Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

Vol. 32

TOPICS IN MARKOV CHAIN

（下）

近藤亮司　　大島洋一
渡辺　毅

1970

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

Topics in Markov chains (下)

目　次

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

第Ⅲ部 Approximate chain と Martin境界

第２章 Martin 境界

§5. 非再帰連鎖の *Martin entrance* 境界

この節では非再帰な *Markov* 連鎖の *Martin entrance* 境界の構成及びそれに関する結果を２つの段階に分けて証明する．第１段階では仮定(H_1)，及び(H_2)がみたされる場合の証明を行ない，次いでその結果を使って一般の場合の証明を与える。この節を通じて η は与えられた超過的（*excessive*）測度として固定しておく。この η に対して定理3.1によって決まる測度空間($\Omega, \mathbb{B}, \mathcal{P}$)上の *approximate P-chain* を(X, α, β)とする。

仮定(H_1)：測度 $\mathcal{P}$ は有界測度である。

第１段. ここでは仮定(H_1),(H_2)がみたされるとする。仮定(H_2)は議論の途中で導入するがそれ迄は(H_2)は必要でない。

測度 η に対する *approximate P-chain* は一意とは限らないが，定理2.1系より各有限集合への到達測度（*hitting measure*）は一意だから仮定(H_1)は意味がある．

空間 S に次の距離を導入する．S の一点 *compact* 化を与える距離の１つを d_1 とする．たとえば，S の元に番号をつけ $S=\{x_n;\ n=1,2,\cdots\}$ としたとき，$d_1(x_n, x_m)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|$ とおけばよい．また $m(x)>0$ ($\forall x\in S$), $m(S)<+\infty$ なる測度 m に対して，

$$d_2(x,y)=\sum_{z\in S}\frac{|G(x,z)-G(y,z)|}{1+|G(x,z)-G(y,z)|}\,m(z) \tag{5.1}$$

とおき，$d=d_1+d_2$ とおく。

補題5.1. S の点列 $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が距離 d に関して基本列になるための必

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

要十分条件は任意の $z\in S$ に対して $\{G(x_n,z)\}_{n=1,2,\dots}$ が基本列となることである。

証明 $\{x_n\}_{n\geqq 1}$ が d について基本列とする。任意の $x\in S$ に対して $G(x,z)\leqq G(z,z)$ だから

$$d(x_n,x_m)\geqq \frac{|G(x_n,z)-G(x_m,z)|}{1+|G(x_n,z)-G(x_m,z)|}m(z)$$

$$\geqq \frac{m(z)}{1+2G(z,z)}|G(x_n,z)-G(x_m,z)| \quad (^\forall z).$$

故に $\{G(x_n,z)\}_{n\geqq 1}$ は任意の z に対して基本列である。

逆に任意の z に対して $\{G(x_n,z)\}$ が基本列であるとする。任意の $\varepsilon>0$ に対して $\sum_{z\notin E}m(z)<\varepsilon$ なる有限集合 E をとる。

$$d(x_n,x_m)\leqq \sum_{z\notin E}m(z)+\sum_{m\in E}|G(x_n,z)-G(x_m,z)|m(z).$$

従って $\lim_{n,m\to\infty}d(x_n,x_m)=0$. （終）

距離 d により空間 S を完備化した空間を S_*, $S_*-S=B_0$ とおき，B_0 を G による S の entrance 境界という。補題5.1より S_*, B_0 は m のとり方には無関係である。

各 $z\in S$ に対して，$G(\cdot,z)$ は S 上の一様連続関数だから S_* 上の連続関数に一意に拡張される。拡張したものも同じ記号 G で書く，また d の S_* 上への拡張も同じ記号で書くことにする。S の2つの元 x,y がすべての $z\in S$ に対し $G(x,z)=G(y,z)$ をみたすならば両辺に $(I-P)$ を施すことにより $x=y$ となる。また S_* の2つの元 ξ_1,ξ_2 がすべての $z\in S$ に対し $G(\xi_1,z)=G(\xi_2,z)$ をみたすならば，S_* が S の完備化であることにより $\xi_1=\xi_2$.

補題5.2. 任意の $\xi\in S_*$ に対して $G(\xi,\cdot)$ は超過的測度である。

証明 $x_n\in S$, $x_n\to\xi\,(d)$ とすると任意の n に対して，

$$G(z,z)\geqq G(x_n,z)\geqq GP(x_n,z)+I(x_n,z)\geqq GP(x_n,z).$$

$n\to\infty$ とし Fatou の補題を使えば，

$$G(z,z)\geqq G(\xi,z)\geqq GP(\xi,z)\quad {}^\forall z\in S.$$ （終）

補題5.3. S_* は compact な距離空間である。

証明 $\{\xi_n\}_{n=1,2,\dots}$ を S_* の任意の点列とすると，$G(\xi_n,x)\leqq G(x,x)$ $(^\forall x\in S)$ だから対角線論法により $\{G(\xi_n,x)\}_{n=1,2,\dots}$ はすべての $x\in S$ に対して収束す

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

る部分列を含む．故に補題5.1より $\{\xi_n\}_{n=1,2,\dots}$ は S_* の中で収束する部分列を含む。 （終）

S_* の中には距離 d により Borel集合が定義される．その上で定義された測度を Borel 測度という．S は可算個だから $S_* - S = B_0$ は Borel 集合である。

定理5.1. ほとんどすべての $\omega(P)$ に対して $X_n(\omega)$ は $n \downarrow \alpha(\omega)$ のとき S_* の中で収束する．

証明　定理1.1より任意の $x \in S$ に対して，$n \downarrow \alpha(\omega)$ のとき $G(X_n, x)$ が a.e. (P) で収束するから補題5.1より定理がいえる。 （終）

定理5.1の極限値が存在するような ω に対して，$\lim_{n \downarrow \alpha(\omega)} X_n(\omega) = X_\alpha(\omega)$ とおくとほとんどすべての ω に対して $X_\alpha(\omega)$ は定義される．X_α の定義より容易に分るように X_α は Ω から S_* への関数として可測であるから X_α の分布は S_* 上の Borel 測度である．η に対する approximate P-chain は一意とは限らないが

系1. X_α の分布は η に対して一意に決まる．

証明　σ^E を (X, α, β) の有限集合 E への到達時間 (hitting time), X_{σ^E} の分布を μ^E, X_α の分布を μ^η とすると定理5.1より $\lim_{E \uparrow S} X_{\sigma^E} = X_\alpha$ a.e. だから S_* 上の任意の連続関数 f に対して，

$$\lim_{E \uparrow S} \int_{S_*} f(\xi)\mu^E(d\xi) = \lim_{E \uparrow S} \int_{\Omega \cap \{\sigma^E < \infty\}} f(X_{\sigma^E})\, P(d\omega)$$

$$= \int_\Omega \lim_{E \uparrow S} f(X_{\sigma^E})\, P(d\omega) = \int_\Omega f(X_\alpha(\omega))\, P(d\omega)$$

$$= \int_{S_*} f(\xi)\, \mu^\eta(d\xi)\ .$$

極限と積分の交換は S_* が compact だから f は有界でありかつ P が有界測度であることから Lebesgue の定理より保障される．このことより μ^η は μ^E の $E \uparrow S$ のときの弱極限で，μ^E は定理2.1系より η に対して一意に決まるから系がいえた。

系2. η に対して S_* 上の有界な Borel 測度 ν が存在して，

$$(5.2) \qquad \eta(x) = \int_{S_*} G(\xi, x)\, \nu(d\xi)$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

とできる．ここにνはX_αの分布μ^ηととれる。

証明　$G(\cdot, x)$はS_*で連続だから系1より

$$\eta(x) = \mathbb{E}[\sum_{\alpha \leq n \leq \beta} I_{\{x\}}(X_n)]$$

$$= \lim_{E \uparrow S} \mathbb{E}[\sum_{\sigma^E \leq n \leq \beta} I_{\{x\}}(X_n) ; |\sigma^E| < \infty]$$

$$= \lim_{E \uparrow S} \int_{S_*} G(\xi, x) \mu^E(d\xi)$$

$$= \int_{S_*} G(\xi, x) \mu^\eta(d\xi)$$ （終）

次に積分表示(5.2)の一意性について調べる．一般にはηに対する測度νの一意性は言えないが空間S_*を少し制限すれば一意性がいえる。その議論のためにはηに対して導入した仮定(H_1)と同様の仮定を超過的測度$G(\xi, \cdot)$に対し導入する。超過的測度$G(\xi, \cdot)$ $(\xi \in S_*)$に対して定理3.1により対応する*approximate P-chain*を(Y, γ, δ)（測度空間を$(\Omega, B, P^{(\xi)})$）とする．

仮定(H_2)：任意の$\xi \in S_*$に対し$P^{(\xi)}$は有界測度である．

仮定(H_2)の下で前と同様の議論によって，$\lim_{n \downarrow \gamma(\omega)} Y_n(\omega) = Y_\gamma(\omega)$がほとんどすべての$\omega(P^{(\xi)})$に対して$S_*$の中で存在し$Y_\gamma$の分布を$\mu^{(\xi)}$とすると

$$(5.3) \qquad G(\xi, x) = \int_{S_*} G(\zeta, x) \mu^{(\xi)}(d\zeta)$$

と表現できる．この$\mu^{(\xi)}$を使ってS_*の部分集合Mを

$$(5.4) \qquad M = \{\xi \in S_* ; \ \mu^{(\xi)}(\cdot) = \delta^\xi(\cdot)\}$$

により定義する．但しδ^ξは点ξの*Dirac*測度．

補題5.4.　S_*の任意の*Borel*集合Dに対して$\mu^{(\xi)}(D)$は$\xi \in S_*$の*Borel*可測な関数である。

証明　(Y, γ, δ)の有限集合Eへの到達時間をσ^EとしY_{σ^E}の分布をμ_ξ^Eとすると$\mu_\xi^E(x) = G(\xi, \cdot)(I - P^E)(x)$で$G(\xi, x)$ $(x \in S)$はξの関数としてS_*で連続だからμ_ξ^Eはξの可測関数である。また$\mu^{(\xi)}$はμ_ξ^Eの$E \uparrow S$のときの弱極限値即ちS_*上の任意の連続関数fに対して，

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$\int_{S_*} f(\zeta)\, \mu^{(\xi)}(d\zeta) = \lim_{E \uparrow S} \int_{S_*} f(\zeta)\, \mu_\xi^E(d\zeta)$$

であり，右辺の積分は $\mu_\xi^E(x)$ $(x \in E)$ の有限個の一次結合だから可測である．即ち S_* 上の任意の連続関数に対し $\int_{S_*} f(\zeta)\mu^{(\xi)}(d\zeta)$ は ξ の関数として Borel 可測である。また S_* は定義より可分な距離空間だから結局 S_* 上の任意の Borel 可測関数 f に対して $\int_{S_*} f(\zeta)\mu^{(\xi)}(d\zeta)$ が可測となり補題がいえる． （終）

補題 5.5 M は S_* の Borel 集合である．

証明 任意の Borel 集合 $D \subset S_*$ に対しては補題 5.4 より $\{\xi \in S_* ;\ \mu^{(\xi)}(D) = \delta^\xi(D)\}$ は S_* の Borel 集合である．故に $\{\xi \in S_*$；可算個の Borel 集合 D に対して $\mu^{(\xi)}(D) = \delta^\xi(D)\}$ も Borel 集合である．S_* は第2可算公理を満たすから補題がいえる。 （終）

補題 5.5 より $\mu^\ell(S_* - M)$ は意味をもつがそれが 0 となる事を証明する。そのために2つの補題を証明しておく。

補題 5.6. (X, α, β) に X_α で条件を付けた chain も a.e.$(\mathcal{P})$ で approximate P-chain である．

証明 $\{E_n\}_{n=1,2,\dots}$ を S に増加する有限集合の列とすると，$n \geqq m$ なる整数 m, n と S の元 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_j$ $(i<j)$ をとると，(X, α, β) が approximate P-chain であるから任意の $A \subset S$ に対して，

$$\mathcal{P}\{X_{\sigma^{E_n}} \in A,\ X_{\sigma^{E_m}+i} = x_i,\ X_{\sigma^{E_m}+i+1} = x_{i+1}, \cdots, X_{\sigma^{E_m}+j} = x_j\}$$
$$= \mathcal{P}\{X_{\sigma^{E_n}} \in A,\ X_{\sigma^{E_m}+i} = x_i, \cdots, X_{\sigma^{E_m}+j-1} = x_{j-1}\}\, P(x_{j-1}, x_j)\,.$$

言い換えれば

$$\mathcal{P}\{X_{\sigma^{E_m}+i} = x_i,\ X_{\sigma^{E_m}+i+1} = x_{i+1}, \cdots, X_{\sigma^{E_m}+j} = x_j \mid X_{\sigma^{E_n}}\}$$
$$= \mathcal{P}\{X_{\sigma^{E_m}+i} = x_i, \cdots, X_{\sigma^{E_m}+j-1} = x_{j-1} \mid X_{\sigma^{E_n}}\}\, P(x_{j-1}, x_j) \quad a.e.(\mathcal{P})$$

が成り立つ．いま $n_0\,(>m)$ を固定し $\mathbb{B}_k^{n_0} = \sigma\{X_{\sigma^{E_{n_0}}}, X_{\sigma^{E_{n_0+1}}}, \cdots, X_{\sigma^{E_{n_0+k}}}\}$ とおくと上と全く同様にして，

$$\mathcal{P}\{X_{\sigma^{E_m}+i} = x_i, \cdots, X_{\sigma^{E_m}+j} = x_j \mid \mathbb{B}_k^{n_0}\}$$
$$= \mathcal{P}\{X_{\sigma^{E_m}+i} = x_i, \cdots, X_{\sigma^{E_m}+j-1} = x_{j-1} \mid \mathbb{B}_k^{n_0}\}\, P(x_{j-1}, x_j) \quad a.e.(\mathcal{P})\,.$$

ここで $k \to \infty$ とすると Martingale の収束定理より $\sigma(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{B}_k^{n_0}) = \mathbb{B}_\infty^{n_0}$ とおいたとき，

$$\mathcal{P}\{X_{\sigma^{E_m}+i} = x_i, \cdots, X_{\sigma^{E_m}+j} = x_j \mid \mathbb{B}_\infty^{n_0}\}$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$= \mathcal{P}\{X_{\sigma^{E_m}+i} = x_i, \cdots, X_{\sigma^{E_m}+j-1} = x_{j-1} | \mathbb{B}_\infty^{n_0}\} P(x_{j-1}, x_j) \ a.e.(\mathcal{P}) .$$

この式の両辺に X_α で条件を付ければ, X_α が $\mathbb{B}_\infty^{n_0}$ 可測であるから,

$$\mathcal{P}\{X_{\sigma^{E_m}+i} = x_i, \cdots, X_{\sigma^{E_m}+j} = x_j | X_\alpha\}$$
$$= \mathcal{P}\{X_{\sigma^{E_m}+i} = x_i, \cdots, X_{\sigma^{E_m}+j-1} = x_{j-1} | X_\alpha\} P(x_{j-1}, x_j) \ a.e.(\mathcal{P}) .$$

即ち (X, α, β) に X_α で条件を付けた chain は σ^{E_m} により P-chain に reduce される. （終）

補題5.7. 任意の $x \in S$ に対して

$$G(X_\alpha, x) = \mathbb{E}[\sum_{\alpha \leqq n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n) | X_\alpha] \qquad a.e.(\mathcal{P}):$$

証明　f を S_* 上の任意の連続関数すると,

$$\mathbb{E}[\{\sum_{\alpha \leqq n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n)\} f(X_\alpha)]$$

$$= \lim_{E \uparrow S} \mathbb{E}[\{\sum_{\sigma^E \leqq n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n)\} f(X_{\sigma^E})]$$

$$= \lim_{E \uparrow S} \mathbb{E}[f(X_{\sigma^E}) \mathbb{E}[\sum_{\sigma^E \leqq n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n) | X_{\sigma^E}]]$$

$$= \lim_{E \uparrow S} \mathbb{E}[f(X_{\sigma^E}) G(X_{\sigma^E}, x)]$$

$$= \mathbb{E}[f(X_\alpha) G(X_\alpha, x)] .$$

S_* は可分な距離空間であるから任意の可測関数 f に対して,

$$\mathbb{E}[\{\sum_{\alpha \leqq n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n)\} f(X_\alpha)] = \mathbb{E}[f(X_\alpha) G(X_\alpha, x)],$$

だから補題がいえる. （終）

定理5.2. $X_\alpha(\omega) \in M$ $a.a.\ \omega(\mathcal{P})$ である.

証明　補題5.6及び5.7より $a.a.\ \xi(\mu^\eta)$ に対して, (X, α, β) に $X_\alpha = \xi$ で条件を付けた chain は approximate P-chain で $G(\xi, x) = \mathbb{E}[\sum_{\alpha \leqq n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n) | X_\alpha = \xi]$ をみたす. $\mu^{(\xi)}$ はそのような approximate P-chain の初期分布でそれは定理5.1系1より一意だから,

$$\mu^{(\xi)} = \delta^\xi \qquad a.a.\ \xi(\mu^\eta) .$$

故に $X_\alpha \in M$ $a.a.\ \omega\ (\mathcal{P})$ である. （終）

上の定理から容易に分るように

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

系. $\mu^{\eta}(S_*-M)=0$ である.

次に定理5.1系2の表現(5.2)により η に対応する測度 ν は S_* の代りに M で考えれば一意的に決まる事を証明する。

定理5.3. η に対して M 上の有限Borel測度 ν が存在して,

$$(5.5)\qquad \eta(x)=\int_M G(\xi,x)\,\nu(d\xi)$$

と表現できる。この時 ν は η に対し一意的に決まりそれは X_α の M 上での分布を示す。

証明 $\nu=\mu^{\eta}$ とすると定理5.1系2と定理5.2より(5.5)が言えるから一意性のみ証明すればよい.

(2.1)式に左から G を施すと S の任意の有限集合 E に対して

$$H^E(x,y)=\sum_{z\in E} G(x,z)(I-P^E)(z,y)\ .$$

右辺の和は有限で $G(\cdot,z)$ は S_* 上に連続に拡張できるから $H^E(\cdot,y)$ も S_* 上の連続関数に一意的に拡張できる. S_* 上への拡張も同じ記号で書く。また $z\notin E$, $x\in E$ のとき(2.5)式より $G(z,x)=H^EG(z,x)$ だから, B_0 の任意の点 ξ に対して $z\to\xi$ とすれば

$$(5.6)\qquad G(\xi,x)=\sum_{y\in E} H^E(\xi,y)\,G(y,x)\qquad x\in E\ .$$

μ_ξ^E を補題5.4の証明で定義したものとすると $x\in E$ のとき

$$\begin{aligned}\mu_\xi^E(x)&=\sum_{y\in E} G(\xi,y)(I-P^E)(y,x)\\&=\sum_{y\in E,\,z\in E} H^E(\xi,z)\,G(z,y)(I-P^E)(y,x)\\&=H^E(\xi,x)\ .\end{aligned}$$

最後の等式には補題2.2を使った. 上の等式より S_* 上の測度 $H^E(\xi,\cdot)$ は任意の $\xi\in M$ に対して $E\uparrow S$ としたとき $\delta^{\xi}(\cdot)$ に弱収束する。

そこで今 ν を定理をみたす測度の1つとする. 可測空間 $(\Omega,\mathcal{B})$ を定理3.1の証明で定義したものとする。$(\Omega,\mathcal{B})$ 上に測度 $\tilde{P}$ を, 定理3.1に於ける P の定義に於ける μ^E の代りに

$$\tilde{\mu}^E(x)=\begin{cases}\int_M H^E(\zeta,x)\,\nu(d\zeta) & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

と置き換えて決まる測度とする．$(\Omega, \mathcal{B}, \tilde{P})$ 上に定理3.1と同様にして $(\tilde{X}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ を定義するとそれが approximate P-chain である事が定理3.1と同様にすると言える．このとき，

$$\tilde{E}\left[\sum_{\tilde{\alpha}\leqq n\leqq\tilde{\beta}} I_{\{x\}}(\tilde{X}_n)\right] = \sum_{z\in E}\tilde{\mu}^E(z)\,G(z,x)$$

$$=\int_{M}\sum_{z\in E} H^E(\xi, z)\ G(z,x)\,\nu(d\xi)$$

$$=\int_{M} G(\xi, x)\,\nu(d\xi)$$

$$=\eta(x)\ .$$

但し$\tilde{E}$は測度$\tilde{P}$に関する積分．故に $(\tilde{X}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ は η に対する approximate P-chain であるから定理5.1系より $\tilde{X}_{\tilde{\alpha}}$ の分布は μ^η である．また $(\tilde{X}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ の有限集合 E への到達時間を $\tilde{\sigma}^E$ としたとき，$\tilde{X}_{\tilde{\sigma}^E}$ の分布は $\tilde{\mu}^E$ となるから μ^η は $\tilde{\mu}^E$ の $E\uparrow S$ とした時の弱極限値となる．故に S_* 上の任意の連続関数 f に対して，

$$\int_{M} f(\zeta)\,\mu^\eta(d\zeta) = \int_{S_*} f(\zeta)\,\mu^\eta(d\zeta)$$

$$=\lim_{E\uparrow S}\int_{S_*} f(\zeta)\,\tilde{\mu}^E(d\zeta) = \lim_{E\uparrow S}\int_{S_*} f(\zeta)\int_{M} H^E(\xi, d\zeta)\,\nu(d\xi)$$

$$=\lim_{E\uparrow S}\int_{M}\nu(d\xi)\int_{S_*} f(\zeta)\,H^E(\xi, d\zeta)$$

$$=\int_{M} f(\xi)\,\nu(d\xi)\ .$$

故に $\nu = \mu^\eta$ ． (終)

第2段．一般の場合

η に対して S 上の非負で $\langle \eta, g\rangle < \infty$，$0 < Gg < \infty$ なる関数 g をとる．例えば $\sum_{x\in S} n(x) < \infty$，$n(x) > 0$ ($^\forall x\in S$) なる測度 n に対し $g(x) = \frac{n(x)}{\eta(x)\vee G(x,x)}$ ととれば，$G(y,x) \leqq G(x,x)$ ($^\forall x\in S$, $^\forall y\in S$) に注意すると，上述の性質をもつ．この節を通じて上の様な g を1つとり固定しておく．$Gg = h$ とおき，この h に対して，

$$P^h(x,y) = \frac{h(y)}{h(x)}\,P(x,y)\ ,$$

$$G^h(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(P^h)^n(x,y) = \frac{h(y)}{h(x)}\,G(x,y)\ ,$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

とおく。gが非負だからhは超過的関数。従って P^h はS上の推移確率（transition function）である．また$(h\eta)(x)=h(x)\eta(x)$ $(^\forall x\in S)$ なる測度 $h\eta$ は P^h に関して超過的であるから定理3.1より測度空間$(\Omega,\mathcal{B},\mathcal{P}^g)$上の approximate P^h-chain (X^g,α^g,β^g)が存在して

$$(5.7)\qquad h(x)\eta(x)=E^g\left[\sum_{\alpha^g\le n\le\beta^g} I_{\{x\}}(X_n^g)\right]$$

をみたすようにできる．ここに E^g は $\mathcal{P}^g$-測度による平均を表わす．

補題5.8. $\mathcal{P}^g$ は有界測度である。

証明 (X^g,α^g,β^g)の有限集合Eへの到達時間をσ_g^E, $X^g_{\sigma_g^E}$ の分布をμ_g^Eとすると

$$\mu_g^E(x)=(h\eta)\{I-(P^h)^E\}(x)$$
$$=\eta(I-P^E)(x)\,h(x)\ .$$

但し$(P^h)^E$ は推移確率 P^h により§2の P^E と同様に定義したもの。補題2.4証明の(i)より $\eta(I-P^E)\ge 0$だからFubiniの定理より，

$$\sum_{x\in E}\mu^E g(x)=\sum_{x\in E}\eta(I-P^E)(x)\,Gg(x)$$

$$=\sum_{y\in S}\{\eta(I-P^E)G\}(y)\,g(y)$$

$\eta(I-P^E)G$ はE上でηと一致するpotential（補題2.2に注意）だから補題2.4より $\eta(I-P^E)G\le\eta$．従って，

$$\sum_{x\in E}\mu_g^E(x)\le\langle\eta,g\rangle\ .$$

$\{\sigma_g^E<+\infty\}$ は $E\uparrow S$ のとき $\{\alpha^g<\infty\}=\Omega$に増加し，$\mathcal{P}^g\{\sigma_g^E=-\infty\}=0$ だから，

$$\mathcal{P}^g\{\Omega\}=\lim_{E\uparrow S}\mathcal{P}^g\{|\sigma_g^E|<\infty\}=\lim_{E\uparrow S}\sum_{x\in E}\mu_g^E(x)$$
$$\le\langle\eta,g\rangle<\infty\ .\qquad\text{(終)}$$

補題5.8より $\mathcal{P}^g$ に関して仮定(H_1)がみたされる。そこで第1段に於ける距離dの定義におけるGの代りにG^hで置き換えた距離によりSを完備化しそれをS_*^g, $S_*^g-S=B^g$ とおき B^g を標準関数(reference measure) gによるPのMartin entrance境界という。また $K(x,y)=\frac{1}{h(x)}G(x,y)=$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$\frac{1}{h(y)}G^h(x, y)$ ($x\in S$, $y\in S$) を標準関数 g による P の Martin entrance 核という。$G^h(\cdot, y)$ ($y\in S$) は S_*^g 上の連続関数に一意に拡張出来るから $K(\cdot, y)$ も S_*^g 上の連続関数に一意に拡張でき，

$$(5.8) \qquad K(\xi, y)=\frac{1}{h(y)}G^h(\xi, y) \qquad \xi\in S_*^g,\ y\in S$$

をみたす。

補題5.9. $\xi\in S_*^g$ に対し $K(\xi,\cdot)$ は超過的測度であり $Kg(\xi)\leqq 1$ である。

証明　$x\in S$, $y\in S$ のときは，

$$KP(x, y)=\frac{1}{h(x)}GP(x, y)\leqq\frac{1}{h(x)}G(x, y)=K(x, y),$$

$$Kg(x)=\frac{1}{h(x)}Gg(x)=1$$

だから $x\to\xi$ のとき Fatou により結果がいえる。　(終)

次に，$G^h(\xi,\cdot)$ は P^h に関する超過的測度であるから測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P}^{g,\xi})$ 上の approximate P^h-chain $(Y^g, \gamma^g, \delta^g)$ が存在して，

$$(5.9) \qquad G^g(\xi, x)=E^{g,\xi}\Big[\sum_{\gamma^g\leqq n\leqq\delta^g} I_{\{x\}}(Y_n^g)\Big]$$

とできる。但し $E^{g,\xi}$ は $\mathcal{P}^{g,\xi}$ 測度による積分を示す。

補題5.10. $\mathcal{P}^{g,\xi}$ は有界測度である。

証明　approximate P-chain $(Y^g, \gamma^g, \delta^g)$ の有限集合 E への到達時間を $\sigma_{g,\xi}^E$，$X^g_{\sigma_{g,\xi}^E}$ の分布を $\mu_{g,\xi}^E$ とすると，

$$\begin{aligned}\mu_{g,\xi}^E(x)&=G^h(\xi,\cdot)\{I-(P^h)^E\}(x)\\&=K(\xi,\cdot)(I-P^E)(x)\,h(x)\\&=K(\xi,\cdot)(I-P^E)(x)\,Gg(x)\end{aligned}$$

補題5.8と同様に補題2.4より $K(\xi,\cdot)(I-P^E)G(x)\leqq K(\xi, x)$ だから Lebesgue の定理より

$$(5.10) \qquad \mathcal{P}^{g,\xi}(\Omega)=\lim_{E\uparrow S}\sum_{x\in E}\mu_{g,\xi}^E(x)=Kg(\xi)\leqq 1.$$
(終)

補題5.10より $\mathcal{P}^{g,\xi}$ に関し仮定 (H_2) がみたされる。従って第1段よりほとんどすべての $\omega(\mathcal{P}^{g,\xi})$ に対し $\lim_{n\downarrow\gamma^g}Y_n^g(\omega)=Y_{\gamma^g}^g(\omega)$ が S_*^g の中で存在する。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$Y^g_{\alpha^g}$ の S^g_* の中での分布を μ^ξ_g とする．μ^ξ_g は補題5.10の証明の中の $\mu^E_{g,\xi}$ の $E\uparrow S$ とした時の弱極限値である。

$$(5.11)\qquad M^g=\{\xi\in S^g_*\ ;\ \mu^\xi_g=\delta^\xi\}\ ^{(注)}$$

とおくと第1段定理5.1と定理5.2より

定理5.4. ほとんどすべての $\omega(P^g)$ に対して $\lim_{n\downarrow\alpha^g} X^g_n(\omega)=X^g_{\alpha^g}(\omega)$ が S^g_* の中で存在し $X^g_{\alpha^g}\in M^g$ である。

定理5.5. 超過的測度 η に対して，

$$(5.12)\qquad \eta(x)=\int_{M^g}K(\xi,x)\,\nu(d\xi)\qquad x\in S$$

を満足する M^g 上の有界Borel測度 ν が一意に存在する。このときの ν は $X^g_{\alpha^g}$ の分布を表わす。

証明　定理5.3より M^g 上の有界Borel測度 ν が唯一つ存在して，

$$(h\eta)(x)=\int_{M^g}G^h(\xi,x)\,\nu(d\xi)$$

と書ける．これに（5.8）を代入すればよい．　　　　　　　　　　（終）

次に集合 M^g について考察する．S 上の P に関する非負不変測度 η_0 が，$0\leqq\eta_1\leqq\eta_0$ なる超過的測度 η_1 が η_0 の定数倍に限るという性質を持つとき η_0 を極小不変測度（*minimal invariant measure*）という。言い換えると非負不変測度 η_0 が2つの超過的測度 η_1，η_2 の和に書けるのは η_1，η_2 が共に η_0 の定数倍に限るとき η_0 は極小不変測度であるという。

既に証明したように（補題5.9）任意の $\xi\in S^g_*$ に対し $K(\xi,\cdot)$ は超過的測度で $Kg(\xi)\leqq 1$ であるが特に，

$$(5.13)\qquad B^g_e=\{\xi\in B^g;\ \ K(\xi,\cdot)\text{ が極小不変測度},\ Kg(\xi)=1\}$$

を B^g の極小（*minimal*）な部分という．

上に述べた様に一般の $\xi\in B^g_*$ に対しては $K(\xi,\cdot)$ は超過的測度であるがそ

（注）　M^g は Ray（第Ⅰ部文献[34]）の意味の *non-branching point* の全体である。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

れを M^g に制限すると次の事が云える。

<u>補題5.11</u> <u>$\xi \in M^g \cap B^g$ のとき $K(\xi, \cdot)$は不変測度である.</u>

<u>証明</u> 任意の $x \in S$ に対して

$$K(\xi, x)h(x) = G^h(\xi, x) \leqq G^h(x, x) < \infty$$

だから $0 \leqq K(\xi, x) < \infty$ である。

$\xi \in M^g$ だから $P^{g,\xi}\{Y^g_{\gamma^g} \in d\zeta\} = \delta^\xi(d\zeta)$, 即ち $\lim_{n \downarrow \gamma^g} Y^g_n(\omega) = \xi$ a.e. $(P^{g,\xi})$ である。更に $\xi \in B^g$ だから $\gamma^g = -\infty$ a.e. $(P^{g,\xi})$. 従って,

$$h(x)K(\xi, x) = E^{g,\xi}[\sum_{n \leqq \delta^g} I_{\{x\}}(Y^g_n)] = E^{g,\xi}[\sum_{n \leqq \delta^g} I_{\{x\}}(Y^g_n) I_S(Y^g_{n-1})].$$

$\{E_n\}_{n=1,2,\dots}$ を S に増加する有限集合の列とする. 各 $y \in S$ に対して $y \in E_n$ なる番号 n の1つを $n(y)$ とおき $(Y^g, \gamma^g, \delta^g)$ の集合 $E_{n(y)}$ への hitting time を $\sigma_{n(y)}$ とすると,

$$h(x)K(\xi, x) = \sum_{y \in S} E^{g,\xi}[\sum_{n \leqq \delta^g} I_{\{y\}}(Y^g_{n-1}) I_{\{x\}}(Y^g_n), -\infty < \sigma_{n(y)} \leqq n-1]$$

$$= \sum_{y \in S} \sum_{n=0}^{\infty} P^{g,\xi}\{Y^g_{\sigma_{n(y)}+n} = y, Y^g_{\sigma_{n(y)}+n+1} = x\}$$

$$= \sum_{y \in S} \sum_{n=0}^{\infty} P^{g,\xi}\{Y^g_{\sigma_{n(y)}+n} = y\} P^h(y, x)$$

$$= \sum_{y \in S} E^{g,\xi}[\sum_{n \leqq \delta^g} I_{\{y\}}(Y^g_n)] P^h(y, x)$$

$$= \sum_{y \in S} G^h(\xi, y) P^h(y, x) = h(x) \sum_{y \in S} K(\xi, y) P(y, x).$$

故に $K(\xi, \cdot)$ は不変測度である。 (終)

<u>補題5.12.</u> <u>η_i $(i=1,2)$ を $\langle \eta_i, g \rangle < \infty$ なる超過的測度とすると,</u>

(5.14) $$\mu^{\eta_1+\eta_2} = \mu^{\eta_1} + \mu^{\eta_2}$$

(5.15) $$\mu^{c\eta_i} = c\mu^{\eta_i} .$$

<u>但し c は正の定数, μ^η は η に対して定理5.5によって決まる M^g 上の Borel 測度.</u>

<u>証明</u> η_i に対して $h(x)\eta_i(x) = E^i[\sum_{\alpha^i \leqq n \leqq \beta^i} I_{\{x\}}(X^i_n)]$ をみたす approximate P^h-chain を $\Omega^1 \cap \Omega^2 = \phi$ なる測度空間 (Ω^i, B^i, P^i) 上に作る. ここに

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$\mathbb{E}^i$ は測度 P^i による積分を示す。(5.14)を証明するときは，$\Omega=\Omega^1\cup\Omega^2$, $\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{B}^1\cup\mathcal{B}^2)$， $A\in\mathcal{B}$ に対して測度Pを $P(A)=P^1(A\cap\Omega^1)+P^2(A\cap\Omega^2)$ により定義する。$(\Omega,\mathcal{B},P)$上の random chain (X,α,β) を $\omega\in\Omega$ が $\omega\in\Omega^i$ のとき $\alpha(\omega)=\alpha^i(\omega)$，$\beta(\omega)=\beta^i(\omega)$，$X_n(\omega)=X_n^i(\omega)$ と定義する。(X,α,β) が approximate P^h-chain で，

$$h(x)(\eta_1+\eta_2)(x)=\mathbb{E}\Big[\sum_{\alpha\leqq n\leqq\beta} I_{\{x\}}(X_n)\Big]$$

をみたすことは容易に分る。従って $\lim_{n\downarrow\alpha} X_n(\omega)=X_\alpha(\omega)$ がほとんどすべての $\omega(P)$ に対し S_*^g の中で存在し $X_\alpha(\omega)$ の分布は $\mu^{\eta_1+\eta_2}$ である。他方 X_n が定義より X_α の分布は $\mu^{\eta_1}+\mu^{\eta_2}$ であるから(5.14) がいえる.

(5.15) は $\Omega=\Omega^i$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}^i$, $A\in\mathcal{B}$ に対し $P(A)=c\cdot P^i(A)$ とおけばよい。

(終)

補題5.13. $\xi\in M^g\cap B^g$ のとき $K(\xi,\cdot)$ は極小不変測度である．

証明　$K(\xi,\cdot)$が不変測度である事は補題5.11で示した。いま $K(\xi,\cdot)=\eta_1+\eta_2$ なる２つの非負超過的測度 η_1,η_2 をとる。このとき補題5.12 より $\mu_g^\xi=\mu^{\eta_1}+\mu^{\eta_2}$． $\xi\in M^g$ だから $\mu_g^\xi=\delta^\xi$。従って μ^{η_1}，μ^{η_2} は ξだけで mass をもつ。即ち $0\leqq c_1\leqq 1$， $0\leqq c_2\leqq 1$， $c_1+c_2=1$ なる定数 c_1,c_2 が存在して $\mu^{\eta_1}=c_1\delta^\xi$, $\mu^{\eta_2}=c_2\delta^\xi$ と書ける．故に，

$$\eta_1(x)=\int_{M^g}K(\zeta,x)\mu^{\eta_1}(d\zeta)=c_1K(\xi,x).$$

同様に $\eta_2(x)=c_2K(\xi,x)$。

(終)

定理5.6. $M^g=S\cup B_e^g$ である。

証明 (i) $M^g\subseteqq S\cup B_e^g$.

補題5.13 より，$\xi\in M^g$ のとき $Kg(\xi)=1$ が成立つ事が云えれば十分である。 $\xi\in M^g$ とすると，

$$P^{g,\xi}(\Omega)=\mu_g^\xi(S_*)=\delta^\xi(S_*)=1.$$

従って (5.10) 式より

$$Kg(\xi)=P^{g,\xi}(\Omega)=1.$$

(ii) $M^g\supseteqq S\cup B_e^g$.

