Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

SEMINAR on PROBABILITY

VOL. 35

拡散過程の局所構造

池 田 信 行　　渡 辺 信 三

1971

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

目　　次

≪序≫

比較的に早くから研究されて来たマルコフ過程論の1分野に拡散過程の研究がある。このノートはこゝ数年来，その拡散過程について時に応じ考えて来たことをまとめたものだが，まだまとまりをもつところまでは到っていない。どちらかというと中間的なもので自分で保存しておく資料とでも言うべきものであるがSeminar on Probabilityの趣旨の中にはその種のものも積極的に公やけにして行くということがあったと思うので，この段階であえて書いてみた。そのような事情で内容も一貫性に欠け未成熟な点があり，説明なしには全体の趣旨がわかりにくいと思うので，本文に進む前にその説明をすることにする。

Wiener，Kolmogorov，Lévy等に始まるマルコフ過程論で比較的にはっきりした形をとゝのえて来ているのはポテンシャル論のマルコフ過程による定式化の部分である。それに比べて特定のマルコフ過程の確率論的にきわだった特徴を出発点にした解析の諸問題との関連はそれほどまでにはしらべられていない。この種の研究はLévyの研究に多くの源を持っていると考えられているが，その舞台としては拡散過程がふさわしい。いまわれわれが注目することは“道”＝“標本関数”の局

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

所的な挙動とその性質の解析学への反映形式である。例えば確率積分に関する伊藤の公式((1.1)式参照)とそれから容易に導かれる諸公式みたいなものがわれわれの興味を呼ぶことの1つである。

一般にマルコフ過程を構成する基本要素には(1)Brown運動的なもの(2)飛躍による変化(3)直線運動的なものの3種類がある。この事情は加法過程に関するLévy一伊藤の分解や加法的汎関数の分解(本尾一渡辺〔44〕,Kneight〔31〕)をみれば良くわかる。その3つの中で拡散は(1)と(3)を併せたものだが今考えていることは(1)の型の要素を中心にするものまたはそれと(3)の型の要素のからみあいである。そこでの基本的特徴は道が"有界変動でない連続関数"をなしていることである。それらに関する法則としては道の連続性についての上級クラス,下級クラスに関する0−1法則が有名だが,関連する量としてはmartingale additive functionalの分散やLévyが$\xi\sqrt{dt}$の記号で書いたBrown運動に関する stochastic differential 等がある。この種のものの中からどれを出発点にすれば后のものを自然に導き体系化することが出来るかゞ問題だが現在の所その点についての考えをかためる決定的な手がかりはないようである。しかしそれらを考える足場がみたすべきものとしてはつぎのことが考えられる。

(i) 拡散過程は局所化出来るものだから出発点にする特性量は局所的に決まるべきものである。

(ii) 有界変動でない変化の法則を支配する量であるから,変化の勾配の概念みたいなものより,振動のエネルギー状態を反映するものが直接的な意味を持つだろう。

まづ局所的な特性量としては拡散過程の生成作用素が考えられる。抽象的にはそれで充分なのだが,問題は目的に向っての解析に耐え得る形でどうして把握するかである。一般には生成作用素は拡散過程の場合は局所的で最大値原理をみたすものとして知られている。しかし連続関数の空間で考えても2乗可積分な関数の作るHilbert空間で考えても定義域の決定に大きな難点というかむづかしさがある。そこでその種の作用素を双線型形式としてみる解析での標準的な考えを取入れ作用素の対称性を仮定すればその双線型形式に対応するHilbert空間はいわゆる L_2−Dirichlet空間になる。このように言え変えるとその空間の中にSchwartzの空間$\mathcal{D}$がふくまれることを仮定するのは自然なことがわかる。そのことと最大値原理や局所性を併せるとBeurling−Deny〔3〕の結果よりつぎのことが言える。双線型形式εは

$$\varepsilon(u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,\nu_{ij}(dx)+\int u(x)v(x)k(dx)$$

と表わされ,生成作用素Hは

$$H:\ \mathcal{D}\to\mathcal{D}'$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

と理解出来る。しかも局所的に定まる，対称性の基準になるRadon測度m(dx)，非負定符号なRadon測度の行列(ν_{ij}(dx))，massの減少を示すRadon測度k(dx)の組

$$\{ m , (\nu_{ij}) , k \}$$

でHは定まる。さらにHは(楕円型)測度係数の2階微分作用素とみることが出来る。

生成作用素の上に示した分解と振動のエネルギーとの関連が先にのべたii)の内容を示す。古典的な拡散過程についてLévy〔37〕(pp. 64〜65)は生成作用素の計算を

$$\left.\begin{array}{l}\text{stochastic differential}\\ \text{の変換公式}\end{array}\right\} \rightarrow \text{生成作用素}$$

の道筋で行なっている。(なおLévyの結果には形式に不充分さがある)。このことは伊藤のstochastic differential equationの方法に見られるように2階の楕円型偏微分作用素に対して，2階の係数行列のpostitive symmetric rootを取って或る種の1階の常微分作用素を対応させることに関連している。(Mckean〔39〕)。Skorohod〔52〕は一般の拡散過程についてもLévyのこの考えを中心において議論を進めることを提案している。このことに関連して実際このノートで多くの例について下図のような対応を実証する。

$$\begin{tikzcd}
(dm, (\nu_{ij}), dk) \arrow[r, dashed, leftrightarrow, "(d)"] \arrow[d, leftrightarrow, "(a)"] & \text{stochastic differential の変換公式} \arrow[d, leftrightarrow, "(c)"] \\
L_2\text{-Dirichlet 空間 (双線型形式)} \arrow[r, leftrightarrow, "(b)"'] & \text{確率積分の変換公式}
\end{tikzcd}$$

(a)は先にのべたことであり，(c)はstochastic differentialの定義に用いられる対応である。(b)の対応がこのノートで示すことでそれはLévyの考えの1つの形である。さらにそれはSkorohod〔52〕の考えとも本質的に一致する。しかしながらこれで目標に近づいたようには思えるが必ずしも満足すべきものではない。Lévyの原形がそうであるように，望ましいのはstochastic differentialの局所的な定義から始まって $\xleftrightarrow{(d)}$ を通して(dm, (ν_{ij}), dk)とつながることである。$\xleftrightarrow{(b)}$ の関係はその積分として理解するのがより目標に近いと思われる。残念ながら現在のところそこまでは進み得ない。この方向の考えの自然さを知るにはHörmander〔21〕の研究に関連する§9の例9.5等も参考になる。

拡散過程の研究が1つ1つについて行なわれるのは不自然である。当然なことながら，拡散過程

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

のクラス分けの方法とその各クラスにおける典型についての研究に分けられて行く。現在広く知られているクラスは“到達確率系”による同値類である。しかしそのわけ方はこまかすぎる。拡散過程であることおよびその基本的特徴は状態空間の位相同型写像で変らない。そうだとすればそのような写像で同じ到達確率系を持つものにうつれるときは同値と考えるのが自然である。それはまさにIto－McKean[26]で導入された“Similarity”による同値類の決定である。ここで(dm, (ν_{ij}) , dk)から similarity にどれだけのことを引出せるかと，similarity に関し不変な特性，量の決定が問題として出て来る。§5～8までの準備を基礎に§9で similarity に関する不変な性質を考える。例えば公理的ポテンシャル論で使う“ellipticity” も不変性として定めることが出来る。退化した場合もこめていくつかの例を§9で示す。またSkorohod[53]の“rank”の概念もやゝ変形してそのような不変量として導入する。また R^2 の場合は§9で導入される“調和示性数”も不変量として役に立つ。この量は簡単に言えばつぎのようなものである。状態空間Dの各点xに対して，x以外の所で拡散過程Xに関し調和になっている有界関数の germ に適当なXに関連した同値関係を入れた空間を対応させる。その空間の次元が目的の量である。この量は oblique reflection の境界条件を持った調和関数の空間における argument principle として知られていることに関連している。またこれは対応するBrown運動の境界点への近づき方としてDynkin[13]やMotoo[43] によって確率論的にも詳しく解析されている。oblique reflectionに関連しては調和示性数は高々2であるが，実際2の時は道がその点へ2つの方向から tangentiall に近づくことがDynkin[13] で知られている。一方古典的な一様楕円型作用素に関して一点を除いた領域における有界調和関数を求めることにも関係している。この事実は神田[29] によって fine topology による similarity の議論に利用されたが，連続係数とすれば対応する拡散過程の道の局所的性質と密接に関連して調和示性数が0，1，∞の場合があることが示される。これら通常の微分作用素や境界条件に対応して出て来る調和示性数が0でない点は孤立点になっているが，そうでない場合もある。そのことを見るためには通常の微分作用素でない生成作用素の時(dm, (ν_{ij}) , dk)を指定して拡散過程の存在をまづ示す必要がある。

特性量を与えた時の拡散過程の構成は上の similarity を離れても重要であるが，現在まで比較的良く知られているのは直積の方法と Ito－McKean[26] の skew－product の方法である。この方法だけでも古典的拡散過程と本質的に違ったものが構成される。例えば R^2 の場合である線分上のすべての点で調和示性数が2になるものが作れる。なお解析的に言えば skew－product の方法は Weutzell[56] によって境界条件の問題で利用されたものになっている。さらに1つの変数を除いて残りでは Fourier 変換をほどこして常微分方程式に帰着出来る問題でしばしば用いられているも

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

のに対応している。これらに関しては§6，§7で詳しくのべる。また類似の対象に関し福島〔17〕は L_2－Dirichlet空間の直接的な構成を行なっている。skew－productの方法は確率微分方程式を使って変数係数まで拡張することも出来る（Ikeda〔24〕）。§8ではこれらの方法で作れない拡散の新たな構成法を§5の事実を基礎に与える。そこではIto〔28〕の方法が用いられるが，これはエネルギー測度とその性質が良くわかっている拡散過程を“dominate”する拡散過程の構成にとって有力な方法と思われる。なおこの§8で構成された拡散を用いれば調和示性数が任意の正整数をとる点を持つ拡散の存在が言える。しかしながら構成に関して全体的立場で言えば個々のものの具体性に強く依存した方法しか知られておらず，一般的な構成法は古典的な場合を除いて知られていない。

先に使ったdominateの概念について言えば，例えばBrown運動をdominateするものは，一様楕円型の生成作用素をもつ拡散過程のクラスの拡張になっている。この概念を始め拡散過程の性質を対応する L_2－Dirichlet空間の相互関係でみることは興味ある事実を引出すように思えるが，現在のところそれほど解明が進んでいるとは言えない。例えば空間の和についてすら良くわからない。おゝまかに言えば空間の和はその空間の核の和，すなわち生成作用素の和であるが，それだけから何にが引出せるかが問題である。

§4は調和座標に関連したことを取扱っている。“road map”＝“到達確率系”を調和座標系とエネルギー測度系（ν_{ij}）に分解して決定しようとしたのはSkorohod〔52〕の考えである。こゝで問題になるのは調和座標の存在とそれに対応するmartingale additive function が相互に直交するものがどんな時にsimilar なクラスの中でとれるかということである。このいづれについても現在の所，さだかな見通しはない。例えば后者のことでも古典的微分作用素の時ですら適当な局所座標による対角化の可能性の問題はそれほど容易なことでなく，可能性自体が状態空間の次元に関連して来る。（R^2 の時については§4またはCourant－Hilbert〔10〕，Ⅲ，Ⅳ章参照）。前者についてはSkorohod〔53〕のdrift の変換による座標の調和化と，次元を逐次下げて構造を決める方法を結合させる考えがあるが，まだ論理の筋に難点があり構想は正当化されていない（小林〔32〕)。

こうして見て来ると本質的には測度係数の楕円型2階偏微分作用素の問題に帰着される拡散過程も確率過程論としてみればほとんど手つかずの状態であることがわかる。その意味では筋道を追った議論は困難な段階だが，現在までにわかっているだけでもこれまでの解析に出て来るものと違った様相のものの芽が見られる。これらはこれまでのマルコフ過程論で体系化されたものとやゝ異なった方向のもので，これから整備しなくてはならない概念や技術も多いが，全く未知のことでなくいくつかの側面はすでに顔を表面に出していると言えるだろう。このノートはそれらを未整理なま

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

まにならべた形になっている所が多い。その意味で始めにのべたように途中の段階のものである。

なおこのノートは上のような趣旨から拡散過程の研究にとっての標準的な入門に都合のよい形になっておらず，こゝで目標にした問題に便利なことを第一義的に考えている。そのためにそれ自身で閉じておらず引用の形ですましたことが非常に多い。

最后にわれわれがこの問題に興味を持ってからこゝ数年にわたって多くの討論の機会を持ち有益な助言を得た本尾実氏にこの機会を利用して心から礼をのべたい。また福島正俊氏と国田寛氏に種々の助力を得たことを感謝したい。

1971．8．15

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

§1 拡散過程の定義と準備

1.1 Markov過程

Markov 過程の定義と基本的性質をまとめておく。くわしく知りたい読者はBlumenthal－Getoor〔4〕（ここでは，記号は少し異なるが本質的違いはない）を参照されたい。

次の対象があたえられたとする。

(1) $(E, \mathcal{E})$：ある可測空間；これはMarkov 過程の状態空間（state space）になるもので，通常はEは，可算 open base をもつ locally compact Hausdorff space， $\mathcal{E}$ はEの open set を含む最小の σ－field $\mathcal{B}(E)$ として与えられる。

(2) $(\Omega, \underline{\underline{M}}, \underline{\underline{M}}_t,\ t\in[0,\infty))$：$(\Omega, \underline{\underline{M}})$ はある可測空間 $\underline{\underline{M}}_t$，$t\in[0,\infty)$ は $\underline{\underline{M}}$ の sub σ－fields の increasing family.

(3) $X_t(\omega), t\in[0,\infty), \omega\in\Omega$：$[0,\infty)\times\Omega$ からEへの写像

$$(t,\omega)\in[0,\infty)\times\Omega \longmapsto X_t(\omega)\in E$$

で $\underline{\underline{M}}_t$ に adapted；すなわち，各 $t\in[0,\infty)$ に対し写像 $\omega\longmapsto X_t(\omega)$ は $\underline{\underline{M}}_t/\mathcal{E}$－可測，（すなわち，$A\in\mathcal{E}$ に対して $X_t^{-1}(A)\in\underline{\underline{M}}_t$）

(4) θ_t，$t\in[0,\infty)$ ：Ω から Ω への写像のあつまり，

(5) P_x，$x\in E$ ：$(\Omega, \underline{\underline{M}})$ 上の probalility measure のあつまり，

このとき次の記号を導入する

$\underline{\underline{N}}_t=\sigma\{X_s; s\leq t\}$：$X_s$，$s\leq t$ を可測にする最小の σ－field

$\underline{\underline{N}}=\sigma(X_s; s\in[0,\infty))$

明らかに $\underline{\underline{N}}_t\subset\underline{\underline{M}}_t$ かつ X_t は $\underline{\underline{N}}_t$ に adapted である。

定義 1.1 上で与えられた対象のあつまり $X=(\Omega, \underline{\underline{M}}, \underline{\underline{M}}_t, X_t, \theta_t, P_x)$ が次の性質（M.1）－（M.4）をもつとき，Xを状態空間 $(E, \mathcal{E})$ 上のMarkov過程という。

（M.1） $X_{t+h}(\omega)=X_t(\theta_h\omega)$ ，$\forall\omega\in\Omega$，$\forall t, h\in[0,\infty)$，

（M.2） $P_x[\omega: X_0(\omega)=x]=1$ ，$\forall x\in E$

（M.3） $x\longmapsto P_x[\omega: X_t(\omega)\in A]$ は（各 $t\in[0,\infty)$，$A\in\mathcal{E}$ に対し）$\mathcal{E}$－可測，

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

（M. 4）（Markov性）　$P_x[X_{t+s}\in A\,|\,M_t]=P_{X(t)}[X_s\in A]$　a. s.

（$X_t(\omega)$をしばしば$X(t,\omega)$とか$X(t)$というようにかく）

以下ではしばしばMarkov過程は　$X=(X_t, P_x)$とか$\{X_t; t\geqq 0\}$などと略記する。

$x\in E$がMarkov過程Xのtrapであるというのは，その点に到達したらはなれない，すなわち$^{\forall}y$に対し，

$$P_y[\{\omega ;\ X_s(\omega)=x \Longrightarrow X_t(\omega)=x \quad \text{for all } t\geqq s\}]=1$$

をみたすことである。一つのtrap △を特別視し，△へ到達したらMarkov過程の粒子は消滅したと考えると便利なことが多い。そのような△を終点（terminal point，又は死点，ということもある），△への到達時間$\zeta(\omega)$：

$$\zeta(\omega)=\inf\{t : X_t(\omega)=\triangle\}$$

を生存時間（life time，又はkilling timeということもある）という。（このノートでは常に$\inf\phi=\infty$とおく），

次のことは定義 1.1 より容易にたしかめることができる。

(i)　θ_hは$\underline{\underline{N}}_{t+h}/\underline{\underline{N}}_t$　－可測したがって特に$\underline{\underline{N}}/\underline{\underline{N}}$　－可測，

(ii)　任意の$B\in\underline{\underline{N}}$に対し　$x\longmapsto P_x(B)$はε－可測，

μを(E, ε)上のprobalility measure とする。　$B\in\underline{\underline{N}}$に対し

$$P^{\mu}(B)=\int_E P_x(B)\,\mu(dx)$$

とおくとこれは$(\Omega, \underline{\underline{N}})$上のprobalility measureである。

$\underline{\underline{N}}$の$P^{\mu}$によるcompletion　$\underline{\underline{N}}^{P^{\mu}}$を考え

$$\overline{\underline{\underline{N}}}=\bigcap_{\mu\in\mathfrak{M}}\overline{\underline{\underline{N}}}^{P\mu}\quad(\mathfrak{M}\text{は}(E, \varepsilon)\text{上のprobalility measureの全体})$$

とおく　又

$$\overline{\underline{\underline{N}}}_t=\{A\in\overline{\underline{\underline{N}}};\quad \mu\in\mathfrak{M},\ ^{\exists}A_\mu\in\underline{\underline{N}}_t\ ;\ P_\mu(A\ominus A_\mu)=0\}$$

（$\ominus$は対称差をあらわす）

とおく。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

一方 $\underline{\underline{M}}$ の P_x による completion $\overline{\underline{\underline{M}}}^{P_x}$ を考え，

$$\overline{\underline{\underline{M}}} = \bigcap_{x\in E} \overline{\underline{\underline{M}}}^{P_x} ,$$

$$\overline{\underline{\underline{M}}}_t = \{ A \in \overline{\underline{\underline{M}}} ; \quad x \in E , \quad \exists A_x \in \underline{\underline{M}}_t ; P_x (A \ominus A_x) = 0 \}$$

とおく。　明らかに

$$\overline{\underline{\underline{N}}} \subset \overline{\underline{\underline{M}}} , \qquad \overline{\underline{\underline{N}}}_t \subset \overline{\underline{\underline{M}}}_t$$

である。

明らかに，各 $t \in [0,\infty)$ に対し X_t は $\overline{\underline{\underline{N}}}_t | \varepsilon^*$ −可測であり $B \in \overline{\underline{\underline{N}}}$ に対し $x \longmapsto P_x(B)$ は ε^* −可測である。

ここで ε^* は

$$\varepsilon^* = \bigcap_{\mu \in m} \overline{\varepsilon}^{\mu}$$

で与えられる。$A \in \varepsilon^*$ を universally measurable な E の subset という。

$X = (\Omega , \underline{\underline{M}} , \underline{\underline{M}}_t , X_t , \theta_t , P_x)$ が (E , ε) 上のMarkov過程なら $(\Omega , \overline{\underline{\underline{M}}} , \overline{\underline{\underline{M}}}_t , X_t , \theta_t , P_x)$ も (E , ε) 上の（(E , ε^*) 上としてもよい）Markov過程であることは明らか，したがって，$\underline{\underline{M}}$，$\underline{\underline{M}}_t$ は始めから $\underline{\underline{M}} = \overline{\underline{\underline{M}}}$，$\underline{\underline{M}}_t = \overline{\underline{\underline{M}}}_t$ となるようにとっておくことができる。以下断らないかぎり $\underline{\underline{M}}$，$\underline{\underline{M}}_t$ はこのようなものであるとする。特に $\overline{\underline{\underline{N}}} \subset \underline{\underline{M}}$，$\overline{\underline{\underline{N}}}_t \subset \underline{\underline{M}}_t$ である。

さて，以下で我々が考えるMarkov過程 $X = (\Omega , \underline{\underline{M}} , \underline{\underline{M}}_t , X_t , \theta_t , P_x)$ は断らないかぎり次の条件(a)，(b)をみたしているものとする。

(a) 状態空間 E は，可算 open base をもつ locally compact Hausdorff space，$\varepsilon = \mathcal{B}(E)$ は E の open set から生成される σ − field

(b) X は次の右連続性の条件：

確率１で

$$t \in [0,\infty) \longmapsto X_t(\omega) \in E \qquad \text{は右連続}$$

をみたす。

（ここで，"確率１で"という statement は"ある $\Omega_0 \in \underline{\underline{M}}$，$P_x(\Omega_0) = 1$，$\forall x \in E$ があって $\forall \omega \in \Omega_0$ に対し"という意味である。この言い方は以下でもしばしば用いる）

σが<u>XのMarkov time</u>（又はstopping timeともいう）であるというのは

σはΩから$[0, \infty]$への写像であって各$t \in [0, \infty)$に対し

$$\{ \omega ; \sigma(\omega) \leq t \} \in \underline{\underline{M}}_t$$

がなりたつことである。

Markov time σが与えられたとき$\underline{\underline{M}}$の sub σ − field $\underline{\underline{M}}_\sigma$を

$$\underline{\underline{M}}_\sigma = \{ A \in \underline{\underline{M}} ; A \cap \{ \sigma \leq t \} \in \underline{\underline{M}}_t , \quad t \in [0, \infty) \}$$

で定める。ときき，σや $X_\sigma(\omega) \equiv X_{\sigma(\omega)}(\omega)$ は $\underline{\underline{M}}_\sigma$に関し可測になる。

<u>定 義 1. 2</u>　$X = (\Omega, \underline{\underline{M}}, \underline{\underline{M}}_t, X_t, \theta_t, P_x)$が次の条件をみたすとき<u>強Markov過程</u>（strong Markov process）であるという：

任意のMarkov time σに対し，

$$P_x [X_{t+\sigma} \in A \ ; \ \sigma < \infty \mid \underline{\underline{M}}_\sigma]$$
$$= 1_{\{\sigma < \infty\}} P_{X_\sigma} [X_t \in A] \qquad \text{a. s.}$$

がすべての$x \in E$，$t \in [0, \infty)$，$A \in \mathcal{B}(E)$に対してなりたつ．

ここで一般にI_Λは集合Λの定義関数をあらわす

<u>定 義 1. 3</u>　（qsasi − left continuity）　Xが<u>quasi − left continuity</u>をもつというのは次の条件をみたすことである：

任意のMarkov timeの増加列σ_nに対し（$\sigma = \lim \sigma_n$として）確率1で　$\sigma = \infty$ か又は$\sigma < \infty$で　$\lim_{n \to \infty} X_{\sigma_n} = X_\sigma$ がなりたつ，

強Markov過程でquasi − left continuityを持つものは特に<u>Hunt process</u>と呼ばれる。<u>Hunt process</u>はMarkov過程によるポテンシャル論を論ずるのに具合いのよいクラスとしてHuntによって導入されたもので，具体的なMarkov過程で重要なものは大体Hunt processになっている。尚quasi − left continuityよりpathの左極限の存在が云えることに注意しておこう。

<u>定 義 1. 4</u>　強Markov過程Xが次の条件：確率1で　$t \in [0, \infty) \longmapsto X_t$ が連続をみたすとき強い意味の拡散過程という。$\triangle \in E$を終点とし確率1で$t \in [0, \zeta) \longmapsto X_t$が連続のときXを拡散過程という。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

この定義より，拡散過程は一般に生存時間ζでその path は不連続であってもよい。尚境界問題を考えるとき，拡散過程の定義はここで与えたものよりもっと一般のもの，例えば境界では path は不連続を許すようなものを考えることが多い。

Markov 過程Xを特性づける解析量として重要なものを与えよう。記号「$f \in \mathcal{B}(E)$」，「$f \in \mathcal{B}_b(E)$」は，fが$\mathcal{B}(E)$ −可測実函数（resp. $\mathcal{B}(E)$ −可測有界実函数）ということを意味する。universally measurable ficid $\mathcal{B}^*(E)$ に対しても同様の記号を用いる。Eが終点△をもつときは，断らないかぎり $f(\triangle)=0$ とする。

定義 1. 5

$$T_t f(x)=E_x[f(X_t)] \qquad , \quad t \geqq 0, \qquad f \in \mathcal{B}^*_b(E)$$

$$G_\alpha f(x)=E_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)\right]=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, T_t f(x)\, dt, \quad \alpha>0, \ f \in \mathcal{B}^*_b(E)$$

T_tは $f \in \mathcal{B}^*_b(E) \longmapsto T_t f \in \mathcal{B}^*_b(E)$ なる写像で，もし $f \in \mathcal{B}_b(E)$ ならば $T_t f \in \mathcal{B}_b(E)$ である。G_αについても同様である。Markov 性より T_t は semigroup property

$$T_{t+s} = T_t\, T_s$$

をみたし，G_αは resolvent equation

$$G_\alpha - G_\beta + (\alpha-\beta)\, G_\alpha\, G_\beta = 0$$

をみたす。

T_t を Markov 過程Xの semigroup，G_α をXの resolvent operator（又は Green operator）と呼ぶ。semigroup，resolvent operator は Markov 過程Xを特性づける；すなわち同じ状態空間E上の2つのMarkov 過程X，X′がありその semigroup T_t（又は resolvent G_α）が一致すれば，Xの確率法則 P_x とX′の確率法則 P_x' は任意の$x \in E$に対し$\underline{N}$の上で一致する。（このようなときXとX′は同値なMarkov 過程であるといゝ，本質的に同じものと考える）。

次の定理はMarkov 過程論における一つの基本定理である。Eを可算 open base をもつ locally compact Hausdorff space $\hat{E} = E \cup \{\triangle\}$ をEの一点 compact 化（Eが既に compact のときは△は孤立点とする），$C_0(\hat{E})$ は $\hat{E}$ 上の実連続関数で $f(\triangle)=0$ となるものの全体に通常の順序

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

とmaxーノルムを与えて得られるBanach lattice

$\{T_t\}_{t\in[0,\infty)}$ を $C_0(\hat{E})$ 上の有界作用素のなす半群： $T_{t+s}=T_t T_s$, $t,s\in[0,\infty)$ でさらに

(T. 1) $f\in C_0(E)$ かつ $0\leqslant f\leqslant 1 \Longrightarrow 0\leqslant T_t f\leqslant 1$

(T. 2) $\|T_t f-f\|\to 0$, $(t\to 0)$, $\forall f\in C_0(\hat{E})$

の2条件をみたすものとする。

<u>定理 1. 1</u> このような (T_t) が与えられたとする。このときE上に△を終点としてもつHunt process Xが存在し

$$T_t f(x)=E_x[f(X_t)] \ , \quad f\in C_0(\hat{E})$$

となる。このようなXは同値をのぞいて一意的に定まる。さらに $U^\varepsilon(x)$ を $x\in E$ の ε ー近傍とし

$$P_t(x,U^\varepsilon(x)^c)\equiv P_x(X_t\in U^\varepsilon(x)^c)=o(t)\quad(t\to o)$$

が $x\in E$ について局所一様になりたつならばXはE上の拡散過程である。

この定理よりMarkov過程の構成のためには(T. 1)(T. 2)をみたす $C_0(\hat{E})$ 上のsemigroup が構成出来るとよい。このようなsemigroupを<u>Feller semigroup</u>と呼ぶ。さてFeller semigroup T_t が与えられたとしよう。

$\mathcal{D}(A)=\{f\in C_0(\hat{E})$, $\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}(T_t f-f)$ が $C_0(\hat{E})$ の位相(すなわち強位相)で収束する$\}$

$f\in\mathcal{D}(A)$ に対し

$$Af=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}(T_t f-f)$$ と定める。

operator $(A,\mathcal{D}(A))$ をsemigroup T_t の<u>生成作用素</u>(infinitesimal generator)という。生成作用素はsemigroupを完全に決定する。

実際，operator $\alpha-A$ $(\alpha>0)$ は

$\mathcal{D}(A)$ から $C_0(\hat{E})$ の上へのinjectiveな写像で

$$G_\alpha=\int_0^\infty e^{-\alpha t}T_t\,dt$$ は $(\alpha-A)^{-1}$ と一致する。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

G_α ($\alpha>0$) がきまれば T_t が unique にきまることは見易い。

次の定理は有名な Hille-Yosida の定理を Sato-Ueno[47] が使いよい形にまとめたものである。

<u>定理 1.2</u> $\mathscr{D}$ を $C_0(\hat{E})$ の部分線型空間 A を $\mathscr{D}$ から $C_0(\hat{E})$ の中への線型写像とする。次のことがなりたつと仮定する：

(1) $\mathscr{D}$ は $C_0(\hat{E})$ の中で密

(2) $u\in\mathscr{D}$ かつ $\sup u>0$ なるものに対し $\exists x\in E$ $u(x)=\sup u$ かつ $Au(x)\leqq 0$

(3) ある $\alpha\geqq 0$ が存在し値域 $(\alpha-A)(\mathscr{D})$ は $C_0(E)$ で密。

このとき，operator $(A,\mathscr{D})$ は閉拡大可能で，かつその最小の閉拡大 $(\hat{A},\hat{\mathscr{D}})$ はある Feller semigroup T_t (もちろん $(A,\mathscr{D})$ から uniqne にきまる) の生成作用素になる。

この定理によって例えば具体的に与えられた微分作用素 $(A,\mathscr{D})$ (一般には、いわゆる境界条件で限定される) に対し (1)(2)(3) の条件を確かめることによって拡散過程が構成できるのである。この方向については Sato-Ueno[47], Bony-Courrège-Priouret[6] Sato[46] 等に詳しい。

1.2 Markov 過程の additive functional

Markov 過程を確率論的な方法で色々研究しようとするとき，その additive functional (以下，しばしば a.f. と略す) は重要な手段になる。

以下で $X=(\Omega,\underline{\underline{M}},\underline{\underline{M}}_t,X_t,\theta_t,P_x)$ は $(E',\mathcal{B}(E'))$ 上の Hunt process とする。さらに X は終点 $\Delta\in E'$ をもつものとし ζ を生存時間とする。$E=E'\setminus\{\Delta\}$ とあらわす，又 $\mathcal{B}(E')$ を E に制限したものを $\mathcal{B}(E)$ とかく，E' 上の関数は断らないかぎり Δ で 0 の値をとるものとする。又 E 上の関数は常に Δ での値を 0 と定義して E' 上の関数として考えることにする。

例えば，$f\in\mathcal{B}(E)$ とかいても $f\in\mathcal{B}(E')$ とかいても同じことで，f は E' 上で定義された $\mathcal{B}(E')$ －可測関数で $f(\Delta)=0$ とみたすものということを意味している。$f\in\mathcal{B}_b(E)$ とかけば有界関数，$f\in\mathcal{B}_+(E)$ とかけば非負関数をあらわすものとする。$\mathcal{B}^*(E)$ は universally measurable set のなす σ－field である。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

定義 1.6 $\alpha \geq 0$ とする，$f \in \mathcal{B}^*_+(E)$ は次の条件をみたすとき（Xに関し）α − excessive であるという：

(a) $T_t^\alpha f(x) \equiv E_x[e^{-\alpha t} f(X_t)] \leq f(x)$, $\forall x \in E$, $\forall t \geq 0$,

(b) $T_t^\alpha f(x) \longrightarrow f(x)$, $(t \downarrow 0)$, $\forall x \in E$

定義 1.7 $[0, \infty) \times \Omega$ から $(-\infty, \infty]$ への写像 $A = (A_t(\omega))_{t \in [0,\infty)}$ は次の条件をみたすときXの additive functional と呼ばれる。

（A. 1） 確率1で写像 $t \longmapsto A_t$ は右連続，$A_0 = 0$ かつ $A_s = A_\zeta$ for $s \in [\zeta, \infty)$

（A. 2） 各 $t \in [0, \infty)$ に対し A_t は $\overline{N}_t$ − 可測

（A. 3） 各 $t, s \in [0, \infty)$ に対し

確率1で $A_{t+s} = A_t + A_s \cdot \theta_t$

もし確率1で，すべての t，s に対し $A_{t+s} = A_t + A_s \cdot \theta_t$ がなりたつときは A_t は perfect な a. f. であるという。一般の a. f. は多くの場合 perfect な a. f. と同値になる。ここで2つの a. f. AとBが同値（ equivalent ）であるとは各 $t \in [0, \infty)$ と $x \in E$ に対し

$$P_x[A_t = B_t] = 1$$

となることである。（このとき（A. 1）より直ちに $P_x[A_t = B_t, \forall t] = 1$ となる）

さらに確率1で $t \longmapsto A_t$ が continuous になるときAを continuous な a. f. 確率1で $t \longmapsto A_t$ が non − decreasing になるとき A を non − negative な a. f. という。あきらかにAが non − negative ということと $P_x[A_t \geq 0] = 1$, $\forall x$, $\forall t \geq 0$, とは同値である。

excessive function と a. f. の対応については1960年代の前半盛んに研究され，それは Meyer によって supermartingale の分解定理にまで一般化された。

(A) non − negative additive functional と excessive function

A_t を non − negative な a. f. とする。$\alpha \geq 0$ に対しその α − potential を

$$U_A^\alpha(x) = E_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dA_t\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

で定義する。この平均が各 $x \in E$ で有限のとき U_A^α は α-excessive function である。さらにそれは次の性質をもつ：

σ_n を $\sigma \equiv \lim_{n \to \infty} \sigma_n \geq \zeta$ a. s. なる Markov time の増大列とするとき

$$\lim_{n \to \infty} E_x[e^{-\alpha\sigma_n} u(X_{\sigma_n})] = 0$$

一般にこの性質をもつ α − excessive function を α − natural potential と呼ぶ

定理 1. 3 u を α − natural potential とする。このときある non − negative a. f. が存在し

$$u = u_A^\alpha$$

となる。

この定理で A は一般に一意的でない。その uniqueness のために Meyer は次のような a. f. のクラスを導入した。

定理 1. 8 non − negative a. f. A_t は次の条件をみたすとき natural であるといわれる： 確率 1 で $t \longmapsto A_t$ と $t \longmapsto X_t$ は共通の不連続点をもたない。

定理 1. 3 の uniqueness part は次の形で解決される。

定理 1. 4 定理 1. 3 において A_t は natural であるようにえらべる。この条件のもとで A_t は（同値をのぞいて）一意的に定まる。

continuous な non − negative a. f. はもちろん natural である。どのようなとき potential に対応する natural a. f. は continuous になるであろうか。

定義 1. 9 α − excessive function は次の条件をみたすとき α − regular potential であるといわれる：

σ_n を Markov time の増大列で $\sigma = \lim \sigma_n$ とするとき

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$E_x(e^{-\alpha\sigma_n} u(X_{\sigma_n})) \longrightarrow E_x(e^{-\lambda\sigma} u(X_\sigma)), \ \forall x \in E,$$

がなりたつ。

度々注意しているようにu(△)=0であるので定義より直ちにregular potentialはnatural potentialになることがわかる。 a. f. Aがnon−negativeでcontinuonsのとき $u_A^\alpha(x)$ はregular potentialになることは見易い。実はこの逆がなりたつ。

定理1.5 uをα−regular potentialとする。このとき定理1.4でuに対応するnatural a. f. Aはcontinuousになる。すなわちnon−negative continuous a. f. Aが存在し

$$u = u_A^\alpha$$

特に有界連続なα−excessive functionはα−regular potentialであり，したがって対応するcontinuous a. f. が一意的に定まる。

Green測度(=resolvent operator の核)がある測度に関し密度をもちpotentialが測度のpotentialであらわされるようなprocess Xに対しては，その測度の条件でnatural potentialやregular potentialを特徴づけることができる。これはMarkov過程とpotentialとの関連におけるもっとも傑出した結果の一つであるがここではのべない。これらについては(上の各定理の証明と共に) Blumenthal−Getoor[4]によくまとめられている。

たゞ，関連することで次のことを注意しておこう。例えばBrown運動ではどんなα−natural potentialもα−regular potentialになる。このようなMarkov過程のクラスは条件(H)をみたすprocessのクラスとしてHunt[23]で詳細に研究せられた。特にGreen測度がある測度に関し対称な密度をもつときは条件(H)がなりたちα−natural potentialはα−regular potentialになる。したがってすべてのnatural a. f. はcontinuous a. f. になる。(H) がなりたたないprocessの典型例としてはuniform motionとかspace time Brownian motionとかがある。

(B) martingale additive functional

Xの a. f. で2乗可積分なmartingaleになるクラスもnon−negative a. f. とは又別の意味で重要である。実際Xの構造はこのような a. f. のクラスによく反映されるのである：例えばこのクラスがtrivialということはXがdeterministicということと同値であり，このclassが

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

continuous なものからなるということは，Xが強い意味での拡散過程であることと同値である等々。又Markov 過程の変換論にも深い関係がある。この方向のことは，Motoo －Watanabe〔44〕，Skorohod〔52〕〔53〕で詳しく論ぜられている。又これらは一般の２乗可積分martingaleの理論へと発展していった（Kunita－Watanabe〔36〕，Meyer〔41〕，Doléan－Dade & Meyer〔12〕）。

ここでは主としてこれらの a.f. に関する確率積分の公式（Brown 運動のときの伊藤の公式の一般化）についてふれておくことにする。

今Xの a.f. A_t で次の条件をみたすものの全体を $\mathfrak{M}$ であらわす：

$$E_x[A_t^2]<\infty, \quad E_x[A_t]=0 \qquad {}^\forall x\in E$$

（このとき A_t は各 P_x に対し２乗可積分なmartingaleになる）

又

$$\mathfrak{M}^c=\{A\in \mathfrak{m} \ : \ A \text{は continuous a.f.}\}$$

$$\mathfrak{N}_+^c=\{A : X\text{の a.f. で non-negative, continuous かつ } E_x[A_t]<\infty\}$$

$$\mathfrak{N}^c=\{A=A_1-A_2 : \ A_i\in\mathfrak{N}_+^c \quad i=1,2\}$$

とおく。

<u>定理 1.6</u>　A，B∈$\mathfrak{M}$に対し同値をのぞいて唯一つの a.f. $\varphi\in\mathfrak{N}^c$ が定まり次の性質をもつ：

$$E_x[A_tB_t]=E_x[\varphi_t], \qquad {}^\forall x\in E, \quad {}^\forall t\in[0,\infty)$$

<u>定義 1.10</u>　このφを　$\varphi=\langle A, B\rangle$とあらわす，又$\langle A, A\rangle$を単に$\langle A\rangle$と書く。$\langle A\rangle \in \mathfrak{N}_+^c$である。

<u>定義 1.11</u>　$A\in\mathfrak{M}$，に対し

$$\mathcal{L}_2(A)=\{f\in\mathcal{B}^*(E)\ ; \quad E_x[\int_0^t f^2(X_s)\,d\langle A\rangle_s]<\infty \quad {}^\forall x\in E, \ {}^\forall t\in[0,\infty)\}$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

定理 1.7 $A \in \mathfrak{M}$, $f \in \mathcal{L}_2(A)$ に対し次の性質をもつ$B \in \mathfrak{M}$が存在する；

任意の$C \in \mathfrak{M}$に対し

$$\langle C, B \rangle_t = \int_0^t f(X_s)\, d\langle C, A \rangle_s \qquad (=\text{は同値の意味})$$

このBはAとfから同値をのぞいて一意的に定まる。

定義 1.12 この$B \in \mathfrak{M}$を $B = f \cdot A$とか $B_t = \int_0^t f(X_s)\, dA_s$ とあらわし，fのAによる確率積分と呼ぶ。

今 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ を$\mathcal{B}^*(E)$一可測な函数で

$$f_i(X_t) - f_i(X_0) = A_i(t) + \varphi_i(t), \quad i = 1, 2 \cdots n$$

ここで$A_i \in \mathfrak{M}^c$, $\varphi_i \in \mathfrak{A}^c$, と分解されるもの，又$F(y_1, y_2, \cdots, y_n)$は$R^n$で定義された2階連続的可微分の関数で2階までの導関数はすべて有界なものとする。FよりE上の関数$F(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$が定まるがこれも同じ$F(x)$の記号であらわそう，同様に$\frac{\partial F}{\partial y_i}(x) \equiv \frac{\partial F}{\partial y_i}(f_1(x), \cdots, f_n(x))$等々。

