{\underline{S}}^\partial} \mu_2 T_t\hat{f}\right)$$ [注5)]

$$= \left(\int_{\underline{\underline{S}}^\partial} H_t\varphi\cdot\hat{\mu}\hat{f} + H_t^0\varphi(\partial)\right)\left(\int_{\underline{\underline{S}}^\partial} H_t\psi\cdot\hat{\mu}\hat{f} + H_t^0\psi(\partial)\right)$$

（注2）　μ,ν の合成積を (2) 式の S^∂ を S でおきかえて定義しても以下の議論には本質的な差はない。

（注3）　合成積を（注2）のように定義したときには (3) 式の $\underline{\underline{S}}^\partial$ も $\underline{\underline{S}}$ でおきかえ，$T_t\hat{f}(\partial)=1$ を要求する。

（注4）　$g_0\equiv 0$ のときは $H_t(\partial, d\underline{\underline{y}})=H_t^0(\partial, d\underline{\underline{y}})$ であるが，一般には異なる。

（注5）　$\mu_1(\{\partial\})=\mu_2(\{\partial\})=\mu_1*\mu_2(\{\partial\})=0$ であるから形式的に加えている。

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\underline{\underline{S}}^n}\left\{\sum_{\substack{k+j=n\\k,j\geqq 1}}(H_t\varphi)_k(H_t\psi)_j+(H_t\varphi)_n H_t^0\psi(\partial)+H_t^0\varphi(\partial)(H_t\psi)_n\right\}\hat{f}\hat{\mu}+H_t^0\varphi(\partial)H_t^0\psi(\partial)$$

$H_t^0\varphi(\partial)H_t^0\psi(\partial)=\text{II}$ であるから，$\underline{\underline{x}}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $n=1,2,\cdots$ に対して

$$H_t(\varphi*\psi)(\underline{\underline{x}})=(H_t\varphi)*(H_t\psi)(\underline{\underline{x}})+H_t\varphi(\underline{\underline{x}})H_t^0\psi(\partial)+H_t\varphi(\partial)H_t\psi(\underline{\underline{x}})$$

が $\hat{\mu}-a.e.$ でなりたつ.

§11. $\hat{\mu}$ - 双対マルコフ過程のいくつかの性質

補題　ν を S 上の確率測度として，

$$T_t\hat{\nu}(x)=\int_{\underline{\underline{S}}^\partial}T_t(\underline{\underline{x}},\underline{\underline{y}})\hat{\nu}(d\underline{\underline{y}})$$

とおくと(注1)

(1) $$T_t\hat{\nu}(\underline{\underline{x}})=\widehat{(T_t\hat{\nu})_S}(\underline{\underline{x}})$$

が成立する(注2).

証明は $T_t\hat{f}(\underline{\underline{x}})=\int_{\underline{\underline{S}}^\partial}T_t(\underline{\underline{x}},\underline{\underline{y}})\hat{f}(\underline{\underline{y}})\hat{\mu}(d\underline{\underline{y}})$ の分枝性の証明とまったく同様に行われる(注3).

以下，この節では $g_0\equiv 0$ を仮定する．従って，$H_t^0(\partial,\underline{\underline{S}})=\int_{\underline{\underline{S}}}\hat{\mu}(d\underline{\underline{x}})T_t(\underline{\underline{x}},\partial)=0$ である.

S 上の確率測度 $\nu(dx)$ が与えられたとき，$\Gamma\subset\underline{\underline{S}}$ に対して，

(2) $$\hat{\nu}H_t(\Gamma)=\int_{\underline{\underline{S}}}\hat{\nu}(d\underline{\underline{x}})\int_\Gamma H_t(\underline{\underline{x}},\underline{\underline{y}})\hat{\mu}(d\underline{\underline{y}})$$

とおく.

命題1.　$\Gamma\subset\underline{\underline{S}}$ に対して

(3) $$\hat{\nu}H_t(\Gamma)=\widehat{(\hat{\nu}H_t)_S}(\Gamma)$$

が成り立つ(注1)（巾型不変性).

（注1）　$\hat{\nu}$ は $\{\partial\}$ 上では 1.

（注2）　$(T_t\hat{\nu})_S$ は $T_t\hat{\nu}$ の S 上への制限である.

（注3）　例えば，[5] 参照.

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

（証明） 定義から H_t を T_t に直して，

$$\hat{\nu} H_t(\Gamma) = \int_{\Gamma} \hat{\mu}(d\underline{\underline{y}}) \int_{\underline{\underline{S}}} T_t(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{x}}) \hat{\nu}(d\underline{\underline{x}})$$

である．$\underline{\underline{y}} \in \underline{\underline{S}}$ であるから，$\underline{\underline{S}}$ を $\underline{\underline{S}}^{\partial}$ におきかえてもよい．そうしておいて，補題を適用すると，

$$= \int_{\Gamma} \hat{\mu}(d\underline{\underline{y}}) \widehat{(T_t \hat{\nu})}_S(\underline{\underline{y}}) = \int_{\Gamma} \widehat{(\mu T_t \hat{\nu})}(d\underline{\underline{y}})$$

$$= \widehat{(\hat{\nu} H_t)}_S(\Gamma).$$

命題 2．　$\nu(S) \leq 1$ とすると，

(4) $$\hat{\nu} H_t(S) \leqq \nu(S)$$

が成り立つ。

（証明） まず $\nu(S) < 1$ とする．$\hat{\nu} H_t(S) = a$ とおくと，命題 1 により

$$\hat{\nu} H_t(\underline{\underline{S}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\nu} H_t(S^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\hat{\nu} H_t(S)\}^n = \sum_{n=1}^{\infty} a^n .$$

一方，$H_t(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{S}}) \leqq 1$ であるから，

$$\hat{\nu} H_t(\underline{\underline{S}}) = \int_{\underline{\underline{S}}} \hat{\nu}(d\underline{\underline{x}}) H_t(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{S}}) \leq \int_{\underline{\underline{S}}} \hat{\nu}(d\underline{\underline{x}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\nu(S)\}^n .$$

従って，$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \{\nu(S)\}^n$ より $a \leqq \nu(S)$ を得る．$\nu(S) = 1$ のときには，$\nu_n(S) < 1$ 且つ $\nu_n \uparrow \nu$ となる列 $\{\nu_n\}$ をとれば，$a_n = \hat{\nu}_n H_t \uparrow a = \hat{\nu} H_t$ であって，$a_n \leqq \nu_n(S) < 1$ より $a \leqq \nu(S) = 1$ を得る．

§10 の (1) 式を $\hat{\mu}$- 双対過程の量で表現しよう．まず

$$Q_t^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) = P_t^0(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{x}})$$

とおく．更に，$\pi_m(y, d\underline{\underline{z}})$ は $\hat{\mu}(d\underline{\underline{z}})$ に関する密度 $\pi_m(y, \underline{\underline{z}})$ をもつとする．

$$q_m^*(\underline{\underline{z}}) = \int_S \mu(dy) c(y) q_m(y) \pi_m(y, \underline{\underline{z}})$$

$$\pi_m^*(\underline{\underline{z}}, dw) = \frac{1}{q_m^*(\underline{\underline{z}})} \mu(dw) c(w) q_m(w) \pi_m(w, \underline{\underline{z}})$$

とおいて，§10，(1) 式を書きかえると，$\underline{\underline{x}} \in S^n$ のとき，

(5) $$H_t(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) = Q_t^0(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) + \int_0^t dr \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{S^{n-1+m}} H_r(\underline{\underline{x}}; w_1, \cdots, w_{k-1}, z_1, \cdots, z_m, w_{k+1}, \cdots, w_n) \times$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$\times\hat{\mu}(d\underline{\underline{z}})\,\hat{u}(d(w_1,\cdots,w_{k-1}\ \ w_{k+1},\cdots,w_n))\,q^*_{m}(\underline{\underline{z}})\int_S \pi^*_m(\underline{\underline{z}},dw_k)\,Q^o_{t-r}(w_k,\underline{\underline{y}})\ .$$

となる．特に $y\in S$ のときには，

$$(6)\qquad H_t(\underline{\underline{x}},y)=Q^o_t(\underline{\underline{x}},y)+\int_0 dr\sum_{m=0}^{\infty}\int_{S^m}H_r(\underline{\underline{x}},\underline{\underline{z}})\hat{\mu}(d\underline{\underline{z}})\,q^*_m(\underline{\underline{z}})\int_S\pi_m(\underline{\underline{z}},dw)\,Q^o_{t-r}(w,y)$$

となる．

命題 3. ν を S 上の確率測度として，

$$u_t(\Gamma)=\hat{\nu}H_t(\Gamma)\qquad,\qquad \Gamma\subset S$$

とおくと，

$$u_t(S)\le 1$$

であって，

$$(7)\qquad u_t(\Gamma)=\nu Q^o_t(\Gamma)+\int_0^t dr\sum_{m=0}^{\infty}\int_{S^m}\hat{u}_r(d\underline{\underline{z}})\,q^*_m(\underline{\underline{z}})\int_S\pi_m(\underline{\underline{z}},dw)\,Q^o_{t-r}(w,\Gamma)$$

をみたす．ここで $Q^o_t(x,dy)=Q^o_t(x,y)\,\mu(dy)$， $\nu Q^o_t(\Gamma)=\int_S\nu(dx)Q^o_t(x,\Gamma)$ である．

文　献

[1] T. E. Harris, *The Theory of Branching Processes.* (1963) Springer.