$\xi\in S\cup B_e^g$ に対し $\mu_\xi^g=\delta^\xi$を云えばよい。

$\xi\in S$ のときは ξ を確率 1 で出発する P^h-chain $(X,0,\beta)$ を考えるとそれは

$$G^h(\xi,x)=\mathbb{E}_\xi\Big[\sum_{0\leqq n\leqq\beta} I_{\{x\}}(X_n)\Big]$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

をみたすから $\mu_\xi^g = \delta^\xi$ が云える。

次に $\xi \in B_e^g$ とする。定理5.5を $K(\xi,\cdot)$ について適用すると,

$$K(\xi, x) = \int_{M^g} K(\zeta, x)\, \mu_g^\xi(d\zeta).$$

両辺に $g(x)$ をかけ x について加えると (i) より $\mu_g^\xi(M^g)=1$. いま $\mu_g^\xi \neq \delta^\xi$ と仮定すると S_*^g の点 $\xi_0\ (\neq \xi)$ で ξ_0 の S_*^g に於ける任意の近傍 U に対して $\mu_g^\xi(U\cap M^g) > 0$ となるものが存在する。

$$K(\xi, x) = \int_{M^g - U\cap M^g} K(\zeta, x)\mu_g^\xi(d\zeta) + \int_{U\cap M^g} K(\zeta, x)\mu_g^\xi(d\zeta)$$

と書いたとき右辺の各項は超過的測度で, 左辺の $K(\xi,\cdot)$ は極小だからある定数 c_U があって,

$$\int_{U\cap M^g} K(\zeta, x)\mu_g^\xi(d\zeta) = c_U K(\xi, x)$$

と書ける。この式の両辺に $g(x)$ をかけ x について加えると(i)より $c_U = \mu_g^\xi(U\cap M^g) > 0$. そこで $\frac{1}{c_U}\mu_g^\xi = \nu_U$ とおくと,

$$K(\xi, x) = \int_{U\cap M^g} K(\zeta, x)\, \nu_U(d\zeta),\quad \nu_U(U\cap M^g) = 1.$$

近傍 U をその閉包が $\{\xi_0\}$ に減少するようにとると, $K(\cdot, x)$ が連続である事から, $K(\xi, x) = K(\xi_0, x)$ $({}^\forall x \in S)$. 従って $G^h(\xi, x) = G^h(\xi_0, x)$ $({}^\forall x \in S)$ より $\xi = \xi_0$ となり矛盾である。 (終)

<u>系1. ほとんどすべての $\omega(P^g)$ に対して次の一方が成立つ。</u>

(i) <u>$\alpha^g > -\infty$ かつ $X_{\alpha^g}^g(\omega) \in S$,</u>

(ii) <u>$\alpha^g = -\infty$ かつ $X_{\alpha^g}^g \in B_e^g$.</u>

証明は定理5.4と定理5.6より明らかである。

<u>系2. $\mu^\eta(S \cup B_e^g) = \langle \eta, g\rangle$.</u>

<u>証明</u> (5.12)式の両辺に $g(x)$ をかけ x について加え定理5.6を使えばよい。

<u>注意.</u> 定理5.5, 定理5.6より,

$$\eta(x) = \int_S K(y, x)\mu^\eta(dy) + \int_{B_e^g} K(\xi, x)\,\mu^\eta(d\xi)$$

と書けるが, このとき右辺の第2項は不変測度であり第1項は

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$\int_S K(y,x)\mu^\eta(dy)=\sum_{y\in S}\frac{\mu^\eta(y)}{h(y)}G(y,x),$$

即ち potential である。従って両辺に $(I-P)$ を施すと任意の $x\in S$ に対して

$$\eta(I-P)(x)=\frac{1}{h(x)}\mu^\eta(x),$$

即ち $\mu^\eta(x)=h(x)\eta(I-P)(x)=(h\eta)(I-P^h)(x)$ である.

§6. 非再帰連鎖の Martin exit 境界

前節で超過的測度に対し Martin entrance 境界を導入し議論をしたが，この節ではその結果を用いて Martin exit 境界を導入することにより同様の結果が超過的関数に対してもいえることを示す．この節を通じ h は 1 つの有限値をとる超過的関数として固定しておく。$S^h=\{x\in S;\ 0<h(x)\}$ とおき，$x\in S^h$, $y\in S^h$ に対し

(6.1) $$P^h(x,y)=\frac{1}{h(x)}P(x,y)h(y),$$

(6.2) $$G^h(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(P^h)^n(x,y)=\frac{1}{h(x)}G(x,y)h(y)$$

とおく。

補題 6.1. $x\in S-S^h$, $y\in S^h$ のとき $P(x,y)=G(x,y)=0$.
証明は $Ph(x)\leqq h(x)=0$ より明らか。

S 上の，$\gamma(x)>0$ ($\forall x\in S$)，$\gamma(S)<\infty$，$\langle\gamma,h\rangle<\infty$，$0<\gamma G<\infty$ なる測度をとり固定する。$\gamma^h(x)=h(x)\gamma(x)$ ($x\in S$) なる S^h 上の正の測度 γ^h に対し，

(6.3) $$\tilde{K}^h(x,y)\equiv\frac{G^h(x,y)}{\gamma^hG^h(y)}=\frac{1}{h(x)}\tilde{K}(x,y)\quad(x\in S^h,\ y\in S^h)$$

とおく。但し $\tilde{K}=\tilde{K}^1$。補題 6.1 より $x\in S-S^h$, $y\in S^h$ のとき $\tilde{K}(x,y)=0$.
また

(6.4) $$\gamma^h\tilde{K}^h(y)=1\qquad\forall y\in S^h$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

も明らか。$\widetilde{K}$ を標準測度（*reference measure*）γ による P の *Martin exit* 核という。§5の d の定義に於ける d_1 と m をとり S^h 上の距離 $\widetilde{d}^h$ を

$$(6.5)\qquad \widetilde{d}^h(x,y)=\sum_{z\in S^h}\frac{|\widetilde{K}^h(z,x)-\widetilde{K}^h(z,y)|}{1+|\widetilde{K}^h(z,x)-\widetilde{K}^h(z,y)|}m(z)+d_1(x,y)$$

$$=\sum_{z\in S}\frac{|\widetilde{K}(z,x)-\widetilde{K}(z,y)|}{h(z)+|\widetilde{K}(z,x)-\widetilde{K}(z,y)|}m(z)+d_1(x,y)$$

とおく．特に $\widetilde{d}^1=\widetilde{d}$ とおく．$\widetilde{d}^h$ で空間 S^h を完備化しそれを ${}^*S^h$，${}^*S^h-S^h=\mathbb{A}^h$ とおく．特に ${}^*S^1={}^*S$，$\mathbb{A}^1=\mathbb{A}$ とおき $\mathbb{A}$ を標準測度 γ による P の *Martin exit* 境界という。$\widetilde{d}^h$ の定義より ${}^*S^h$，$\mathbb{A}^h$ はそれぞれ ${}^*S$，$\mathbb{A}$ の部分空間である．$\widetilde{K}^h(x,\cdot)\leqq\dfrac{1}{\gamma^h(x)}$ に注意すると前節と同様に ${}^*S^h$ は *compact* な距離空間である．また $\widetilde{K}^h(x,\cdot)$ は ${}^*S^h$ 上の連続関数に一意に拡張され，$\xi\in{}^*S^h$ に対し $\widetilde{K}^h(\cdot,\xi)$ は P^h に関する超過的関数である．$\widetilde{K}^h(x,\xi)=\widetilde{K}^h(x,\zeta)$ $(^\forall x\in S^h)$ のとき $\xi=\zeta$ となる事も前節と同様に云える．S^h 上の非負で P^h に関する調和関数(注) g が，$0\leqq g_1\leqq g$ なる P^h に関する超過的関数 g_1 が g の定数倍に限るという性質を持つとき g を h-極小調和関数（*minimal harmonic function*）という．g が h-極小調和関数であることと gh が 1-極小調和関数であることとは同値である。

$$(6.6)\qquad \mathbb{A}^h_e=\{\xi\in\mathbb{A}^h;\ K^h(\cdot,\xi)\ \text{が}\ h\text{-極小調和関数},\ \gamma^hK^h(\xi)=1\}$$

とおく．特に $\mathbb{A}^1_e=\mathbb{A}_e$ とおくと $\gamma^hK^h(\xi)=\gamma K(\xi)$ である事と(6.6)式の前に述べた事実から $\mathbb{A}^h_e=\mathbb{A}_e\cap\mathbb{A}^h$ である．

定理 6.1. γ^h を初期分布とする測度空間 $(\Omega,\mathbb{B},\mathcal{P})$ 上の P^h-*chain* $(X,0,\beta)$ に対してはほとんどすべての ω に対して次の何れか一方の場合が起る。

(i) $\beta(\omega)<\infty$ かつ $X_\beta(\omega)\in S^h$，

(ii) $\beta(\omega)=\infty$ かつ $\lim\limits_{n\uparrow\beta(\omega)}X_n(\omega)=X_\beta(\omega)$ が存在し $X_\beta(\omega)\in\mathbb{A}^h_e$．

証明 $E[\sum\limits_{0\leqq n\leqq\beta}I_{\{x\}}(X_n)]=\gamma^hG^h(x)=h(x)\gamma G(x)$ であるから

$$(6.7)\qquad \hat{P}(x,y)=\frac{\gamma^hG^h(y)}{\gamma^hG^h(x)}P^h(y,x)=\frac{\gamma G(y)}{\gamma G(x)}P(y,x),\quad x\in S^h,\ y\in S^h$$

と置いたとき定理4.1より，$(X,0,\beta)$ の逆進連鎖 $(\hat{X},\hat{\beta},0)$ は *approximate*

（注） 第Ⅰ部（1.7）式参照。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$\hat{P}$-chainである．また

$$(6.8) \qquad \hat{G}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{P}^n(x,y) \qquad x\in S^h,\ y\in S^h$$

$$(6.9) \qquad g(x)=\frac{\gamma^h(x)}{\gamma^h G^h(x)}=\frac{\gamma(x)}{\gamma G(x)} \qquad x\in S^h$$

とおくと，$g\geqq 0$，$\hat{G}g=1$，$\langle\gamma^h G^h, g\rangle=\langle\gamma, h\rangle<\infty$ だからgは§5でSとしてS^h，ηとして$\gamma^h G^h$，Pとして$\hat{P}$としたときの標準関数の条件を満たす．このgを標準関数とする$\hat{P}$の Martin entrance 核Kは

$$(6.10) \qquad K(x,y)=\frac{\hat{G}(x,y)}{\hat{G}g(x)}=\hat{G}(x,y)=\gamma G(y)\tilde{K}(y,x) \quad x\in S^h,\ y\in S^h$$

だから，標準関数gによる$\hat{P}$の Martin entrance 境界 $\hat{B}^{h,g}$ は A^h と一致する．特に，

$$(6.11) \qquad \hat{B}_e^{h,g}=\{\xi\in\hat{B}^{h,g};\ K(\xi,\cdot)\text{ は }\hat{P}\text{-極小不変測度，}Kg(\xi)=1\}$$

は A_e^h と一致する。従って $\lim_{n\uparrow\beta}X_n(\omega)=\lim_{n\downarrow\hat{\beta}}\hat{X}_n(\omega)$ に注意すると定理5.6系より結果が得られる。　　　　　　　　　　　　　　　（終）

定理6.2.　$\langle\gamma, h\rangle<\infty$ なる有限値超過的関数hに対して$S\cup A_e$上の有界Borel測度νが一意に存在して，

$$(6.12) \qquad h(x)=\int_{S\cup A_e}\tilde{K}(x,\xi)\,\nu(d\xi)$$

と書ける．更にνはX_βの分布を表わす。

証明　定理6.1の証明と同じ記号を使う．X_βの分布をνとすると定理5.5及び定理5.6よりνと$\gamma^h G^h$は

$$\gamma^h G^h(x)=\int_{S^h\cup\hat{B}_e^{h,g}}K(\xi,x)\,\nu(d\xi)$$

により1対1に対応する．$S^h\subseteq S$，$\hat{B}_e^{h,g}=A_e^h\subseteqq A_e=\hat{B}_e^{1,g}$ だからνを$S\cup A_e$上のBorel測度に$S^h\cup A_e^h$の外では0とおいて拡張しておくと，

$$(6.13) \qquad h(x)\gamma G(x)=\int_{S\cup A_e}K(\xi,x)\,\nu(d\xi) \quad (^\forall x\in S^h).$$

定義より，

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$g(x)=\frac{\gamma(x)}{\gamma G(x)},\quad \hat{P}(x,y)=\frac{\gamma G(y)}{\gamma G(x)}P(y,x),$$

$$K(x,y)=\hat{G}(x,y)=\frac{\gamma G(y)}{\gamma G(x)}G(y,x)$$

だから g, $\hat{P}$, K は S^h の外でも意味をもつ。更に $h(x)\gamma G(x)$ も S^h の外で意味をもつ。そこで §5 の $\eta(x)$ として $h(x)\gamma G(x)$, P として $\hat{P}$ と考えたとき上の g は（S 上で定義され）標準関数の条件をみたす。この時の Martin entrance 核は K で Martin entrance 境界の極小な部分は A_e となる。このとき定理5.5と定理5.6より $S\cup A_e$ 上のBorel測度 ν_1 と $h(x)\gamma G(x)$ は

(6.14) $$h(x)\gamma G(x)=\int_{S\cup A_e}K(\xi,x)\,\nu_1(d\xi)\qquad(\forall x\in S)$$

により1対1に対応する。

$\xi\in{}^*S^h$, $y\in S-S^h$ に対しては,

$$K(\xi,y)=\gamma G(y)\tilde{K}(y,\xi)=0$$

だから (6.13) 式はすべての $x\in S$ に対して成立つ。従って (6.14) の対応の一意性から $\nu=\nu_1$.　　(終)

<u>系. 定理6.2で決まる測度 ν に対し $\nu(S\cup A_e)=\nu(S^h\cup A_e^h)=\langle\gamma, h\rangle$ である.</u>

<u>証明</u>　最初の等式は定理の証明から第2の等式は (6.12) の両辺を γ で積分すれば得られる.　　(終)

§7. 再帰連鎖のMartin境界

この節では Kemeny-Snell 及び Orey による既約再帰 Markov 連鎖の Martin 境界に関する結果を §5 及び §6 の立場から考える。P を S 上の既約再帰な推移確率とする。S 上でいたるところ正の P の不変測度の1つを μ とする。第Ⅱ部定理5.3よりその様な μ は存在し定数倍を除いて一意に決まる。$\mathcal{F}$ を，空でない，有限個の点より成る S の部分集合の全体とする。$E\in\mathcal{F}$ に対して,

(7.1) $${}^{E}P(x,y)=\begin{cases}P(x,y) & y\notin E\\ 0 & y\in E,\end{cases}$$

(7.2) $${}_{E}P(x,y)=\begin{cases}P(x,y) & x\notin E\\ 0 & x\in E,\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

とおく．また $({}^EP)^0=({}_EP)^0=I$，${}^EG(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}({}^EP)^n(x,y)$ とおく。特に $E=\{c\}$ の場合 ${}^EP={}^cP$，${}^EG={}^cG$ とおく。${}_EG$，${}_cP$，${}_cG$ も同様にして定義する。

補題7.1. S 上の推移確率 ${}^EP$, ${}_EP$, ${}^cP$ 及び ${}_cP$ はすべて非再帰である．

証明 x を出発し $P[{}^cP]$ を推移確率とする Markov 連鎖 Y_n を定義する測度を $\mathbb{P}_x[{}^c\mathbb{P}_x]$ としそれの集合 E への到達時間を σ^E とすると，第Ⅱ部補題5.2を使えば

$${}^c\mathbb{P}_x\{\sigma^{\{x\}}(\theta,\omega)<\infty\}=\mathbb{P}_x\{\sigma^{\{x\}}(\theta,\omega)<\sigma^{\{c\}}\}<1$$

だから ${}^cP$ は非再帰な推移確率である。また c を含む任意の $E\in\mathbb{F}$ に対して ${}^EG\leqq{}^cG$ だから ${}^EP$ も非再帰である。${}_cP$ 及び ${}_EP$ についても同様にすればよい。

(終)

非再帰の場合 §2 で定義した H^E 及び P^E を再帰連鎖の場合も同様に定義すると，

補題7.2. ${}_EGI_E(x)=H^E1(x)=1$，$\mu I_E{}^EG(x)=\mu(x)$．但し I_E は集合 E の定義関数。

証明 補題7.1の記号を使うと，

$$H^E1(x)=\mathbb{P}_x\{\sigma^E<\infty\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_x\{\sigma^E=n\}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}{}_EP^nI_E(x)={}_EGI_E(x).$$

また P は既約再帰な推移確率だから $H^E1(x)=1$。

後半は，

$${}^EGP(x,y)=\begin{cases}P^E(x,y) & x\in E,\ y\in E\\ {}^EG(x,y)-I(x,y) & x\in E,\ y\notin E\end{cases}$$

だから，

$$\mu I_E{}^EGP(y)=\begin{cases}\sum_{x\in E}\mu(x)P^E(x,y)=\mu(y)=\mu I_E{}^EG(y) & y\in E\\ \sum_{x\in E}\mu(x){}^EG(x,y)=\mu I_E{}^EG(y) & y\notin E.\end{cases}$$

即ち $\mu I_E{}^EG(\cdot)$ は P の不変測度であり，それは E 上で μ と等しいから不変測度の一意性から $\mu I_E{}^EG=\mu$ がいえる．

(終)

補題7.1の第2の等式は Derman-Harris の関係式と呼ばれる．

補題7.2より I_E を標準関数とする ${}_EP$ の Martin entrance 核は ${}_EG$ である．同様に μI_E を標準測度とする ${}^EP$ の Martin exit 核は ${}^EG(x,y)/\mu(y)$ で

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

ある。$I_E[\mu I_E]$を標準関数［標準測度］とする ${}_EP[{}^EP]$ の Martin entrance［exit］境界を ${}_E\mathbb{B}[{}_EA]$ としその極小な部分を ${}_E\mathbb{B}e[{}_E\mathbb{A}e]$ と書く。特に $E=\{c\}$ の場合 ${}_E\mathbb{B}$, ${}_E\mathbb{B}e[{}_E\mathbb{A}, {}_E\mathbb{A}e]$をそれぞ ${}_c\mathbb{B}$, ${}_c\mathbb{B}e[{}_c\mathbb{A}, {}_c\mathbb{A}e]$ と書く。

補題7.3. $E \subseteqq F$ なる集合 E, $F \subset \mathbb{F}$ に対して

$$ {}_EG(x,y) = {}_FG(x,y) + \sum_{z\in F} {}_FG(x,z)({}_EG-I)(z,y) $$

$$ {}^EG(x,y) = {}^FG(x,y) + \sum_{z\in F} ({}^EG-I)(x,z)\,{}^FG(z,y). $$

証明 $\quad {}_EG(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\{Y_n = y,\ n \leqq \sigma^E\}$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\{Y_n = y,\ n\leqq \sigma^F\} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x\{Y_n(\theta_{\sigma^F}\circ\omega) = y,\ n \leqq \sigma^E(\theta_{\sigma^F}\circ\omega)\} $$

$$ = {}_FG(x,y) + H^F({}_EG-I)(x,y) $$

$$ = {}_FG(x,y) + \sum_{z\in F} {}_FG(x,z)({}_EG-I)(z,y). $$

但し Y_n は補題7.2で導入した Markov 連鎖を表わす。後半も同様である。

（終）

補題7.4. 任意の $E \in \mathbb{F}$, $F\in\mathbb{F}$ に対して $S \cup {}_E\mathbb{B}$ から $S\cup {}_F\mathbb{B}$ への恒等写像は同相写像である。この同相写像により ${}_E\mathbb{B}e$ は ${}_F\mathbb{B}e$ に対応する。Martin exit 境界についても同様な事がいえる。

証明 $E\cup F$ を改めて F と考えることによって最初から $E\subseteqq F$ として証明すればよい。いま S の点列 $\{x_n\}$ に対して，すべての $y\in S$ に対し ${}_FG(x_n, y)$ が収束するとすれば補題7.3より，すべての $y\in S$ に対し ${}_EG(x_n, y)$ も収束する。

逆に ${}_EG(x_n, y)$ $(\forall y \in S)$ が収束すると仮定する。この時任意の $y\in F$ に対し ${}_FG(x_n, y)$ が収束する事が云えれば補題7.3より任意の $y\in S$ に対し ${}_FG(x_n,y)$ が収束する事が分る．いま $\{x_n\}$ の2つの部分列 $\{x_{n_1}\}$, $\{x_{n_2}\}$ で $\lim_{n_1\to\infty} {}_FG(x_{n_1}, y) = a_1(y)$, $\lim_{n_2\to\infty} {}_FG(x_{n_2}, y) = a_2(y)$ $(\forall y\in F)$ が存在し，ある $y_0 \in F$ に対し $a_1(y_0) \neq a_2(y_0)$ なるものがあるとする。補題7.3の関係式，

$$ {}_EG(x,y) = \sum_{z\in F} {}_FG(x,z)\,{}_EG(z,y) \qquad y\in F $$

の x に x_{n_1}, x_{n_2} を代入し $n_1\to\infty$, $n_2\to\infty$ とした式の差をとると，

$$ 0 = \sum_{z\in F} (a_1(z) - a_2(z))\,{}_EG(z,y) \qquad \forall y\in F. $$

推移確率 ${}_EP$ に対し §2 と同様に $({}_EP)^F$ を定義し，上の関係式の両辺に $I-({}_EP)^F$ を右から施すと補題2.2より $a_1(y) = a_2(y)$ $(\forall y\in F)$. これは仮定に矛盾する。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

以上より $S\cup_E\mathbb{B}$ と $S\cup_F\mathbb{B}$ は同相である.

次に $\xi\in{}_F\mathbb{B}-{}_F\mathbb{B}_e$ とすると §5 より 2点以上に mass をもつ $S\cup_F\mathbb{B}$ 上の Borel 測度 ν があって,

$$ {}_FG(\xi,y)=\int_{S\cup_F\mathbb{B}}{}_FG(\zeta,y)\nu(d\zeta) \qquad {}^{\forall}y\in S $$

と書ける. 補題 7.2 の両辺を $S\cup_F\mathbb{B}$ まで連続拡張した関係式を ν で積分すると, 既に述べた様に ${}_F\mathbb{B}={}_E\mathbb{B}$ とみなしてよいから,

$$ \int_{S\cup_E\mathbb{B}}{}_EG(\zeta,y)\nu(d\zeta) $$

$$ =\int_{S\cup_F\mathbb{B}}{}_FG(\zeta,y)\nu(d\zeta)+\sum_{z\in F}\int_{S\cup_F\mathbb{B}}{}_FG(\zeta,z)\nu(d\zeta)\ ({}_EG-I)(z,y) $$

$$ ={}_FG(\xi,y)+\sum_{z\in F}{}_FG(\zeta,z)({}_EG-I)(z,y) $$

$$ ={}_EG(\xi,y)\ . $$

従って $\xi\notin{}_E\mathbb{B}_e$ である.

Martin exit 境界についても同様にすればよい。 (終)

補題より ${}_E\mathbb{B}$, ${}_E\mathbb{B}_e$ は E に無関係とみなしてよいからそれらをそれぞれ $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}_e$ と書く。又同様に ${}_E\mathbb{A}$, ${}_E\mathbb{A}_e$ の代りに $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}_e$ と書く。

(7.3) $\mathfrak{M}_x=\{\eta;\ \eta(x)=0,\ \eta\geqq 0,\ \eta P(\cdot)=\eta+I(x,\cdot)$ なる測度$\}$

(7.4) $\mathfrak{M}^*_x=\{h;\ h(x)=0,\ h\geqq 0,\ Ph=h+I(\cdot,x)$ なる関数$\}$,

とおく。容易に分る様に,

<u>補題 7.5.</u> $\mathfrak{M}_x=\{\eta;\ \eta(x)=0,\ \eta+I(x,\cdot)$ は ${}_xP$-不変測度$\}$
$\mathfrak{M}^*_x=\{h;\ h(x)=0,\ h+I(\cdot,x)$ は ${}^xP$-調和関数$\}$

<u>である。</u>

$$ \mathcal{N}=\{\nu;\ 台が有限集合,\ \langle\nu,1\rangle=1\} $$
$$ \mathcal{N}^*=\{f;\ 台が有限集合,\ \langle\mu,f\rangle=0\}, $$

とおき核 A に対して,

(s) $A(P-I)=I$

(s^*) $(P-I)A=I$

(p) $A\geqq 0$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

(b)　任意の$\nu \in \mathcal{N}$ に対し $|\nu A| \leqq c_\nu \mu$ なる定数が存在する。

(b*)　任意の$f \in \mathcal{N}^*$ に対し Af は有界である。

(w)　任意の$\nu \in \mathcal{N}$ に対して $\nu A(P-I) = \nu$.

(w*)　任意の$f \in \mathcal{N}^*$ に対して $(P-I)Af = f$.

なる条件を考える。

第Ⅱ部定理6.1系よりAが(w)と(b)［または(w*)と(b*)を満足するとき$c \in S$に対して，

$$(7.5)\qquad A(x,y) = -{}_cG(x,y) + h(x)\frac{\mu(y)}{\mu(c)} + \pi(y) + I(c,y)$$

$$= -{}^cG(x,y) + (h(x) + I(c,y))\frac{\mu(y)}{\mu(c)} + \pi(y),$$

と書ける．ここにh, πはそれぞれS上の関数と測度である．今後は特に$h(c) = A(c,c) = \pi(c)$ となるh, πを考える事にする．このとき$h(x) = A(x,c)$, $\pi(x) = A(c,y)$となる。

補題7.6. 上の$\pi[h]$に対し$\pi P = \pi + I(c,\cdot)\,[Ph = h + I(\cdot,c)]$ が成立つためにはAは(s)［(s*)］ をみたすことが必要十分である。

証明
$$cGP(x,y) = cG_cP(x,y) + P(c,y)$$
$$= {}_cG(x,y) - I(x,y) + P(c,y)$$

より，

$$AP(x,y) = -cGP(x,y) + \pi P(y) + P(c,y) + \frac{h(x)}{\mu(c)}\mu P(y)$$
$$= A(x,y) + I(x,y) + \pi P(y) - (I(y) + I(c,y)).$$ (終)

そこでいま$\pi \in \mathfrak{M}_c$とすると補題7.4より$I(c,\cdot) + \pi$ は ${}_cP$-不変測度だから approximate ${}_cP$-chain $(X, -\infty, \beta)$ が存在して，

$$(7.6)\qquad I(c,x) + \pi(x) = E[\sum_{-\infty < n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n)]$$

と書ける．$(X, -\infty, \beta)$ の有限集合Eへの到達時間をσ^E, X_{σ^E}の分布を ${}_c\mu^E$ とすると

$$(7.7)\qquad I(c,x) + \pi(x) = {}_c\mu^E{}_cG(x) \qquad \forall x \in E$$

この関係式より，

$$(7.8)\qquad {}_c\mu^E(x) = (I(c,\cdot) + \pi)(I - {}_cP^E)(x).$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

特に(7.7)式で $x=c$ とすると，$\pi\in\mathfrak{M}_c$ より，${}_c\mu^E(S)=1$ 。

補題7.7. Aを(7.5)式で表わしたとき $\pi\in\mathfrak{M}_c$ ならば

$$A(I-P^E)(x,y)=-I(x,y)+{}_c\mu^E(y) \qquad x\in E,\ y\in E.$$

証明　$x\neq c$，$c\in E$のとき ${}_cP^E(x,y)=P^E(x,y)$ だから

$$\begin{aligned}{}_cG(I-P^E)(x,y)&={}_cG(I-{}_cP^E)(x,y)-P^E(c,y)\\&=I(x,y)-P^E(c,y).\end{aligned}$$

$$(\pi+I(c,\cdot))(I-P^E)(y)={}_c\mu^E{}_cG(I-P^E)(y)={}_c\mu^E(y)-P^E(c,y).$$

従って(7.5)式に右から $(I-P^E)$を施すと，μが P^E に関し不変測度であることに注意すると結果がいえる．　(終)

定理7.1. $A(x,x)=0$ ($\forall x\in S$) なる核Aが(s)，(p)，(b)を満足するならば B_e 上のxに無関係な確率Borel測度νが，

$$(7.9)\qquad A(x,y)=\int_{B_e}{}_xG(\xi,x)\,\nu(d\xi)-I(x,y)$$

をみたすように一意にとれる．

証明　補題7.6より $(A+I)(I-{}_xP^E)(x,y)={}_c\mu^E(y)$ $(x\in E,\ y\in E)$ だから $x\in E$，$c\in E$のとき ${}_c\mu^E={}_x\mu^E$. 従って $E\uparrow S$としたときの ${}_c\mu^E$ の弱極限値をνとするとνはcに無関係で，定理5.5，5.6より任意の $x\in S$ に対して，

$$A(x,y)+I(x,y)=\int_{S\cup B_e}{}_xG(\xi,y)\,\nu(dy).$$

更にAは(s)をみたすから $A(x,\cdot)\in\mathfrak{M}_x$. 従って$\nu$は$S$上に mass をもたない。　(終)

補題7.8. ${}_zG(x,y)\leqq\dfrac{\mu(y)}{\mu(x)}\,{}_zG(x,x)$.

証明　${}_z\hat P(x,y)=\dfrac{\mu(y)}{\mu(x)}\,{}_zP(y,x)$，${}_z\hat G(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}({}_z\hat P)^n(x,y)$ とおいたとき ${}_z\hat G(x,y)\leqq{}_zG(y,y)$ より明らか。　(終)

補題7.9. $|{}_cG(x,y)-{}_{c'}G(x,y)|\leqq C_{c,c'}\,\mu(y)$.

証明　補題7.2より，

$$|{}_cG(x,y)-{}_{c'}G(x,y)|=|{}_{\{c,c'\}}G(x,c')\{{}_cG(c',y)-I(c',y)\}$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$-{}_{\{c,c'\}}G(x,c)\{{}_{c'}G(c,y)-I(c,y)\}|$$
$$\leqq {}_{c}G(c',y)+{}_{c'}G(c,y)+I(c',y)+I(c,y)$$
$$\leqq \left(\frac{{}_{c}G(c',c')}{\mu(c')}+\frac{{}_{c'}G(c,c)}{\mu(c)}+\frac{1}{\mu(c')}+\frac{1}{\mu(c)}\right)\mu(y)\text{。}$$

但し初めの不等式は ${}_{\{c,c'\}}G(x,c)\leqq 1$, ${}_{\{c,c'\}}G(x,c')\leqq 1$ を，最後の不等式は補題7.8を使った。 (終)

定理7.2. 核Aが(7.9)で表わせるならばAは(s)，(p)，(b)，$A(x,x)=0$ $(^{\forall}x\in S)$ を満足する.

証明 (7.9)の右辺は非負，$A(x,x)=0$，(s)を満足することは補題7.5に注意すれば明らか．また(b)をみたすことは補題7.8より台が2点の測度に対しては成立ち一般の$\mathcal{M}$の元はその様な測度の有限和で書けるから成立つ．(終)

結局Aが(s)，(p)，(b)，$A(x,x)=0$ $(^{\forall}x\in S)$ をみたすためにはAが(7.9)式の様に書ける事が必要十分である事が分った。同様にすると

定理7.3. Aが(s^{*})，(p)，(b^{*})，$A(x,x)=0$ $(^{\forall}x\in S)$ を満足するためにはyに無関係なA_e上の確率Borel測度νが一意に存在して，

$$A(x,y)=\mu(y)\int_{A_e}{}_{y}K(x,\xi)\,\nu(d\xi)-I(x,y) \tag{7.10}$$

と書ける事が必要十分である．但し${}_{y}K$は$\mu(y)I(y,\cdot)$を標準測度とする${}^{y}P$のMartin exit核。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

第 Ⅳ 部

再帰連鎖のPOTENTIAL核

大 島 洋 一

第Ⅳ部は2つの部分よりなる．第1は第Ⅱ部，第2章で提示されている問題において第Ⅱ部で未解決であった部分についてその後一つの結果が得られたのでそれについて述べる。第2章では *Kemeny, Snell* [3] の第9章8節，9節に相当する *potential* 原理について，弱 *potential* 核の場合に考察する。この部における記号及び用語は断らない限り第Ⅱ部に従うことにする．

第1章　再帰連鎖の特徴づけ

この章では第Ⅱ部第2章で与えられた次の問題について考える．

可算空間 S 上いたる所正の測度 μ と（$R.R.M.P$）を満足する S 上の核（正とは限らない）G が与えられたとき，μ を不変測度，G を弱 *potential* 核とする既約再帰な *Markov* 核が存在するための必要十分条件は何か？

その問に対して一般に（$R.R.M.P$）だけの条件では不十分である事が知られている(注1) そこで更に条件 $(R.N)_c$ （第2節）を導入する。そうして（μ, G）が（$R.R.M.P$）とすべての $c \in S$ に対して $(R.N)_c$ を満足する事が上記の性質をもつ *Markov* 核が存在するための必要十分条件である事を証明する。

§1.　再帰連鎖の性質

P を S 上の既約再帰即ち，S の任意の元 x, y に対して $\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, y) = \infty$ なる *Markov* 核とする．c を S の1つの元としたとき S 上の *sub-Markov* 核 ${}^cP$(注2)

(注1) 近藤 [4]，渡辺(毅) による例がある．　(注2) 第Ⅲ部で導入した記号と違う．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

を

$$(1.1)\qquad {}^cP(x,y)=\begin{cases} P(x,y) & x\neq c,\ y\neq c \\ 0 & x=c \text{ または } y=c \end{cases}$$

とおきこれによって

$$(1.2)\qquad {}^cG(x,y)=\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}({}^cP)^n(x,y) & x\neq c,\ y\neq c \\ 0 & x=c \text{ または } y=c \end{cases}$$

と定義する．第Ⅲ部補題7.1と同様に ${}^cP$ は非再帰な sub-Markov 核である．P の正の不変測度を μ とする．これは第Ⅱ部定理5.3より必ず存在し，しかも定数倍を除くと一意である．S 上の，台が有限個の点より成る関数の全体を M，$N=\{f\in M;\ \langle\mu,f\rangle=0\}$ とおく．S 上の核（非負とは限らない）G が，任意の $f\in N$ に対し Gf が有界，$(I-P)Gf=f$ を満足するとき G を P に関する弱 potential 核(注)という．G を P に関する弱 potential 核とすると G は第Ⅱ部（6.3）式即ち，

$$(1.3)\qquad Gf={}^cGf+Gf(c)\qquad f\in N$$

と表わすことが出来る．この式に於ける $f\in N$ を特に

$$(1.4)\qquad f(x)=\begin{cases} \dfrac{\mu(y)}{\mu(c)} & x=c \\ -1 & x=y \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

とおき $Gf(x)-Gf(c)$ を計算すると，

$$(1.5)\qquad {}^cG(x,y)=G(x,y)-G(c,y)-\big(G(x,c)-G(c,c)\big)\frac{\mu(y)}{\mu(c)}\ .$$

（1.5）式によって弱 potential 核 G と ${}^cG$ の関係が分る．${}^cG$ は非再帰な sub-Markov 核 ${}^cP$ から決まる potential 核だから

<u>補題 1.1. ${}^cG(x,y)\leqq{}^cG(y,y)$, ${}^cG(x,y)\leqq C_x\cdot\mu(y)$,</u>
<u>但し C_x は x に関係する定数．</u>

<u>証明</u> ${}^cG(x,y)={}^cH^{\{y\}}(x,y)\,{}^cG(y,y)\leqq{}^cG(y,y)$．

(注) 第Ⅱ部では作用素としてやったが第Ⅳ部では核として考える．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

但し ${}^cH^E$ は sub-Markov 核 ${}^cP$ で定義された集合 E の調和測度。後半は ${}^c\hat{P}(x, y) = \frac{\mu(y)}{\mu(x)} {}^cP(y, x)$ とおくと ${}^c\hat{P}$ も非再帰な sub-Markov 核だから ${}^c\hat{G} = \sum_{n=0}^{\infty} ({}^c\hat{P})^n$ とに対して

$$ {}^cG(x, y) = \frac{\mu(y)}{\mu(x)} {}^c\hat{G}(y, x) \leqq \frac{{}^c\hat{G}(x, x)}{\mu(x)} \mu(y) . \qquad (終) $$

次の最大値原理を考える。

(R.R.M.P) $f \in \mathbb{N}$ と実数 a に対して $\{f > 0\} \neq \phi$ 上で $Gf \leqq a$ であれば S 上でいたるところ $Gf \leqq a - f^-$ である。

第II部定理6.3で証明された事を再録しておくと，

補題 1.2. G が P に関する弱 potential 核ならば G は (R.R.M.P) を満足する。

この章の序文で書いた様に逆の構成問題を考えるときは，G が (R.R.M.P) を満足するという条件だけではそれに対する既約再帰な Markov 核 P の構成は出来ない。そこで上記 ${}^cG$ についてもう少し考察する。${}^cS = S - \{c\}$ とおくと ${}^cP$ は ${}^cS$ 上の sub-Markov 核とみなす事が出来る。この節では今後 ${}^cS$ 上で考える事にする。${}^cS$ の任意の部分集合 E と任意の ${}^cP$ に関し超過的な関数 ${}^ch$ に対して第II部定理0.1系より ${}^ch$ の E 上への réduite ${}^cH^E {}^ch$ が定義できる．${}^cH^E {}^ch$ は E 上で ${}^ch$ より大な ${}^cP$ に関する超過的関数であり，またその様な超過的関数の中で最小である。$\mathbb{M}$ の関数を ${}^cS$ に制限したもの全体を ${}^c\mathbb{M}$ とする。${}^cG$ は非再帰な potential 核であるから第II部定理1.2より任意の $f \in {}^c\mathbb{M}$, $f \geqq 0$ なる関数 f と $B_n \downarrow \phi$ $(n \to \infty)$ なる ${}^cS$ の任意の集合列に対して，

$$ \lim_{n \to \infty} {}^cH^{B_n} {}^cGf = 0 \qquad (1.6) $$

が成立つ。Meyer (第II部) は非再帰な Markov 核の構成問題に於いて上記の性質に注意して条件を導いている．

我々の場合 ${}^cP$ は単に非再帰であるという以上に既約再帰な Markov 核から (1.1) 式で定義されたものであるから更に強い事がいえる．${}^c1$ を ${}^cS$ の各点で値1をとる関数とすると

定理 1.1. ${}^cS$ 上の非負関数 ${}^cf$ が存在して，

$$ {}^c1 = {}^cG {}^cf \qquad (1.7) $$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

と書ける。

証明　任意の$x\in {}^cS$に対して

$$1=\sum_{k=0}^{n}({}^cP)^k({}^c1-{}^cP{}^c1)(x)+{}^cP^{n+1}\,{}^c1(x)$$
$$={}^cG({}^c1-{}^cP{}^c1)(x)+\lim_{n\to\infty}({}^cP)^{n+1}\,{}^c1(x)$$