定理 1.8 （確率積分の公式）

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y_i}(X_s) \cdot dA_i(s) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y_i}(X_s)\, d\varphi_i(s)$$

(1.1)

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(X_s)\, d\langle A_i, A_j \rangle(s)$$

右辺の第一項は定義1.12の意味の確率積分で，したがってmartingaleの部分，のこりの2項が有界変動なprocessの部分である。

尚確率積分をもう少し一般に定義しておけばFおよびその導関数に関する有界性の条件は不必要である。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

ここにあげた確率積分の公式はかなり特殊なもので，もっと一般な形のものを考えておく方が便利であるがそうすれば結局より一般な２乗可積分martingale のわく組の中で話を論じなければならなくなる。これらについては上であげた論文を参照せられたい。又$\mathcal{M}$の subspace への分解や base の概念，又 $\mathcal{M}$ を generate する functional の system等についてもここではふれない。Skorohod〔52〕〔53〕やMotoo－Watanabe〔44〕を参照せられたい。

１．３　拡散過程の Similarity

１次元の正則区間における拡散過程は座標変換と時間変更（ time change ）によって Brown 運動に帰着せられる（ Ito－McKean〔26〕）そこで一般に２つの拡散過程が空間の位相的変換と時間変更により互いにうつりうるとき，この２つの diffusion は互いに similar であると呼ぶ。正確には Ito－McKean〔26〕に従えば次のように定義することが出来る。

E上の拡散過程 $X=(X_t, P_x)$ があたえられたとき任意の $x\in E$ と任意の $V\in\mathcal{B}(E)$ に対し，$\mu_x^V(d\xi)=P_x(X_{\sigma_V}\in d\xi, \sigma_V<\zeta)$ とおく。ここで $\sigma_V = \inf\{t; X_t\in V\}$
μ_x^V は $\overline{V}$ 上の substochastic な measure である。

定義 1．13　E上の拡散過程 $X=(X_t, P_x)$ と E' 上の拡散過程 $\widetilde{X}=(\widetilde{X}_t, \widetilde{P}_x)$ は次の条件をみたすとき，互いに similar であるといわれる：

位相同型写像　$\phi : E \longrightarrow E'$
が存在し任意の $x\in E$ と任意の $V\in\mathcal{B}(E)$ に対し μ_x^V の写像ϕによる像測度

$$\phi\cdot\mu_x^V(B')=\mu_x^V(\xi, \phi(\xi)\in B'),\quad B'\in\mathcal{B}(E'),$$

は $\widetilde{\mu}_{\phi(x)}^{\phi(V)}$ と一致する。

すなわちϕを空間の座標変換と考えるとき X と $\widetilde{X}$ とは同じ測度の系 $\{\mu_x^V\}$ をもつことである。同じ空間上の２つの拡散過程 $X=(X_t, P_x)$ と $X'=(X_t', P_x')$ に対し測度の系 $\{\mu_x^V\}$ が等しいときこの２つの拡散過程は時間変更で移りうることが知られている。すなわちXのある continuous non－negative additive functional φ_t が存在し，
$\widetilde{X}=(\widetilde{X}_t\equiv X_{\varphi_t^{-1}}, P_x)$ と $X'=(X_t', P_x')$ とは同値になる。
（ Blumenthal－Getoor〔4〕の定理 5.1. 参照）

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

このことは測度の系 μ_x^v が拡散過程 X の図型的性質を完全にきめていることを意味する。測度の系 (μ_x^v) を X の到達確率系とか調和測度系，又 " road map " ということがある。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

§2 関数空間論よりの準備

確率過程をしらべるのに，問題を適当な関数空間の言葉で表わして考える方法は最近標準的なものとして広く採用されている。さらにその関数空間としてはHilbert空間が用いられることが多いが，時としては1つ1つの空間でなくてある性格を持った空間の集まりを用いるのが便利である。その場合は集まりをおさめるもう1つの大きい空間を用意することがある。その種の空間としては，Hilbert空間またはBanach空間より少し広げて一般の線型位相空間の方が都合がよい。こゝではSchwartz〔48〕で展開された考えに従ってそのための準備から始める。

一般にEを（実係数の）分離的な局所凸な線型位相空間とする。$\mathcal{H}$ がEのHilbert部分空間（pre－Hilbert部分空間）であるとは次の3つの条件が成りたつことである：

(i) $\mathcal{H}$ はEの（線型空間としての）部分空間

(2.1) (ii) $\mathcal{H}$ はHilbert構造（pre－Hilbert構造）をもつ。

(iii) $\mathcal{H}\to E$ の自然な単射（natural injection）が連続。

また（2.1）のどの条件かゞ違うと空間は違うと理解する。たとえば $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ が線型空間としては同じであってもそのnormが違えば異なると理解する。またEのHilbert部分空間の全体を記号としてHilb（E）と書く。

例2.1 Ω を R^n またはその開集合とする。$\mathcal{D}'(\Omega)$ を Ω 上のdistributionの空間とする。溝畑〔42〕に従って次の空間を考える。$\varepsilon^m_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$，$m=0,1,2,\cdots$，は $f\in\varepsilon^m_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$ を $f\in\mathcal{L}_2$ のみならず，m次までのあらゆるdistributionの意味の導関数 $D^\alpha f(x)$，$|\alpha|\leq m$ が $\mathcal{L}_2$ に属しているときをいう。こゝで $\mathcal{L}_2$ は $\mathcal{L}_2(\Omega, dx)$ なる通常の記号として用いている。ノルムとして

$$(2.2)\qquad \|f\|^2_{m,\mathcal{L}_2}=\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha f\|^2_{\mathcal{L}_2}$$

をとる。$\Omega=R^n$ の時は単に $\varepsilon^m_{\mathcal{L}_2}$ と書く。いま $\mathcal{D}(\Omega)$ はsupportが Ω のcompactな集合にふくまれる C^∞ な関数の空間とする。そのとき，$\varepsilon^m_{\mathcal{L}_2}$ の中での $\mathcal{D}(\Omega)$ の閉包（closure）を $\mathcal{D}^m_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$ と書く。$\mathcal{D}^m_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$ は $\varepsilon^m_{\mathcal{L}_2}$ の閉じた部分空間である。また $\Omega=R^n$ の時は単に $\mathcal{D}^m_{\mathcal{L}_2}$ と書く。さらに（2.2）で α はmulti－index $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ で

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$

である。その時 $\varepsilon^m_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$ や $\mathcal{D}^m_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$ は $E=\mathcal{D}'(\Omega)$ とした時にEのHilbert部分空間になる。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

また $\mathcal{D}^m\mathcal{L}_2(\Omega)$ の共役空間 $\mathcal{D}^m\mathcal{L}_2(\Omega)'$は $\mathcal{D}(\Omega)$ の $\mathcal{D}^m\mathcal{L}_2(\Omega)$への自然な単射の transposeを自然な単射とした時，再びEのHilbert部分空間である。将来，拡散過程の研究ではBrown運動に対応するものとしてm=1の時，すなわち $\mathcal{D}^1\mathcal{L}_2(\Omega)$ と $\mathcal{D}^1\mathcal{L}_2(\Omega)'$が重要な役割を果たすことを示す。

上の例のEがそうであるように，以後Eは常に"quasi-complete"であるとする。すなわちEの閉な有界集合はcompleteである。

Hilb(E)には次のようにスカラー倍，和，順序の3つの作用が定義される。まずスカラー倍から始めよう。

(1°) $\lambda(\geqq 0)$倍。 $\mathcal{H}\in$ Hilb(E)， $\lambda\geqq 0$とする。

(a) $\lambda=0$ならば $\lambda\mathcal{H}=\{0\}$とし，

(b) $\lambda\neq 0$ならば線型空間としては，$\lambda\mathcal{H}=\mathcal{H}$とし，その内積は

$$(u|v)_{\lambda\mathcal{H}}=\frac{1}{\lambda}(u|v)_{\mathcal{H}}$$

で与える。こゝで$(u\ v)_{\mathcal{H}}$ は$\mathcal{H}$ での内積を表わす。

(2°) $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ (和)。 $\mathcal{H}_1$，$\mathcal{H}_2\in$ Hilb(E)とする。その時 $\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$に内積

$$((u_1,u_2)|(v_1,v_2))_{\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2}=(u_1|v_1)_{\mathcal{H}_1}+(u_2|v_2)_{\mathcal{H}_2}$$

$$(u_1,v_1)\in\mathcal{H}_1,\ (u_2,v_2)\in\mathcal{H}_2$$

を与えたものを $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$ とする。いま

$$(2.3)\qquad \Phi\ :\ \mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\ni(u_1,u_2)\longrightarrow u_1+u_2\in E$$

とすればΦは線型連続な写像である。いま

$$N=\ker\Phi\ ,\qquad \mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2=\text{image of }\Phi$$

とおく。その時Φは連続であるので，商空間

$$(\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2)/N$$

はHilbert空間である。その時次のdiagramは交換可能

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E \\
& (\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)/N \arrow[ur, "\Phi^\circ"'] &
\end{tikzcd}$$

こゝでπは canonical isomorphism，Φ°は線型連続な単射である。そこで$\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$に$\Phi^\circ$で$(\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2)/N$の Hilbert 構造をうつすと，それは Hilbert空間になる。実際その norm は

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2} = \inf_{\substack{u_1+u_2=u \\ u_i \in \mathcal{H}_i}} \left(\|u_1\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|u_2\|^2_{\mathcal{H}_2} \right), \qquad u \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 ,$$

で与えられる。この Hilbert 空間$\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$を$\mathcal{H}_1$と$\mathcal{H}_2$の和という。定義より明らかに$\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2 \in \mathrm{Hilb}(E)$である。

なお$\mathcal{H}$を$\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$におけるNの直交補空間とすればu$\in\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$に対して

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2} = \|u_1\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|u_2\|^2_{\mathcal{H}_2}$$

なる$(u_1, u_2)\in\mathcal{H}$なる元が一意的に定まる。

(3°) Hilb(E)における順序。$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathrm{Hilb}(E)$に対し順序を次の形で与える。

$\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$であるとは次の2つの条件がなりたつことである：

(a) $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$,

(b) injection $j : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ の norm が1またはそれより小，すなわち

$$\|u\|_{\mathcal{H}_1} \geqq \|u\|_{\mathcal{H}_2}, \qquad u \in \mathcal{H}_1$$

上に導入した順序については次のことが成りたつ。

命題 2. 1 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathrm{Hilb}(E)$とする。その時

$$\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \iff \exists\, C \geqq 0, \quad \mathcal{H}_1 \leqq C\,\mathcal{H}_2$$

証明 充分性は定義より明らかである。必要性を示そう。$\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$とし

$j : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

を自然な injection とする。そうすると

$$j のグラフ = \{ (u, j(u)) \,;\, u \in \mathcal{H}_1 \}$$
$$= \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 の対角線$$
$$= \mathcal{H}_1 \times E \ の対角線$$

ところが $\mathcal{H}_1 \to E$ の自然な単射は $\mathcal{H}_1 \in \mathrm{Hilb}(E)$ より連続であるので，$\mathcal{H}_1 \times E$ の対角線は閉。故に $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ の対角線が閉となり，閉グラフ定理により j が連続になる。故に $C \geqq 0$ が存在し

$$\|u\|_{\mathcal{H}_1} \geqq C^{-1/2} \|u\|_{\mathcal{H}_2} \quad , \quad u \in \mathcal{H}_1$$

となり， $\mathcal{H}_1 \leqq C\ \mathcal{H}_2$ となる。 （証明終り）

次に Hilb(E) の元に作用素を対応させる。それは后で拡散過程を決めるものとして出て来る。$\mathcal{H} \in \mathrm{Hilb}(E)$ として，

$$j : \mathcal{H} \to E$$

は自然な単射で j^* を j の adjoint で θ は $\mathcal{H}'$ を $\mathcal{H}$ の共役空間とするとき，

$$\theta : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$$

の canonical isomorphism とする。その時 E' を E の共役空間，すなわち連続な線型形式の空間とすれば，つぎのような写像の列が考えられる。

$$E' \xrightarrow{j^*} \mathcal{H}' \xrightarrow{\theta} \mathcal{H} \xrightarrow{j} E$$

これによって

$$H = j\,\theta\, j^* \ : E' \to E$$

が定義される。この<u>Hを $\mathcal{H}$ の核</u>という。これはまた

$$H = \theta\, j^* \ : E' \longrightarrow \mathcal{H}$$

とも考える。いま$<,>$を E と E' の間の双線型形式とする時，つぎのことが成りたつ。

<u>命題 2．2</u> $\mathcal{H}$ の核は次の関係をみたす唯一つの写像である。

$$(2.4) \quad (u \,|\, He')_{\mathcal{H}} = \langle u, e' \rangle \quad , \quad \forall u \in \mathcal{H}, \quad \forall e' \in E'$$

<u>証明</u> 定義より

$$\langle u, e' \rangle = \langle ju, e' \rangle_{E,E'} = (u \,|\, j^* e')_{\mathcal{H},\mathcal{H}'}$$
$$= (u \,|\, \theta j^* e')_{\mathcal{H}} = (u \,|\, He')_{\mathcal{H}}$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

となる。こゝで$(\ |\ )_{\mathcal{H},\mathcal{H}'}$は $\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}'$の双線型形式である。また(2.4)をみたすものがH_1とH_2と2つあれば，任意の $e' \in E'$に対して

$$(u \mid (H_1 - H_2)e')_{\mathcal{H}} = 0 \qquad , \qquad \forall u \in \mathcal{H} .$$

よって

$$(H_1 - H_2)e' = 0$$

となり一意的に定まることが言える。　　　　　　　　　　　　（証明終り）。

Hの像についてつぎのことが言える。

__命題2.3__　　Hの像$H(E')$は $\mathcal{H}$ の密な部分集合$\mathcal{H}_0$を作っている。

__証明__　　今 $u \in \mathcal{H}$で，

$$(u \mid v)_{\mathcal{H}} = 0 \quad , \quad \forall v \in H(E')$$

とする。そこで(2.4)によって，

$$\langle u , e' \rangle = 0 \quad , \quad \forall e' \in E' ,$$

が言える。したがって$u = 0$となり証明が終る。　　　　　　　　（証明終り）。

Hilb(E)に定められた作用に関し核の間の対応が次の形で成りたつ。

__命題2.4__　　$\mathcal{H} \in$ Hilb(E)とし，Hは $\mathcal{H}$ の核とする。その時$\lambda \geqq 0$に対し，$\lambda\mathcal{H}$の核はλHで与えられる。

__証明__　　$\lambda\mathcal{H}$ の定義より，$u \in \lambda\mathcal{H}$ ，$e' \in E'$ に対し

$$(u \mid \lambda He')_{\lambda\mathcal{H}} = \frac{1}{\lambda} (u \mid \lambda He')_{\mathcal{H}} = (u \mid He')_{\mathcal{H}} = \langle u , e' \rangle 。$$

こゝで命題2.2を用いると結論が言える。　　　　　　　　　　（証明終り）。

__命題2.5__　　$\mathcal{H}_1$，$\mathcal{H}_2 \in$ Hilb(E)とし，それぞれの核をH_1，H_2とする。その時$\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$の核は$H_1 + H_2$である。

__証明__　　$\emptyset : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \ni (u_1 , u_2) \to u_1 + u_2 \in E$とし，$N = \ker \emptyset$とする。その時任意の元 $e' \in E'$ に対し，$(H_1 e' , H_2 e') \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ はNに直交する。実際$(v_1 , v_2) \in N$とすると

$$((v_1, v_2) | (H_1 e', H_2 e'))_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}$$

$$= (v_1 | H_1 e')_{\mathcal{H}_1} + (v_2 | H_2 e')_{\mathcal{H}_2} = \langle v_1, e' \rangle + \langle v_2, e' \rangle$$

$$= \langle v_1 + v_2, e' \rangle = 0。$$

故に $u \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ に対し，$(u_1, u_2) \in N^{\perp}$ が存在し，$u = u_1 + u_2$ で

$$(u | (H_1 + H_2) e')_{\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2} = ((u_1, u_2) | (H_1 e', H_2 e'))_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}$$

したがって

$$(u | (H_1 + H_2) e')_{\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2} = \langle u_1, e' \rangle + \langle u_2, e' \rangle$$

$$= \langle u_1 + u_2, e' \rangle = \langle u, e' \rangle$$

となり，命題2.2を使えば結論が出る。　　　　　　　　（証明終り）。

順序に関する話に這入る前に少し準備をしよう。

命題2.6　　$\mathcal{H} \in \mathrm{Hilb}(E)$，Hは $\mathcal{H}$ の核とする。E'の代数的共役 E'^* の元uが $\mathcal{H}$ に属するための必要かつ充分条件は

$$\sup_{e' \in E'} \frac{|\langle u, e' \rangle|}{\langle He', e' \rangle} < \infty$$

なることである。しかもその場合には

$$(2.5) \quad \sup_{e' \in E'} \frac{\langle u, e' \rangle}{\langle He', e' \rangle^{1/2}} = \|u\|_{\mathcal{H}}$$

となる。

証明　　$u \in \mathcal{H}$ であれば命題2.2により

$$|\langle u, e' \rangle| = |(u | He')_{\mathcal{H}}| \le \|u\|_{\mathcal{H}} \|He'\|_{\mathcal{H}} = \|u\|_{\mathcal{H}} \langle He', e' \rangle^{1/2}$$

となる。そこで

$$\ell(u) = \sup_{e' \in E'} \frac{|\langle u, e' \rangle|}{\langle He', e' \rangle^{1/2}}$$

とおけば

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$\ell(u) \leq \|u\|_{\mathcal{H}}$$

となるが，$u \in \mathcal{H}$ より

$$\ell(u) < \infty$$

となる。

逆に $\ell(u) < \infty$ とする。いま線型形式

$$e' \to \langle u, e' \rangle$$

を考えれば $He' = 0$ なる e' に対しては命題2.2より0になる。よって $H(E') = \mathcal{H}_0$ 上で線型形式

$$He' \to \langle u, e' \rangle$$

が定まる。しかもそのnormは $\ell(u)$ に等しいか小さい。よって $\mathcal{H}$ の元 v が存在し

$$\langle u, e' \rangle = (v \mid He')_{\mathcal{H}}, \quad \|v\| \leq \ell(u)$$

となる。そこで命題2.2を使えば

$$\langle u, e' \rangle = \langle v, e' \rangle, \quad {}^{\forall} e' \in E'$$

となる。よって

$$u = v$$

となるので，$u \in \mathcal{H}$ で，$\|u\|_{\mathcal{H}} \leq \ell(u)$ となる。后は再び前半の証明を使えば（2.5）を得る。（証明終り）。

注意 2.1 便利上 $u \notin \mathcal{H}$ に対しては $\|u\|_{\mathcal{H}} = \infty$ とすれば，（2.5）はすべての $u \in E'^{*}$ に対して成りたつ。

いま一般に $H : E' \to E$ なる連続線型写像に対し，$H \geqq 0$ を

$$\langle He', e' \rangle \geqq 0, \quad {}^{\forall} e' \in E',$$

として定めると次のことが言える。

命題 2.7 $\mathcal{H}_1$，$\mathcal{H}_2 \in \mathrm{Hilb}(E)$ とし，H_1，H_2 をそれぞれの核とする。その時

$$\mathcal{H}_1 \leqq \mathcal{H}_2 \Longleftrightarrow H_1 \leq H_2$$

である。

証明 まず $\mathcal{H}_1 \leqq \mathcal{H}_2$ としよう。任意に $e' \in E'$ をとれば $H_1 e' \in \mathcal{H}_1$ よって $H_1 e' \in \mathcal{H}_2$ である。そして

$$\langle H_1 e', e' \rangle^{1/2} = \|H_1 e'\|_{\mathcal{H}_1} \geqq \|H_1 e'\|_{\mathcal{H}_2}$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

こゝで補助定理2.6を使うと

$$\langle H_1 e', e'\rangle^{1/2} \sup_{f' \in E'} \frac{|\langle H_1 e', f'\rangle|}{\langle H_2 f', f'\rangle^{1/2}} \geqq \frac{|\langle H_1 e', e'\rangle|}{\langle H_2 e', e'\rangle^{1/2}}$$

となり，

$$\langle H_1 e', e'\rangle^{1/2} \leq \langle H_2 e', e'\rangle^{1/2}$$

が言える。よって $H_1 \leq H_2$ 。逆も自然にたどれるので結論が言える。　（証明終り）。

命題2.8　$\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H} \in \mathrm{Hilb}(E)$ とする。その時 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ なる $\mathcal{H}_2 \in \mathrm{Hilb}(E)$ が存在するための必要かつ十分な条件は $\mathcal{H} \geqq \mathcal{H}_1$ となることである。その時 $\mathcal{H}_2$ は一意的に定まる。

証明　$\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$ の核をそれぞれ H, H_1 とする。今 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ なる $\mathcal{H}_2 \in \mathrm{Hilb}(E)$ が存在したとする。$\mathcal{H}_2$ の核 $H_2 : E' \to E$ を考える。
命題2.5より

$$H = H_1 + H_2 \ , \quad H_2 \geqq 0$$

である。しかもそれは

$$H_2 = H - H_1$$

となり一意的に定まる。定義より $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1$ は明らかであるので，ノルムの関係をみればよいが，上のことから

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle H_2 e', e'\rangle &= \langle (H - H_1) e', e'\rangle \\ &= \langle He', e'\rangle - \langle H_1 e', e'\rangle \ , \qquad e' \in E' \end{aligned}$$

となるので

$$\langle He', e'\rangle \geqq \langle H_1 e', e'\rangle \ , \quad e' \in E'$$

となり，

$$\mathcal{H} \geqq \mathcal{H}_1$$

が言える。

逆に $\mathcal{H} \geqq \mathcal{H}_1$ より，$\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1$ で，しかも

$$H_2 = H - H_1$$

とおけば $H_2 \geqq 0$ である。ところで

$$H_2 E'$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

を考えると，$u \in H_2 E'$ のノルムは命題2.6より

$$(2.6) \qquad \sup_{e' \in E'} \frac{|\langle u, e' \rangle|}{\langle H_2 e', e' \rangle}$$

となり，

$$\|u\|_{\mathscr{H}} = \sup_{e' \in E'} \frac{\langle u, e' \rangle}{\langle He', e' \rangle^{1/2}}$$

より大で，(2,6)のノルムにより $H_2 E'$ の完備化 $\mathscr{H}_2$ は $\mathscr{H}_2 \subset \mathscr{H}$ となる。しかも定義より明らかに

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$$

となり証明が終る。 (証明終り)。

后でDirichlet空間に関連して役にたつものにHilbert部分空間の有向列についてのことがある。

<u>命題2.9</u> $(\mathscr{H}_i)\ i \in I$ を $\mathscr{H}_i \in \mathrm{Hilb}(E)$，$i \in I$，を減少列とする。$H_i$ は $\mathscr{H}_i$ の核とする。その時

1) $\exists : \mathrm{Inf}\ \mathscr{H}_i = \mathscr{H}$

2) $\mathscr{H} = \{ u\ ;\ u \in \bigcap_{i \in I} \mathscr{H}_i, \quad \sup_{i \in I} \|u\|_{\mathscr{H}_i} < \infty \}$

3) $\|u\|_{\mathscr{H}} = \sup_{i \in I} \|u\|_{\mathscr{H}_i} = \lim_{i \in I} \|u\|_{\mathscr{H}_i}$

4) $(u|v)_{\mathscr{H}} = \lim_{i \in I} (u|v)_{\mathscr{H}_i}$ 。

<u>証明</u> Iをindexの集合とし，$j \geqq i$ に対し $\mathscr{H}_j \leq \mathscr{H}_i$，$H_j \leq H_i$ となっているとする。任意の e' E' に対して

$$\exists : \lim_i \langle H_i e', e' \rangle = \inf_{i \in I} \langle H_i e', e' \rangle$$

よって任意の $e', f' \in E'$ に対して

$$\exists \ \lim_i \langle H_i f', e_i \rangle \ 。$$

いまこれを $A(e', f')$ とする。明らかに

$$A : \begin{cases} \text{a)} \ E' \times E' : \text{双線型} \\ \text{b)} \ \geqq 0 \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

が言える。よって

$$\lim_{i} \langle H_i f', e' \rangle \equiv A(e', f'), \qquad e', f' \in E'。$$

しかも $\forall i \in I$ に対して

$$A(e', e') \leq \langle H_i e', e' \rangle$$

であるのでAは変数毎に弱連続である。よって

$$H : E' \longrightarrow E \qquad \text{線型，連続}$$
$$A(e', f') = \langle Hf', e' \rangle$$

が存在する。そこでHは単純弱収束に関し $\mathcal{L}(E', E)$ における H_i の極限になっている。后は H_i の順序が $\mathcal{H}_i$ の順序に対応しているので，Hが $\mathcal{H}$ の核になる。次に補題2.6により

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \operatorname*{Sup}_{e' \in E'} \left(\frac{|\langle u, e' \rangle|}{\langle He', e' \rangle^{1/2}} \right) = \operatorname*{Sup}_{e' \in E'} \left(\operatorname*{Sup}_{i \in I} \frac{|\langle u, e' \rangle|}{\langle H_i e', e' \rangle^{1/2}} \right)$$

$$= \operatorname*{Sup}_{i \in I} \left(\operatorname*{Sup}_{e' \in E'} \frac{|\langle u, e' \rangle|}{\langle H_i e', e' \rangle^{1/2}} \right) = \operatorname*{Sup}_{i \in I} \|u\|_{\mathcal{H}_i}$$

よって2)，3)が言える。4)は3)より明らか。 （証明終り）

上のことについては詳しくはL. Schwartz〔48〕 pp. 163～164参照。

つぎに拡散過程に関連して有効に利用されるのみならず，本質的には同一視されるものとして，福島〔14〕～〔18〕によって用いられたDirichlet空間のことをのべる。以下にのべることは志賀－渡辺〔51〕によって整理されたものに負う所が多い。

以下この§ではSは第2可算公理をみたす局所compactなHausdorff空間とし，mはS上のRadon測度とする。また特に断らない限りS上の関数とはm－可測な実数値関数をいう。S上の2乗可積分な関数の作る通常のHilbert空間を $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(S, dm)$ と書く。内積は $(\,|\,)_{\mathcal{L}_2}$ で表わす。

いま $\mathcal{F}(\subset \mathcal{L}_2)$ 上の非負な双線型形式 $\varepsilon(u, v)$ を考える。

$$(2.7) \qquad \varepsilon_\alpha(u, v) = \varepsilon(u, v) + \alpha(u|v)_{\mathcal{L}_2}, \quad \alpha > 0, \quad u, v \in \mathcal{F}$$

とする。

定義 2.1 （Dirichlet空間）。組 $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ が $\mathcal{L}_2$－Dirichlet空間であるとは次のこ

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

とが成りたつことである。

(1) $\mathcal{F}_\alpha \equiv \{\mathcal{F}, \varepsilon_\alpha\}$, $\alpha>0$, が $\mathcal{L}_2$のHilbert部分空間である。

(2) $u \in \mathcal{F}$ とし，vはS上の関数で

$$|v(x)| \leq |u(x)| \quad , \quad |v(x)-v(y)| \leq |u(x)-u(y)| \tag{2.8}$$

ならば

$v \in \mathcal{F}$ で $\varepsilon(v, v) \leq \varepsilon(u, u)$

が成りたつ。

上の定義の(2)に出て来るvをuのnormal contractionという。

定理2．1 $(\mathcal{F}, \varepsilon)$を$\mathcal{L}_2$－Dirichlet空間とする。その時

$G_\alpha : \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ 線型，有界， $\alpha>0$

でつぎの関係をみたすものが存在する。

(1) 任意の$f \in \mathcal{F}$に対して

$$\varepsilon_\alpha(G_\alpha f, v) = (f | v)_{\mathcal{L}_2} \quad , \quad \forall v \in \mathcal{F} , \tag{2.9}$$

(2) $0 \leq u \leq 1$ a. e(m) $\Longrightarrow$ $0 \leq \alpha G_\alpha u \leq 1$ a. e(m)

(3) (Resolvent方程式)

$$G_\alpha - G_\beta + (\alpha-\beta) G_\alpha G_\beta = 0 , \quad \alpha , \beta>0$$

(4) $(G_\alpha u | v)_{\mathcal{L}_2} = (u | G_\alpha v)_{\mathcal{L}_2}$, $\alpha>0$, $\forall u , v \in \mathcal{L}_2$

証明 いま$f \in \mathcal{L}_2$を固定して

$$\Phi_f(u) = \varepsilon(u, u) + \alpha \left(u - \frac{f}{\alpha} \,\middle|\, u - \frac{f}{\alpha}\right)_{\mathcal{L}_2}$$

とおく。(2.9)をみたす$G_\alpha f$は

$$\Phi_f(u) = \Phi_f(G_\alpha f) + \varepsilon_\alpha(G_\alpha f - u, G_\alpha f - u)$$

となるので， 上の2次形式 $\Phi_f(u)$を最小にするものとして定まる。

いま $0 \leq f \leq 1$ a. e(m) に対して

$$w = (G_\alpha f \vee 0) \wedge 1/\alpha$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

としよう。明らかに w は $G_\alpha f$ の normal contraction である。一方

$$\left(w-\frac{f}{\alpha} \,\middle|\, w-\frac{f}{\alpha} \right)_{\mathcal{L}_2} \leqq \left(G_\alpha f-\frac{f}{\alpha} \,\middle|\, G_\alpha f-\frac{f}{\alpha} \right)_{\mathcal{L}_2}$$

であるので Dirichlet 空間の性質を使えば

$$\Phi_f(w) \leq \Phi_f(G_\alpha f)$$

故に

$$w = G_\alpha f \qquad \text{a. e}(m)$$

となるので(2)の性質がみたされる。

つぎに $\alpha, \beta > 0$, $f \in \mathcal{L}_2$ としよう。

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha(G_\alpha f - G_\beta f, v) &= \varepsilon_\alpha(G_\alpha f, v) - \varepsilon_\beta(G_\beta f, v) - (\alpha-\beta)(G_\beta f \mid v)_{\mathcal{L}_2} \\ &= -(\alpha-\beta)\,\varepsilon_\alpha(G_\alpha G_\beta f, v) \qquad , \qquad {}^\forall v \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

となるので(3)が言える。

(4)の対称性は定義より明らか。

最后にノルムをみてみると，$f \in \mathcal{L}_2$ に対して

$$\alpha\,(G_\alpha f \mid G_\alpha f)_{\mathcal{L}_2} \leq (G_\alpha f \mid f)_{\mathcal{L}_2} \quad 。$$

このことは(2.9)より示される。よって

$$(G_\alpha f \mid G_\alpha f)_{\mathcal{L}_2} \leq \sqrt{(G_\alpha f \mid G_\alpha f)_{\mathcal{L}_2}}\ \sqrt{(f \mid f)_{\mathcal{L}_2}}$$

故に

$$(G_\alpha f \mid G_\alpha f)_{\mathcal{L}_2} \leq \frac{1}{\alpha^2}(f \mid f)_{\mathcal{L}_2}$$

となり G_α は有界で，ノルムは $1/\alpha$ より小さい。　　　　　　　　　　（証明終り）。

この証明で normal contraction の性質は <u>unit contraction</u> と呼ばれる。

$$w = (0 \vee u) \wedge 1$$

の形のみにしか使っていないことを注意することは后で役にたつ。

定理 2.1 に出て来る

$$G_\alpha : \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2 \quad \text{線型有界}$$

作用素の系 $\{ G_\alpha ; \alpha > 0 \}$ で(2)，(3)，(4)をみたすものを一般に <u>$\mathcal{L}_2$ − resolvent</u> と呼ぶ。拡散過

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

程の研究では $\mathcal{L}_2$ − Dirichlet 空間よりはこの $\mathcal{L}_2$ − resolvent が先に出て来る。そこで問題は定理 2.1 の逆を求めることになる。そのことを示すために少し準備をしよう。

補題 2. 1 $\{G_\alpha;\alpha>0\}$ を $\mathcal{L}_2$ − resolvent とする。その時

(1) $\|\alpha G_\alpha\|\leq 1$ ，すなわち

$$(\alpha G_\alpha f\mid\alpha G_\alpha f)_{\mathcal{L}_2}\leq(f\mid f)_{\mathcal{L}_2},\qquad f\in\mathcal{L}_2\ 。$$

(2) $(f-\beta G_{\beta+\alpha}f\mid f)_{\mathcal{L}_2}\geqq 0,\quad \forall\beta>0,\quad\forall\alpha\geqq 0,\quad\forall f\in\mathcal{L}_2$ 。

証明 $f\in\mathcal{L}_2$ で有界なものとする。$g\in\mathcal{L}_2$ ，$0\leq g\leq 1$ とする。任意の a ，$b\in R^1$ に対して

$$G_\alpha\big((af+bg)^2\big)\geqq 0\ 。$$

よって

$$a^2\,G_\alpha f^2+b^2\,G_\alpha g^2+2ab\,G_\alpha(fg)\geqq 0,\qquad\forall a,\,b\in R^1\ 。$$

よって

$$(G_\alpha(fg))^2\leq G_\alpha(f^2)\,G_\alpha(g^2)\ 。$$

このことから

$$(\alpha G_\alpha(fg)\mid\alpha G_\alpha(fg))_{\mathcal{L}_2}\leq(\alpha G_\alpha g^2\mid\alpha G_\alpha f^2)_{\mathcal{L}_2}$$

$$=(f^2\mid\alpha^2G_\alpha^2g^2)_{\mathcal{L}_2}=(f^2\mid 1)_{\mathcal{L}_2}=(f\mid f)_{\mathcal{L}_2}$$

となり(1)が言える。

(1)より

$$|(\beta G_{\beta+\alpha}f\mid f)_{\mathcal{L}_2}|\leq\beta\sqrt{(G_{\beta+\alpha}f\mid G_{\beta+\alpha}f)_{\mathcal{L}_2}}\sqrt{(f\mid f)_{\mathcal{L}_2}}$$

$$\leq\frac{\beta}{\beta+\alpha}(f\mid f)_{\mathcal{L}_2}\leq(f\mid f)_{\mathcal{L}_2}$$

となるので(2)が言える。 （証明終り）。

いま $\alpha\geqq 0$ ，$\beta>0$ に対して

$$(2.10)\quad \varepsilon_\alpha^\beta(u,v)=\beta(u-\beta G_{\beta+\alpha}u\mid v)_{\mathcal{L}_2},\qquad u;v\in\mathcal{L}_2$$

とおけば ε_α^β は対称，非負な双線型形式である。そのとき，つぎのことが成りたつ。

命題 2. 10 $\{\mathcal{L}_2,\ \varepsilon_\alpha^\beta\}$，$\alpha>0$ ，$\beta>0$ は $\mathcal{L}_2$ の Hilbert 部分空間である。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

証明　この証明のためには，つぎの関係式が役にたつ。

(2.11)　$\varepsilon_\alpha^\beta(u,u)=\frac{\beta^2}{(\beta+\alpha)^2}\varepsilon_0^{\beta+\alpha}(u,u)+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(u|u)_{\mathcal{L}_2}$,　$u\in\mathcal{L}_2, \alpha\geqq 0, \beta>0.$

実際定義より

$$\varepsilon_\alpha^\beta(u,u)=\beta(u-\beta G_{\beta+\alpha}u|u)_{\mathcal{L}_2}$$
$$=\frac{\beta^2}{\beta+\alpha}(u-(\beta+\alpha)G_{\beta+\alpha}u|u)_{\mathcal{L}_2}+\frac{\alpha\beta}{\beta+\alpha}(u|u)_{\mathcal{L}_2}$$
$$=\frac{\beta^2}{\beta+\alpha}\varepsilon_0^{\beta+\alpha}(u,u)+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(u|u)_{\mathcal{L}_2}\text{。}$$

(2.11)より

$$\varepsilon_\alpha^\beta(u,u)\geqq\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(u|u)_{\mathcal{L}_2}$$

となるので

$$\{\mathcal{L}_2,\varepsilon_\alpha^\beta\}\longrightarrow\mathcal{L}_2$$

の自然な単射は連続である。后は$\{\mathcal{L}_2,\varepsilon_\alpha^\beta\}$がHilbert構造をもつことを言えばよい。すなわち$\alpha>0$でε_α^β－Cauchy系列$\{u_n\}$があれば

$$\exists\ u_\infty\in\{\mathcal{L}_2,\varepsilon_\alpha^\beta\}:\quad\varepsilon_\alpha^\beta(u_n-u_\infty,u_n-u_\infty)\to 0$$

となることを示せばよい。上にみたことから

$$\exists\ u_\infty\in\mathcal{L}_2:\quad\lim_n u_n=u_\infty\quad\text{in}\quad\mathcal{L}_2\text{。}$$

また定義より

$$\varepsilon_\alpha^\beta(u_\infty-u_n,u_\infty-u_n)=\beta(u_\infty-u_n|u_\infty-u_n)_{\mathcal{L}_2}-\beta^2(G_{\beta+\alpha}(u_\infty-u_n)|u_\infty-u_n)_{\mathcal{L}_2}$$

したがって

$$|(G_{\beta+\alpha}(u_\infty-u_n)|u_\infty-u_n)|\leq(u_\infty-u_n|u_\infty-u_n)_{\mathcal{L}_2}/\beta+\alpha$$

となるのでu_∞の定義より

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_\alpha^\beta(u_\infty-u_n,u_\infty-u_n)=0$$

よって$u_\infty\in\{\mathcal{L}_2,\varepsilon_\alpha^\beta\}$となる。　(証明終り)。

補題 2.2　任意の$u\in\mathcal{L}_2$に対して

$$\frac{d}{d\beta}\varepsilon_\alpha^\beta(u,u)=(u-\beta G_{\beta+\alpha}u|u-\beta G_{\beta+\alpha}u)_{\mathcal{L}_2}\geqq 0,\ \alpha\geqq 0,\ \beta>0\text{。}$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

証明　$\beta \neq \beta'$, β, $\beta' > 0$ に対して

$$\frac{\varepsilon_\alpha^\beta(u,u) - \varepsilon_\alpha^{\beta'}(u,u)}{\beta - \beta'} = (u|u)_{\mathcal{L}_2} - \frac{\beta^2(G_{\beta+\alpha}u|u)_{\mathcal{L}_2} - \beta'^2(G_{\beta'+\alpha}u|u)_{\mathcal{L}_2}}{\beta - \beta'}$$

$$= (u|u)_{\mathcal{L}_2} - (\beta+\beta')(G_{\beta'+\alpha}u|u)_{\mathcal{L}_2} + \frac{\beta^2}{\beta-\beta'}(G_{\beta'+\alpha}u - G_{\beta+\alpha}u|u)_{\mathcal{L}_2}$$

$$= (u|u)_{\mathcal{L}_2} - (\beta+\beta')(G_{\beta'+\alpha}u|u)_{\mathcal{L}_2} + \beta^2(G_{\beta'+\alpha}G_{\beta+\alpha}u|u)_{\mathcal{L}_2}$$

故に　$\varepsilon_\alpha^\beta(u,u)$ は β に関し微分可能で

$$\frac{d}{d\beta}\varepsilon_\alpha^\beta(u,u) = (u|u)_{\mathcal{L}_2} - 2\beta(G_{\beta+\alpha}u|u)_{\mathcal{L}_2} + \beta(G_{\beta+\alpha}u|G_{\beta+\alpha}u)_{\mathcal{L}_2}$$

$$= (u - \beta G_{\beta+\alpha}u | u - \beta G_{\beta+\alpha}u)_{\mathcal{L}_2}$$

になる。

命題2.10と補題2.2により $\mathcal{L}_2$ のHilbert部分空間の単調減少列

$$\{\{\mathcal{L}_2, \varepsilon_\alpha^\beta\}, \beta > 0\}, \quad \alpha > 0$$

が得られたことになる。したがって，命題2.9によって

$$\mathcal{F}_\alpha = \inf_{\beta>0}\{\mathcal{L}_2, \varepsilon_\alpha^\beta\} \tag{2.11}$$

が定まる。ε_α^β についての(2.11)によれば

$$\varepsilon_\alpha(u,u) = \varepsilon(u,u) + \alpha(u|u)_{\mathcal{L}_2}, \quad \varepsilon(u,u) = \lim_{\beta\to\infty}\varepsilon_0^\beta(u,u)$$

とおけば

$$\|u\|_{\mathcal{F}_\alpha}^2 = \varepsilon_\alpha(u,u) = \lim_{\beta\to\infty}\varepsilon_\alpha^\beta(u,u)$$