[2] 池田，長沢，渡辺，分枝マルコフ過程の基礎，*Sem. on Probability* vol. 23, (1966).

[3] 長沢，佐藤，*Some theorems on time change and killing of Markov processes,* Kodai Math. Sem. Rep. (1963) vol. 15, 195-219.

[4] 長沢，*Time reversions of Markov Processes,* Nagoya Math. Journal (1964), vol. 24, 177-204.

[5] 長沢，*Branching property of Markov processes,* Lecture Note in Math. 258, Séminaire de Probabilités VI, Springer, 177-197.

[6] 髙橋，*Markov semi-groups with simple interaction I. II.* Proc. Japan Acad. vol. 47. (1971) Suppl. 974-978, 1019-1024.

[7] 田中，*Propagation of chaos for certain purely discontinuous Markov processes with interaction.* J Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. I (1970) vol. 17, 259-272.

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

一次元Lévy過程のリゾルベント密度と1点への到達の問題

高　田　俊　雄

1次元 *Lévy* 過程の研究において，そのポテンシャルはきわめて重要な役割を果たす．例えば，1点への到達可能性と，ポテンシャルの密度（リゾルベント密度と呼ぶことにする。）の性質とは密接な関係があり，そのことは安定過程などでよく知られていたが，最近主として *Kesten* によって詳細な一般論が展開された（[1], [3]）．雑にいって，一点への到達可能性は有界な密度の存在と同値であり，1点の正則性（*local time* の存在と同値）は連続な密度の存在と，同値であることがわかっている．

特に安定過程では次のことが知られている．

指数 $\alpha > 1 \Longrightarrow$ $^{\exists}$有界連続な密度

$\alpha < 1$ 又は α 1 で対称な *Cauchy* 過程 $\Longrightarrow$ 密度は原点で有界でない．

さらに非対称 *Cauchy* 過程に関しては 1969 年 *Port-Stone* [4] によって連続な密度の存在が示された．これは *Kesten* の結果に含まれることでもある．

さらに密度の原点での挙動に，1点へ到達する際の種々の様相が反映する．以下でこの方向で得られた結果を述べる．

1次元の *Lévy* 過程（右連続な *path* を持つ時間的一様な加法過程）$\{X_t\}_{0\leqq t<\infty}$ を考える．

$\boxed{\text{定義}}$ （特性関数）　$E[e^{i\xi X_t}] = e^{t\psi(\xi)}$　　$\psi(\xi)$ を *exponent* と呼ぶ

一般に　$\psi(\xi) = ia\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \int_{R^1}\left(e^{i\xi y} - 1 - \frac{i\xi y}{1+y^2}\right)n(dy)$

a: 実数　　$\sigma \geqq 0$　　$\int_{R^1}(1\wedge y^2)\,n(dy) < +\infty$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$\boxed{\text{定義}}$ (マルコフ過程のポテンシャル)

$\{X_t\}_{0\leqq t<\infty}$ を空間的にも一様なマルコフ過程と考えて普遍可測関数 $f\geqq 0$ の P-ポテンシャル $U_pf(x)$ とは

$$U_pf(x)\equiv E_x\left[\int_0^\infty e^{-pt}f(X_t)\,dt\right]=\int_{R^1}U_p(dy)\,f(x+y)$$

$$\text{但し}\quad U_p(dy)=E_0\left[\int_0^\infty e^{-pt}I_{\{dy\}}(X_t)\,dt\right]$$

$U_p(dy)$ の密度関数を

$u_p(y)$ と書く．この $u_p(y)$ を p 次のリゾルベント密度という．

これらの記号の下で

$$u_p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}\ \frac{1}{p-\psi(\xi)}\ d\xi \quad \text{と書くことができる。}$$

(i) $\left[\begin{array}{l}\{X_t\}_{0\leqq t<\infty}\ \text{なる過程で　特性関数表示における}\ \sigma\ \text{が}\\ \qquad\qquad \sigma>0\quad\text{なる場合}\end{array}\right]$

証明の際 $n(dy)$ なる測度の台が有界であることを仮定する必要がある．

$u_p(x)$ は R^1 で連続　$u_p(x)$ は $R^1-\{0\}$ で連続的微分可能

$$u_p'(0_+)=\frac{-1}{\sigma^2}+A \qquad u_p'(0_-)=\frac{+1}{\sigma^2}+A$$

A: real constant (私の京大修論 1972 参照 [5])

(ii) $\left[\begin{array}{l}\{X_t\}_{0\leq t<\infty}\ \text{が指数}\ \alpha>1\ \text{なる安定過程と他の任意の指数}\ 0<\alpha<2\\ \qquad\qquad \text{但し}\ \alpha\neq 1\ \text{なる安定過程との合成の時}\end{array}\right]$

すなわち

$$\psi(\xi)=-c_1|\xi|^{\alpha_1}\left(1-i\beta_1\tan\frac{\pi\alpha_1}{2}\,sgn(\xi)\right)-c_2|\xi|^{\alpha_2}\left(1-i\beta_2\tan\frac{\pi\alpha_2}{2}\,sgn(\xi)\right)$$

$$\text{但し}\quad \alpha_1>1\quad \alpha_1>\alpha_2>0\quad \alpha_2\neq 1$$

この時，$u_p(x)$ は R^1 で連続，　$-1\leqq\beta_1,\ \beta_2\leqq 1$

$R^1-\{0\}$ で連続微分可能

$|x|\downarrow 0$ の時

$$u_p'(x)=-\frac{\Gamma(2-\alpha_1)\sin\frac{\pi\alpha_1}{2}}{\pi(1+h_1^2)c_1}\left(sgn(x)+\beta_1\right)|x|^{\alpha_1-2}+\left(a_1\,sgn(x)+b_1\right)|x|^{2\alpha_1-\alpha_2-2}$$

$$+\left(a_2\,sgn(x)+b_2\right)|x|^{3\alpha_1-2\alpha_2-2}+\cdots+\left(a_n\,sgn(x)+b_n\right)|x|^{\alpha_1-2+n(\alpha_1-\alpha_2)}+V_p(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

但し　$h_1=\beta_1 \tan\frac{\pi\alpha_1}{2}$　　$V_p(x)$ は x の有界連続関数

n は $\alpha_1-2+n(\alpha_1-\alpha_2)<0$ を満たす最大の整数（$0, 1, 2\cdots$）

a_i, b_i は α_1, α_2, β_1, β_2 にのみ依存し，P には関係しない定数

さらに $\alpha_1-2+n(\alpha_1-\alpha_2)=0$ なる整数がある時は

$$(a_n\, sgn(x)+b_n)|x|^{\alpha_1-2+n(\alpha_1-\alpha_2)} \text{ を } \left[a_n\, sgn(x)+b_n \log\left(\frac{1}{|x|}\vee 1\right)\right]$$

で置き換える必要がある。

N. Ikeda and S. Watanabe 第2回日ソシンポジュウム報告参照 [2]

(iii) $\{X_t\}_{0\leqq t<\infty}$ が指数 $\alpha=1$ なる非対称な Cauchy 過程の場合

すなわち　$\psi(\xi)=-ia\xi-C|\xi|\left[1+i\, sgn(\xi)\frac{2}{\pi}\beta\log|\xi|\right]$

但し a: real constant　$c>0$

$\beta\neq 0$, $-1\leqq\beta\leqq 1$　$\beta=1$ なら正の jump のみ
$\beta=-1$ なら負の jump のみ　からなる片側 Cauchy 過程

$u_p(x)$ は R^1 で連続

$u_p(x)$ は $R^1-\{0\}$ で連続的微分可能

$|x|\downarrow 0$ の時

$$u_p(x)=\frac{-\pi}{4\beta^2 C}[sgn(x)+\beta]\frac{1}{|x|\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^2}+O\left(\frac{1}{x\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^3}\right)$$

これは [3] の結果をより精密にしたものである.