$({}^c1-{}^cP{}^c1)(x)\geqq 0$だから上記の極限移行が可能な事は明らかである。また第2項はPを推移確率とするMarkov連鎖の点xへの到達時間をσ^xとすると，Pが既約再帰だから，

$$\lim_{n\to\infty}({}^cP)^{n+1}\,{}^c1(x)=\lim_{n\to\infty}P_x\{\sigma^c>n+1\}=0.$$ (終)

系　$B_n\downarrow\emptyset$なる${}^cS$の任意の集合列$\{B_n\}_{n\geqq1}$に対して，

(1.8) $$\lim_{n\to\infty}{}^cH^{B_n}\,{}^c1=0.$$

証明は定理1.1と第Ⅱ部定理1.2から明らかである。

上記(1.7)或は(1.8)の性質が非再帰の場合の(1.6)に代る再帰Markov核の構成に重要な役割を果す事が後で示す様に分る。

§2. (R.R.M.P)をみたす核Gの性質

この節ではS上の正の測度μと核Gが与えられているとする。このμに対して$\mathcal{N}$を§1と同様に定義する。更にこの節ではGは上で定義した$\mathcal{N}$の元に対して最大値原理(R.R.M.P)を満足しているとする。cをSの元とし，${}^cG$を(1.5)の右辺で定義する。この定義から明らかに${}^cG(x,c)={}^cG(c,x)=0$ ($\forall x\in S$)である。${}^cS$, $\mathcal{M}$, ${}^c\mathcal{M}$を§1と同様に定義する。また今後集合，関数及び核の左肩にcを書いた場合は常に${}^cS$上で考えたものとする。

補題2.1.　${}^cS$の任意の元x,yに対して，

(2.1) $$I(x,y)\leqq {}^cG(x,y)\leqq {}^cG(y,y).$$

証明　fを(1.4)式で定義すると，

$$Gf(c)=G(c,c)\frac{\mu(y)}{\mu(c)}-G(c,y)$$
$$Gf(y)=G(y,c)\frac{\mu(y)}{\mu(c)}-G(y,y).$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

従って，f と $(-f)$ に $(R.R.M.P)$ を適用すれば，

$$G(y,c)\frac{\mu(y)}{\mu(c)} - G(y,y) + f^{+}(x) \leqq Gf(x)$$

$$\leqq G(c,c)\frac{\mu(y)}{\mu(c)} - G(c,y) - f^{-}(x) .$$

但し $f^{+} = f \vee 0$, $f^{-} = (-f) \vee 0$. $f^{+} \geqq 0$, $f^{-}(x) = I(x,y)$ であるから

$$G(y,c)\frac{\mu(y)}{\mu(c)} - G(y,y) \leqq G(x,c)\frac{\mu(y)}{\mu(c)} - G(x,y)$$

$$\leqq G(c,c)\frac{\mu(y)}{\mu(c)} - G(c,y) - I(x,y) .$$

両辺に -1 をかけ，$G(c,c)\frac{\mu(y)}{\mu(c)} - G(c,y)$ を加えると，

$$G(y,y) - G(c,y) - (G(y,c) - G(c,c))\frac{\mu(y)}{\mu(c)} \geqq G(x,y) - G(c,y)$$

$$-(G(x,c) - G(c,c))\frac{\mu(y)}{\mu(c)} \geqq I(x,y) .$$ (終)

<u>補題 2.2.</u> <u>${}^{c}S$ の任意の元 x に対して定数 C_x が存在して，</u>

(2.2) $${}^{c}G(x,y) \leqq C_x \mu(y) \qquad {}^{\forall} y \in {}^{c}S .$$

<u>証明</u>

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\mu(y)}{\mu(x)} & z = x \\ -1 & z = y \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

とおくと $(R.R.M.P)$ より $Gf(c) \leqq Gf(x)$ だから

$$G(c,x)\frac{\mu(y)}{\mu(x)} - G(c,y) \leqq G(x,x)\frac{\mu(y)}{\mu(x)} - G(x,y) .$$

この式の両辺に $G(c,c)\frac{\mu(y)}{\mu(c)} - G(x,c)\frac{\mu(y)}{\mu(c)}$ を加えると ${}^{c}G$ の定義より

$${}^{c}G(x,y) \leqq \left(\frac{G(c,c)}{\mu(c)} - \frac{G(x,c)}{\mu(c)} + \frac{G(x,x)}{\mu(x)} - \frac{G(c,x)}{\mu(c)} \right) \mu(y) .$$ (終)

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

定理2.1. 核 ${}^cG$ は (R.M.P)[注] を満たす。

証明 aを非負定数, ${}^cf\in{}^cM$ とし $\{{}^cf>0\}$ 上で ${}^cG{}^cf\leqq a$とする。

$$(2.3)\qquad f(x)=\begin{cases} {}^cf(x) & x\in{}^cS \\ -\sum_{y\in{}^cS}\dfrac{\mu(y)}{\mu(c)}\,{}^cf(y) & x=c\ , \end{cases}$$

とおくと $f\in N$. ${}^cG$ の定義により $x\neq c$ のとき ${}^cG{}^cf(x)=Gf(x)-Gf(c)$ と書けるから $\{f>0\}\subseteqq\{{}^cf>0\}\cup\{c\}$ に注意すれば仮定より $\{f>0\}$ 上で

$$Gf\leqq a+Gf(c)$$

従って (R.R.M.P) より S上で到るところ,

$$Gf\leqq a+Gf(c)-f^-.$$

${}^cS$ 上に制限すれば ${}^cG{}^cf\leqq a-{}^cf^-$ だから (R.M.P) が成立つ. (終)

${}^cS$ 上の非負関数 ${}^ch$ が ${}^cf\in{}^cM$ に対し $\{{}^cf>0\}$ 上で ${}^cG{}^cf\leqq{}^ch$ ならば ${}^cS$ 上で ${}^cG{}^cf\leqq{}^ch-{}^cf^-$ なる性質をもつとき第II部により準超過的関数とよばれる. 第II部定理2.3より任意の準超過的関数 ${}^ch$ と ${}^cS$ の任意の部分集合${}^cE$に対して, *pseudo-reduite* ${}^cH^{{}^cE}\,{}^ch$ が定義できる. ${}^cH^{{}^cE}\,{}^ch$ は ${}^cE$ 上で${}^ch$より大なる準超過的関数の中で最小のものである。

非再帰の構成問題の場合第II部§3で導入した条件(N)が重要な役割を果した。再帰の場合もそれに相当する条件$(R.N)_c$を次に導入し$(R.N)_c$が前節(1.8)に相当するという事を示す.

$(R.N)_c$: 次の2条件を満足するSに増加する有限集合の列 $\{E_n\}_{n\geqq1}$ $(c\in E_n,\ \forall n)$ とSの関数列 $\{h_n\}_{n\geqq1}$ が存在する.

(i) $0\leqq h_n\leqq1,\quad h_n(c)=0,\quad S-E_n$上で $h_n=1,\quad \lim_{n\to\infty}h_n=0.$

(ii) 任意の $f\in N$ と $Gf(c)\leqq a$ なる任意の実数aに対して, $\{f>0\}$上で $Gf\leqq a+h_n$ならば ${}^cS$ 上到るところ $Gf\leqq a+h_n-f^-$.

定理2.2. Gが条件$(R.N)_c$を満足するためには ${}^cS$ に増加する有限集合の列 $\{{}^cE_n\}_{n\geqq1}$ を,

$$(2.4)\qquad \lim_{n\to\infty}{}^cH^{{}^cS-{}^cE_n}\,{}^c1=0$$

(注) 第II部§2参照.

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

を満足する様に取れる事が必要十分である.

証明　G が条件 $(R.N)_c$ を満足すると仮定する. $\{E_n\}_{n\geqq 1}$, $\{h_n\}_{n\geqq 1}$ を $(R.N)_c$ に於ける集合列, 関数列とする. ${}^cE = E_n \cap {}^cS$, h_n を ${}^cS$ へ制限した関数を ${}^ch_n$ とすると明らかに, $0 \leqq {}^ch_n \leqq 1$, ${}^cS - {}^cE_n = S - E_n$ 上で ${}^ch_n = 1$. 更に ${}^ch_n$ は準超過的関数である. なぜならば, ${}^cf \in {}^cM$ に対して $\{{}^cf > 0\}$ 上で ${}^cG{}^cf \leqq {}^ch_n$ とする. ${}^cf$ に対して $f \in N$ を (2.3) によって定義すると, $\{f>0\} \subseteqq \{{}^cf > 0\} \cup \{c\}$ だから集合 $\{f > 0\}$ 上で $Gf \leqq h_n + Gf(c)$ である. 従って $(R.N)_c$ より ${}^cS$ 上到るところ $Gf \leqq h_n + Gf(c) - f^-$ 即ち, ${}^cS$ 上で到るところ ${}^cG{}^cf \leqq {}^ch_n - {}^cf^-$. 故に ${}^ch_n$ は準超過的関数である. *Pseudo-réduite* の定義から ${}^cH^{{}^cS-{}^cE_n}{}^c1$ はその様な準超過的関数の中で最小だから ${}^cH^{{}^cS-{}^cE}{}^c1 \leqq {}^ch_n$. 従って (2.4) が成立つ.

逆に (2.4) が成立つ集合列 $\{{}^cE_n\}_{n\geqq 1}$ があるとする. ${}^cE_n \cup \{c\} = E_n$,

$$h_n(x) = \begin{cases} {}^cH^{{}^cS-{}^cE_n}{}^c1(x) & x \in {}^cS \\ 0 & x = c \end{cases}$$

とおいたとき (ii) を証明すれば他は明らか. $f \in N$ と実数 $\alpha (\geqq Gf(c))$ に対して $\{f > 0\}$ 上で $Gf \leqq m + h_n$ が成立っているとすれば $\{{}^cf > 0\}$ 上で,

$${}^cG{}^cf \leqq m - Gf(c) + {}^cH^{{}^cS-{}^cE_n}{}^c1$$

である. ここに ${}^cf$ は f の ${}^cS$ への制限を表わす. 第II部定理 2.3 系 1 より ${}^c\varphi_k \in {}^cM$, ${}^c\varphi_k \geqq 0$, ${}^cG{}^c\varphi_k \uparrow {}^cH^{{}^cS-{}^cE_n}{}^c1$ $(k\uparrow\infty)$ なる関数 ${}^c\varphi_k$ が取れる. $\{{}^cf > 0\}$ は有限集合だから任意の $\varepsilon > 0$ に対して k_0 を十分大きくとると $k \geqq k_0$ なる任意の k に対して $\{{}^cf > 0\}$ 上で

$${}^cG{}^cf \leqq m + \varepsilon - Gf(c) + {}^cG{}^c\varphi_k \quad .$$

第II部例 2.2 より上式の右辺は準超過的関数であるから ${}^cS$ 上到る所で

$${}^cG{}^cf \leqq m + \varepsilon - Gf(c) + {}^cG{}^c\varphi_k - {}^cf^- \leqq m + \varepsilon - Gf(c) + {}^cH^{{}^cS-{}^cE_n}{}^c1 - {}^cf^- .$$

ε は任意だから $(R.N)_c$ が成立つ.　　　　　　　　　　　　(終)

系. μ が有界測度ならば G は $(R.N)_c$ を満足する.

証明　(2.4) 式が成立つ事をいえばよい. $\{{}^cE_n\}_{n\geqq 1}$ を ${}^cS$ に増加する任意の有限集合列とする. 補題 2.1 より集合 ${}^cF_n = {}^cS - {}^cE_n$ 上で ${}^cGI_{{}^cF_n} \geqq {}^c1$. 但し $I_{{}^cF_n}$ は集合 ${}^cF_n$ の定義関数. 言い換えると ${}^cGI_{{}^cF_n}$ は ${}^cF_n$ 上で ${}^c1$ より大きい準超過的関数 (第II部例 2.2 参照) だから *pseudo-réduite* の定義より ${}^cGI_{{}^cF_n} \geqq {}^cH^{{}^cF_n}{}^c1$. また補題 2.2 を使えば

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$ {}^cH^{{}^cF_n}\,{}^c1(x) \leqq {}^cG\, I_{{}^cF_n}(x) \leqq c_x \sum_{y\in {}^cF_n} \mu(y). $$

$n\to\infty$ とすると $\langle \mu, 1\rangle < \infty$ だから

$$ \lim_{n\to\infty} {}^cH^{{}^cF_n}\,{}^c1 = 0. $$

(終)

§3. 再帰連鎖の特徴づけ

§1で注意した様に，Gが既約再帰Markov核Pの弱potential核，μがPの不変測度ならばGとμは（R.R.M.P）及び$(R.N)_c$を満足する。この節では逆の構成問題を考える。§2と同様，今後この節では断らない限りGは（R.R.M.P）と任意の$c\in S$に対して$(R.N)_c$を満足すると仮定する。この時§2で述べた議論はすべて成立つから，記号は断りなしに§2の記号を用いる。

補題3.1. 任意の$c\in S$に対して

$$ {}^cG(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^cP^n(x,y) \qquad \forall x\in {}^cS, \quad \forall y\in {}^cS \tag{3.1} $$

を満足する ${}^cS$ 上の非再帰sub-Markov核 ${}^cP$ が唯1つ存在する。

証明 第Ⅱ部定理3.1より任意の$c\in S$に対して${}^cG$が（R.M.P）と条件(N)[注]を満足することを云えばよい。

（R.M.P）を満足する事は定理2.1で証明した。(N)を証明する。初めに${}^cB_n \downarrow \phi$ $(n\to\infty)$ なる集合列に対し，${}^cS-{}^cB_n$が有限集合である場合。任意の ${}^cf \in {}^c\mathbb{M}^+$, ${}^cf \geqq 0$ なる関数 ${}^cf$ の台をEとするとEは有限集合だからある定数Cに対し，

$$ {}^cG\,{}^cf(x) \leqq (\max {}^cf) \sum_{y\in E} {}^cG(y,y) \leqq C \qquad \forall x\in {}^cS $$

と出来る。従って条件$(R.N)_c$と定理2.2より，

$$ \lim_{n\to\infty} {}^cH^{{}^cB_n}\,{}^cG\,{}^cf \leqq \lim_{n\to\infty} C\,{}^cH^{{}^cB_n}\,{}^c1 = 0. $$

一般の${}^cB_n\downarrow\phi$ なる集合列に対しては ${}^cS-{}^cB'_n$ が有限集合で ${}^cB_n \subseteqq {}^cB'_n$ なる集合を取れば，

$$ {}^cH^{{}^cB_n}\,{}^cG\,{}^cf \leqq {}^cH^{{}^cB'_n}\,{}^cG\,{}^cf $$

だから上の場合に帰着される。

(終)

(注) §1，(1.6)式の事である（第Ⅱ部§3参照）。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

補題3.2. 任意の $c \in S$ に対して，

(3.2) $$\sum_{x \neq c} \mu(x)\,{}^cP(x,y) \leqq \mu(y) \qquad \forall y \in {}^cS.$$

証明 成り立たないと仮定する。即ちある点 $y_0 \in {}^cS$ に対して $\sum_{x \neq c} \mu(x)\,{}^cP(x, y_0) - \mu(y_0) > 0$ とすると y_0 を含む有限集合 ${}^cE$ を，$\sum_{x \in {}^cE} \mu(x)\,{}^cP(x, y_0) - \mu(y_0) = a > 0$ となるように取れる。$\mathcal{N}$の元 f を，

$$f(x) = \begin{cases} {}^cP(x, y_0) - I(x, y_0) & x \in {}^cE \\ -\dfrac{a}{\mu(c)} & x = c \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とおく。(R.R.M.P) より $Gf + f^-$ が最大値をとる点が集合 $\{f > 0\}$ の中に少くとも1つ存在する。即ち，

$$Gf(x) + f^-(x) \leqq Gf(x_0) \qquad \forall x \in S$$

なる点 $x_0 \in E$ が取れる。上式で特に $x = c$ とおくと，

$${}^cG(-{}^cf)(x_0) = Gf(c) - Gf(x_0) \leqq -\frac{a}{\mu(c)} < 0.$$

但し ${}^cf$ は f の ${}^cS$ への制限．他方

$$\begin{aligned} {}^cG(-{}^cf)(x_0) &= {}^cG(x_0, y_0) - \sum_{z \in {}^cE} {}^cG(x_0, z)\,{}^cP(z, y_0) \\ &\geqq {}^cG(x_0, y_0) - ({}^cG(x_0, y_0) - I(x_0, y_0)) \\ &= I(x_0, y_0) \geqq 0. \end{aligned}$$

これは矛盾である。 (終)

補題3.3. 任意の $c \in S$ に対して，

(3.3) $${}^cG({}^c1 - {}^cP\,{}^c1) = {}^c1.$$

証明 任意の自然数 n に対して，

$${}^c1 = \sum_{k=0}^{n} {}^cP^k({}^c1 - {}^cP\,{}^c1) + {}^cP^{n+1}\,{}^c1.$$

$n \uparrow \infty$ とすると右辺の第1項は単調増加だから $\lim_{n \to \infty} {}^cP^n\,{}^c1(x) = \gamma(x)$ が存在して，

$$1 = {}^cG({}^c1 - {}^cP\,{}^c1)(x) + \gamma(x).$$

$\gamma(x) = 0$ を云えばよい。条件 $(R.N)_c$ より任意の正数 ε に対して $N(x)$ を十分

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

大きく取れば $n \geqq N(x)$ のとき,

$$ {}^cH^{{}^cS-{}^cE_n}\,{}^c1(x) < \varepsilon $$

となる. ${}^cH^{{}^cS-{}^cE_n}\,{}^c1$ は非再帰 sub-Markov 核 ${}^cP$ から作られる, ${}^c1$ の集合 ${}^cS-{}^cE_n$ への réduite である(第II部定理2.3の後の注意参照)事から

$$ {}^cP^m I_{{}^cS-{}^cE_n}(x) \leqq {}^cH^{{}^cS-{}^cE_n}\,{}^c1(x) \qquad (\forall m). $$

従って,

$$ \begin{aligned} {}^cP^{m+1}\,{}^c1(x) &= {}^cP^{m+1} I_{{}^cS-{}^cE_n}(x) + {}^cP^{m+1} I_{{}^cE_n}(x) \\ &\leqq {}^cH^{{}^cS-{}^cE_n}\,{}^c1(x) + {}^cP^{m+1} I_{{}^cE_n}(x) \end{aligned} $$

$m \to \infty$ とすると, ${}^cP$ は非再帰, ${}^cE_n$ は有限集合であるから,

$$ \gamma(x) \leqq \varepsilon . $$

(終)

補題3.4. 任意の $c \in S$ に対して,

$$ (3.4) \qquad \sum_{x \in {}^cS} \mu(x)({}^c1 - {}^cP\,{}^c1)(x) \leqq \mu(c). $$

証明 ${}^cE$ を ${}^cS$ の任意の有限部分集合とし, $f \in N$ を,

$$ f(x) = \begin{cases} 1 - {}^cP\,{}^c1(x) & x \in {}^cE \\ -\sum_{y \in {}^cE} \dfrac{1}{\mu(c)} \mu(y)(1 - {}^cP\,{}^c1)(y) & x = c \\ 0 & \text{その他} \end{cases} $$

とおく. 補題3.2の証明で注意した様に $x_0 \in {}^cE$ を $Gf(x) + f^-(x) \leqq Gf(x_0)$ $(\forall x \in S)$ となる様に選べる. 特に $x = c$ とおくと,

$$ \begin{aligned} {}^cG\,{}^cf(x_0) &= Gf(x_0) - Gf(c) \geqq f^-(c) \\ &= \sum_{y \in {}^cE} \frac{1}{\mu(c)} \mu(y)(1 - {}^cP\,{}^c1)(y). \end{aligned} $$

補題3.3より上式の右辺は 1 で押えられるから結果が成立つ. (終)

補題3.5. $\sum_{x \neq c} (\mu(x) - \mu\,{}^cP(x)) \leqq \sum_{x \neq c} \mu(x)(1 - {}^cP\,{}^c1(x))$.

証明 $\mu(x) = \sum_{k=0}^{n} (\mu - \mu\,{}^cP)\,{}^cP^k(x) + \mu\,{}^cP^{n+1}(x)$ に於て, $n \to \infty$ とすると

$\mu(x) \geqq (\mu - \mu\,{}^cP)\,{}^cG(x)$ $(\forall x \in {}^cS)$. 従って補題3.3の両辺に $(\mu - \mu\,{}^cP)(x)$ をかけ $x \in {}^cS$ について加えればよい. (終)

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

補題 3.6. Sの任意の元 c, c', x, y に対して,

$$(3.5)\qquad {}^{c'}G(x,y) = {}^{c}G(x,y) + {}^{c'}G(c,y) - \frac{\mu(y)}{\mu(c')}\,{}^{c}G(x,c')$$

$$= {}^{c}G(x,y) + \frac{\mu(y)}{\mu(c)}\,{}^{c'}G(x,c) - {}^{c}G(c',y)\ .$$

証明 ${}^{c}G$ の定義より任意の $f \in N$ に対して,

$${}^{c'}Gf(x) = Gf(x) - Gf(c') = {}^{c}Gf(x) + {}^{c'}Gf(c)\ .$$

ここで

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = y \\ -\dfrac{\mu(y)}{\mu(c')} & x = c' \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

を代入すると (3.5)の第1の等式が得られる。第2の等式は第1の等式で c と c' を入れ換えればよい。 (終)

補題 3.7. c, c' を S の任意の異る2点とすると,

$$(3.6)\qquad {}^{c'}P(x,y) = \begin{cases} {}^{c}P(x,y) & x \neq c, c',\ y \neq c, c' \\ 1 - {}^{c}P\,{}^{c}1(x) & x \neq c, c',\ y = c \\ \dfrac{1}{\mu(c)}(\mu(y) - \mu\,{}^{c}P(y)) & x = c,\ \ y \neq c, c' \end{cases}$$

である。

証明 (3.6)式の右辺を $P(x,y)$ とおくとPは $(x,y) = (c,c)$ の場合を除いて意味をもつ。 $P(c,c) = 1 - \sum_{y \neq c} P(c,y)$ とおくとPは $S \times S$ で定義され補題3.1, 補題3.2, 補題3.4, 補題3.5よりS上のMarkov核である. $x \neq c, c'$, $y \neq c'$ とし, (3.5)の第1式に左からPを施すと,

$$P\,{}^{c'}G(x,y) = {}^{c}P\,{}^{c}G(x,y) + {}^{c'}G(c,y) - \frac{\mu(y)}{\mu(c')}\,{}^{c}P\,{}^{c}G(x,c')$$

$$= {}^{c}G(x,y) - I(x,y) + {}^{c'}G(c,y) - \frac{\mu(y)}{\mu(c')}\,{}^{c}G(x,c')$$

$$= {}^{c'}G(x,y) - I(x,y)$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$= {}^{c'}P\,{}^{c'}G(x,y)\ .$$

この両辺に右から $({}^{c'}I-{}^{c'}P)$ を施すと，$x\neq c, c'$，$y\neq c'$ のとき $P(x,y)={}^{c'}P(x,y)$ だから (3.6) 式の初めの2つの場合が云えた。最後の場合は，(3.5) の第2式に右から P を施し上と同様にすればよい。　　　　　　　　　　(終)

補題3.7より S の任意の元 x, y に対して，x, y と異る元 c を選び，

$$(3.7)\qquad P(x,y) = {}^{c}P(x,y)$$

と定義すると P は c の選び方に無関係である。更に補題3.7より P は S 上の Markov 核である。

補題3.8. P は $\mu P=\mu$，$(I-P)Gf=f\ (f\in N)$(注) を満足する。

証明 任意の $x\in S$ に対して $x\neq c$ なる点 c を取ると補題3.7より

$$\mu P(x)=\mu\,{}^{c}P(x)+\mu(c)P(c,x)=\mu(x),$$

また第2の等式は，

$$(I-P)Gf(x)=(I-P)(Gf(c)+{}^{c}Gf)(x)$$
$$=(I-{}^{c}P)\,{}^{c}Gf(x) = f(x)\ .$$
(終)

補題3.8. S 上の Markov 核 P は既約再帰である。

証明 P を推移確率とする Markov 連鎖の点 x への到達時間を σ^x とするとき S の任意の元 c，x に対して $P_x\{\sigma^c<\infty\}=1$ をいえばよい。$c=x$ の時は明らかだから $c\neq x$ とすると補題3.3より

$$P_x\{\sigma^c<\infty\}=\sum_{y\neq c}{}^{c}G(x,y)P(y,c)=1\ .$$
(終)

以上の事をまとめると，

定理3.1. S 上の核 G と正の測度 μ が与えられたときそれが (R.R.M.P) 及びすべての $c\in S$ に対して $(R.N)_c$ を満足するならば，μ を不変測度，G を弱 potential 核とする既約再帰な Markov 核 P が唯一つ存在する。

逆に S 上の核 G と正の測度 μ がそれぞれ，既約再帰な Markov 核 P の弱 potential 核と不変測度ならば G，μ は (R.R.M.P) 及びすべての $c\in S$ に対して (R.

(注) $N^*=\{\nu;$ 台が有限個の点，$\langle\nu,1\rangle=0\}$ とおくと任意 $\nu\in N^*$ に対して $\nu G(I-P)=\nu$ も満足している。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$N)_c$ を満足する。

§4. 補　　足

定理3.1に於いては$(R.N)_c$ はすべての$c\in S$ に対して成立つ事が要求されている。このcを固定した場合はどうなるかについて考察してみる。初めに（R.R.M.P）と1つのcに対して$(R.N)_c$が成立つという条件だけでは定理3.1の結論は云えない例をあげておく。これは近藤[4]の例でSを変えただけである。

例4.1. $S=\{\cdots,-2,-1,0\}$, $x,y\in S$ に対して $\mu(x)=1$,

$$G(x,y)=\begin{cases}1 & y\geqq x\\ 0 & y<x,\end{cases}$$

とおく. μ, G は（R.R.M.P）及び$(R.N)_0$を満足する.（R.R.M.P）も同様にすればよいから$(R.N)_0$ だけを証明する. $E_n=[-n,0]\subset S$ とし,

$$h_n(x)=\begin{cases}1 & x\leqq -n-1\\ 0 & -n\leqq x\leqq 0\end{cases}$$

とおく. $f\in\mathcal{M}$ とし $\{f>0\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$ $(x_1<x_2<\cdots<x_p)$ とおく. $a\geqq Gf(0)=f(0)$ なる実数aに対して $\{f>0\}$ 上で $Gf\leqq a+h_n$ とする。

$x<x_1$ のとき,

$$\begin{aligned}Gf(x)&=\sum_{y\geqq x}f(x)=f(x)+Gf(x+1)\leqq f(x)+Gf(x_1)\\&\leqq f(x)+a+h_n(x_1)\leqq a+h_n(x)-f^-(x)\ .\end{aligned}$$

$x_i<x<x_{i+1}$ のとき,

$$\begin{aligned}Gf(x)&=f(x)+Gf(x+1)\leqq f(x)+Gf(x_{i+1})\\&\leqq f(x)+a+h_n(x_{i+1})\leqq a+h_n(x)-f^-(x)\ .\end{aligned}$$

$x>x_p$ のとき,

$$\begin{aligned}Gf(x)&=Gf(x+1)+f(x)\leqq f(x)+Gf(0)\\&\leqq f(x)+a\leqq a+h_n(x)-f^-(x)\ .\end{aligned}$$

従って$(R.N)_0$ を満足する。この時Gは,

$$P(x,y)=\begin{cases}1 & y=x+1\\ 0 & \text{他}\end{cases}$$

とおいたとき $(I-P)Gf(x)=f(x)$ を満足する. Pは非再帰であるからこの場合定理3.1の結論は云えない。

しかしcを固定して議論する事も出来る。それについて簡単に述べておく。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$\mathcal{N}^* = \{\nu;$ 台が有限個の点, $\langle \nu, 1 \rangle = 0\}$ とおき

$(R.N)_c^*$: 次の2条件を満足する, S に増加する有限集合の列 $\{E_n\}_{n \geq 1}$ ($c \in E_n$, $\forall n$) と S の測度の列 $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ が存在する。

(i) $0 \leqq \eta_n \leqq \mu$, $\eta_n(c) = 0$, $S - E_n$ 上で $\eta_n = \mu$, $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$.

(ii) 任意の $\nu \in \mathcal{N}^*$ と $a\mu(c) \geqq \nu G(c)$ なる実数 a に対して $\{\nu > 0\}$ 上で $\nu G \leqq a\mu + \eta_n$ ならば ${}^cS$ 上到るところ $\nu G \leqq a\mu + \eta_n - \nu^-$ が成立つ。

定理4.1. S 上の核 G と正の測度 μ が与えられたときそれが $(R.R.M.P)$ 及びある $c \in S$ に対して $(R.N)_c$, $(R.N)_c^*$ を満足するならば, μ を不変測度, G を弱 potential 核とする既約再帰な Markov 核 P が唯1つ存在する。

逆に S 上の核 G と正の測度 μ がそれぞれ, 既約再帰な Markov 核 P の弱 potential 核と不変測度ならば G, μ は $(R.R.M.P)$, $(R.N)_c$ 及び $(R.N)_c^*$ を満足する。

後半の証明は, μ, G を既約再帰 Markov 核のそれぞれ不変測度, 弱 potential 核とする。$\hat{P}(x, y) = \frac{\mu(y)}{\mu(x)} P(y, x)$ とおくと $\hat{P}$ も既約再帰であるから $\hat{P}$ に対して ${}^c\hat{H}^E {}^c1$ を §1 と同様に定義すると (1.8) 式, 即ち $\lim_{n\to\infty} {}^c\hat{H}^{B_n} {}^c1 = 0$ ($B_n \downarrow \phi$) が云える。これが $(R.N)_c^*$ と同値である事は定理2.2と同様にすれば分る。

前半の証明を簡単に述べておく。${}^cG$ を (1.5) 式で定義すると G が $(R.R.M.P)$ 及び $(R.N)_c$ を満足するから補題3.1で述べた様に ${}^cG(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^cP^n(x, y)$ ($x \in {}^cS$, $y \in S$) を満足する ${}^cS$ 上の非再帰な sub-Markov 核 ${}^cP$ が存在する。この ${}^cP$ に対して補題3.2〜補題3.5の結論が成立つ事は証明した。μ は ${}^cP$ に関する超過的測度(補題3.2)であるから ${}^cP(x, y) = \frac{\mu(y)}{\mu(x)} P(y, x)$ とおくと ${}^c\hat{P}$ は非再帰な sub-Markov 核である。sub-Markov 核 ${}^c\hat{P}$ に対し ${}^c1$ の集合 ${}^cE$ 上への réduite を ${}^c\hat{H}^{{}^cE} {}^c1$ とおくと定理2.2と同様に $(R.N)_c^*$ は ${}^c\hat{H}^{{}^cS - {}^cE_n} {}^c1 \downarrow 0$ なる ${}^cS$ に増加する有限集合列 ${}^cE_n$ が存在する事と同値である。従って ${}^c\hat{G}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^c\hat{P}^n(x, y)$ とおくと補題3.3より ${}^c1 = {}^c\hat{G}({}^c1 - {}^c\hat{P}{}^c1)$ 即ち $\mu(x) = (\mu - \mu {}^cP){}^cG(x)$ ($x \in {}^cS$). これより補題3.5と同様に,

$$\langle (\mu - \mu {}^cP), {}^c1 \rangle = \langle \mu, ({}^c1 - {}^cP {}^c1) \rangle. \tag{4.1}$$

求める Markov 核 P を

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$
(4.2) \qquad P(x,y)=\begin{cases} {}^cP(x,y) & x\neq c\ ,\ y\neq c \\ 1-{}^cP{}^c1(x) & x\neq c\ ,\ y\neq c \\ \dfrac{1}{\mu(c)}(\mu(y)-\mu{}^cP(y)) & x=c\ ,\ y\neq c \\ 1-\sum_{y\neq c}P(c,y) & x=c\ ,\ y=c \end{cases}
$$

とおくとPがS上の Markov 核であることは既に証明した補題より明らか。また,

$$
\mu P(c)=\langle\mu,{}^c1-{}^cP{}^c1\rangle+\mu(c)\left(1-\frac{1}{\mu(c)}\langle\mu-\mu{}^cP,{}^c1\rangle\right)=\mu(c)
$$

であり $x\neq c$ の時 $\mu P(x)=\mu(x)$ である事は補題3.7で示したからμはPの不変測度である。$(I-P)Gf=f$ $(f\in\mathcal{N})$ も同様に云える。最後にPが既約再帰であることを示す。任意の$x\in S$ に対して $\mathbb{P}_x[\sigma^c<\infty]=1$ (補題3.8)であるから c は再帰である。従って $\mathbb{P}_c[\sigma^x<\infty]>0$ を云えばよい([11]定理1.4)。これは $\sum_{z\neq c}P(c,z)\,{}^cG(z,x)=\frac{1}{\mu(c)}(\mu-\mu{}^cP)\,{}^cG(x)=\frac{\mu(x)}{\mu(c)}>0$ より明らかである。

以上で定理4.1が分った。最後に近藤[4]の例では条件(R.R.M.P), $(R.N)_c$, $(R.N)_c^*$ が云える事を示しておく。

例 4.2. Sを整数全体, $\mu(x)=1$ $(^\forall x\in S)$, $G(x,y)=-|x-y|$ $(x\in S,\ y\in S)$ は(R.R.M.P), $(R.N)_c$, $(R.N)_c^*$ を満足する。

この例の場合$(R.N)_c$ と$(R.N)_c^*$ は同じ条件であるから$(R.N)_c$ を示す。$c=0$とする(他の場合も同様にすればよい)。$E_n=\{x;\,-n\leqq x\leqq n$ なる整数$\}$,

$$
h_n(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{n+1} & |x|\leqq n \\ 1 & |x|>n\ , \end{cases}
$$

とおき $f\in\mathcal{N}$ と $Gf(0)\leqq a$ なる実数 aに対して $\{f>0\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$ $(x_1<x_2<\cdots<x_p)$上で $Gf\leqq a+h_n$ とする。$(R.N)_c$ の(ii)は十分大きなnに対して云えればよいから, nを十分大きく取れば $|x_1|\vee|x_p|\leqq n$ としてよい。$Gf(x)=Gf(x-1)+2\sum_{y\geqq x}f(y)$ であるから $x<x_1$ のとき $Gf(x)\leqq Gf(x+1)+f(x)\leqq Gf(x_1)+f(x)\leqq a+h_n(x_1)+f(x)\leqq a+h_n(x)-f^-(x)$. $x>x_p$ の時も同様である。$x_i<x\leqq x_{i+1}$ のとき $x=0$ では $Gf\leqq a+h_n-f^-$ が成立っているから $x_i\geqq 0$ 又は $x_{i+1}\leqq 0$ としてよい. そこで $x_i\geqq 0$ とする.

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$Gf(x)=\frac{Gf(x-1)+Gf(x+1)}{2}+f(x)\leqq\frac{Gf(x-1)+Gf(x+1)}{2}\quad \forall x\in[x_i,\ x_{i+1}],$$

より $Gf(x)$ は $[x_i, x_{i+1}]$ で下に凸である．従って，

$$Gf(x)-f(x)=\frac{Gf(x-1)+Gf(x+1)}{2}\leqq\frac{(x_{i+1}-x)Gf(x_i)+(x-x_i)Gf(x_{i+1})}{x_{i+1}-x_i}$$

$$\leqq\frac{(x_{i+1}-x)\left(a+\frac{x_i}{n+1}\right)+(x-x_i)\left(a+\frac{x_{i+1}}{n+1}\right)}{x_{i+1}-x_i}$$

$$=a+\frac{x}{n+1}=a+h_n(x).$$

この場合 G は既約再帰な Markov 核

$$P(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & y=x\pm 1\\ 0 & \text{その他},\end{cases}$$

の弱 potential 核になっている． （終）

第 2 章 Potential 原理

この章では P が既約再帰（*irreducible recurrent*）Markov 核として考える．P の不変測度を μ，弱 potential 核(注1) を G とする．Spitzer，Kemeny-Snell（[10]，[3]）の potential 核の自然な拡張として G に対し §5 で導入する条件 (H) を仮定する．条件 (H) の下で，正規連鎖の場合に Kemeny-Snell-Knapp（[3]，p. 288 - p. 303）で議論されている potential 原理を G について考察する．

§5. 容 量

c を S の任意の元として以後固定しておく。${}^cP(x,y)=P(x,y)-P(x,c)I(c,y)$(注2)，${}_cP(x,y)=P(x,y)-I(x,c)P(c,y)$ とおきこれに対して ${}^cG(x,y)=$

（注1） 便宜上 $-G$ が第 1 章の意味で弱 potential 核の時この章では G が弱 potential 核とよぶ。

（注2） 第 1 章の定義と少し異る。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$\sum_{n=0}^{\infty} {}^cP^n(x,y)$, ${}_cG(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} {}_cP^n(x,y)$ とおくと第Ⅲ部補題7.1より ${}_cG(x,c)=1$, ${}^cG(c,x)=\mu(x)$ となる。但し $\mu(c)=1$ としておく. 第Ⅱ部定理6.1系より弱 potential 核 G はある関数 h と測度 π によって,

$$(5.1)\qquad \begin{aligned} G(x,y) &= -{}_cG(x,y)+h(x)\mu(y)+\pi(y)+I(c,y) \\ &= -{}^cG(x,y)+(h(x)+I(x,c))\mu(y)+\pi(y) \end{aligned}$$

と書ける. (5.1)式で $x=c$, $y=c$ とおくとそれぞれ $G(c,y)-\pi(y)=h(c)\mu(y)$, $G(x,c)-h(x)=\pi(c)$ である. そこで以後 $h(c)=\pi(c)=G(c,c)=0$ となる h, π について考える。この時上記関係式から $\pi(y)=G(c,y)$, $h(x)=G(x,c)$ である.