で，$\mathcal{F}_\alpha$ は線型空間としては α に無関係になる。そこで $\mathcal{F}_\alpha$ を記号的に $\{\mathcal{F}, \varepsilon_\alpha\}$ とも書く。

たゞし，

$$\mathcal{F} = \{u\,;\, u \in \mathcal{L}_2,\ \varepsilon(u,u) < \infty\}。$$

さらに次のことが言える。

補題2.3　$\mathcal{L}_2$ − Dirichlet 空間の単調減少列 $\{\{\mathcal{F}^{(i)}, \varepsilon^{(i)}\}\,;\, i \in I\}$ があるとき，$\{\mathcal{F}, \varepsilon\} = \inf_{i\in I}\{\mathcal{F}^{(i)}, \varepsilon^{(i)}\}$ はまた $\mathcal{L}_2$ − Dirichlet 空間である。

証明　任意の $u \in \{\mathcal{F}, \varepsilon_\alpha\} \equiv \mathcal{F}_\alpha$ を考え，v を u の normal contraction とする。任意

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

の i ∈ I に対して

$$u \in \{\mathcal{F}^{(i)},\ \varepsilon_\alpha^{(i)}\}$$

である。$\{\mathcal{F}^{(i)},\ \varepsilon^{(i)}\}$ は $\mathcal{L}_2$ − Dirichlet 空間であるので

$$v \in \{\mathcal{F}^{(i)},\ \varepsilon_\alpha^{(i)}\}$$

でかつ，

$$\varepsilon_\alpha^{(i)}(v, v) \leq \varepsilon_\alpha^{(i)}(u, u)$$

である。故に

$$\varepsilon_\alpha(v, v) \leq \varepsilon_\alpha(u, u)$$

でしかも $u \in \{\mathcal{F},\ \varepsilon_\alpha\}$ より $\varepsilon_\alpha(u, u) < \infty$ であるので

$$\varepsilon_\alpha(v, v) < \infty$$

となり，$v \in \{\mathcal{F},\ \varepsilon_\alpha\}$ が言える。 （証明終り）。

以上の準備の下に次のことが言える。

__定理 2.2__ $\{G_\alpha\ ;\ \alpha > 0\}$ を $\mathcal{L}_2$ − resolvent とする。

(1) $\{G_\alpha ; \alpha > 0\}$ に対して作られた $\{\mathcal{L}_2,\ \varepsilon_\alpha^\beta\}$ に対して定まる

$$\mathcal{F}_\alpha = \inf_{\beta > 0} \{\mathcal{L}_2,\ \varepsilon_\alpha^\beta\}$$

は $\mathcal{L}_2$ − Dirichlet 空間である。

(2) $\mathcal{F}_\alpha = \{\mathcal{F},\ \varepsilon_\alpha\}$ に対して（2.9）式が成りたつ。

__証明__ (1)を示すためには補題2.3より $\{\mathcal{L}_2,\ \varepsilon_\alpha^\beta\}$ が $\mathcal{L}_2$ − Dirichlet 空間であることを示せばよい。$\{\mathcal{L}_2,\ \varepsilon_\alpha^\beta\}$ が $\mathcal{L}_2$ の Hilbert 部分空間であることは，すでに命題2.10で示したので，定義2.1 の(2)を示せばよい。そのためには，$u \in \{\mathcal{L}_2,\ \varepsilon_\alpha^\beta\}$ で v が u の normal contraction ならば

$$v \in \mathcal{L}_2, \qquad \varepsilon_0^\beta(v, v) \leq \varepsilon_0^\beta(u, u)$$

を示せば充分である。$v \in \mathcal{L}_2$ は仮定より明らか。

$f \in \mathcal{L}_2$ で有界，$0 \leq w \leq 1$，$w \in \mathcal{L}_2$ とする。そのとき

$$\varepsilon_0^\beta(fw, fw) = \beta \int_S f(x)w(x)\{f(x)w(x) - \beta G_\beta(fw)(x)\}m(dx)$$

$$= \frac{\beta^2}{2}\int_S w(x)G_\beta((f(x)-f)^2 w)(x)m(dx) - \frac{\beta^2}{2}\int_S w(x)f^2(x)G_\beta w(x)m(dx)$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$-\frac{\beta^2}{2}\int_s w(x)G_\beta(f^2 w)(x)m(dx)+\beta\int_s f^2(x)w^2(x)m(dx)$$

$$=\frac{\beta^2}{2}\int_s w(x)G_\beta\big((f(x)-f)^2 w\big)(x)m(dx)-\beta^2\int_s w(x)f^2(x)G_\beta w(x)m(dx)$$

$$+\beta\int_s f^2(x)w^2(x)m(dx) 。$$

よって

$$\varepsilon_0^\beta(fw, fw)=\frac{\beta^2}{2}\int_s w(x)G_\beta[(f(x)-f)^2 w](x)m(dx)$$

$$+\beta(1-\beta G_\beta w\,|\,f^2 w)_{\mathcal{L}_2}-\beta(1-w\,|\,f^2 w)_{\mathcal{L}_2} 。\tag{2.13}$$

いま $u\in\{\mathcal{L}_2, \varepsilon_\alpha^\beta\}$ で v を u の normal contraction とする。いま

$$u_n=\begin{cases}u, & |u(x)|\leq n,\\ 0, & |u(x)|>n,\end{cases}\qquad v_n=\begin{cases}v, & |u(x)|\leq n,\\ 0, & |u(x)|>n,\end{cases}$$

とおけば

$$|v_n(x)|\leq|u_n(x)|,\qquad |v_n(x)-v_n(y)|\leq|u_n(x)-u_n(y)|$$

となる。これに(2.13)を使えば

$$\varepsilon_0^\beta(u_n w, u_n w)-\varepsilon_0^\beta(v_n w, v_n w)\geqq\beta(1-w\,|\,v_n^2 w-u_n^2 w)_{\mathcal{L}_2}$$

こゝで $w\uparrow 1$ として,

$$\varepsilon_0^\beta(u_n, u_n)-\varepsilon_0^\beta(v_n, v_n)\geqq 0$$

を得る。次に $n\uparrow\infty$ として

$$\varepsilon_0^\beta(v, v)\leq\varepsilon_0^\beta(u, u)$$

となり(1)が示される。

后半の証明の前につぎのことを準備する。

<u>命題 2. 11</u>　$\{G_\alpha, \alpha>0\}$ を $\mathcal{L}_2$ − resolvent として,それから構成された $\mathcal{L}_2$ − Dirichlet 空間を $\mathcal{F}_\alpha=\{\mathcal{F}, \varepsilon_\alpha\}$ とする。そのとき

(1) $u\in\mathcal{F}$ ならば　$\beta G_\beta u\to u$ in $\mathcal{L}_2$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

(2) $u \in \mathcal{L}_2$ に対して $\qquad \varepsilon_\alpha(G_\alpha u, G_\alpha u) = (G_\alpha u \mid u)_{\mathcal{L}_2} \geqq 0$

証明 補題2.2より

$$\varepsilon(u, u) - \varepsilon_0^1(u, u) = \int_1^\infty (u - \beta G_\beta u \mid u - \beta G_\beta u)_{\mathcal{L}_2}\, d\beta$$

であるので，もし

(2.1 4) $\qquad \| u - \beta G_\beta u \|_{\mathcal{L}_2}$

が単調減少ならば $\lim_{\beta \to \infty} \| u - \beta G_\beta u \|_{\mathcal{L}_2} = 0$ でなくてはならない。

ところが(2.1 4)のβに関する単調減少は補題2.2の証明と全く同じ考えで

(2.1 5) $\qquad \dfrac{d^2}{d\beta^2} \varepsilon_\alpha^\beta(u, u) = -2(v \mid G_{\beta+\alpha} v)_{\mathcal{L}_2}$

$$v = u - \beta G_{\beta+\alpha} u$$

が示せるのでもしも后半が言えておれば正しい。そこで后半を示そう。

$$\varepsilon_\alpha^\beta(G_\alpha u, G_\alpha u) = \beta(G_{\beta+\alpha} u \mid G_\alpha u)_{\mathcal{L}_2}$$

$$= \beta(G_\alpha G_{\beta+\alpha} u \mid u)_{\mathcal{L}_2} = (G_\alpha u \quad u)_{\mathcal{L}_2} - (G_{\beta+\alpha} u \mid u)_{\mathcal{L}_2}$$

一方

$$(G_{\beta+\alpha} u \mid u)_{\mathcal{L}_2} \leq \frac{(u \mid u)_{\mathcal{L}_2}}{\beta+\alpha} \xrightarrow[\beta \uparrow \infty]{} 0$$

故に

$$\varepsilon_\alpha(G_\alpha u, G_\alpha u) = \lim_{\beta \to \infty} \varepsilon_\alpha^\beta(G_\alpha u, G_\alpha u) = (G_\alpha u \mid u)_{\mathcal{L}_2}$$

となるので結論が出る。 (証明終り)

定理2.2の后半の証明 $\quad v \in \mathcal{F}$ならば

$$\varepsilon_\alpha(G_\alpha f, v) = \lim_{\beta \to \infty} \varepsilon_\alpha^\beta(G_\alpha f, v) = \lim_{\beta \to \infty} (\beta G_{\beta+\alpha} f \mid v)_{\mathcal{L}_2}$$

$$= \lim_{\beta \to \infty} (f \mid \beta G_{\beta+\alpha} v)_{\mathcal{L}_2}$$

こゝで補助定理2.1 1により

$$\lim_{\beta \to \infty} (f \mid \beta G_{\beta+\alpha} v)_{\mathcal{L}_2} = (f \mid v)_{\mathcal{L}_2}$$

となるので結論が出る。 (証明終り)

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

注意 2.3 定理 2.1 の証明の后の注意と定理 2.2 を併せると，$\mathcal{L}_2$－Dirichlet 空間の定義で normal contraction の条件を unit contraction のみの条件でおきかえることが出来る。

例 2.2 $0<\lambda<\infty$ を1つ固定する。いま $\mathcal{L}_2=\mathcal{L}_2(R^n, dx)$ とし，

$$G_\alpha : \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

$$G_\alpha f(x)=\frac{1}{\alpha+\lambda} f(x) \tag{2.16}$$

を考える。これは有界線型であることは勿論のことと定理 2.1 の(2)，(3)の条件をみたすことは明らか。また $f, g \in \mathcal{L}_2$ に対し

$$\int_{R^n} f(x) G_\alpha g(x)\, dx=\frac{1}{\alpha+\lambda}\int_{R^n} f(x) g(x)\, dx=\int_{R^n} G_\alpha f(x) g(x)\, dx$$

より $(G_\alpha g \mid f)_{\mathcal{L}_2}=(g \mid G_\alpha f)_{\mathcal{L}_2}$ となり定理 2.1 の(4)の条件もみたす。

故に $\{G_\alpha : \alpha>0\}$ は $\mathcal{L}_2$－resolvent になっている。なおこの時は

$$\varepsilon_0^\beta(u, v)=\frac{\beta\lambda}{\beta+\lambda}\int_{R^n} u(x) v(x)\, dx \quad , \qquad u, v \in \mathcal{L}_2 \ ,$$

であるので

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}=\mathcal{L}_2 \\ &\varepsilon(u, v)=\lambda \int_{R^n} u(x) v(x)\, dx \quad , \qquad u, v \in \mathcal{F} \end{aligned} \tag{2.17}$$

となる。これは最も簡単な $\mathcal{L}_2$－Dirichlet 空間であるが，これには非常に簡単な拡散過程が対応する。すなわち $\overline{D}$ を R^n の一点 compact 化 $R^n \cup \{\triangle\}$ とする。$\overline{D}$ 上の拡散過程

$$X=\{X_t, P_x, x \in \overline{D}\}$$

がつぎの条件をみたすとする。

$$\tau=\inf\{t ; X_t \neq X_0\} \qquad \zeta=\inf\{t ; X_t=\triangle\}$$

とおくとき，

$$\tau=\zeta \quad a.e(P_x) \ , \qquad \forall x \in D=R^n$$

この時Markov 過程論で良く知られていることは $0 \overset{\exists}{<} \lambda(x) \leq \infty$ で

$$P_x[\tau>t]=e^{-\lambda(x)t} \ , \qquad x \in D=R^n$$

である。いまとくに $\lambda(x) \equiv \lambda$ とおけば

$$G_\alpha f(x)=\int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x[f(X_t)]\, dt$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

は(2.16)の形になる。従って(2.17)のDirichlet空間(または(2.16)の $\mathcal{L}_2$－resolventはこゝに考えた拡散過程と同一視される。

例 2.3 R^n で最も典型的な $\mathcal{L}_2$－resolventはつぎの形で与えられる。dmとしては R^n の通常のLebesgue measure dx をとる。

$$G_\alpha : \quad \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

$$G_\alpha f(x) = \int_{R^n} f(y) g_\alpha(x, y) dy$$

(2.18)
$$g_\alpha(x, y) = 2\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\|x-y\|^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} K_{\frac{n}{2}-1}\left(\sqrt{2\alpha}\,\|x-y\|\right)$$

$K_{\frac{n}{2}-1}$ は変形ベッセル関数。

これが $\mathcal{L}_2$－resolventであること及びつぎの性質をもつことは良く知られている。(例えば溝畑〔42〕, 志賀－渡辺〔51〕)。

$\{G_\alpha, \alpha>0\}$ に対応する $\mathcal{L}_2$－Dirichlet空間を $\mathcal{F}_\alpha = \{\mathcal{F}, \mathcal{E}_\alpha\}$ とすれば

(2.19)
$$\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{D}^1_{\mathcal{L}_2}$$
$$\mathcal{E}(u, v) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{R^n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx \quad , \qquad u, v \in \mathcal{D}^1_{\mathcal{L}_2}$$

(例2.1参照)。

さらに

$$g_\alpha(x, y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^n e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}}\,dt \quad , \qquad x, y \in R^n ,$$

に注意すれば上の $\mathcal{L}_2$－resolvent, よって $\mathcal{L}_2$－Dirichlet空間はいわゆるn次元Brown運動に対応していることがわかる。

例 2.4 前の例と同じく R^2 で通常のLebesgue測度dxに関し $\mathcal{L}_2(R^2, dx) \equiv \mathcal{L}_2$ を考える。一方

$$g_\alpha(\xi, \eta) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{\|\xi-\eta\|^2}{2t}}\,dt , \qquad \xi, \eta \in R^1 \quad ,$$

とおく。

いま仕意の $f \in \mathcal{L}_2$ を考えるとFubiniの定理よりLebesgue測度0の1次元の集合N(f)が存在

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

し

$$G_\alpha f(x_1, x_2) \equiv \int_{R^1} f(y_1, x_2) g_\alpha(x_1, y_1) dy_1 \quad , \quad {}^\forall x_2 \notin N(f)$$

が x_1 の関数として定まり，しかも $x = (x_1, x_2)$ の関数として $\mathcal{L}_2$に属する。

したがって，この G_α は

$$G_\alpha : \quad \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

となるが容易に $\{G_\alpha ; \alpha > 0\}$ が $\mathcal{L}_2$ − resolvent になることがわかる。たとえば

$$(G_\alpha u \mid v)_{\mathcal{L}_2} = (u \mid G_\alpha v)_{\mathcal{L}_2}$$

は

$$\int_{R^2} dx_1 dx_2 v(x_1, x_2) G_\alpha u(x_1, x_2) = \int_{R^2} dx_2 \{ \int_{R^1} dx_1 v(x_1, x_2) G_\alpha u(x_1, x_2)\}$$

$$= \int_{R^1} dx_2 \{ \int_{R^1} dx_1 G_\alpha v(x_1, x_2) u(x_1, x_2)\}$$

$$= \int_{R^2} dx_1 dx_2 (G_\alpha v(x_1, x_2)) u(x_1, x_2)$$

より言える。したがってこれにも $\mathcal{L}_2$ − Dirichlet 空間が1つ対応する。

これには実はつぎのような拡散過程 $X = \{X_t, P_x, x \in R^2\}$ が対応する。$X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$ R^2 とすれば

$$P_{(x_1, x_2)}[X_t^{(1)} \in A, X_t^{(2)} = x_2]$$

$$= P_{(x_1, x_2)}[X_t^{(1)} \in A] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_A e^{-\frac{(\xi - x_1)^2}{2t}} d\xi$$

すなわち道 X_t の第2成分は出発点にとゞまり第1成分は1次元 Brown 運動である。したがって x − 軸と平行な直線上を動く1次元 Brown 運動を単に集めたものになっている。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

§3 拡散過程の生成要素

これから特別に断らない限りDは R^n 自身またはそこにおける領域とする。たゞ C^∞ ー多様体でも話が平行的に進められることは容易にわかるので，必要に応じてその形で用いることもある。これからはD上の拡散過程

(3.1) $X = \{ X_t , P_x , x \in \overline{D} \}$

を考える。またD上の Radon 測度で非負なものを1つ固定し，それを $m(dx)$ とする。Xの Green 作用素にまづ次の仮定をおく。

仮定 3.1 $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(D, dm)$，$G_\alpha$：XのGreen作用素とするとき，$G_\alpha$は

$$G_\alpha : \quad \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

の作用素に拡張される。

その他に，もう少し強く

仮定 3.2 $(G_\alpha u \mid v)_{\mathcal{L}_2} = (u \mid G_\alpha v)_{\mathcal{L}_2}$, $\quad \forall u, v \in \mathcal{L}_2$

も成りたつとする。一般に拡散過程がある時に仮定3.2を弱めた形式的な対称性を仮定すれば仮定3.1は自動的に言えることが多い。その意味では仮定3.2が本質的な条件である。また仮定3.2はXのGreen測度がmに関して密度を持つことを意味しない。そのことは例2.2，2.4をみればわかる。

補題 3.1 $\{ G_\alpha , \alpha > 0 \}$は仮定3.1，3.2の下で $\mathcal{L}_2$ー resolvent になる。

証明 $0 \le g_n \le 1$， $g_n \uparrow 1$， $g_n \in C_0(D)$， $0 \le f \in \mathcal{L}_2$ をとって来る。

$$(G_\alpha(f g_n))^2 \le G_\alpha f^2 \, G_\alpha g_n^2$$

こゝでG_αはXのGreen作用素なことより $C_0(D)$ に定義されることに注意する。

故に

$$\int_D (G_\alpha(f g_n))^2(x) m(dx) \le \int_D f^2(x) G_\alpha^2 (g_n)^2(x) m(dx) \le \frac{1}{\alpha^2} \int_D f^2(x) m(dx)$$

こゝで定理2.1の条件(2)は自動的に成立していることを使う。上の式で $n \to \infty$ とすれば

$$\int_D (G_\alpha f)^2(x) m(dx) \le \frac{1}{\alpha^2} \int_D f^2(x) m(dx)$$

故に

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$\|\alpha G_\alpha\|^2_{\mathcal{L}_2} \leq 1$$

となる。故にG_αは

$$G_\alpha : \quad \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

として有界線型作用素である。定理2.1の条件(3)は明らかに成立している。(4)は仮定3.2そのものであるので，$\{G_\alpha, \alpha>0\}$が$\mathcal{L}_2$－resolventなことが言える。　　（証明終り）

この補題と§2の一般論を併せると，仮定3.1，3.2の下で拡散過程Xに対して常に$\mathcal{L}_2$－resolvent：$\{G_\alpha, \alpha>0\}$，$\mathcal{L}_2$－Dirichlet空間$\mathcal{F}_\alpha=\{\mathcal{F}, \mathcal{E}_\alpha\}$が対応している。従って対応

$$X \longrightarrow \{G_\alpha ; \alpha>0\} \longleftrightarrow \{\mathcal{F}, \mathcal{E}_\alpha\}$$

が得られるが，第1の対応の逆は一般には非常に困難な問題をふくんでいる。そのことについては最近福島氏（〔18〕）の研究がある。そこをしばらくおいておくとしても上の対応の$\{\mathcal{F}, \mathcal{E}_\alpha\}$の構造を知ればXに関して多くの情報を得ることが出来る。このことを示すのがこのノートの1つの大きな目標である。そのためには$\mathcal{E}_\alpha$の形を知ればよいが，それについて§2の例2.2や例2.3のように完全にわかることは少ないが，それに近い形で知るにもいくつかの仮定が必要である。

仮定3.3　線型空間として$\mathcal{D}(D)\subset\mathcal{F}$。たゞし$\mathcal{D}(D)$はコンパクトな台を持つ$C^\infty$－関数の作るSchwartzの空間である。かつ　はつぎの意味で局所的である：任意の$u\in\mathcal{D}(D)$に対して，もしSupp(u)上で$v=0$で$v\in\mathcal{D}(D)$ならば$\mathcal{E}(u, v)=0$。

命題3.1　(Beurling－Deny〔4〕)。$\mathcal{L}_2$－Dirichlet空間$\mathcal{F}_\alpha=\{\mathcal{F}, \mathcal{E}_\alpha\}$が仮定3.3をみたす。

その時D上の対称な非負定符号なRadon測度の行列(ν_{ij})とD上の非負なRadon測度kが存在し

$$\mathcal{E}(u, v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,\nu_{ij}(dx)+\int_D u(x)v(x)k(dx), \quad u, v\in\mathcal{D}(D)$$

と表わされる。かつそのような(ν_{ij})，kは唯1つ決まる。

証明に進む前に仮定3.3について考えてみると，§2にのべたことから仮定3.3は任意の$u\in\mathcal{D}(D)$に対して

$$\lim_{\beta\to\infty}\beta(u-\beta G_\beta u\,|\,v)_{\mathcal{L}_2}$$

が存在することと同等である。このことは任意の$u, v\in\mathcal{D}(D)$に対して

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$(3.2) \qquad = \lim_{\beta\to\infty} \beta(u-\beta G_\beta u \mid v)_{\mathcal{L}_2}$$

と同等である。また(3.2)は

$$\beta(\beta G_\beta u(x)-u(x))$$

が$\beta\to\infty$の時に distribution の空間 $\mathcal{D}'(D)$で収束することだとも言える。この形で言えば仮定3.3を言いかえて

仮定3.3′ $\mathcal{D}(D)$がXの distribution の生成作用素の定義域にふくまれる。すなわち任意の$u\in\mathcal{D}(D)$に対して

$$\beta(\beta G_\beta u(x)-u(x))$$

の決める distribution は$\beta\to\infty$の時 $\mathcal{D}'(D)$で収束する。

また仮定3.3の局所性についてはXが拡散過程であることから必然的に対応する $\mathcal{L}_2$−Dirichlet 空間の局所性が導かれると思うが，現在の所一般的には証明されていない。なお Dynkin−Kinney の条件，すなわち定理1.1の条件がみたされれば局所性は保証される。また拡散過程であるための推移確率のみたす必十条件については Seregin[50]の結果がある。

命題3.1の証明 国田[35]ここでは $\mathcal{F}_\alpha$が拡散過程Xより導かれたもの，すなわち substochastic な Green 測度$\alpha G_\alpha(x,dy)$が存在し，

$$G_\alpha f(x)=\int_D G_\alpha(x,dy)f(y)$$

となっていることを使った証明を与える。

$u, v\in\mathcal{D}(D)$とすれば

$$\beta(u-\beta G_\beta u \mid v)_{\mathcal{L}_2}=\beta\int_D u(x)v(x)(1-\beta G_\beta 1(x))m(dx)$$

$$(3.3) \qquad +\frac{\beta^2}{2}\iint_{D\times D}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))G_\beta(x,dy)m(dx)$$

また $u, v\in\mathcal{D}(D)$で $\mathrm{Supp}(u)\cap\mathrm{supp}(v)=\phi$ならば

$$\varepsilon_\beta(\beta G_\beta u, v)=\beta(u \mid v)_{\mathcal{L}_2}=0$$

よって

$$\varepsilon_\beta(\beta G_\beta u, v)=\varepsilon(\beta G_\beta u, v)+\beta^2\int_D G_\beta u(x)v(x)m(dx)$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

と併せると

$$(3.4) \qquad \varepsilon(\beta G_\beta u, v) = -\beta^2 \iint_{D\times D} u(x)v(y)G_\beta(x, dy)m(dx)$$

(3.3) と (3.4) とから G_β の対称性に注意すれば

$\exists\ \sigma_\beta(dx\,dy)$: $D\times D-\delta$ 上の対称な正の Radon 測度

$\exists\ m_\beta(x)$: $0\le m_\beta(x)\le 1$

であって，

(a) $u, v\in \mathcal{D}(D)$ に対して

$$(3.5) \qquad \begin{aligned} \varepsilon_0^\beta(u, v) = {} & \frac{1}{2}\iint_{D\times D}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\sigma_\beta(dx\,dy) \\ & + \beta\int_D u(x)v(x)(1-m_\beta(x))m(dx) \quad , \end{aligned}$$

(b) $u, v\in \mathcal{D}(D)$, $\mathrm{Supp}(u)\cap\mathrm{Supp}(v)=\phi$ ならば

$$(3.6) \qquad \varepsilon(\beta G_\beta u, v) = -\iint_{D\times D} u(x)v(y)\sigma_\beta(dx\,dy)$$

となる。たゞし δ は $D\times D$ の対角線とする。

まづ D 全体でなくその中に開集合 G で $\overline{G}\subset D$ なるものを 1 つ固定してその上に supp(u) を制限した時に定理の主張を示すことを考える。そこで $f_i\in\mathcal{D}(D)$ で

$$f_i(x) = x_i \quad \text{on} \quad G, \qquad x=(x_1, \cdots, x_n)$$

なる $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ を考える。その時，つぎの形で D 上の対称，非負定符号な Radon 測度の行列 $(\nu_{i,j}^\beta)$ を定める：

$$(3.7) \qquad \nu_{i,j}^\beta(dx) = \frac{1}{2}\int_D (f_i(x)-f_i(y))(f_j(x)-f_j(y))\sigma_\beta(dx\,dy) \quad , \ i, j=1, 2, \cdots, n$$

いま (3.5) を用いると

$$\nu_{i,i}^\beta(D) \le \varepsilon_0^\beta(f_i, f_i) = \varepsilon(\beta G_\beta f_i, f_i) \text{。}$$

こゝで $f_i\subset\mathcal{D}(D)\subset\mathcal{F}$ なることを使うと

$$\nu_{i,i}^\beta(D) \le \varepsilon_0^\beta(f_i, f_i) \xrightarrow[\beta\uparrow\infty]{} \varepsilon(f_i, f_i) < \infty$$

となり，$\nu_{i,i}^{\beta}$ が一様に有界な測度であることがわかる。また（3.7）より $\nu_{i,j}^{\beta}$ の全変分を $|||\nu_{i,j}^{\beta}|||$ で表わせば

$$|||\nu_{i,j}^{\beta}|||^{2} \leq |||\nu_{i,i}^{\beta}|||\ |||\nu_{j,j}^{\beta}|||$$

となる。そこで適当に部分列をとって $\beta\to\infty$ とすれば $\overline{D}$ 上の Radon 測度の系で対称で非負定符号なものが存在し

$$(3.8)\qquad \nu_{i,j}^{\beta} \longrightarrow \nu_{i,j}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

となる。また

$$k_{\beta}(dx) = \beta(1 - m_{\beta}(x))m(dx)$$

で D 上の Radon 測度で非負なものを定めると，（3.5）より任意の $u \in \mathcal{D}(D)$ に対して

$$\int_D u^2(x)k_{\beta}(dx) \leq \varepsilon_o^{\beta}(u, u) \xrightarrow[\beta\uparrow\infty]{} \varepsilon(u, u) < \infty$$

となるので，必要ならば（3.8）を決めた部分列と共通の部分列をとって $\beta\to\infty$ とすれば $\overline{D}$ 上の非負な Radon 測度 k が存在し

$$(3.9)\qquad k_{\beta} \longrightarrow k$$

となるように出来る。（3.5）に注意すれば

$$(3.10)\qquad \nu_{i,j}(D) + \int_D f_i(x)f_j(x)k(dx) = \varepsilon(f_i, f_j)$$

となる。

つぎに（3.8）の収束がもっと詳しくわかることを示す。局所性の仮定より，$u, v \in \mathcal{D}(D)$, $\mathrm{supp}(u) \cap \mathrm{supp}(v) = \phi$，ならば

$$(3.11)\qquad \begin{aligned} \overline{\lim_{\beta\to\infty}}\left|\iint_{D\times D} u(x)v(y)\sigma_{\beta}(dxdy)\right| &= \overline{\lim_{\beta\to\infty}}\left|\varepsilon(\beta G_{\beta}u, v)\right| \\ &= \varepsilon(u, v) = 0 \end{aligned}$$

となる。このことは $\sigma_{\beta}(dx\,dy)$ は $D\times D-\partial$ 上の測度としては $\beta\to\infty$ の時自明な測度に収束することを示している。このことを使えば任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$I_{\epsilon}(x, y) = \begin{cases} 1, & \|x-y\| < \epsilon, \\ 0, & \text{他の場合}, \end{cases}$$

とし

$$\nu_{i,j}^{\beta,\varepsilon}(dx)=\frac{1}{2}\int_D I_\varepsilon(x,y)(f_i(x)-f_i(y))(f_j(x)-f_j(y)\sigma_\beta(dxdy)$$

とおけば適当に部分列をとって$\beta\to\infty$とすれば

$$(3.12)\quad \begin{cases} \nu_{i,j}^{\beta}-\nu_{i,j}^{\beta,\varepsilon}\longrightarrow 0 \qquad \text{in } D\times D-\delta \\ \nu_{i,j}^{\beta,\varepsilon}\longrightarrow \nu_{ij} \end{cases}$$

となっている。このことから $m\geqq 3$ とすると

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{\beta\to\infty}\iint_{D\times D}\prod_{k=1}^{m}\left|f_{jk}(x)-f_{jk}(y)\right|\sigma_\beta(dxdy)\\
&\leq \varepsilon^{m-2}\varlimsup_{\beta\to\infty}\iint_{D\times D} I_\varepsilon(x,y)\prod_{k=1}^{2}\left|f_{jk}(x)-f_{jk}(y)\right|\sigma_\beta(dxdy)\\
&\leq \varepsilon^{m-2}\varlimsup_{\beta\to\infty}\prod_{k=1}^{2}\sqrt{\nu_{jk,jk}^{\beta}(D)}\\
&=\varepsilon^{m-2}\prod_{k=1}^{2}\sqrt{\nu_{jk,jk}(D)}
\end{aligned}$$

がなりたつ。したがって

$$(3.12)\quad \varlimsup_{\beta\to\infty}\iint_{D\times D}\prod_{k=1}^{m}\left|f_{jk}(x)-f_{jk}(y)\right|\sigma_\beta(dxdy)=0$$

である。

いま(3.5)の右辺の第1項で$\beta\to\infty$の時の状態をしらべよう。

$$I_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A,\end{cases}$$

とする。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

u, $v \in \mathcal{D}(G)$を考える。

$$\frac{1}{2}\iint_{D\times D}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\sigma_\beta(dxdy)$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D\times D}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))I_G(x)I_G(y)\sigma_\beta(dxdy)$$

$$+\iint_{D\times D}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))I_G(x)I_{D-G}(y)\sigma_\beta(dxdy)$$

(3.13)
$$=\frac{1}{2}\iint_{D\times D}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))I_G(x)I_G(y)\sigma_\beta(dxdy)$$

$$+\iint_{D\times D}u(x)v(x)\sigma_\beta(dxdy)I_G(x)I_{D-G}(y)$$

ところで $u\in\mathcal{D}(G)$と(3.11)に注意すれば

$$\lim_{\beta\to\infty}\left|\iint_{D\times D}u(x)v(x)I_G(x)I_{D-G}(y)\sigma_\beta(dxdy)\right|=0$$

よって(3.13)の右辺の第1項のみ考えればよい。

そこで $u\in\mathcal{D}(G)$とすると，

$$u(x)-u(y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)(f_i(x)-f_i(y))+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial y_j}(x+\theta y)(f_i(x)-f_i(y))$$
$$\times(f_j(x)-f_j(y))$$
$$,\ |\theta|\leq 1\quad,\qquad x,y\in G\quad,$$

と展開出来る。これを用いると $u\in\mathcal{D}(G)$に対して

$$\frac{1}{2}\iint_{D\times D}(u(x)-u(y))(u(x)-u(y))I_G(x)I_G(y)\sigma_\beta(dxdy)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{D\times D}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)(f_i(x)-f_i(y))(f_j(x)-f_j(y))I_G(x)I_G(y)\sigma_\beta(dx\,dy)$$

(3.14)
$$+\frac{1}{4}\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}(x+\theta y)(f_i(x)-f_i(y))(f_j(x)-f_j(y))(f_k(x)-f_k(y))I_G(x)I_G(y)\sigma_\beta(dx$$

$$+\frac{1}{8}\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x+\theta y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_\ell}(x+\theta y)(f_i(x)-f_i(y))(f_j(x)-f_j(y))$$

$$\times(f_k(x)-f_k(y))(f_\ell(x)-f_\ell(y))I_G(x)I_G(y)\ \sigma_\beta(dxdy)$$

ところで（3.11）より

$$\nu_{ij}^{\beta,*}(dx)=\frac{1}{2}\int_G (f_i(x)-f_i(y))(f_j(x)-f_j(y))\sigma_\beta(dxdy)$$

とおけば

$$\nu_{ij}^{\beta,*}\Big|G \longrightarrow \nu_{i,j}$$

が言えることに先づ注意する。そのことより $\beta\to\infty$ の時

$$(3.15)\quad \lim_{\beta\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}\iint_{D\times D}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)(f_i(x)-f_i(y))(f_j(x)-f_j(y)) \times I_G(x)I_G(y)\sigma_\beta(dxdy)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_D\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\ \nu_{ij}(dx)$$

（3.14）の第2項と第3項は（3.12）の評価式から $\beta\to\infty$ の時0に収束することがわかる。
それで $u\in\mathcal{D}(G)$ に対して

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{2}\iint_{D\times D}(u(x)-u(y))^2\ I_G(x)I_G(y)\sigma_\beta(dxdy)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_D\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\ \nu_{ij}(dx)$$

がわかった。これと（3.13）を併せると，$u\in\mathcal{D}(G)$ に対して

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{2}\iint_{D\times D}(u(x)-u(y))^2\sigma_\beta(dxdy)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_D\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\ \nu_{ij}(dx)$$

がなりたつ。また

$$\lim_{\beta\to\infty}\beta\int_D u^2(x)(1-m_\beta(x))dx=\int_D u^2(x)k(dx)$$

となるので，（3.5）と併せると $u\in\mathcal{D}(G)$ に対して

$$\varepsilon(u,u)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_D\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\ \nu_{ij}(dx)+\int_D u^2(x)k(dx)$$

がわかる。故に u，$v\in\mathcal{D}(G)$ に対して

$$(3.16)\quad \varepsilon(u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_D\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\ \nu_{ij}(dx)+\int_D u(x)v(x)k(dx)$$

となる。

いま（3.16）のようになる ν_{ij} が2つあったとする。それをそれぞれ $\nu_{ij}^{(1)}$，$\nu_{ij}^{(2)}$，$k^{(1)}$，$k^{(2)}$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$\mu_{ij} = \nu_{i,j}^{(1)} - \nu_{i,j}^{(2)} \quad , \quad \beta = k^{(1)} - k^{(2)}$$

とおけば任意の u , v ∈ $\mathcal{D}$ (G) に対して

$$0 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, \mu_{ij}(dx) + \int_D u(x)v(x)\beta(dx)$$

そこで任意の u ∈ $\mathcal{D}$ (G) に対して，v ∈ $\mathcal{D}$ (G) で supp(u) 上で v は定数になるようにとれば

$$\int_D u(x)\beta(dx) = 0 \quad , \quad \forall u \in \mathcal{D}(G)$$

が言えてG上で $\beta \equiv 0$ となる。したがって，任意の u , v ∈ $\mathcal{D}$ (G) に対して

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, \mu_{ij}(dx) = 0$$

となる。よってG上で $\mu_{ij} = 0$ となる。

これらより，(3.16) のように表わすような ν_{ij} ，k はそれぞれG上で一意的に定まる。

つぎに Gm : Open， $\overline{G}m \subset Gm+1$， $Gm \uparrow D$ となるような {Gm} をとって来る。そうすると任意の u , v ∈ $\mathcal{D}$ (Gm) に対して

(3.17) $$\varepsilon(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, \nu_{ij}^{(m)}(dx) + \int_D u(x)v(x)k^{(m)}(dx)$$

と表わせる $(\nu_{ij}^{(m)})$, $k^{(m)}$ が存在する。ところが左辺は Gm に関係しないので，任意の u , v ∈ $\mathcal{D}$ (Gm) に対して

(3.18)
$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, \nu_{ij}^{(m)}(dx) + \int_D u(x)v(x)k^{(m)}(dx)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, \nu_{ij}^{(m+1)}(dx) + \int_D u(x)v(x)\, k^{(m+1)}(dx)$$

となる。(3.18) より (3.16) の一意性と併せると

(3.19) $$\nu_{ij}^{(m)} = \nu_{ij}^{(m+1)} \,|\, G_m \quad , \quad k^{(m)} = k^{(m+1)}|G_m$$

となっている。このことはD上の対称で非負定符号の Radon 測度の行列 (ν_{ij}) とD上の非負 Radon 測度 k が存在して

$$\nu_{ij}\,|G_m = \nu_{ij}^{(m)} \quad , \quad k\,|G_m = k^{(m)}$$

となることを示している。したがってこの (ν_{ij}) , k を用いると任意の u , v ∈ $\mathcal{D}$(D) に対して

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$\varepsilon(u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\nu_{ij}(dx)+\int_D u(x)v(x)k(dx)$$

となり結論を得る。一意性も各制限した所で成立しているので保証されている。（証明終り）

以上の形の証明は直接的には国田〔35〕によるものをもとにしている。なおこの証明については伊藤正之氏によるものもある。またBeurling－Deny〔3〕には結果のみのべてある。

注意 3.1 上の定理の証明をみると実はつぎのことが言えている。いまDは1つ固定して来たが，その上の拡散過程の全体の行動に（ν_{ij}），kは関係していないので局所的にのみ関係している。そのことを定式化すると次のようになる。まづ記号とし

$$\tau_U=\inf\{t\ ;\ X_t(w)\in U^c\}$$

とおく。

D上に2つの拡散過程$\{X_t,P_x^{(1)}\}=X^{(1)}$，$\{X_t,P_x^{(2)}\}=X^{(2)}$があるとする。任意の点 $x_0\in D$を1つ固定する。

定義 3.1 $X^{(1)}$と$X^{(2)}$が点 x_0 で等しいとはある x_0 の近傍 U_{x_0} が存在して，$X^{(1)}$，$X^{(2)}$より導かれる拡散過程

(3.20) $\{X_t\ ;\ 0\le t<\tau_{U_{x_0}},P_x^{(1)}\}$と$\{X_t\ ;\ 0\le t<\tau_{U_{x_0}},P_x^{(2)}\}$が同等

なことである。すなわち U_{x_0} に台をもつ任意の連続関数fに対して

(3.21) $E_x^{(1)}\{f(X_t)\ ;\ t<\tau_{U_{x_0}}\}=E_x^{(2)}\{f(X_t)\ ;\ t<\tau_{U_{x_0}}\}$，　$x\in U_{x_0}$，

がなりたつことである。

このように定義すれば，点$x_0\in D$で2つの拡散過程が等しければそれに対する（ν_{ij}），kは超関数のsheafの元として，点 x_0 における芽がそれぞれ相等しい。このように考えることは形式的なことでなく実際確率論的な意味を持っている。というのは例えば ν_{ij} が連続関数の密度$a_{ij}(x)$を持っている

$$\nu_{ij}(dx)=a_{ij}(x)dx$$

と書ける時でも点x_0における拡散過程の性質にとって大事なことは x_0 における a_{ij} の値$a_{ij}(x_0)$ではなく点x_0における芽 $a_{ij}^{(x_0)}$ の性質であることは一次元拡散過程の場合に考えれば明らかである。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

上のことをもっと違った形で言えばD上の拡散過程XをG ⊂ Dへの部分拡散過程X^Gを作る形で制限すればそのν_{ij}, kはXの対応するものをGへ制限すればよいことを意味している。

系 4.1 任意のu, v∈$\mathcal{D}$(D)に対して

$$(3.22)\quad \varepsilon(u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_D \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[v\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big](x)\,\nu_{ij}(dx)+\sum_{i,j=1}^{n}\int_D v(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)\,\nu_{ij}(dx)$$

証明 このことのためには

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[v\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big](x)=\frac{\partial}{\partial x_i}v(x)\frac{\partial}{\partial x_j}(x)+v(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)$$