(iv)　（片側 Cauchy 過程）＋（α 次の安定過程）　　但し $\alpha\neq 1$

すなわち

$$\psi(\xi)=-ia'\xi+c_1\int_0^\infty\left(e^{i\xi y}-1-\frac{i\xi y}{1+y^2}\right)\frac{dy}{y^2}+c_2\int_{-\infty}^0\left(e^{i\xi y}-1-\frac{i\xi y}{1+y^2}\right)\frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}\left(\begin{array}{c}0<\alpha<2\\ \alpha\neq 1\end{array}\right)$$

この $\psi(\xi)$ は次のようにも書ける。

$$\psi(\xi)=-ia\xi-c_1|\xi|\left(1+i\, sgn(\xi)\frac{2}{\pi}\log|\xi|\right)-c_2\left(1+i\, sgn(\xi)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)|\xi|^\alpha$$

ここで a は a' とは異なるものである。

◎（$0<\alpha<1$）の場合

$u_p(x)$ は R^1 で連続，$R^1-\{0\}$ で連続的微分可能

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$|x|\downarrow 0$ の時

$$u_p'(x)=\frac{-\pi}{4c_1}[sgn(x)+1]\frac{1}{|x|(\log\frac{1}{|x|})^2}+O\left(\frac{1}{x(\log\frac{1}{|x|})^3}\right)$$

◎ ($1<\alpha<2$) の時

$u_p(x)$ は R^1 で連続, $R^1-\{0\}$ で連続的微分可能

$|x|\downarrow 0$ の時

$$u_p'(x)=-\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\pi(1+\tan^2\frac{\pi\alpha}{2})c_2}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\Big[sgn(x)-1\Big]|x|^{\alpha-2}$$

$$+\begin{cases} O\left(x^{2\alpha-3}\log\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) & 1<\alpha<\frac{3}{2}\ \text{の時} \\ x\text{の有界連続関数} & 3/2<\alpha<2\ \text{の時} \\ O\left(\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^2\right) & \alpha=3/2\ \text{の時}\end{cases}$$

証明の方針

$u_p(x)$ の R^1 での連続性については $u_p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{p-\psi(\xi)}d\xi$

なる積分で，被積分関数がパラメーター x に関して一様可積分になる ((i), (ii), (iv) で $1<\alpha<2$ の時) ことから出る.

その他の場合は，積分第2平均値の定理を用いて証明できる.

$u_p(x)$ の $R^1-\{0\}$ での連続的微分可能性

微分と積分の交換可能性に関する Riemann 積分の定理を使う. その際パラメーター x に関する一様可積分性を示す必要があるが，これも積分第2平均値の定理を用いて示すことができる.

$u_p'(x)$ の $|x|\downarrow 0$ の時の挙動

E.J. Pitman [6] の結果を用いれば，その練習問題としておおよその結果を得ることができる.

しかし (iii) においては $$u_p'(x)\sim\frac{-\pi}{4\beta^2c}[sgn(x)+\beta]\frac{1}{|x|(\log\frac{1}{|x|})^2}\quad(|x|\downarrow 0)$$

しか [6] を用いたのではできない.

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

リゾルベント密度の原点での挙動(微係数の左右での立ち上り方)は対応する *Lévy* 過程の原点への到達の仕方を反映する．これについては文献 [2], [5] を参照．

文　　献

[1] J. Bretagnolle: *Resultats de Kesten sur les processus a accroissements independants, Seminaire de Probabilites V, Lecture Note of Math. Vol. 191, Springer, (1971), 21-36.*

[2] N. Ikeda *and* S. Watanabe: *The local structure of a class of diffusions and related problems, Proc. of 2nd Japan-USSR Symposium on Probability (to appear in Springer's Lecture Note of Math.)*

[3] H. Kesten: *Hitting probabilities of single points ~~for~~ processes with stationary independent increments, Memoir 93, Amer. Math. Soc., (1969).*

[4] S. Port *and* C. J. Stone: *The asymmetric Cauchy processes on the line, Ann. Math. Stat. 40 (1969) 137-143.*

[5] 髙田俊雄: 京大修士論文 (*Lévy* 過程における *1* 点への *hitting-probability* と *local time*)

[6] E. J. Pitman: *On the behaviour of the characteristic function of a probability distribution in the neighbourhood of the origin, Jour. Aust. Math. Soc. Vol. 8 (1968), 423～443.*

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

1次元diffusionsのone parameter family としてのBessel diffusions

志賀徳造, 渡辺信三

§0. *Introduction*

ここで我々が *Bessel diffusion* というのは $[0,\infty]$ 上の *conservative diffusion* でその *local generator* が

$$(0.1)\qquad L = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha-1}{x}\,\frac{d}{dx}\right)\quad,\qquad \alpha \geqq 0$$

で与えられ, *boundary* 0 は $\alpha=0$ のとき *trap*

$0<\alpha<2$ のとき *reflecting*

$2<\alpha$ のとき *entrance*

なるもののことである. α を *Bessel process* の *index* という。*index* α が *positive integer* n に等しいとき, これは丁度 n 次元 *Brown* 運動の *radial part* に他ならない. すなわち $B_1(t), B_2(t), \cdots, B_n(t)$ を 1 次元*Brown* 運動の n-*independent copies* とするとき

$$(0.2)\qquad X^{(n)}(t) = \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + \cdots + B_n^2(t)}$$

は *index* n の *Bessel diffusion* の *sample path* を与える. (0.2) より次のことは明らかである. $X^{(n)}(t)$, $X^{(m)}(t)$ をそれぞれ *index* n, m (n, m は *positive integers*) の *Bessel diffusions* の *sample paths* で互いに独立なものとするとき

$$(0.3)\qquad X^{(n+m)}(t) = \sqrt{X^{(n)}(t)^2 + X^{(m)}(t)^2}$$

は *index* $n+m$ の *Bessel diffusion* の *path* を与える. 一般に2つの確率過程を考え, その確率法則を $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ とし, 互いに独立な *sample paths* を $X_1(t)$, $X_2(t)$ とするとき

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(0.4) $$X(t) = \sqrt{X_1^2(t) + X_2^2(t)}$$

で定義される確率過程の法則が *well defined* であるとき(すなわち，同じ出発点に対し同じ法則になるとき)これを$\mathbb{P}$とし

(0.5) $$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \circledast \mathbb{P}_2$$

であらわそう．(くわしい定義は§2 を見よ)．今 *index* α の *Bessel diffusion* の確率法則を $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ とするとき，(0.3)は

(0.6) $$\mathbb{P}^{(\alpha+\beta)} = \mathbb{P}^{(\alpha)} \circledast \mathbb{P}^{(\beta)}$$

なる関係が，α, β が *positive integers* のときに成立することを示しているが，§2 で示すように，このことはすべての $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ で成立する．この性質は *diffusions* の *one parameter family* としての *Bessel diffusions* のもつ基本的な性質と考えられる．

以下で我々は(0.6)をみたすような $[0, \infty)$ 上の *diffusions* の *one parameter family* $\{\mathbb{P}^{(\alpha)}\}$ をすべて決定する。大体 *Bessel diffusions* と類似のものに限られるが，*Bessel diffusions* 以外に例えば n 次元の *Ornstein-Uhlenbeck Brownian motion* (1 次元 *O.U. Brownian motion* の n 直積)の *radial part* を含むような *one parameter family* もこのうちに含まれる．

§1 では，確率過程の間にある *convolution* を定義し，それに関する *infinitely decompasable process* の概念を導入する。*Markov process* が *infinitely decomposable* であるための必要十分条件は実は *Kawazu-Watanabe* [2] で導入された *CBI-process* であることが示される．このことにより *infinitely decomposable* な *Markov process* は [2] の結果によって完全に解明される．

§2 では，座標変換 $x \mapsto x^2$ によって(0.6)をみたす *one-parameter family* が §1 の *convolution* に関する *one parameter family* の研究に帰着されることに注意し(0.6)をみたす *Markov process* の *one parameter family* がすべて決定できることを示す．特に *diffusion* のなす *one parameter family* の典型的場合として *Bessel diffusion* が得られることを示す．

§3 では，*Bassel diffusions* が (0.6)を満たすことの応用として *Bessel di-*

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

ffusion のある time inversion に関する不変性を証明する．このことは筆者の一人が transition probability の explicit formula を用いて証明していたが，その簡単な別証明である．参考のため元の証明も書いておく。又この不変性の応用として Bessel diffusion やそれに関連した diffusion の path function の local property に関する注意も付記しておく．

補足で Bessel diffusion が (0.b) をみたすことから Bessel 関数に関して 'Sonine の第２積分' として知られる公式が導かれることを注意する．

§1. Infinitely decompasable Markov process と CBI process.