次に $\hat{P}(x,y)=\dfrac{\mu(y)}{\mu(x)}P(y,x)$ とおくと $\hat{P}$ も μ を不変測度とする既約再帰 Markov 核である。$\hat{P}$ に対して ${}^c\hat{P}$, ${}_c\hat{P}$, ${}^c\hat{G}$, ${}_c\hat{G}$ を同様に定義する。また $\hat{G}(x,y)=\dfrac{\mu(y)}{\mu(x)}G(y,x)$ とおくと G が (5.1) と書けるとき

$$(5.2)\qquad \hat{G}(x,y)=-{}^c\hat{G}(x,y)+\frac{1}{\mu(x)}(\pi(x)+I(c,y))\mu(y)+h(y)\pi(y)$$

と書ける。(5.2)式は ${}^c\hat{G}(x,y)=\dfrac{\mu(y)}{\mu(x)}{}_cG(y,x)$ に注意すれば明らかであろう. 従って (5.1) の ${}^cG$ の代りに ${}_c\hat{G}$, h の代りに $\dfrac{\pi(x)}{\mu(x)}$, $\pi(y)$ の代りに $h(y)\pi(y)$ と考えた場合 (5.2) 式は (5.1) と同じ表現と考えられるから $\hat{G}$ は $\hat{P}$ に対する弱 potential 核である.

P が正規連鎖 (normal chain) の場合 potential 核 K を第Ⅰ部 (3.21) 式によって定義すると K は上記 (5.1) の表現, 即ち

$$K(x,y)=-{}_cG(x,y)+K(x,c)\mu(y)+K(c,y)+I(c,y)$$

と書ける ([3], p.288). このとき K の定義によって $K(y,y)=0$, $K(c,y)\geqq 0$, $K(x,c)\geqq 0$, $K(c,\cdot)P\leqq K(c,\cdot)+I(c,\cdot)$, $PK(\cdot,c)\leqq K(\cdot,c)+I(\cdot,c)$ を満足する. 我々の G に対しても同様の仮定をおく.

<u>条件 (H): ある $c\in S$ に対し</u> $h(c)=\pi(c)=0$, $h\geqq 0$, $\pi\geqq 0$, $\pi P\leqq \pi+I(c,\cdot)$, $Ph\leqq h+I(\cdot,c)$。

第Ⅲ部補題7.4によって条件 (H) は $h(c)=\pi(c)=0$, $\pi+I(c,\cdot)$ が ${}_cP$ に関する超過的測度かつ $h+I(\cdot,c)$ が ${}^cP$ に関する超過的関数である事と同値である. この章を通じて以後は断らない限り G は条件 (H) を満足していると仮定する.

E を S の有限部分集合とするとき E 内に台をもち $\langle\nu,1\rangle=1$ $[\langle\mu,f\rangle=1]$ な

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

る測度ν［関数f］に対する potential $\eta=\nu G$ $[g=Gf]$ がE上で$\eta=c(E)\mu$ $[g=c^*(E)]$ となるとき $\eta[g]$ を集合Eの（(μ,G)に関する）左[右]平衡 potential，$\nu[f]$ を左[右]平衡 charge，定数$c(E)[c^*(E)]$ を左[右]容量（capacity）という(注1)．

補題5.1. 任意の有限集合Eに対して(μ,G)に関する左(右)平衡 potential は一意に決まる．従って左[右]容量も一意に決まる．

証明 ν_1，ν_2 を集合Eの左平衡 charge，$\eta_1=\nu_1G$，$\eta_2=\nu_2G$ としE上で$\eta_1=c_1(E)\mu$，$\eta_2=c_2(E)\mu$ とする．$f_1=\frac{\nu_1}{\mu}$，$f_2=\frac{\nu_2}{\mu}$，$g_1=\frac{\eta_1}{\mu}$，$g_2=\frac{\eta_2}{\mu}$ とおくと $g_i=\hat{G}f_i$ かつE上で$g_i=c_i(E)$ $(i=1,2)$ である．また $\langle\mu,f_i\rangle=1$ $(i=1,2)$ より f_1-f_2 は null charge でその台はEに含まれ $g_1-g_2=\hat{G}(f_1-f_2)$ はE上で定数$C_1(E)-C_2(E)$である．既に注意した様に$\hat{G}$は$\hat{P}$に関する弱 potential 核だから最大値原理（R.R.M.P）よりS上で到るところ

$$\hat{G}(f_1-f_2)\leqq C_1(E)-C_2(E)-(f_1-f_2)^- .$$

従ってE上で$(f_1-f_2)^-=0$ 即ち $f_1\geqq f_2$ である．g_2-g_1 に対して同様にすると $f_2\geqq f_1$． 故に $f_1=f_2$ だから $\nu_1=\nu_2$ である．右平衡 potential の場合も同様である． （終）

系. Sが格子点の全体，$P(x,y)=P(0,y-x)$，$G(x,y)=G(0,y-x)$(注2) ならば $C(E+x)=C(E)$ である．但し $E+x=\{y+x;\ y\in E\}$．

証明 μをEの左平衡 charge とし $\mu_x(y)=\mu(y-x)$ とおく．μ_xは$E+x$内に台をもち $\langle\mu_x,1\rangle=1$ かつ $z\in E+x$ のとき $z-x\in E$ だから

$$\mu_xG(z)=\sum_y \mu_x(y)G(y,z)=\sum_y\mu(y-x)G(y-x,z-x)$$
$$=\mu G(z-x)=C(E) \quad (\text{定数}).$$

従ってμ_xは$E+x$の左平衡 charge であり $C(E+x)=C(E)$ である．（終）

第I部§5で示した様にPが非再帰の場合集合Eの容量はμに対して第III部定理3.1で決まる．approximate P-chain の集合Eへの到達確率（hitting probability）に等しい事が分った．我々の場合も同様に approximate cha-

---

（注1） 非再帰の場合の定義（第I部§5参照）とは異ることに注意。

（注2） Spitzer[10]の場合である。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

in の議論を使って容量を考える。非再帰 *sub-Markov* 核に対する超過的測度 η に対して第III部定理3.1によって決まる *approximate chain* を η によってきまる *approximate chain* とよぶことにする。また *approximate chain* はすべて (X, α, β) で書きその区別は (X, α, β) を定義する測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ の測度 $\mathcal{P}$ で行なう。更に以後 E は S の有限部分集合を表わし，(X, α, β) の E への到達時間 (*hitting time*) を σ^E と書き，$\mathbb{E}$ は $\mathcal{P}$ に関する平均を表わすとする。

条件 (H) より $\pi + I(c, \cdot)$ は ${}_cP$ に関する超過的測度だから $\pi + I(c, \cdot)$ によって *approximate* ${}_cP$-*chain* が決まる。それを定義する測度を $\mathcal{P}^\pi$ とする。また μ も ${}_cP$ に関する超過的測度だから μ によって決まる *approximate* ${}_cP$-*chain* を定義する測度を $\mathcal{P}^\mu$ とする。また $\mathcal{P}^\pi\{X_{\sigma^E} = y,\ |\sigma^E| < \infty\} = \lambda_E^\pi(y)$, $\mathcal{P}^\mu\{X_{\sigma^E} = y,\ |\sigma^E| < \infty\} = \lambda_E^\mu(y)$ とおくと $\pi(y) + I(c, y) = \mathbb{E}^\pi[\sum_{\alpha \leqq n \leqq \beta} I_{\{y\}}(X_n)] \geqq \mathbb{E}^\pi[\sum_{\sigma^E \leqq n \leqq \beta} I_{\{y\}}(X_n)] = \lambda_E^\pi\ {}_cG(y)$ だから任意の $y \in S$ に対して，

(5.3) $$\pi(y) + I(c, y) \geqq \lambda_E^\pi\ {}_cG(y)$$

(5.4) $$\mu(y) \geqq \lambda_E^\mu\ {}_cG(y)$$

である。特に $y \in E$ のときは上記の証明から容易に分るように (5.3) 及び (5.4) は等号である。

補題5.2. $0 \leqq \langle \lambda_E^\pi, 1 \rangle \leqq 1$, $0 < \langle \lambda_E^\mu, 1 \rangle \leqq 1$. 特に $c \in E$ ならば $\langle \lambda_E^\pi, 1 \rangle = \langle \lambda_E^\mu, 1 \rangle = 1$ である。

証明 $\langle \lambda_E^\mu, 1 \rangle > 0$ だけ証明すれば他は (5.3), (5.4) 式及びその後で注意した事で $y = c$ とおけば ${}_cG(x, c) = 1$ $({}^\forall y \in S)$ より明らかである。$\langle \lambda_E^\mu, 1 \rangle > 0$ は ${}_cG(x, y) \leqq {}_cG(y, y)$ だから，

$$0 < \mu(y) = \lambda_E^\mu\ {}_cG(y) \leqq \langle \lambda_E^\mu, 1 \rangle\ {}_cG(y, y)$$

より云える。 (終)

注意. 補題から容易に分る様に $\mathcal{P}^\pi$, $\mathcal{P}^\mu$ は共に確率測度である。

上で定義した λ_E^π, λ_E^μ によって，$K(E) = \dfrac{1 - \langle \lambda_E^\pi, 1 \rangle}{\langle \lambda_E^\mu, 1 \rangle}$，$\nu_E(x) = K(E)\lambda_E^\mu(x)$, $C(E) = \langle (\nu_E + \lambda_E^\pi), h \rangle - K(E)$ とおく。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

定理5.1. 測度 $\nu_E+\lambda_E^\pi$ は (μ, G) に関する集合 E の左平衡chargeで $C(E)$ は左容量である。

証明 $\nu_E+\lambda_E^\pi$ は集合 E 内に台をもち $\langle \nu_E+\lambda_E^\pi, 1\rangle=1$ である。$y\in E$ のとき (5.3), (5.4) 式は等号だから

$$(\nu_E+\lambda_E^\pi)G(y)=-(\nu_E+\lambda_E^\pi)_c G(y)+\langle \nu_E+\lambda_E^\pi, h\rangle \mu(y)+\mathfrak{C}(y)+I(c,y)$$
$$=-K(E)\lambda_E^\mu\ {}_cG(y)+\langle \nu_E+\lambda_E^\pi, h\rangle \mu(y)=C(E)\mu(y)\ .$$

従って定理が云えた。 (終)

定理の証明では (5.3), (5.4) 式の等号を使ったが一般の $y\in S$ に対しては,

系1. $(\nu_E+\lambda_E^\pi)G(y)\geqq C(E)\mu(y) \quad \forall y\in S$.

系2. (μ, G) に関する集合 E の左平衡chargeは非負測度である。

次に, $h'(x)=h(x)+I(x,c)$ は ${}^cP$ に関する超過的関数だから

$$(5.5) \qquad {}^cP^{h'}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{h'(y)}{h'(x)}\,{}^cP(x,y) & h'(x)>0 \text{ のとき} \\ 0 & h'(x)=0 \text{ のとき}\end{cases}$$

とおくと ${}^cP^{h'}$ は S 上の非再帰sub-Markov核である。$x\in S$ から出発する(即ち $\mathcal{P}_x^h\{X_\alpha=y\}=I(x,y)$) ${}^cP^{h'}$-chain(注) を定義する測度を $\mathcal{P}_x^h$ と書く。

$$(5.6) \qquad e_E^h(x)=\begin{cases} \mathcal{P}_x^h\{X_n\notin E,\ \forall n\geqq 1\} & x\in E \text{ のとき} \\ 0 & x\notin E \text{ のとき}\end{cases}$$

に対して $f_E(x)=h'(x)e_E^h(x)$ とおく. 更に $\hat{P}(x,y)=\dfrac{\mu(y)}{\mu(x)}P(y,x)$ に対して前と同様に ${}_c\hat{P}$ を定義すると, $(h'\mu)(x)=h'(x)\mu(x)$ なる測度 $h'\mu$ は ${}_c\hat{P}$ に関して超過的だから $h'\mu$ に対して approximate ${}_c\hat{P}$-chain が決まる. それを定義する測度を $\hat{\mathcal{P}}^{h'\mu}$ とする.

補題5.3. 任意の $x\in S$ に対して,

$$(5.7) \qquad h'(x)\ \geqq\ {}^cG f_E(x)\ .$$

特に $x\in E$ のときは (5.7) 式は等号である.

証明 $\dfrac{(h'\mu)(y)}{(h'\mu)(x)}\,{}_c\hat{P}(y,x)={}^cP^{h'}(x,y)$ だから approximate ${}_c\hat{P}$-chain $\mathcal{P}^{h'\mu}$ の逆進連鎖は第III部定理4.1より approximate ${}^cP^{h'}$-chainである. 従って $\hat{\mathcal{P}}^{h'\mu}\{X_{\sigma^E}=y,\ |\sigma^E|<\infty\}=\hat{\lambda}_E^h(y)$ とおくと第III部(4.2)式より $\hat{\lambda}_E^h(y)=$

(注) 第II部 §1 参照.

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$(h'\mu)(y)\, e_E^h(y)$ であるから (5.3) 式の証明と同様にすると，

$$(h'\mu)(x) \geqq \hat{\lambda}_E^h\ {}_c\hat{G}(x) = \mu(x)\,{}^cG f_E(x)\,. \qquad (終)$$

系. $0 \leqq \langle \mu, f_E \rangle \leqq 1$，特に $c \in E$ のときは $\langle \mu, f_E \rangle = 1$ である．

証明　$c \in E$ のときは (5.7) 式で $x = c$ とすると ${}^cG(c,\cdot) = \mu(\cdot)$ だから結果が得られる．一般の場合は $E \cup \{c\} = F$ とおくと $0 \leqq \langle \mu, f_E \rangle = \langle \hat{\lambda}_E^h, 1 \rangle \leqq \langle \hat{\lambda}_F^h, 1 \rangle = 1$．　(終)

$h' = 1$ に対しても上と全く同様の議論が出来る．この場合対する e_E^h を e_E^1 とおくと補題5.3より，

$$(5.8) \qquad 1 \geqq {}^cG\, e_E^1(x)\,.$$

特に $x \in E$ のときは (5.8) は等号である．また補題5.3の系より $c \in E$ のときは $\langle \mu, e_E^1 \rangle = 1$ で一般には $0 \leqq \langle \mu, e_E^1 \rangle \leqq 1$ であるが更に強く，

補題5.4. $0 < \langle \mu, e_E^1 \rangle \leqq 1$ である．

証明　$x \in E$ のとき (5.8) より $1 = {}^cG\, e_E^1(x) = \dfrac{1}{\mu(x)} \hat{\lambda}_E^1\ {}_c\hat{G}(x) \leqq \dfrac{1}{\mu(x)}\ {}_c\hat{G}(x, x) \langle \hat{\lambda}_E^1, 1 \rangle = \dfrac{1}{\mu(x)}\ {}_c\hat{G}(x,x) \langle \mu, e_E^1 \rangle$ だから $0 < \langle \mu, e_E^1 \rangle$ である．(終)

上で定義した f_E，e_E^1 によって，$K^*(E) = \dfrac{1 - \langle \mu, f_E \rangle}{\langle \mu, e_E^1 \rangle}$，$g_E(x) = K^*(E)\, e_E^1(x)$，$C^*(E) = \langle \pi, f_E + g_E \rangle - K^*(E)$ とおく．

定理5.2. 関数 $(f_E + g_E)$ は (μ, G) に関する集合 E の右平衡 charge で $C^*(E)$ は右容量である．

証明　$f_E + g_E$ が $\langle \mu, f_E + g_E \rangle = 1$ なる台を E 内にもつ関数である事は明らか．$x \in E$ のとき，

$$\begin{aligned} G(f_E + g_E)(x) &= -{}^cG(f_E + g_E)(x) + h(x) + I(x, c) + \langle \pi, f_E + g_E \rangle \\ &= -K^*(E)\,{}^cG\, e_E^1(x) + \langle \pi, f_E + g_E \rangle = C^*(E) \end{aligned}$$

第2，第3の等号には (5.7), (5.8) 式の等式を使った．　(終)

一般の x に対しては (5.7), (5.8) 式を使えば，

系1. $\qquad G(f_E + g_E)(x) \geqq C^*(E)$

系2. (μ, G) に関する集合 E の右平衡 charge は非負関数である．

定理5.1，5.2より $C(E)$，$C^*(E)$ がそれぞれ左，右の容量である事が分った

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

が実はそれが一致する事が云える。

補題5.5. $\langle \lambda_E^\mu, 1\rangle = \langle \mu, e_E^1\rangle$。

証明 λ_E^μ, e_E^1 の定義より $\lambda_E^\mu(y) = \sum_{x\in E}\mu(x)(I(x,y) - {}_cP^E(x,y))$, $\mu(y)e_E^1(y)$
$= \hat{\lambda}_E^1(y) = \sum_{x\in E}\mu(x)(I(x,y) - {}_c\hat{P}^E(x,y)) = \sum_{x\in E}\mu(x)(I(x,y) - \frac{\mu(y)}{\mu(x)}\,{}^cP^E(y,x))$.

従って, $c\notin E$ のとき ${}_cP^E = {}^cP^E$ だから,

$$\langle \lambda_E^\mu ; 1\rangle = \sum_{y\in E}(\mu(y) - \mu\,{}_cP^E(y)) = \sum_{y\in E}\mu(y)(1 - {}^cP^E\cdot 1(y)) = \langle \mu, e_E^1\rangle .$$

また $c\in E$ のときは明らかに成立つ. (終)

定理5.3. $C(E) = C^*(E)$.

証明 ${}_cG(x,y) = {}^cG(x,y) + I(c,y) - I(x,c)\mu(y)$ の両辺に左から λ_E^π, 右から f_E を施し (5.3) 及び (5.7) 式の等号の部分を使うと,

$$\begin{aligned}\langle \pi, f_E\rangle + f_E(c) &= \langle \lambda_E^\pi\,{}_cG, f_E\rangle \\ &= \langle \lambda_E^\pi, {}^cGf_E\rangle + \langle \lambda_E^\pi, 1\rangle f_E(c) - \lambda_E^\pi(c)\langle \mu, f_E\rangle \\ &= \langle \lambda_E^\pi, h\rangle + \langle \lambda_E^\pi, 1\rangle f_E(c) + \lambda_E^\pi(c)(1 - \langle \mu, f_E\rangle).\end{aligned}$$

λ_E^π, f_E の台は E に含まれるから補題5.2及び補題5.3の系の合わせると $\lambda_E^\pi(c)(1-\langle \mu, f_E\rangle) = 0$, $f_E(c)(1-\langle \lambda_E^\pi, 1\rangle) = 0$. 従って上記の関係式から $\langle \pi, f_E\rangle = \langle \lambda_E^\pi, h\rangle$。 同様に $\langle \pi, e_E^1\rangle = \langle \mu_E^\pi, 1\rangle$であるから

$$\begin{aligned}\langle \pi, g_E\rangle - K^*(E) &= K^*(E)(\langle \pi, e_E^1\rangle - 1) = K^*(E)(\langle \mu_E^\pi, 1\rangle - 1) \\ &= -K^*(E)K(E)\langle \lambda_E^\mu, 1\rangle .\end{aligned}$$

同様に $\langle \nu_E, h\rangle - K(E) = -K(E)K^*(E)\langle \mu, e_E^1\rangle$ だから補題5.5より $\langle \pi, g_E\rangle - K^*(E) = \langle \nu_E, h\rangle - K(E)$。 この式は $c\in E$ の時は明らかだから $C(E)$, $C^*(E)$ の定義より $C(E) = C^*(E)$ である. (終)

定理5.4. $C(E) = \mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^E})] - \frac{1}{\mathcal{P}^\mu\{\sigma^E < \infty\}}\mathcal{P}^\pi\{\sigma^E = \infty\}\mathcal{P}_c^h\{\tau^E = -\infty\}$. 但し τ^E は集合 E からの *last exit time*.(注)

証明 明らかに $\langle \lambda_E^\pi, h\rangle = \mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^E})]$, $\langle \lambda_E^\pi, 1\rangle = \mathcal{P}^\pi\{\sigma^E < \infty\}$, $\langle \lambda_E^\pi, 1\rangle = \mathcal{P}^\mu\{\sigma^E < \infty\}$. 補題5.2の後の注意より $\mathcal{P}^\pi$ は確率測度だから $1 - \langle \lambda_E^\pi, 1\rangle = \mathcal{P}\{\sigma^E = \infty\}$. ${}^cG^{h'}(c,x) = \mu(x)h'(x)$ だから *approximate* ${}_c\hat{P}$-*chain* $\hat{\mathcal{P}}^{h'\mu}$

(注) 第Ⅲ部定理4.1証明参照.

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

は ${}^cP^{h'}$-chain $\mathcal{P}_c^h$ の逆進連鎖（reversed chain，第II部定理4.1）である。従って第III部（4.2）式より $\mathcal{P}_c^h\{\tau^E<\infty\}=\langle h'\mu, e_E^h\rangle=\langle\mu, f_E\rangle$ だから $1-\langle\mu, f_E\rangle=\mathcal{P}_c^h\{\tau^E=-\infty\}$．故に

$$C(E)=\langle\lambda_E^\pi, h\rangle-K(E)K^*(E)\langle\mu, e_E^1\rangle$$

$$=\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^E})]-\frac{1}{\mathcal{P}^\kappa\{\sigma^E<\infty\}}\mathcal{P}^\pi\{\sigma^E=\infty\}\mathcal{P}_c^h\{\tau^E=-\infty\}. \qquad \text{(終)}$$

$\mathcal{F}_c$ を点 c を含む S の有限部分集合の全体とする．

<u>定理5.5. $C(E)$ は $\mathcal{F}_c$ 上の非負，単調増加な交代集合関数（alternating set function）である</u>[注]．

<u>証明</u> 補題5.2と定理5.4より $\mathcal{F}_c$ 上では $C(E)=\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^E})]$ であるから $C(E)\geqq 0$．また $E\in\mathcal{F}_c$，$F\in\mathcal{F}_c$ とすると，

$$C(E\cup F)-C(E)=\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^{E\cup F}});\ \sigma^{E\cup F}<\infty]-\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^E});\ \sigma^E<\infty]$$

$$=\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^{E\cup F}});\ \sigma^{E\cup F}=\sigma^E<\sigma^F]+\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^{E\cup F}=\sigma^F<\infty}]$$

$$-\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^E});\ \sigma^E<\infty]$$

$$\leqq\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^E});\ \sigma^E<\sigma^F]+\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^F});\ \sigma^F<\infty]-\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^E});\ \sigma^E<\infty]$$

$$=\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^F});\sigma^F<\infty]-\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^E});\ \sigma^F\leqq\sigma^E<\infty]$$

$$\leqq\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^F});\sigma^F<\infty]-\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^E});\ \sigma^F=\sigma^E<\infty]$$

$$\leqq\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^F});\ \sigma^F<\infty]-\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^{E\cap F}});\ \sigma^{E\cap F}<\infty]$$

$$=C(F)-C(E\cap F).$$

点 x から出発した ${}^cP[{}_cP]$-chain を定義する測度を ${}^c\mathcal{P}_x[{}_c\mathcal{P}_x]$ とすると h' は ${}^cP$ に関し超過的だから，$x\neq c$ のとき ${}_c\mathbb{E}_x[h(X_{\sigma^E})]={}^c\mathbb{E}_x[h(X_{\sigma^E})]\leqq h(x)$．また ${}_c\mathbb{E}_c[h(X_{\sigma^E})]=h(c)=0$ だから任意の x に対して ${}_c\mathbb{E}_x[h(X_{\sigma^E})]\leqq h(x)$．従って $E\subset F$ のとき

$$\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^E})]=\mathbb{E}^\pi[{}_c\mathbb{E}_{X_{\sigma^F}}[h(X_{\sigma^E})]]\leqq\mathbb{E}^\pi[h(X_{\sigma^F})]$$

即ち $C(E)\leqq C(F)$． (終)

<u>注意</u> 2つの有限集合 $E\subset F$ に対して，$\mathcal{P}^\kappa\{\sigma^E<\infty\}\leqq\mathcal{P}^\kappa\{\sigma^F<\infty\}$，$\mathcal{P}^\pi\{\sigma^E=\infty\}\geqq\mathcal{P}^\pi\{\sigma^F=\infty\}$，$\mathcal{P}_c^h\{\tau^E=-\infty\}\geqq\mathcal{P}_c^h\{\tau^F=-\infty\}$ だから定理5.5と合わせると $\mathcal{F}_c$ の元でない $E\subset F$ に対しても $C(E)\leqq C(F)$ が成立つ事が分る．

任意の $E\in\mathcal{F}_c$ に対して $C(E)=0$ のとき P は（(α, A) に関して）degenera-

---

(注) いわゆる Choquet 容量である（第I部§5参照）。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

te という。

系　P が degenerate でないときある $c' \in S$ を適当に選ぶと $\{c, c'\}$ を含む S の任意の有限部分集合 E に対して $C(E) > 0$ となる。

証明　P が degenerate でないから集合 $E \in \mathcal{F}_c$ を $C(E) > 0$, かつ, $F \subsetneqq E$ $(F \in \mathcal{F}_c)$ ならば $C(F) = 0$ となるように取れる。定理 5.4 より上の E は c 以外の点を少く共 1 つは含む. $c' \in E$, $c \neq c'$ なる c' を取り $E - \{c'\} = F$ とおくと定理 5.4 より

$$0 = C(\{c\}) = C(F \cap \{c, c'\}) \leqq C(F) + C(\{c, c'\}) - C(E)$$

従って $C(\{c, c'\}) \geqq C(E) > 0$. C は単調だから系がいえる。　　　　(終)

§6 Potential 原理

この節では P は non-degenerate としておく。このとき定理 5.5 系により決まる点 c' を取り $\{c, c'\}$ を含む S の有限部分集合の全体を $\mathcal{F}$ とする. 前節で $\lambda_E^{\pi} + \nu_E\,[f_E + g_E]$ が集合 E の (μ, G) に関する左[右]平衡 charge である事を示した. この節では (μ, G) が満足する他の potential 原理について考察する。有限個の台を持つ測度 ν [関数 f] に対して $\eta = -\nu G$ [$g = -Gf$] を左[右]一般化された (generalized) potential, $\nu[f]$ をその左[右] charge という。

補題 6.1.　ν は η [f は g] によって一意に決まる。特に $\nu[f]$ の台 E が $\mathcal{F}$ に含まれているとき $\nu[f]$ は $\eta[g]$ の E 上の値だけで決まる。

証明　$E \in \mathcal{F}$ とし E 内に台をもつ測度 ν_1, ν_2 に対して $-\eta = \nu_1 G = \nu_2 G$ とする。この両辺に $f_E + g_E$ を右から施すと $-\langle \eta, f_E + g_E \rangle = \langle \nu_1, 1 \rangle C(E) = \langle \nu_2, 1 \rangle C(E)$. 従って $\langle \nu_1 - \nu_2, 1 \rangle = 0$ だから補題 5.1 と同様の議論で $\nu_1 = \nu_2$ が云える.

一般の場合は ν の台を含む $\mathcal{F}$ の元 E を取り上と同様にすればよい。　　(終)

${}^E P$, ${}^E G$ を第 III 部 (7.1) 式で定義し

$$(6.1) \qquad {}^E N(x, y) = \begin{cases} {}^E G(x, y) & x \notin E,\ y \notin E \\ 0 & x \in E \text{ 又は } y \in E \end{cases}$$

とおくと任意の $E \in \mathcal{F}_c$ に対して,

$$(6.2) \qquad {}^c G(x, y) = H^E\, {}^c G(x, y) + {}^E N(x, y).$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

但し H^E は P に対し第III部§2で定義した調和測度．${}^cP$ に対して調和測度 ${}^cH^E$ を定義すると明らかに $H^E = {}^cH^E$.

補題 6.1. 任意の $E \in \mathcal{F}_c$ に対して E 上で値 0 を取る非負関数 ${}^Ed$ が存在して

$$(6.3) \qquad G(x,y) = H^E G(x,y) - {}^E N(x,y) + {}^E d(x)\mu(y)$$

と書ける。

証明 (5.1) 式及び (6.2) 式より

$$G(x,y) = H^E G(x,y) - {}^E N(x,y) + (h'(x) - H^E h'(x))\mu(y).$$

従って ${}^Ed(x) = h'(x) - H^E h'(x)$ とおけば $x \in E$ のとき ${}^Ed(x) = 0$, また $H^E = {}^cH^E$ で h' は ${}^cP$ に関し超過的な関数だから第II部定理 0.1 系より ${}^Ed \geqq 0$.

(終)

補題 6.2. f の台が $E \in \mathcal{F}$ なる E に含まれるならば $\lambda_E^\pi g = -C(E)\langle \mu, f\rangle$, かつ $g = H^E g - \langle \mu, f \rangle {}^E d$.

証明 初めの関係式は $g = -Gf$ に左から λ_E^π を施し $E \in \mathcal{F}_c$ のとき E 上で $\lambda_E^\pi G = C(E)\cdot\alpha$ である事に注意すればよい。第2の関係式は (6.3) 式に右から $-f$ を施せばよい。 (終)

定理 5.1 系 1 及び (6.3) 式を使って上と同様にすれば,

補題 6.3. $f \geqq 0$ かつ $E \in \mathcal{F}$ ならば $-\langle \lambda_E^\pi, g\rangle \geqq C(E)\langle \mu, f\rangle$, $g \geqq H^E g - \langle \mu, f\rangle {}^E d$.

定理 6.1. (掃散原理) $f \geqq 0$ のとき任意の $E \in \mathcal{F}$ に対して台を E 内に持つ関数 f' を charge とする generalized potential g' で次の性質を持つものが唯1つ存在する。

(i) $g' \leqq g$, E 上では $g' = g$.

(ii) $\langle \mu, f' \rangle = \dfrac{-\langle \lambda_E^\pi, g\rangle}{C(E)} \geqq \langle \mu, f\rangle$.

証明 第III部§2と同様に P^E を定義し,

$$(6.4) \qquad f'(x) = \begin{cases} (I - P^E)g(x) - \dfrac{\langle \lambda_E^\pi, g\rangle}{C(E)} f_E(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

とおく．f'の台がEに含まれる事は明らか．$x\in E$のとき，

$$(I-P^E)^cGf(x)=(I-{}^cP^E)^cGf(x)-P^E(x,c)\langle\mu,f\rangle=f(x)-P^E(x,c)\langle\mu,f\rangle,$$

$$(I-P^E)h'(x)=(I-P^E)^cGf_E(x)=f_E(x)-P^E(x,c)\langle\mu,f_E\rangle$$
$$=f_E(x)-P^E(x,c),$$

だから補題6.3を使うと

$$f'(x)=(I-P^E)^cGf(x)-(I-P^E)h'(x)\langle\mu,f\rangle-\frac{\langle\lambda_E^\pi,g\rangle}{C(E)}f_E(x)$$

$$=f(x)-\langle\mu,f\rangle f_E(x)-\frac{\langle\lambda_E^\pi,g\rangle}{C(E)}f_E(x)\geqq f(x)\geqq 0\,.$$

故に$f'\geqq 0$．またμのEへの制限はP^Eの不変測度である（第II部補題8.1系）から補題6.3より(ii)は明らかである．(i)の証明は，${}^cGP^E(x,c)=H^{\{c\}}(x,c)=1$に注意すると$x\in E$のとき，補題5.3及び系より

$$g'(x)=-Gf'(x)=\sum_{y\in E}{}^cG(I-P^E)(x,y)g(y)-\frac{\langle\lambda_E^\pi,g\rangle}{C(E)}{}^cGf_E(x)$$
$$+h'(x)\frac{\langle\lambda_E^\pi,g\rangle}{C(E)}\langle\mu,f_E\rangle-\langle\pi,f'\rangle$$
$$=\sum_{y\in E}{}^cG(I-{}^cP^E)(x,y)g(y)-{}^cGP^E(x,c)g(c)-\langle\pi,f'\rangle$$
$$=g(x)-g(c)-\langle\pi,f'\rangle\,.$$

また$x\notin E$のときは${}^cGf_E(x)\leqq h'(x)$（補題5.3）だから$\dfrac{\langle\lambda_E^\pi,g\rangle}{C(E)}\leqq 0$（補題6.3）に注意すると同様に$g'(x)\leqq g(x)-g(c)-\langle\pi,f'\rangle$．従って$\langle\pi,f'\rangle=-g(c)$を云えばよい．

$$\langle\pi,f'\rangle=\sum_{y\in E}\pi(I-P^E)(y)g(y)-\frac{\langle\lambda_E^\pi,g\rangle}{C(E)}\langle\pi,f_E\rangle$$
$$=\sum_{y\in E}(\pi+I(c,\cdot))(I-{}_cP^E)(y)g(y)-g(c)-\langle\lambda_E^\pi,g\rangle$$
$$=-g(c)\,.$$

（終）

上のg'をgのE上への掃散potentialという．最大値原理（R.R.M.P）より明らかにgの$E\in\mathfrak{F}$上への掃散potentialはE上でgより大なる，非負chargeに対する，一般化されたpotentialの中で最小のものである．

<u>定理6.2.（優越原理）</u>　<u>$f\geqq 0$, $f'\geqq 0$をchargeとする一般化されたpotential $g=-Gf$, $g'=-Gf'$に対しf'の台が$E\in\mathfrak{F}$に含かれ，E上では$g\geqq g'$な</u>

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

らばS上到るところで $g \geqq g'$である。

証明　補題6.2及び補題6.3より

$$g \geqq H^E g - \langle \mu, f \rangle {}^E d \geqq H^E g + \frac{\langle \lambda_E^\pi, g \rangle}{C(E)} {}^E d$$

$$= H^E g' - \langle \mu, f' \rangle {}^E d = g'.$$

（終）

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

文　献

[1] G.A.Hunt: *Markov processes and potentials* I, II, III. Illinois J. Math. 1, 44-93, 316-369 (1957); idid. 2, 151-213 (1958).

[2] ――――: *Markov chains and Martin boundaries*. Illinois J. Math., 4, 313-340 (1960).

[3] J. G. Kemeny, J. L. Snell and A.W.Knapp: *Denumerable Markov chains*, Princeton, N. J., D. Van Nostrand Co., Inc., 1966.

[4] R.Kondō: *On a construction of recurrent Markov chains*. Osaka J. Math. 6, 13-28 (1969).

[5] ――――: *On a construction of recurrent Markov chains* II. to appear.

[6] P. A. Meyer: *Caractérisation des noyaux potentiels des semi-groupes discrets*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 16, 225-246 (1966).

[7] S. Orey: *Potential kernels for recurrent Markov chains*. J. Math. Anal. Appl. 8, 104-132 (1964).

[8] Y. Ōshima: *A necessary and sufficient condition for a kernel to be a weak potential kernel of recurrent Markov chains*. Osaka J. Math. 6, 29-37 (1967).

[9] ――――: *On the capacity of recurrent Markov chains*. to appear.

[10] F. Spitzer: *Principles of random walk*. Princeton, N. J., D. Van Nostrand Co., Inc., 1964.

[11] 渡辺　毅: 可附番空間の*Markov*過程から導びかれる*Martin*境界., Semi. on Prob. Vol. 1.

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

付録1

連続係数の Markov chain の potential 作用素について

近 藤 亮 司

このノートの目的は上巻第Ⅱ部，下巻第Ⅳ部において述べられている *Markov chain* の *potential* 作用素の特徴づけの問題を連続係数の場合について考えることである。係数を連続にすると，*Markov* 過程論の言葉で云えば，無限回 *jump* した後の *path* の行動が *potential* 作用素に影響を与えること等，新しい事情が発生して来るため，第Ⅱ部，第Ⅳ部におけるような完全な解決は得られていない．しかし，一方では，係数を連続にすると，他の *Markov* 過程，例えば拡散過程等と類似点が増して来るため，そのような *Markov* 過程を *potential* 論的に研究することへの足がかりとか展望を与えるという利点もある。

以下全体を4つの部分に分け，§1では，必要な定義や記号の説明を与え，§2で推移的な場合，§3で再帰的な場合の *potential* 作用素を考える．最後の節では関連する話題について述べる．頁数の都合もあるので，離散係数の場合と余り違わない主張や，有名な主張については，文献を引用するだけにとどめて，詳しく証明をつけないものが多いが，離散係数と異なる主張の場合は，例を用いて，出来るだけ詳しく説明を加えることにする。

§1. 記号と諸定義

S を可算集合とし，S 上の核の集まり $(P_t)_{t>0}$ が次の3条件：

(P.1)　$P_t \geqq 0$，$P_t 1 = 1$ $[P_t 1 \leqq 1]$　　$(^\forall t > 0)$，

(P.2)　$P_s P_t = P_{s+t}$　　$(^\forall s, t > 0)$，

(P.3)　各 $x, y \in S$ に対し，函数：

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$t \longrightarrow P_t(x, y)$$

は $(0, \infty)$ 上で連続。

をみたすとき Markov [sub-Markov] 半群と呼ぶことにする。又 sub-Markov 半群 $(P_t)_{t>0}$ は (P.3) より強い条件:

(P.3′) $\quad P_t \longrightarrow I \quad (t \longrightarrow 0)$

をみたすとき連続であるということにしよう。

Markov [sub-Markov] 半群 $(P_t)_{t>0}$ が与えられたとき, 各 $p>0$ に対し, 核 V_p を

$$(1.1) \qquad V_p(x,y) = \int_0^\infty e^{-pt} P_t(x,y)\, dt \qquad (x, y \in S)$$

により定義すると, 核の集まり $(V_p)_{p>0}$ は

(V.1) $\quad V_p \geqq 0, \quad pV_p 1 = 1 \; [pV_p 1 \leqq 1] \quad (\forall, p>0)$

(V.2) (resolvent 方程式)

$$V_p - V_q + (p-q) V_p V_q = 0 \qquad (p, q > 0)$$

をみたすことが容易に確かめられる。$(V_p)_{p>0}$ は半群 $(P_t)_{t>0}$ の resolvent と呼ばれるが, 半群とは関係なく (V.1), (V.2) をみたす核の集まり $(V_p)_{p>0}$ を Markov [sub-Markov] resolvent と呼ぶこともある。Reuter [18] によれば, 逆に Markov [sub-Markov] resolvent $(V_p)_{p>0}$ が与えられたとき, それを resolvent としてもつ Markov [sub-Markov] 半群 $(P_t)_{t>0}$ が唯一つ存在し, しかもそれが連続であるためには $(V_p)_{p>0}$ が

(V.3) $\quad pV_p \longrightarrow I \quad (p \to \infty)$

をみたすことが必要十分条件である. 従って, 可算空間においては半群を考えることと, resolvent を考えることとは全く同等である.