と補助定理3.1の結果に注意すれば明らかである。（証明終り）

さらに次のことを仮定する。

仮定 3.4 $\mathcal{D}$(D)は$\mathcal{F}_\alpha$の中で密である。かつ自然な単射$\mathcal{D}(D)\to\mathcal{F}_\alpha$が連続

この仮定の下でつぎのことが言える。

補題 3.2 拡散過程Xは仮定3.1～3.4をみたすとする。それに対応する$\mathcal{L}_2$－Dirichlet空間を$\mathcal{F}_\alpha$とする。そのとき$\mathcal{F}_\alpha$の共役空間$\mathcal{F}_\alpha'$は$\mathcal{D}'$(D)のHilbert 部分空間である。

証明 任意の f∈$\mathcal{F}_\alpha'$に対して

$$(3.23)\qquad \ell_f(u)=(f\,|\,u)_{\mathcal{F}_\alpha',\,\mathcal{F}_\alpha}\quad,\qquad u\in\mathcal{D}(D)$$

とおく。これは仮定3.4より定義出来る。しかもその仮定より$\mathcal{D}$(D)で$\ell_f(\cdot)$は連続線型汎関数になっているので，$\mathcal{D}'$(D)の元F_fが存在し，

$$(3.24)\qquad \ell_f(u)=\langle F_f\,,u\rangle\quad,\qquad u\in\mathcal{D}(D)\quad,$$

の形に表わされる。そこで$\mathcal{D}$(D)が$\mathcal{F}_\alpha$で密なことに注意すれば(3.24)の形に表わすF_fは唯1つ定まることがわかる。

さらに $f_n, f\in\mathcal{F}_\alpha'$, $f_n\to f$ in $\mathcal{F}_\alpha'$ とすれば定義より

$$\ell_{f_n}(u)\xrightarrow[n\uparrow\infty]{}\ell_f(u)\quad,\qquad \forall u\in\mathcal{D}(D)\,,$$

が言えるので

$$\langle F_{f_n},u\rangle\longrightarrow\langle F_f\,,u\rangle\quad,\qquad \forall u\in\mathcal{D}(D)\,,$$

が言える。よって自然な写像（単射）

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$j : \mathcal{F}'_\alpha \longrightarrow \mathcal{D}'(D)$$

が連続になっている。 (証明終り)。

その時§2の結果を使えば仮定3.1～3.4の下で $\mathcal{D}'(D)$ のHilbert部分空間としての $\mathcal{F}'_\alpha$ の核 H_α：

$$H_\alpha : \mathcal{D}(D) \longrightarrow \mathcal{F}'_\alpha \qquad (\text{または } \mathcal{D}(D) \longrightarrow \mathcal{D}'(D))$$

が定義される。そこで

$$H = \alpha - H_\alpha$$

とおけばこれもまた

(3.25) $H : \mathcal{D}(D) \longrightarrow \mathcal{F}'_\alpha$ (または $\mathcal{D}(D) \longrightarrow \mathcal{D}'(D)$)

と考えられるが内積 ε_α の形からこれは α に無関係に定まっている。

定義3.2 (3.25)のHを拡散過程Xの超関数の意味の生成作用素と呼ぶ。

注意3.2 拡散過程Xの生成作用素についてはそれに対応する半群 $\{T_t ; t \geqq 0\}$ の生成作用素として通常定義する。いまXのGreen作用素を G_α とする。

(a) たとえば $T_t : C_0(D) \longrightarrow C_0(D)$ の時は $\{T_t : t \geqq 0\}$ を $C_0(D)$ に制限して考え，そこでの生成作用素 $\mathcal{G}$ として考える。すなわち

(3.26)
$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) = G_\alpha(C_0(D)) \quad : \alpha - \text{independent}$$
$$\mathcal{G} = \alpha - G_\alpha^{-1}$$

として与えられる。

(b) いまD上の有界可測関数の空間をF(D)とし，

$$T_t : F(D) \longrightarrow F(D)$$

と考える時。この時も $G_\alpha(F(D))$ および $G_\alpha^{-1}\{0\}$ が α に無関係なことを利用して

(3.27)
$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) = G_\alpha(F(D))$$
$$= \alpha - G_\alpha^{-1}$$

として定義する。この時は $\mathcal{G}$ は $G_\alpha^{-1}\{0\}$ の元の自由性を除いて定まる。(K. Ito[27]参照)。

(c) いまのような仮定3.1～3.4が与えられている時は

$$\theta_\alpha \ : \ \mathcal{F}_\alpha \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha'$$

の標準的な同型対応が与えられているから，上の(a)，(b)の一般化として

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{G}) &= \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F} \\ \mathcal{G} &= \alpha - \theta_\alpha \end{aligned}$$

を考えることが出来る。例えば

$$C_0(D) \subset \mathcal{L}_2$$

の時は

$$G_\alpha(C_0(D)) \subset \mathcal{F}_\alpha$$

となるので，(3.28)の $\mathcal{G}$ を $G_\alpha(C_0(D))$ に制限したものが(a)の生成作用素になる。

また一般に $\mathcal{L}_2^0 = \{ f \ ; \ f \in \mathcal{L}_2, \ \lim_{\alpha \uparrow \infty} \alpha G_\alpha f = f \}$ とおけば

$$G_\alpha(\mathcal{L}_2) \in \mathcal{F}_\alpha \quad (G_\alpha(\mathcal{L}_2) : \alpha に無関係)$$

は成立するので，$\mathcal{G}$ を $G_\alpha(\mathcal{L}_2^0)$ に制限した生成作用素も考えられる。これは $u \in G_\alpha(\mathcal{L}_2^0)$ に対して $\mathcal{G}u$ が $\mathcal{L}_2$ の元と同一視されるので

$$(3.29) \qquad \mathcal{G} : \ G_\alpha(\mathcal{L}_2^0) \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

と考えられ，$\mathcal{L}_2$ の意味の生成作用素と呼ばれる。

最后に

$$\mathcal{D}(D) \xrightarrow{j^*} \mathcal{F}_\alpha \xrightarrow{\theta_\alpha} \mathcal{F}_\alpha' \xrightarrow{j} \mathcal{D}'(D)$$

に注意すれば定義3.2のHは(3.28)の $\mathcal{G}$ を $\mathcal{D}(D)$ に制限したものになっている。このような生成作用素は値域がもはや関数でなく超関数になるかわりに，定義域が拡散過程1つ1つに関係せず，常に固定された $\mathcal{D}(D)$ であるという利点がある。勿論上の仮定3.1～3.4がみたされる場合はH，すなわち H_α で空間 $\mathcal{F}_\alpha$ が定まる。たゞこのようにしたためにこのまゝではDでの境界条件を持ったような拡散過程はそのまゝは取扱うことが出来ず定式化を少し修正する必要がある。

<u>系 4. 2</u>　仮定3.1～3.4がみたされるとする。その時任意の $u \in \mathcal{D}(D)$ に対して

$$(3.30) \quad \langle Hu, v \rangle = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \nu_{ij}(dx) - \int_D u(x) v(x) k(dx), \quad v \in \mathcal{D}(D)$$

が成りたつ。

<u>証明</u>　補助定理3.1とHの定義を併せると明らか。（証明終り）。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

これまでのべて来たことから，拡散過程Xは対応する $\mathcal{L}_2$ − Dirichlet 空間 $\mathfrak{F}_\alpha$ が決まるという意味では

$$(3.31)\begin{cases}\text{(a)}\quad \mathcal{D}(D)\text{を考えた座標}\ (S_1(x),\cdots,S_n(x))\\ \text{(b)}\quad \text{対称性の基礎にした測度}\ dm\\ \text{(c)}\quad \text{命題4.1で決まったRadon測度の系}\ (\nu_{ij})\ \text{と Radon 測度}\ dk\end{cases}$$

によって特徴づけられている。この意味で次のような定義をするのは自然である。

定義 3.3　(3.31) で定まった量の組

$$(3.32)\quad \{(S_1(x),\cdots,S_n(x)),\ dm,\ (\nu_{ij}),\ dk\}\equiv G$$

を拡散過程Xの生成要素という。また dm を速度測度，dk を消滅測度，(ν_{ij}) をエネルギー測度系という。

注意 3.3　生成要素は仮定3.1〜3.3だけで決定されており，その決定には仮定3.4は使っていない。その意味で仮定3.4がわからない時も便宜上同じ用語を用いる。

注意 3.4　仮定3.1〜3.4があれば補題3.2の証明でみたすように，任意の $u\in\mathcal{D}(D)$ を固定すると $\ell_u(v)=\varepsilon(u,v)$ は $\mathcal{D}(D)$ 上の線型連続な汎関数になるので，局所性と併せるとある有限階の楕円型微分作用素（超関数の意味にとる）Aが存在して，

$$\varepsilon(u,v)=-\langle Au,v\rangle$$

と書けることは超関数の一般論より容易に示される。補助定理3.1はそのAが $\{\nu_{ij}\}$，k より定まる2階の作用素として決まるところに意味がある。

例 3.1　§2の例2.2で考えた拡散過程では生成要素Gはつぎの形になっている。

$$(3.33)\quad \begin{cases} S_j(x)=x_j, & x=(x_1,\cdots,x_n)\in D,\\ m(dx)=dx & \\ \nu_{ij}(dx)\equiv 0, & i,j=1,2,\cdots,n\\ k(dx)=\lambda\,dx. & \end{cases}$$

この例はすべての $\nu_{ij}=0$ となる意味で典型的である。確率過程の形で表わされる運動で消滅という構成要素を表現するkのみが生きている。

例 3.2　§2の例2.3はいわゆるn次元Brown運動で，もっとも確率的な運動を表わしている

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

ものと考えられているものである。このときは生成要素Gは(2.19)よりつぎの形になっている。

$$(3.34)\quad \begin{cases} S_j(x)=x_j\ , & x=(x_1,\cdots,x_n)\in D\ , \\ m(dx)=dx \\ \nu_{11}(dx)=\nu_{22}(dx)=\cdots=\nu_{nn}(dx)=dx/2 \\ \nu_{ij}=0\ , & i\neq j\ , \\ k(dx)=0 \end{cases}$$

例3.3 生成要素Gに関して(3.34)に密接に関連して来るのはXがn次元Brown運動と同じ到達確率を持つ場合である。すなわち任意のコンパクト集合K⊂Dに対し，到達時間をσ_A，すなわち

$$\sigma_A=\inf\{t\ ;\ X_t\in A\}$$

とするとき，$P_x[\sigma_A\in\cdot]\equiv H_A(x,\cdot)$がn次元Brown運動のそれと同じ場合である。このようなクラスは一般にはMcKean − Tanaka[40]で研究された。すでに注意3.1でのべたように生成要素Gは局所的に定まるので，必要に応じDを充分小さくとっておけば，つぎのことが言える。生存時間ζ，すなわち，

$$\zeta=\inf\{t\ ;\ X_t\notin D\}$$

とする。そのときDにおける$\frac{1}{2}\triangle$に対するGreen関数を今$g(x,y)$とおけばD上のRadon測度$m(dx)$が存在し

$$(3.35)\qquad E_x[\zeta]=\int_D g(x,y)m(dy)\qquad x\in D$$

と書ける。しかも$G_\alpha(x,dy)$はmに関し対称な密度$g_\alpha(x,y)$をもち

$$G_\alpha(x,dy)=g_\alpha(x,y)\,m(dy)$$

となる。このmに関してXは仮定3.1，3.2をみたす。それのみならず

$$(3.36)\qquad g_0(x,y)=g(x,y)$$

となる。このことは同じ到達確率を持つことからの帰結である。いま$u\in\mathcal{D}(D)$をもって来ると

$$u(x)=\int_D g(x,y)\left(-\frac{1}{2}\triangle u(y)\right)dy$$

と表わされる。また(3.35)と(3.36)よりこの場合はG_0が意味があり

$$(3.37)\qquad G_\alpha-G_0+\alpha G_0G_\alpha=0$$

となる。したがって $u,v\in\mathcal{D}(D)$とすると

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$\alpha\int_D v(x)\left(u(x)-G_\alpha u(x)\right)m(dx)=\alpha\int_D v(x)\left\{\int_D g_0(x,y)\left(-\frac{1}{2}\triangle u\right)(y)dy\right.$$

$$\left.-\alpha\int_D g_\alpha(x,y)\int_D g_0(z,y)\left(-\frac{1}{2}\triangle u(y)\right)m(dz)dy\right\}m(dx)$$

$$=\alpha\int_D\left\{G_0v(y)-\alpha G_0G_\alpha v(y)\right\}\left(-\frac{1}{2}\triangle u\right)(y)dy$$

こゝで(3.3 7)を用いると

$$=\alpha\int_D G_\alpha v(y)\left(-\frac{1}{2}\triangle u\right)(y)dy$$

となる。よって

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha(u-\alpha G_\alpha u|v)_{\mathcal{L}_2}=-\frac{1}{2}\int_D v(y)\triangle u(y)dy$$

となり，$\mathcal{D}(D)\subset\mathcal{F}$ が言える。よって仮定3.3がみたされる。しかも

(3.38) $$\varepsilon(u,v)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_D\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx$$

となる。よって生成要素Gは速度測度mを除いて(3.3 4)と同じである。

さらにこの場合は $v\in\mathcal{F}$, $u\in\mathcal{D}(D)$ とすると

$$\alpha(u-\alpha G_\alpha u|v)_{\mathcal{L}_2}=\alpha\int_D G_\alpha v(y)\left(-\frac{1}{2}\triangle u\right)(y)dy$$

が常に成立するので，任意の $v\in\mathcal{F}$, $u\in\mathcal{D}(D)$ に対して

(3.39) $$\varepsilon(u,v)=-\frac{1}{2}\int_D v(x)\triangle u(y)dy$$

となる。そのことと(3.3 5)より $\mathcal{D}(D)$ が $\mathcal{F}$ で密であることが出て仮定3.4もみたされることが言える。

この結果より Ito－McKean[26] の意味で正則な区間の一次元拡散過程Xは区間の内部における消滅がなく標準尺度を通常のものに取り直せばエネルギー測度は常に $dx/2$ であることが言えた

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

ことになる。また注意すべきことは多次元の時は速度測度も全く任意の Radon 測度がとれるわけでなく，或る程度の制限を受けることが McKean − Tanaka〔40〕で知られている。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

§4 調和座標系が存在する場合

これまでの一般論では座標は事前に与えられたものを使い，拡散過程Xとの関連では$\mathcal{D}$(D)⊂$\mathcal{F}$のみを仮定した。しかし一次元拡散過程についてのFellerやIto-McKean〔26〕の結果からして座標を適当にさがすともっとXに密着したものがあることが想像される。事実Skorohod は一連の仕事〔52〕,〔53〕 でその種のものを求める努力をしているし，具体的に構成される多くの典型的な拡散ではその存在が言える。しかしSkorohod の仕事にも難点があり，現在の所この面の成果は充分ではない。（小林一本尾両氏等によりSkorohod の仕事の難点が指摘されている〔32〕）。ところで一歩ゆづってその種の座標の存在を仮定すると事情は単純になり拡散の構造の決定が楽になることはSkorohod の仕事以来多くの人によって注意されている。

こゝでは Skorohod〔52〕 の調和座標の概念をやゝ変形して導入する。いまXをDでの拡散過程として，仮定3.1 ，3.2がみたされていて対応する$\mathcal{L}_2$－Dirichlet空間を$\mathcal{F}_\alpha=\{\mathcal{F},\ \varepsilon_\alpha\}$とする。

定義 4. 1　Dで定義されたn個の関数系$\phi\equiv(S_1(x),S_2(x),\cdots,S_n(x))$がXに関して調和座標系であるとは次のことがなりたつことである。

(i)　n次元多様性ϕ(D)が存在して

$$\phi:\ D\longrightarrow\phi(D)$$
$$x\longrightarrow(S_1(x),\cdots,S_n(x))$$

で定まる写像ϕが位相同型を与えている。

(ii)　Dの中の任意の開集合Gで$\overline{G}\subset D$なるものに対して，つぎの性質を持ったn個の関数系$(S_1^*(x),\cdots,S_n^*(x))$が存在する：

(a)　$S_j^*\in\mathcal{F}$,　$S_j^*|_G=S_j|_G$　　$j=1,2,\cdots,n$

(b)　supp(v)⊂G なる任意の$v\in\mathcal{F}$に対して

$$\varepsilon(S_j^*,v)=0,\qquad j=1,2,\cdots,n\ 。$$

注意 4. 1　(a)本来は§3で既に注意したように局所的に問題は考えるわけだから，調和局所座標系の概念を導入して進んだ方がよい。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

(b) もしも仮定3.3を認める時は，定義4.1の(ii)，(b)の $v \in \mathcal{F}$ を $v \in \mathcal{D}(D)$ の形にゆるめておく方が便利なことが多い。以下特に断りなくこの形で使うことがある。

定義 4.2 Xの生成要素Gを定める座標系がXに関して調和座標系である時Gを特に標準生成要素と呼ぶ。

仮定 4.1 生成要素Gで消滅測度 $k \equiv 0$ である。

補題 4.1 仮定4.1がなりたつためには仮定3.1～3.3の下で，つぎのことが必要かつ充分である。任意の $u, v \in \mathcal{D}(D)$ で $\mathrm{supp}(v)$ 上で u が定数ならば

$$\varepsilon(u, v) = 0$$

である。

証明 仮定3.1～3.3の下で任意の $u, v \in \mathcal{D}(D)$ に対して

$$\varepsilon(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \nu_{ij}(dx) + \int_D u(x) v(x) k(dx) \tag{4.1}$$

仮定4.1より任意の $u, v \in \mathcal{D}(D)$ に対して

$$\varepsilon(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \nu_{ij}(dx)$$

である。上式で $\mathrm{supp}(v)$ 上で u が定数ならば

$$\varepsilon(u, v) = 0$$

は明らかである。逆に $\mathrm{supp}(v)$ 上で u が定数ならば(4.1)より

$$\varepsilon(u, v) = \int_D u(x) v(x) k(dx) = \int_D v(x) k(dx)\, c$$

こゝで c はある定数。

故に

$$\varepsilon(u, v) = 0$$

より

$$\int_D v(x) k(dx) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(D),$$

となり，$k \equiv 0$ が言える。 (証明終り)。

定理 4. 1　　仮定3.1～3.3と仮定4.1がみたされるとする。そのとき

$$S_j(x)=x_j\quad,\quad x=(x_1,\cdots,x_n)\in D,$$

が調和座標であるための必要かつ充分条件は

$$(4.2)\qquad \sum_{j=1}^{n}\int_D \frac{\partial}{\partial x_j}u(x)\,\nu_{j,k}(dx)=0,\quad u\in\mathcal{D}(D),\quad k=1,2,\cdots,n$$

証明　まづ必要性を示そう。調和座標の定義より，任意のGが開集合で$\overline{G}\subset D$なる時

$$S^*_{j|G}=S_{j|G}\quad,\quad S^*_j\in\mathcal{D}(D)$$

が存在する。その時任意の$u\in\mathcal{D}(D)$に対して

$$0=\varepsilon(S^*_j\ ,u)$$

になるようにとってあるので，仮定4.1に注意すれば

$$0=\sum_{i,k=1}^{n}\int_D\frac{\partial}{\partial x_i}S^*_j(x)\frac{\partial}{\partial x_k}u(x)\nu_{ik}(dx)=\sum_{i,k=1}^{n}\int_D\frac{\partial}{\partial x_i}S_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x)\nu_{ik}(dx)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_D\frac{\partial}{\partial x_k}u(x)\,\nu_{jk}(dx),\qquad u\in\mathcal{D}(D),$$

であを。よって(4.2)が言えた。

逆に(4.3)の変形を逆にたどれば

$$0=\sum_{k=1}^{n}\int_D\frac{\partial}{\partial x_k}u(x)\,\nu_{jk}(dx)=\sum_{i,k=1}^{n}\int_D\frac{\partial}{\partial x_i}S^*_j(x)\frac{\partial}{\partial x_k}u(x)\,\nu_{i,k}(dx)$$

$$=\varepsilon(S^*_j\ ,u)\qquad,\qquad u\in\mathcal{D}(D),$$

なるS^*_jが構成出来る。よって注意4.1の意味で与えられた座標が調和座標なることが言える。

（証明終り）。

系 4.1　仮定3.1～3.3，仮定4.1がみたされたGが標準生成要素ならば

$$\varepsilon(u,v)=-\sum_{i,j=1}^{n}\int_D v(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)\,\nu_{ij}(dx),\quad u,v\in\mathcal{D}(D),$$

である。

証明　系3.1により一般に

$$(4.4)\qquad \varepsilon(u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_D\frac{\partial}{\partial x_i}\left[v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right](x)\,\nu_{ij}(dx)-\sum_{i,j=1}^{n}\int_D v(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)\,\nu_{ij}(dx)$$

である。ところが仮定から調和座標をとっているので，

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$w_j = v\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \mathcal{D} \quad (D)$$

に注意して定理4.1を使えば

$$\sum_{i=1}^{n}\int_D \frac{\partial}{\partial x_i}\left[v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right](x)\,\nu_{ij}(dx) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

したがって

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_D \frac{\partial}{\partial x_i}\left[v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right](x)\,\nu_{ij}(dx) = 0$$

となるので，(4.4)より結論が出る。 (証明終り)

系4.2 仮定3.1～3.3，仮定4.1がみたされるとする。かつGは標準生成要素で，しかも，もし $i \neq j$ ならば

(4.5) $$\nu_{ij} = 0$$

とする。その時は R^{n-1} 上のRadon測度 ν_j が存在し

(4.6) $$\nu_{jj}(dx) = dx_j\,\nu_j(dx_1\cdots dx_{j-1}\,dx_{j+1}\cdots dx_n)$$

と表わされる。

証明 §3で注意したように ν_{ij} は局所的に定まる量であるのでDがn次元直方体

$$D = \prod_{j=1}^{n}(\gamma_j^{(1)}, \gamma_j^{(2)})$$

の時に示せば充分である。いま

$$u(x) = g_1(x_j)\,g_2(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$$

の形の $\mathcal{D}$ (D)の元に対して定理4.1を適用すれば

$$0 = \int_D \frac{\partial}{\partial x_j}u(x)\,\nu_{jj}(dx) = \int_{\gamma_j^{(1)}}^{\gamma_j^{(2)}}\frac{\partial}{\partial x_j}g_1(x_j)\,\nu_{g_2}^{(j)}(dx_j)$$

$$\nu_{g_2}^{(j)}(d\xi) = \int_{\gamma_1^{(1)}}^{\gamma_1^{(2)}}\cdots\int_{\gamma_{j-1}^{(1)}}^{\gamma_{j-1}^{(2)}}\int_{\gamma_{j+1}^{(1)}}^{\gamma_{j+1}^{(2)}}\cdots\int_{\gamma_n^{(1)}}^{\gamma_n^{(2)}} g_2(x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots x_n)\,\nu_{jj}(dx_1\cdots dx_{j-1}d\xi\,dx_{j+1}\cdots dx_n)$$

となる。故に任意の $g \in \mathcal{D}((\gamma_j^{(1)}, \gamma_j^{(2)}))$ に対して

$$\int_{\gamma_j^{(1)}}^{\gamma_j^{(2)}} \frac{\partial g}{\partial x_j}(\xi)\, \nu_{g_2}^{(j)}(d\xi) = 0$$

となる。したがって

$$(4.8) \qquad \nu_{g_2}^{(j)}(d\xi) = C_j(g_2)\, d\xi$$

なる g_2 に関係する定数 $C_j(g_2)$ が存在する。ところが(4.7)と(4.8)から $C_j(g_2)$ は g_2 に関して非負連続線型汎関数であるので(4.6)が言える。　(証明終り)。

<u>系 4.3</u>　仮定3.1～3.4，仮定4.1がみたされていて，Gが標準生成要素ならばつぎのことが言える。

(i) 任意の $u \in \mathcal{D}(D)$ に対して

$$\langle Hu, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int_D v(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, \nu_{ij}(dx) \quad , \qquad v \in \mathcal{D}(D) \quad ,$$

(ii) 定義4.1の(ii)のG，S_j^*，$j = 1, 2, \cdots, n$ をとって来れば

$$\nu_{i,j}|_G = \frac{1}{2}\left(H(S_i^* S_j^*) \right)\Big|_G$$

となる。

<u>証明</u>　(i)は仮定3.4があってHが定義されているので系4.1そのものである。

つぎに $(S_i^* S_j^*) \in \mathcal{D}(D)$ によって(i)より

$$\left(H(S_j^* S_i^*) \right)\Big|_G$$

が測度として意味をもつ。しかも(i)より任意の $v \in \mathcal{D}(D)$，$\operatorname{supp}(v) \subset G$ に対して

$$\langle H(S_i^* S_j^*), v \rangle = \sum_{k,\ell=1}^{n} \int_D v(x) \frac{\partial^2 (S_i^* S_j^*)}{\partial x_k \partial x_\ell}(x)\, \nu_{k,\ell}(dx)$$

$$= 2 \int_D v(x)\, \nu_{i,j}(dx)$$

となり結論を得る。　(証明終り)

<u>注意 4.2</u>　仮定3.1～3.4，仮定4.1がみたされ，Gが標準生成要素ならば系4.3でHuが測度になるので，任意の $v \in C_0(D)$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$\int_D v(x)Hu(dx) \quad , \qquad u \in \mathcal{D}(D)$$

が意味がある。というのは $u \in \mathcal{D}(D)$ であるので Hu の台はDの中のコンパクト集合であるので値は有限になる。

系4.4 仮定3.1～3.4，仮定4.1がみたされ，Gは標準生成要素とする。しかも拡散過程Xの半群$\{T_t\ ;\ t \geqq 0\}$が

$$T_t\ :\ C_0(D) \longrightarrow C_0(D)$$

の強連続な半群になっているとする。その時，任意のu，$v \in \mathcal{D}(D)$に対して

$$(4.9) \qquad \int_D v(x)(T_t u(x) - u(x))m(dx) = \int_0^t ds \int_D T_s v(x) Hu(dx)$$

である。

証明　§2にのべた一般論より

$$\varepsilon_\alpha(v, G_\alpha u) = \int_D v(x)u(x)m(dx)$$

よって

$$\alpha \int_D v(x)(G_\alpha u(x) - u(x))m(dx) = -\varepsilon(v, G_\alpha u)$$

こゝでH_αが

$$\mathcal{F}\alpha \longrightarrow \mathcal{F}'\alpha$$

のθ_αなる同型対応の $\mathcal{D}(D)$ への制限になっていることについての注意3.2と注意4.2を使えば

$$-\varepsilon(v, G_\alpha u) = \int_D G_\alpha v(x) Hu(dx)$$

故に

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \int_D v(x)\left(T_t u(x) - u(x)\right)m(dx) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \int_0^t \int_D T_s v(x) Hu(dx)\, ds$$

となり結論を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終り）

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

定理 4.2 仮定3.1～3.3，仮定4.1がみたされ，Gが標準生成要素ならばエネルギー測度は一点にmass を持たない。

証明。 $x_0 \in D$を1つ固定してそれについて言えばよい。

$$\nu^*_{j,k}(dx) = \nu_{j,k}(dx) - \nu_{j,k}(\{x_0\})\delta_{\{x_0\}}(dx)$$

なる測度を考える。いまつぎの条件をみたす$g \in \mathcal{D}(D)$を1つとって来る。

(i) $g(x) = 0, \qquad |x - x_0| \geqq 1$

(ii) $g_i = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ とするとき

$$g_i(x_0) > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\exists M: \quad |g_i| < M, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

そこで

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon g\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon} + x_0\right)$$

とおけば

$$u_\varepsilon \in \mathcal{D}(D), \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} u_\varepsilon(x_0) = g_i(x_0), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} u_\varepsilon(x) = g_i\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon} + x_0\right)$$
$$i = 1, 2, \cdots, n$$

となる。調和座標をとってあるので，定理4.1によって

$$\sum_{j=1}^{n} \int_D \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon(x)\, \nu_{j,k}(dx) = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

故に

$$-\sum_{j=1}^{n} \int_D \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon(x)\, \nu^*_{j,k}(dx) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon(x_0)\, \nu_{j,k}(\{x_0\}), \quad k = 1, 2, \cdots n$$
$$k = 1, 2, \cdots, n$$

となるので

$$-\sum_{j=1}^{n} \int_{S_\varepsilon(x_0)} g_j\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon} + x_0\right) \nu^*_{j,k}(dx) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_0)\, \nu_{j,k}(\{x_0\}),$$
$$k = 1, 2, \cdots, n$$

となる。こゝで $S_\varepsilon(x_0)=\{x\,;\,|x-x_0|<\varepsilon\}$. したがって

$$\left|\sum_{j=1}^{n} g_j(x_0)\,\nu_{ij}(\{x_0\})\right| \leq M\sum_{j=1}^{n}\left|\nu^{*}_{j,k}(S_\varepsilon(0))\right|, \qquad k=1,2,\cdots n$$

こゝで $\varepsilon\to 0$ とすれば $\nu^{*}_{i,k}$ の定義より上式の右辺は0に行く。よって

$$\sum_{j=1}^{n} g_j(x_0)\,\nu_{j,k}(\{x_0\})=0 \qquad\qquad k=1,2,\cdots,n$$

上の条件をこわさないで $g(x)$ を適当にとれば上式より

$$\nu_{j,k}(\{x_0\})=0 \quad , \qquad k,j=1,2,\cdots,n$$

が言える。 (証明終り)。

注意 4.3 調和座標はなめらかでなくても $\mathcal{D}(D)\subset\mathcal{F}$ となることがある。たとえば $D=(\gamma_1,\gamma_2)$, SはD上で狭義増加連続関数で $-\infty<S(\gamma_1)<S(\gamma_2)<\infty$。 mはD上の非負な測度で，任意の開集合Aで空でないものに対し $m(A)\neq 0$，かつ $m(D)<\infty$ とする。そのとき，非負で強連続で contraction な半群

$$T_t:\ C_0(D)\longrightarrow C_0(D)$$

で，Hille－吉田の意味の生成作用素が

$$u(x) = \frac{D_s^{+}u(dx)}{m(dx)}$$

となるような一次元拡散過程が存在する。こゝで D_s^{+} はSに関する右微分を表わす。(Ito-McKean〔26〕)。しかも上に与えたmに対して仮定3.1と仮定3.2がみたされることも良く知られている。これらの事情は例3.3の場合と類似的である。この拡散過程XのGreen作用素を G_α とすれば

$$G_\alpha f(x)=\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} g_\alpha(x,y)f(y)m(dy)$$

の形に表わされ，$g_\alpha(x,y)$ はx，yに関し対称で，しかも $g_0(x,y)$ は存在し

$$(4.10)\qquad g_0(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\bigl(S(x)-S(\gamma_1)\bigr)\bigl(S(\gamma_2)-S(y)\bigr)}{S(\gamma_2)-S(\gamma_1)}, & x<y,\\[2ex] \dfrac{\bigl(S(y)-S(\gamma_1)\bigr)\bigl(S(\gamma_2)-S(x)\bigr)}{S(\gamma_2)-S(\gamma_1)}, & x\geq y,\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

となる。（Ito−McKean〔26〕）（4.10）に注意すると，任意の$u\in\mathcal{D}(D)$に対し

$$(4.11)\qquad u(x)=-\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} g_0(x,y)(D_s^+u)(dy)$$

なる表現が得られる。したがって例3.3の場合と同じ考えで，任意のu，$v\in\mathcal{D}(D)$に対し，

$$\lim_{\beta\to\infty}\beta(u-\beta G_\beta u\,|\,v)_{\mathcal{L}^2}=\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} v(x)(D_s^+u)(dx)$$

となる。このことから $\mathcal{D}(D)\subset\mathcal{F}$ と

$$(4.12)\qquad \varepsilon(u,v)=\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} D_s^+v(x)D_s^+u(x)S(dx).$$

が出る。明らかにSは調和座標になっていて，しかもなめらかさがない場合もふくまれている。またこの例から正則区間における一次元拡散過程ではエネルギー測度は調和座標から一意的に定まり，しかも離散部分をふくまないことが言える。

例 4.1（直積拡散過程） $D=\overbrace{(0,1)\times\cdots\times(0,1)}^{n}\equiv(0,1)^n$ なる立方体を考える。各$(0,1)$で注意4.3でのべた1次元拡散過程$X^{(i)}$を考える。たゞし，それぞれに対し，$S(x)$は通常の座標xにとっておく。その時 Ito−McKean〔26〕で知られているように各$X^{(i)}$に対して，対応する$m^{(i)}$をもって来れば推移確率$P^{(i)}(t,\xi,d\eta)$は

$$(4.12)\qquad P^{(i)}(t,\xi,d\eta)=p^{(i)}(t,\xi,\eta)\,m^{(i)}(d\eta)$$

と表わされ，各 $P^{(i)}(t,\xi,\eta)$は，ξ，ηに関し対称で，$(0,\infty)\times(0,1)\times(0,1)$ (t,ξ,η)について連続で正である。そこで$m^{(i)}$，$i=1,2,\cdots,n$，の直積測度をm，すなわち

$$(4.13)\qquad m(dx_1\cdots dx_n)=m^{(1)}(dx_1)m^{(2)}(dx_2)\cdots m^{(n)}(dx_n)$$

とすると，

$$(4.14)\qquad \begin{aligned}&p(t,x,y)m(dy)\\ &p(t,(x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n))=\prod_{i=1}^{n}p^{(i)}(t,x_i,y_i)\end{aligned}$$

を推移確率にするD上の拡散過程Xが存在し，その半群は

$$(4.15)\qquad \begin{aligned}&T_t:\ C_0(D)\longrightarrow C_0(D)\\ &T_tf(x)=\int_D f(y)p(t,x,y)m(dy)\end{aligned}$$

で与えられる。このXを$X^{(i)}$, $i=1,2,\cdots,n$ の直積という。これが仮定3.1, 仮定 3.2を みたすことは容易に示される。さらに

$$g_\alpha(x,y)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,p(t,x,y)\,dt$$

とおけば

$$g_0(x,y)$$

も定義出来る。直積であることと一次元拡散過程についての結果を用いると

$$(4.16)\quad \begin{aligned} &X_t=(X_t^{(1)},\cdots,X_t^{(n)})\\ &A_t^{(i)}=X_t^{(i)}-X_0^{(i)}\end{aligned}$$

とおけば$A_t^{(i)}$は連続で平均0を2乗可積分な additive functional であり, Ito の変換公式(1.1)より, 任意の$u\in\mathcal{D}(D)$に対して

$$\begin{aligned} u(X_t)-u(X_0)&=\sum_{i=1}^n\int_0^t\frac{\partial u}{\partial x_i}(X_s)\,dA_s^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\int_0^t\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(X_s)\,d\langle A_s^{(i)},A_s^{(j)}\rangle\\ &=\sum_{i=1}^n\int_0^t\frac{\partial u}{\partial x_i}(X_s)\,dA_s^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_0^t\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(X_s)\,d\langle A_s^{(i)},A_s^{(i)}\rangle\end{aligned}$$

が言える。故に

$$(4.17)\quad \begin{aligned}&\nu_{ii}(dx)=m^{(1)}(dx_1)\cdots m^{(i-1)}(dx_{i-1})\,dx_i\,m^{(i+1)}(dx_{i+1})\cdots m^{(n)}(dx_n)/2\\ &\nu_{ij}=0,\quad i\neq j\end{aligned}$$

とおけば, 任意の$u\in\mathcal{D}(D)$に対し

$$(4.18)\quad T_t u(x)-u(x)=\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_D p(s,x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(y)\,\nu_{ii}(dy)$$

となる。この(4.18)より

$$(4.19)\quad \alpha G_\alpha u(x)-u(x)=\sum_{i=1}^n\int_D g_\alpha(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i}(d)\,\nu_{ii}(dy)$$

が得られるので例3.3の場合と全く同じ考えで

$$(4.20)\quad \begin{aligned}&\mathcal{D}(D)\subset\mathcal{F}\\ &\varepsilon(u,v)=\sum_{i=1}^n\int_D\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,\nu_{ii}(dx),\quad u,v\in\mathcal{D}(D)\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

が示される。よってXは標準生成要素を持っていて，速度測度は（4.13）で与えられ，エネルギー測度は（4.17）で与えられ，

$$k \equiv 0$$

である。なお（4.19）より任意の$u \in \mathcal{D}(D)$に対して

$$u(x) = -\sum_{i=1}^{n} \int_D g_0(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(y)\, \nu_{ii}(dy)$$

となっているので，Blumenthal－Getoor〔4〕の意味でXと同じ到達確率を持つ拡散過程はやはり標準生成要素を持ち，Xとは速度測度のみが異なることが例4.3と同じにして示される。たゞし速度測度としてどんなものが許されるかを一般に決定することは容易ではないようである。

注意4.4 上の例4.1は$n=2$，すなわち2次元の時は系4.2と併せると，もう少しはっきりした主張を含んでいる。すなわち標準生成要素をもち，仮定4.1と（4.5）の条件をみたす2次元拡散過程Xは一次元拡散過程の直積と同じ到達確率を持つものとして実現されている。もちろん$n \geqq 3$の場合は（4.17）より（4.5）をみたすものより一般的には直積と同じ到達確率を持つものは狭いクラスである。実際狭いことは后で例を用いて示す。

これまで，$i \neq j$の時，$\nu_{ij} = 0$ならば事情が非常に簡単になることをのべて来たが，適当な位相同型な変換でとんな時にそれがみたされるように出来るかは一般には難かしい問題のようである。いま$n=2$，すなわち2次元で考えることにして，

$$\nu_{ij}(dx) = a_{ij}(x)\, dx$$

$$\begin{cases} \text{(i)} & a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \\ \text{(ii)} & a_{ij} \text{ は2回連続的微分可能} \end{cases}$$

なる条件がみたされているとする。その時はつぎのことが言える。

任意に$x^\circ \in D$を固定すると，その充分小さな近傍Gに対して

$$\phi : (x_1, x_2) \longmapsto (\xi_1, \xi_2)$$

なる位相同型写像ϕが存在し，任意の$u, v \in \mathcal{D}(G)$に対して

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, a_{ij}(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\phi(G)} \frac{\partial (u \circ \phi^{-1})}{\partial \xi_i}(\xi) \frac{\partial (v \circ \phi^{-1})}{\partial \xi_i}(\xi)\, w \circ \phi^{-1}(\xi)\, d\xi$$

$$w(x) = \sqrt{a_{11}(x)\, a_{22}(x) - a_{12}(x)^2}$$

となる。

このことはつぎのようにして示される。

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)a_{ij}(x)dx$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_G \frac{\partial}{\partial x_i}(u\circ\phi^{-1})(\phi(x)) \ \frac{\partial}{\partial x_j}(u\circ\phi^{-1})(\phi(x))a_{ij}(x)dx$$

$$= \int_G \Big\{\frac{\partial u\circ\phi^{-1}}{\partial \xi_1}(\phi(x))\frac{\partial v\circ\phi^{-1}}{\partial \xi_1}(\phi(x))\Big[a_{11}(x)\Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\Big)^2 + 2a_{12}(x)\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + a_{22}(x)\Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\Big)^2\Big]$$

$$+ \frac{\partial u\circ\phi^{-1}}{\partial \xi_1}(\phi(x))\frac{\partial v\circ\phi^{-1}}{\partial \xi_1}(\phi(x))\Big[a_{11}(x)\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + a_{12}(x)\Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\Big)$$

$$+ a_{22}(x)\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\Big]$$

$$+ \frac{\partial u\circ\phi^{-1}}{\partial \xi_2}(\phi(x))\frac{\partial v\circ\phi^{-1}}{\partial \xi_1}(\phi(x))\Big[a_{11}(x)\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + a_{12}(x)\Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\Big)$$

$$+ a_{22}(x)\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\Big]$$

$$+ \frac{\partial u\circ\phi^{-1}}{\partial \xi_2}(\phi(x))\frac{\partial v\circ\phi^{-1}}{\partial \xi_2}(\phi(x))\Big[a_{11}(x)\Big(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\Big)^2 + 2a_{12}(x)\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}$$

$$+ a_{22}(x)\Big(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\Big)^2\Big]\Big\}dx$$

となる。ところが，(i)，(ii)の条件の下で

$$a_{11}(x)\Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\Big)^2 + 2a_{12}(x)\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + a_{22}(x)\Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\Big)^2$$

$$= a_{11}(x)\Big(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\Big)^2 + 2a_{12}(x)\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + a_{22}(x)\Big(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\Big)^2$$

$$a_{11}(x)\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + a_{12}(x)\Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\Big) + a_{22}(x)\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\Big|\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\Big| = \frac{1}{W}\Big(a_{11}\Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\Big)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + a_{22}\Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\Big)^2\Big)$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