$W=\{w: [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+=[0,\infty),\ \text{right conti},\ \exists \text{left limit}\}$

$\mathcal{B}(W)$ = W の Borel cylinder sets から生成される σ-field とし，

$w \in W$ に対し $X_t(w)=w(t)$ とする．

$\mathbb{P}=\{P_x,\ x\in\mathbb{R}^+\}$: $\{W,\ \mathcal{B}(W)\}$ 上の probability measure の system で

(1.1) $\quad x \longmapsto P_x(B)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$-measurable in x, $\forall B\in\mathcal{B}(W)$,

(1.2) $\quad P_x(w(0)=x)=1, \qquad \forall x\in\mathbb{R}^+$

なるものとする．このような $\mathbb{P}$ の全体を $\mathcal{P}(W)$ であらわそう．

Definition 1.1 $\quad \mathbb{P},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}\in\mathcal{P}(W)$

$$\mathbb{R}=\mathbb{P}*\mathbb{Q} \underset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x,y\in\mathbb{R}^+ \quad , \quad R_{x+y}=\phi(P_x\times Q_y)$$

ここで $\phi: W\times W\longrightarrow W$ は

(1.3) $\quad \phi(w_1,\ w_2)=w_1+w_2 \quad , \quad (w_1,\ w_2)\in W\times W$

で定義される．

故に $\mathbb{R}$ は，法則 $\mathbb{P}$ 及び $\mathbb{Q}$ にしたがう sample function で，互いに独立なものの和の定義する確率過程の法則である．但し $\mathbb{P}*\mathbb{Q}$ が定義されるためには $\forall x, y, x', y'\in\mathbb{R}^+$, $x+y=x'+y'$ に対し

$\phi(P_x\times Q_y)=\phi(P_{x'}\times Q_{y'})$ であることが必要（十分）である。

Definition 1.2 $\quad \mathcal{P}_M(W)=\{\mathbb{P}\in\mathcal{P}(W)$: $\mathbb{P}$ は時間的に一様な強マルコフ性を

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

もつ}.

$\mathcal{P}_D(W)=\{\mathbb{P}\in\mathcal{P}(W)$: $\mathbb{P}$ は時間的に一様な diffusion, i.e. $\mathbb{P}\in\mathcal{P}_M(W)$, $P_x(W_c)=1$, $\forall x\}$

Def. 1.3 $\mathbb{P}\in\mathcal{P}(W)$ が infinitely decompasable,

$$\underset{def}{\rightleftarrows} \quad \forall n,\ \exists\mathbb{P}^{(n)},\quad \mathbb{P}=\underbrace{\mathbb{P}^{(n)}*\mathbb{P}^{(n)}*\cdots*\mathbb{P}^{(n)}}_{n}$$

Lemma 1.1 上の $\mathbb{P}^{(n)}$ は $\mathbb{P}$ から unique にきまる．もっと正確に各 $x\in\mathbb{R}^+$ に対し，$P_x^{(n)}\in\mathbb{P}^{(n)}$ は $P_{nx}\in\mathbb{P}$ から unique にきまる．

Proof 省略

Def. 1.4 $\mathbb{P}\in\mathcal{P}_M(W)$ が infinitely decompasable (i. d.) のとき
i. d. strong Markov process という． i. d な $\mathbb{P}\in\mathcal{P}_D(W)$ を
i. d. diffusion process という．

Def. 1.5 (cf. Kawazu-Watanabe [2])

(i) $\mathbb{P}\in\mathcal{P}_M(W)$ が CBI-process,

$$\underset{def}{\rightleftarrows} \quad \forall\lambda>0 \quad E_x(e^{-\lambda X_t})=e^{-x\psi(t,\lambda)}\varphi(t,\lambda)$$ （ある $\psi(t,\lambda)$ $\varphi(t,\lambda)$ に対し）

(ii) $\mathbb{P}\in\mathcal{P}_M(W)$ が CB-process
$\rightleftarrows$ $\mathbb{P}$ が CBI-process で $\varphi(t,\lambda)\equiv 1$ となる．

Theorem 1.1

(i) $\mathbb{P}\in\mathcal{P}_M(W)$ が i. d. $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{P}$ が CBI-process.

(ii) $\mathbb{P}\in\mathcal{P}_M(W)$ が i. d. かつ $\forall n$ Def. 1.3 の $\mathbb{P}^{(n)}$ が
$\mathbb{P}^{(n)}=\mathbb{P}$

$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{P}$ が CB-process

Proof (ii) は本来の直観的意味における CB-process の性質をのべていると考えられる。ここでは (i) のみ証明する．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(i) の証明

$\Longrightarrow$ は次の Lemma より直ちにしたがう：

<u>Lemma</u> $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathcal{P}(W)$ とする．$\mathbb{P}_1 * \mathbb{P}_2$ が well defined であるためには任意の $\underline{\underline{t}} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ と $\underline{\underline{\lambda}} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ で $0 < t_1 < t_2 < \cdots, < t_n$, $\lambda_k > 0$ $k = 1, 2, \cdots, n$, なるものに対し $\psi(\underline{\underline{t}}, \underline{\underline{\lambda}}) > 0$ と $\varphi_i(\underline{\underline{t}}, \underline{\underline{\lambda}}) > 0$ $(i = 1, 2)$ が存在して

(1.1) $E_x^{(i)}(e^{-(\underline{\underline{\lambda}}, X(\underline{\underline{t}}))}) \overset{*)}{=} e^{-x\psi(\underline{\underline{t}}, \underline{\underline{\lambda}})}\varphi_i(\underline{\underline{t}}, \underline{\underline{\lambda}}), \quad i = 1, 2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

がなりたつ。ここで

$$(\underline{\underline{\lambda}}, X(\underline{\underline{t}})) = \lambda_1 X(t_1) + \lambda_2 X(t_2) + \cdots + \lambda_n X(t_n)$$

<u>証明</u> $\underline{\underline{t}} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ と $\underline{\underline{\lambda}} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ に対し

$$f_i(x) = E_x^{(i)}(e^{-(\underline{\underline{\lambda}}, X(\underline{\underline{t}}))}) \quad , \qquad i = 1, 2 \ ,$$

とおく．$\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}_1 * \mathbb{P}_2$ が well defined であるためには

$$f_1(x)\, f_2(y) = f_3(x + y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

なることが必要十分である．ここで

$$f_3(x) = E_x^{(3)}(e^{-(\underline{\underline{\lambda}}, X(\underline{\underline{t}}))}) \quad .$$

このような関数方程式をみたす関数 f_1, f_2, f_3 は必ず

$$f_i(x) = a_i\, e^{-bx} \quad , \qquad i = 1, 2, 3$$

なる形で与えられるは見易い。但し $a_i > 0$, $b > 0$ （定数） $a_1 a_2 = a_3$.

$\Longleftarrow$ の証明： すなわち $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_M(W)$ が CBI-process であるとき i.d. であることをいう。

$\mathbb{P} \in \mathcal{P}_M(W)$ ということは右連続，conservative な強 Markov process であることを仮定していることになるので [2] の結果によりこのような CBI-pro-

---

*) $E_x^{(i)}$ は $P_x^{(i)}$ による expectation をあらわす $(i = 1, 2, 3)$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

cess $\mathbb{P}$ と generating function の系 $[R, F]$ が 1 対 1 に対応する．ここで R, F は次の形の関数である．

$$R(\lambda) = -a\lambda^2 + b\lambda - \int_0^\infty \left(e^{-\lambda u} - 1 + \frac{\lambda u}{1+u^2}\right) n_1(du)$$

$$F(\lambda) = c\lambda - \int_0^\infty (e^{-\lambda u} - 1)\, n_2(du)$$

ここで

$$a \geqq 0, \quad c \geqq 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad \int_0^\infty \frac{u^2}{1+u^2} n_1(du) + \int_0^\infty \frac{u}{1+u} n_2(du)$$

$< \infty$ ， かつ

$\displaystyle\int_{0+} [R(\lambda) \vee \lambda]^{-1} d\lambda = \infty$ ． （これは conservative の条件である）．

$\mathbb{P}$ と $[R, F]$ の対応関係は次のとおりである：

$$E_x(e^{-\lambda X_t}) = e^{-x\psi(t,\lambda)} \varphi(t, \lambda)$$

とするとき $\psi(t,\lambda)$ は 方程式

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = R(\psi) \quad , \quad \psi\big|_{t=0} = \lambda$$

の解であり， $\varphi(t,\lambda)$ は

$$\varphi(t, \lambda) = exp\left[-\int_0^t F(\psi(s,\lambda))\, ds\right]$$

で与えられる．

<u>Lemma</u> $\mathbb{P}_1$ を $[R, F_1]$ に対応する CBI-process， $\mathbb{P}_2$ を $[R, F_2]$ に対応する CBI-process とすると $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 * \mathbb{P}_2$ は well defined で $[R, F_1 + F_2]$ に対応する CBI-process である．

このことは， $\mathbb{P}$ を CBI-process： $E_x(e^{-\lambda X_t}) = e^{-x\psi(t,\lambda)}\varphi(t,\lambda)$ とすると $\forall \underline{\underline{t}} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$， $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$， $\underline{\underline{\lambda}} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$， $\lambda_i > 0$， $i = 1, 2, \cdots, n$ に対し

$$E_x(e^{-(\underline{\underline{\lambda}}, X(\underline{\underline{t}}))}) = e^{-x\psi(t_1, \tilde{\lambda}_1)} \prod_{i=1}^n \varphi(t_k - t_{k-1}, \tilde{\lambda}_k)$$

となることに注意すれば上の対応関係より明らかである．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

ここで

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_n = \lambda_n \\ \tilde{\lambda}_{k-1} = \lambda_{k-1} + \psi(t_k - t_{k-1}, \tilde{\lambda}_k) \end{cases}$$

さて $\mathbb{P}$ が $[R, F]$ に対応する CBI-process ならば，これが i.d. であることは $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{(n)} \underbrace{* \mathbb{P}^{(n)} * \cdots * \mathbb{P}^{(n)}}_{n}$, ここで $\mathbb{P}^{(n)}$ は $[R, \frac{1}{n}F]$ に対応する CBI-process，なることより明らかである． q. e. d.