離散係数のときと同様に, sub-Markov 半群 $(P_t)_{t>0}$ は

$$(T) \qquad \int_0^\infty P_t(x,y)\, dt < \infty \qquad (\forall x, y \in S)$$

をみたすとき推移的,

$$(R) \qquad \int_0^\infty P_t(x,y)\, dt = \infty \qquad (\forall x, y \in S)$$

をみたすとき (既約) 再帰的ということにする。一方 $(V_p)_{p>0}$ を $(P_t)_{t>0}$ の resolvent とすると, 各 $x, y \in S$ に対し, 函数: $p \to V_p(x,y)$ は $(0,\infty)$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

で単調減少であるから，$\lim_{p\to 0} V_p(x, y)$ が（∞ を許して）確定する．条件 (T)，(R) はそれぞれ

$$(T') \qquad \lim_{p\to 0} V_p(x, y) < \infty \qquad (\forall x,\ y \in S),$$

$$(R') \qquad \lim_{p\to 0} V_p(x, y) = \infty \qquad (\forall x,\ y \in S)$$

と同等である．又 resolvent 方程式より，任意の $0 < q < p$ に対し，

$$V_q[I + (q-p)V_p] = V_p$$

を得るが，$(V.1)$ を利用すると，各 $x,\ y \in S$ に対し

$$V_q(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (p-q)^n (V_p)^{n+1}(x, y)$$

となる．両辺は q について $(0, p)$ において単調減少函数であるから，

$$\lim_{q\to 0} V_q(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n (V_p)^{n+1}(x, y)$$

となる．従って条件 (T')，(R') はそれぞれ

$$(T'') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (pV_p)^n (x, y) < \infty \qquad (\forall x,\ y \in S)$$

$$(R'') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (pV_p)^n (x, y) = \infty \qquad (\forall x,\ y \in S)$$

とも同等である。このことは連続係数の Markov 半群の理論を離散係数の Markov chain の理論から導くとき，しばしば用いられる。最後に連続係数の Markov chain を Markov 過程として考える場合の正則化の問題に触れておく。$(P_t)_{t>0}$ を sub-Markov 半群としたとき，Kolmogorov の拡張定理を用いて，$(P_t)_{t>0}$ を推移確率としてもつような S 上の Markov 過程が構成出来ることはよく知られている．しかし，一般には，その Markov 過程の見本過程は複雑な構造をもち，強 Markov 性等の便利な性質も期待出来ない．しかし $(P_t)_{t>0}$ が連続な場合には，函数族 $(V_1(\ \ , y))_{y\in S}$ が S の2点を分離するので，Ray [17]の考えに基づいて，次のような，比較的性質のよい Markov 過程を考えることが出来る(註)。 即ち S を稠密な部分集合として含むような，compact 距離空

(註) 実際には[17]にはいくらか不完全な所があったが，その後，国田－渡辺[11]，P.Meyer[15]，J.L.Doob[3]等により欠点は除かれた。ここでは P. Meyer[15]を参照する．又 Markov 過程の一般論については，(次頁下段へつづく)

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

間$\bar{S}$上に，次の性質をもつようなMarkov過程 $X=(\Omega,\zeta,\tilde{\mathcal{F}},(X_t)_{t\geqq 0},(\theta_t)_{t\geqq 0},(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geqq 0},(P_x)_{x\in\bar{S}})$ を構成することが出来る．

(i) Xは右連続で強Markov性をもつ。

(ii) すべての$x\in\bar{S}$に対し，集合$\{t|X_t\in\bar{S}\setminus S\}$のLebesgue測度は$P_x$-測度1で0に等しい。

(iii) $\bar{S}$上の連続函数$\tilde{f}$及び任意の$p>0$に対し，
函数: $x\longrightarrow E_x(\int_0^\zeta e^{-pt}\tilde{f}(X_t)\,dt)$
は$\bar{S}$上で連続．

(iv) すべてのx, $y\in S$に対し，
$$P_x(X_t=y)=P_t(x,y).$$

以後このようなMarkov過程を$(P_t)_{t>0}$を推移確率とするRay過程と呼ぶことにしよう．$\bar{S}$からSに導かれる位相は一般には離散位相ではないこと，及び$\bar{S}-S$上の点は分枝点(branching point)となることがあることを注意しておく。特に断らない限り，Ray過程を考えるときは，S上の函数fは$\bar{S}-S$上では0と定義し，$\bar{S}$上に拡張して考えることにする．

第II部第IV部と同様にS上の有界函数全体の空間を$\mathcal{B}$，有限な台をもつ函数全体の空間を$\mathcal{M}$，μをS上いたる所正な測度とするとき$f\in\mathcal{M}$が$\langle\mu,f\rangle=0$をみたすならば（μについて）null chargeと呼ぶことにし，μについてのnull charge全体を$\mathcal{N}(\mu)$又は誤解のないときは単に$\mathcal{N}$で表わす．

§2. 推移的半群のpotential核

$(P_t)_{t>0}$を推移的sub-Markov半群とする．このとき

(2.1) $$V(x,y)=\int_0^\infty P_t(x,y)\,dt\qquad(\forall x,\ y\in S)$$

により定義されるS上の核Vを$(P_t)_{t>0}$のpotential核という。前節で注意したように

(2.2) $$V=\sum_{n=0}^\infty p^n(V_p)^{n+1}$$

(前頁脚註のつづき) 細かい記号上の違いは別として，主にBlumenthal-Getoorの書物[1]を参照する。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

が任意の $p>0$ に対して成立するので

$$(2.3)\qquad I+pV=\sum_{n=0}^{\infty}(pV_p)^n \qquad (p>0)$$

となる。このことは sub-Markov 核 pV_p を推移確率とする離散係数の Markov chain は推移的であり，その第II部の意味での potential 核が $I+pV$ であることを示している。従って任意の $x,y\in S$ に対し

$$I(x,y)+pV(x,y)\leqq I(y,y)+pV(y,y)$$

がすべての $p>0$ に対し成り立つ。両辺を p で割り，$p\to\infty$ とすれば

$$(2.4)\qquad V(x,y)\leqq V(y,y) \qquad (\forall x,y\in S)$$

となる。従って V は自然な方法で M から B への線型写像を定義する。

定理2.1. V は完全最大値原理（complete maximum principle）:

(C.M) 定数 $a\geqq 0$ 及び任意の $f\in M$ に対し，$\{f>0\}$ 上で $Vf\leqq a$ であれば S 上で $Vf\leqq a$，

をみたす．

証明 任意の $p>0$ に対し，$I+pV$ は強められた最大値の原理:

(R.M.P) 任意の定数 $a\geqq 0$ 及び $f\in M$ に対し，$\{f>0\}$ 上で $(I+pV)f\leqq a$ であれば S 上で $(I+pV)f\leqq a-f^-$，

をみたす。（第II部定理1.3系2）。従って，もし $\{f>0\}$ 上で $Vf\leqq a$ であれば，$(I+pV)f\leqq\|f\|+pa$ が $\{f>0\}$ 上で成り立ち，上記（R.M.P）を用いると，$(I+pV)f\leqq\|f\|+pa-f^-\leqq\|f\|+pa$ が S 上で成り立つ。両辺を p で割った後 $p\to\infty$ とすれば，$Vf\leqq a$ が S 上で成立し，このことは V が（C.M）をみたすことを示す。（終）

以上のことにより，V が推移的な sub-Markov 半群 $(P_t)_{t>0}$ の potential 核であれば，V は M から B への作用素を定義し，それは完全最大値の原理をみたすことを知った。今度は逆に V が M を B に写す線型作用素であって，完全最大値の原理をみたすとき，V を potential 核とする sub-Markov 半群 $(P_t)_{t>0}$ が存在するかという問題について考える。前節で注意したように，可算空間の場合には，これは

$$(2.5)\qquad V=\lim_{p\to 0}V_p$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

となる sub-Markov resolvent $(V_p)_{p>0}$ が存在するかという問題と全く同等である。

このことに関し，次の２つのことはよく知られている．Vを(C.M)をみたす核として，

定理 2.2 (2.5)をみたす sub-Markov resolvent $(V_p)_{p>0}$ は存在したとすれば唯一つである．

証明は例えば Meyer [13, p.205] の定理８に書いてあるので省略する．

定理 2.3. もし，$V1$ が有界函数であれば(2.5)をみたす sub-Markov resolvent $(V_p)_{p>0}$ が存在する。

この定理の証明も Meyer[13, p.206] 定理10として知られているので省略する．

もう少しゆるい条件として，VがMをB_0 (M のBにおける一様ノルムについての閉包) を写すならば，やはり(2.5)をみたす sub-Markov resolvent $(V_p)_{p>0}$ が存在することが Lion[12] により示され，それの証明も Meyer[13, p208] に定理11として出ている．一方，これは Meyer 自身によるものと考えられるが，(C.M)をみたすけれども，いかなる sub-Markov resolvent $(V_p)_{p>0}$ によっても(2.5)のようには決して表わされない核Vが存在することが知られている。(例は Meyer[13, p.206] に出ていて，それは本質的に第Ⅱ部 44 頁において紹介したものと同じである)。従って，(C.M)をみたすMからBへの写像Vが与えられたとき，それが推移的半群$(P_t)_{t>0}$の potential 核であるための必要十分条件は何か，ということが当然発生する問題であるが，このことの解決は現在のところ出来ていない．離散係数の場合一つの必要十分条件は第Ⅱ部で紹介したように， Meyer によって与えられ，それは 45 頁に出ている(N) (nul aux bord) という条件であった。以下同様のことを連続係数の場合に試みるが，条件(N')はVが potential 作用素であるための十分条件を与え，上記 Lion の結果を含むが必要条件ではないこと示す例があることがわかる。

Hansen [4] の研究も同じ様な結果と考えられるが以下の記述は主として筆者[7] による．今VをMをBに写す線型写像で完全最大値原理(C.M)をみたすものとし，更に函数 $V1$ は有界でないとする。

一般にUをMをBに写す線型写像とするとき，非負函数hがUに関し quasi-excessive ということを，任意の$f \in M$に対し，$\{f>0\}$ 上で $h \geqq Uf$ ならS上

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

で $h \geqq \nabla f$ が成立つことと，定義する(註)．完全最大値原理は定数$a \geqq 0$が∇に関して *quasi-excessive* であることを示している．又(C,M)を用いて非負函数 $f \geqq 0$ に対し，∇f が有限な値をとれば，それも∇に関し，*quasi-excessive* であることを証明することが出来る．以上証明は第Ⅱ部と殆んど同じであるから省略しよう．方法は第Ⅱ部とは大分異なるけれども，第Ⅱ部定理2.3に対応して次のことが成り立つ．

定理2.4. ∇を(C,M)をみたす核とする．このとき任意の∇-*quasi-excessive* 函数(註)と任意の$E \subset S$に対し，E上でhより大な∇-*quasi-excessive* 函数の中で最小の函数 $H^E h$ が存在する．

証明はMeyer [14] において与えられているので省略する．

特に$f \in \mathcal{M}^+$ に対し，∇f は∇-*quasi-excessive* であるから任意の$E \subset S$に対し，$H^E \nabla f$ は定義される．こゝで第Ⅱ部定理3.1に対応して（実際にそれを利用もして）次の定理が証明出来る．

定理2.5 ∇を(C,M)をみたす$\mathcal{M}$から$\mathcal{B}$への線型写像とする．このときもし

(N') 任意の$f \in \mathcal{M}^+$， $B_n \downarrow \phi$となる任意の列$(B_n)_{n \geqq 1}$に対し

$$\lim_{n \to \infty} H^{B_n} \nabla f = 0$$

が成り立つならば，

$$\nabla = \lim_{p \to 0} \nabla_p$$

となる sub-Markov resolvent $(\nabla_p)_{p>0}$ が存在する。

証明（筆者[7]）

任意の$p>0$に対し，$G_p = I + p\nabla$ とおく．まずhが∇-*quasi-excessive*であれば，任意の$f \in \mathcal{M}$に対し，もし$\{f > 0\}$上で $G_p f \leqq h$ が成り立てば全空間S上で，$G_p f \leqq h - f^-$ が成り立つことを示す．実際$\{f > 0\}$上では

$$p\nabla f \leqq f + p\nabla f = G_p f \leqq h$$

(註) 第Ⅱ部p.41の定義とは異なっているが，これが本来Meyerの与えた定義である。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

であり，h が V-*quasi-excessive* であるから，S 上で，$pVf \leqq h$ が成り立つ。特に $\{f \leqq 0\}$ 上では

$$G_p f = pVf - f^- \leqq h - f^-$$

となるので仮定と合わせて，S 上で $G_p f \leqq h - f^-$ である。

このことから任意の V-*quasi-excessive* 函数は G_p-*quasi-excessive* 函数であること，及び G_p は強められた最大値原理（R.M.P）（第 II 部 §2 ）をみたすことが容易に確かめられる。（R.M.P）は(C.M)を意味するので，定理 2.4 により，任意の G_p-*quasi-excessive* 函数 h 及び $E \subset S$ に対し，E 上では h より大きい G_p-*quasi-excessive* 函数の中で最小の函数 $H_p^E h$ が存在する。特に h が V-*quasi-excessive* 函数とすると，（それは G_p-*quasi-excessive* であり） $H^E h$ は E 上で h より大な G_p-*quasi-excessive* 函数であるから $H_p^E h \leqq H^E h$ が成立する。従って仮定(N')より，任意の $f \in M^+$，$B_n \downarrow \phi$ となる任意の列 $(B_n)_{n \geqq 1}$ に対し，

$$0 \leqq \lim_{n \to \infty} H_p^{B_n} G_p f \leqq \lim_{n \to \infty} H^{B_n} Vf = 0$$

となる。このことから第 II 部定理 3.1 より，S 上の推移的 *sub-Markov* 核 Q_p が存在して，

$$G_p = \Sigma_{n=0}^{\infty} Q_p^n$$

とかけることが分る。ここで $V_p = Q_p / p$ と定義しよう。関係式

$$G_p Q_p = G_p - I$$

を書きなおしてみると

$$(I + pV) V_p = V$$

であることが分る。以下 $(V_p)_{p>0}$ が求める *resolvent* であることを示す。先ず pV_p は *sub-Markov* 核であるから，(V.1)は明らかである。次に $p, q > 0$，$f \in M$ とすると

$$
\begin{aligned}
&(I + pV)(V_p f - V_q f) \\
&= (I + pV) V_p f - (I + qV) V_q f + (q - p) V V_q f \\
&= (q - p) V V_q f \\
&= (I + pV)[(q - p) V_p V_q f]
\end{aligned}
$$

が成り立つが，$G_p = I + pV$ が（R.M.P）をみたすので第 II 部定理 2.1 により

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$V_p f - V_q f = (q-p) V_p V_q f$$

である．このことは $(V_p)_{p>0}$ が *resolvent* 方程式（V. 2）をみたすことを意味する。又，

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} p^n (V_p)^n$$

であるから，既に注意したように

$$V = \lim_{p \to 0} V_p$$

であり定理は証明された。　　　　（終）

離散係数のときとは異なって，条件 (N') は，上記のような *resolvent* $(V_p)_{p>0}$ が存在するための必要条件ではないことを示す例をあげる。

例　$N = \{1, 2, 3, \cdots\}$ とし，N を状態空間とする右連続強 *Markov* 過程 $Y = (\Omega, \mathcal{F}, (Y_t)_{t \geq 0}, (\theta_t)_{t \geq 0}, (P_x)_{x \in N})$ で，推移確率：

$$Q_t(x, y) = P_x(Y_t = y)$$

$$= \begin{cases} 0 & y < x \\ \dfrac{t^{y-x}}{(y-x)!} e^{-t} & y \geqq x \end{cases}$$

（*Poisson* 過程）をもつものを考える。次に φ を N 上で定義され，すべての点で正で，

$$\sum_{y \in N} \frac{1}{\varphi(y)} < \infty$$

なるものとする。ここで，加法的汎函数

$$A_t = \int_0^t \frac{1}{\varphi(X_s)} ds \qquad (0 \leqq t < \infty)$$

を考え，$\zeta = \lim_{t \to \infty} A_t$ とおく。すべての $x \in N$ に対し，

$$E_x(\zeta) = E_x\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\varphi(Y_s)} ds\right)$$

$$= \sum_{y \geqq x} \frac{1}{\varphi(y)} < \infty$$

であるから，$P_x(\zeta < \infty) = 1$ である．次に，$t \in [0, \zeta)$ に対し，

$$C_t = s \iff A_s = t$$

により $(C_t)_{0\leqq t<\zeta}$ を定義し,

$$X_t = Y_{C_t} \ , \quad \theta_t = \varphi_{C_t} \qquad (0 \leqq t < \zeta)$$

とおくと, $X=(\Omega, \widetilde{\mathcal{F}}, \zeta, (X_t)_{t\geqq 0}, (\theta_t)_{t\geqq 0}\, (P_x)_{x\in N})$ は再び右連続強Markov過程で, その resolvent $(V_p)_{p>0}$ は

$$(2.6) \qquad V_p(x, y) = \begin{cases} 0 & y < x \\ \prod_{x\leqq z\leqq y} \dfrac{\varphi(z)}{p+\varphi(z)} \cdot \dfrac{1}{\varphi(y)} & y \geqq x \end{cases}$$

により与えられる. 又, potential 核 V は

$$(2.7) \qquad V(x, y) = \begin{cases} 0 & y < x \\ 1/\varphi(y) & y \geqq x \end{cases}$$

であることは容易に確かめられる. 又,

$$\begin{aligned} e_p(x) &= E_x(e^{-p\zeta}) \\ &= 1 - pV_p 1(x) \end{aligned}$$

となることを注意しておく.

次に $N_1 = N_2 = \{1, 2, \cdots\}$, とし, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ をそれぞれ X と同値な N_1, N_2 上の Markov 過程とする。それぞれの resolvent を $(V_p^{(1)})_{p>0}$, $(V_p^{(2)})_{p>0}$ として, $S = N_1 \cup N_2$ 上の核 V_p を

$$(2.8) \qquad V_p(x, y) = \begin{cases} V_p^{(1)}(x, y) & x, y \in N_1 \\ V_p^{(2)}(x, y) & x, y \in N_2 \\ e_p^{(1)}(x) V_p^{(2)}(1, y) & x \in N_1,\ y \in N_2 \\ 0 & x \in N_2,\ y \in N_1 \end{cases}$$

により定める。直観的には, $x \in N_1$ から出発した粒子は $X^{(1)}$ と同じ運動をし, $\zeta^{(1)}$ において死んだ瞬間に N_2 の 1 から出発して, $X^{(2)}$ と同じ行動をするような Markov 過程の resolvent である. 実際, 計算により $(V_p)_{p>0}$ は S 上の sub-Markov resolvent であることが確かめられる. 又, $V = \lim_{p\to 0} V_p$ とおくと

$$(2.9) \qquad V(x, y) = \begin{cases} V^{(1)}(x, y) & x, y \in N_1 \\ V^{(2)}(x, y) & x, y \in N_2 \\ V^{(2)}(1, y) & x \in N_1,\ y \in N_2 \\ 0 & x \in N_2,\ y \in N_1 \end{cases}$$

となることが分る。このような V は S 上で (C.M) をみたし, sub-Markov-resolvent $(V_p)_{p>0}$ により

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$V = \lim_{p \to 0} V_p$$

と表わされている。一方，

$$f(y) = \begin{cases} 1 & y = 1 \in N_2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とおくと

$$Vf(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi_2(1)} & x \in N_1 \quad \text{又は} \quad x = 1 \in N_2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる．ここで $B_n = \{n, n+1, \cdots\} \subset N_1$ とすると，
すべての $n \geqq 2$ に対し $1 \in N_1$ のとき

$$H^{B_n} Vf(1) = \frac{1}{\varphi_2(1)} \qquad (\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi)$$

となり，$B_n \downarrow \phi$ であるにもかかわらず $H^{B_n} Vf(1) \to 0$ $(n \to \infty)$ とはならない。従って，V が resolvent $(V_p)_{p>0}$ により，$V = \lim_{p \to 0} V_p$ とかけるために条件 (N') は必ずしも必要ではないことが分る。

§3. 再帰的 Markov 半群の potential 作用素

この節では $(P_t)_{t>0}$ を再帰的 Markov 半群とし，$(V_p)_{p>0}$ をその resolvent とする．この場合，離散係数のときと同様に

$$(3.1) \qquad \mu P_t = \mu \qquad (\forall t \geqq 0)$$

をみたし，いたるところ正な測度，即ち不変測度が定数倍を除いて，唯一つ存在する。函数 $f \in M$ は，もし $\langle \mu, f \rangle = 0$ をみたすとき null charge といい，null charge の全体を N 又は $N(\mu)$ で表わす。今，N を B に写す線型写像 V があって，

$$(\mathrm{W.P}) \qquad (I - P_t) Vf = \int_0^t P_s f \, ds \qquad (\forall t \geqq 0)$$

が成り立つとき $(P_t)_{t>0}$ の弱 potential 作用素と呼ぶ．(W.P) は条件：

$$(\mathrm{W.P'}) \qquad (I - pV_p) Vf = V_p f \qquad (\forall p > 0)$$

と同等である．

以下，そのような弱 potential 作用素がいかなる再帰的 Markov 半群に対し

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

ても存在すること，それが後で述べる最大値原理（S.C.M）をみたすこと，最後に（S.C.M）をみたす作用素が与えられたとき，それを弱 potential 作用素としてもつ，再帰的半群の構成問題等，大体において，第Ⅱ部，第Ⅳ部と同じ主題について考える(註)。

今，$(P_t)_{t>0}$ を連続な再帰的 Markov 半群，$X=(\Omega, \hat{f}, (X_t)_{t\geqq 0}, (\theta_t)_{t\geqq 0}, (P_x)_{x\in\bar{S}})$ を $(P_t)_{t>0}$ を推移確率とする Ray 過程とする。以後集合 $E\subset\bar{S}$ への到達時間を σ^E，E からの出達時間を τ^E で表わす。即ち，$\sigma^E=\inf\{t>0 : X_t\in E\}$，$\tau^E=\sigma^{\bar{S}-E}$ とする．特に E が一点集合 $\{c\}$ の場合には $\sigma^{\{c\}}$，$\tau^{\{c\}}$ の代りに σ^c，τ^c 等を用いる。第Ⅱ部定理5.2と同様にして次のことが示される．

補題　任意の $c\in S$ に対し，

(3.2)　$$ {}^c\nabla(x,y)=E_x[\int_0^{\sigma^c} I_{\{y\}}(X_t)\,dt] \qquad (x,y\in S)$$

とおくと

$$ {}^c\nabla(x,y)\leqq {}^c\nabla(y,y)<\infty$$

が成り立つ。

定理3.1.　τ をある $c\in S$ に対し，$P_a(\tau>0)=1$，$E_a[\tau]<\infty$ をみたす任意の Markov 時間とする．このとき，

(3.3)　$$\mu(y)=E_c[\int_0^{\tau+\sigma_0^c\theta_\tau} I_{\{y\}}(X_t)\,dt] \qquad (y\in S)$$

により定義される測度 μ は $(P_t)_{t>0}$ の一つの不変測度である．

証明　任意の $y\in S$ に対し，

$$\mu(y)\leqq E_c[\tau]+{}^c\nabla(y,y)<\infty$$

であるから μ は有限な値をとる．また，$\rho^c=\tau+\sigma_0^a\theta_\tau$ とおくと

$$\begin{aligned}\mu P_t(y) &= E_c[\int_0^{\rho^c} E_{X_s}(I_{\{y\}}(X_t))\,ds]\\ &= E_c[\int_0^{\rho^c} I_{\{y\}}(X_s)\,ds]\\ &\quad + E_c[\int_{\rho^c}^{\rho^c+t} I_{\{y\}}(X_s)\,ds]\end{aligned}$$

(註)　詳しくは筆者[6],[8],[9]又はそれ等を総合報告風にかいてある[10]を参照して頂きたい．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$- E_c[\int_0^t I_{\{y\}}(X_s)\,ds]$$

$$= E_c[\int_0^{\rho c} I_{\{y\}}(X_s)\,ds] = \mu(y).$$

最後に,

$$\langle \mu, 1 \rangle \geqq E_c[\tau] > 0$$

より $\mu(y_0) > 0$ なる $y_0 \in S$ が存在するが，このことから

$$\mu(y) = \mu P_t(y) \geqq \mu(y_0) P_t(y_0, y) > 0$$

がすべての $y \in S$ に対し成立する．従って，μ は $(P_t)_{t>0}$ の一つの不変測度であることが分る．（終）

τ として特別な Markov 時間をとることにより，不変測度の一つの公式を与える。

系. τ を $(X_t)_{t\geq 0}$ と独立で，平均 $1/p$ の指数分布に従う確率変数とすると，

(3.4) $$\mu(y) = V_p(c,c) + pV_p{}^cV(c,y) \qquad (y \in S)$$

は一つの不変測度である。

第II部補題 6.1 と全く同様にして次の Dynkin の公式が証明される。

補題 （Dynkinの公式）

τ を $P_x(\tau<\infty)=1$, $E_x[\int_0^\tau I_{\{y\}}(X_t)\,dt]<\infty$ $(\forall x, y \in S)$ をみたす Markov時間とする。このとき $f \in M$ に対し，$g \in B$ が

$$(I - P_t)g = \int_0^t P_s f\,ds \qquad (\forall t \geqq 0)$$

をみたすならば

(3.5) $$g(x) - E_x[g(X_\tau)] = E_x[\int_0^\tau f(X_t)\,dt]$$

が成り立つ。

次に第II部定理 6.2 にあたる定理を証明しよう。

定理 3.2. 任意の連続な再帰的Markov 半群 $(P_t)_{t>0}$ に対し，弱 potential 作用素 V が存在する。しかもそれは null charge の空間 M の線型汎函数の差を除い

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

て唯一つである.

証明　$c \in S$ とし，${}^c V$ を (3.2) により定義される核とする．${}^c V$ は自然な方法で N から B への線型写像を定義するが，これが一つの弱 potential 作用素であることを示そう。$p>0$ に対し，

$$ {}^c V_p(x,y) = E_x\left[\int_0^{\sigma_c} e^{-pt} I_{\{y\}}(X_t)\,dt\right] $$

により S 上の核 ${}^c V_p$ を定義すると簡単な計算で

$$ \begin{aligned} &(I - pV_p)\,{}^c V(x,y) \\ &= V_p(x,y) - V_p(x,c) \times [V_p(c,y) \\ &\quad + pV_p\,{}^c V(c,y)] / V_p(c,c) \end{aligned} $$

であることが分る．ところが定理 3.1 系により

$$ V_p(c,y) + pV_p\,{}^c V(c,y) \qquad (y \in S) $$

は 1 つの不変測度であるから，任意の不変測度 μ に対し，一意性から

$$ \frac{V_p(c,y) + pV_p\,{}^c V(c,y)}{V_p(c,c)} = \frac{\mu(y)}{\mu(c)} \qquad (y \in S) $$

が成立する。従って

$$ \begin{aligned} &(I - pV_p)\,{}^c V(x,y) \\ &= V_p(x,y) - V_p(x,c)\frac{\mu(y)}{\mu(c)} \qquad (y \in S) \end{aligned} $$

が成り立つ。特に $f \in N = N(\mu)$ であれば

$$ (I - pV_p)\,{}^c V f = V_p f $$

となり，${}^c V$ は一つの弱 potential 作用素である.

次に V を任意の弱 potential 作用素とすると，Dynkin の公式で

$$ Vf(x) - Vf(c) = E_x\left[\int_0^{\sigma_c} f(X_t)\,dt\right] = {}^c Vf(x) $$

が任意の $f \in N$ に対して成り立つ．写像：$f \to Vf(c)$ は N 上の線型汎函数であるから，これを $\ell(f)$ とかくと，

$$ Vf = {}^c Vf + \ell(f) \qquad (\forall f \in N) $$

となり一意性も証明された.　　　　(終)

次に弱 potential 作用素の性質を調べよう.

定理 3.3　V を連続な再帰的 Markov 半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ の弱 potential 作用素とする。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

a） Vは次の半完全最大値原理（semi-complete maximum principle）：

（S.C.M） 任意の$f \in N$，定数aに対し，集合$\{f>0\}$上で$Vf \leqq a$をみたすならばいたるところで $Vf \leqq a$.

をみたす.

b） Vは次の意味で非特異である．即ち$f \in N$が0でなければ$supp(f)$（註）の上でVf は決して定数にはならない．

証明 a） $E=\{f>0\}$とし，E上で$Vf \leqq a$とする．Dynkinの公式で$g=Vf$, $\tau=\sigma^E$ とおくと，任意の$x \in S$に対し，

$$Vf(x)=E_x[X_{\sigma^E})]+E_x\left[\int_0^{\sigma^E} f(X_t)\,dt\right]$$

$$\leqq E_x[Vf(X_{\sigma^E})] \leqq a$$

となり（S.C.M）が証明された。

b） $f \neq 0$とし，$supp(f)$上で$Vf=a$とする．このとき，（S.C.M）をf及$-f$に適用すると，S上で$Vf=a$ が成り立つ。従って，

$$0=(I-P_t)\,Vf=\int_0^t P_s f ds \qquad (\forall t \geqq 0)$$

となり，$(P_t)_{t>0}$の連続性から$f=0$を得て矛盾に導かれる．このことは$supp(f)$上で決してfは定数ではあり得ないことを示している。 （終）

注意 定理の b）の主張からVは単写，即ち$Vf=0$ から$f=0$が出ることが分る。

次に半群が不変測度と弱potential作用素によって唯一通りにきまることを示す。

定理3.4. $(P_t)_{t>0}$，$(\widetilde{P}_t)_{t>0}$を共に連続な再帰的Markov半群とし，それぞれの不変測度をμ，$\widetilde{\mu}$，弱potential作用素をV，$\widetilde{V}$とする．このときもしある正定数kが存在して，$\widetilde{\mu}=k\mu$（従って$N(\widetilde{\mu})=N(\mu)=N$），かつ，$N$上の線型汎函数$\ell$が存在して$\widetilde{V}f=Vf+\ell(f)$ （$\forall f \in N$）が成り立つならば$P_t=\widetilde{P}_t$（$\forall t>0$）である.

証明 先ず任意の$p>0$に対し，$G_p=I+pV$が確められた半完全最大値原理

（註） $supp(f)=\{x \mid f(x) \neq 0\}$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

(reinforced semi-complete maximum principle)(註)

(R.S.C.M) 任意の $f \in \mathcal{N}$，定数 a に対し，$\{f>0\}$ 上で $G_p f \leqq a$ ならば S 上で $G_p f \leqq a-f^-$.

が成り立つことを注意する．(証明は容易であるから略する)。今 $(P_t)_{t>0}$，$(\widetilde{P}_t)_{t>0}$ の resolvent をそれぞれ $(V_p)_{p>0}$，$(\widetilde{V}_p)_{p>0}$ とし，$V_p=\widetilde{V}_p$ ($\forall p>0$) を示せばよい。ところで弱potential作用素の条件 (W, P′) は書きなおしてみると，

$$(I-pV_p)(I+pV)f=f \qquad (\forall f \in \mathcal{N})$$

となるので G_p は再帰的Markov核 $Q_p=pV_p$ の第Ⅱ部の意味での弱potential作用素である。$\widetilde{G}_p f=(I+p\widetilde{V})f=G_p f+\ell(f)$ に注意すれば第Ⅱ部定理6.2により $p\widetilde{V}_p=pV_p$ が出るので，$\widetilde{V}_p=V_p$ がすべての $p>0$ に対して成立する．

(終)

最後に，S 上いたるところ正な測度 μ と，$\mathcal{N}(\mu)$ から B への半完全最大値原理 (S.C.M) をみたす線型写像 V が与えられたとき，μ を不変測度，V を弱potential 作用素としてもつような再帰的Markov半群を構成する問題 (以後<u>構成問題</u>と略称する) について考える。これについても離散係数の場合のような完全な解答は得られていない。まず次のことを示そう。

<u>定理3.5. μ の全測度が有限であるとき，構成問題は解ける。又，得られるMarkov半群 $(P_t)_{t>0}$ が連続であるための必要十分条件は V が非特異なことである。</u>

<u>証明</u> 任意の $p>0$ に対し，$G_p=I+pV$ は (R.S.C.M) をみたすので第Ⅱ部定理8.1により，S 上のMarkov 核 Q_p で

1) $\mu Q_p=\mu$

2) $(I-Q_p)G_p f=f \qquad \forall f \in \mathcal{N}(\mu)$

3) $\forall x, y \in S$ に対し，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(Q_p)^n(x,y)=\infty$$

をみたすものが唯一つ存在する．ここで

$$V_p=Q_p/p$$

と定義すると，$(V_p)_{p>0}$ は S 上の Markov resolvent で，

(註) 第Ⅱ部で (R.R.M.P) とかかれている最大値原理．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$p\mu\bar{V}_p=\mu$$

$$(I-p\bar{V}_p)\bar{V}f=\bar{V}_pf \qquad \forall f\in\mathcal{N}(\mu)$$

$$\lim_{p\downarrow 0}\bar{V}_p(x,y)=\infty \qquad \forall x,y\in S$$

をみたすことが容易に証明出来る。$(\bar{V}_p)_{p>0}$ を resolvent とする半群を $(P_t)_{t>0}$ とすると，明らかにそれが求めるものである。

$(P_t)_{t>0}$ が連続であれば $\bar{V}$ は非特異であることは既に述べたので，V が非特異として，$(P_t)_{t>0}$ が連続であることを示そう．$(P_t)_{t>0}$ が Markov 半群であれば（連続であっても無くても）

$$\bar{W}(x,y)=\lim_{t\downarrow 0}P_t(x,y)$$

がすべての $x,y\in S$ に対し存在し，$\bar{W}$ は $\bar{W}^2=\bar{W}$ をみたす sub-Markov 核であることは知られている（K.L.Chung[2, p118]）。又 $\bar{V}$ が非特異であるから任意の有限集合 E と $g\in B^+$ に対し，E に台の含まれる $f\in\mathcal{N}$ と定数 a が存在し，E 上で $g=\bar{V}f+a$ が成立するように出来る．又（S.C.M）を用いると，S 上で $0\leqq \bar{V}f+a\leqq\|g\|$ が成り立つ。従って $I_{\{y\}}$ を y の指示函数とすれば $f_n\in\mathcal{N}$ 及び実数列 a_n が存在して，

$$\lim_{n\to\infty}[\bar{V}f_n(x)+a_n]=I_{\{y\}}(x) \qquad \forall x\in S$$

$$0\leqq\bar{V}f_n+a_n\leqq 1 \qquad \forall n\geqq 1$$

と出来る。作用素 $\bar{V}$ が（P.W）をみたすことから，すべての $n\geqq 1$ に対し

$$P_t[\bar{V}f_n+a_n]=P_t\bar{V}f_n+a_n$$
$$=\bar{V}f_n+a_n-\int_0^t P_sf_n\,ds$$

が成り立つ．従って Fatou の不等式から

$$\bar{W}[\bar{V}f_n+a]\leqq\bar{V}f_n+a_n$$

がすべての n につき S 上で成立する。$\bar{V}f_n+a_n$ は有界で $[\bar{V}f_n+a_n]\to I_{\{y\}}$ であるから Lebesgue の定理で

$$\bar{W}I_{\{y\}}\leqq I_{\{y\}}$$

即ち，すべての $x,y\in S$ に対し，$\bar{W}(x,y)\leqq I(x,y)$ が成立する．従って $\bar{W}^2=\bar{W}$ を考慮すると，

$$\bar{W}(x,y)=w(x)I(x,y)$$

（但し，$\omega(x)=0$ 又は 1）となる。一方 μ が有界な不変測度であるから Lebesgue の定理で

$$\mu\bar{W}=\lim_{t\to 0}\mu P_t=\mu$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

が成立するので任意の $y \in S$ に対し,

$$w(y)\mu(y) = \mu(y).$$

このことは,すべての $y \in S$ に対し,$\overline{W}(y) = 1$ を示すので,$\overline{W} = I$,即ち

$$I = \lim_{t \to 0} P_t$$

が示された。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(終)

ここで一つの具体的な例を考えよう。

<u>例1</u>　S を整数全体の集合とし,μ を S 上いたるところ正で,$\langle \mu, 1 \rangle < \infty$ なる測度とする。ここで,任意の $f \in M(\mu)$ に対し,

$$(3.6)\qquad \nabla f(x) = \sum_{y \geqq x} f(y)\mu(y) \qquad (\forall x \in S)$$

と定義する。先ず ∇ が半完全最大値原理(S.C.M)をみたし,非特異であることを示そう。そのためには「$\{f > 0\}$ 上で $\nabla f \leqq a$ であれば,すべての $x \in S$ に対し,$\nabla f(x) \leqq a - \mu(x) f^-(x)$」が成り立つことを示せば充分である。実際,「　」内の主張から(S.C.M)は直ちに分る。又もし $f \neq 0$ で,f の台の上で $\nabla f = b$(=定数)とすると,すべての $x \in S$ に対し,$\nabla f(x) \leqq b - \mu(x) f^-(x)$ である。もし $f(x_0) < 0$ となる x_0 が存在したとすると,$b = \nabla f(x_0) \leqq b - \mu(x_0) f^-(x_0) < b$ となり矛盾するので,すべての $x \in S$ に対し,$f(x) \geqq 0$ である。函数 $-f$ に対し,同様のことを行なえば,すべての $x \in S$ に対し,$f(x) \leqq 0$ でなければならないことが分る。従って $f \equiv 0$ となり仮定に反する。このことは ∇ が非特異であることを示す。

今 $\{f > 0\}$ 上で $\nabla f \leqq a$ と仮定しよう。更に $\{f > 0\} = \{c_1, c_2, \cdots, c_p\}$ $(c_1 < c_2 < \cdots < c_p)$ とする。$x < c_1$ とすると,

$$\begin{aligned}\nabla f(x) - \mu(x) f(x) &= \nabla f(x+1) \\ &\leqq \nabla f(c_1) \leqq a\end{aligned}$$