をみたす位相同型で充分なめらかなφがある近傍Gで存在する。このことは例えばCourant－Hilbert〔10〕（Ⅲ章§1，pp. 159～160，Ⅳ章§8 pp. 350～357）またはPetrovsky〔45〕に詳しい。

こゝで上のことと積分の変数変換の公式を併せると目的の式が得られる。

なお上のことについてはAhlfors－Bers〔1〕やChern〔9〕等で一層の条件の改良や証明の改良が行なわれている。

2変数の時はこのようなことが可能であったが，3次元以上ではこのようなことは一般には可能でなく，どんな小さな近傍をとってもヤコビヤンが0にならないような変換では対角化されないような例を作ることが出来る。それらのことに関しては例えばPetrovsky〔45〕，1章§5を参照。

注意 4.5 （singular driftの例）。 一般の拡散過程について適当な定義をした時調和になる座標があることと，対称性の関連性については現在の所，必ずしも明らかにされていない。こゝでは座標がそれら自然に平均0のmartingale を導くという意味（(4.23)式の意味）で調和になりながら対称ではない具体例を示す。またこの例は対称でなくても適当な意味で超関数の意味の生成作用素が定義出来ることも示している。

$B \equiv \{B_t ; t \geqq 0 , P_x\}$を$R^2$におけるBrown運動とする。$\varphi_t$は

$$\varphi_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(B_s^{(2)})\, ds , \qquad B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$$

で定義されるBの x_1－軸上の局所時間とする。その時良く知られていることは

$$P_{(x_1,0)}[B_t^{(2)} \in da , \varphi_t \in db] = \frac{|a|+b}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(|a|+b)^2}{2t}} da\, db , \quad a \in R^1, \quad b > 0 ,$$

である。（P. Lévy〔37〕またはIto－McKean〔26〕2章§2，Problem 3）。その時

$$X_t^{(1)} = B_t^{(1)} + \varphi_t \quad , \quad X_t^{(2)} = B_t^{(2)}$$

$$X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$$

とおけば$X = \{X_t ; t \geqq 0 , P_x\}$は$R^2$上の拡散過程である。（Ikeda〔25〕）。その時Xの推移確率$P(t, x, dy)$は次の形で与えられる。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$P(t,x,dy)=p(t,x,y)dy$$

$$p(t,x,y)=I(x_2,y_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{2t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{(x_2-y_2)^2}{2t}}-e^{-\frac{(x_2+y_2)^2}{2t}}\right)$$

(4.2 1)
$$+\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x_1-y_1+s)^2}{2t}}\frac{|x_2|+|y_2|+s}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{(|x_2|+|y_2|+s)^2}{2t}}ds$$

$$I(\xi,\eta)=\begin{cases}1, & \xi,\eta>0 \text{ または } \xi,\eta<0,\\ 0, & \text{他の場合。}\end{cases}$$

実際(4.2 1)は次のようにして示される。$f\in\mathcal{D}(R^2)$に対して

$$E_{(x_1,0)}\left[f(X_t^{(1)},X_t^{(2)})\right]=E_{(x_1,0)}\left[f(B_t^{(1)}+\varphi_t,B_t^{(2)})\right]$$

$$=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty f(y_1+s,y_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{2t}}\frac{(y_2)+s}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{(|y_2|+s)^2}{2t}}dy_1\,dy_2\,ds$$

$$=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(y_1,y_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x_1-y_1+s)^2}{2t}}\frac{|y_2|+s}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{(|y_2|+s)^2}{2t}}dy_1\,dy_2\,ds$$

従って一般に

$$E_{(x_1,x_2)}\left[f(X_t^{(1)},X_t^{(2)})\right]$$

$$=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty I(x_2,y_2)f(y_1,y_1)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{2t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{(x_2-y_2)^2}{2t}}-e^{-\frac{(x_2+y_2)^2}{2t}}\right)dy_1dy_2$$

$$=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty f(y_1,y_2)\int_{-\infty}^\infty\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{(x_1-z_1)^2}{2\theta}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\theta)}}e^{-\frac{(z_1-y_1+s)^2}{2(t-\theta)}}$$

$$\times\frac{|x_2|}{\sqrt{2\pi\theta^3}}e^{-\frac{|x_2|^2}{2\theta}}\frac{|y_2|+s}{\sqrt{2\pi(t-\theta)^3}}e^{-\frac{(|y_2|+s)^2}{t2(t-\theta)}}dz_1\,dy_1\,dy_2\,d\theta\,ds$$

$$=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty I(x_2,y_2)f(y_1,y_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{2t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{(x_2-y_2)^2}{2t}}-e^{-\frac{(x_2+y_2)^2}{2t}}\right)dy_1dy_2$$

$$+\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(y_1,y_2)\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x_1-y_1+s)^2}{2t}}\frac{|x_2|+|y_2|+s}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(|x_2|+|y_2|+s)^2}{2t}}ds$$

となるので(4.21)が示される。

(4.21)よりXのGreen作用素 G_α は少くともLebesgue測度dx を基礎にする限り対称にならないことがわかる。いま

$$g_\alpha(x,y)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,p(t,x,y)\,dt\ ,\qquad \alpha>0\ ,$$

とおけば

$$g_\alpha((x_1,x_2),(y_1,y_2))=g_\alpha((-y_1,y_2),(-x_1,x_2))$$

となる。故に $S\ :\ \mathcal{L}_2\longrightarrow\mathcal{L}_2$ を

$$f\longmapsto(Sf)(x_1,x_2)=f(-x_1,x_2)$$

とおけば，u，v $\in\mathcal{L}_2$ に対して

$$\int_{R^2}v(x)G_\alpha u(x)dx=\int_{R^2}(Su)(x)G_\alpha(Sv)(x)dx$$

となる。実際

$$\int_{R^2}v(x)G_\alpha u(x)dx=\int_{R^2}u(y)\int_{R^2}g_\alpha((-y_1,y_2),(-x_1,y_2))(Sv)(-x_1,x_2)dx\,dy$$

$$=\int_{R^2}u(y)G_\alpha(Sv)((-y_1,y_2))dy$$

$$=\int_{R^2}(Su)(y)G_\alpha(Sv)(y)dy\ 。$$

かつ $G_\alpha\ :\ \mathcal{L}_2\longrightarrow\mathcal{L}_2$

も言える。

いま

$$\begin{aligned}S_1(x)&=x_1-|x_2|\\ S_2(x)&=x_2\end{aligned}\quad ,\qquad x=(x_1x_2)$$

とおけば(S_1,S_2)は

$$\phi:\ R^2\longrightarrow R^2$$

$$x\longmapsto\phi(x)=(S_1(x),S_2(x))$$

が位相同型を与えるので R^2 の座標を決める。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

さらに

$$A_t^{(i)} = S_i(X_t) - S_i(X_0)$$

とおけば

(4.23) $A_t^{(i)}$: 平均0の continuous additive functional .

という意味で($S_1(x)$, $S_2(x)$)は調和座標である。すなわち

(4.24) $T_t S_i(x) = S_i(x)$, $x \in R^2$, $i = 1, 2$

が成りたつ。というのは

(4.25) $v(x) = |S_2(x)|$

とおけば

$$A_t^{[v]} = v(B_t^{(2)}) - v(B_o^{(2)}) - \varphi_t$$

は連続で平均0の additive functional で

$$A_t^v = \int_0^t I^*(B_s^{(2)})\, dB_s^{(2)}, \qquad I^*(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geqq 0, \\ -1, & \xi < 0, \end{cases}$$

と表現される。(Motoo−S. Watanabe[44])。

よって

(4.26)
$$\begin{aligned} A_t^{(1)} &= B_t^{(1)} - B_o^{(1)} - A_t^{[v]} \\ A_t^{(2)} &= B_t^{(2)} - B_o^{(2)} \end{aligned}$$

となる。これから(4.23),(4.24)が言えることは明らかである。

なおXは新しい座標(S_1, S_2)で考えてもそれに関するLebesgue測度をとっても対称にならないことが(4.21)より言える。こゝで座標変換ϕのヤコービヤンはa. e で1である。

いま(S_1, S_2)に対して $\mathcal{D}(R^2)$ を考えてみよう。記号として

$$f^*(x) = f(s_1(x), s_2(x))$$

を用いる。任意の $u \in \mathcal{D}(R^2)$ に対して, $\alpha \to \infty$ の時

(4.27) $\alpha(\alpha G_\alpha u^*(x) - u^*(x))\, dx$

がどんな意味で収束するかを考えてみる。対称ではないので,§3のことは自動的には使えないが $\mathcal{D}(R^2)'$ では収束し,超関数の意味の生成作用素が定義されることが言える。実際任意の $v \in \mathcal{D}(R^2)$ に対して

$$\alpha(v^* \mid \alpha G_\alpha u^* - u^*)\ \xrightarrow[\mathcal{L}_2]{}\ \langle v \mid Hu \rangle$$

が存在し,

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$<v\,|\,Hu> = -\int_{R^2}\frac{\partial v}{\partial s_1}((s_1,s_2))\frac{\partial u}{\partial s_1}((s_1,s_2))ds_1ds_2$$

$$-\frac{1}{2}\int_{R^2}\frac{\partial v}{\partial s_2}((s_1,s_2))\frac{\partial u}{\partial s_2}((s_1,s_2))ds_1ds_2$$

$$-\int_{R^2}\frac{\partial v}{\partial s_2}((s_1,s_2))\frac{\partial u}{\partial s_2}((s_1,s_2))I^*(s_2)ds_1ds_2$$

となる。この証明はつぎのようにして示される。Itoの公式により

$$u(s_1(X_t),S_2(X_t))-u(S_1(X_0),S_2(X_0))$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\frac{\partial u}{\partial s_i}(S_1(X_s),S_2(X_s))dA_s^{(i)}+\int_0^t\frac{\partial^2u}{\partial S_1^2}(S_1(X_s),S_2(X_s))ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2u}{\partial S_2^2}(S_1(X_s),S_2(X_s))ds+\int_0^t\frac{\partial^2u}{\partial S_1\partial S_2}(S_1(X_s),S_2(X_s))I^*(S_2(X_s))ds$$

となる。故に

$$\alpha G_\alpha u^*(x)-u^*(u)=\int_{R^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial s^2}\right)(y)g_\alpha(x,y)dy$$

$$+\frac{1}{2}\int_{R^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial S_2^2}\right)^*(y)g_\alpha(x,y)dy+\int_{R^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial S_1\,\partial S_2}\right)^*(y)I^*(S_2(y))g_\alpha(x,y)dy$$

よって

$$\alpha(v^*\,|\,\alpha G_\alpha u^*-u^*)_{\mathcal{L}_2}=\int_{R^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial s_1^2}\right)^*(y)G_\alpha(Sv^*)(-y_1,y_2)dy$$

$$+\frac{1}{2}\int_{R^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial s_2^2}\right)^*(y)G_\alpha(Sv\ )(-y_1,y_2)dy+\int_{R^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial s_1\,\partial s_2}\right)^*(y)I^*(S_\alpha(y))G(Sv^*)$$

$$\times(-y_1,y_2)dy$$

故に

$$<v\,|\,Hu>=\int_{R^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial s_1^2}\right)^*(y)v^*(y)dy+\frac{1}{2}\int_{R^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial s_2^2}\right)^*(y)v^*(y)dy$$

$$+\int_{R^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial s_1\,\partial s_2}\right)^*(y)I^*(S_2(y))v^*(y)dy$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

となる。よってヤコビーヤンについての注意を用いると

$$< v \quad Hu > = \int_{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2}(s_1, s_2) v(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2 + \frac{1}{2} \int_{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2}(s_1, s_2) v(s_1, s_2)\, ds_1\, ds_2$$

$$+ \int_{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2}(s_1, s_2)\, v(s_1, s_2)\, I^*(s_2)\, ds_1\, ds_2$$

よって

$$-< v \,|\, Hu > = \int_{R^2} \frac{\partial v}{\partial s_1}(s_1, s_2) \frac{\partial u}{\partial s_2}(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2 + \frac{1}{2} \int_{R^2} \frac{\partial v}{\partial s_2}(s_1, s_2) \frac{\partial u}{\partial s_2}(s_1, s_2) ds_1 ds_2$$

$$+ \int_{R^2} \frac{\partial v}{\partial s_1}(s_1, s_2) \frac{\partial u}{\partial s_2}(s_1, s_2)\, I^*(s_2)\, ds_1 ds_2 + \int_{R^2} \frac{\partial}{\partial s_1}\left(v \frac{\partial u}{\partial s_2}\right)(s_1, s_2)\, I^*(s_2) ds_1 ds_2$$

となる。こゝで

$$\int_{R^2} \frac{\partial}{\partial s_1}\left(v \frac{\partial u}{\partial s_2}\right)(s_1, s_2)\, I^*(s_2)\, ds_1\, ds_2 = 0$$

を用いると，（4.28）が得られる。

こゝで注意すべきことは（4.28）のHは自己共役にはなっていない。（4.28）の右辺で第1項と第2項は対称になっているが問題は第3項である。実際

$$\int_{R^2} \frac{\partial v}{\partial s_1}(s_1, s_2) \frac{\partial u}{\partial s_2}(s_1, s_2)\, I^*(s_2)\, ds_1 ds_2 - \int_{R^2} \frac{\partial v}{\partial s_2}(s_1, s_2) \frac{\partial u}{\partial s_1}(s_1, s_2) I^*(s_2)$$

$$\times\, ds_1 ds_2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} v(s_1, 0) \frac{\partial u}{\partial s_1}(s_1, 0)\, ds_1 \tag{4.29}$$

となる。このように調和座標で考えると2階微分に関する項に自己共役性をこわす要素がふくまれるが，今の場合はもともと与えられた座標でみると事情は一層明らかになる。

最初に与えられた座標で考えた C^∞ ー関数でコンパクトな台を持ったいわゆるSchwartzの空間を記号として $\mathcal{D}^*(R^2)$ とする。任意の $u \in \mathcal{D}^*(R^2)$ に対して，Itoの公式を用いると

$$\alpha G_\alpha u(x) - u(x) = \frac{1}{2} \int_{R^2} g_\alpha(x, y) \triangle u(g)\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(x, (y_1, 0)) \frac{\partial u}{\partial x_1}(y_1, 0)\, dy_1$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

が言える。故に任意の $v \in \mathcal{D}^*(R^2)$ に対して

$$\alpha(v \mid \alpha G_\alpha u - u)_{\mathcal{L}_2} = \alpha \frac{1}{2} \int_{R^2} G_\alpha(Sv)(-y_1, y_2) \triangle u(y) dy$$
$$+ \alpha \int_{-\infty}^{\infty} G_\alpha(Sv)(-y_1, 0) \frac{\partial u}{\partial x_1}(y_1, 0) dy_1$$

となる。故に

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha(v \mid \alpha G_\alpha u - u)_{\mathcal{L}_2}$$

は存在し，

$$(4.30) \qquad \frac{1}{2} \int_{R^2} v(x) \triangle u(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} v(x_1, 0) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, 0) dx_1$$

に等しくなる。この式も $\mathcal{D}^*(R^2)'$ で考えた超関数の意味の生成作用素とも言うべきだが，これでは通常の偏微分作用素にはなっていないが，対称性をこわす項は

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \quad \delta_{\{0\}}(dx_2) dx_1$$

と非常に明確になっている。というのはこの X の構成から明らかなように 2次元 Brown 運動を規定する生成要素と，singular drift をきめる測度

$$dx_1 \, \delta_{\{0\}}(dx_2)$$

が X を定める量の組であることがわかる。その意味でこの例は § 2 〜 3 の考えを対称でない場合まで広げる方向を示していると言える。

なおこの例については Ikeda[25] でのべてあることは対称性について誤解をふくんでいる。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

§5 Brown運動をdominateする拡散過程(I)

2階の楕円型微分作用素に対応する古典的な拡散過程の枠を越えて拡散過程の研究を進める動機になったのはいわゆるskew-productで構成されるものである。(Ito-McKean〔26〕, Ikeda〔24〕,〔25〕参照)。こゝではそれらの一般論に進む前に最も典型的な場合を取上げてその特徴をしらべる。こゝで取扱うのはskew-productの方法ではなく,例4.1の方法でも構成出来る。

それらに進む前に1つだけ一般的な概念を準備する。

<u>定義5.1</u>　D上の2つの拡散過程$X^{(1)}$, $X^{(2)}$を考える。それぞれに対応する生成要素を$G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $\mathcal{L}_2$-Dirichlet空間を$\mathcal{F}_\alpha^{(1)}$, $\mathcal{F}_\alpha^{(2)}$とする。$G^{(1)}$と$G^{(2)}$はエネルギー測度を除いて相等しいとする。そのとき<u>$X^{(2)}$が$X^{(1)}$によってdominateされる</u>とは,

$$(5.1)\qquad \mathcal{F}_\alpha^{(1)} \leqq \mathcal{F}_\alpha^{(2)}$$

となることである。

$D=R^2$として,その上の拡散過程Xで生成要素Gが

$$(5.2)\qquad \begin{cases} s_j(x)=x_j, \qquad x=(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad j=1,2,\cdots,n \\ m(dx)=dx \\ \nu_{11}(dx)=\dfrac{1}{2}dx+\delta_{\{0\}}(dx_2)dx_1, \quad \nu_{22}(dx)=\dfrac{1}{2}dx, \quad \nu_{12}=\nu_{21}=0 \\ k(dx)=0 \end{cases}$$

で与えられるものを考える。これは例4.1で作られた直積拡散過程のあるものと同じ到達確率をもつものであるが,つぎのようにして直接構成する方がわかりやすい。いま$B=\{(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$, $\underline{\underline{M}}_t$, P_x, $x\in R^2\}$を2次元Brown運動とする。その時Bのx_1-軸上の局所時間φ_tは

$$\varphi_t=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t I_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(B_s^{(2)})\,ds$$

で定義される。(Ito-McKean〔26〕)。このとき

$$E_0\left[e^{-\alpha\varphi_t^{-1}}\right]=e^{-t\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}, \quad \alpha>0$$

となる。いま

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$(5.3)\qquad X_t^{(1)} = B^{(1)}_{t+\varphi_t}\quad,\qquad X_t^{(2)} = B_t^{(2)}\quad,\qquad X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)}),$$

とおけば$\{X_t\ ;\ t \geqq 0\ ,\ \underline{\underline{M}}_t^*\ ,\ P_x\ ,\ x \in R^2\} = X$はいわゆるskew−productで構成された$R^2$上の2次元拡散過程である。これが(5.2)で与えられる生成要素Gをもつことはつぎのようにして言える。

まづLévyの結果によれば

$$(5.4)\qquad P_0[X_t^{(2)} \in da,\ \varphi_t \in db] = \frac{|a| + \frac{b}{2}}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{(|a| + \frac{b}{2})^2}{2}}\, \frac{da\,db}{2}\ ,\quad a \in R^1,\ b > 0,$$

である。(Lévy [37] または Ito−Mckean[26] 2章§2, Problem 3, p. 45)。
よって任意の$f \in \mathcal{D}(R^2)$に対して

$$(5.5)\qquad E_0[f(X_t^{(1)}, X_t^{(2)})] = \int_{R^2} f(y_1, y_2) \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}}\, e^{-\frac{y_1^2}{2(t+s)}}\, \frac{|y_2| + \frac{s}{2}}{2\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{(|y_2| + \frac{s}{2})^2}{2t}}\, ds\, dy_1\, dy_2$$

である。さらに

$$\sigma_0 = \inf\{t\ ;\ B_t^{(2)} = 0\}$$

とおけば良く知られているように

$$(5.6)\qquad P_{(x_1, x_2)}[\sigma_0 \in d\theta] = \frac{|x_2|}{\sqrt{2\pi\theta^3}}\, e^{-\frac{|x_2|^2}{2\theta}}\, d\theta$$

である。(5.5)と(5.6)を用いて,

$$(5.7)\qquad \begin{aligned} E_x[f(X_t^{(1)}, X_t^{(2)})] = &\int_{R^2} f(y_1, y_2) I(x_2, y_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(e^{-\frac{(x_2-y_2)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x_2+y_2)^2}{2t}}\right) dy_1\, dy_2 \\ &+ \int_{R^2} f(y_1, y_2) \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{2(t+s)}} \frac{|x_2| + |y_2| + \frac{s}{2}}{2\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(|x_2| + |y_2| + \frac{s}{2})^2}{2t}} ds \right\} dy_1\, dy_2 \end{aligned}$$

となる。こゝで

$$I(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & \xi > 0,\ \eta > 0\ \text{または}\ \xi < 0,\ \eta < 0, \\ 0, & \text{他の場合} \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

よって（5.3）で構成されたXの推移確率は

$$P(t,x,dy)=p(t,x,y)\,dy \quad ,$$

$$p(t,x,y)=I(x_2,y_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{2t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{(x_2-y_2)^2}{2t}}-e^{-\frac{(x_2+y_2)^2}{2t}}\right)$$

（5.8）

$$+\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}}e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{2(t+s)}}\frac{|x_2|+|y_2|+\frac{s}{2}}{2\sqrt{2\pi t^3}}\,e^{-\frac{(|x_2|+|y_2|+\frac{s}{2})^2}{2t}}\,ds$$

となる。XのGreen作用素G_αは

$$G_\alpha f(x)=\int_{R^2} f(y)\,g_\alpha(x,y)\,dy$$

$$g_\alpha(x,y)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,p(t,x,y)\,dt$$

と書けg_αはx，yに関して対称になっている。したがって（5.2）のようにmをとるとそれに対して仮定3.1，仮定3.2がみたされ，対応する$\mathcal{L}_2$－Dirichlet空間が定義される。さらに2次元Brown運動Bに対してItoの変換公式（1.1）を適用すれば，任意の$u\in\mathcal{D}(R^2)$に対して

$$u(X_t)-u(X_0)=\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\frac{\partial^2 u}{\partial x_i}(X_s)\,dA_s^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(X_s)\,ds+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(X_s)\,d\varphi_s$$

$$A_t^{(i)}=X_t^{(i)}-X_0^{(i)}$$

となる。よって

（5.9）
$$E_x[u(X_t)]-u(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\int_{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(y)p(s,x,y)\,dy+\int_0^t\int_{R^1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(y_1,0)p(t,x,(y_1,0))\,dy_1$$

となる。后は例4.1の時の計算と同じにして，任意のu，$v\in\mathcal{D}(D)$に対して

（5.10）
$$\exists\lim_{\beta\to\infty}\beta(u-\beta G_\beta u\,|\,v)_{\mathcal{L}_2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{R^2}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx+\int_{R^1}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,0)\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1,0)\,dx_1$$

となることが示せる。よって$\mathcal{D}(D)\subset\mathcal{F}$とGが（5.2）の形になることがわかる。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

さらに一般論より，任意の $f \in \mathcal{L}_2$ に対して

$$\varepsilon_2(G_\alpha f, v) = (f \mid v)_{\mathcal{L}_2}, \qquad \forall v \in \mathcal{D}(D),$$

に注意し，推移確率が（5.8）の形であることに注意すれば，$\mathcal{D}(D)$ は $\mathfrak{F}_\alpha$ の中で密で仮定3.4がみたされる。

以上併せてつぎのことが言えている。

命題5.1　推移確率が（5.8）で決まる2次元拡散過程は仮定3.1～3.4をみたし，その標準生成要素Gは（5.2）の形で与えられる。さらにそのXは2次元Brown運動をdominateする。

証明　最后の部分を除いて既に証明した。（5.10）より任意の $v \in \mathcal{D}(D)$ に対する $\varepsilon_\alpha(v, v)$ はBrown運動の対応するものより大きい。このこととそれぞれの $\mathcal{L}_2$－Dirichlet空間で $\mathcal{D}(D)$ が密なことより結論が得られる。（証明終り）。

つぎに任意の $x^\circ \in D$ に対して

$$\tau_{\{x^\circ\}} = \inf\{t ; X_t = x^\circ, t > 0\}$$

とおけばつぎのことが言える。

命題5.2　任意の x_1－軸上の点 x° に対して

(i)　$P_x\{\tau_{\{x^\circ\}} < \infty\} > 0, \quad x \in D,$

(ii)　$P_{x^\circ}\{\tau_{\{x^\circ\}} = 0\} = 1$

が言える。

証明　x° を x_1 軸上の点とする時

$$\begin{array}{cccc} g_\alpha(\cdot\,;x^\circ) : & D & \longrightarrow & R^1 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & g(x, x^\circ) \end{array}$$

が連続関数であることを言えばBlumenthal－Getoor〔4〕の結果より結論が出る。

$$g_\alpha(x, x^\circ) \le \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}} \frac{|x_2| + \frac{s}{2}}{2\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(|x_2| + \frac{s}{2})^2}{2t}} ds dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha(|x_2| + \frac{s}{2})^2 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi((|x_2| + \frac{s}{2})^2 t + s)}} \frac{1}{2\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2t}} ds dt$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$\leq \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\alpha(\frac{s}{2})^2 t}\frac{1}{\sqrt{2\pi((\frac{s}{2})^2 t+s)}}\frac{1}{2\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{1}{2t}}\,ds\,dt$$

$$\leq \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\frac{ds}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-\alpha(\frac{s}{2})^2 t}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2t}}\,dt$$

である。故に

$$\int_0^\infty\frac{ds}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-\alpha(\frac{s}{2})^2 t}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2t}}\,dt\equiv I<\infty$$

を言えばLebesgue の定理と併せて結論が出る。

ところが

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-\alpha(\frac{s}{2})^2 t}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2t}}\,dt\leq\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{s}}\int_0^\infty\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2t}}\,dt<\infty$$

$$\int_1^\infty\frac{ds}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-\alpha(\frac{s}{2})^2 t}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2t}}\,dt\leq M\int_1^\infty\frac{ds}{s^{\frac{5}{2}}}<\infty$$

なる$M<\infty$が存在する。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終り）。

この命題5.2の事実は2次元Brown運動では成りたゝないことである。しかもこの事実は位相同型写像による状態空間の変換で不変であるので，この拡散過程とBrown 運動は similar ではない。このことはエネルギー測度ν_{11} がx_1ー軸で特異になっていることから来ている。現在考えている拡散過程の性質をもう少し具体的にみることにする。そのための解析的な準備から始めよう。まづ下図のようにx_1ー軸の右半分をL_1，左半分をL_2とする：

$$L_1=\{x\,;\,x=(x_1,0),\,x_1>0\},\quad L_2=\{x\,;\,x=(x_1,0),\,x_1<0\}$$

とする。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

定義 5．2　　$u \in \underline{\underline{H}}$ とは u が次の(i)，(ii)，(iii)をみたすことである。

(i)　u は $R^2-\{0\}$ で連続

(ii)　u は $R^2-[L_1 \cup L_2 \cup \{0\}]$ で調和

(iii)　$u \in C^{(2)}(L_i)$，$i=1,2$，かつ

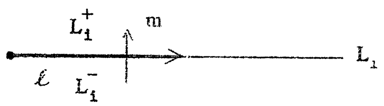
$$2\frac{\partial^2 u}{\partial \ell^2}+\left[\frac{\partial u}{\partial m}\right]=0 \qquad \text{on } L_i, \quad i=1,2$$

こゝで ℓ は L_i の方向の単位ベクトル，m は ℓ に直交する方向の単位ベクトル。

$$(5.11) \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial m}\right]=\frac{\partial u}{\partial m}\Big|_{L_i^+}-\frac{\partial u}{\partial m}\Big|_{L_i^-}$$

L_i^+，L_i^- は L_i の m の正の側と負の側を表わす。

なお(ii)の調和は△に対応する調和で，$C^{(2)}(L_i)$ は2回連続的微分可能なクラスを表わす。また



（5.11）の方向を図示すれば の形になる。以下記号として $\nabla_\ell=(\nabla,\ell)$ $\nabla_m=(\nabla, m)$ を用いる。

いま $u \in C^{(2)}(L_i)$ で，かつ u が（L_i の近傍＼L_i）で調和であるので，調和関数で $C^{(2)}(L_i)$ の境界値をもつことになり $\nabla_m u$ は L_i の両側で意味を持つ。したがって(iii)の定義が可能になる。

命題 5．3　　$\underline{\underline{H}}_b=\{u\,;\,u \in \underline{\underline{H}},\ u:\text{有界}\}$ は2個の基底をもつ。すなわち　$u_1, u_2 \in \underline{\underline{H}}_b$ が存在し任意の　$u \in \underline{\underline{H}}_b$ は

$$(5.12) \qquad u=\sum_{i=1}^{2} c_i u_i, \quad c_i:\text{定数}, \quad i=1,2$$

と書け，その表現は一意的である。

証明　$u \in \underline{\underline{H}}_b$ を書きかえると

$$(5.13) \qquad u(x)=u(x_1, x_2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x_2|}{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\,u(\xi, 0)\,d\xi$$

と書かる。しかも定義 5.2 の(ii)によって

$$f \equiv u(\cdot, 0): \quad R^1 \longrightarrow R^1$$

は　$C^{(2)}(R^1 \setminus \{0\})$ に属する。また定義 5.2 の(iii)を具体的に書けば

$$(5.14) \qquad 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\xi, 0)+\left[\frac{\partial u}{\partial x_2}(\xi, 0+)-\frac{\partial u}{\partial x_2}(\xi, 0-)\right]=0, \quad \xi \in R^1 \setminus \{0\}$$

となる。したがって(5.13)と(5.14)を併せると

$$(5.15)\quad 2f''(\xi)+\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-\eta)^2-\varepsilon^2}{((\xi-\eta)^2+\varepsilon^2)^2}\, f(\eta)\,d\eta=0,\quad \xi\in R^1\setminus\{0\}$$

を得る。よって問題は微分積分方程式(5.15)をみたす解を求めることになる。

ところが f は仮定より R^1 上の有界関数であるので,$f\in\mathcal{S}'(R^1)$ と考えられる。いま超関数 $\frac{1}{|\xi|^2}\in\mathcal{D}'_{L_1}(R^1)$,超関数 $f\in\mathcal{D}'_{L_\infty}(R^1)$ なることに注意すれば

$$\frac{1}{|\xi|^2}*f\in\mathcal{D}'_{L_\infty}\subset\mathcal{S}'(R^1)$$

である。(Schwartz[49]参照)したがって R^1 上の超関数として

$$T=f''+\frac{1}{\pi}\frac{1}{|\xi|^2}*f\quad\in\quad\mathcal{S}'(R^1)$$

が定義可能である。これを用いて言えば(5.15)は

$$(5.16)\quad \mathrm{Supp}(T)\subset\{0\}$$

と言いかえることが出来る。故に超関数の一般論から

$$(5.17)\quad f''+\frac{1}{\pi}\frac{1}{|\xi|^2}*f=\sum_{\ell=0}^{p}a_\ell\,\delta^{(\ell)}_{\{0\}}\qquad \text{on } R^1$$

となる。

以下まず形式的にFourier変換をすると

$$\tilde{f}(\lambda)=\int_{R^1}e^{i\lambda\xi}f(\xi)\,d\xi$$

とすれば,(5.17)より

$$(5.18)\quad -|\lambda|^2\tilde{f}(\lambda)-|\lambda|\tilde{f}(x)=\sum_{\ell=0}^{p}a_\ell(-i\lambda)^\ell$$

となり,$\lambda\in R^1\setminus\{0\}$ で

$$(5.19)\quad \tilde{f}(\lambda)=-\frac{\sum_{\ell=0}^{p}a_\ell(-i\lambda)^\ell}{|\lambda|2+|\lambda|}=\frac{\sum_{\ell=0}^{p}a_\ell(-i\lambda)^\ell}{|\lambda|+1}-\sum_{\ell=0}^{p}a_\ell\frac{(-i\lambda)^\ell}{|\lambda|}$$

したがって,右辺が R^1 上で λ を変数として超関数を定義することに注意して,R^1 上の超関数として

$$(5.20)\quad \hat{f}(\lambda)=\frac{\sum_{\ell=0}^{p} a_\ell(-i\lambda)^\ell}{|\lambda|+1}-\sum_{\ell=0}^{p} a_\ell\frac{(-i\lambda)^\ell}{|\lambda|}+\sum_{\ell=0}^{q} b_\ell\,\delta_{\{0\}}^{(\ell)}(\lambda)$$

となる。この形式的な計算はつぎのようにして正当化される。

いま $\alpha_m\in\mathcal{D}(R^1)$ はつぎの条件をみたすものとする。

$$\begin{cases} 0\leq\alpha_n\leq 1\ , \\ \alpha_n=0 \quad \text{on } \lambda=0 \text{ の近傍。} \\ \alpha_n \longrightarrow I_{R^1\setminus\{0\}} \quad (n\to\infty) \end{cases}$$

いま

$$\hat{\alpha}_n(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{R^1} e^{-i\lambda\xi}\,\alpha_n(\lambda)\,d\lambda \quad\in\quad \mathcal{S}(R^1)$$

とする。(5.17)より

$$\hat{\alpha}_n * f''+\hat{\alpha}_n*\left(\frac{1}{\pi}*\frac{1}{|\xi|^2}*f\right)=\sum_{\ell=0}^{p} a_\ell\,\hat{\alpha}_n^{(\ell)}$$

となる。よって

$$(5.21)\quad \hat{\alpha}_n''*f+\left(\frac{1}{\pi}*\frac{1}{|\xi|^2}*\hat{\alpha}_n\right)*f=\sum_{\ell=0}^{p}\widehat{a_\ell(-i\xi)^\ell\alpha_n}$$

いま

$$\hat{\alpha}_n''\in\mathcal{S}(R^1)\ ,\qquad \frac{1}{\pi}\frac{1}{|\xi|^2}*\hat{\alpha}_n\in\mathcal{S}(R^1)$$

というのは

$$\widetilde{\frac{1}{\pi}\frac{1}{|\xi|^2}*\hat{\alpha}_n}=|\lambda|\,\alpha_{nn}(\lambda)\in\mathcal{D}(R^1)$$

である。そこで(5.21)の Fourier 変換をとって

$$-|\lambda|^2\alpha_n(\lambda)\tilde{f}(\lambda)-|\lambda|\alpha_n(\lambda)\tilde{f}(\lambda)=\sum_{\ell=0}^{p} a_\ell(-i\lambda)^\ell\alpha_n(\lambda)\ 。$$

故に $\alpha_n(\lambda)>0$ なる点 λ の近傍で

$$\tilde{f}(\lambda)=-\frac{\sum_{\ell=0}^{p} a_\ell(-i\lambda)^\ell}{|\lambda|^2+|\lambda|}$$

となる。そこで $n\to\infty$ とすれば上式が $R^1\setminus\{0\}$ で成立する。よって(5.19)が正当化され

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

で，それから（5.20）が導かれる。

こゝで

$$\widehat{|\xi|^{\ell}} = C\cdot|\lambda|^{-1-\ell}, \quad \widehat{\mathrm{sgn}\,\xi\cdot|\xi|^{\ell}} = C'\,\mathrm{sgn}\,\lambda\,|\lambda|^{-1-\ell}$$

C，C' ：定数

に注意すると，（5.20）をみたす $\hat{f}(\lambda)$ で $f(\xi)$ が有界関数になるものは（5.20）で $q=0$ で $p\leq 1$ に限ることがわかる。したがって

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\sum_{\ell=0}^{1} a_{\ell}(-i\lambda)^{\ell}}{|\lambda|+1} - \sum_{\ell=0}^{1} a_{\ell}\frac{(-i\lambda)^{\ell}}{|\lambda|} + b_0\delta_{\{0\}}$$

である。

よって求める f は

(i) $\tilde{f}(\lambda) = c\,\delta_{\{0\}}$

(ii) $\tilde{f}(\lambda) = \dfrac{1}{|\lambda|+1} - \dfrac{1}{|\lambda|}$

(iii) $\tilde{f}(\lambda) = \dfrac{-i\lambda}{|\lambda|+1} + \dfrac{i\lambda}{|\lambda|}$

に対応する f の一次結合になる。そこで上の(i)，(ii)，(iii)に対応するものを実際求めると

(i)′ $f(\xi) = c$（定数）

(ii)′ $f(\xi) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^{-t}\,t}{t^2+\xi^2}\,dt + \frac{1}{2\pi}\log(1+\xi^2) + \frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{(e^{-t}-1)\,t}{t^2+\xi^2}\,dt$

(iii)′ $f(\xi) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\xi}{1+\xi^2} - \dfrac{2\xi}{\pi}\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^{-t}\,t}{(t^2+\xi^2)^2}\,dt - \frac{2\xi}{\pi}\int_0^1\frac{(e^{-t}-1+t)\,t}{(t^2+\xi^2)^2}\,dt$

$$+\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sgn}\,\xi\int_0^{\frac{1}{|\xi|}}\frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$

こゝで(ii)′ に対応するものは有界でない。(iii)′ に対応するものは

$$\int_0^1\frac{(e^{-t}-1+t)\,t}{(t^2+\xi^2)^2}\,dt = O\left(\int_0^{\frac{1}{|\xi|}}\frac{t^3}{(t^2+1)^2}\,dt\right) \sim \log\frac{1}{|\xi|}, \quad |\xi|\to 0$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

に注意すれば確かに有界になる。よって(5.17)をみたすfは

$$(5.22)\quad f(\xi)=a\Big[\frac{1}{\pi}\frac{\xi}{1+\xi^2}-\frac{2\xi}{\pi}\int_1^\infty\frac{e^{-t}\,t\,dt}{(t^2+\xi^2)^2}-\frac{2\xi}{\pi}\int_0^1\frac{(e^{-t}-1+t)\,t}{(t^2+\xi^2)^2}\,dt$$
$$+\frac{2}{\pi}\operatorname{sgn}\xi\int_0^{\frac{1}{|\xi|}}\frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt\Big]+b$$

こゝでaとbは定数である。逆に(5.22)の形のfが(5.17)をみたすことはつぎのようにしてわかる。

(5.22)でb=0でa=1ならば

$$f\in\mathcal{L}_2(R^1,dx)\subset\mathcal{D}'_{\mathcal{L}_2}(R^1)$$

がわかる。すると

$$T=\delta^{(2)}_{\{0\}}+\frac{1}{\pi}\frac{1}{|\xi|^2}\quad\in\mathcal{D}'_{\mathcal{L}_2}(R^1)$$

であるから

$$\widetilde{(T*f)}=\widetilde{T}\,\widetilde{f}=-(|\lambda|^2+|\lambda|)\Big(\frac{i\lambda}{|\lambda|+1}+i\operatorname{sgn}\lambda\Big)$$
$$=-i\lambda=\widetilde{\delta^{(1)}_{\{0\}}}$$

となり,

$$T*f=\delta^{(1)}_{\{0\}}$$

(5.17)がみたされる。一意性は明らかである。 (証明終り)。

<u>補題 5.1</u> (5.22)の形の関数$f_1(\xi)$で

$$(5.23)\quad \lim_{\xi\to 0-}f_1(\xi)=0,\qquad \lim_{\xi\to 0+}f_1(\xi)=1$$

となるものが唯1つ存在する。

<u>証明</u> 実際(5.22)で

$$b=\frac{1}{2},\qquad a=\frac{\pi}{4}\Big(\int_0^\infty\frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt\Big)^{-1}$$

とおけばよい。 (証明終り)。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

補題5.1の f_1 をとって来て

$$(5.24) \qquad u_1(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi_2|}{\xi_2^2+(\xi_1-\eta)^2}f_1(\eta)\,d\eta$$

とおく。その時つぎのことが言える。

補題5.2 (i) $f_1 \geqq 0$, $\lim_{|\xi|\to\infty} f_1(\xi)=1/2$

(ii) $u_1 \geqq 0$, $\lim_{|x|\to\infty} u_1(\xi)=1/2$

(iii) $\lim_{x_1\to 0+} u_1(x_1, \alpha x_1)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{|\alpha|}}^{\infty}\frac{d\eta}{1+\eta^2}$

証明 (i)は明らか

(ii)の前半は(5.15)より示せる。后半は(i)と(5.24)を併せるとよい。

(iii)は

$$u_1(x_1, \alpha x_1)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\alpha}-\eta\right)^2}f_1(\alpha x_1\eta)\,d\eta$$

に注意して補題5.1を用いると得られる。 (証明終り)

注意5.1 原点から出る半直線LがL_1と一致しなければ

$$(5.25) \qquad \sup_{x\in L} u(x) < 1$$

が上に示したことから言えている。

注意5.2 命題5.3に出て来る

$$f_2(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{e^{-t}\,t}{t^2+\xi^2}\,dt+\frac{1}{2\pi}\log(1+t^2)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{(e^{-t}-1)\,t}{t^2+\xi^2}\,dt$$