Corollary. $\mathcal{P}_M(W)$ の one parameter family $\{\mathbb{P}^{(\alpha)}\}_{\alpha \geqq 0}$ で

(1.2) $\mathbb{P}^{(\alpha)} * \mathbb{P}^{(\beta)} = \mathbb{P}^{(\alpha+\beta)}$ $\alpha, \beta \geqq 0$ なるものと上の形の generating function の system $[R, F]$ とが 1 対 1 に対応する：
$\mathbb{P}^{(\alpha)}$ は $[R, \alpha F]$ に対応する CBI-process である．

特に $\mathcal{P}_D(W)$ の one parameter family $\{\mathbb{P}^{(\alpha)}\}_{\alpha \geqq 0}$ で (1.2) をみたすものは [2] の結果より次のようにして定まる．

Theorem 1.2 one parameter family $\{\mathbb{P}^{(\alpha)}\}_{\alpha \geqq 0} \subset \mathcal{P}_D(W)$

で (1.2) をみたすものは 3 つの parameter $a \geq 0$, b, $c \geq 0$ で定まる：
$\mathbb{P}^{(\alpha)} \rightleftarrows [R(\lambda) = -a\lambda^2 + b\lambda,\ \alpha F(\lambda) = \alpha c \lambda]$.

この $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ は $L = ax \dfrac{d^2}{dx^2} + (bx + c\alpha) \dfrac{d}{dx}$, $\mathcal{D}(L) = C_0^2[0, \infty)$

の生成する diffusion として特性づけられる．

$\mathbb{P}^{(\alpha)}$ の今一つの特性づけとして，$\mathbb{P}^{(\alpha)} = \{P_x^{(\alpha)}\}$ は stochastic differential equation

(1.3) $$\begin{cases} dx_t = a'(x_t)^{\frac{1}{2}} dB_t + (bx_t + c\alpha)\,dt \\ x_0 = x > 0 \end{cases}$$ *)

の解の法則である．(1.3) の解について pathwise uniqueness がなりたつ

---

*) $a' = \sqrt{2a}$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

ことはよく知られている (e.g. [6]).

$\mathbb{P}^{(\alpha)}$ が (1.3) の解の法則として特性づけられることを用いて $\{\mathbb{P}^{(\alpha)}\}_{\alpha\geqq 0}$ が (1.2) をみたすことの直接的証明を与えることができる:

『(1.3) の解の法則 $\mathbb{P}^{(\alpha)}=\{P_x^{(\alpha)}\}$ が (1.2) をみたすことの別証明』

$a>0$, $c>0$ を仮定する.

$B_t^{(1)}$, $B_t^{(2)}$ を互いに独立な Brown 運動とし, 2) の stochastic differential equations

$$dx_t^{(1)}=a'(x_t^{(1)})^{\frac{1}{2}}\,dB_t^{(1)}+(bx_t^{(1)}+c\alpha)dt\ ,\qquad x_0^{(1)}=x\geqq 0 \tag{1.4}$$

$$dx_t^{2}=a'(x_t^{(2)})^{\frac{1}{2}}\,dB_t^{(2)}+(bx_t^{(2)}+c\beta)dt\ ,\qquad x_0^{(2)}=y\geqq 0 \tag{1.5}$$

を考える.

それぞれ $\{B_t^{(1)}\}$, $\{B_t^{(2)}\}$ の functional であるから, 互いに独立である.

$$x_t=x_t^{(1)}+x_t^{(2)}\quad ,\quad d\widetilde{B}_t=\frac{(x_t^{(1)})^{\frac{1}{2}}dB_t^{(1)}+(x_t^{(2)})^{\frac{1}{2}}dB_t^{(2)}}{(x_t^{(1)}+x_t^{(2)})^{\frac{1}{2}}}$$

とおくと $\widetilde{B}_t$ は 1 次元 Brown 運動であり,

$$dx_t=a'\cdot x_t^{\frac{1}{2}}\,d\widetilde{B}_t+(bx_t+c(\alpha+\beta))dt,\qquad x_0=x+y\ .$$

故に $\{x_t\}$ の法則は $P_{x+y}^{(\alpha+\beta)}$ である. i.e.

$$\mathbb{P}^{(\alpha+\beta)}=\mathbb{P}^{(\alpha)}*\mathbb{P}^{(\beta)}$$

q.e.d.

§2. 1次元 diffusions の one-parameter family としての Bessel diffusions.

Def. 2.1 $\tau:\ W\longrightarrow W$ を $(\tau w)(t)=w^2(t)$ で定義する.

Def. 2.2 $\mathbb{P}=\{P_x\}$, $\widetilde{\mathbb{P}}=\{\widetilde{P}_x\}\in\mathcal{P}(W)$ に対し

$$\widetilde{\mathbb{P}}=\tau\mathbb{P}\quad を,\quad \widetilde{P}_x=\tau\cdot P_{\sqrt{x}}\quad \forall x\in\mathbb{R}^+$$

がなりたつことと定義する.

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

Def. 2.3. $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \in \mathcal{P}(W)$ に対し

$$\mathbb{R} = \mathbb{P} \circledast \mathbb{Q}$$

$$\underset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \widetilde{\mathbb{P}} = \tau \cdot \mathbb{P}, \quad \widetilde{\mathbb{Q}} = \tau \mathbb{Q}, \quad \widetilde{\mathbb{R}} = \tau \mathbb{R} \quad \text{とするとき}$$

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \widetilde{\mathbb{P}} * \mathbb{Q} \quad (\text{Def. } 1.1)$$

すなわち $\mathbb{R} = \mathbb{P} \circledast \mathbb{Q}$ とは, $X(t)$, $Y(t)$ をそれぞれ法則 $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ にしたがう互いに独立な *sample functions* とするとき

$$Z(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)}$$

で定義される *process* Z の法則が *well-defined* で $\mathbb{R}$ であるということに他ならない。

$\mathcal{P}_M(W)$ の *one-parameter family* $\{\mathbb{P}^{(\alpha)}\}_{\alpha \geqq 0}$ で

$$\mathbb{P}^{(\alpha+\beta)} = \mathbb{P}^{(\alpha)} \circledast \mathbb{P}^{(\beta)} \qquad \forall \alpha, \beta \geqq 0 \tag{2.1}$$

をみたすものを考えよう。$\widetilde{\mathbb{P}}^{(\alpha)} = \tau \mathbb{P}^{(\alpha)}$ とおくと

$\{\widetilde{\mathbb{P}}^{(\alpha)}\}$ は (1.2) をみたす $\mathcal{P}_M(W)$ の *one parameter family* になるから §1 の結果よりその構造がわかったことになる. 特に $\mathcal{P}_D(W)$ の *one parameter family* の構造は Th. 1.2 より

Theorem 2.1 *one parameter family* $\{\mathbb{P}^{(\alpha)}\}_{\alpha \geqq 0} \subset \mathcal{P}_D(W)$ で (2.1) をみたすものは 3つの *parameter* $a \geq 0$, b, $c \geq 0$ で定まる: $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ は *local generator*

$$L_\alpha = \frac{a}{4}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{bx}{2}\frac{d}{dx} + \frac{2c\alpha - a}{4x}\frac{d}{dx}, \tag{2.2}$$

かつ boundary 0 が $\begin{cases} \alpha = 0 & \text{のとき trap} \\ \alpha > 0 & \text{のとき reflecting or entrance} \end{cases}$

で定まる $[0, \infty)$ 上の *diffusion process* である.