であるから $\nabla f(x) \leqq a - \mu(x) f^-(x)$. $c_j \leqq x < c_{j+1}$ とすると,

$$\begin{aligned}\nabla f(x) - \mu(x) f(x) &= \nabla f(x+1) \\ &\leqq \nabla f(c_{j+1}) \leqq a\end{aligned}$$

より同じ結論が得られる。最後に $x \geqq c_p$ としよう。

$$\begin{aligned}a \geqq \nabla f(c_1) &\geqq \sum_{y \geqq c_1} \mu(y) f(y) \\ &\geqq \sum_{y \in S} \mu(y) f(y) = 0\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

であるから $a \geqq 0$ である．従って

$$Vf(x)-\mu(x)f(x) = \sum_{y \geqq x+1} \mu(y)f(y) \leqq 0 \leqq a$$

となりやはり $\nabla f(x) \leqq a - \mu(x)f^-(x)$ となる。

∇ は（S.C.M）をみたし，非特異であるから前定理により連続で再帰的な半群 $(P_t)_{t>0}$ で μ を不変測度として持ち，∇ を弱potential作用素とするものが唯一つ存在する筈である。実際に $(P_t)_{t>0}$ の resolvent $(\nabla_p)_{p>0}$ の形を求めてみよう．先ず任意の $p>0$ に対し，核 ∇_p^* を

(3.7) $$\nabla_p^*(x,y) = \begin{cases} 0 & y<x \\ \left[\prod_{x \leqq z \leqq y} \dfrac{1}{p\mu(z)+1}\right]\mu(y) & y \geqq x \end{cases}$$

により定義すると，$(\nabla_p^*)_{p>0}$ は S 上の sub-Markov resolvent で

$$(I-p\nabla_p^*)\nabla f = \nabla_p^* f \qquad \forall f \in N(\mu)$$

をみたすことが分る．（§2の例参照）．次に

(3.8) $$e_p(x) = 1 - p\nabla_p^* 1(x) \qquad (\forall x \in S)$$

(3.9) $$\lambda_p(y) = \mu(y) - p\mu\nabla_p^*(y) \qquad (\forall y \in S)$$

とおき核 ∇_p を

(3.10) $$\nabla_p(x,y) = \nabla_p^*(x,y) + e_p(x)\lambda_p(y)/p\langle\lambda_p, 1\rangle$$

により定義する。$(\nabla_p)_{p>0}$ は S 上の Markov resolvent で

$$p\mu\nabla_p = \mu$$
$$(I-p\nabla_p)\nabla f = \nabla_p f \qquad \forall f \in N(\mu)$$

をみたすことが直接，計算によって確かめられる。従って $(\nabla_p)_{p>0}$ は求める半群 $(P_t)_{t>0}$ の resolvent である。

このことの確率論的な意味を考えてみよう。$(P_t)_{t>0}$ を推移確率とする Ray 過程を $X=(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, (X_t)_{t\geqq 0}, (\theta_t)_{t\geqq 0}, (P_x)_{x\in\bar{S}})$ とする．$\bar{S}$ は $\bar{S}=\{-\infty\}\cup S \cup\{\infty\}$ と考えてよい。Markov 時間の列 $(\tau_n)_{n\geqq 0}$ を

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_1 = \inf\{t>0 \mid X_t \neq X_0\}$$
$$\tau_n = \tau_{n-1} + \tau_1 \circ \theta_{\tau_{n-1}} \qquad (n \leqq 2)$$

により定義し，

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_n$$

とおく．Vの形から当然

$$P_x(\tau_1 > t) = \exp\left(-\frac{t}{\mu(x)}\right) \qquad \forall t \geqq 0$$

$$P_x(X_{\tau_1} = y) = \begin{cases} 1 & y = x+1 \\ 0 & y \neq x+1 \end{cases}$$

である。（*Poisson* 過程を時間変更した*Markov* 過程）．Xを用いれば

$$V_p^*(x,y) = E_x\left[\int_0^{\tau_\infty} e^{-pt}\, I_{\{y\}}(X_t)\, dt\right]$$

$$e_p(x) = E_x\left[e^{-p\tau_\infty}\right]$$

と表わされる．今次のように考えてみる．Sの点xから出発した粒子は上記の法則に従って，τ_∞迄運動し，τ_∞で$\{\infty\}$に達したら，直ちに$\{-\infty\}$にとび，それから直ちにS内に入って来て上記の運動をくりえす。このとき問題となるのは$\{-\infty\}$からS内に入って来る法則を与えることであるが，（記号の若干の矛盾は無視していえば）それは

$$V_p^*(-\infty, y) = E_{-\infty}\left[\int_0^{\sigma^\infty} e^{-pt}\, I_{\{y\}}(X_t)\, dt\right]$$

を与えればよい．

$$V_p^*(-\infty, y) = E_{-\infty}\left[e^{-p\sigma^y}\right] E_y\left[\int_0^{\tau_1} e^{-pt}\, dt\right]$$

$$= E_{-\infty}\left[e^{-p\sigma^y}\right]\mu(y)$$

となるので，$E_{-\infty}\left[e^{-p\sigma^y}\right]$を合理的に与えればよい．そのために，$(P_t)_{t>0}$の双対半群$(\hat{P}_t)_{t>0}$を

$$\hat{P}_t(x,y) = \mu(y)P_t(y,x)/\mu(x) \qquad (x, y \in S)$$

により定義し，$(\hat{P}_t)_{t>0}$を推移確率とするXの双対過程，$\hat{X} = (\Omega, \mathfrak{F}, (X_t)_{t\geqq 0}, \theta_t)_{t\geqq 0}\ (\hat{P}_x)_{x\in\bar{S}})$を考える．明らかに

$$\hat{P}_x(\tau_1 > t) = \exp\left(-\frac{t}{\mu(x)}\right) \qquad \forall t \geqq 0$$

$$\hat{P}_x(X_{\tau_1} = y) = \begin{cases} 1 & y = x-1 \\ 0 & y \neq x-1 \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

であるから，

$$E_x[e^{-p\sigma^{y+1}}]=\hat{E}_y[e^{-p\sigma^{x-1}}] \qquad (x \leqq y)$$

の関係がある。従って，$E_{-\infty}[e^{-p\sigma^{y+1}}]$を，

$$\hat{E}_y[e^{-p\sigma^{-\infty}}]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\hat{E}_y[e^{-p\sigma^{x-1}}]$$

により与えるのが自然である。

$$\hat{V}_p^*(x,y)=\mu(y)V_p^*(y,x)/\mu(x)$$

に注意すれば

$$\hat{E}_y[e^{-p\sigma^{-\infty}}]$$

$$=1-p\hat{V}_p^*1(y)$$

$$=1-p\mu V_p^*(y)/\mu(y)$$

$$=\lambda_p(y)/\mu(y)$$

であるので

$$E_{-\infty}[e^{-p\sigma^{y+1}}]=\lambda_p(y)/\mu(y)$$

となる．従って λ_p の確率論的意味は

$$\lambda_p(y)=V_p^*(-\infty,y) \qquad (y\in S)$$

と考えられる。求める V_p は

$$V_p(x,y)$$

$$=V_p^*(x,y)+e_p(x)\sum_{n=0}^{\infty}(E_{-\infty}[e^{-p\sigma^{\infty}}])^n V_p^*(-\infty,y)$$

$$=V_p^*(x,y)+e_p(x)\lambda_p(y)\frac{1}{1-E_{-\infty}[e^{-p\sigma^{\infty}}]}$$

となるが

$$1-E_{-\infty}[e^{-p\sigma^{\infty}}]=pV_p^*1(-\infty)=p\langle\lambda_p,1\rangle$$

であるから，結局 V_p は(3.10)により与えられる．そして，この求め方が，その確率論的運動の直観的意味を明らかにしている．

定理3.5はμが有界測度でないときは正しくないことは次の簡単な例で分る。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

例2　$S=\{0,1,2,\cdots\}$ とし，測度 μ は $\mu(y)=1$ $(\forall y\in S)$ とする。$f\in N$ に対し，

$$(3.11)\qquad Vf(x)=\sum_{y\geqq x} f(y)$$

と定義すると，前の例と同様にして，V は非特異で，(S.C.M) をみたすことを示すことが出来る。Markov 半群 $(P_t)_{t>0}$ を

$$P_t(x,y)=\begin{cases} 0 & y<x \\ e^{-t}\dfrac{t^{y-x}}{(y-x)!} & y\geqq x \end{cases}$$

により定義すると，$(P_t)_{t>0}$ は弱 potential 作用素として，V をもつことが分る。一般にそのような Markov 半群は唯一つであるから，構成問題が解けるとすれば，解はこの $(P_t)_{t>0}$ でなければならない。しかし

$$1=\mu(0)>\mu P_t(0)=e^{-t}$$

であるから，μ は不変測度ではないし，又，

$$\int_0^\infty P_t(x,y)\,dt=\begin{cases} 0 & y<x \\ 1 & y\geqq x \end{cases}$$

であるから，$(P_t)_{t>0}$ は再帰的でもない．

この例が示すように，最初に与える測度 μ が有界でない場合には，定理 3.5 は一般には正しくない．離散係数の場合の同種の問題は大島[16]により取り扱われて，完全な特徴づけが得られた．そしてそのことは第Ⅳ部において詳述されている．連続係数の場合には，同様のことを試みても完全な解決は得られないことは大体推移的な場合と同様である．

以下 μ を S 上いたるところ正な測度で，V は $N(\mu)$ から B への半完全最大値原理 (S.C.M) をみたす作用素とする．任意の $c\in S$ に対し，${}^cS=S\setminus\{c\}$ とおき，${}^cS$ 上の函数を ${}^cf$, ${}^cg,\cdots$，測度を ${}^c\mu$, ${}^c\nu,\cdots$ 等で表わす。又，${}^cS$ 上の有界函数の全体を ${}^cB$，有限な台をもつ函数の全体を ${}^cM$ で表わす。今 ${}^cM$ から ${}^cB$ への線型写像 ${}^cV$ を

$${}^cV\,{}^cf(x)=Vf(x)-Vf(c)$$

により定義する。但し，f は

$$f(x)=\begin{cases} {}^cf(x) & x\in {}^cS \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$\left\{ \quad -\frac{1}{\mu(c)}\sum_{y\in {}^cS}\mu(y)\,{}^cf(y) \qquad\qquad x=c \right.$$

により定義される $N(\mu)$ に属する函数である．$\mathbb{V}$ が（S.C.M）をみたすことを利用して，${}^c\mathbb{V}$ は ${}^cS$ 上で完全最大値原理（C.M）をみたすことが容易に証明される．従って，任意の ${}^c\mathbb{V}$-quasi-excessive函数 ${}^ch$ と，任意の $E\subset {}^cS$ に対し，E上で ${}^ch$ より大な ${}^c\mathbb{V}$-quasi-excessive 函数の中で最小な函数 ${}^cH^E\cdot{}^ch$ が存在する．特に定数函数 1 は ${}^c\mathbb{V}$-quasi-excessive 函数であるから ${}^cH^E1$ が定義出来る。

定理3.6　μを有界でない測度とし，$\mathbb{V}$ を $N(\mu)$ からBへの線型写像で（S.C.M）をみたし非特異とする．このとき任意の $c\in S$ と，$B_n\subset {}^cS$（$n=1,2,\cdots$）で $B_n\downarrow\phi$ となる任意の列に対し

$$({}^cN') \qquad \lim_{n\to\infty} {}^cH^{B_n}1(x)=0 \qquad\qquad \forall x\in S$$

が成り立つならば，μを不変測度，$\mathbb{V}$ を弱potential 作用素として持つ連続的半群 $(P_t)_{t>0}$ が唯一つ存在する。

証明は筆者[10]にやや詳しく説明してあるので省略する．

離散係数の場合には（${}^cN'$）にあたる条件が必要条件でもあったが，連続係数の場合は必ずしも必要条件ではない。実際この節の例1において，$\{c\}=\{0\}$，$B_n=\{n, n+1, \cdots\}$ とおくと，

$$ {}^0H^{B_n}1(x)=1 \qquad\qquad \forall x\in {}^0S\setminus B_n$$

が成立するので

$$\lim_{n\to\infty} {}^0H^{B_n}1(x)=1 \qquad\qquad 1\leqq x$$

である。

§4. あとがき

以上述べたことから，推移的な場合でも再帰的な場合でも，potential 作用素の特徴づけの問題は離散係数の場合のように完全には出来ないが話を有限時間には有限回しか jump しない Markov chain に限れば，やはり完全な特徴づけが得られる．しかしその場合には，本質的に離散係数の場合に帰着されるので興味は薄い。例えばSがAbel群で $P_t(x,y)=P_t(0,y-x)$ となるときはそのよう

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

な場合である。

最初に，連続係数の*Markov chain* を考えるのは他の一般な *Markov* 過程の研究に役立つと書いたが，実際多くの古典的な場合を含む再帰的*Markov*過程のある*class*に対し，§3の定理3.1から定理3.4迄の事実は，空間Sが局所*compact* 空間の場合でも，殆んど変更なしに成り立つことが分る。（近く，*On weak potential operators for recurrent Markov processes* として出る予定）．構成に関係した定理3.5，3.6に関する部分は未完成であるが，このノートに掲載されている渡辺(毅)氏の方法が有効と考えられる。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

文　　献

[1] R.M.Blumenthal *and* R.K.Getoor: *Markov processes and potential theory*, Acad. Press, New York, 1968.

[2] K.L.Chung: *Markov chains with stationary transition probability*; Springer-Verlag, Berlin, 1960.

[3] J.L.Doob: *Compactification of the discrete state space of a Markov process*, Z.Wahrscheinlichkeits-theorie und verw. Gebiete, 10(1968) 236-251.

[4] W.Hansen: *Konstruktion von Halbgruppen und Markoffschen Prozessen*; Inventiones Math. 3(1967) 179-214.

[5] G.A.Hunt: *Markov processes and potentials* II. Illiois J.Math. 1 (1957) 316-396.

[6] R.Kondō: *On weak potential operators for recurrent Markov chains with continuous parameters*: Osaka J. Math. 4 (1967) 327-344.

[7] ――――: *On potential kernels satisfying the complete maximum principle*: Proc. Jap. Acad. XLIV, 4 (1968) 193-197.

[8] ――――: *On a construction of recurrent Markov chains*: Osaka J. Math. 6(1969) 13-28.

[9] ――――: *On a construction of recurrent Markov chains* II: to appear.

[10] 近藤亮司: 再帰的 *Markov chain* の *potential* 作用素について,「数学」22巻3号 (1970) 39-50.

[11] H.Kunita-T.Watanabe; *Some theorem concerning resolvents over locally compact spaces*: Proc. Fifth Berkeley Symp. On Math. Stat. Probability, II, Part 2(1967) 131-164.

[12] G.Lion: *Familles d'operateur et frontière en theorie du potentiel*: Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16, 2(1966) 389-453.

[13] P.A.Meyer: *Probability and potentials*. Blaisdell Publ. Co., 1966.

[14] ――――: *Caractérisation des noyaux potentiels des semi-grou-*

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

pes discrets; Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16(1966) 225-240.

[15] P. A. Meyer: *Compactifications associées à une résolvente*. Sem. Cal. Prob. Fac. Sciences, Strasbourg, Springer-Verlag Lect. Notes in Math. Vol. 51, 1967.

[16] Y. Oshima: *A necessary and sufficient condition for a kernel be a weak potential kernel of a recurrent Markov chains*, Osaka J. Math. 6(1969) 29-37.

[17] D. Ray: *Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes*. Ann. of Math. 70(1959) 45-75.

[18] G. E. Reuter: *Note on resolvents of denumerable sub-Markovian processes*. Z. Wahrscheinlichkeits-theorie verv. Geb., 9(1967) 16-19.

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

付録 2

MARKOV 連鎖のポテンシャル核と埋蔵鎖の射影極限

渡 辺 毅

本稿の目的は，Markov 連鎖のポテンシャル核の特徴づけに関する Meyer[12] の研究を，Meyer とはやや異なった方法で紹介し，さらに若干の新しい結果を追加することである。

G を可測空間（E，$\mathcal{E}$）上の固有核とし，Gf が有界であるような非負有界可測関数 f の全体を $\mathcal{B}_+$ とする．”定数 $a \geq 0$，f，$g \in \mathcal{B}_+$ にたいして，集合 $\{g>0\}$ 上で不等式

$$a+Gf-f \geq Gg \tag{0.1}$$

が成り立てば，いたるところ同じ不等式が成り立つ“という性質を G が満足するとき，G は原理（R.M）をみたすといわれる（§1，No. 2）．これは非再帰的 Markov 核 N のポテンシャル核

$$G=\sum_{n\geq 0} N^n \tag{0.2}$$

を特徴づける最大値原理として，Meyer によって見出されたものである．

原理（RM）をみたす固有核 G の性質を研究するためには，G をよく性質の知られた（well-behaved）核によっておきかえ，あるいは近似してやらなければならない。Meyer の方法は G をレゾルベントによって代行することである．すなわち，φ をいたるところ正な有界可測関数であって，

$$Vf = G_\varphi f \underset{(def)}{=\!=} G(\varphi f) \tag{0.3}$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

が有界核であるように選ぶ．Gが原理（RM）をみたすことから，$\mathbb{V}$が原理（CM）（＝完全最大値原理；$No.2$）をみたすことがしたがい，それゆえ Hunt の定理（[11; p.206, T10]）によって，$\mathbb{V}$をポテンシャル核にもつレゾルベント $\{\mathbb{V}_\lambda\}_{\lambda>0}$ が存在する。この $\{\mathbb{V}_\lambda\}$ がGを代行することが Meyer の原論文[12]において示されているのであるが，かなり複雑であまり見通しがよいとは思われない。

これにたいし，近藤[9]（*Topics in Markov chains*（上），第Ⅱ部，第1章，以下第Ⅱ部として引用）では，Eが可算空間である場合に，Gを異なった方法で代行している．すなわち，Eに増加する有限集合の列 $\{E_j\}$ を考え，Gの E_j への制限を G_j によって表わす。E_j が有限集合であることから，核 G_j の性質は容易に調べることができる。Gを近似列 $\{G_j\}$ によって代行することによりGの性質を調べることができる。この方法は，レゾルベントを用いるよりも直観的で自然な方法のように思われる．

本稿では，上に述べた第Ⅱ部の方法が一般の可測空間の場合にも拡張されることを示す。そのための基本的な結果”原理（RM）をみたす有界な核が劣 Markov 核のポテンシャル核である“ことを§1において証明する（定理10）。この結果により，GI_{E_j} が有界でEに増加するような可測集合の増加列 $\{E_j\}$ が可算状態空間の場合の有限集合列の役割をはたすことになる．Gの E_j への制限を G_j，G_j をポテンシャル核にもつ劣 Markov 核を N_j によって表わす．

§2では，近似列 $\{G_j\}$（あるいは $\{N_j\}$）を用いて，Gに関する準超過関数および擬縮小関数の性質を調べ，Meyer の結果の解析的証明を与える．この部分は本質的に第Ⅱ部と同じであるが，*self-contained* な証明を与えておく．若干の結果は第Ⅱ部よりも精密になっている。第Ⅱ部で Markov 連鎖を用いて確率論的に証明している結果は，すべて純解析的な証明を与える．第Ⅱ部と類似の証明を繰り返したところも少しある．第Ⅱ部と比較しながら読んでいただきたい。

§3，§4では埋蔵鎖の射影極限について議論する．以上でえられた E_j 上の劣 Markov 核 $\{N_j\}$ の標準的な実現（$W_j, \mathcal{B}_j, (P_j^x; x\in E_j)$）の列を考える．$j>i$，$x\in E_i$ のとき，$(W_i, \mathcal{B}_i, P_i^x)$ は $(W_j, \mathcal{B}_j, P_j^x)$ の埋蔵鎖になっている．このことから，状態空間（E，$\mathcal{E}$）が完備可分な距離空間である場合は，射影極限に関する一般定理（定理29）によって，$(W_j, \mathcal{B}_j, (P_j^x; x\in E_j))$ の射影極限

$$(0.4)\qquad (\overline{W}, \overline{\mathcal{B}}, (\overline{P}^x; x\in E)) = \varprojlim (W_j, \mathcal{B}_j, (P_j^x; x\in E_j))$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

の存在が保証される．$(\overline{W}, \overline{\mathcal{B}}, (\overline{P}^x; x\in E))$ を用いることにより，（原理（RM）をみたす固有核 G が劣 Markov 核のポテンシャル核であるための）Meyer の条件（定理 24）の確率論的意味が明らかにされる．

状態空間 $(E, \mathcal{E})$ が一般な測度空間の場合にも，埋蔵鎖の射影列 $(W_j, \mathcal{B}_j, (P_j^x; x\in E_j))$ を用いて，Meyer の定理（定理24）の確率論的な証明を与えることができる．しかしこの場合には，射影極限 $(\overline{W}, \overline{\mathcal{B}}, (\overline{P}^x; x\in E))$ の存在は一般には保証されず，証明は本稿で与えるものとは全く異なる（筆者[16]）．

§1. 最大値原理（RM）をみたす有界核

この節の目的は定理 10 を証明することである．この定理は，完全最大値の原理をみたす有界核はあるレゾルベントのポテンシャル核という定理（Meyer [11, p.206, T10]）の，単一核における類似である．補助定理5において見るように，証明の方法は本質的にレゾルベントの場合と変らない．

1．可測空間上の核に関する基本的な諸概念を定義しておく．記号や定義は若干の例外を除いて Meyer [11] にしたがう．

$(E, \mathcal{E})$ を可測空間とする．$E\times\mathcal{E}$ で定義された非負実数値関数 $K(x, A)$ がつぎの条件をみたすとき，E 上の<u>核</u>であるという．

(i) $0\leq K(x, A)\leq +\infty$，$x\in E$，$A\in\mathcal{E}$．(ii) 各 $x\in E$ にたいして，$\varepsilon_x K \underset{(def)}{=\!=} K(x,\cdot)^{(*)}$ が $\mathcal{E}$ 上の測度である．(iii) 各 $A\in\mathcal{E}$ にたいして，$KI_A \underset{(def)}{=\!=} K(\cdot, A)^{(**)}$ は $\mathcal{E}$-可測である．

E に増加する $\mathcal{E}$ の列 $\{E_n\}$ が存在して，各 KI_{E_n} が有界であるとき，<u>固有核</u>(proper kernel) という．とくに KI_E が有界なら，<u>有界核</u>と呼ばれる．さらに

$$KI_E\leq 1 \quad [resp.\quad KI_E = 1] \tag{1.1}$$

のとき，<u>劣 Markov 核</u> [resp. <u>Markov 核</u>] と呼ばれる．

σ-有限な E 上の正測度の全体を $\mathcal{M}^+$ で表わす．f が非負$^{(***)}$ [resp. 有界] 可測関数であることを $f\in p\mathcal{E}$ [resp. $f\in b\mathcal{E}$] で表わす．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

核 $K(x, A)$, 正測度μ, $f \in p\mathcal{E}$ にたいして

(1.2) $$Kf(x) = \int_E K(x, dy) f(y),$$

(1.3) $$\mu K(A) = \int_E \mu(dx) K(x, A)$$

と定義する. $\mu K \in \mathcal{M}^+$のとき, μはKの定義域に属するという ($\mu \in \mathcal{M}^+$でなくてもよい)。Kf, μK を f, μ のK-ポテンシャル (あるいは単にポテンシャル) という. $f[\mu]$ をポテンシャル $Kf[\mu K]$ の定義関数 [定義測度](****) という. 一般の可測関数 $f = f^+ - f^-$ ($f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$) にたいして, $Kf^+ - Kf^-$が定義可能なとき, これを Kf で表わす。

2つの核 K, L の合成KLを

(1.4) $$(KL)(x, A) = \int_E K(x, dy) L(y, A)$$

によって定義する. 集合Aの定義関数を I_A で表わす。単位核 I は

(1.5) $$I(x, A) = I_A(x) \qquad (x \in E, \quad A \in \mathcal{E})$$

によって定義される.

核Kの $n(\geq 0)$ 個の合成 K^n を

(1.6) $$K^0 = I, \quad K^n = K^{n-1} \cdot K \qquad (n \geq 1)$$

によって定義する.

集合 $A \in \mathcal{E}$ にたいして, Aへの制限核 (restriction kernel) J_A を

(1.7) $$J_A(x, B) = I_A(x) I_B(x) \qquad (x \in E, \quad B \in \mathcal{E})$$

によって定義する.

(*) 1点集合$\{x\}$が可測とは限らないが, xを固定してAについて測度と考えるとき, $\varepsilon_x K$ と表わすと便利なことが多い. 以下この用法を屡々用いる.

(**) これは後の記法 (1.2) と一致する ($f = I_A$).

(***) $+\infty$ の値も許す.

(****) Charge function [charge distribution].

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

関数 f，測度 μ の集合 A への制限(*) を $f|_A$, $\mu|_A$ のように表わす。すなわち

$$f|_A(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A \\ 0, & x\in \complement A \end{cases}, \quad \mu|_A(B)=\mu(A\cap B).$$

あきらかに，

$$f|_A = J_A f, \qquad \mu|_A=\mu J_A .$$

したがって

$$KJ_A(x,B)=K(x,A\cap B),$$

$$J_AK(x,B)=\begin{cases} K(x,B) & , \quad x\in A \\ 0 & , \quad x\in \complement A . \end{cases}$$

J_AKJ_A が K の A（または $A\times A$）上への制限をあらわす：

$$(1.8)\qquad J_AKJ_A(x,B)=\begin{cases} K(x,A\cap B) & , \quad x\in A \\ 0 & , \quad x\in \complement A . \end{cases}$$

2. 最大値原理. 以下において，V および G は固有核とする。E 上の有界可測関数の全体を $\mathcal{G}$ によって表わす。$f\in\mathcal{G}$ かつ $V|f|\in\mathcal{G}$（または $G|f|\in\mathcal{G}$）であるような f の全体を $\mathcal{B}$ で表わす。$\mathcal{G}_+$, $\mathcal{B}_+$ は $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$ の非負関数の全体である。V（または G）が有界核であるとき，あきらかに $\mathcal{B}=\mathcal{G}$ である。

2つの固有核 K, L があって，

$$(2.1)\qquad Kf \geq Lf \quad , \qquad f\in p\mathcal{E}$$

をみたすならば，

$$(2.2)\qquad Kf = Lf+Mf \quad , \qquad f\in p\mathcal{E}$$

をみたす固有核 M が唯1つ存在することが容易に示される。この M を

$$(2.3)\qquad M=K-L$$

によって表わす。

関数 g にたいし，その正の台 $\{x|g(x)>0\}$ を S_g^+ によって表わす。集合

(*) "制限" というとき，A の外で 0 とおいて E 上の関数または測度として考える場合と，A 上だけで考える場合がある。これらを区別しなくても混乱の恐れはないであろう。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

Aの上で $f(x) \geq g(x)$ であることを $[f \geq g]_A$ によって表わす。

$\mathcal{H}$をVf(またはGf)が定義可能であるような可測関数のある集合とする。

$u \in p\mathcal{E}$ がつぎの条件をみたすとき，$(V, \mathcal{H})$に関して優越的(*dominant*)であるという： $g \in \mathcal{H}$ にたいして，

(2.4) S_g^+ を含むある集合Sの上で $[u \geq Vg]_S$ (*)

ならば

(2.5) $$u \geq Vg$$

である．

$\mathcal{H} = \mathcal{B}_+$ のとき，単に優越的，$\mathcal{H} = \mathcal{B}$のとき準優メジアン(*quasi-sypermedian*)であると呼ぶことにする．

$u \in p\mathcal{E}$ がつぎの条件をみたすとき，(Gに関して)準超過的(*quasi-excessive*)であるという： $g \in \mathcal{B}$にたいして

(2.6) $$[u \geq Gg]_S \quad , \quad {}^\exists S \supseteq S_g^+$$

ならば

(2.7) $$u - g^- \geq Gg.$$ (**)

$[g = -g^-]_A$，$A = \{x \mid g(x) \leq 0\}$，であるからこれは，(2.6)ならば

(2.8) $$u + g \geq Gg$$

ということと同値である．

Meyer [12]の定義では，上の準優メジアン関数のことを準超過的関数と呼んでいることを注意しておく．しかし，原理(RM)をみたす核については，両者の概念が一致することをあとで示す(定理16)。

(*) $S = S_g^+$ として一般性を失わないが，この形で述べる方が便利な場合がある。$S_g^+ = \phi$ のときは，この仮定はつねにみたされていると考える．(2.6)についても同様である。

(**) 準超過的という概念を$\mathcal{B}$以外の族について考えることもできるが，あとで使わないから，$\mathcal{B}$の場合に制限しておく．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

固有核Vが原理(D)(優越原理 *Principle of domination*)(*) をみたすというのは，0が準優メジアンなることである。この条件は，すべての$Vf (f\in\mathcal{B}_+)$が優越的であることと同等である。

固有核Vが原理(CM)(完全最大値の原理 *Complete principle of the maximum*)をみたすというのは，すべての非負定数aが準優メジアンなことである。この条件はすべての $a+Vf$ $(a\geq 0,\ f\in\mathcal{B}_+)$ が優越的であることと同等である。

固有核Gが原理(RM)(強められた完全最大値の原理 *Reinforced complete principle of the maximum*)をみたすというのは，すべての非負定数aが準超過的なことである。これは，すべての $a+Gf-f$ $(a\geq 0,\ f\in\mathcal{B}_+)$ が優越的なことと同等である(**).

定義から容易に分ることとして

(a) 原理(RM) $\Longrightarrow$ 原理(CM) $\Longrightarrow$ 原理(D)

(b) Vが原理(CM)をみたすならば，$G=V+I$は原理(RM)をみたす(***).

(c) 各原理の定義として与えられた2つの条件の同等性は以下の定理からでる。

3. **定理** V, G を固有核，$u\in p\mathcal{E}$ とする。以下の(a),(b)において2つの条件は同等である.

(a) uが準優メジアンである $\Longleftrightarrow$ すべての $u+Vf$ $(f\in\mathcal{B}_+)$ が優越的である.

(b) uが準超過的である $\Longleftrightarrow$ すべての $u+Gf-f$ $(f\in\mathcal{B}_+)$ が優越的である。

証明 (a)は簡単である。(b)を証明しよう。

uが準超過的，$f,g\in\mathcal{B}_+$ にたいして

$$(3.1)\qquad [u+Gf-f\geq Gg]_S\ ,\qquad S\supset S_g^+$$

であるとしよう。(3.1)は

$$(3.2)\qquad [u\geq G(g-f)]_S\ ,\qquad S\supset S_{(g-f)}^+$$

(*) あまり印象の良い"原理"ではありません。

(**) 原理(RM)の前者の定義は第Ⅱ部(近藤)，後者はMeyer[12] による。

(***) 逆は必ずしも言えない。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

を含むから，u が準超過的なことから，

(3.3) $$u+(g-f)\geq G(g-f)^{(*)}$$

ゆえに $[u-f\geq G(g-f)]_{\{x|g(x)\leq 0\}}$．これと (3.1) から，

$$u+Gf-f\geq Gg$$

がえられる。

逆にすべての $u+Gf-f$ ($f\in\mathcal{B}_+$) が優越的であるとしよう。もし $g\in\mathcal{B}$ にたいして

(3.4) $$[u\geq Gg]_S \quad , \qquad S\supset S_g^+$$

が成り立っていれば，

(3.5) $$[u+Gg^- - g^- \geq Gg^+]_{S'} \quad , \qquad S'=S_{g^+}^+ ,$$

なんとなれば $S_g^+=S_{g^+}^+$，$g^-|_{S_{g^+}^+}=0$ であるから。ゆえに仮定により

$$u+Gg^- - g^- \geq Gg^+ .$$

これは $u-g^-\geq Gg$ であることを示す。

4. 例(**) (a) $\{V_\lambda\}_{\lambda>0}$ を閉じた固有レゾルベント (*closed proper resolvent* [11, p.189] を見よ) とする。すなわち，すべての V_λ ($\lambda>0$) と共に

(4.1) $$Vf=\sup_\lambda V_\lambda f=\lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f \quad , \qquad f\in p\mathcal{E}$$

も固有核であるようなレゾルベントとする。さらにある $\lambda_0\geq 0$ にたいして

(4.2) $$\lim_n g_n=\infty$$

であるような，有限値 λ_0-優メジアン (λ_0-*supermedian*) 関数の増加列が存在することを仮定する。

そのとき，V は原理 (D) を満足する (*Meyer* [11; p.198, T.68])．また u が優メジアンなことと，準優メジアンなことは同等である (*Meyer* [12; p.229

(*) (2.8) を見よ．

(**) この小節の結果はよく知られており，またあとで使わないから，詳しい説明は省略する．とばして読んでも差支えない。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

～230])。

(b) 上の例において $\{V_\lambda\}$ が劣 Markov レゾルベントならば，V は原理(CM)を満足する（Meyer[11; p.199, T69]）.

(c) N を劣 Markov 核，そのポテンシャル核 G を

(4.3) $$G = \sum_{n \geqq 0} N^n$$

によって定義する。もし G が固有核ならば G は原理(RM)を満足する。このとき，u が準超過的なことと，超過的であることは同等である（定理8）．

5. 定理. (a) Banach空間 X 上の有界な線形作用素の全体を $L(X, X)$ で表わす。$V \in L(X,X)$，$\lambda_0 > 0$ とする。もしすべての $\lambda \in (0, \lambda_0)$ と $f \in X$ にたいして

(5.1) $$\|(\lambda V + I)f\| \geq \|\lambda V f\|$$

が成り立てば，すべての $\lambda \in (0, 2\lambda_0)$ にたいして $(\lambda V + I)$ の有界な逆作用素

(5.2) $$(\lambda V + I)^{-1} \in L(X, X)$$

が存在する。

(b) V を原理(CM)をみたす有界な核，V の $\mathcal{G}(=\mathcal{B})$(*) への制限を同じ V によって表わす。この時，V はすべての $\lambda > 0$ に対して(5.1)をみたす。したがって，すべての $\lambda > 0$ にたいして，有界な逆作用素

(5.3) $$(\lambda V + I)^{-1} \in L(\mathcal{G}, \mathcal{G})$$

が存在する.

(c) G を原理(RM)をみたす有界な核，$\mathcal{G}$ への制限を同じ G で表わす。

(5.4) $$V = G - I$$

とおく。そのとき，V はすべての $0 \leq \lambda \leq 1$ にたいして(5.1)をみたす．したがってすべての $0 \leq \lambda < 2$ たいして，有界な逆作用素

(5.5) $$(\lambda V + I)^{-1} = [\lambda G + (1-\lambda) I]^{-1}$$

(*) $\mathcal{G}$ のノルムは通常の sup-ノルム。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

が存在する．とくに，Gは（$\lambda=1$ として），有界な逆作素 G^{-1} をもつ．

証明．(a) λが十分小さい正の数であれば $\|\lambda V\|<1$．したがって Neumann 級数

$$(5.6)\qquad (\lambda V+I)^{-1}=\sum_{k\geq 0}(-\lambda V)^k$$

が作用素のノルムの意味で収束するから，$(\lambda V+I)^{-1}\in L(X,X)$ が存在する．

$m=\sup\{\lambda;$ すべての$\mu<\lambda$ にたいして$(\mu V+I)^{-1}\in L(X,X)$が存在する$\}$

とおく．(5.6)により，$m>0$ である．$m<2\lambda_0$ として矛盾を導く．

もし，$m<2\lambda_0$ならば，

$$(5.7)\qquad \lambda<\min(\lambda_0,m)\leq m<2\lambda$$

であるようなλを選ぶことができる。$\lambda<\mu<2\lambda$ なる任意のμを取り，

$$g=(\lambda V+I)^{-1}f\quad,\qquad f\in X$$

とおく。(5.1)によって

$$(5.8)\qquad \|\lambda V(\lambda V+I)^{-1}f\|=\|\lambda Vg\|\leq\|(\lambda V+I)g\|=\|f\|,$$

$$(5.9)\qquad \|\lambda V(\lambda V+I)^{-1}\|\leq 1$$

である。一方

$$(5.10)\qquad (\mu V+I)=[I+(\mu-\lambda)V(\lambda V+I)^{-1}](\lambda V+I).$$

$\mu-\lambda<\lambda$ であるから，(5.9)によって $[I+(\mu-\lambda)V(\lambda V+I)^{-1}]^{-1}\in L(X,X)$（Neumann 級数！）が存在する．したがって $(\mu V+I)^{-1}\in L(X,X)$ も存在する．

このことと，(5.6)，(5.7)により，すべての $\mu<2\lambda$ にたいして $(\mu V+I)^{-1}\in L(X,X)$．したがって $m\geq 2\lambda>m$．

(b) (c)と同じだから，省略する．

(c) $0<\lambda\leq 1$，$f\in\mathcal{G}$とする．

$$a=[\sup(\lambda Vf+f)]\vee 0$$

とおく。$\lambda\leq 1$だから

$$(5.11)\qquad [G(\lambda f)=\lambda Vf+\lambda f\leq\lambda Vf+f\leq a]_S\quad,\qquad S=S_f^+.$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

Gは原理(RM)をみたすから，$a+\lambda f \geqq G(\lambda f)$。ゆえに

(5.12) $$a \geqq G(\lambda f)-\lambda f = \lambda Vf .$$

同様にして

(5.13) $$\lambda Vf \geqq [\inf(\lambda Vf+f)]\wedge 0 .$$

(5.12)，(5.13)から(5.1)がえられる。

6. <u>定理</u>. 原理(RM)をみたす固有核Gはつぎの性質をもつ。$f \in \mathcal{B}$とする。

(a) $Gf \geqq 0$ ならば $Gf-f \geqq 0$. したがって $f \in \mathcal{B}_+$ ならば，つねに $Gf-f \geqq 0$. ゆえに $(G-I)$ は固有核である。

(b) $Gf=0$ ならば，$f=0$. ゆえに可測関数gにたいして，方程式 $G\varphi=g$が $\mathcal{B}$ の中に解φをもてば一意的である。

(c) $Gf \leqq 1$ ならば，$Gf-f^- \leqq 1$.