も(5.17)をみたしていて，

$$(5.26) \qquad u_2(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x_2|}{x_2^2+(x_1-\xi)^2}f_2(\xi)\,d\xi$$

は $\underline{\underline{H}}$ の下に有界な1つの元になっている。

以上を利用してXの性質を考えてみよう。

定義5．3　X_t が L_1 で tangentially に0に近づくとはつぎのことである。

任意の $\varepsilon>0$ に対してつぎのような δ が存在することである。

$\tau_{\{0\}}-\delta\leq {}^{\forall}t<\tau_{\{0\}}$ に対して　$X_t\in U_\varepsilon$，ただし U_ε は　$x_2=\varepsilon x_1$，　$x_1>0$ と $x_2=-\varepsilon x_1$，　$x_1>0$ とで囲まれた領域。

X_t が　L_2 上で tangentially に0に近づくことも同様に定める。

いま

$$\xi_t=u_1(X_t)\ ,\quad t<\tau_{\{0\}}$$

とおけば

補題5．3　$\xi_\infty=\lim_{t\uparrow\tau_{\{0\}}} u_1(X_t)$ が存在し，ξ_t，$t\geq0$，は非負な有界 martingale (P_x) $(x\neq0)$ になる。

証明　X_t の定義と u_1 の性質を用いて伊藤の変換公式を用いれば

$$u_1(X_t)-u_1(X_0)=\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\frac{\partial u_1}{\partial x_i}(X_s)\,dX_s^{(i)}+\frac{1}{2}\int_0^t\left[\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1^2}(X_s)+\frac{\partial^2u_1}{\partial x_2^2}(X_s)\right]$$

$$\times I_{R^2\setminus(L_1\cup L_2\cup\{0\})}(X_s)\,ds+\int_0^t\left[2\frac{\partial^2u_1}{\partial x_2^2}(X_s)+\left[\frac{\partial u_1}{\partial m}\right](X_s)\right]d\varphi_s$$

よって martingale になる。非負，有界は明らかであるので結論が出る。　（証明終り）。

補題5．4　$\xi_\infty=1$　or　0　　a.s (P_x)　$x\neq0$。

証明　このことは補題5.1とつぎの事実から言える。

$$P_x\left[\exists\ \varepsilon>0,\quad \tau_{\{0\}}-\varepsilon\leq{}^{\forall}t<\tau_{\{0\}}\ ,\ X_t\in R^2\setminus[L_1\cup L_2\cup\{0\}]\right]=0$$

なおこのことは X は ${}^{\forall}x\in R^2\setminus(L_1\cup L_2\cup\{0\})$ では Brown 運動に等しいことから言える。

（証明終り）。

定理5．1　(i) $u_1(x)=P_x[\xi_\infty=1]$，

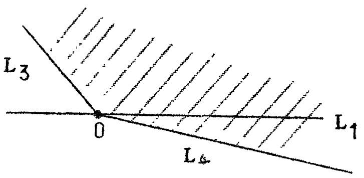
(ii) $\{\xi_\infty=1\}=\{X_t$ が L_1 上で tangentially に0に近づく$\}$　a.s

$\{\xi_\infty=0\}=\{X_t$ が L_2 上で tangentially に0に近づく$\}$　a.s

証明　(i) は $u_1(x)=E_x[\xi_\infty]$ が補題5.3より言えるのでよい。(ii)は補題5.4と(5.25)を併せると言える。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

さらに，0を共有する半直線L_3，L_4でL_1，L_2と相異なるものを考え，それらで囲まれた開領域をDとする。いまDの中にL_1があるようにする。



$$\tau = \inf \{ t \,;\, X_t \in L_3 \cup L_4 \}$$

とおく。

<u>定理 5.2</u>　(i)　$P_x[\tau_{\{0\}} < \tau] > 0$,　$x \in D$

(ii)　$\lim_{\substack{x \in L_1 \\ x \to 0}} P_x[\tau_{\{0\}} < \tau] = 1$

<u>証明</u>　いま　$P_x[\tau_{\{0\}} < \tau] \equiv u(x) = 0$　on　D　としよう。

$$\sup_{x \in L_3 \cup L_4} u_1(x) \equiv \beta < 1$$

であるので

$$u_1(x) = P_x[\xi_\infty = 1] = E_x[P_{X_\tau}(\xi_\infty = 1)]$$
$$= E_x[u_1(X_\tau)] \leq \beta$$

となり，$\lim_{\substack{x \in L_1 \\ x \to 0}} u_1(x) = 1$ に矛盾する。よって(i)が示された。

つぎに　$\varepsilon < 1 - \beta$ とする。

$$u_1(x) = P_x[\xi_\infty = 1] = P_x[\xi_\infty = 1, \tau_{\{0\}} < \tau] + P_x[\xi_\infty = 1, \tau_{\{0\}} > \tau]$$
$$= P_x[\xi_\infty = 1, \tau_{\{0\}} < \tau] + E_x[P_{X_\tau}[\xi_\infty = 1]; \tau < \tau_{\{0\}}]$$
$$\leqq P_x[\xi_\infty = 1, \tau_{\{0\}} < \tau] + \beta P_x[\tau < \tau_{\{0\}}]$$
$$\leqq P_x[\xi_\infty = 1, \tau_{\{0\}} < \tau] + \beta P_x[\xi_\infty = 1, \tau < \tau_{\{0\}}] + \beta P_x[\xi_\infty = 0]$$
$$\leqq \beta P_x[\xi_\infty = 1] + (1 - \beta) P_x[\xi_\infty = 1, \tau_{\{0\}} < \tau] + \beta P_x[\xi_\infty = 0]$$

故に

$$(5.27)\quad P_x[\tau_{\{0\}} < \tau] \geqq P_x[\xi_\infty = 1] - \frac{\beta}{1 - \beta} P_x[\xi_\infty = 0]$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

いま $u_1(x)=P_x[\xi_\infty=1]>1-\varepsilon$ とする。そうすると

$$P_x[\xi_\infty=0]<\varepsilon$$

となる。そこで(5.27)を用いると

$$P_x[\tau_{\{0\}}<\tau]\geqq 1-\varepsilon-\frac{\beta\varepsilon}{1-\beta}=1-\frac{\varepsilon}{1-\beta}$$

よって，

$\varepsilon<1-\beta$ の時

(5.28) $u_1(x)>1-\varepsilon$ ならば $P_x[\tau_{\{0\}}<\tau]\geqq 1-\frac{\varepsilon}{1-\beta}$

が言えたことになる。この事実と補題5.1を併せると(ii)を得る。

<u>定理 5．3</u>　$v\geqq 0$ なるD上で定義された有界関数とする。

もし $\lim\limits_{t\uparrow\tau_{\{0\}}} v(X_t)$ a.s on $\{\tau_{\{0\}}<\tau\}$ ならば

$\exists$ C：定数。 $\lim\limits_{t\uparrow\tau_{\{0\}}} v(X_t)=C$ a.s on $\{\tau_{\{0\}}<\tau\}$。

<u>証明</u>　もしあるaがあって

$$P_x[\lim_{t\uparrow\tau_{\{0\}}} v(X_t)>a\ ,\ \tau_{\{0\}}<\tau]>0\quad ,$$

$$P_x[\lim_{t\uparrow\tau_{\{0\}}} v(X_t)\leq a\ ,\ \tau_{\{0\}}<\tau]>0$$

ならば矛盾を出せばよい。いまvは適当に $R^2\setminus\{0\}$ に拡張してそれを改めて $\tilde{v}$ と書く。

$$W_1(x)=P_x[\overline{\lim_{t\uparrow\tau_{\{0\}}}}\ \tilde{v}(X_t)>a\ ;\ \xi_0=1]>0$$

$$W_2(x)=P_x[\overline{\lim_{t\uparrow\tau_{\{0\}}}}\ \tilde{v}(X_t)\leq a\ ;\ \xi_0=1]>0$$

とおく。そうすると $W_1,\ W_2\in\underline{\underline{H}}_b$ かつ

$$u_1=W_1+W_2\quad ,\qquad 0\leq W_i$$

となる。よって命題5.3を用いると

$$\exists\ C>0\ :\qquad W_1=C\,W_2$$

となる。故に

(5.29) $\lim\limits_{t\uparrow\tau_{\{0\}}} W_1(X_t)=C\lim\limits_{t\uparrow\tau_{\{0\}}} W_2(X_t)$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

他方

$$(5.30)\quad \begin{cases} \lim_{t\uparrow\tau_{\{0\}}} W_1(X_t) = I_{[\overline{\lim}_{t\uparrow\tau_{\{0\}}} \tilde{v}(X_t) > a\ ;\ \xi_0 = 1]} \\ \lim_{t\uparrow\tau_{\{0\}}} W_2(X_t) = I_{[\overline{\lim}_{t\uparrow\tau_{\{0\}}} v(X_t) \leq a\ ;\ \xi_0 = 1]} \end{cases}$$

となる。但し I_A はAの特性関数である。明らかに(5.29)と(5.30)は矛盾する。

(証明終り)。

注意5.3　標準生成要素(5.2)をもつDirichlet空間の確率論を使わない構成はFukushima[17]で論じられている。

このようにエネルギ測度が特異になる場合の拡散過程はBrown運動等ときわだった違いを示している。このXは x_1−軸上の点では補題5.4，定理5.1からその両側から x_1−軸に tangentially にのみ近づくことが出来る。上の考察は x_1−軸上では x_1−軸方向の path の振動と x_2−軸方向の振動を比較する時前者がきわだって大きいことを示している。

注意5.4　福島[15]に従って集合Eの α_0−容量の概念をつぎの形で定義する。

Eは開集合でその閉包がcompactの時

$$G_E = \{ u \in \mathfrak{F}\ ;\ u \geqq 1 \quad a.e(m)\ \text{on}\ E \}$$

とし，

$$C(E) \equiv Cap(E) = \inf_{u\in G_E} \varepsilon_{\alpha_0}(u, u)$$

とおきEの α_0−容量という。

この概念を用いるとこの節で論じた拡散過程の性質とBrown運動の対応する性質の相互関係の一部はdominateされる時の一般論であることがわかる。

いま $X^{(2)}$ が $X^{(1)}$ によってdominateされるとする。$X^{(i)}$ に対応する $\mathcal{L}_2$−Dirichlet空間を $\mathfrak{F}_\alpha^{(i)}$ とし，その双線型形式を $\varepsilon_\alpha^{(i)}$ とする。集合Eの $X^{(i)}$ に関する α_0−容量をそれぞれ $C^{(i)}(E)$ とすれば

$$C^{(1)}(E) \geqq C^{(2)}(E)$$

となる。実際

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$C^{(1)}(E) = \inf_{\substack{u \in \mathcal{F}^{(1)} \\ u \geqq 1 \text{ on } E \text{ a.e}(m)}} \varepsilon_{\alpha_0}^{(1)}(u, u) \geqq \inf_{\substack{u \in \mathcal{F}^{(2)} \\ u \geqq 1 \text{ on } E \text{ a.e}(m)}} \varepsilon_{\alpha_0}^{(1)}(u, u)$$

$$\geqq \inf_{\substack{u \in \mathcal{F}^{(2)} \\ u \geqq 1 \text{ on } E \text{ a.e}(m)}} \varepsilon_{\alpha_0}^{(2)}(u, u) = C^{(2)}(E)$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

§6 回転不変な拡散過程

微分方程式論の形式的な応用ではその存在が自明ではないが，実際構成的な存在証明の出来るクラスとして回転不変な拡散過程があることは Ito–McKean[26] や Galmarino[19] によって示された。こゝではそれらの結果を Wentzell[56] の方法で整理して紹介する。こゝでの考えは一般の拡散過程の構成に役にたつ。

$D=R^3$ とし，$O(3)$は R^3 の直交変換全体の作る群とする。Dの極座標を $D\ni x=(\gamma,\xi)$，$\gamma\in[0,\infty)$，$\xi\in S^{(2)}$で表わす。

定義 6.1 D上の拡散過程Xが回転不変であるとは次の条件がみたされることである：
$P(t,x,A)$をXの推移確率とするとき，

$$(6.1)\qquad P(t,x,A)=P(t,gx,gA),\quad \forall g\in O(3),\quad \forall x\in D,\quad \forall A\in \mathfrak{F}(D).$$

これからの話では事情を簡単にするためにつぎのことを仮定する。

仮定 6.1 (i) G_αをXのGreen 作用素とするとき，

$$G_\alpha:\ C_0(D)\to C_0(D)$$

(ii) 任意の $t>0$ に対して

$$P_x\left[\int_0^t I_{\{0\}}(X_s)\,ds>0\right]=0,\quad \forall x\in D.$$

まず2，3の補題を準備するための記号を導入する。

$$C_{(n)}=\{f\,;\,f\text{は}(0,\infty)\text{で連続で，}\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0\},\quad n>1,$$
$$C_{(0)}=\{f\,;\,f\text{は}[0,\infty)\text{で連続で，}\lim_{x\to\infty}f(x)=0\}$$

とする。

$\{S_n^\ell\,;\,\ell=0,1,\cdots,2n\}$は通常の order n の球面調和関数の族とする。

$$\underline{I}=\{\sum_n\sum_\ell f_{n,\ell}(\gamma)S_n^\ell(\xi)\,;\,f_{n,\ell}\in C_{(n)},\ \text{有限和}\}$$

とおけば

補題 6.1 (Wentzell[56])。 $\underline{I}$ は $C_0(D)$の中で dense である。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

証明　$\sum_n\sum_\ell z_{n,\ell}S_n^\ell(\xi)$ の形の有限和の全体は $S^{(2)}$ 上の連続関数の空間で dense である。このことと Weirstrass の近似定理を用いると結論が出る。　（証明終り）

補題6.2　（Wentzell[56]）。線型作用素

$$B : C_0(D) \longrightarrow C_0(D)$$

が回転不変とする。その時つぎのことが言える。

(i)　$D(B)$ をBの定義域とし，$S_n^\ell(\xi)f(\gamma) \in D(B)$，$f \in C_{(n)}$ ならば

$$B(S_n^\ell f)(\gamma,\xi) = S_n^\ell(\xi)B(P_n(\cos\theta(\xi,\cdot))f)(\gamma,\xi) \tag{6.2}$$

こゝで P_n はルジャンドル多項式で $\theta(\xi,\eta)$，$\xi,\eta \in S^{(2)}$，は ξ と η の間の角を表わす。

(ii)　(i)の f に対して

$$B^{(n)}(f) = B[P_n(\cos\theta(\xi,\cdot))f] \tag{6.3}$$

とおけば

$$B^{(n)} : C_{(n)} \longrightarrow C_{(n)} \quad \text{線型}$$

になる。

(iii)　(6.3)の $B^{(n)}$ はBが有界ならば $B^{(n)}$ もそうで，$B^{(n)}$ のノルムはBのノルムをこえない。

証明　$\xi \in S^{(2)}$ とし，$\varnothing_k^{(\xi)}$ を ξ のまわりの角　$2\pi k/p$　だけの回転とする。$p > n$ なる整数をとる。その時

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\varnothing_k^{(\xi)}S_n^\ell(\eta) = S_n^\ell(\xi)P_n(\cos\theta(\xi,\eta)) \tag{6.4}$$

である。

$$B(S_n^\ell f)(\gamma,\xi) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\varnothing_k^{(\xi)}B(S_n^\ell f)(\gamma,\xi)$$

$$= B\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\varnothing_k^{(\xi)}(S_n^\ell f)\right)(\gamma,\xi)$$

$$= B(S_n^\ell(\xi)P_n(\cos\theta(\xi,\cdot))f)(\gamma,\xi)$$

$$= S_n^\ell(\xi)B(P_n(\cos\theta(\xi,\cdot))f)(\gamma)$$

となり(i)が言える。(6.3)の $B^{(n)}$ が ξ に無関係になることはBが回転不変なことより出る。$B^{(n)}$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

が線型なことおよび(iii)は上の$B^{(n)}$の形より明らかである。 (証明終り)。

いま補題6.2を用いると

$$
(6.5)\qquad
\begin{aligned}
&T_t^{(n)} \ :\ C_{(n)} \longrightarrow C_{(n)}\\
&T_t^{(n)} f(\gamma) = T_t\,[P_n(\cos\theta(\xi,\cdot))f](\gamma)
\end{aligned}
$$

なる線型作用素が定まる。たゞしT_t はXの定める半群である。

補題6.3 (6.5)の$\{T_t^{(n)};\ t\geqq 0\}$は非負contractionな線型作用素の強連続な半群である。

証明 半群を作ることは補題6.2の(i)と$\{T_t;\ t\geqq 0\}$が半群を作っていることは明らか。強連続なことはT_t がそうで，(6.5)の形と補題6.2の(iii)とを用いると言える。contractionな作用素であることはT_t がそうであることと，補題6.2の(iii)を併せると示せる。

つぎに $P_0(\cos\theta(\xi,\eta))=1$に注意すれば

$$\{T_t^{(c)};\ t\geqq 0\}$$

が非負な線型作用素の半群であることが言える。つぎに

$$(6.6)\qquad |P_n(\mathrm{con}\,\theta)|\leq 1$$

に注意する。いま$\{T_t^{(n)};\ t\geqq 0\}$に対応するHille-Yosidaの意味の生成作用素をA_n とし，その定義域を$D(A_n)$とする。

$f\in D(A_n)$でγ_0はfの正の最大値をとる点とする。

$$
\begin{aligned}
T_t^{(n)} f(\gamma_0) &= T_t^{(o)} f(\gamma_0) - T_t\,[(1-P_n(\cos\theta(\xi,\cdot)))f](\gamma_0)\\
&\leq f(\gamma_0) - T_t\,[(1-P_n(\cos\theta(\xi,\cdot)))f](\gamma_0)
\end{aligned}
$$

そこでT_t が拡散に対応していることに注意すれば(6.6)より

$$(6.7)\qquad A_n f(\gamma_0)\leq 0$$

が言える。この(6.7)よりHille-Yosidaの定理より$T_t^{(n)}$が非負な作用素であることが言える。

(証明終り)

この補題6.3より回転不変な拡散過程Xが1つあると，半群の集まり$\{\{T_t^{(n)};\ t\geqq 0\};\ n\geqq 0\}$が対応している。Xが拡散であることから$\{T_t^{(n)};\ t\geqq 0\}$も拡散に対応することは容易に確かめられる。したがってそれに対応する1次元拡散過程を$X^{(n)}$とすれば

$$(6.8)\qquad X \Longleftrightarrow \{X^{(n)};\ n\geqq 0\}$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

の対応が得られる。ところが

$$T_t^{(n)} f = T_t^{(o)} f - T_t \left[\left(1 - P_n \left(\cos\theta(\xi, \cdot) \right) \right) f \right] \tag{6.9}$$

と(6.6)を用いると$X^{(n)}$は$X^{(o)}$の subprocess であることが言える。

Galmarino[19]は一般の場合を決定しているが，こゝでは対称な拡散過程を目標にしていることを考えに入れてつぎのことを仮定する。

仮定6.2　$X^{(o)}$は$(0, \infty)$を正則区間として持つ。

上の注意と併せると$X^{(n)}$が$(0, \infty)$を正則区間に持っている。よって一次元拡散過程の結果を用いるとつぎのことが言える。

$$k_n^{(t)}(dr) = t^{-1}\left(1 - T_t^{(n)} 1(r)\right) dr \tag{6.10}$$

とおく。こゝで$n \geqq 1$に対しては$T_t^{(n)} : C_{(n)} \to C_{(n)}$であるがそれが拡散に対応しているので自然に有界可測関数までひろげられるのでその意味に用いている。

補題6.4　fを$(0, \infty)$の compact な台を持つ関数で$C_{(n)}$に属するとすれば，ある測度k_nが存在して

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_0^\infty f(r) k_n^{(t)}(dr) = \int_0^\infty f(r) k_n(dr) \tag{6.11}$$

となる。

証明は一次拡散過程の研究で知られている。(Ito-McKean[26])。

さらにつぎのことが言える。

補題6.5　任意の$n \geqq 1$に対して

$$k_n(dr) = \frac{n(n+1)}{2} k_1^*(dr) + k_0(dr) \quad , \quad k_1^*(dr) = k_1(dr) - k_0(dr)$$

となる。

証明　証明を始める前に

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \frac{1 - P_n(\cos\theta)}{1 - \cos\theta} = \frac{1}{2} n(n+1) \tag{6.12}$$

に注意する。(6.11)を考える時に使ったようなfに対して，

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$\int_0^\infty f(r)k_n(dr)=\lim_{t\downarrow 0}\int_0^\infty f(r)\frac{1-T_t[P_n(\cos\theta(\xi,\cdot))](r,\xi)}{t}dr$$

$$=\lim_{t\downarrow 0}\int_0^\infty f(r)\frac{1-T_t1(r)}{t}dr+\lim_{t\downarrow 0}\int_0^\infty f(r)\frac{T_t[1-P_n(\cos\theta(\xi,\cdot))](r,\xi)}{t}dr$$

$$=\int_0^\infty f(r)k_0(dr)+\lim_{t\downarrow 0}\int_0^\infty f(r)\frac{T_t[1-P_n(\cos\theta(\xi,\cdot))](r,\xi)}{t}dr$$

が成りたつ。ところで

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_0^\infty f(r)\frac{T_t[1-P_n(\cos\theta(\xi,\cdot))](r,\xi)}{t}dr$$

$$=\lim_{t\downarrow 0}\int_0^\infty f(r)\frac{T_t[1-\cos\theta(\xi,\cdot)](r,\xi)}{t}dr\frac{n(n+1)}{2}$$

$$+\lim_{t\downarrow 0}\int_0^\infty f(r)\frac{T_t\left\{(1-\cos\theta(\xi,\cdot))\left[\frac{1-P_n(\cos\theta(\xi,\cdot))}{\frac{1}{2}n(n+1)(1-\cos\theta(\xi,\cdot))}-1\right]\right\}}{t}dr\frac{n(n+1)}{2}$$

となる。

上式の最后の式の第1項は

$$\frac{n(n+1)}{2}k_I^*(dr)$$

に等しいことは定義より明らか。

つぎに任意の$\varepsilon>0$に対し$U_\varepsilon(\xi)$なるξの近傍が存在し

$$(6.13)\quad \left|\frac{1-P_n(\cos\theta(\xi,\eta))}{\frac{1}{2}n(n+1)(1-\cos\theta(\xi,\eta))}-1\right|\le\varepsilon\qquad \eta\in U_\varepsilon(\xi)\subset S^{(2)}$$

となっている。一方

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t[(1-\cos\theta(\xi,\cdot))I_{U_\varepsilon(\xi)^c}(\cdot)](r,\xi)}{t}=0$$

しかもこの収束は任意の閉区間$[r_0, r_1]$, $r_0>0$, に属するrに関して一様である。故に

$$\lim_{t\downarrow 0}\left|\int_0^\infty f(r)\frac{T_t\left\{(1-\cos\theta(\xi,\cdot))\left[\frac{1-P_n(\cos\theta(\xi,\cdot))}{\frac{1}{2}n(n+1)(1-\cos\theta(\xi,\cdot))}-1\right]\right\}(r,\xi)}{t}dr\right|=0$$

である。故に以上のことを併せると

$$\int_0^\infty f(r)k_n(dr)=\int_0^\infty f(r)k_0(dr)+\frac{n(n+1)}{2}\int_0^\infty f(r)k_1^*(dr)$$

が言えて結論を得る。 (証明終り)。

<u>定理 6.1</u> $X^{(n)}$, $n\geqq 1$, は$X^{(0)}$とその非負,連続な additive functional φ_t によってつぎの形で定まる:

(6.14) $T_t^{(n)}f(r)=E^{(0)}[e^{-\frac{n(n+1)}{2}\varphi_t}f(r(t))]$

たゞし, $X^{(0)}=\{r(t);\ t\geqq 0,\ P_r^{(0)},\ r\in[0,\infty)\}$とする。

<u>証明</u> $X^{(n)}$, $n\geqq 1$ が$X^{(0)}$の subprocess になっていることは先に注意したが,補題 6.5 は一次元拡散過程に関する結果によれば, $X^{(n)}$を決める $X^{(0)}$の非負,連続な additive functional $\varphi_t^{(n)}$が

$$\varphi_t^{(n)}=\frac{n(n+1)}{2}\varphi_t^{(1)}$$

の形をしていることを示している(Ito-McKean[26])。 (証明終り)。

よって(6.8)の対応は

(6.15) $X\longleftrightarrow\{T_t^{(0)},\ k_1^*\}$

の対応と考えてよいことになる。

いま

(6.16) $r(t)=\|X(t)\|$

とおけば $\underline{r}\equiv\{r(t),\ t\geqq 0,\ P_{(r,\xi)}\}$が$X^{(0)}$と同等な拡散過程である。いま$\{r(t);\ t\geqq 0\}$より生成される$\sigma-$field を$\mathcal{F}^{(r)}$とすれば(6.14)は

(6.17) $E_{(r,\xi)}[S_n^{\ell}(\xi(t))/\mathcal{F}^{(r)}]=e^{-\frac{n(n+1)}{2}\varphi_t}$

を意味している。こゝで$X_t=(r(t),\xi(t))$, φ_t はk_1^*に対応する$\underline{r}$の非負,連続な additive functional である。一方$S^{(2)}\ni\xi=(\psi,\theta)$,$\psi$: colatitude とした時,球面ラプラス作用素は

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$(6.18) \qquad \triangle = \frac{1}{\sin\psi}\ \frac{\partial}{\partial\psi}\ \sin\psi\frac{\partial}{\partial\psi} + (\sin\psi)^{-2}\ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

で表わされるが $1/2\ \triangle$をHille−Yosidaの意味の生成作用素とする球面上のBrown運動 $\{\eta(t), t\geqq 0, P_r\}$に対して

$$(6.18) \qquad E_r[\,S_n^{\ell}\ (\eta(t))\,] = e^{-\frac{n(n+1)}{2}t}$$

が成りたつことに注意すれば定理6.1は回転不変な拡散過程が球面上のBrown運動と$X^{(0)}$のいわゆるskew−productで構成されていることを示している。

つぎに上のskew−productの方法が解析的な定式化をしたらどうなるかを示す。

$X^{(n)}$のGreen作用素を$G_\alpha^{(n)}$とする。

$$\underline{T}^* = \{\ \sum_n\sum_{\ell} f_{n,\ell}(r)\ S_n^{\ell}\ (\xi)\ ;\quad f_{n,\ell} = G_\alpha^{(n)} g_{n,\ell},\quad g_{n,\ell}\ \in\ C_{(n)}\}$$

の形の集まりを考えると，XのHille−Yosidaの意味の生成作用素Aについてつぎのことが言える。

任意の$v = \sum_n\sum_{\ell} f_{n,\ell}\ S_n^{\ell}\ \in\ \underline{T}$に対して

$$(6.19) \qquad \begin{cases} (\alpha - A)\,u = v \\ \quad u = \sum_n\sum_{\ell} G_\alpha^{(n)}\, g_{n,\ell}\ S_n^{\ell}\ \in\ \underline{T}^* \end{cases}$$

なる解uが存在する。(6.19)は$\{X^{(n)}, n\geqq 0\}$からXを構成して行く方法を指示している。

つぎに仮定6.1，6.2の下でXの生成要素を考えたいが，§3ですでに注意しておいたようにこの場合は全体での座標を考えるより局所的座標を採用した方が都合がよい。すなわち$S^*(\psi)$を

$$ds^*(\psi) = \frac{d\psi}{\sin\psi}$$

なるように定めると，$(S\ (r), S^*(\psi), \theta)$が局所座標を与える。たゞし，こゝで$S(r)$は$X^{(0)}$の標準尺度である。(Ito−McKean[26])。

Xが

$$\begin{cases} m(dx) = m^*(dr)\,d\xi \\ m^*(dr)\ :\ X^{(0)}\text{の速度測度} \\ d\xi\ :\ \text{正規化された}\ S^{(2)}\text{上の一様測度} \end{cases}$$

とする時，Xがmに関し，仮定3.1，3.2をみたすことは本質的には§5の時と同じにして示される。そのためには$X^{(0)}$に関し，仮定6.1から次のことが言えることに注意すればよい。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$P_{(r,\xi)}[\varphi_t \in ds,\ r_t \in dr'] = q(ds;t,r,r')m^*(dr')$$

と書け，$q(ds;t,r,r')$はrとr'に関して対称である。后は§5と同じであるので省略する。

つぎにItoの公式を使って§5と同じ計算をすれば，充分小さな台を持ったC^∞－関数に関して

$$(6.20)\quad \begin{aligned}\epsilon(u,v) = &\int_D v(r,\xi)\left[D_s^+ u(dr,\xi) + \frac{1}{2}\triangle_\xi u(r,\xi)k_1^*(dr)\right]d\xi \\ &+ \int_D v(r,\xi)u(r,\xi)k_0(dr)d\xi\end{aligned}$$

が得られる。こゝでD_s^+はS(r)による$u(r,\xi)$のrの関数としての右微分を表わし，$\triangle_\xi$は$u(r,\xi)$をξの関数として球面上のラプラスの作用素をほどこすこと。このことからXの生成要素

$$\{(S(r),S^*(\psi),\theta),\ m(dx),\ (\nu_{ij}),\ k\}$$

はつぎの形で与えられる。

$$(6.21)\quad \begin{cases} \nu_{ij} = 0, & i \neq j \\ \nu_{11} = ds(r)d\xi \\ \nu_{22} = \frac{1}{2}dk_1^*(dr)ds^*(\psi)d\theta \\ \nu_{33} = \frac{1}{2}dk_1^*(dr)ds^*(\psi)d\theta \\ k = k_0(dr)d\xi\ 。\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

§7 skew-productで構成される拡散過程

前の2つの節での考察から拡散過程の構成でskew-productの方法が非常に役にたつことがわかった。こゝではその方法をR^nで系統的に使うことを考えてみる。

$D=R^n$上の拡散過程$X=\{X_t, t\geqq 0, \underline{\underline{M}}_t, P_x\}$で，つぎのような標準生成要素$G=\{(s_1, \cdots, s_n), m, (\nu_{ij}), k\}$：

$$(7.1)\quad \begin{cases} s_j(x)=x_j, & x=(x_1,\cdots,x_n) \\ m(dx)=dx \\ \nu_{ij}=0 \quad i\neq j \\ \nu_{11}(dx)=\cdots=\nu_{n-1,n-1}(dx)=\frac{1}{2}dx \\ \nu_{nn}(dx)=e(dx_1\cdots dx_{n-1})dx_n, & e\text{は}R^{n-1}\text{上の非負Radon測度} \\ k=0 \end{cases}$$

をもつものを構成するのが目標である。そのためにまづn次元Brown運動$B=\{B_t, t\geqq 0, \underline{\underline{M}}_t, P_x\}$を考える。

$$B_t=(B_t^{(1)},\cdots,B_t^{(n)})\in R^n$$

の形に座標表示しておいて，

$$\underline{\underline{M}}^*=\{(B_t^{(1)},\cdots,B_t^{(n-1)}), t\geqq 0\}\text{で生成される}\sigma-\text{field}$$

とする。

<u>仮定 7. 1</u>　$\underline{\underline{M}}^*$可測なBの非負連続なadditive functional φ_tが存在し，任意の$f\in\mathscr{B}(D)$に対して

$$(7.2)\quad E_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(B_t)d\varphi_t\Big]=2\int_{R^2}g_\alpha(x,y)f(y)\nu_{nn}(dy),\quad \forall\alpha>0$$

たゞし，

$$g_\alpha(x,y)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^n e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}}dt$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

さらに

$$P_x〔\varphi_t：狭い意味の\,t\,に関する増加関数〕=1\,,\quad x\in D\,,$$

をみたす。

注意 7.1　仮定7.1は任意の R^{n-1} 上の非負Radon測度に対しては成立しない。それらの事情についてはMcKean−Tanaka〔40〕またはIto−McKean〔26〕参照。

以下の話に役にたつのは次の事実である。

補題 7.1　任意の $f\in\mathcal{D}(R^{n-1})$，$\alpha>0$ に対して

$$(7.3)\qquad E_{(\xi,x_n)}\left[e^{-\alpha\varphi_t} f((B_t^{(1)},\cdots,B_t^{(n-1)}))\right]=\int_0^\infty\int_{R^{n-1}} e^{-\alpha s} f(\eta)g(ds;t,\xi,\eta)d\eta$$

が成立つような $q(ds;t,\xi,\eta)$ が存在し，つぎの性質をもつ：

(i) 任意に固定した (t,ξ) に関して

$$\mu(dsd\eta)\equiv q(ds;t,\xi,\eta)d\eta$$

は確率測度である。

(ii) $q(ds;t,\xi,\eta)$ は ξ と η に関して対称である。

証明　(7.3)をみたす q が存在することは $n-1$ 次元Brown運動の推移確率がLebesgue測度に関して密度を持つので，その $e^{-\alpha\varphi_t}$− subprocessも同様な性質をもつことからも言える。(i)の性質は定義より明らか。(ii)の性質も $n-1$ 次元Brown運動の $e^{-\alpha\varphi_t}$ − subprocessの推移確率が対称な密度を持つことから言える。

またこれらの事情をしらべるにはHunt〔22〕の考えも使える。　　　（証明終り）。

そこで

$$(7.4)\quad \begin{cases} X_t^{(i)}=B_t^{(i)}\,,\quad i=1,2,\cdots,n-1\,,\\ X_t^{(n)}=B_{\varphi_t}^{(n)}\\ X_t=(X_t^{(1)},\cdots,X_t^{(n)}) \end{cases}$$

とおけばつぎのことが言える。

$\underline{\underline{M}}_t^0=\{X_s\,;\,s\le t\}$ で生成される σ − field

とする。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

定理 7.1 $X=\{X_t;\ t\geqq 0,\ \underline{\underline{M}}_t,\ P_x\}$ は R^n 上の拡散過程でその生成要素は (7.1) で与えられ，推移確率は

$$(7.5)\quad \begin{cases} P(t,x,dy)=p(t,x,y)\,dy \\ p(t,x,y)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\, e^{-\frac{(x_n-y_n)^2}{2s}}\, q(ds\,;t,(x_1,\cdots,x_{n-1}),(y_1,\cdots,y_{n-1})) \end{cases}$$

となる。

証明 任意の $f\in\mathcal{D}(R^{n-1})$，$g\in\mathcal{D}(R^1)$ に対してつぎの式がなりたつ。

$$\begin{aligned}
&E_x\left[f(X^{(1)}_{t+s},\cdots,X^{(n-1)}_{t+s})\,g(X^{(n)}_{t+s})/\underline{\underline{M}}^0_t\right]\\
&=E_x\left[f(B^{(1)}_{t+s},\cdots,B^{(n-1)}_{t+s})\,g(B^{(n)}_{\varphi_t+\varphi_s(\theta_t w)})/\underline{\underline{M}}^0_t\right]\\
&=E_x\left[f(B^{(1)}_{t+s},\cdots,B^{(n-1)}_{t+s})\,E_x\left[g(B^{(n)}_{\varphi_t+\varphi_s}(\theta_t w))\ /\underline{\underline{M}}^0_t\otimes\underline{\underline{M}}^*\right]\right]\ \underline{\underline{M}}^0_t\Big]\\
&=E_x\left[f(B^{(1)}_{t+s},\cdots,B^{(n-1)}_{t+s})\int_{R^1} g(y_n)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\varphi_s(\theta_t w)}}\,e^{-\frac{(B^{(n)}_{\varphi_t}-y_n)^2}{2\varphi_s(\theta_t w)}}\,dy_n/\underline{\underline{M}}^0_t\right]\\
&=E_{(B^{(1)}_t,\cdots,B^{(n-1)}_t,B^{(n)}_{\varphi_t})}\left[f(B^{(1)}_s,\cdots,B^{(n-1)}_s)\,g(B^{(n)}_{\varphi_s})\right]\\
&=E_{x_t}\left[f(X^{(1)}_s,\cdots,X^{(n+1)}_s)\,g(X^{(n)}_s)\right]
\end{aligned}$$

よってMarkov 性が成りたつ。道の連続性は明らかで，推移確率が (7.5) の形になることも明らかであるので后は生成要素をみればよい。

仮定3.1，3.2をみたすことは q の ξ と η についての対称性より示される。

つぎに Ito の変換公式 (1.1) を用いると任意の $u\in\mathcal{D}(R^n)$ に対して

$$u(X_t)-u(X_0)=\sum_{i=1}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i}u(X_s)\,dx^{(i)}_s+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(X_s)\,ds+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}u(X_s)\,d\varphi_s$$

となる。故に

$$T_t u(x)-u(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^t\int_{R^n} p(s,x,y)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(y)\,dy+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{R^n} p(s,x,y)\,\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}u(y)\,d\nu_{nn}(y)\times 2$$

となり，

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$
(7.6)\quad
\begin{aligned}
&\alpha G_\alpha u(x) - u(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_{R^n} g_\alpha^*(x,y)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(y)\,\nu_{ii}(dy)\\
&g_\alpha^*(x,y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, p(t,x,y)\,dt
\end{aligned}
$$

が示される。(7.6)より任意の u, $v \in \mathcal{D}(D)$ に対して

$$
(7.7)\qquad \varepsilon(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,\nu_{ii}(dx), \quad \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{F}_\alpha
$$

を示すのは§5の補題5.1の場合と全く同じである。　　　　（証明終り）

注意 7.2　　§5の場合と同じ考えで仮定3.3がみたされていることも示せる。

(7.1)の e としては R^1 上の σ－finite な Radon 測度 m_i^*, $i=1,2,\cdots,n-1$, より

$$
e(dx_1\cdots dx_{n-1}) = m_1^*(dx_1)\cdots m_{n-1}^*(dx_{n-1})
$$

として作ったものをふくむ。しかし仮定7.1はその形でないものも実際ふくんでいることは良く知られている。

注意 7.3　　例4.1と同じ考えで，定理7.1の X は生成要素が

$$
\begin{cases}
s_j(x) = x_j, & x = (x_1,\cdots,x_{n-1})\\
m(dx) = e(dx_1\cdots dx_n)\\
\nu_{ij}(dx) = 0 & i \neq j\\
\nu_{ii}(dx) = \frac{1}{2}dx, & i = 1,2,\cdots,n-1\\
k = 0
\end{cases}
$$

なる $n-1$ 次元の拡散過程と1次元 Brown 運動の直積として出来る拡散過程と同じ到達確率を持つことがわかる。そのように考えると $n \geqq 3$ の時は例4.1で作ったもので定理7.1で作ったものにふくまれないものもあるが，逆もまた言える。

前の節で注意した skew－product と Wentzell の方法の関連を具体的に示すために便宜的に D は

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

R^nでなく，

$$D = R^{n-1} \times (0, \pi)$$

として考える。記号として

$$h_k(\xi) = \sin k\xi \quad , \quad \xi \in (0, \pi)$$

を固定する。

$$\underline{I} = \{ \sum_k f_k((x_1 \cdots, x_{n-1}))h_k(x_n) ; \quad f_k \in C_0(R^{n-1}), \text{和は有限和} \}$$

とする。$e(dx)$はR^{n-1}上の非負Radon測度で，任意の$k \geqq 0$に対して

$$(7.8) \qquad \mathfrak{F}^{(k)}u(x) = \frac{e_u(dx) - k^2 e(dx)u}{2dx}$$

が$C_0(R^{n-1})$上の非負，contractionな線型作用素の強連続な半群$T_t^{(k)}$の生成作用素を作るようなものとする。さらに任意の空でない開集合Aに対して$e(A) > 0$とする。たゞし，$-e_u(dx)$は$n-1$次元のニュートン・ポテンシヤル論におけるuのRiesz測度とする。
$\{ T_t^{(k)} ; t \geqq 0 \}$のGreen作用素を$G_\alpha^{(k)}$とする。

$$\underline{I}^* = \{ \sum_k g_k(x_1, \cdots, x_{n-1})h_k(x_n) ; \quad g_k = G_\alpha^{(k)} f_k , \quad f_k \in C_0(R^{n-1}) \}$$

とおけば

$$A : \underline{I}^* \longrightarrow \underline{I}$$

$$(7.9) \qquad Au(x) = \frac{e_u(dx_1 \cdots dx_{n-1} ; x_n) + (\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} u(x_1 \cdots x_n))\, e(dx_1 \cdots dx_{n-1})\, dx_n}{2dx}$$