Proof $\widetilde{\mathbb{P}}^{(\alpha)}$ が Th. 1.2 のそれ, *i.e.*

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$\widetilde{L}_\alpha = ax\frac{d^2}{dx^2} + (bx + c\alpha)\frac{d}{dx} \quad , \qquad \mathcal{D}(\widetilde{L}_\alpha) = \mathcal{C}_0^2[0, \infty)$$

の生成する *diffusion* なるとき，$\mathbb{P}^{(\alpha)}$ が上のものになることは，$\widetilde{\mathbb{P}}^{(\alpha)}$ を座標変換 $x \longmapsto x^{\frac{1}{2}}$ でうつしたものだから，簡単な計算で確かめうる．

(*q. e. d.*)

簡単のため $a = 2$，$c = 1$ とおこう．すると

(2.3) $$L_\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2} + bx\frac{d}{dx} + \frac{\alpha - 1}{x}\frac{d}{dx}\right) \quad , \qquad \alpha \geqq 0$$

したがって $b = 0$ のとき $\{\mathbb{P}^{(\alpha)}\}_{\alpha \geqq 0}$ が *Bessel diffusions* になる．又，例えば $b < 0$ とすると，対応する *one parameter family* $\{\mathbb{P}^{(\alpha)}\}$ において α が *positive integer* n に等しいとき これは n 次元 *Ornstein-Uhlenbeck Brownian motion* *i. e.* 1 次元 *Ornstein-Uhlenbeck Brownian motion* の n 直積の *radial part* に等しい．実際その *generator* は

(2.4) $$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + b\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

であるから，その *radial part* は丁度 L_n になる．(2.1) をみたす *one-parameter family* が本質的に (2.3) で与えられるということは，原点のまわりで *rotation invariant* で，かつ

$$\sum_{i=1}^{n} a(x_i)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

の形の作用素が本質的に (2.4) の形のものにかぎることと密接な関係があると思われる．

§3. Bessel diffusion の time inversion に関するある不変性とその応用

Bessel diffusions $\{\mathbb{P}^{(\alpha)}\}_{\alpha \geqq 0}$; *i. e.* (0.1) で与えられる *diffusions* が (2.1) をみたすことを応用して，次の定理が証明できる．

Theorem 3.1 $\mathbb{P}^{(\alpha)} = \{X_t, P_x^{(\alpha)}\}$ を *index* α ($\alpha > 0$) の *Bessel diffusion* とする．このとき

$\{X_t\}$ と $\{tX_{\frac{1}{t}}\}$ は $P_0^{(\alpha)}$ に関し *equivalent*．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

Proof　まず，αが positive integer n のときは，1次元 Brown 運動の n-independent copies $B_1(t), \cdots, B_n(t)$ $(B_i(0)=0)$ によって

$$X_t = \sqrt{B_1^2(t)+B_2^2(t)+\cdots+B_n^2(t)} \tag{3.1}$$

と表現される．よく知られているように，1次元 Brown 運動 B_t $(B(0)=0)$ に対しては $\{B(t)\}$ と $\{tB(\frac{1}{t})\}$ は同じ process になる：実際両者とも centered Gaussian で covariance が $\min(t,s)$ で与えられる．したがって定理の主張は明らかに $\alpha=n$：integer，のときになりたつ．次に n, m を正整数とし $Y_1(t), \cdots, Y_m(t)$ を $P_0^{(\frac{n}{m})}$ にしたがう m-independent copies とする．すると

$$\mathbb{P}^{(n)} = \underbrace{\mathbb{P}^{(\frac{n}{m})} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}^{(\frac{n}{m})}}_{m} \quad \text{より}$$

$$X_t = \sqrt{Y_1^2(t)+Y_2^2(t)+\cdots+Y_m^2(t)}$$

は $P_0^{(n)}$ にしたがう確率過程を定義する

$$tX_{\frac{1}{t}} = \sqrt{[tY_1(\tfrac{1}{t})]^2+[tY_2(\tfrac{1}{t})]^2+\cdots+[tY_m(\tfrac{1}{t})]^2}$$

であり，かつ $\{tY_i(\frac{1}{t})\}$ が独立同分布であるから $\{X_t\} \overset{\mathcal{L}}{\sim} \{tX_{\frac{1}{t}}\}$ *) より明らかに $\{Y_i(t)\} \overset{\mathcal{L}}{\sim} \{tY_i(\frac{1}{t})\}$ がなりたつ．故に定理の主張は $d=\frac{m}{m}$ のときに証明された．一般の $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ のときは $P_0^{(\alpha)}$ の α に関する連続性より直ちに証明される．　q.e.d.

尚，参考のため Th.3 1 の直接的な別証明もあげておこう．diffusion $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ の Lebesgue measure に関する transition probability density が

$$p(t,x,y) = \frac{\exp[-(x^2+y^2)/2t}{t(xy)^{\frac{\alpha}{2}-1}}\, y^{\alpha-1} I_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{xy}{t}\right) \tag{3.2}$$

とかけること（cf. [1] p.155, [3]）を用いる．ここで

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \Big/ n!\,\Gamma(\nu+n+1) \qquad (\nu > -1)$$

は変形 Bessel 関数．$\tilde{I}_\nu(x) = x^{-\nu} I_\nu(x)$ とおくと $\tilde{I}_\nu(x)$ は $\tilde{I}_\nu(0) > 0$ なる entire function になる．(3.2) は

*) $\overset{\mathcal{L}}{\sim}$ は process の equivalence をあらわす．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(3.3) $$p(t,x,y)=exp\left[-(x^2+y^2)/2t\right]t^{-\frac{\alpha}{2}}y^{\alpha-1}\tilde{I}_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{xy}{t}\right).$$

今, $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$, $a_1, a_2, \cdots a_n \in \mathbb{R}^+=[0,\infty)$ とする.
すると

(3.4) $$P_0^{(\alpha)}[X(t_1)\in da_1,\ X(t_2)\in da_2,\cdots,\ X(t_n)\in da_n]$$

$$=p(t_1,0,a_1)\,p(t_2-t_1,a_1,a_2)\cdots\ p(t_n-t_{n-1},a_{n-1},a_n)\,da_1\,da_2\cdots da_n$$

$$=exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{t_1}+\frac{a_1^2+a_2^2}{t_2-t_1}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2+a_n^2}{t_n-t_{n-1}}\right)\right]$$

$$\times\{t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})\}^{-\frac{\alpha}{2}}(a_1a_2\cdots a_n)^{\alpha-1}$$

$$\times\tilde{I}_{\frac{\alpha}{2}-1}(0)\,\tilde{I}_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{a_1a_2}{t_2-t_1}\right)\cdots\ \tilde{I}_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{a_{n-1}a_n}{t_n-t_{n-1}}\right)da_1\,da_2\cdots da_n$$

一方 $Y(t)=tX\left(\frac{1}{t}\right)$ とおいて

(3.5) $$P_0^{(\alpha)}[Y(t_1)\in da_1,\ Y(t_2)\in da_2,\cdots,\ Y(t_n)\in da_n]$$

$$=p\left(\frac{1}{t_n},0,\frac{a_n}{t_n}\right)p\left(\frac{1}{t_{n-1}}-\frac{1}{t_n},\frac{a_n}{t_n},\frac{a_{n-1}}{t_{n-1}}\right)\cdots\ p\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2},\frac{a_2}{t_2},\frac{a_1}{t_1}\right)$$

$$\times(t_1t_2\cdots t_n)^{-1}\,da_1\,da_2\cdots da_n$$

$$=exp\left[-\frac{1}{2}\left\{t_n\left(\frac{a_n}{t_n}\right)^2+\frac{t_n\cdot t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}\left(\left(\frac{a_n}{t_n}\right)^2+\left(\frac{a_{n-1}}{t_{n-1}}\right)^2\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cdots+\frac{t_2t_1}{t_2-t_1}\left(\left(\frac{a_2}{t_2}\right)^2+\left(\frac{a_1}{t_1}\right)^2\right)\right]$$

$$\times\left\{\frac{1}{t_n}\cdot\frac{(t_n-t_{n-1})}{t_nt_{n-1}}\cdot\frac{(t_{n-1}-t_{n-2})}{t_{n-1}\cdot t_{n-2}}\cdots\frac{(t_2-t_1)}{t_2t_1}\right\}^{-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\times\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{t_1t_2\cdots t_n}\right)^{\alpha-1}\tilde{I}_{\frac{\alpha}{2}-1}(0)\,\tilde{I}_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{a_na_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}\right)\cdots\ \tilde{I}_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{a_2a_1}{t_2-t_1}\right)$$

$$\times(t_1t_2\cdots t_n)^{-1}\,da_1\,da_2\cdots da_n$$

$$=exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{t_1t_2}{t_2-t_1}\cdot\frac{a_1^2}{t_1^2}+\left(\frac{t_1t_2}{t_2-t_1}\cdot\frac{1}{t_2^2}+\frac{t_2t_3}{t_3-t_2}\cdot\frac{1}{t_2^2}\right)a_2^2\right.\right.$$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$+\cdots+\left(\frac{t_{n-1}\,t_n}{t_n-t_{n-1}}\cdot\frac{1}{t_n^2}+\frac{1}{t_n}\right)a_n^2\Big\}\Big]\left\{t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})\right\}^{-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\times(a_1a_2\cdots a_n)^{\alpha-1}\,\tilde{I}_{\frac{\alpha}{2}-1}(0)\,\tilde{I}_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{a_1a_2}{t_2-t_1}\right)\cdots\tilde{I}_{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{a_{n-1}a_n}{t_n-t_{n-1}}\right)da_1\cdots da_n$$