<u>証明</u>. (a) $Gf \leqq 0$ から $Gf-f \leqq 0$ を示せばよい。$u=0$, $f=g$, $S=E$にたいして(2.6)がみたされている。0が準超過的だから，$Gf \leqq 0+f=f$.
ゆえに $Gf-f \leqq 0$.

(b) $Gf=0 \geqq 0$ (resp. $\leqq 0$). (a)により，$Gf-f \geqq 0$ (resp. $\leqq 0$).
ゆえに $Gf-f=0$. したがって，$f=Gf=0$.

(c) (2.6)が $u=1$ にたいしてみたされるから，$Gf \leqq 1+f$.

7. Nを劣Markov核とする。

(7.1) $$G=\sum_{n \geqq 0} N^n$$

をNの<u>ポテンシャル核</u>と呼ぶ。Gが固有核であるとき，Nを<u>非再帰的</u>(transient)であるという。あきらかに

(7.2) $$G=I+GN=I+GN.$$

関数 $u \in p\mathcal{E}$[(*)]が

(7.3) $$u \geqq Nu$$

(*) $+\infty$の値を許していることに注意.

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

を満足するとき，（Nに関して）超過的（*excessive*）であるという。uが有限値関数$\in p\mathcal{E}$で

$$(7.4) \qquad u = Nu$$

であるとき，uを不変な（*invariant*）または調和な（*harmonic*）関数という。前にのべたように，$u = Gf$（$f \in p\mathcal{E}$）の形の関数をfのポテンシャル，fをuの定義関数と呼ぶ。

単一核のポテンシャル論では詳しい結果が簡単な証明によってえられる。とくに *Deny* [5] の結果が基本的である．これは *Markov* 連鎖のポテンシャル論に他ならないから，確率論的にみても容易に想像されることであるが，重要なことは，レゾルベントに関する多くの詳しい結果が，単一核に関する結果から極限移行によって導かれる点である(*)．しかしここでは，そのような問題には立ち入らないで，最大値原理に関連した若干の結果を単一核についてのみ証明する。

以下の結果はよく知られているので証明なしに使う（第Ⅱ部または *Meyer* [11, *Chapter* IX]）．

(*a*)　ポテンシャルは超過的である。

(*b*)　超過的関数uがポテンシャルであるための必要十分条件は，$N^{\infty}u \underset{(def)}{=} \lim N^n u$ が0又は$+\infty$の値のみを取ることである．したがって，とくに有限値ポテンシャルによっておさえられる超過的関数はポテンシャルである．

(*c*)　uがポテンシャルならば，その定義関数は集合$\{x | u(x) < +\infty\}$の上で一意的に定まる。それは

$$(7.5) \qquad f(x) = (I-N)u(x), \qquad x \in \{u < +\infty\}$$

によって与えられる。

(*d*)　（*Riesz* 分解）有限値超過的関数uはポテンシャルGfと，不変関数u_∞の和に一意的に表わされる。

$$(7.6) \qquad u = Gf + u_\infty .$$

f，u_∞はつぎのように定まる。

(*) 詳しくは *Meyer* [11, *Chapter* IX]，筆者 [15, *Chapter* Ⅱ] を参照して下さい。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$f=(I-N)u, \qquad u_\infty = N^\infty u. \tag{7.7}$$

8. 定理. Nを劣Markov核(特に断らない限り，Nが非再帰的なことは仮定しない)，Gをそのポテンシャル核とする.

(a) (超過的関数に関する優越原理). 非負可測な実数値関数の全体を$p\mathcal{E}$で表わす. uが超過的関数ならば，$(G, p\mathcal{E})$に関して優越的である。詳しくいうと，$g\in p\mathcal{E}$にたいして

$$([u\geq Gg]_S, \quad {}^{\exists}S\supseteq S_g^+)\Longrightarrow (u\geq Gg). \tag{8.1}$$

(b) 超過的関数uはつぎの性質をもつ。gはGgが定義可能でg^-が有限であるような可測関数とする. そのとき

$$([u\geq Gg]_S, \quad {}^{\exists}S\supseteq S_g^+)\Longrightarrow (u-g^-\geq Gg)^{(*)} \tag{8.2}$$

Nが非再帰的ならば逆も成り立つ。すなわち非負関数uが準超過的($g\in\mathcal{B}$にたいして(8.2)の性質をもつ)ならば，超過的である(**).

(c) Nが非再帰的ならば，ポテンシャル核Gは原理(D),(CM),(RM)のすべてを満足する(***).

証明. すでに第II部で確率論的証明が与えられているが，純解析的な証明を与えておく。

(a) $\hat{u}=u\wedge Gg$とおき，

$$\hat{f}(x)=\begin{cases}\hat{u}(x)-N\hat{u}(x) & (\hat{u}(x)<\infty)\\ \infty & (\hat{u}(x)=\infty)\end{cases}$$

と定義する. そのとき，

(*) これはuが，Ggが定義可能でg^-が有限なる可測関数の族に関して準超過的であるといってもよい。

(**) この結果は定理16でより精密にされる。

(***) すでに見たように，原理(RM)は(CM)，(D)を含むが，本定理(a)の結果が直接(D)，(CM)，(RM)をより強い形で含んでいることを強調する意味である(証明を見よ)。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$\sum_{k=0}^{n} N^k \hat{f}(x) = \begin{cases} \hat{u}(x) - N^{n+1}\hat{u}(x) & (\hat{u}(x) < \infty) \\ \infty & (\hat{u}(x) = \infty) \end{cases}$$

であるから，

$$G\hat{f} \leq \hat{u}.$$

一方 $\hat{u}|_S = Gg|_S$，$\hat{u} \leq Gg$ であるから，$x \in S \cap \{\hat{u}(x) < \infty\}$ ならば，

$$\hat{f}(x) = \hat{u}(x) - N\hat{u}(x) \geq Gg(x) - NGg(x) = g(x) \quad [\text{No. }7(c)].$$

したがって，

$$\hat{f} \geq \hat{f}|_S \geq g|_A = g.$$

ゆえに，$Gg \leq G\hat{f} \leq \hat{u} \leq u$ である。

(b) (8.2)の仮定の部分は

$$[u + Gg^- - g^- \geq Gg^+]_{S_{g^+}}$$

を含む．g^- が有限だから，$Gg^- - g^- = GNg^-$．ゆえに $u + Gg^- - g^-$ は超過的である．(a)により

$$u + Gg^- - g^- \geq Gg^+,$$

これは(8.2)の結論の部分に他ならない。

後半を示そう．証明すべきことは

(8.3) $\qquad u \geq Nu$

であるが，Gが固有核であると仮定しているから，$u \geq f$ なるすべての $f \in \mathcal{B}_+$ にたいして

(8.4) $\qquad u \geq Nf$

を示せば十分である。(*) $g = (I - N)f$ とおく。

$$G|g| \leq Gf + GNf \leq 2Gf,$$

ゆえに $g \in \mathcal{B}$ かつ

(8.5) $\qquad Gg = Gf - GNf = f \leq u.$

したがって(8.2)の仮定が $S = E$ にたいしてみたされるから

(8.6) $\qquad u + g \geq u - g^- \geq Gg = f.$

(*) 任意の $f \in p\mathcal{E}$ は，$\mathcal{B}_+$ の増加列の極限である。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$g = f - Nf$ だから，(8.6)は(8.4)を意味する。

(c) 定理の命題よりやや強い結果を証明する。Nは非再帰的でなくてもよい。

$f \in p\mathcal{E}$ にたいして $u = Gf$ は超過的だから，$(G, p\mathcal{E})$ に関して優越的である。

$a \geq 0$, $f \in p\mathcal{E}$ にたいして，$a + Gf$ は超過的だから $(G, p\mathcal{E})$ に関して優越的である.

$a \geq 0$, 有限値関数 $f \in p\mathcal{E}$ にたいして，$a + Gf - f = a + GNf$ は超過的だから，$(G, p\mathcal{E})$ に関して優越的である。

とくにNを非再帰的，$f \in \mathcal{B}_+$, $p\mathcal{E}$ を $\mathcal{B}_+$ に制限した場合が原理(D)，(CM)，(RM)にほかならない。

9. 定理. (Nの一意性) 非再帰Markov核はそのポテンシャル核によって一意的に定まる。

証明. N, Pを劣Markov核で，共通の固有なポテンシャル核

$$G = \sum_{k \geq 0} N^k = \sum_{k \geq 0} P^k$$

をもつとしよう．そのとき

$$G - I = GN = GP. \tag{9.1}$$

Gは固有核だから，$E_n \uparrow E$, GI_{E_n} が有界であるようなその増加列$\{E_n\}$が存在する。$A \in \mathcal{E}$, $A_n = A \cap E_n$ とし

$$f_n = NI_{A_n}, \quad g_n = PI_{A_n}$$

とおく．(9.1)により

$$u = Gf_n = Gg_n \leq GI_{A_n} \leq GI_{E_n} < \infty .$$

ゆえにuは有限値ポテンシャルであり，No.7(c)により，$f_n = g_n$. すなわち

$$N(x, A_n) = P(x, A_n), \quad x \in E .$$

$n \to \infty$ として，$N(x, A) = P(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$ がえられる。

10. 定理. 原理(RM)をみたす有界な核は，非再帰劣Markov核のポテンシャル核である。この劣Markov核は一意的に定まる。

証明. Gを与えられた核としよう。$\mathcal{B} = \mathcal{G}$ で，Gの$\mathcal{G}$への制限は定理5(c)

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

によって有界な逆作用素 G^{-1} をもつ．したがって，各 $g\in\mathcal{G}$ にたいし方程式

(10.1) $$G\varphi = Gg - g$$

は $\mathcal{G}$ の中に一意的な解 φ をもつ．これを

(10.2) $$\varphi = Ng = G^{-1}(Gg-g)$$

と定義する。（もし $G=\sum N^n$ ならば（10.2）が（10.1）の唯一つの解であるから，このようにおくのは自然である）。

（10.2）における N（$\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ への作用素）が，G をポテンシャル核にもつ劣 Markov 核を定めることを証明する．

N が $\mathcal{G}$ 上の有界な線形作用素であることは（10.2）からあきらか．

$0\leq g\leq 1$ としよう．$g=G(g-\varphi)$ であるから，定理6(c)において，$f=g-\varphi$ とおくと，

(10.3) $$0\leq Gf-f=g-(g-\varphi)=\varphi=Ng\leq 1 .$$

また

(10.4) $$\begin{aligned} Gg &= g+GNg = g+(Ng+GN^2g)=\cdots \\ &= \sum_{k=0}^{n} N^k g + GN^{k+1}g . \end{aligned}$$

とくに $Gg\geq Ng$ だから，$g_n\downarrow 0$（各点収束）ならば，各 $x\in E$ にたいして

$$\lim_{n\to\infty} Ng_n(x)\leq \lim_{n\to\infty} Gg_n(x)=0 .$$

ゆえに

$$N(x,A)=NI_A(x)\ ,\quad A\in\mathcal{E}$$

は $(E,\mathcal{E})$ 上の測度で，(10.3) により全測度は1を越えない。各 $A\in\mathcal{E}$ にたいして，可測であることはあきらか。$N(x,A)$ は劣 Markov 核である．

（10.4）により $N^n g\to 0$（各点収束）で，$|N^n g|\leq\|g\|$ であるから，Lebesgue の有界収束定理により $GN^{n+1}g(x)\to 0$．ゆえに

(10.5) $$Gg=\sum_{k\geq 0} N^k g\ ,\qquad g\in\mathcal{B} .$$

11. <u>注意</u>．(a) 最大値原理を仮定する空間として No.2 では $\mathcal{B}$（または $\mathcal{B}_+$）を選んだ．この他にも $\mathcal{B}(\mathcal{B}_+)$ よりも広い空間，狭い空間を取ることが考えられ

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

る．原理を確かめるにはなるべく狭い空間であることが望ましく，使うときはなるべく広い空間が望ましい。そこで狭い空間にたいして原理を仮定すれば，自動的により広い空間の上でその性質が保存されるかという問題が生じる。

例えば，Eを局所コンパクト，σ-コンパクトな Hausdorff 空間，$C_K(E)$をコンパクトな台をもつ関数の全体とする。さらにVは，$f\in C_K(E)$にたいして Vf が有界連続であるような核であるとする。そのときVが $C_{K^+}(E)$に関して優越的ならば，Vは$p\mathcal{E}$に関して原理（CM）をみたす，すなわち，すべての $a+Vf\,(a\geq 0,\ f\in C_{K^+}(E))$ が $(V,\ C_{K^+}(E))$ に関して優越的ならば，Vは$p\mathcal{E}$に関して原理（CM）をみたす，すなわち，すべての $a+Vf\ (a\geq 0,\ f\in p\mathcal{E})$ が $(V,\ p\mathcal{E})$に関して優越的であることが知られている（Meyer [11, p.203, T4]）．原理（RM）についても同様である．ただしこの場合は $p\mathcal{E}$ を有限値 $f\in p\mathcal{E}$ によっておきかえなければならない．証明は第II部の可算空間の場合と同様である．

一般の可測空間では，$C_K(E)[C_{K^+}(E)]$ のかわりに $\mathcal{B}[\mathcal{B}_+]$ について原理（CM），（RM）を仮定すれば，(*) 上と同様な結果がえられることを以下に示す。原理（D）についてはこの証明は適用できない。

(b) Vが原理（CM）をみたすならば，Vは族 $p\mathcal{E}$に関して原理（CM）をみたす。

証明．$a\geq 0$，$f\in p\mathcal{E}$ に対して，$a+Vf$ が $(V,p\mathcal{E})$-優越的なことを示す。Vが固有核であるから，$g\in\mathcal{B}_+$ にたいして

(11.1) $$([a+Vf\geq Vg]_{S_g^+})\Longrightarrow(a+Vf\geq Vg)$$

を示せば十分である．任意の$\varepsilon>0$とfに増加する$\mathcal{B}_+$の列$\{f_n\}$を取る。

(11.2) $$E_n=\{\varepsilon+Vf_n\geq Vf\}\cup\{Vf_n\geq\|Vg\|\}$$

と定義する．あきらかに $E_n\uparrow E$ である。$g_n=g|_{E_n}$ とおけば，容易に

$$[a+\varepsilon+Vf_n\geq Vg_n]_{S_{g_n}^+}$$

が示される。ゆえに

$$a+\varepsilon+Vf_n\geq Vg_n\ .$$

$n\to\infty$，$\varepsilon\to 0$ として，$a+Vf\geq Vg$．

(c) Gが原理（RM）をみたすならば，すべての$a\geq 0$，有限値 $f\in p\mathcal{E}$ に対して $a+Gf-f$ は $(G,\ p\mathcal{E})$-優越的である。

(*) 第II部のように $\mathcal{B}[\mathcal{B}_+]$ よりやや狭い空間に制限しても同様な結果がえられるが，証明は同じである。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

証明は(b)と同じである。

(d) 最大値原理および非再帰劣Markov核の定義において，V（またはG）は固有核であるとした。もっと一般な核についても最大値原理を適当に仮定すれば，V（またはG）が固有核であることが結果として示される。

核Vにたいし，Eに増加する$\mathcal{E}$の列$\{E_n\}$が存在し，VI_{E_n}がE上で有限であるとき，Vを<u>σ-有限な核</u>であると呼ぼう。台があるE_nに含まれるような正の有界関数の全体を$\mathcal{F}_{0+}$によって表わす。

Vはσ-有限核，定数$a \geq 0$が$(V, \mathcal{F}_{0+})$-優越的，すなわち，$g \in \mathcal{F}_{0+}$にたいし

$$(11.3) \qquad ([a \geq Vg]_{S_g^+}) \Longrightarrow (a \geq Vg)$$

であるとする。その時Vは固有核である。したがって特に劣Markov核のポテンシャル核がσ-有限ならば，それは固有核である（定理8(a)による）。

<u>証明</u>. Vがσ-有限核ならば，$E_n \uparrow E$ かつ $V\text{-}I_{E_n}$がE_n上<u>有界</u>であるような$\mathcal{E}$の列$\{E_n\}$が選べる。$g = I_{E_n}$, $a = \sup_{x \in E_n} Vg(x)$ として(11.3)を用いよ。

(e) Gが原理(RM)をみたす有界核としよう。定理5(c)により $|a| < 1$ にたいし $[(1-a)G + aI]^{-1} \in L(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ である。

$$(11.4) \qquad G_a = G[(1-a)G + aI]^{-1}$$

とおく。さらに

$$(11.5) \qquad N = G^{-1}(G - I) = (G - I)G^{-1}$$

とおく。$f \in \mathcal{G}$にたいし，$g = G^{-1}f$ とおけば

$$\|Nf\| = \|(G-I)g\| = \|Vg\| \leq \|(V+I)g\| = \|Gg\| = \|f\| .$$

ゆえに $\|N\| \leq 1$。これから

$$(11.6) \qquad G_a = \sum_{n \geq 0} (aN)^n \qquad \text{（作用素の強収束）}$$

がしたがう（Neumann級数）。

これはHille-吉田の定理の単一作用素における類似である。ここ迄は全く作用素論なことで，Nが核であることを要しないが，これから $a \to 1$ として(10.5)を導くためには，Nが核であることを知る必要があり，定理10におけるような議論が必要になる。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

§2. 埋蔵核. 準超過関数の擬縮小関数. MEYERの定理.

埋蔵鎖に関しては，第Ⅱ部§8で若干触れられている。この節では1つの非再帰Markov連鎖（または劣Markov核）から集合A上の埋蔵鎖（または埋蔵核）への変換が，対応するポテンシャル核においては，単にA上への制限にほかならないことを示し，それを用いて準超過関数の擬縮小関数を定義する。ついで準超過関数の分類を与え，最後にMeyerの定理を証明する.(*)

12. 可測空間$(E, \mathcal{E})$上の劣Markov核Nとそのポテンシャル核

$$(12.1)\qquad G=\sum_{n\geqq 0} N^n$$

を考える. 部分集合 $A\in\mathcal{E}$ を取り，J_A をAへの制限核とする. NとAに関連したいくつかの核を定義する.

$$(12.2)\qquad H_A=\sum_{n\geqq 0}[(I-J_A)N]^n\cdot J_A\,,$$

$$(12.3)\qquad L_A=\sum_{n\geqq 0} J_A\cdot[N(I-J_A)]^n\,,$$

$$(12.4)\qquad N^A=J_A\cdot\sum_{n\geqq 0}[N(I-J_A)]^n\cdot NJ_A$$

$$=L_A\cdot NJ_A=J_AN\cdot H_A\,,$$

$$(12.5)\qquad G_A=J_AGJ_A\ (=G\text{の}A\text{への制限}).$$

定義. H_AおよびL_Aを掃散核（balayage kernel），$f\in p\mathcal{E}$. [resp. $\mu\in\mathcal{M}^+$] にたいし関数H_Af, L_Af [resp. μH_A, μL_A] を f [resp. μ] のA上への被掃散（balayée）と呼ぶ。とくにfが超過的関数であるとき，H_Afをfの縮小関数（réduite）と呼ぶ.

N^A をAに埋蔵された核（kernel imbedded over A）と呼ぶ.

Nを推移確率にもつMarkov連鎖$X=(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), (X(n)), \zeta, (P^x;\ x$

(*) §1と同様に，本節でも主に解析的な方法で議論を進める。次節の準備として埋蔵鎖に関する若干の結果を証明するが，本節では全く重要でない。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$\in E$), (θ_n)) を考える.(*) つぎの定義をする.

(12.6) $$\sigma_A = \min\{n \geq 0;\ X(n) \in A\},^{(**)}$$

(12.7) $$\tau_A = \min\{n \geq 1;\ X(n) \in A\},$$

(12.8) $$\begin{cases} \tau_0 = \sigma_A, \\ \tau_n = \inf\{m > \tau_{n-1};\ X(m) \in A\} = \tau_{n-1} + \tau_A \circ \theta_{\tau_{n-1}}, \end{cases}$$

(12.9) $$\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{\tau_n},$$

(12.10) $$\begin{cases} \gamma = \sup\{n;\ \tau_n \leq \zeta\} \\ Y(n) = X(\tau_n). \end{cases}$$

組 $Y = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_n), (Y(n)), \gamma, (P^x;\ x \in A), (\theta_n))$ を X の<u>A上への埋蔵鎖</u>と呼ぶ。

よく知られているように

(12.11) $$H_A(x, B) = P^x\{X(\sigma_A) \in B\}.$$

13. <u>定理.</u> (掃散原理) (a) 超過的関数 u の縮小関数 $H_A u$ は超過的で, A 上で $\geq u$ なる超過的関数の中で最小のものである。

(b) H_A は劣 Markov 核である。

(c) u が有限値超過的関数ならば,

(13.1) $$f \underset{(def)}{=\!=} (I - N)u, \qquad u_\infty = N^\infty u$$

としたとき

(13.2) $$g \underset{(def)}{=\!=} (I-N)H_A u = L_A f + \lim_{n\to\infty} J_A \cdot [N(I-J_A)]_n\, u_\infty$$

である. ゆえに, u が有限値ポテンシャル Gf ならば, $H_A u$ もポテンシャルでその定義関数 g は $L_A f$ によって与えられる. すなわち, N が非再帰的ならば

(*) 定理は第Ⅱ部, §0 を見よ.

(**) このような n がなければ $\sigma_A = +\infty$ と定める. τ_A, その他についても同様である.

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

(13.3) $$H_A G = G L_A$$

が成り立つ。また一般に $H_A u$ がポテンシャルならば，その定義関数 g は A の中に台をもつ。(*)

<u>証明</u> (a), (b) はよく知られており，第Ⅱ部でも確率論的証明が与えられているが，ここでは Meyer[11, p.182] とも少し異る形の解析的証明を与える。解析的に見て，掃散核 H_A が自然に導かれる事情が多少明らかにされると思う。

(a) u が有限値の場合に証明すれば十分である．

A 上で u と一致し，いたるところ u を超えない超過的関数の全体を $\mathcal{V}$ とおく．$\mathcal{V}$ に最小元があって，それが $H_A u$ で表わされることを示せばよい。

(13.4) $$v = J_A u + w \quad , \qquad v \in \mathcal{V}$$

なる w の全体を $\mathcal{W}$ で表わす．$w \in \mathcal{W}$ であるための条件は

(13.5) $$\begin{cases} w \geq 0, \quad (I - J_A) w = w \\ Nv = NJ_A u + Nw \leq v = J_A u + w \end{cases}$$

である．ゆえに $(I - J_A)$ を上式の両辺に施してえられる不等式

$$w \geq (I - J_A) NJ_A u + (I - J_A) Nw$$

をみたす非負関数の中で最小のものを求めればよい．漸化式により

$$w \geq \sum_{k=1}^{n} [(I - J_A) N]^k J_A u + [(I - J_A) N]^n w \ .$$

これから

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [(I - J_A) N]^n J_A u$$

が $\mathcal{W}$ の最小元であることが分る．ゆえに $\mathcal{V}$ の最小元は

$$v_0 = J_A u + w_0 = H_A u$$

で与えられる。

(b) $u = 1$ とおけばよい．

(*) 定義関数の台が A に含まれ，A 上では u と一致するポテンシャルを<u>掃散ポテンシャル</u>という．掃散ポテンシャルがもし存在すれば，唯一つで上記 (a) の性質をもつことは定理 8 (a) から容易に示される。その逆がここで示されたことになる。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

(c) 初等的な計算ででるが，可成り複雑であるから省略する。これはあとで使わない（Deny[5]，筆者[15]参照）。

14．定理．(a) N^A は劣Markov核である。

(b) A上への埋蔵鎖Yは N^A を推移確率にもつMarkov連鎖である．

(c) 埋蔵核 N^A のポテンシャル核は G_A である。すなわち

$$(14.1) \qquad G_A = \sum_{n \geq 0} [N^A]^n. ^{(*)}$$

とくにNが非再帰的ならば N^A も非再帰的である．

(d) uがNに関して超過的ならば，$u|_A$ は N^A に関して超過的である。

証明．(a) $N^A = J_A N \cdot H_A$ と前定理(b)によりあきらか。

(b) $X(n)$ の強Markov性から，容易に

$$(14.2) \qquad P^x\{X(\tau_{n+1}) \in B,\ \tau_{n+1} = \tau_n + m + 1 \mid \mathcal{F}_{\tau_n}\}$$

$$= ([(I - J_A)N]^m N)\ (X(\tau_n),\ A \cap B), \qquad x \in A$$

であることが示される。mについて加えて

$$P^x\{Y(n+1) \in B \mid \mathcal{F}_{\tau_n}\} = N^A(Y(n),\ B), \qquad x \in A,$$

がえられる．

(c) 確率論な証明が簡単であるが，純解析的な証明も同時に与えよう．

第1の証明．$x \in A$，$B \subseteq A$ かつ $B \in \mathcal{E}$ とする．

$$G_A(x, B) = G(x, B) = E^x\{\sum_{0 \leq n \leq \zeta} I_B\ (X(n))\}$$

$$= E^x\{\sum_{0 \leq k \leq \zeta^A} I_B\ (X(\tau_k))\}$$

$$= E^x\{\sum_{0 \leq k \leq \zeta^A} I_B\ (Y(k))\}$$

$$= \sum_{n \geq 0} [N^A]^n (x, B) \qquad ((b) \text{ より}).$$

第2の証明．

$$(14.3) \qquad \bar{N}^A = N \cdot H_A, \quad \bar{G}_A = (I - J_A) + G J_A$$

とおく．$J_A{}^2 = J_A$ により

(*) ただし，ここでは $[N^A]^0 = J_A$ と定める。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

(14.4) $$(N^A)^n = J_A(\overline{N}^A)^n$$

であるから

(14.5) $$\overline{G}_A = \sum_{n\geqq 0}(\overline{N}^A)^n$$

を示せばよい。$0<a<1$ にたいし

(14.6) $$\overline{N}_a^A = \sum_{n\geqq 0}[aN(I-J_A)]^n(aN)J_A$$

(14.7) $$\overline{G}_A^a = (I-J_A) + \sum_{n\geqq 0}(aN)^n\cdot J_A$$

とおく．N, $\overline{N}_a^A$ を $\mathcal{G}$ 上の作用素と考えたとき

$$\|aN\| < 1,$$
$$\|\overline{N}_a^A\| = \|\overline{N}_a^A 1\| \leqq a\|N\cdot H_A 1\| < 1.$$

したがって，(14.6), (14.7) および

(14.8) $$\sum_{n\geqq 0}(\overline{N}_a^A)^n$$

はすべて作用素のノルムの意味で収束するから，通常の級数計算によって

(14.9) $$\overline{G}_A^a = \sum_{n\geqq 0}(N_a^A)^n$$

がえられる（"＝" は $\mathcal{G}$ 上の有界作用素としての等号）．ここで $\overline{N}_a^A$，$\overline{G}_A^a$ 等が核であることに注意して，$a\to 1$ とすれば (14.5) がえられる（ここでの "＝" は核として等号である）．

15. 注意. (a) 測度 $\nu\in\mathcal{M}^+$ が $\nu N\leqq\nu$ をみたすとき，νは（Nに関して）超過的であるという。超過的測度についても定理13に類似の掃散原理が成り立つ。結果だけのべる。

νが超過的ならば，νL_A はA上でνと一致する超過的測度の中で最小のものを与える。$\mu=\nu(I-N)$，$\nu_\infty=\nu N^\infty$ としたとき；

(15.1) $$\lambda \underset{(def)}{=} \nu L_A(I-N) = \mu H_A + \lim_{n\to\infty}\nu_\infty[(I-J_A)N]^n\cdot J_A$$

である。さらに定理13 (c) の後半に類似な結果も成り立つ。

(b) 埋蔵鎖を少し広く定義することもできる。X^A で $(P^x;\ x\in A)$ の代りに

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$(P^x;\ x\in E)$ を考えよう。そのとき $X^A(n)$ は $\bar{N}^A = N\cdot H_A$ を推移確率にもつ Markov 連鎖で，そのポテンシャル核は

$$(15.2)\qquad \bar{G}_A \underset{(def)}{=} (I-J_A)+GJ_A$$

によって与えられる。しかしこの定義は使わない。

16. 定理. G が非再帰劣 Markov 核のポテンシャル核ならばつぎの条件は同等である。

(a) u が超過的である。

(b) u が準超過的である。

(c) u が準優メジアンである。

証明. (a) → (b). 定理 8 (b) で示した。

(b) → (c). 定義から明らかである。

(c) → (a). この証明では本質的にレゾルベントによる議論がさけられないが，レゾルベントに関する一般的な諸定理を使うことは避け，self-contained な証明を与える。

u が準優メジアンであるとしよう。G は原理 (RM) をみたすから，非負定数 a が準優メジアンであり，したがって $u\wedge a$ も準優メジアンである（これは定義から容易に示される）．したがって，有界な準優メジアン関数が超過的なことを示せば十分である。

$\lambda>0$ にたいし

$$(16.1)\qquad M_\lambda = \frac{\lambda}{\lambda+1}\left[\, I+\frac{N}{\lambda+1}+\left(\frac{N}{\lambda+1}\right)^2+\cdots\ \right]$$

とおく． M_λ は明らかに劣 Markov 核である．定理 14 (c) と同じように Neumann 級数を用いる議論によって

$$I+\lambda G = \sum_{n\geq 0} M_\lambda^n$$

あるいは

$$(16.2)\qquad \lambda G = M_\lambda + M_\lambda^2 + \cdots\cdot$$

がたしかめられる。

u が有界な準優メジアン関数としよう。先ずこれが M_λ に関して超過的なことを示す。$u\geq f$ なる任意の $f\in\mathcal{B}_+$ にたいして

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

(16.3) $$u \geq M_\lambda f$$

を示せばよい。定理8と同じように $g=(I-M_\lambda)f$ とおくと，$G|g| \leq Gf + GM_\lambda f \leq 2Gf$．ゆえに $f \in \mathcal{B}$．かつ

$$\lambda Gg = \lambda Gf - \lambda GM_\lambda f = M_\lambda f .$$

$S=\{u > \lambda Gg = M_\lambda f\}$ とおくと，

$$[u \geq G\lambda g]_S , \quad S \supseteq \{f > M_\lambda f\} = S_g^+ .$$

したがって，$u \geq \lambda Gg = M_\lambda f$．

(16.1)により，$\lambda^{-1}(\lambda+1)M_\lambda$ は $(\lambda+1)^{-1}N$ のポテンシャル核であるから

(16.4) $$\left(\frac{N}{\lambda+1}\right)\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}M_\lambda u\right) = \frac{\lambda+1}{\lambda}M_\lambda u - u$$
$$= \frac{1}{\lambda}M_\lambda u + M_\lambda u - u \leq \frac{1}{\lambda}M_\lambda u ,$$
$$N(M_\lambda u) \leq M_\lambda u .$$

$\lambda \to \infty$ として(16.1)と Fatou の補題により $Nu \leq u$ をうる．

17. Gが原理(RM)をみたす固有核であるとしよう。Eに増加し，各iにたいし GI_{E_i} が有界であるようなEの列 $\{E_i\}$ を<u>G-有界な可算被覆</u>であると呼ぼう。

(17.1) $$G_i = G_{E_i}$$

が $\mathcal{G}_i = \{f|_{E_i} ; f \in \mathcal{G}\}$ 上の有界作用素で，E_i 上で原理(RM)をみたすことは容易に確かめられる．したがって定理10により E_i 上の非再帰劣 Markov 核 N_i が唯1つ定まって，そのポテンシャル核が G_i で与えられる．$j>i$ のとき

(17.2) $$(G_j)_i = (G_{E_j})_{E_i} = G_{E_i} = G_i$$

であるから，定理14(c)と一意性の定理(定理9)によって N_i は N_j の E_i 上への埋蔵核になっていることが分る。このとき $\{N_i\}$ は<u>適合条件</u>をみたすといわれる。

18. <u>定理</u>. Gは原理(RM)をみたす固有核，$\{N_i\}$ は No.17 における埋蔵核の列とする．$u \in p\mathcal{E}$ にたいしてつぎの条件は同等である。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

(a) uが準超過的である。

(b) uが準優メジアンである。

(c) すべてのiにたいして，$u_i=u|_{E_i}$ がN_iに関して超過的である。

証明. (a) ⟹ (b)。定義から明らかである。

(b) ⟹ (c)。uが準優メジアンならば，u_iが核G_iに関して準優メジアンなことは容易に分る．したがって定理16によりN_iに関して超過的である。

(c) ⟹ (a). No. 11 (b) と類似の論法で証明される。定理3 (b) により，$u+Gf-f$ ($f\in\mathcal{B}_+$) が優越的なことを示せばよい。$g\in\mathcal{B}_+$にたいし

$$[u+Gf-f\geq Gg]_S\ ,\qquad S\supseteq S_g^+ \tag{18.1}$$

であるとしよう。$\varepsilon>0$，$u_i=u|_{E_i}$，$f_i=f|_{E_i}$ とする．$(G-I)$が固有核だから

$$G(f-f_i)-(f-f_i)\downarrow 0\qquad (i\to\infty).$$

ゆえに

$$F_i=\{x\in E_i\ ;\ G(f-f_i)-(f-f_i)<\varepsilon\}$$

とおくと，$\{F_i\}$ もEに増加する．$g_i=g|_{F_i}$，$S_i=S\cap F_i$ とおく．そのとき

$$[u_i+\varepsilon+G_if_i-f_i\geq G_ig_i]_{S_i}\ ,\qquad S_i\supseteq S_{g_i}^+ \tag{18.2}$$

である．$u_i+\varepsilon+G_if_i-f_i$ はN_i-超過的であるから，定理8(c) により

$$[u_i+\varepsilon+G_if_i-f_i\geq G_ig_i]_{E_i}.$$

$i\to\infty$，$\varepsilon\to 0$ として

$$u+Gf-f\geq Gg$$

がえられる．

19. 系. (a) 準超過関数はmin，和，極限，正の定数倍に関して閉じている。

(b) 定数$a\geq 0$，$f\in p\mathcal{E}$ にたいしてGf，$Gf-f$ (fは有限値) は準超過的である．

(c) uが準超過的で $u=Gf$，$f\in\mathcal{B}$ ならば，$f\geq 0$．

証明. (a) 前定理 (c) から明らか。

(b) $f\in\mathcal{B}_+$ については原理(RM)から容易に示される．一般のfについては，(a)により極限を取ればよい。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

(c) $[u \geq Gf]_S$, $S = E$, であるから, $u - f^- \geq Gf = u$. ゆえに $f^- = 0$。

20. <u>定義</u>. Gは原理(RM)をみたす固有核, uは準超過的関数, $A \in \mathcal{E}$とする。A上で$\geq u$なる準超過的関数の全体を $\mathcal{U}$ で表わす.(*)

(20.1) $$\bar{H}_A u = \inf \mathcal{U}$$

をuのA上への<u>擬縮小関数</u>(*pseudo-réduite*)と呼ぶ。

$\{E_i\}$ を G-有界な可算被覆(No. 17を見よ)とする. $F_i = E - E_i$ とおく。もし,

(20.2) $$\lim_{i \to \infty} \bar{H}_{F_i} u = 0$$

であれば, uは<u>$\{E_i\}$に関して準ポテンシャル</u>(*quasi-potential*)(*)であるという. 上のようなすべての$\{E_i\}$について準ポテンシャルなら, 単に<u>準ポテンシャル</u>であるという。

uがすべてのiにたいし

(20.3) $$u = \bar{H}_{F_i} u$$

をみたすとき, uは<u>$\{E_i\}$に関して準不変である</u>という。すべての$\{E_i\}$について準不変なら, 単に<u>準不変</u>であるという。

準超過関数uが<u>一様積分可能</u>であるというのは,

(20.4) $$\mathcal{V} = \{f \in p\mathcal{E};\ u \geq Gf\}$$

とおいたとき, $\mathcal{V}$における任意の収束列 $f_n \to f$ ($f_n \in \mathcal{V}$) にたいして, $Gf_n \to Gf$ が成り立つことである.

21. <u>定理</u>. (a) 擬縮小関数は準超過的である. かつ

(21.1) $$\bar{H}_A(\alpha u + \beta v) = \alpha \bar{H}_A u + \beta \bar{H}_A v, \quad \alpha \geq 0, \ \beta \geq 0,$$

(21.2) $$A_n \uparrow A \ \text{ なら, } \ \bar{H}_{A_n} u \uparrow \bar{H}_A u .$$

(b) uがA上で有界, GI_Aも有界ならば, $\bar{H}_A u$ はある $f \in \mathcal{B}_+$ のポテンシ

(*) 第Ⅱ部の条件(N), Meyer[12] は "null au bord" である。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

ャルである．fは一意的に定まり，かつ fの台はAに含まれる。[*]

(c) 有限値準超過的関数uにたいして，つぎの条件は同等である。

$(c)_1$ つぎのような$\mathcal{E}$の列 $\{E_i\}$ が存在する．(i) $\{E_i\}$ は G-有界な可算被覆である。(ii) 各 $u|_{E_i}$ は有界である．(iii) uは $\{E_i\}$ に関して準ポテンシャルである。

$(c)_2$ uは一様積分可能である．

$(c)_3$ uが準ポテンシャルである。

(d) uが有限かつ一様積分可能な準超過関数なら，$u \geq v$ なるすべての準超過関数はポテンシャルである（特にu自身はポテンシャルである）。

<u>証明</u>．(a) $\{N_i\}$ を No.17における埋蔵核の列とする．N_i に関する掃散核を H_A^i によってあらわす．$u_i = u|_{E_i}$ は N_i に関して超過的であるから

$$(21.3)\qquad v_i = H^i_{A_i} u_i \qquad (A_i = A \cap E_i)$$

は A_i 上で $u_i\,(=u)$ と一致する N_i-超過的関数の族 $\mathcal{V}_i$ の中で最小のものを与える．$j > i$ ならば，定理14(d) により $v_j|_{E_i}$ は N_i-超過的だから，

$$(21.4)\qquad v_j|_{E_i} \in \mathcal{U}_i, \quad \text{あるいは} \quad v_j|_{E_i} \geq v_i \ .$$

ゆえに

$$(21.5)\qquad v = \lim_{i\to\infty} v_i = \lim_{i\to\infty} H^i_{A_i} u_i$$

が存在する．任意のiにたいし，$v_j|_{E_i}$ $(j > i)$ は N_i-超過的で $v|_{E_i}$ に増加するから，$v|_{E_i}$ は N_i-超過的．定理18 によりvは準超過的である．

$u' \in \mathcal{U}$ ならば，$u'|_{E_i} \in \mathcal{U}_i \Rightarrow (u'|_{E_i} \geq v_i) \Rightarrow (u' \geq v)$。ゆえに$v$は$u$の擬縮小関数である。(21.1)，(21.2)は上の構成から容易に示される。

(b) $u_A = u|_A \in \mathcal{G}_A$ で，G_A は $\mathcal{G}_A$ 上の有界作用素だから，定理5(c) により

$$(21.6)\qquad u_A = G_A f\ , \quad f \in \mathcal{G}_A$$

の解 $f \in \mathcal{G}_A$ が存在する。u_A が G_A に関して準超過的だから，$f \geq 0$。

$$(21.7)\qquad v = Gf$$

(*) すなわち u の掃散ポテンシャルである．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

とおく。$u' \in \mathcal{U}$ ならば

$$u' \geq u_A = G_A f = J_A G J_A f = J_A G f,$$
$$[u' \geq Gf]_S, \quad S \supseteq S_f^+.$$

ゆえに $u' \geq Gf = v$. 系19(b)により Gf は準超過的だから，$v = \overline{H}_A u$. f の一意性は定理6(b)による.