が定義出来る。こゝで$e_u(dx_1 \cdots dx_{n-1} ; x_n)$は$u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$で$x_n$は固定して$(x_1, \cdots x_{n-1})$の関数と考えた時の(7.8)の$e_u$に相当するものである。

補題7．2 方程式

$$(7.10) \qquad (\alpha - A)u = v, \qquad \alpha > 0,$$

は任意の$v \in \underline{I}$に対して$u \in \underline{I}^*$なる解をもつ。

証明 $v \in \underline{I}$で

$$v(x_1, \cdots, x_n) = \sum_k f_k(x_1, \cdots x_{n-1})h_k(x_n)$$

の時

$$u(x_1, \cdots, x_n) = \sum_k G_\alpha^{(k)} f_k(x_1, \cdots, x_{n-1})h_k(X_n)$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

とおけば(7.10)をみたす。実際

$$(\alpha - A)u(x) = \sum_k \left\{ \alpha G_\alpha^{(k)} f_k - \frac{e_{G_\alpha^{(k)} f_k}(dx_1 \cdots dx_{n-1}) - k^2 G_\alpha^{(k)} f_k(x_1 \cdots x_{n-1}) e(dx_1 \cdots dx_{n-1})}{2\, dx_1 \cdots dx_{n-1}} \right\} h_k(x_n)$$

$$= \sum_k f_k(x_1 \cdots, x_{n-1}) h_k(x_n) = v(x)$$

となる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終り)

<u>補題7.3</u>　　(7.9)のAは$C_0(D)$で最小の閉拡大をもつ。

<u>証明</u>　$u_n \in \underline{\underline{I}}^*$,　$u_n \to 0$ in $C_0(D)$

$Au_n \to g$ in $C_0(D)$

の時，

$$g = 0$$

を言えばよい。

(7.11)　$u_n = \sum_k f_k^{(n)}(x_1 \cdots, x_{n-1}) h_k(x_n)$　(有限和)

の形に表わされる。仮定より任意のkに対して

(7.12)　$f_k^{(n)} \to 0$　in　$C_0(R^{n-1})$

である。このことは

$$f_k^{(n)}(x_1 \cdots, x_{n-1}) = A_k \int_0^\pi u_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) h_k(x_n)\, dx_n$$

に注意すればよい。また(7.11)より

$$Au_n(x) = \sum_k \mathfrak{G}^{(k)} f_k(x_1, \cdots, x_{n-1}) h_k(x_n)$$

と　$Au_n \longrightarrow g$　を併せると(7.12)の場合と同じにして

$$\exists\, g_k :\ \mathfrak{G}^{(k)} f_k^{(n)}(x_1, \cdots, x_{n-1}) \to g_k(x_1, \cdots, x_{n-1}) \text{ in } C_0(R^{n-1})$$

となる。故に

(7.13)　$\begin{cases} f_k^{(n)} \to 0 & \text{in } C_0(R^{n-1}) \\ \mathfrak{G}^{(k)} f_k^{(n)} \to g_k & \text{in } C_0(R^{n-1}) \end{cases}$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

故に $\mathfrak{G}^{(k)}$ が閉作用素なことに注意すれば

$$g_k = 0$$

よって

$$g = 0$$

が言える。 （証明終り）

<u>定理 7．2</u>　Aの最小の閉拡大 $\overline{A}$ は

$$T_t : C_0(D) \to C_0(D)$$

なる非負，contraction な線型作用素の強連続な半群を作る。それに対応する拡散過程の生成要素Gは（7.1）で与えられる。

<u>証明</u>　条件(1)は $\underline{\underline{T}}^*$ が $C_0(D)$ で密なことを言えばよいが，§6の時と同じにして示される。条件(3)は補題 7.3 である。そこで定理 1.2 を応用するには条件(2)を確かめるとよい。ところが x° で u が正の最大値をとれば

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} u(x_1^\circ, \cdots, x_n^\circ) \leq 0$$

であるので，それを（7.9）に適用すれば后は x_n° は固定されていて，$(x_1, \cdots, x_{n-1})$ に関する作用素としてAを考えると(ii)の性質を持っているので条件(2)が言えたことになる。よって定理の前半が言える。

定理の后半を示すのには，（7.8）のような $e(dx)$ に対しては（7.2）のような狭義増加で連続な additive functional φ_t が存在し，定理 7.1 の skew－product の拡散過程を作れば，$f \in C_0(R^{n-1})$ に対して

$$E_{(x_1, \cdots x_{n-1}, x_n)}[f(X_t^{(1)}, \cdots, X_t^{(n-1)}) h_k(X_t^{(n)})]$$
$$= E_{(x_1, \cdots x_{n-1}, x_n)}[f(B_t^{(1)}, \cdots, B_t^{(n-1)}) h_k(B_{\varphi_t}^{(n)})]$$
$$= E_{(x_1, \cdots x_{n-1}, x_n)}[f(B_t^{(1)}, \cdots, B_t^{(n-1)}) e^{-k^2 \varphi_t}] h_k(x_n)$$

となるので，構成した拡散過程の半群が定理 7.2 の T_t に一致することから言える。

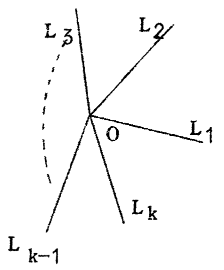
（証明終り）

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

§8 Brown運動をdominateする拡散過程 (II)

これまで一般論としての生成要素のあり方とその逆としての生成要素から拡散過程を構成する問題を考えて来た。后の方のことは主として直積やskew-productの方法を用い一次元のものから積重ねて行く方法によって来た。現在のところそれ以外に有力な方法がみつかっていないが，それでは本質的に座標から決まるマルチンゲールが直交する場合をはみ出すことが出来ない。この範囲にとゞまっている限り例えば1点から道が出て行く時どんな可能性があるかの基本的な問題の1つが解決されない。一般的にこの種の問題は Ito[28] で分析されたが，標語的に言えばその点の近傍の状態で規定される。こゝでは§5のskew-productの場合の分析を基礎に拡散過程の可能性を広げて行く。まづ§5の結果の拡張から始める。

§5と同様に0を共有するk本の直線 L_1, L_2, ・・・, L_k を考える。たゞし ($0 \notin L_i$, $i=1, 2, \cdots, k$)



$R^2 - \{0\}$ 上につぎの性質をみたす拡散過程

(8.1) $X = \{ X_t \,;\, t \geqq 0 ,\ \underline{\underline{M}}_t ,\ P_x \}$

を考える：

(i) $x \in R^2 \setminus [\bigcup_{i=1}^{k} L_i \cup \{0\}]$ の近傍で $R^2 \setminus [\bigcup_{i=1}^{k} L_i \cup \{0\}]$ にふくまれるところでは2次元Brown運動に等しい。

(ii) 各 $x \in L_i$ の近傍で他の L_j, $j \neq i$ をふくまないようなところでは，その L_i を x_1-軸に回転し重ね併せた時に x の対応する x' の対応する近傍における§5の拡散に等しい。

このような拡散過程が唯々1つ存在することは，$R^2 \setminus \{0\}$ の各点の近傍では§5の結果より確かに存在するので后はつなぎ合せ (recollement) によって $R^2 \setminus \{0\}$ 上にひろげられることからわかる。(例えばCourrège-Priouret[11]参照)。

問題はこの (8.1) の X を R^2 全体へひろげることであるが，それより先に補助定理5.3の拡張より始める。記号は§5と同じ意味に用いる。

定義8.1 $u \in \underline{\underline{H}}$ とは u がつぎの(i), (ii), (iii)をみたすことである。

(i) u は $R^2 \setminus \{0\}$ で連続

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

(ii) u は $R^2 \setminus [\bigcup_{i=1}^{k} L_i \cup \{0\}]$ で調和

(iii) $u \in C^{(2)}(L_i)$, $i=1,2,\cdots,k$ かつ

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial \ell^2}+[\frac{\partial u}{\partial m}]=0 \qquad \text{on } L_i \ , \quad i=1,2,\cdots,k\,。$$

そのときつぎのことが成りたつ。

命題 8.1　$\underline{\underline{H}}_b=\{u\in\underline{\underline{H}}\ ;\ u:$ 有界$\}$ とすれば k 個の基底をもつ。すなわち $u_1, u_2, \cdots, u_k \in \underline{\underline{H}}_b$ が存在し，任意の $u \in \underline{\underline{H}}_b$ は

(8.2)　$u=\sum_{i=1}^{k} c_i u_i$,　c_i : 定数，　$i=1,2,\cdots,k$

と書け，その表現は一意的である。

注意 8.1　いま原点0への到達時間

$$\tau_0=\begin{cases}\inf\{t\ ;\ \lim_{s\uparrow t} X_s=0\} , & \{\ \}\neq\phi \\ \infty , & \text{他の場合}\end{cases}$$

とおけば以下の証明をみればわかるように (8.2) の u_i としては

(8.3)　$u_i(x)=P_x[X_t\to 0$, tangentially on L_i , $t\uparrow\tau_0\}$

ととれる。

命題の証明　まづ

$$\eta_i=\begin{cases}\inf\{t\ ;\ X_t\in L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_{i-1}\cup L_{i+1}\cup\cdots\cup L_k\} , & \{\ \}\neq\phi \\ \infty & ,\ \text{他の場合}\end{cases}$$

すなわち，$L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_{i-1}\cup L_{i+1}\cdots\cup L_k$ への到達時間とする。

まづ一般的に $R^2\setminus\{0\}$ の任意の x の近傍で考えると X は §5 の場合と同じなことと強マルコフ性を用いると

(8.4)　$u_i(x)=P_x[\{\tau_0<\infty\}\cup\{X_t\to 0$ tangentially on L_i , $t\uparrow\tau_0\}]$

とおけば

(8.5)　$u_i \in \underline{\underline{H}}_b$,　$i=1,2,\cdots,k$,

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

が言える。

つぎに

$$P_x〔\exists r:\text{有理数}<\tau_0 \ : X_t \in R^2 \setminus 〔\bigcup_{i=1}^{k} L_i \cup \{0\}〕,\ r \leq {}^{\forall} t < \tau_0 〕= 0$$

が2次元Brown運動の性質から言える。こゝで定理5.2を用いると

(8.6) $$u_i(x) \geqq P_x〔\tau_0 < \eta_i〕 \to 1, \quad x \in L_i, \quad x \to 0$$

が言える。故に

(8.7) $$u_i(x) \leq 1 - P_x〔\tau_0 < \eta_j〕\to 0, \quad x \in L_j, \quad x \to 0, i \neq j$$

も言える。そこで

$$u(x) = P_x〔\tau_0 < \infty〕$$

とおけば定義より

$$u(x) \geqq \sum_{i=1}^{k} u_i(x)$$

となる。いま(8.6)を用いると $x \in \bigcup_{i=1}^{k} L_i$ で $x \to 0$ とすれば

$$u(x) \to 1$$

となる。また一般的な事実から $u(x)$ は $R^2 \setminus 〔\bigcup_{i=1}^{k} L_i \cup \{0\}〕$ で調和である。以上併せると

(8.8) $$\lim_{\substack{x \neq 0 \\ x \to 0}} u(x) = 1$$

が言える。つぎにこれを用いて

(8.9) $$u(x) = P_x〔\tau_0 < \infty〕\equiv 1$$

を示す。Bを0を中心とする任意の円とする。もし

$$P_x〔\tau_B < \infty〕= 1, \quad x \in R^2 \setminus B$$

(8.10) $$\tau_B = \begin{cases} \inf\{t\ ;\ X_t \in B\}, & \{\quad\} \neq \phi, \\ \infty, & \text{他の場合}, \end{cases}$$

が言えれば(8.8)と併せて(8.9)が言える。故に(8.10)を示せば充分である。

(8.11) $$u_\lambda(x) = E_x〔e^{-\lambda\tau_B}〕, \quad x \in R^2 \setminus B,$$

とおく。さらに2次元Brown運動に対して τ_B および（8.11）式の右辺と同じ量を考え，それを $v_\lambda(x)$ とおく。いま

$$B=\{x\,;\,|x|\leq r_\circ\}$$

とおけば良く知られているように

$$\text{(8.12)}\quad \begin{aligned} &\lambda v_\lambda(x)-\frac{1}{2}\triangle v_\lambda(x)=0, \quad x\in R^2\setminus B \\ &\lambda w_\lambda(r)-\frac{1}{2}\left(w_\lambda''(r)+\frac{w_\lambda'(r)}{r}\right)=0, \quad r>r_\circ \end{aligned}$$

たゞし，w_λ は $w_\lambda(|x|)=v_\lambda(x)$ なるものとして定まる関数。

（8.12）より

$$\text{(8.13)}\quad w_\lambda''=2\lambda w_\lambda-\frac{w_\lambda'}{r}>0, \quad r>r_\circ$$

が言える。そこでX，$t<\tau_B$ に対してItoの変換公式（1.1）を適用すれば§5の時の考察から

$$\text{(8.14)}\quad \begin{aligned} e^{-\lambda t}v_\lambda(X_t)-v_\lambda(X_\circ)&=A_t+\int_0^t e^{-\lambda s}\left(\lambda v_\lambda-\frac{1}{2}\triangle v_\lambda\right)(X_s)\,ds \\ &+\sum_{i=1}^{k}\int_0^t e^{-\lambda s}\frac{1}{2}\nabla_{\ell_i}^2 v_\lambda(X_s)\,d\varphi_s^{(i)} \end{aligned}$$

たゞし，A_t，$0\leq t<\tau_\circ$，はマルチンゲールで，$\varphi_s^{(i)}$，$0\leq s<\tau_\circ$ は連続な非負な additive functional である。いま

$$\nabla_{\ell_i}^2 v_\lambda(x)=w_\lambda''(|x|)$$

に注意し，（8.12），（8.13）を用いると

$$\text{(8.15)}\quad E_x[e^{-\lambda\tau_B\wedge n}]\geqq E_x[e^{-\lambda\tau_B\wedge n}v_\lambda(X_{\tau_B\wedge n})]\geqq v_\lambda(x)$$

となる。そこで $n\uparrow\infty$ とすると

$$E_x[e^{-\lambda\tau_B}]\geqq v_\lambda(x), \quad x\in R^2\setminus B$$

が言える。ところが $\lambda\downarrow 0$ とすれば，$v_\lambda(x)\uparrow 1$ であるので

$$\text{(8.16)}\quad P_x[\tau_B<\infty]=1, \quad x\in R^2\setminus B,$$

となり（8.9）が示される。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

(8.9)の事実を用いると(8.4)の$u_i(x)$と(8.3)の$u_i(x)$が一致する。

いま

$$\overline{u}(x) = \sum_{i=1}^{k} u_i(x)$$

とおけば(8.6)によって $x \in \bigcup_{i=1}^{k} L_i$, $x \to 0$ の時に

$$\overline{u}(x) \to 1$$

となる。一方$\overline{u}$は $R^2 \setminus [\bigcup_{i=1}^{k} L_i \cup \{0\}]$で調和であるので上のことと併せると

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \overline{u}(x) = 1$$

となる。これと(8.9)を併せると

$$\lim_{t \uparrow \tau_0} \overline{u}(X_t) = 1 \qquad \text{a.s}(P_x)$$

であり，$\overline{u}$の定義を併せると

$$\overline{u}(x) = E_x[\lim_{t \uparrow \tau_0} \overline{u}(X_t)] = 1, \quad x \in R^2 \setminus \{0\},$$

となる。このことは

$$P_x[\bigcup_{i=1}^{k}\{X_t \to 0, \ \text{tangentially on } L_i, \ t \uparrow \tau_0\}] = 1,$$

$$x \in R^2 \setminus \{0\}$$

を意味する。

つぎに任意の$v \in \underline{\underline{H}}_b$に対し，

$$Y_t = v(X_t), \qquad t < \tau_0$$

とおけば

$$\lim_{t \uparrow \tau_0} v(X_t)$$

が定義出来，$\{Y_t\}$は有界なマルチンゲールになる。いま

$$B_i = \{w; \ X_t(w) \to 0 \ \text{tangentially on } L_i, \ t \uparrow \tau_0\}$$

とおけば，

$$(8.18) \qquad \exists c_i : \text{定数}: \quad Y_\infty \equiv \lim_{t \uparrow \infty} Y_t = c_i \quad \text{on } B_i \quad (\text{a.s})$$

となることが言える。実際，もし(8.18)が成立しないとすれば $\exists a$, $\exists \delta > 0$, $\exists x_k \in L_i$, $x_k \to 0$で次のようなものがある

$$P_{x_k}[Y_\infty > a; B_i] \geqq \delta$$
$$P_{x_k}[Y_\infty \leqq a; B_i] \geqq \delta$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

他方

$$\{\tau_0 < \eta_i\} \subset B_i, \quad \text{a.s } P_x, \quad x \in L_i$$

で，さらに定理5.2を用いると，$x \in L_i$，$x \to 0$ の時に

$$P_x[\tau_0 < \eta_i] \to 1$$

となる。故に $\exists\, x \in L_i$ で

$$P_x[Y_\infty > a; \quad \tau_0 < \eta_i] > 0$$

$$P_x[Y_\infty \leq a; \quad \tau_0 < \eta_i] > 0$$

となる。これは定理5.3に矛盾する。よって(8.18)が言えた。

そこで

$$\tilde{v}(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i(x) \in \underline{\underline{H}}_b$$

とおくと，

$$\lim_{t \uparrow \tau_0} (v - \tilde{v})(X_t) = 0, \quad \text{a.s}$$

よって

$$(v - \tilde{v})(x) = E_x[\lim_{t \uparrow \tau_0} (v - \tilde{v})(X_t)] = 0$$

となり，

$$v = \tilde{v}$$

となり，任意の $v \in \underline{\underline{H}}_b$ が(8.3)の $u_1, \cdots, u_k$ の一次結合で書けたことになる。一意性は明らかである。　　(証明終り)。

注意8.2　上の証明は $u_i \in \underline{\underline{H}}_b$，$i = 1, 2, \cdots, k$ の他に

(8.19)　$P_x[\bigcup_{i=1}^{k}\{X_t \to 0 \text{ tangentially on } L_i, \ t \uparrow \tau_0\}] = 1, \quad x \in R^2 \setminus \{0\}$，

も同時に示している。((8.17))，このことは考えている $R^2 \setminus \{0\}$ での拡散過程 X の道の 0 への近づき方を完全に規定している。したがって X を R^2 全体に拡張する時にこの関係に制約されることになる。すでに§5で注意したようにこのような近づき方は古典的な拡散過程ではみられないことである。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

補題 8.1 $R^2 \setminus \{0\}$ 上の拡散過程 X は Lebesgue 測度 dx に関して対称な Green 密度 $g_\alpha(x,y)$ をもつ。

証明 $R^2 \setminus \{0\}$ 上の任意の点について局所的に考えれば対称な Green 密度を持つことは §5の結果から言える。しかもその近傍をUとすれば $C_0(U)$ を $C_0(U)$ に Green 作用素はうつす。しかも Hille − Yosida の意味の作用素は局所的である。これらの事実から上の補題を示すことが出来るが，詳細は省略する。（証明終り）

いま

$$u_i^\alpha(x) = E_x[e^{-\alpha\tau_0};\ X_t \to 0 \text{ tangentially on } L_i,\quad t\uparrow\tau_0]$$

とおけば通常の方法を用いると

$$u_i^\alpha(x) = u_i(x) - \alpha\int_{R^2\setminus\{0\}} g_\alpha(x,y)u_i(y)dy$$

と書ける。

$$a_i = \int_{R^2\setminus\{0\}} u_i^1(x)dx$$

とし，

(8.20) $\quad w_i(x) = u_i(x) / a_i$

とおく。もちろん

(8.21) $\quad \underline{\underline{H}}_b^+ = \{\sum_{i=1}^k c_i w_i;\quad c_i \geqq 0 \text{定数}\}$

である。

これだけの準備の下で，K. Ito [28] の意味で $R^2 \setminus \{0\}$ の拡散過程Xの R^2 上への拡張を考える。

(8.22) $\quad \eta_i(dx) = w_i(x)dx$

とおけば η_i はXに関する excessive measure である。従って η_i を measure potential とする approximate process

$$X^{(i)} = \{X_t,\ \alpha\equiv 0,\ \beta,\ E^i\}$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

が一意的に定まる。（例えばWeil〔55〕参照）。こゝでE^iはつぎのようにして定まるΩ上の測度である：

$$\Omega=\{\omega\ ;\ [0,\infty)\ni t\longmapsto \omega(t)\in R^2$$
$$\exists\,\sigma_0(\omega)<\infty:\quad t<\sigma_0 \Longrightarrow \omega(t)\in R^2\setminus\{0\}$$
$$t\geqq\sigma_0 \Longrightarrow \omega(t)=0 \qquad\}$$

<u>定理 8.1</u>　　XのR²上の拡散へのIto〔28〕の意味の拡張はつぎのパラメータ：$p_1, p_2, \cdots, p_k$，m できまる。たゞし

$$p_1+p_2+\cdots+p_k+m=1,\qquad p_i\geqslant 0,\ m\geqslant 0$$

実際上の拡張した拡散過程の原点0に関するItoの意味の<u>excursion law</u>は

(8.23)　　$$\underline{\underline{n}}=\sum_{i=1}^{k}p_iE^i$$

で与えられる。

<u>証明</u>　命題8.1と（8.3）と注意8.2にまづ注意する。このこととIto〔28〕の一般論および（8.22）に対応するapproximate processの存在を併せると可能性が上のだけしかないことが言える。

$p_1, p_2, \cdots, p_k$，mを与えたときのprocessの構成法は次のとおりである。強Markov性によって0から出発するpathが構成できればよい。$\underline{\underline{n}}=\sum_{i=1}^{k}p_iE^i$ を characteristic measureにもつΩ値のPoisson point process Yをまず用意する（Ito〔28〕, Theorem 3.2），YはΩ値のpoint function：すなわち $p:D_p\to\Omega$，D_pは（0，∞）のある可算部分集合，なる写像の全体$\pi(\Omega)$上の確率測度（同じことであるが$\pi(\Omega)$一値の確率変数）であることを注意しよう。

各 point function $p:D_p\to\omega$に対し次の量を対応させる；各$s\in[0,\infty)$に対し

$$S(s)=ms+\sum_{\substack{t\leq s\\ t\in D_p}}\sigma_0(\omega_t)$$

ここで　$\omega_t\in\Omega$に対し　$\sigma_0(\omega_t)=\inf\{u\ ;\ \omega_t(u)=0\}$.

S(s)はYが定義されている確率空間上の確率過程であり，YがPoisson point processということからS(s)は時間的に一様な加法過程である。しかも増加するpathを持っているのでいわゆ

る subordinator といわれるものである。この $S(s)$ と Poisson point process $p: t \in D_p \longmapsto \omega_t \in \Omega$ を用いて

$$X(u)=\begin{cases}\omega_t(u-S(t-)) & , \quad S(t-)\leq u<S(t)\\ 0 & , \quad u=S(t-)=S(t)\end{cases}$$

この $X(u)$ が原点0から出発する拡散過程の path を与える。くわしくは Ito[28]を参照されたい。

（証明終り）

注意 8．3　定理 8.1 の拡散過程とつなぎ合せの方法が結合すると R^2 上の新たな型の拡散過程が作れる。ある可算集合 D^* があって，任意の点 $x \in D^*$ に対して充分小さな R^2 での近傍をとるとその中には x 以外の D^* の点はないとする。そのような場合 D^* の各点が定理 8.1 の拡散過程の原点と同じ種類になっている拡散が構成出来る。

例8.1　$\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_s$ を原点を通る直線群とし，原点をのぞいて得られる半直線群を $L_1, L_2, \cdots, L_{2s}$ とする。そのとき，次の量を考える

$$(8.23)\quad \begin{cases} s_j(x)=x_i, \quad x=(x_1,x_2)\in R^2, \\ m(dx)=dx \\ \nu_{ij}(dx)=\frac{1}{2}\delta_{ij}\,dx+\sum_{\alpha=1}^{s}\ell^{\alpha}_{x_i}\ell^{\alpha}_{x_j}\,d\ell\alpha, \qquad i,j=1,2 \\ k(dx)=0 \end{cases}$$

たゞし，$(\ell^{\alpha}_{x_1}, \ell^{\alpha}_{x_2})$ は直線 ℓ^{α} の方向ベクトルとする。$d\ell_{\alpha}$ は直線 ℓ_{α} 上の line element.これを生成要素とする拡散過程が存在する。

実際定理 8.1 で

$$(8.24)\quad \begin{cases} m=0 \\ p_1=p_2=\cdots=p_{2s}=\frac{1}{2s} \end{cases}$$

をパラメータトする拡散過程 X を考えるとそれが目的の拡散過程 X になっている。

$m=0$ であるので，Ito[28]の一般論より

$$\int_0^t X_{\{0\}}(X_s)\,ds=0 \qquad \forall t\geqq 0$$

になっている。拡張する前のことと併せるとGreen密度（Lebesgue測度 dx に関する）$g_\alpha(x, y)$ は確かに存在する。后は（8.24）より excursion lawが

$$\underline{\underline{n}} = \frac{1}{2s}\sum_{i=1}^{2s} E^i$$

となっていることと，（8.22）および ℓ_i の相反する方向の半直線が L_{i_1}，L_{i_2} ならば $w_{i_1}(x) = w_{i_2}(x^*)$（たゞし，$x^*$ は x の原点に関する対称点）を併せ $g_\alpha(x, y)$ の x と y に関する対称性が出る。それらによって仮定3.1，3.2が対応し，$\mathcal{L}_2$－Dirichlet 空間が考えられる。后はこれまで同様伊藤の公式を用いると

$$(8.25)\quad \varepsilon(u, v) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx + \sum_{i=1}^{s}\int_{\ell_i}\frac{\partial u}{\partial \ell_i}(x)\frac{\partial v}{\partial \ell_i}(x)\,d\ell_i \qquad u, v \in \mathcal{D}(R^2),$$

が示される。これから（8.23）を示すのは容易である。

ℓ_1，ℓ_2 がそれぞれ x_1－軸，x_2－軸の場合は，例4.1で作った特別の場合で例4.1の記号で

$$m^{(1)}(d\xi) = d\xi + \delta_{\{0\}}(d\xi),\quad m^{(2)}(d\xi) = d\xi + \delta_{\{0\}}(d\xi)$$

とし例4.1で出来たものを $m(dx) = dx$ となるように time－change したものである。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

§9 拡散過程のsimilarityとその不変量

拡散過程のsimilarityの概念は§1，1.3で定義された.2つの拡散過程が(少くとも局所的に) similarであるか否かを知ることは拡散過程の理論においては，きわめて基本的な問題の1つと考えられる。そのためにはsimilarityのもとでどういう拡散過程の性質が不変になるかをまず知らねばならない。以下でこのような性質で特に局所的なものをいくつか導入し，色々な例でどうなっているかを調べてみた。たゞ気づいたものを列記しただけで極めて不十分のものであり，今後さらにくわしい検討がなされなければならないが，とりあえずこの機会にまとめておくことにした。

9.1 Skorohodのrank ([53])

拡散過程X(この節では簡単のため局所的なkillingはないような拡散過程のみ考察する)のmartingale additive functional (§1. 1.2参照)の全体を$\mathcal{M}$であらわす，$\mathcal{M}=\mathcal{M}^c$である。Motoo–Watanabe[44]で次のことが示されている： $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{M}$が存在し，それは$\mathcal{M}$のbaseで$\langle A_i, A_j\rangle = 0 \quad i \neq j$，かつ， $\langle A_1\rangle \gg \langle A_2\rangle \gg \cdots \gg \langle A_n\rangle$ $\cdots$。

ここで$\gg$はnon-negative a.fの絶対連続性をあらわす：すなわち $\varphi \gg \psi$ とはある$a \in \mathcal{B}^+(E)$に対し $\psi_t = \int_0^t a(X_s)\,d\varphi_s$ とかけること。

さらに別に上の性質をもつ A_1' A_2' $\cdots, A_n'$ $\cdots \in \mathcal{M}$があれば

$$\langle A_i\rangle \gg \langle A_i'\rangle \quad \text{かつ} \quad \langle A_i\rangle \ll \langle A_i'\rangle$$

がなりたつ。この事実に基づいて次の定義をあたえよう

定義 9.1　$X=(X_t, P_x)$をE上の拡散過程とする，Xがx∈Eで rank k をもつとは

どんなxの近傍Vをとっても

$$\int_0^t I_V(X_s)\,d\langle A_i\rangle_s \neq 0 \quad , \quad i=1,2,\cdots,k$$

であるがある近傍Uが存在し

$$\int_0^t I_U(X_s)\,d\langle A_{k+1}\rangle_s = 0$$

となることである。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

この定義がa.f $A_1, A_2, \cdots$ のとり方によらないことは上の注意より明らかである。又この定義はあきらかにXのxでの局所的性質であり，又similarityのもとで不変な概念である。なおSkorohod[53]ではやゝ違った形になっているが本質的には同じである。

例 9.1 EがR^{n}のある領域でXの local generator が$x \in E$のある近傍で uniformly elliptic, Hölder 連続な微分作用素であたえられるときはxで rank n をもつ。

例 9.2 EがR^{n}のある領域で，Xの local generator が$x \in E$のある近傍で uniformly elliptic な self-adjoint form であたえられるときもxで rank n をもつ。
この事実はKunita[34] p. 298 の定理 3.1 を用いて証明される。

一般にXが確率微分方程式の解として与えられるとき rongh にいって，Xのある点における rank と係数行列のその点における rank とは一致する。このことについてはBonami, Karoui Reinhard, Roynette[5]参照。
又 rank は，その拡散過程に含まれるランダム性の量を独立なBrown運動の数であらわしたものと考えることができる。（Skorohod[53]，Knight[31]）

9.2 elliptic point

定義 9.2 $X = (X_t, P_x)$をE上の拡散過程とする$x \in E$に対し次の条件がみたされるときxをelliptic pointという；xの近傍の基本系$\{V\}$で次のようなものがとれる，

$$H_x^V(d\xi) = P_x(\sigma_{\partial V} \in d\xi, \sigma_{\partial V} < \infty), \quad d\xi \subset \partial V$$

とおくとき H_x^V の support $= \partial V$

Eのすべての点がelliptic pointであるという条件は axiomatic potential theory では Brelot の axiom として知られ，それと同値な条件が調和函数の有向列，absorbing set, Harnack型不等式などに関して研究されている（Bauer[2]），1次元拡散過程に関して言えば，elliptic point の概念と regular point の概念は一致する。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

例 9.3　EをR^nのある領域としXのlocal generatorが$x \in E$の近傍でuniformly elliptic，Hölder連続な微分作用素であたえられるときはxはelliptic pointである。

例 9.4　EをR^nのある領域としXのlocal generatorが$x \in E$のある近傍でuniformly ellipticなself－adjoint formであたえられるときxはelliptic pointである。（Bauer[2]）。

例 9.5　EをR^nのある領域とし，Xのlocal generator Lが$x \in E$のある近傍でC^∞－級のvector field $X_0, X_1, \cdots X_k$によって

$$L = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2 + X_0$$

と表わされているとき，$X_1, \cdots, X_k$の張るLie環$\mathcal{L}(X_1, X_2, \cdots, X_k)$のrankがその近傍の各点でnであればelliptic pointである（Bony[7]）このことはほとんど必要条件でもあり，実際Bony[8]はその近傍のすべての点がelliptic pointならばその近傍のdense open subsetの各点で$\mathcal{L}(X_1, X_2, \cdots, X_k)$のrankはnになることを示している。

この条件は非常にdegenerateしている場合でもみたされる：

$$D = R^n \ni (y, x_1, \cdots, x_{n-1})$$

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(y\frac{\partial}{\partial x_1} + y^2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + y^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)^2$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + y^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$$

このとき$\mathcal{L}(X_1, X_2)$は各点でrank nである。したがってすべての点がelliptic pointである。

注意 9.1　例3においてHölder連続性を単に連続性でおきかえることができるか?!

注意 9.2　一般に9.1で定義したrankとelliptic pointの概念にはどのような関係があるのだろうか。EをR^nの領域とし$x \in E$の近傍の各点でrank nならばelliptic pointになるだろうか。この逆はなりたたない，実際例9.5の中で与えた

例　$L = X_1^2 + X_2^2$，$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}$，$X_2 = y\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + y^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$

ではrankは各点で2である。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

9.3 strongly elliptic point(pathのsupport)

$X=(X_t, P_x)$をE上の拡散過程とする。 $x\in E$, Vをxのある近傍とし

$$C_V^x=\{\omega : [0,\infty)\ni t\longmapsto \omega(t)\in\bar{V},\ \omega(0)=x, \text{かつ}$$
$$\omega(t)\in\partial V \Longrightarrow \omega(t')\in\partial V\quad ({}^\forall t'\geqq t)\}$$

XのVでの stopped diffusion $X^V=(X_{t\wedge\sigma_{\partial V}})$を考えると$P_x$ はX^V によってC_V^x上に確率測度を induce する。これをP_V^x とする。

C_E^x で$\omega(0)=x$なるE値連続関数$\omega:[0,\infty)\to E$の全体をあらわす。これはコンパクト一様収束の topology で Fréchet 空間である。もちろん$C_V^x\subset C_E^x$

定義 9.3 $x\in E$が strongly elliptic point
$\Longleftrightarrow \exists V$: xの近傍 ; P_V^x の(C_E^x における) supportをπ_V^x であらわすと $\pi_V^x\cap C_V^x = C_V^x$

注意 9.3 strongly elliptic point なら elliptic point であることは見やすい。

注意 9.4 xが strongly elliptic piint ならばxの基本近傍系{V}で上の性質をもつものが存在することもすぐわかる。

例 9.6 $E=R^n$, Xをn次元Brown運動とするとき ${}^\forall x\in E$は strongly elliptic point である。この証明にはR^n 値の滑らかな path のε近傍のWiener measure が正(Cameron−Martin の一連の研究)ということに注意すればよい。同様にしてXの local generator が uniformly elliptic , C^1一級ならばその点は strongly elliptic point である。

例 9.7 拡散過程Xは確率微分方程式

$$(9.1)\qquad dx_t^i=\sum_{k=1}^{r}\sigma_k^i(x_t)dB_t^k+b^i(x_t)dt,\quad i=1,2,\cdots,n$$

で与えられているとする。ここでσ_k^i , b^i はC^∞一級の関数とする。vector field $X_0, X_1, \cdots, X_r$を

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$X_0 = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad X_k = \sum_{i=1}^{n} \sigma_k^i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad k = 1, 2, \cdots, r$$

で定義する。すると(9.1)はシンボリカルには次のようなrandom coefficientのdynamical systemとして与えられる:

$x_t = (x_t^1, \cdots, x_t^n)$として

$$(9.1)' \qquad \dot{x}_t = \sum_{k=1}^{r} X_k(x(t))\left(\frac{dB_t^k}{dt}\right) + X_0(x(t))$$

今continuous curve $y(t)$がclass $C(X_0, X_1, \cdots, X_r)$に属すとは分点$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \to \infty$があって$t \in (t_i, t_{i+1})$では$y(t)$はある$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r \in R$に対しdynamical system

$$\dot{y}(t) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k X_k(y(t)) + X_0(y(t))$$

の解になっていることとする,すると(9.1)′から直観的に次のことがなりたつと予想される:Xの$C_{R^n}^x$上の分布のsupport π^xは

$$\pi^x = \overline{C(X_0, X_1, \cdots, X_k)} \qquad (\text{—— は} C_{R^n}^x \text{での閉包をあらわす})$$

この事実が正しいとすると(Stroock-Varadhan[54]でこのことを論じているようであるが現段階ではこの論文は入手していないのでこれ以上ふれられない),もし$\mathcal{L}(X_1, \cdots, X_r)$のrankがxの近傍の各点でnに等しければ,xはstrongly ellipticなことがいえる。それはこの仮定のもとで$C(X_0, X_1, \cdots, X_k)$の元でV上のcurveが一様近似できるからである(Bony[7])

注意9.5 elliptic pointは必ずしもstrongly elliptic pointとはかぎらない。

例9.8 (Kolmogorov[33])

$E = R^2$でvector field $X_0 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$を考え生成作用素$L = \frac{1}{2} X_1^2 + X_0$をもつ拡散過程を$X = (X_t, P_x)$とする。このとき各点で$\mathcal{L}(X_0, X_1)$のrankは2である。Hörmander[21]は$L = X_1^2 + \cdots X_r^2 + X_0$なる微分作用素は$\mathcal{L}(X_0, X_1, \cdots, X_r)$のrankがあるdomain $D \subset R^n$の各点でnであるときDでhypoelliptic i.e. $Lu = f$, $f \in C^\infty(D)$をみたすdistribution solutionはDでC^∞であることを示した。この条件は例9.5の条件:$\mathcal{L}(X_1, \cdots, X_r)$のrankがあるdomainの各点でnというのよりは弱くspace-

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

time の Brown 運動やこの Kolmogorovの例なども含んでいる。この kolmogorov の例は Hörmander[21] の研究の出発点になったものである。

さてこの拡散過程 $X=(X_t, P_x)$ は具体的に次のように構成できる：$x=(x_1, x_2)$ とし B_t を1次元 Brown 運動とする。

$$X_t^{(1)} = x_1 + B_t$$

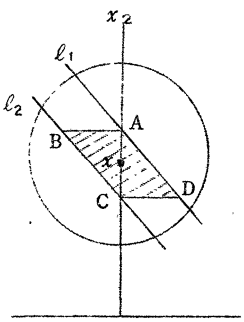
$$X_t^{(2)} = x_2 + \int_0^t B s d s$$

とおくと $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(1)})$ が求める拡散過程である。さらにXの推移確率は

$$P(t, x, dy) = p(t, x, y)\, dy$$

$$p(t, x, y) = \frac{8\sqrt{3}}{\pi t^2} e^{-\frac{(y_1 - x_1)^2}{2t} - \frac{6(y_2 - x_2 - \frac{x_1 + y_1}{2})^2}{t^3}}$$

で与えられる。



今 x_2 軸上に一点xをとるとこれは elliptic point であるが，strongly elliptic point でない，実際 x を出て ℓ_1，ℓ_2 ではさまれた部分に入る path は四辺形ＡＢＣＤの外へ（確率１で）出ることは不可能である。

x_2 軸以外の点は，局所的に space−time Brown 運動とほゞ同様の行動をするので elliptic point ではない。

注意６　ある点の近傍のすべての点が elliptic point ならばその点は strongly elliptic point になることはおそらく正しいのではないかと思われる。

9．4 局所調和空間と調和示性数

$X=(X_t, P_x)$ をＥ上の拡散過程とする。ＶをＥの開集合とし関数 $u(x)$ はＶで定義されているものとする。$u(x)$ がＸに関しＶで調和であるとは

$$\forall x \in V, \quad \exists x \text{の近傍} U(x), \quad (\overline{U(x)} \subset V)$$

$$E_y(u(X_{\sigma_{U(x)^c}})) = u(y), \quad \forall y \in U(x)$$

がなりたつことである。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

いま $x\in E$を一つ固定する。

$u \in \underline{\underline{H}}(x)$とは（uに関係する）ある近傍$U(x)$が存在してuは$U(x)\setminus\{x\}$で定義されており，しかもそこで調和であることを意味するものとする。

$$\underline{\underline{H}}_b(x)=\{u\ ;\ u\in\underline{\underline{H}}(x) \text{ かつ } u \text{ は有界}\}$$

とおく。

次に $\underline{\underline{H}}_b(x)$につぎのような同値関係を定義する：xへのhitting timeを$\sigma_{\{x\}}$ $(\leqq\infty)$とし，$u_1, u_2 \in \underline{\underline{H}}_b(x)$に対し

$$(9.2)\qquad u_1\sim u_2 \iff \lim_{t\uparrow\sigma_{\{x\}}} u_1(X_t)=\lim_{t\uparrow\sigma_{\{x\}}} u_2(X_t) \quad a.s.$$

$$\text{on}\quad A_x\equiv\{\omega : t\uparrow\sigma_{\{x\}} \text{ のとき } X_t\to x\}$$

$$(\text{for}\quad P_y, \quad {}^\forall y\in E)$$

あきらかに〜は同値関係であり，しかも

$$(9.3)\qquad u_1\sim u_2 \iff \text{ある}x\text{の近傍}U(x)\text{に対し}$$

$$\lim_{t\uparrow\sigma_{\{x\}}} u_1(X_t)=\lim_{t\uparrow\sigma_{\{x\}}} u_2(X_t) \quad a.s$$

$$\text{on}\quad A_x \quad (\text{for}\quad P_y,\quad {}^\forall y\in U(x)\setminus\{x\})$$