故に(3.4)と(3.5)が一致するためには両者の *exponential* の部分が一致すればよいが，簡単な計算で，それは

$$exp\Big[-\frac{1}{2}\Big\{\frac{t_2}{t_1(t_2-t_1)}a_1^2+\frac{t_3-t_1}{(t_2-t_1)(t_3-t_2)}a_2^2+\cdots+\frac{1}{t_n-t_{n-1}}a_n^2\Big\}\Big]$$

と一致することが確かめられる．

以下で *Th. 3.1* の応用例として *Bessel diffusions* とそれに関連する *diffusion* の *path function* の *local property* を調べる． *Motoo* [4] の巧妙な方法を用いると直ちに得られる結果のみであるが，まだどこにも注意してないようなので，ここにまとめておく．

次の定理は本質的に *Motoo* [4] による．(*Motoo* [4] や *Ito-McKean* [1] では一応 $\alpha=n$: *integer* のときにのみのべているが，証明はすべての $\alpha>0$ でそのままなりたつ)

Theorem 3.2 $\mathbb{P}^{(\alpha)}=\{X_t, P_x^{(\alpha)}\}$ を *index* α ($\alpha>0$) の *Bessel diffusion* とする．

(i) *Let* $\varphi(t)\uparrow\infty$ *when* $t\uparrow\infty$. このとき

(3.6) $P_0^{(\alpha)}\{X(t)>\sqrt{t}\,\varphi(t)$ *i.o.* $t\uparrow\infty\}=1$ *or* 0 *according as*

(3.7) $\int^{\infty}\varphi(t)^{\alpha}e^{-\frac{\varphi^2(t)}{2}}\dfrac{dt}{t}=\infty$ *or* $<\infty$.

(ii) *Let* $\psi(t)\downarrow 0$ *when* $t\uparrow\infty$. このとき，$\alpha\geqq 2$ として，

(3.8) $P_0^{(\alpha)}\{X(t)<\sqrt{t}\,\psi(t)$, *i.o.* $t\uparrow\infty\}=1$ *or* 0

according as

(3.9) $\int^{\infty}\psi(t)^{\alpha-2}\dfrac{dt}{t}=\infty$ *or* $<\infty$, $(\alpha>2)$

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$\int^{\infty} \frac{dt}{|\log \psi(t)|\, t} = \infty \quad or \quad < \infty , \qquad (\alpha = 2) .$$

Th. 3.1 を用いるとこの結果は直ちに $t \downarrow 0$ の行動に関するものになる:

<u>*Theorem 3.3*</u>　(i)　*Let* $\varphi(t) \uparrow \infty$ *when* $t \downarrow 0$. このとき

$$(3.10) \qquad P_0^{(\alpha)}\{X(t) > \sqrt{t}\, \varphi(t),\ i.o.\ \ t \downarrow 0\} = 1 \ \ or \ \ 0$$

according as

$$(3.11) \qquad \int_{0+} \varphi(t)^{\alpha}\, e^{-\frac{\varphi^2(t)}{2}} \frac{dt}{t} = \infty \quad or \quad < \infty .$$

(ii)　*Let* $\psi(t) \downarrow 0$ *when* $t \downarrow 0$. このとき, $\alpha \geqq 2$ として

$$(3.12) \qquad P_0^{(\alpha)}\{X(t) < \sqrt{t}\, \psi(t),\ \ i.o.\ \ t \downarrow 0\,| = 1 \ \ or \ \ 0$$

according as

$$(3.13) \qquad \int_{0+} \psi(t)^{\alpha-2} \frac{dt}{t} = \infty \quad or \quad < \infty \quad (\alpha > 2)$$

$$(3.14) \qquad \int_{0+} \frac{1}{|\log \psi(t)|} \frac{dt}{t} = \infty \quad or \quad < \infty \qquad (\alpha = 2) .$$

次に $X(t)$ を *index* α の *Bessel process* $(\alpha > 0)$ として

$$(3.15) \qquad Y(t) = \left(\frac{X(t)}{2}\right)^2$$

とおくと, $Y(t)$ は $[0, \infty)$ 上の *CBI-difusion* で

$$(3.16) \qquad L = \frac{1}{2}\left(x \frac{d^2}{dx^2} + \beta \frac{d}{dx}\right) , \qquad \mathcal{D}(L) = C_0^2[0, \infty)$$

より生成されるものになる. 但し $\beta = \frac{\alpha}{2}$. 故にこの $Y(t)$ *process* に対し

<u>*Cor. 1*</u>　(i)　*Let* $\varphi(t) \uparrow \infty$ *when* $t \downarrow 0$. このとき

$$(3.17) \qquad P_0\{Y(t) > t\, \varphi(t),\ i.o.\ \ t \downarrow 0\} = 1 \ \ or \ \ 0$$

according as

$$(3.18) \qquad \int_{0+} \varphi(t)^{\beta}\, e^{-2\varphi(t)} \frac{dt}{t} = \infty \quad or \quad < \infty .$$

(ii)　*Let* $\psi(t) \downarrow 0$ *when* $t \downarrow 0$. このとき, $\beta \geqq 1$ として

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(3.18) $\quad P_0\{Y(t) < t\psi(t),\ \text{i.o. } t\downarrow 0\} = 1 \text{ or } 0$

according as

(3.19) $\quad \int_{0^+} \psi(t)^{\beta-1}\frac{dt}{t} = \infty \quad \text{or} \quad < \infty, \qquad (\beta > 1)$

$\quad \int_{0^+} \frac{1}{|\log \psi(t)|}\frac{dt}{t} = \infty \quad \text{or} \quad < \infty, \qquad (\beta = 1).$

次に $X(t)$ を index α の Bessel diffusion とし $(0<\alpha<2)$

(3.20) $\quad Z(t) = 2^{\frac{2-\alpha}{2}}(2-\alpha)^{-(2-\alpha)}X(t)^{2-\alpha}$

とおく．すると $Z(t)$ は $[0,\infty)$ 上の diffusion でその local generator が

(3.21) $\quad L = x^{1-\gamma}\frac{d^2}{dx^2}\ ,$

かつ 0 が reflecting

なるものである．但し $\gamma = \frac{\alpha}{2-\alpha}$ で $0<\alpha<2$ のとき $(0,\infty)$ をうめつくす。

したがってこの $Z(t)$-process に対し

Cor. 2 Let $\varphi(t)\downarrow 0$ and $\varphi(t)^{1+\gamma}t^{-1}\uparrow\infty$ when $t\downarrow 0$.

このとき

(3.22) $\quad P_0\{Z(t) > \varphi(t),\ \text{i.o. } t\downarrow 0\} = 1 \text{ or } 0$

according as

(3.23) $\quad \int_{0^+} t^{-\frac{1+2\gamma}{1+\gamma}}\varphi(t)^{\gamma}\exp\left[-\frac{\varphi(t)^{1+\gamma}}{t(1+\gamma)^2}\right]dt = \infty$

or $< \infty$.

又は，

(3.24) $\quad \varphi(t) = \left[(1+\gamma)^2 t\log\frac{1}{\rho(t)}\right]^{\frac{1}{1+\gamma}}$

とおいて（ここで $\rho(t)\downarrow 0$ when $t\downarrow 0$） (3.22)は

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

$$(3.25) \qquad \int_{0+} \frac{1}{t}\left(\log \frac{1}{\rho(t)}\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} \rho(t)\, dt = \infty \quad or \quad < \infty$$

と同値である。

Cor. 2 は, Wentzell [5] の結果を完成する。

§4. 補　足

α 次 Bessel diffusion $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ の transition probability density が (3.2) で与えられることと $\{\mathbb{P}^{(\alpha)}\}_{\alpha \geqq 0}$ が (2.1) の関係をみたすことから Bessel 関数に関するある公式が証明できる:

すなわち $\mathbb{P}^{\alpha}$ の transition density を $p^{\alpha}(t, x, y)$ とすると (2.1) より $\forall f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^{+})$ に対し

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})\; p^{\alpha}(t, x_1, y_1)\, p^{\beta}(t, x_2, y_2)\, dy_1\, dy_2$$

$$= \int_0^\infty f(y)\, p^{\alpha+\beta}(t, \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, y)\, dy$$

がなりたつ。この式より直ちに p^{α} は次の関係式をみたす:

$$r \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\alpha}(t, x, r\cos\theta)\, p^{\beta}(t, y, r\sin\theta)\, d\theta$$

$$= p^{\alpha+\beta}(t, \sqrt{x^2+y^2}, r), \qquad r > 0, \qquad x, y \in \mathbb{R}^{+}$$

ここで公式 (3.2) を代入し, 整理すると, 我々は変形 Bessel 関数 I_ν に関する次の identity を得る:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{\frac{\alpha}{2}} (\sin\theta)^{\frac{\beta}{2}}\, I_{\frac{\alpha}{2}-1}(x\cos\theta)\, I_{\frac{\beta}{2}-1}(y\sin\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{x^{\frac{\alpha}{2}-1}\, y^{\frac{\beta}{2}-1}}{(\sqrt{x^2+y^2})^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-1}}\; I_{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-1}(\sqrt{x^2+y^2})$$

この公式は (通常は Bessel 関数 J の方で書かれているが) "Sonine の第2積分" として知られている。(Cf. G. Watson: A treatise on the theory of Bessel functions, p. 376).

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

REFERENCE

[1] K. Ito *and* H. P. McKean Jr. : *Diffusion processes and their sample paths, Springer, Berlin, 1965*

[2] K. Kawazu *and* S. Watanabe: *Branching processes with immigration and related limit theorems, Теорця Вероят. и её Прим. XVI (1971) 34-51.*

[3] S. A. Molchanov *and* E. Ostrovskii: *Symmetric stable processes as traces of degenerate diffusion processes, Theory of Prob. and its Appl. 14 (1969) 128-131.*

[5] A. D. Венцель: *О локальном поведении траекторий диффузионного процесса, Всесюзн. совещ. по теории вероят. и матеп. статистике, Ереван (1960) 236-238.*

[6] T. Yamada *and* S. Watanabe: *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. 11 (1971) 155-167.*

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

A General Convergence Theorem for the Numerical Function and the Nonstationary Stochastic Processes

川 畑 茂 徳

はじめに

フーリエ級数やフーリエ積分の理論において，関数 $f(x)$ に関する特異積分による表現定理が重要な位置をしめている．これらを一般化した次の *limit relation* について考えよう．

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)K(nu)\,du = f(x)\int_{-\infty}^{\infty}K(u)\,du\,.$$

通常の関数についてこの関係式はよく知られており，*S. Bochner* [1], *S. Bochner and S. Izumi* [2], *S. Izumi* [3] で論じられている．*Stochastic process* の場合に対応する定理は *T. Kawata* [4], [5] によって示された．この小文ではそれらの一般化をとりあつかう．

§1. 定 義

i) 関数 $M(u)$ が次の式で表現されるとき *N-function* と呼ぶ，

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)\,dt,$$

ここで $p(t)$ は右連続，非減少な関数 $(t\geqq 0)$ で *positive* $(t>0)$ であり，$p(0)=0$，$p(\infty)=\lim_{t\to\infty} p(t)=\infty$ の条件を満足する．関数 $q(s)$ $(s\geqq 0)$ を

$$q(s) = \sup_{p(t)\leq s} t$$

で定義すると，関数 $q(s)$ は関数 $p(t)$ と同じ性質をもつことが容易に示される．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

関数 $M(u)=\int_0^{|u|}p(t)\,dt$ と $N(v)=\int_0^{|v|}q(s)\,ds$ は互いに complementary な N-function と呼ばれる．$M(u)=|u|^p/p$，$N(v)=|v|^q/q$，ここに $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，は互いに complementary な N-function の１つの例である．

ii) N-function $M(u)$ について，次の不等式が成立する正の定数 c, u_0 が存在するとき Δ'-condition を満足するという．

$$M(uv)\leq cM(u)M(v) \qquad (u,v\geqq u_0).$$

§2. numerical function 及び nonstationary stochastic processes についての収束定理

定理 1

$M(u)$, $N(v)$ は互いに complementary な N-function とする．

(2.1) $$\int_{-\infty}^{\infty}M(f(u))\,\frac{du}{1+|u|^{1+\alpha}}<\infty \qquad \alpha\geqq 0,$$

(2.2) $f(u)$ は $u=x$ で連続である，

(2.3) $$\int_{-\infty}^{\infty}|K(u)|\,du<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}N(u^{1+\alpha}K(u))\,\frac{du}{1+|u|^{1+\alpha}}<\infty,$$

関数 $f(u)$ が上の３条件を満足するならば

(2.4) $$\lim_{n\to\infty} n\int_{-\infty}^{\infty}f(x+u)\,K(nu)\,du=f(x)\int_{-\infty}^{\infty}K(u)\,du.$$

注意 - 1

$M(u)=|u|^p/p$ $(p>1)$ のとき，定理 1 は若干修正すれば次のようになる．

(2.1)′ $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(u)|^p}{1+|u|}\,du<\infty \qquad (p>1,\ \alpha=0),$$

(2.2) $f(u)$ は $u=x$ で連続である，

(2.3)′ $$\int_{-\infty}^{\infty}|K(u)|\,du<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|u^{q-1}K^q(u)|\,du<\infty,$$

ここに $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，ならば (2.4) は成立する．

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

系－1

(2.1) $\int_{-\infty}^{\infty} M(f(u)) \frac{du}{1+|u|^{1+\alpha}} < \infty \qquad \alpha > 0$,

(2.2) $f(u)$ は $u=x$ で連続である，

(2.3)″ $|K(u)| \leqq K_0(u)$, $\int_{-\infty}^{\infty} K_0(u)\,du < \infty$ なる単調減少な関数が存在して $|u| \to \infty$ のとき $K_0(u) = O(|u|^{-(1+\alpha)})$ ならば（2.4）が成立する。

確率過程 $X(x, \omega)$, $-\infty < x < \infty$, $\omega \in \Omega$ が次の条件を満足する場合を考える.

i) 可測でかつ可分

ii) 任意の x について $EX(x, \omega) = 0$

iii) covariance 関数

$$\rho(s, t) = EX(s, \omega)\overline{X(t, \omega)}$$

は $-\infty < s,\ t < \infty$ で連続である.

このとき定理 1 に対応して次の定理が成立する.

定理 2.

$M(u)$, $N(v)$ は互いに complementary な N-function とする.

(2.5) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(\rho(s,t))}{(1+|s|^{1+\alpha})(1+|t|^{1+\alpha})}\, ds\,dt < \infty \qquad (\alpha \geqq 0)$,

(2.3) $\int_{-\infty}^{\infty} |K(u)|\,du < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} N(u^{1+\alpha}K(u)) \frac{du}{1+|u|^{1+\alpha}} < \infty$,

(2.6) 関数 $N(v)$ は Δ'-condition を満足する.

このとき任意の x について

(2.7) $\lim_{n\to\infty} n\int_{-\infty}^{\infty} X(x+u, \omega)\,K(nu)\,du = X(x, \omega)\int_{-\infty}^{\infty} K(u)\,du$

が成立する．ここで $\lim_{n\to\infty}$ は L^2 norm $E^2|\cdot|$ による収束を表わす.
証明は numerical function の場合と同様にできる.

系－2

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

(2.5) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M(\rho(s,t))}{(1+|s|^{1+\alpha})(1+|t|^{1+\alpha})}\,ds\,dt < \infty \qquad \alpha > 0$$

(2.3)″ $|K(u)| \leqq K_0(u)$, $\int_{-\infty}^{\infty} K_0(u)\,du < \infty$ なる単調減少な関数が存在して $|u| \to \infty$ のとき $K_0(u) = O(|u|^{-(1+\alpha)})$ ならば，任意の x について (2.7) が成立する。

Bibliography

1. S. Bochner, *Verlesungen über Fouriersche Integrale* (1932)
2. S. Bochner and S. Izumi, *Some general convergence theorems*, *Tôhoku Math. J.* 42 (1936)
3. S. Izumi, *A general convergence theorem*, *Proc. Imp. Acad. Japan* XI (1935)
4. T. Kawata, *Some convergence theorems for stationary processes*, *Ann. Math. Statist.* 30 (1959), 1192-1214
5. T. Kawata, *Fourier analysis of nonstationary stochastic processes*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 118 (1965), 276-302
6. M. A. Krasnosel'skiĭ and Ya. B. Rutickiĭ, *Convex functions and Orlicz spaces* (1961)

Sem. on Probab.
Vol.40 1973年
P1-98

1973年6月発行　確率論セミナー