であることも容易にわかる。

実は（9.3）よりもっと強く次のことがいえる。

補題9.1

$$(9.4)\qquad u_1\sim u_2 \iff \text{ある近傍}U(x)\text{に対し}$$

$$\lim_{t\uparrow\sigma_{\{x\}}} u_1(X_t)=\lim_{t\uparrow\sigma_{\{x\}}} u_2(X_t) \quad a.s.$$

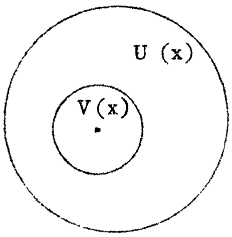
$$\text{on}\quad A_x^{U(x)}\equiv\{\omega\ ;\ \sigma_{\{x\}}\leqq\sigma_{U(x)^c} \text{ かつ } t\uparrow\sigma_{\{x\}} \text{ のとき}$$

$$X_t\longrightarrow x\}\quad(\text{for}\quad P_y,\quad {}^\forall y\in U(x)\setminus\{x\})$$

証明 "$\Longrightarrow$"は$A_x^{U(x)}\subset A_x$だから明らかであるが，逆も次のようにしてわかる。（9.4）

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

の右辺のなりたつようなU(x)があったとする。V(x)を $\overline{V(x)} \subset U(x)$ がなりたつようなxの近傍とする。



$$\sigma_0 = \sigma_{V(x)}$$
$$\tau_1 = \sigma_0 + \theta_{\sigma_0} \circ \sigma_{U(x)^c}$$
$$\sigma_1 = \tau_1 + \theta_{\tau_1} \circ \sigma_{V(x)}$$
$$\tau_2 = \sigma_1 + \theta_{\sigma_1} \circ \sigma_{U(x)^c}$$
$$\vdots$$

とする。

あきらかに $A_x = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{ \omega ; \sigma_{m-1} < \sigma_{\{x\}} \leq \tau_m$ かつ $t \uparrow \sigma_x$ のとき $X_x \to x \}$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m \qquad a.s \quad P_y, \quad {}^\forall y \in E \setminus \{x\}$$

故に $B_x = \{ \omega : \lim_{t \uparrow \sigma_{\{x\}}} u_1(X_t) = \lim_{t \uparrow \sigma_{\{x\}}} u_2(X_t) \}$ とおいて，${}^\forall y \in E \setminus \{x\}$ に対し，

$$P_y(A_x \cap B_x) = \sum_{m=1}^{\infty} P_y(C_m \cap B_x)$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} E_y [P_{X_{\sigma_{m-1}}} \{ B_x \cap A_x^{U(x)} \}]$$

故に仮定より

$$= \sum_{m=1}^{\infty} E_y [P_{X_{\sigma_{m-1}}} \{ A_x^{U(x)} \}] = \sum_{m=1}^{\infty} P_y(C_m)$$
$$= P_y(A_x)$$

これは(9.2)の右辺がなりたつことを示している。故に $u_1 \sim u_2$ （証明終り）

$\underline{\underline{H}}_b(x)$ のこの同値関係による商空間を $\underline{\underline{H}}_b^*(x)$ であらわす。補題9.1より $\underline{\underline{H}}_b^*(x)$ は点xの近傍におけるXの行動にのみ関係する；すなわちU(x)をxの任意の近傍とするときXのU(x)における subprocess X^U を用いて $\underline{\underline{H}}_b^*(x)$ を定義しても全く同じ空間がえられる。したがって $\underline{\underline{H}}_b^*(x)$ はxにおけるXの局所的性質をあらわしている。

定義9.4 $\underline{\underline{H}}_b^*(x)$ をXの点xにおける局所調和空間，その次元

$$n(x) = \dim \underline{\underline{H}}_b^*(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

を点 x の X についての調和示性数という。

又 $x \in E \longmapsto n(x) \in \underline{Z_+}$ なる関数を調和示性関数という。

注意 9.7 $n(x)=0 \Longleftrightarrow A_x := \{\omega : t \uparrow \sigma_{\{x\}}$ のとき $X_t \to x\}$ がどの P_y $(y \in E \setminus \{x\})$ に関しても

$$P_y(A_x)=0$$

この注意より

例 9.9 n $(n \geqq 2)$ 次元の Brown 運動に対しては $\forall x \in R^n$ に対し $n(x)=0$，又 Hölder 連続，uniformly elliptic な微分作用素や，uniformly elliptic self-adjoint form の微分作用素にしたがう拡散過程についても $n(x)=0$

例 9.10 1次元拡散過程 X に対し $x \in E$ が区間 $I^+=(x, r)$ の左端点区間 $I^-=(\ell, x)$ の右端点であるとし，又区間 I^+，I^- は正則区間であるとしよう。

I^+，I^- における標準尺度を $S^+(y)$，$S^-(y)$ とするとき

$$\ell \longleftrightarrow \overset{x}{\circ} \longleftrightarrow r$$

$$n(x)=2 \Longleftrightarrow \int_{x+} ds(y) < \infty, \quad \int_{x-} ds(y) < \infty$$

$n(x)=1 \Longleftrightarrow \int_{x+} ds(y)$，$\int_{x-} ds(y)$ のどちらか丁度1つが有限

$$n(x)=0 \Longleftrightarrow \int_{x+} ds(y) = \infty, \quad \int_{x-} ds(y) = \infty,$$

注意 9.8 上の例でわかるように $n(x)$ は，x からの path の行動とは一応無関係なものである。x をのぞいた x の近傍における path の点 x への接近の状態をあらわしていると考えられる。

例 9.11 定理 8.1 の平面 R^2 上の拡散過程を考える。

このとき

(i) 原点 0 では $n(0)=k$

(ii) L_i 上の点 x では $n(x)=2$

(iii) (i)(ii)以外の点 x では $n(x)=0$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

例 9.12　EをR^nのある領域とし$x\in E$のある近傍におけるXの local generator Lが

$$Lu = \Sigma a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \Sigma b_i(x)u_{x_i}$$

で与えられa_{ij}は uniformly elliptic，連続と仮定する。

このとき　$n(x)\leqq 1$

このことは Gilbarg−Serrin[20]における次の結果「$U(x)$をxの近傍としuを$U(x)\diagdown\{x\}$における$Lu=0$の解とする。$n=2$なら　$u\geqq -M$と仮定する（このときは，a_{ij}は連続でなくてもよい）$n>2$ならa_{ij}は連続で　$|u|\leq M$と仮定する。

このとき　$\lim_{y\to x} u(y)$が存在する」

よりしたがう。実際　$\lim_{t\uparrow\sigma_{\{x\}}} u_1(X_t)$は$A_x$上でa.sに定数になるから$A_x$が　a.sに$\phi$になるか否かによって　$n(x)=0$ 又は$n(x)=1$である。

例9でみたようにa_{ij}がHölder 連続ならば$n(x)=0$である。単に連続だけでは$n(x)=1$とする点は本当に存在する（Kanda[29][30]）この辺の事情を rotation invariant な拡散過程について詳しく見てみよう。

例 9.13　（回転不変拡散過程）

XをR^2での原点のまわりの回転に関して不変な拡散過程とする。(cf. §6)。Xは$(0,\infty)$上の1次元拡散過程$r(t)$とその non−negative a.f　$\varphi(t)$，$r(t)$と独立な単位円周上の Brown 運動$\theta(t)$よりその極座標表示が skew−product：

$$X(t) = (r(t), \theta(\varphi(t)))$$

であらわされることが§6で示されている。

$r(t)$の local generator を$\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}$，$\varphi(t)$のRiesz測度をdkとするとき

(i)　$\int_{0+} ds(r)=\infty$　ならば　$\sigma_0=\infty$かつ　$t\uparrow\infty$のとき　$X_t\to 0$となることはない。

　したがって$n(0)=0$　である。

(ii)　$\int_{0+} ds(r)<\infty$　のとき，次の2つの場合がおこる

以下の議論を簡単にするため$r(t)$は∞を natural boundary にもっているとしよう。このときすべてのP_xに対し次のどちらがおこりうる。

(イ)　$\eta\equiv\lim_{t\uparrow\sigma_{\{0\}}}\varphi(t)=\infty$　a.s.

(ロ)　$\eta\equiv\lim_{t\uparrow\sigma_{\{0\}}}\varphi(t)<\infty$　a.s.

(イ)の場合 $\bigcap_{s>0}\sigma\{\theta(t)\ ;\ t\geq s\}$ は trivial であるので $\underline{\underline{H}}^*_b\{0\}$ は1次元　故に $n(0)=1$,

(ロ)の場合　random　variable $\theta(\varphi(\eta))$ の生成する $\sigma-$ field を $\mathcal{B}$ とするとき，任意の $x\neq 0$ を固定したとき

$\underline{\underline{H}}^*_b\{0\}$ と $L^\infty(\mathcal{B}, P_x)$ とは同型になり，

その同型対応は

$$\underline{\underline{H}}^*_b\{0\}\ni u(y)\longmapsto \lim_{t\uparrow\sigma_{\{0\}}} u(X_t)\in L^\infty(\mathcal{B}, P_x)$$

$$\underline{\underline{H}}^*_b\{0\}\ni u(y)=E_y(\xi)\underset{y\neq 0}{\ }\longleftarrow\!\!\!\dashv\ \xi\in L^\infty(\mathcal{B}, P_x)$$

であたえられる。ところで $\theta(\varphi(\eta))$ は単位円周上の random variableでその分布は Lebesgue 測度と互いに絶対連続である。したがってこの場合 $\underline{\underline{H}}^*_b\{0\}$ は単位円周上の通常の L^∞ と同型な空間である。もちろん無限次元である。

この辺の事情を§6の立場よりより具体的にみてみよう，

次のようにして $\underline{\underline{H}}_b\{0\}$ の無限個の元で互いに同値にならないものがえられる。 $S^\ell_n(\theta)$, $\theta\in\underline{\underline{T}}_1=R_1/2\pi\underline{\underline{Z}}$, $\ell=1,2$, を

$$S^\ell_n(\theta)=\begin{cases}\sin n\theta, & \ell=1\\ \cos n\theta, & \ell=2\end{cases}\qquad n=0,1,2,\cdots$$

で定義する。

$$u_n(r)$$

を

$$\frac{D^+_s u(dr)-n^2u(r)k(dr)}{m(dr)}=0\qquad \text{on}\ (0,\infty)$$

の解とする。$(n=0,1,2,\cdots)$

これは

$$\frac{d}{dk}\frac{du}{ds}-n^2u=0$$

と同じ方程式である。

これが $r=0$ の近傍で有界で $u(0+)>0$ かつ定数でない解をもつためには，まず $n=0$ に対し

$\int_{0+} ds<\infty$ が必要十分であり，

$n>0$ に対しては

$$\int_0^1\left(\int_{0+}^r ds(u)\right)dk(r)<\infty \text{が必要十分である。}$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

このことは，もし $\int_0^1 \left(\int_0^r ds(u) \right) dk(r) = \infty$ なら $\int_0^1 \left(\int_r^1 ds(u) \right) dk(r) = \infty$ になることに注意すれば，Ito−McKean[26] p. 130 よりわかる。

このとき $v_n(r, \theta) = u_n(r) S_n^{\ell}(\theta)$，　$n = 0, 1, 2, \cdots$

$\ell = 1, 2$

が $\underline{\underline{H}}_b\{0\}$ の元で互いに同値でないものをあたえることは見やすい。

次に ㋑ ㋺ の条件を dm, ds, dk であらわすと

㋑　　$\int_{0+}^1 \left\{ \int_{0+}^r ds(u) \right\} dk(r) = \infty$

㋺　　$\int_{0+}^1 \left\{ \int_{0+}^r ds(u) \right\} dk(r) < \infty$

となることも１次元拡散過程の一般論より，あるいは上の解析的な考察からもわかる。

さてXの local generator が原点の近傍で

$$L u = \Sigma a_{ij} u_{x_i x_j}$$

とかけている場合を考える。このとき $r > 0$ で定義された関数 $a(r) \geq 0$，$b(r) \geq 0$ が存在し

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij} b(|x|) + \{ a(|x|) - b(|x|) \} \frac{x_i x_j}{|x|^2}$$

となる。このとき $r(t)$ の local generator は

$$a(r) \frac{d^2}{dr^2} + \frac{b(r)}{r} \frac{d}{dr}$$

で与えられ　したがって

$$C(r) = \int \frac{1}{r} \frac{b(r)}{a(r)} dr$$

とおいて

$$ds = e^{-c(r)} dr$$

$$dm = \frac{e^{c(r)}}{a(r)} dr$$

となる。　又 dk は

$$dk = \frac{b(r)}{r^2} dm = \frac{b(r)}{a(r)} \frac{e^{c(r)}}{r^2} dr$$

で与えられる。a_{ij} が $x = 0$ の近傍で uniformly elliptic かつ連続ということと次のことは同等である：　定数 $0 < C_1 < C_2$ が存在し０の近傍で

$$C_1 \leq a(r), \quad b(r) \leq C_2$$

かつ　$$\lim_{r \downarrow 0} (a(r) - b(r)) = 0$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

例えば　$a(r)=\dfrac{\log r}{2+\log r}$　,　$b(r)=1$

とおくとこの条件はみたされる。（この例についてはKanda[29][30]）

このとき

$C(r)=\log r+2\log(\log r)$　となるから

$$ds=\frac{1}{r(\log r)^2}\,dr$$

$$dm=\frac{r(\log r)}{2+\log r}\,dr$$

であり，したがって　$\int_{0+}ds<\infty$　$\int_{0+}dm<\infty$

この場合　$n(0)=1$である：　$\int_0^1\{\int_0^r ds(u)\}dk(r)=\infty$　を直接たしかることは簡単であるが例9.12の一般的事実の結果でもある。

又a_{ij}が連続であってもdegenerateするときは，㊁の場合がおこりうる：実際例えば

$a(r)=r$　,　$b(r)=r^2$（したがって

$a_{ij}(x)=\delta_{ij}|x|^2+\{|x|-|x|^2\}\dfrac{x_ix_j}{|x|^2}$）

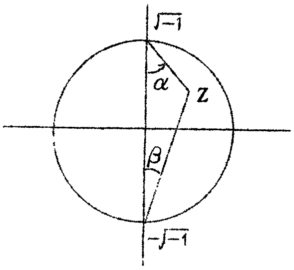
の場合，$\int_{0+}ds(u)<\infty$かつ$\int_0^1 dk(r)\int_{0+}^r ds(u)<\infty$　は容易にたしかめうる。

<u>例9．14</u>　（oblique reflectionの調和関数）　oblique reflectionを持った有界調和関数を求める問題はPoincarèに始まる。DをR^nで充分なめらかな境界∂Dを持った領域とする。$v(z)$は∂D上のvector fieldとする。しかも∂D上でなめらかに変化しているとする。その時境界条件

$$\frac{\partial u(z)}{\partial v}=0\ ,\qquad z\in\partial D\ ,$$

をみたすすべての調和関数uを求めるのがいわゆるoblique reflectionの問題である。こゝで$\dfrac{\partial}{\partial v}$はベクトルv方向の微分を表わす。もしfieldがある点でtangentialになるならば，自明でない解をもつ。この問題は確率論の立場からMalyutov[38]，Dynkin[13]，Motoo[43]等で詳しく論じられた。（文献についてはDynkin[13]，Petrovsky[45]参照）。Dynkin[13]にのべてあるように上の事情は対応する拡散過程がvがtangentialになる点に近づく時にtangentialな方向から近づくことから起きる。この意味で定理8.1の拡散過程と同じ性質のことがおきている。こゝでは最も簡単な場合にMcKean[39]に従ってのべる。Dを単位円で

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144



$z = x + \sqrt{-1}\,y$ とし，境界条件 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ を持った2次元 Brown 運動 X を考える。

この時，$\underline{\underline{e}} = \lim_{n\uparrow\infty} \inf \{ t ; |X_t - \sqrt{-1}| \text{ or } |\{X_t + \sqrt{-1}| = 1/n \}$ とおけば

例えば

$$P_z\,[X_{\underline{\underline{e}}-} = \sqrt{-1},\ \lim_{t\uparrow\underline{\underline{e}}} \alpha(X_t) = \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{4}(1+y) + \frac{1}{\pi}\left(\alpha + \frac{x}{2}\right)$$
$$z = x + \sqrt{-1}\,y$$

であり，$Z = \{\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\}$ とし，

(a) $u \in C^\infty(\overline{D} - Z)$

(b) $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ on $\partial D - Z$

(c) $z \in \partial D - Z$ の点が Z の点に tangeutially に近づく時 u は有限値に近づく。

この3条件をみたす $\triangle u = 0$ なる解は実は $1, y, \alpha - \frac{x}{2}, \beta - x/2$ で張られる。(McKean 〔39〕，§4.10)

これらのことを併せると

$$n(\sqrt{-1}) = 2, \quad n(-\sqrt{-1}) = 2$$

となる。

なお通常の反射壁の場合は境界上の点で調和示性関数の値は0である。

Motoo〔43〕は oblique derivative に関して進んだ結果を与えている。上半面を D とし，

$$L = \{(x_1, 0); x_1 \neq 0\}, \quad L_+ = \{x_1, 0); x_1 > 0\}, L_- = \{(x_1, 0); x_1 < 0\}$$

とする。いま $\overline{D}$ 上の拡散過程で

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + a(x_1)\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \text{on } L$$

なる境界条件をみたす Brown 運動を考える。

そこで $a(x_1)$ は L で Hölder 連続でかつ有界とする。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

(i) ある a に対してつぎのことがなりたつとする。

$$r_\circ < e^{-3\pi} \wedge e^{-\frac{|a|}{2}\pi}, \quad U_{r_\circ} = \{ x ; x \in \overline{D}, \ |x| < r_\circ \}$$

$$a(x_1) - a < -\frac{2\pi(1+a^2)}{\log |x_1|^{-1}}, \quad (x_1, 0) \in L_+ \cap U_{r_\circ}$$

$$a(x_1) - a > \frac{2\pi(1+a^2)}{\log |x_1|^{-1}}, \quad (x_1, 0) \in L_- \cap U_{r_\circ}$$

その時に $n(0) = 1$

(ii) ある a に対してつぎのことがなりたつとする。

$$r_\circ < e^{-\pi}, \quad U_{r_\circ} = \{ x ; x \in \overline{D}, |x| < r_\circ \}$$

$$a(x_1) - a > -\frac{\pi(1+a^2)}{(\log |x_1|^{-1})^3}, \quad (x_1, 0) \in L_+ \cap U_{r_\circ}$$

$$a(x_1) - a < \frac{\pi(1+a)}{(\log |x_1|^{-1})^3}, \quad (x_1, 0) \in L_- \cap U_{r_\circ}$$

その時に $n(0) = 0$

この事実は Motoo[43] の結果によれば示せる。先にのべた Dynkin[13] の場合は $a(x)$ が $\pm\infty$ になる場合を扱っている。それに応じて調和示性数も違って来る。上の結果より $a(x_1)$ が連続でも $n(0) = 1$ になる場合があることがわかる。しかし一方 $a(x)$ が $L \cup \{0\}$ で Hölder 連続ならばこんな事情はおきず $n(0) = 0$ なることが知られている。

例 9.15 例4.1 で R^2 上の直積拡散過程 X で，つぎのような生成要素 G を持ったものを構成した。

$$\begin{cases} s_i(x) = x_i, \quad x = (x_1, x_2) \in R^2 \\ m(dx) = m^{(1)}(dx_1)\, m^{(2)}(dx_2) \\ \nu_{11}(dx) = dx_1\, m^{(2)}(dx_2)/2 \\ \nu_{22}(dx) = m^{(1)}(dx_1)\, dx_2/2 \\ \nu_{12} = \nu_{21} = 0 \\ k = 0 \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

この時,

$$n(x) \geqq 2 \ , \quad もし \quad m^{(2)}(\{x_2\}) > 0 \ , \quad x = (x_1, x_2) \ , である。$$

まづ $m^{(2)}(\{x_2\}) > 0$, $x = (x_1, x_2)$ ならば

$$u(y) = P_y \,[\sigma_{\{x\}} < \infty]$$

はX－調和関数で $u > 0$ である。いま

$$\underline{\underline{Z}}_t = \{ s \ ; X_s^{(2)} = x_2 \ , \quad 0 \leq s < t \}$$

$$\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}}_\infty$$

とおく。任意の $t > 0$ に対して $\underline{\underline{Z}}_t$ の Lebesgue 測度は正である。

また

$$\sigma = \inf \{ t \ ; X_t^{(1)} = x_1 \}$$

とおけば σ の分布は Lebesgue 測度に絶対連続で $(0, \infty)$ で正の密度関数をもつ。いまXが直積であることに注意すれば

$$P_y \,[\sigma_{\{x\}} < \infty] \geqq P_y \,[\sigma \in \underline{\underline{Z}}] > 0 \quad , \qquad y \in R^2, \ y_1 \neq x_1 \ 。$$

一方

$$u_1(y) = P_y \,[\exists \varepsilon \ ; X_t^{(1)} \in (x_1, \infty) \ , \quad \sigma_{\{x\}} - \varepsilon \leq t < \sigma_{\{x\}}]$$

とおけば $u_1(y)$ もX－調和関数である。いま

$$\{ \omega \ ; \sigma(\omega) \in \underline{\underline{Z}}(\omega) \} \ni \omega$$

$$\Longrightarrow \quad \exists \ \varepsilon(\omega) : \quad X_t^{(1)}(\omega) \in (x \ , \infty) \ , \quad \sigma_{\{x\}}(\omega) - \varepsilon \leq t < \sigma_{\{x\}}(\omega)$$

$$\text{a.s } P_y \ , \qquad y_1 > x_1$$

であるので,

$$u_1(y) \geqq P_y \,[\sigma \in \underline{\underline{Z}}] \qquad\qquad y_1 > x_1$$

となる。故に $u_1 \neq 0$ である。さらに一次元拡散過程の結果より

$$u \neq u_1$$

であるので,

$$n(x) \geqq 2 \qquad \text{if} \quad m^{(2)}(\{x_2\}) > 0 \ , \quad x = (x_1, x_2) 。$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

が言える。

全く同じ考察から

$x=(x_1, x_2)\in R^2$, $m^{(1)}(\{x_1\})$, $m^{(2)}(\{x_2\})>0$ ならば

$$n(x)\geqq 4$$

である。

9．5 これまでのべて来た調和示性数は拡散過程の path が点 x に近づく様子に関係した量であったが，さらに出て行く方法にも関係するものとして，つぎのような量も考えられる。

定義9.5 いま，$\overline{\underline{H}}_b(x)=\{u$; u は x のある近傍 U(x) で定義されていて，そこで X に関し調和な有界関数を $U(x)\setminus\{x\}$ に制限したもの $\}$。その時商空間

$$\overline{\underline{H}}_b^*(x)=\underline{\underline{H}}_b(x)/\overline{\underline{H}}_b(x)$$

を考え，その次元を $n^*(x)$ で表わす。

このように定義すれば明らかに $n^*(x)$ は局所的に定まる量で，しかも similarity に関する不変量になっている。

例 9．16 $D=(0, 1)$ とその中の1点 $x\in D$ を固定する。X は $(0, x)$, $(x, 1)$ を正則区間とする1次元拡散過程で，標準尺度S(y)は $S(y)=y$, $y\in D\setminus\{x\}$ となっているとする。

(a) X が x で trap になっている時。

$$n^*(x)=0$$

である。実際任意の u_1 , $u_2\in\underline{\underline{H}}_b(x)$ をとって来れば

$$u_1-u_2$$

は $D\setminus\{x\}$ で調和で，x では trap であるので，ある関数 v が x で調和なことは何等の制限にもならない。故に $u_1\sim u_2$ となり，$\underline{\underline{H}}_b(x)$ の元はすべて0と同値になるので結論が言える。

(b) X は x で右側にのみ反射する場合。 この時は

$$n^*(x)=1$$

である。実際この時は任意の $u\in\overline{\underline{H}}_b(x)$ は

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$u(y)=\begin{cases} c_1 y + d_1 , & y\in(0,x), \\ d_2 , & y\in(x,1), \end{cases}$$

の形をしている。したがって，$u_1, u_2 \in \underline{\underline{H}}_b(x)$ をとって来れば

$$u_1 \sim u_2 \iff \exists\, d : \quad u_1 - u_2 = d \quad \text{on } (x,1)$$

となる。よって $u_0 \in \underline{\underline{H}}_b(x)$ で

$$u_0(y) = y - x, \quad y\in(x,1)$$

をとって来ると，任意の $u \in \underline{\underline{H}}_b(x)$ はある c があって，$cu_0(y)$ と同値になる。というのは

$$u(y) = c_1(y-x) + d_1, \qquad y\in(x,1)$$

と書けるので，

$$u(y) - c_1 u_0(y) = d_1, \qquad y\in(x,1)$$

となることからわかる。

(c) D全体が正則区間で，標準尺度が $s(y)=y$, $y\in D$ となる場合は，

$$n(x) = 2$$

である。いま

$$u_1(y) = \begin{cases} y + d_1^* , & y\in(0,x) \\ 0 , & y\in(x,1) \end{cases} , \qquad d_1^* \neq d_2^*$$
$$u_2(y) = \begin{cases} 0 , & y\in(0,x) \\ y-x+d_2^* , & y\in(x,1) \end{cases}$$

ととれば $u_1, u_2 \in \underline{\underline{H}}_b(x)$ である。

任意の $u \in \underline{\underline{H}}_b(x)$ は

$$u(y) = \begin{cases} c_1 y + d_1 \\ c_2(y-x) + d_2 \end{cases}$$

と書けている。その時は

$$u(y) - (c_1^* u_1(y) + c_2^* u_2(y)) = \begin{cases} (c_1 - c_1^*)y + d_1 - c_1^* d_1^* , & y\in(0,x) \\ (c_2 - c_2^*)(y-x) + d_2 - c_2^* d_2^* , & y\in(x,1) \end{cases}$$

となる。いま $d_1^* \neq d_2^*$ なる仮定より，

$$c_1^* - c_2^* = c_1 - c_2$$
$$c_1^* d_1^* - c_2^* d_2^* = d_1 - d_2$$

なる (c_1^*, c_2^*) はたゞ1組決まる。そのような (c_1^*, c_2^*) をとって来れば

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

$$c_1 - c_1^* = c_2 - c_2^*$$
$$d_1 - c_1^* d_1^* = d_2 - c_2^* d_2^*$$

となっているので，

$$u - (c_1^* u_1 + c_2^* u_2) \in \underline{\underline{H}}_b(x)$$

となる。よって u と $c_1^* u_1 + c_2^* u_2$ は同値。したがって，任意の $u \in \underline{\underline{H}}_b(x)$ は u_1 と u_2 のある線型結合と同値である。明らかに u_1 と u_2 は同値ではないので，

$$n^*(x) = 2$$

となる。

以上いくつか similarity で不変な拡散過程の局所的性質をしらべてきた。始めにのべたとおり単に気のついたものの羅列でありきわめて不十分なものであることをもう一度断っておきたい。例えば上であげた諸性質によっては，Hölder 連続な uniformly elliptic 微分作用素を局所生成作用素にもつ拡散過程をさらに分類することは出来ない。滑らかな係数をもつ微分作用素を生成作用素にもつ拡散過程にかぎっても similarity の問題は決してやさしくない。以下でその辺の事情をほんの少し眺めてみることにする。

X を R^n のある domain E 上の minimal な拡散過程とし，その局所生成作用素を

$$Lu = \Sigma\, a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \Sigma\, b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

とする。但し a^{ij}, b^i は簡単のため C^∞—級，又 a^{ij} は strictly positive definite であるとする。X の Green 測度がある測度に関し対称な密度をもつという性質は容易にわかるように similarity で不変な性質である。この性質を“対称化可能”ということにしよう。対称化可能の条件は

$$\exists\, q(x) \geqq 0, \quad \int_E Lu \cdot v \cdot q\, dx = \int_E Lv\, u\, q\, dx \qquad \forall u, v \in C_k^\infty(E)$$

と同値でこれを直接計算してみると容易に

$$\tilde{b}^i(x) = b^i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}$$

とおいて

$$\sum_j a^{ij} \frac{\partial(\log q)}{d x j} = \tilde{b}^i$$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

と同値であることがわかる。今 $\tilde{b}_i = \Sigma a_{ij} \tilde{b}^j$ （但し a_{ij} は a^{ij} の逆行列） とおくと

この条件は

$$\tilde{b}_i = \frac{\partial(\log q)}{\partial x_i}$$

となる。すなわち vector field $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \cdots, \tilde{b}_n)$ はある関数Uにより

$$\tilde{b} = \nabla U \left(= \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}, \frac{\partial U}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial U}{\partial x^n} \right) \right)$$

で与えられる。このとき differential form

$$\omega = \Sigma \tilde{b}_i \, dx^i$$

は任意のE内の閉曲線 c に対し

$$\int_c \omega = 0$$

となる。 逆にこの条件が満されているとき

$$q(x) = c \cdot \exp\left(\int^x \omega\right)$$

とおけばXは $q(x)$ に関して対称になる。かくして対称化可能の条件は vector field $\tilde{b}$ がポテンシャルUをもつこと，又はそれと同値な条件として differential form ω に対しその任意のE内の閉曲線 c 上の積分が0になることと同値であることがわかった。（cf. E. Nelson : The adjoint Markov Process, Duke Math. J. 25（1958））, したがって閉曲線 c 上で $\int_c \omega = 0$ となるか否かということは similarity で不変な性質である。このことの確率論的な意味を明確にすることは興味ある問題であろう。既に本尾氏はこのこととXの path が c にそって右まわりするか左まわりするかの傾向の大小と関連があることを指摘しておられる（未発表）。尚上の対称化の条件は局所的には

$$\frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{b}_i}{\partial x^j} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

と同値であるが大域的には同値でない。例えば

$$E = \{ (x, y) \in R^2 \; ; \; 1 < x^2 + y^2 < 2 \}$$

$$Lu = \triangle u + \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial u}{\partial y}$$

にしたがう minimal diffusion は対称化可能でないがE内の任意の単連結部分領域での sub process は対称化可能である。

§4で注意したように2次元拡散過程の場合は局所的に

Sem. on Probab.
Vol.35　1971年
P1-144

$$Lu = \triangle u + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

であたえられる拡散過程と similar である。したがってこのような class のうちでさらに similarity による分類を考えてみよう。まず2次元ブラウン運動と similar なものは $b_1 = b_2 \equiv 0$ なるものにかぎられる。このことは次のようにしてわかる：この場合 similarity をあたえる座標変換は滑らかなものにかぎられることに注意して座標変換

$$x_1' = f_1(x_1, x_2)$$
$$x_2' = f_2(x_1, x_2)$$

によって Lu が

$$L'u = a(x_1', x_2')\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2}\right)$$

に変換されたとしよう，このときヤコビヤン $\dfrac{dx'}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$

は直交行列の scalar 関数倍になることはすぐわかる。もし $\det \dfrac{dx'}{dx} > 0$ ならばこのことは Cauchy－Riemann 方程式を意味する。すなわち $x' = f(x)$ は解析関数である。したがって

$$\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix} = \frac{\left(\dfrac{dx'}{dx}\right)}{\left(\det \dfrac{dx'}{dx}\right)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

と変換される。　$b_1 = b_2 \equiv 0$ でないかぎり $b_1' = b_2' \equiv 0$ とならない。

次に b_1，b_2 が定数（$\neq 0$）に等しいものは互いに similar であるがこれと similar なクラスの b_1，b_2 は次の条件で特徴づけられる：（すべて局所的な話である）

(i) $\dfrac{\partial b_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial b_2}{\partial x_1}$

(ii) $\operatorname{div} \underline{\underline{b}} = \dfrac{\partial b_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial b_2}{\partial x_2} = 0$

まず　$\triangle + \dfrac{\partial}{\partial x_1}$

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

と similar なものは(i)(ii)をみたさなければならない；(i)に対称化可能の条件であった。これが満されると local に $\underline{\underline{b}}=\nabla U$ とかける。一方 $b'=(1,0)=\nabla U'$ とすると $U(x_1', x_2')=x_1'$ であり解析函数 $x'=f(x)$ で $\triangle+b_1\frac{\partial}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ と $a(x')\left(\triangle+c\frac{\partial}{\partial x_1'}\right)$ がうつりあうものとすると

$$U(x)=U'(f(x))\text{ でなければならない。}$$

したがって $U(x)=\mathrm{Re}\,f(x)$，故に $U(x)$ は harmonic でしたがって $\mathrm{div}\,\underline{\underline{b}}=\mathrm{div}\,\nabla U=\triangle U=0$

逆に $\underline{\underline{b}}=(b_1, b_2)$ は(i)(ii)をみたすとしよう。

(i)より $\underline{\underline{b}}=\nabla U$ とする $U(x)$ がある。(ii)より

$\triangle U=\mathrm{div}\,\underline{\underline{b}}=0$，故に U は調和関数である。

$U(x)$ を real part にもつ解析函数 $x'=f(x)$ でうつすと x' 座標で $\triangle+b_1\frac{\partial}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial}{\partial x_2}=|f'(x)|^2\left(\triangle' u+\frac{\partial}{\partial x_1'}\right)$ となる。

このように canonical form $\triangle+b_1\frac{\partial}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ に直して similarity を論ずるといくぶんはっきりする。例えば上の例

$$\triangle u+\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial y}$$

も local には $\triangle u+\frac{\partial u}{\partial x}$ と similar である。しかし $\triangle u$ とは similar でない。

このようなことがどのような確率論的性質に対応しているのか，その他わからないことはまだまだ多い。

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

文　　献

1 L. Ahlfors—L. Bers. Riemann's mapping theorem for variable metrics. Ann. of Math. 72, 385-404 (1960)

2 H. Bauer, Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecture notes in Math. Vol. 22 (1966) Springer

3 A. Beurling—J. Deny. Dirichlet spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 45 (1959) 208—215

4 R. M. Blumenthal—R. K. Getoor. Markov processes and potential theory. Academic press. New York and London. 1968.

5 A. Bonami N. Karoui H. Reinhard B. Roynette; Processus de diffusion accocié a un opérateur elliptique dégénéré, Ann Inst. Henri Poincaré Vol. 7 (1971) p. 31-80

6 J. M. Bony, Ph. Courrège and P. Priouret, Séminaire Brelot—Choquet—Deny (10^{e} année) 1965/1966 (Paris大学)のいくつかの報告

7 J. M. Bony; Principe du maximum et inégalité de Harnack pour les operateurs elliptiques dégénerés. Séminaire Brelot—Choquet—Deny (12^{e} année) 1967/68 (Paris大学)

8 J. M. Bony; Détermination des axiomatiques de théorie du potentiel dont les fonctions harmoniques sont differentiables, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17 (1967) 353—382

9 S. S. Chern. An elementary proof of the existence of isothermal parameter on a surface. Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 781—782

10 Courant and Hilbert: Methods of mathematical physics Vol. II Interscience. 1962

11 Ph Courrège—P. Priouret, Recollements de processus de Markov, Publ. Inst. Statist. Univ. de Paris 14 (1965), 275—377.

12 C. Doléans—Dade et P. A. Meyer, Integrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Séminaire de Probabilités IV. Université de Strasbourg. Lecture Notes in Math. Vol. 124 (1970) pp. 77—107. Springer

13 E. B. Dynkin: Martin boundary for nonnegative solutions of a boundary value problem

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

with oblique derivative prescribed on the boundary, Uspehi Mat. Nauk 19, 3–50 (1964)

14 M. Fukushima. A construction of reflecting barrier Brownian motions for bounded domains. Osaka Jour. Math. 4(1967), 183–215.

15 福島正俊. Dirichlet spaceとその表現。Seminar on probability. 31(1969).

16 M. Fukushima. On boundary conditions for multi-dimensional Brownian motions with symmetric resolvent densities, Jour. Math. Soc. Japan 21(1969), 58–93

17 M. Fukushima. Regular representations of Dirichlet spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 155(1971), 455～473.

18 M. Fukushima. Dirichlet spaces and strong Markov processes. (to appear).

19 A. R. Galmarino. Representation of an isotropic diffusion as a skew product. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1, (1963) 359–378.

20 D. Gilbarg and J Serrin; On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations, Jour. d'Analyse Math. 5(1954～56) 309～340

21 L. Hörmander; Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119 (1967) 147–171

22 G. Hunt. Some theorems concerning Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. 81(1956), 294–319.

23 G. Hunt. Markoff processes and potentials. 1, 2, 3. Illi. Jour. Math. 1(1957), 44–93; 1(1957), 316–369; 2(1958), 151–213.

24 N. Ikeda. On the construction of two-dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problem. Mem. Coll. Soi. Univ. Kyoto. A. Math. 33, 368–427(1961).

25 N. Ikeda. 拡散過程の局所構造についての注意。確率過程研究会報告集，数理解析研究所講究録74 1969.

26 K. Ito–H. P. McKean. Diffusion processes and their sample paths. Springer. Berllin, 1965.

27 K. Ito. Lectures on stochastic processes. Tata institute of fundamental research. Bombay, 1961.

28 K. Ito. Poisson point processes attached to Markov processes. To appear in the Proc.

6—th Berkeley Symp.

29 M. Kanda. Regular points and Green functions in Markov processes. Jour. Math. Soc. Japan. 19(1967)¬46〜69.

30 神田護 拡散過程と正則点 Seminar on Prob. Vol. 21 (1965).

31 F. Knight :An infinitesimal decomposition for a class of Markov processes, Ann. Math. Stat. (1970)5, 1510—1529

32 M. Kobayasi. Some remarks on the local structure of continuous Markov processes. Japan—USSR Symposium on probability. Habarovsk, 1969.

33 A. N. Kolmogorov; Zufällige Bewegungen. Ann. of Math. (2) 35(1934), 116—117

34 H. Kunita ;General boundary conditions for multi—dimensional diffusion processes, J. M. Kyoto Univ. 10(1970)207—243.

35 国田寛. Beurling—Denyの定理の一証明。(未発表ノート).

36 H. Kunita—S. Watanabe. On square integrable martingales. Nagoya Math. Jour. 30 (1967), 209—245.

37 P. Lévy. Processus stochastiques et mouvement brownien. Paris, 1948.

38 M. B. Malyutov, Brownian motion with reflection and a problem with a directional derivative. Dokladady Akad. Nauk(1964).

39 H. P. McKean, Jr : Stochastic integrals, Academic Press (1969)

40 H. P. McKean—H. Tanaka. Additive functionals of the Brownian path. Memoirs Coll. Sci. Univ. Kyoto. A. Math. 33, 479—506(1961).

41 P. A. Meyer, Integrales stochastiques, I. II. Sḗminaire de Probabilites I, Universitḗ de Strasbourg. Lecture Notes in Math. Vol. 39(1967) Springer

42 溝畑茂. 偏微分方程式論. 岩波 1965.

43 本尾実 : Discontinuous inclined derivative 数理科学講究録57.

44 M. Motoo—S. Watanabe. On a class of additive functionals of Markov processes. Jour. of Math. Kyoto. Univ. 4(1965), 429—469.

45 I. Petrovsky. 偏微分方程式論(渡辺毅訳), 商工出版.

46 K. Sato. Semigroups and Markov processes. Lecture note, Univ. Minnesota. 1968.

47 K. Sato—T. Ueno. Multidimensional diffusion and the Markov probess on the

Sem. on Probab.
Vol.35 1971年
P1-144

boundary. Jour. Math. Kyoto Univ. 4(1964), 529–605.

48 L. Schwartz. Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés. (noyaux reproduisants). Journal d'Analyse Mathématique, Jerusalem. 13(1964), 115–256.

49 L. Schwartz. Theorie des distributions. Paris, Hermann, 1950–51.

50 Seregin. Continuity conditions for stochastic processes. Theory. of Prob. and its Appl. 6(1961), 1–26.

51 T. Shiga–T. Watanabe. On Markov chains similar to the reflecting barrier Brownian motion. Osaka Jour. Math. 5(1968), 1–33.

52 A. V. Skorohod. On homogeneous continuous processes that are martingales. Theory of prob. and its appl. 8(1963).

53 A. V. Skorohod. On the local structure of continuous Markov processes. Theory of Prob. and its appl. 11(1966).

54 D. W. Stroock–S. R. S. Varadhan; On the range of degenerate diffusions with applications to the strong maximum principle (to appear in the Proc. 6–the Berkeley Symposium)

55 M. Weil; Quasi–Processus, Seminaire de Probababilites Ⅳ Universtēs de Strasbourg. Lecture notes in Math. 124(1970). pp. 216–239

56 A. D. Wentzell; On lateral conditions for multidimensional diffusion processes. Teor Verojat Primen 4 172–185(1959).