(c) $(c)_1 \to (c)_2$. この部分は第II部の基本的補題3.1にほかならない。しかし，そこでは $(c)_3$ から $(c)_2$ を導いているので，Meyer の原論文にしたがって，若干修正して概略のみのべる.

(20.4) の $\mathcal{V}$ を考え，$f_j \to f$ ($f_j \in \mathcal{V}$) とする. $(c)_1$ における $\{E_i\}$ にたいし

(21.8) $$\lambda_n = \sup GI_{E_n}$$

とおき，$\sum a_n \lambda_n < \infty$ なる正数列 $\{a_n\}$ をえらび ($a_n > 0$)

(21.9) $$w = \sum a_n I_{E_n}$$

とおく。あきらかに $w \in \mathcal{B}_+$ である. この w について第II部と同じように

(21.10) $$\int_{\{f_j > nw\}} G(x, dy) f_j(dy) = (*)$$

が $n \to \infty$ のとき，j について一様に0に近づくことを示せばよい。$C_n = \{u > nw\}$ とおくと第II部と同じようにして

(21.11) $$(*) \leq \overline{H}_{C_n} u(x)$$

がえられる。仮定により任意の $\varepsilon > 0$ にたいして，$\overline{H}_{F_i} u(x) < \varepsilon$ なる i が存在する. この i を固定して n を十分大きくとれば，u が E_i 上で有界だから，E_i 上で

$$nw \geq na_i \geq \sup_{x \in E_i} u(x).$$

ゆえに $C_n \subseteq F_i$。したがって，$\overline{H}_{C_n} u(x) \leq \overline{H}_{F_i} u(x) < \varepsilon$ である。

$(c)_2 \to (c)_3$. 各 F_i にたいして，$u|_{F_{ij}}$ と $GI_{F_{ij}}$ が有界であるような F_i への増加列 $\{F_{ij}\}$ をとる. (b) により，F_{ij} に台が含まれるような $f_{ij} \in \mathcal{B}_+$ が存在して

(21.12) $$\overline{H}_{F_{ij}} u = G f_{ij}.$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$k > j$ ならば $G(f_{ik} - f_{ij}) \geq 0$ であるから，定理6(a)により，$G(f_{ik} - f_{ij}) - (f_{ik} - f_{ij}) \geq 0$. ゆえに $Gf_{ij} - f_{ij}$ は j に関して増加であり，有限な極限をもつ．したがって f_{ij} $(j \to \infty)$ も極限 f_i をもつ．あきらかに f_i の台は F_i に含まれている．(21.2) と一様積分可能性から

(21.13) $$Gf_i = \lim_{j\to\infty} Gf_{ij} = \lim_{j\to\infty} \overline{H}_{F_{ij}} u = \overline{H}_{F_i} u .$$

$i \to \infty$ のとき，$F_i \to \phi$. 各 f_i は F_i に台をもつから，$f_i \to 0$. ゆえにふたたび一様積分可能性により，$\overline{H}_{F_i} u = Gf_i \to 0$ である。

$(c)_3 \longrightarrow (c)_1$. 明らか．

(d)　$(c)_2 \to (c)_3$ の証明と同様である。v を $\overline{H}_{E_i} v$ によって近似すればよい。

22. 定理.　G が非再帰劣 Markov 核 N のポテンシャル核であるとする。

(a)　すべての準超過的（＝超過的）関数 u にたいして

(22.1) $$\overline{H}_A u = H_A u .$$

(b)　有限値関数 u にたいして，u がポテンシャルであることと準ポテンシャルなることは同等である。

(c)　つぎの条件は同等である。

$(c)_1$　u が不変である。

$(c)_2$　u が準不変である．

$(c)_3$　u がある G-有界な可算被覆 $\{E_i\}$ に関して準不変である．

証明. (a) 定理16および13(a)より明らか．

(b)　H_A の定義から

$$\begin{aligned}(I - J_A) NH_A &= \sum_{n\geq 1} [(I - J_A)N]^n J_A \\ &= (I - J_A)(J_A + \sum_{n\geq 1} [(I - J_A)N]^n J_A) \\ &= (I - J_A) H_A .\end{aligned}$$

これは

(22.2) $$[NH_A g = H_A g]_{C_A} , \qquad g \in p\mathcal{E}$$

を意味する．u が有限値超過関数とする．$H_{F_i} u$ は N について積分可能で減少してある関数 v に近づく．任意の x にたいし，$x \in E_i$ なる i を取れば，

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$NH_{F_i}u(x) = H_{F_i}u(x)$ だから Lebesgue の項別積分定理により $Nv(x) = v(x)$, $x \in E$。特に u がポテンシャルなら，

$$v = N^\infty v \le N^\infty u = 0 .$$

逆に u が準ポテンシャルとしよう．$h = N^\infty u$ とおく．A を

(22.3) $\qquad h|_A$, GI_A が有界

であるようなその集合とする．$B = E - A$ とおくと，h が不変関数だから

$$\begin{aligned} H_B h &= \sum_{n \ge 0} [(I - J_B)N]^n J_B h \\ &= \sum_{n\ge 0} [J_A N]^n [I - J_A N] h = h , \end{aligned}$$

これは，$J_B h = h - J_A h = h - J_A N h$ と，h が核 $\sum_{n\ge 0} (J_A N)^n$ に関して積分可能であること，すなわち

$$\begin{aligned} \sum_{n\ge 0} (J_A N)^n h &= h + \sum_{n \ge 0} (J_A N)^n J_A N h \\ &\le h + G J_A h < \infty \end{aligned}$$

による．各 E_i が (22.3) の条件をみたすような G-有界な可算被覆 $\{E_i\}$ を取れば，

$$h = H_{F_i} h = \lim_{i\to\infty} H_{F_i} h \le \lim_{i\to\infty} H_{F_i} u = 0 \ .$$

ゆえに u はポテンシャルである.(*)

(c) $\underline{(c)_1 \to (c)_2}$．　u が不変であるとし，任意の G-有界な可算被覆 $\{E_i\}$ を取る．(b) におけるように，$v = \lim H_{F_i} u$ は不変である．これから $u - v$ が準ポテンシャルであることは容易にしたがう。したがって $(u - v)$ はポテンシャルであり，一方不変でもある．ゆえに Riesz 分解から　$u - v = 0$．あきらかに v は $\{E_i\}$ に関して準不変である．ゆえに　$u = v$ が $\{E_i\}$ に関して準不変である．$\{E_i\}$ は任意だから u は準不変である．

$\underline{(c)_2 \to (c)_3}$．　あきらか。

$\underline{(c)_3 \to (c)_1}$．　u がある $\{E_i\}$ に関して準不変とする．u の Riesz 分解 $u = Gf + h$ を考えると，

$$u = \lim H_{F_i} u = \lim H_{F_i} Gf + \lim H_{F_i} h \le h .$$

ゆえに　$u = h$　である．

(*) 準ポテンシャルがポテンシャルであることは，定理 21 (c), (d) ですでに示されている。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

23. 定理. Gが原理(RM)をみたす固有核とする。$G|f|$が準ポテンシャルであるような $f\in\mathcal{B}$ の全体を$\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_0$によって生成されるσ-環を$\mathcal{E}_0$とする。そのとき,

(a) Gの$E\times\mathcal{E}_0$への制限G_0は$(E,\mathcal{E}_0)$上の核である. すなわち, 任意の$x\in E$にたいして, $\varepsilon_x G \underset{(def)}{=} G(x,\cdot)$ は$\mathcal{E}_0$上の測度であり, $^\forall A\in\mathcal{E}_0$にたいして$GI_A$ は$\mathcal{E}_0$-可測である.(*)

(b) G_0は$(E,\mathcal{E}_0)$上のある劣Markov核N_0(すべての$A\in\mathcal{E}_0$にたいし, $NI_A\leq 1$)のポテンシャル核である. このようなN_0は一意的に定まる.

証明. $f\in\mathcal{B}_{0,+}$ならばGfは一様積分可能な準超過関数である。したがって準超過関数$Gf-f$ はポテンシャルである. すなわち

$$G\varphi = Gf-f \qquad (f\in\mathcal{B}_{0,+}) \tag{23.1}$$

の解$\varphi\geq 0$が存在する。φが一意的で$\mathcal{B}_{0,+}$に属することを示す。一般に$g\in\mathcal{B}_+$ならば $Gg\geq g$ だから, すべての $g\in p\mathcal{E}$ にたいし同じ不等式が成り立つ. ゆえに

$$Gf\geq G\varphi\geq\varphi\geq 0 \tag{23.2}$$

であり, $\varphi\in\mathcal{B}_+$が示された。これからφの一意性(定理6(b))と$\varphi\in\mathcal{B}_{0,+}$はあきらかである。

$$\varphi = N_0 f\ ,\qquad f\in\mathcal{B}_{0,+} \tag{23.3}$$

によってN_0を定義する. N_0が$\mathcal{B}_{0,+}$から$\mathcal{B}_{0,+}$への正の線形写像(**)であること, および

$$0\leq N_0 f\leq 1 \qquad (0\leq f\leq 1,\ f\in\mathcal{B}_{0,+}), \tag{23.4}$$

$$Gf=\sum_{k=0}^{n} N_0^k f + G N_0^{n+1} f, \qquad f\in\mathcal{B}_{0,+} \tag{23.5}$$

(*) fをE上で定義された実数値関数とする。任意の1次元Borel集合Bにたいして, $\{x\mid f(x)\in B,\ f(x)\neq 0\}\in\mathcal{E}_0$ のとき, fはσ-環$\mathcal{E}_0$に関して可測であるという。その他σ-環の上の積分に関してはHalmos[8]を見よ。

(**) $\alpha,\beta\geq 0,\ f,g\in\mathcal{B}_{0,+}$ のとき, $N_0(\alpha f+\beta g)=\alpha N_0 f+\beta N_0 g$。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

であることは定理10と同様にして証明される。(23.5) により，$N_0^n f \to 0$．Gf が一様積分可能だから $GN_0^{n+1}f \to 0$．ゆえに

$$(23.6) \qquad Gf = \sum_{n=0}^{\infty} N_0^n f \ , \quad f \in \mathcal{B}_{0,+} \ .$$

$f_n \downarrow 0$ ($f_n \in \mathcal{B}_{0,+}$) のとき $Gf_n \downarrow 0$ だから，$N_0 f_n \downarrow 0$．また $\mathcal{B}_0$ はベクトル束であり，N_0 は $\mathcal{B}_0$ 上の線形写像に拡張されるから，Daniell積分の定理により，各 $x \in E$ にたいし，$\varepsilon_x N_0$ は $\mathcal{E}_0$ 上の測度に拡張される。(*)

$\mathcal{B}_{0,+}$ の単調増加列の極限として表わされるような関数の全体を $\mathcal{J}^+$ とし，

$$(23.7) \qquad \mathfrak{M} = \{ G : I_G \in \mathcal{J}^+ \}$$

とおく．$a>0$，$f \in \mathcal{B}_{0,+}$のとき，$1 \wedge [n(f-a)^+] \in \mathcal{B}_{0,+}$ であることが容易に示されるから，$I_{\{f>a\}} = \lim [1 \wedge [n(f-a)^+]] \in \mathcal{J}^+$．ゆえに集合 $\{f > a\} \in \mathfrak{M}$ ($a>0$) である。また $\mathfrak{M} \ni F, G$ ならば $F \cap G \in \mathfrak{M}$ であることも簡単に分る。

さて $\mathcal{E}_0$-可測な関数で

$$(23.8) \qquad N_0 f \text{ が } \mathcal{E}_0\text{-可測，かつ } N_0|f|(x) \le \|f\|$$

であるような f の全体を $\mathcal{H}$ で表わす。$G \in \mathfrak{M}$ ならば $I_G \in \mathcal{H}$ であることは $N_0 f \in \mathcal{B}_{0,+}$ ($f \in \mathcal{B}_{0,+}$) と (23.4) からあきらかである．したがって，$\mathcal{H}$は $\mathcal{E}_0$-可測な有界関数の全体と一致する。(**) ゆえに N_0 は $\mathcal{E}_0$ 上の劣Markov核であることが示される。

つぎに GI_{E_n} が有界であるような $E_n \in \mathcal{E}$ をとり，

$$(23.9) \qquad I_{E_n} \cdot f \text{ が } \mathcal{E}_0\text{-可測，かつ } G(I_{E_n} f) = \sum_{k=0}^{\infty} N_0^k (I_{E_n} f)$$

が成り立つような $\mathcal{E}_0$-可測有界関数の全体を $\mathcal{K}$ とする。$f \in \mathcal{B}_{0,+}$なら $f \cdot I_{E_n} \in \mathcal{B}_{0,+}$ であることから，(23.9) がすべての $f \in \mathcal{B}_{0,+}$ について成り立つ．ゆえにすべての $G \in \mathfrak{M}$ にたいし $I_G \in \mathcal{K}$．$\mathcal{H}$ の場合と同じ理由で，$\mathcal{K}$ は $\mathcal{E}_0$-可測有界関数の全体と一致する．$n \to \infty$ として，

(*) この場合のDaniell積分定理については，Loomis [10, Chapter III] を見よ.

(**) これはDynkin [6, p.4, Lemma 1.2] を若干修正すればよい。$\mathcal{H}$は 1 を含むという条件を除いて $\mathcal{L}$-systemになっている。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

(23.10) $$Gf = \sum_{n=0}^{\infty} N_0^k f, \qquad f \in p\mathcal{E}_0$$

がえられる．したがって，G は $(E, \mathcal{E}_0)$ 上の核で，N_0 のポテンシャル核である。

24. 定理： 原理(RM)をみたす固有核Gがある劣Markov核のポテンシャル核であるためには，つぎの条件のいずれかをみたすことが十分である。(*)

(a) つぎのような$\mathcal{E}$の列 $\{E_i\}$ と $\mathcal{B}_+$ の増加列 $\{f_n\}$ が存在する。

(24.1) $\{E_i\}$ は G-有界な可算被覆である。

(24.2) $$\lim_{n\to\infty} f_n = \infty$$

(24.3) Gf_n は $\{E_i\}$ に関して準ポテンシャルである．

(b) いたるところ正の $f \in \mathcal{B}_+$ が存在し，Gf が $\{E_i\}$ に関して準ポテンシャルである。

(c) (24.2) のような $\mathcal{B}_+$ の増加列 $\{f_n\}$ が存在し，各 Gf_n が一様積分可能である．

(d) いたるところ正の $f \in \mathcal{B}_+$ が存在し，Gf が一様積分可能である．

証明． これらの条件の同等性を示すことは簡単だから省略する．

条件(b)が十分であることを示そう。任意の $g \in \mathcal{B}_+$ にたいし，$g \wedge (nf)$ は $\mathcal{B}_{0,+}$ にぞくする．ゆえに $g \wedge (nf)$ は $\mathcal{E}_0$-可測，したがって g も $\mathcal{E}_0$-可測である．$\mathcal{E}$は $\mathcal{B}_+$ によって生成される σ-環（$=\sigma$-代数）にほかならないから，$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$．ゆえに前定理により，$G$ はある劣Markov核 N のポテンシャル核である。

25. 例． Eが σ-コンパクト，局所コンパクトな Hausdorff 空間，$\mathcal{E}$が Borel 集合の σ-代数，C_K (C_0) を台がコンパクトな（無限大で 0 な）連続関数の全体とする。核Gが原理(RM)をみたし，C_K を C_0 に移すならば，Gは劣Markov核のポテンシャルである。

証明． あきらかにGは固有核である．Eに増加するコンパクト集合の列 $\{E_i\}$

(*) これらは明らかに必要でもある（定理22）．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

といたるところ正の $f \in C_0$ を考える。

$$a_i = \sup_{y \in F_i} Gf(y) \qquad (F_i = E - E_i)$$

とおく。定数 a_i は F_i 上で Gf をこえる準超過関数だから

$$\overline{H}_{F_i} Gf(x) \leq a_i \longrightarrow 0 \quad (i \to \infty).$$

26. 注意. つぎの結果が予想されるが，筆者には証明できていない。

"G は原理 (RM) をみたす固有核，u を有限値準超過関数とする。そのとき，

(a) u が準不変なことと，ある G-有界な可算被覆 $\{E_i\}$ に関して準不変なことは同等である。

(b) u は準ポテンシャルと準不変関数の和に一意的に表わされる。"

G が劣 Markov 核のポテンシャル核の場合は，上の (a) は定理 22 (c) で示した。(b) が通常の Riesz 分解に他ならないことも同定理に含まれている。

(a), (b) はつぎの少し弱い結果が分れば出る。

(c) $\{E_i\}$ が 1 つの G-有界な可算被覆であるとする。そのとき，$u - \lim_{i \to \infty} \overline{H}_{F_i} u$ は準超過的関数である。

§3. 埋蔵鎖の射影極限

埋蔵鎖の列の射影極限について論じるためには，状態空間 $(E, \mathcal{E})$ に何らかの制限が必要になる。現在考えられる最も自然な条件は，$(E, \mathcal{E})$ が完備可分な距離空間上の Borel 集合のなす可測空間，あるいはそれに同等な可測空間 (= 可分な標準可測空間) であると仮定することである。この条件の下で，本節では埋蔵鎖の列に関する一般的な結果を述べる (定理33)。次節でポテンシャル核への応用を論じる。

測度空間の射影極限に関しては Bochner の定理 [1] が最もよく知られている。しかし埋蔵鎖への応用に際して，可算状態空間の場合以外は，埋蔵写像が連続でないので Bochner の定理では十分でない。そこで始めに "可分な標準測度空間" に関する Parthasarathy - M. Weil の定理を説明する。この定理は他の問題にも応用される (M. Weil [17] を見よ)。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

27. 抽象空間の族 $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in I}$ が与えられているとする．I は半順序集合で，$\alpha\leq\beta$ にたいし Ω_β から Ω_α への写像 $f_{\alpha\beta}$ が対応し

$$(27.1)\qquad \begin{cases} f_{\alpha\alpha} = \text{恒等写像} \\ f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta}\circ f_{\beta\gamma} \qquad (\alpha\leq\beta\leq\gamma) \end{cases}$$

がみたされているとする．組 $(\Omega_\alpha,\ f_{\alpha\beta})$ を射影系という．直積空間 $\prod_\alpha \Omega_\alpha$ の点で $\{f_{\alpha\beta}\}$ に関して一致条件をみたす点の全体を Ω で表わす。すなわち

$$(27.2)\qquad [\Omega\ni\omega=(\omega_\alpha,\ \alpha\in I)] \Longleftrightarrow [\omega_\alpha = f_{\alpha\beta}\,\omega_\beta\ ,\ \ \alpha\leq\beta]^{(*)}.$$

$\prod_\alpha \Omega_\alpha$ から Ω_α への射影を Ω に制限したものを f_α で表わす。 Ω を $\{\Omega_\alpha\}$ の射影極限（*projective limit*，または *inverse limit*），f_α を標準写像と呼ぶ．Ω は

$$(27.3)\qquad \Omega = \varprojlim \Omega_\alpha$$

とも書かれる。

すべての $f_{\alpha\beta}$，f_α が全射であるとき，$(\Omega_\alpha,\ f_{\alpha\beta})$ は単純極大（*simply maximal*）であるという。射影系が点列極大（*sequentially maximal*）とは，任意の増加列

$$(27.4)\qquad \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots\cdot$$

と点列 $\omega_{\alpha_j}\in\Omega_{\alpha_j}$ が適合条件

$$(27.5)\qquad \omega_{\alpha_j} = f_{\alpha_j\alpha_k}(\omega_{\alpha_k}),\qquad j<k$$

をみたすように与えられているとき，$\omega\in\Omega$ が存在して

$$(27.6)\qquad \omega_{\alpha_j} = f_{\alpha_j}\,\omega\ ,\quad j=1,2,\cdots\cdot$$

をみたすことである．

各 Ω_α が位相空間で，$f_{\alpha\beta}\,(\alpha\leq\beta)$ が連続であるとき，射影極限 Ω 上の位相は，すべての f_α が連続であるような最弱位相によって定義される（Bourbaki [2] 参照）．

可測空間，測度空間の射影系，射影極限についても一般な添数集合（通常有

(*) 一般には Ω は空集合であるかも知れない．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

向集合であることを仮定する）について定義することができるが，やや複雑になるので省略する.(*)

28. ここでわれわれが取り扱うのは，測度空間の"射影列"の射影極限である．これについて多少丁寧に説明する．

2つの測度空間 $(\Omega_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)_{i=1,2}$ と Ω_2 から Ω_1 への可測写像 g が与えられていて

$$(28.1) \qquad g\circ\mu_2(A) \underset{(def)}{=} \mu_2(g^{-1}A) = \mu_1(A), \quad A \in \mathcal{B}_1$$

であるとき，g は適合条件をみたすといわれる．

可測空間の列 $\{(\Omega_i, \mathcal{B}_i)\}_{i\geq 1}$ と各 $i\ (\geq 2)$ にたいし Ω_i から Ω_{i-1} への可測写像 g_i が与えられているとき，$\{(\Omega_i, \mathcal{B}_i), g_i\}$ を可測空間の射影列であると呼ぼう．

$$(28.2) \qquad f_{ij} = \begin{cases} (\text{恒等写像}) & i = j \\ g_{i+1}\circ\cdots\circ g_j\ , & i < j \end{cases}$$

はあきらかに Ω_j から Ω_i への可測写像である．(Ω_i, f_{ij}) が No. 27 の意味で射影系をなすことはあきらかである．Ω を $\{\Omega_i\}$ の射影極限，f_i を Ω から Ω_i への標準写像とする．

$$(28.3) \qquad \mathcal{B}_i^* = f_i^{-1}(\mathcal{B}_i) \quad , \qquad \mathcal{B}^* = \bigcup_i f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$$

と定義する．$\mathcal{B}_i^*$ が Ω 上の σ-代数，$\mathcal{B}^*$ が Ω 上の代数（＝有限加法族）であることは容易に分る．

$$(28.4) \qquad \mathcal{B} = \{\mathcal{B}^* \text{ によって生成される } \sigma\text{-代数}\}$$

と定義する．$(\Omega, \mathcal{B})$ を $(\Omega_i, \mathcal{B}_i)$(**) の射影極限といい

$$(28.5) \qquad (\Omega, \mathcal{B}) = \varprojlim (\Omega_i, \mathcal{B}_i)$$

のようにも表わす．f_i はあきらかに Ω から Ω_i への可測写像である．

さらに各 $(\Omega_i, \mathcal{B}_i)$ 上に確率測度 μ_i が与えられていて，各 g_i は適合条件

(*) Bourbaki[3], Bochner[1] 参照．

(**) g_i は屡々省略する．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

をみたすとしよう．すなわち

$$(28.6) \qquad g_i \circ \mu_i = \mu_{i-1} , \qquad (i \geqq 2).$$

もし$(\Omega, \mathcal{B})$上に確率測度μが存在して

$$(28.7) \qquad f_i \circ \mu = \mu_i , \qquad i = 1, 2, \cdots$$

をみたすならば，$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$または単に$\mu$を測度空間の射影列$(\Omega_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$の射影極限と呼ぶ．$\mathcal{B}$の定義から，射影極限$\mu$は，もし存在すれば一意的であることが容易に示される．

射影列の場合には，単純極大あるいは点列極大の概念は重要でない．これらの条件は，すべてのg_iが全射であることと同等なことが容易に示されるからである。

29 測度空間の射影極限は，*Kolmogorov* の拡張定理の一般化である．したがって一般には射影極限が存在するとは限らない.(*) 射影極限が存在するための条件については *Bochner* の定理が最も有名であるが，ここでは省略する（*Bochner* [1], *Bourbaki* [34]）.

以下の定義は主として *Parthasarthy* [14]にしたがう．

定義． 可測空間$(\Omega, \mathcal{B})$が可算生成的であるというのは，$\mathcal{B}$がある可算部分族によって生成されることである．すなわち可算個の元をもつ集合族$\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$が存在し，$\mathcal{D}$を含む最小の$\sigma$-代数が$\mathcal{B}$にひとしい。$(\Omega, \mathcal{B})$が可算生成的かつ1点集合がすべて可測であるとき，可分であるという。

2つの可測空間$(\Omega, \mathcal{B})$と$(\Lambda, \mathcal{C})$がσ-同型であるというのは，$\mathcal{B}$から$\mathcal{C}$への全単射σが存在し，(i) $\sigma(\Omega) = \Lambda$，(ii) $\sigma(\complement A) = \complement \sigma A$. $A \in \mathcal{B}$，(iii) $\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma A_n$，$A_n \in \mathcal{B}$ をみたすことである．

$(\Omega, \mathcal{B})$と$(\Lambda, \mathcal{C})$が同型であるというのは，ΩからΛへの全単射τが存在し，τ，τ^{-1}が共に可測なることである。

一般に同型写像τが与えられていれば，

$$(29.1) \qquad \sigma A \underset{(def)}{=} \tau A \quad , \qquad A \in \mathcal{B}$$

(*) 例えば *Neveu* [13, p. 84] を見よ．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

と定義することにより σ-同型写像がえられる。一般に σ-同型写像は集合間の写像で点写像を定めないが，$(\Omega, \mathcal{B})$，$(\Lambda, \mathcal{C})$ が共に可分な時は，点写像を定め，それが (29.1) をみたす同型写像 τ を唯1つ定める。ゆえにこの場合は同型と σ-同型を区別する必要がない。

Ω が位相空間のときは，*Borel* 集合のなす σ-代数をつねに $\mathcal{B}(\Omega)$ によって表わす。Ω の部分集合はつねに相対位相によって位相を考える。

可測空間 $(\Omega, \mathcal{B})$ が標準的 (*standard*) であるというのは，ある完備可分な距離空間 P が存在し，$\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}(P)$ が σ-同型なことである。

Hausdorff 空間 Ω が *Polish* 空間であるとは，Ω がある完備可分な距離空間に同位相なことである。

Hausdorff 空間 Ω が *Lusin* 空間(*) というのは，ある完備可分な距離空間 P と P から Ω への連続な全単射が存在することである。

つぎの性質が知られている.

(a) 2点集合 $\{0, 1\}$ の可算直積 M は直積位相に関して可分なコンパクト *Hausdorff* 空間である。すべての可算生成的な $(\Omega, \mathcal{B})$ にたいし，M のある部分集合 Λ が存在し，$(\Omega, \mathcal{B})$ と $(\Lambda, \mathcal{B}(\Lambda))$ が σ-同型である。

(b) つぎの条件は同等である.

$(b)_1$　$(\Omega, \mathcal{B})$ は標準可測空間である.

$(b)_2$　ある完備可分な距離空間の *Borel* 集合 Λ が存在し，$(\Omega, \mathcal{B})$ と $(\Lambda, \mathcal{B}(\Lambda))$ が σ-同型である.

$(b)_3$　*Lusin* 空間 Λ が存在し，$(\Omega, \mathcal{B})$ と $(\Lambda, \mathcal{B}(\Lambda))$ が σ-同型である。

(c) $(\Omega, \mathcal{B})$ を標準可測空間，Λ はある完備可分な距離空間 P の部分集合で $(\Omega, \mathcal{B})$ と $(\Lambda, \mathcal{B}(\Lambda))$ が σ-同型であるとする．そのとき Λ は P の *Borel* 集合でなければならない。

証明は完備可分な距離空間の *Borel* 構造に関する結果を必要とするので省略する。文献のみあげておく。

(a)，(b) において $(b)_1$，$(b)_2$ の同等性，(c) は *Parthasarathy* [14, *p.133*, 定理 2.2] から容易に示される。

$(b)_3$ と $(b)_1$ (または $(b)_2$) の同等性は *Fernique* [7] を見よ．

(*) *Fernique* [7] では，この空間を標準空間と呼んでいる。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

29. 定理（Parthasarathy-M. Weil）　$\{(\Omega_i, \mathcal{B}_i, \mu_i), g_i\}$ は確率測度空間の射影列とする。$(\Omega_i, \mathcal{B}_i)$ の射影極限を $(\Omega, \mathcal{B})$，標準写像を f_i とする．もし各 $(\Omega_i, \mathcal{B}_i)$ が可分な標準可測空間ならば，

(a)（$\Omega, \mathcal{B}$）も可分な標準可測空間である（特に Ω は空でない）。

(b)（$\Omega, \mathcal{B}$）上の射影極限 μ が存在する：すなわち，すべての i にたいし

$$f_i \circ \mu = \mu_i \ . \tag{29.1}$$

各 g_i が全射の場合は Parthasarathy [14, p.139, 定理 3.2] である．g_i が中への写像である場合にもわずかな修正で成り立つ．

上記定理において，$(\Omega_i, \mathcal{B}_i)$ は始めから完備可分な距離空間として一般性を失わないが，g_i の可測性だけを仮定しているので，そのままでは Bochner の定理が使えない（全射でないことも問題であるが，その点は Bourbaki[4] の方法で解決される）。位相空間の話にもちこむためには g_i が連続で，しかし $\mathcal{B}_i$ は変らないような位相を考える必要がある．これが Lusin 位相である（M. Weil [17] を見よ）．

しかし Parthasarathy の証明は，もっと直接的で分り易い。

30　埋蔵鎖の射影列を考えるためには，Markov 連鎖の見本空間を canonical なものに指定しなければならない．

以下この節全体を通し，つぎの仮定をおく．

仮定．　状態空間 $(E, \mathcal{E})$ は可分な標準可測空間である．

E の外に一点 Δ を取り，$E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$，$\mathcal{E}_\Delta = \{A \subset E_\Delta \,;\, A \cap E \in \mathcal{E}\}$ とする．E_Δ の可算直積空間 E_Δ^∞ と直積 σ-代数 $\mathcal{E}_\Delta^\infty$ を考える．$(E_\Delta^\infty, \mathcal{E}_\Delta^\infty)$ が可分な標準可測であることは容易に分る.(*)　E_Δ^∞ の元 w で

(30.1)　ある n で $w(n) = \Delta$ なら，すべての $m \geqq n$ にたいし $w(m) = \Delta$，

という性質をもつものの全体を W，$W \cap \mathcal{E}_\Delta^\infty$ を $\mathcal{B}$ で表わす．W が E_Δ^∞ の可測集合であることは容易に示されるから，No. 28 $(b)_2$ によって，$(W, \mathcal{B})$ も可分な標準可測空間である．

(*)　完備可分な距離空間の可算直積空間には，完備可分な距離づけが可能なことを用いよ．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

以下のことはよく知られているので記号のみ記す。

(30.2) $[X(n)](w)=w(n)$ （坐標写像）

(30.3) $[X(+\infty)](w)=\Delta$

(30.4) $\zeta(w)=inf\{n;[X(n)](w)=\Delta\}^{(*)}$,

$m=0,1,\cdots,+\infty$ にたいし，ずらし (θ_m) は

(30.5) $[X(n)](\theta_m w)=w(m+n)$

によって定義されるWからWへの写像である．非負整数または $+\infty$ の値を取る確率変数 $\sigma(w)$ にたいし

(30.6) $\theta_\sigma w \underset{(def)}{=} \theta_{\sigma(w)} w$.

確率変数 $X(0),\cdots,X(n)$ によって生成される σ-代数を $\mathcal{B}_n$ で表わす。

N が $(E,\mathcal{E})$ 上の劣Markov核とする。N の $(E_\Delta,\mathcal{E}_\Delta)$ 上のMarkov核への自明な拡張を同じ N で表わす。

(30.7) $$\begin{cases} N(x,\{\Delta\}=1-N(x,E), & x\in E \\ N(\Delta,\{\Delta\}=1. \end{cases}$$

$x\in E$ にたいし P^x はつぎの条件をみたす $(W,\mathcal{B})$ 上の唯一つの確率測度である：任意の $\{B_k\}\in\mathcal{E}_\Delta$, $k=0,1,\cdots,n$ にたいし

(30.8) $$\begin{aligned} &P^x\{X(k)\in B_k,\quad k=0,1,\cdots,n\} \\ &\quad=(J_{B_0}\cdot NJ_{B_1}\cdot\cdots\cdot NJ_{B_{n-1}}\cdot N)(x,B_n). \end{aligned}$$

組 $X=(W,\mathcal{B},(\mathcal{B}_n),(X(n)),\zeta,(P^x;x\in E),(\theta_n))$ を劣Markov核 N の標準的な実現と呼ぶ。簡単に $(W,\mathcal{B},(P^x;x\in E))$ または，$(P^x;x\in E)$ とも表わす。

M を E の可測部分集合 A 上の劣Markov核とする．$(E,\mathcal{E})$ の代りに $(A,\mathcal{E}\cap A)$ を取ることによって，N の場合と同じように M の標準的な実現がえられる．これを $(W_A,\mathcal{B}_A,(Q^x;x\in A))$ によって表わす．(**) W_A から A_Δ への坐標写像を $X_A(n)$ によって表わす。

(*) { }の中が空集合のときは，$\zeta(w)=+\infty$.

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

Wの坐標写像の定める確率過程 $X(n)$ について No. 12と同じように，Aへの逐次的再帰時間 τ_n (12.8) および埋蔵過程 $X(\tau_n)$ を考える。

(30.9) $$g_A w = (X(\tau_n w, w), \quad n \geq 0)$$

はあきらかにWから W_A への写像を定義する。これをA上への埋蔵写像と呼ぶ g_A が可測写像であることは，各 τ_n が可測なことから容易に示される（さらに g_A は全射である)。

31. 定理. NをE上の劣Markov核，MをEの可測集合A上の劣Markov核，Nの標準的な実現を $(W, \mathcal{B}, (P^x; x \in E))$, Mの標準的な実現を $(W_A, \mathcal{B}_A, (\theta^x; x \in A))$ とする．そのときつぎの条件は同等である．

(a) $M = N^A$ （N^Aは N の埋蔵核)．

(b) すべての $x \in A$ にたいし，g_A は $(W, \mathcal{B}, P^x)$ から $(W_A, \mathcal{B}_A, Q^x)$ への写像として適合条件をみたす：

(31.1) $$g_A \circ P^x = Q^x$$

証明. これは定理14(b) の言いかえにすぎない。実際，$\mathcal{B}_A$ の任意の筒集合

(31.2) $$B = \{X(0) \in B_0, \cdots, X(n) \in B_n\}, \quad B_j \in \mathcal{E}_\Delta \cap A_\Delta$$

を取れ．$x \in A$ ならば同定理により

(31.3) $$g_A \circ P^x(B) = P^x\{X(\tau_0) \in B_0, \cdots, X(\tau_n) \in B_n\}$$
$$= (J_{B_0} \cdot N^A J_{B_1} \cdot \cdots \cdot N^A J_{B_{n-1}} \cdot N)(x, B_n).$$

一方

(31.4) $$Q^x(B) = (J_{B_0} \cdot M J_{B_1} \cdot \cdots \cdot M J_{B_{n-1}} \cdot N)(x, B_n).$$

ゆえに$M = N^A$ ならば $g_A \circ P^x(B) = Q^x(B)$．したがって，(31.1) が成り立つ．

逆に(31.1)が成り立てば，(31.3), (31.4)で $B_0 = A_\Delta$, $n = 1$ として $M =$

(**) No. 28 $(b)_2$ によって，$(A, \mathcal{E} \cap A)$ は可分な標準可測空間，したがって $(W_A, \mathcal{B}_A)$ もそうである。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

N^A がえられる.

32. Eに増加するその列 $\{E_i\}$ と，各 E_i の上で劣Markov核 N_i が与えられているとする。N_i の標準的な実現を $(W_i, \mathcal{B}_i, (P_i^x;\ x \in E_i))$ によって表わす。W_i から W_{i-1} への写像 g_i を

$$(32.1) \qquad g_i = g_{E_{i-1}} \qquad (E_{i-1} \text{ 上への埋蔵写像})$$

によって定義する.

さて各 i にたいして，N_{i-1} は N_i の E_{i-1} 上への埋蔵核になっていることを仮定する．前定理によって，これは各 $x \in E_{i-1}$ にたいし，g_i が $(W_i, \mathcal{B}_i, P_i^x)$ から $(W_{i-1}, \mathcal{B}_{i-1}, P_{i-1}^x)$ に適合的であることと同等である．したがって，$i<j$，$x \in E_i$ のとき，$f_{ij} = g_{i+1} \circ \cdots \circ g_j$ ((28.2))も適合条件

$$(32.2) \qquad f_{ij} \circ P_j^x = P_i^x$$

をみたす。あきらかに f_{ij} は W_j から W_i への埋蔵写像であるから，再び前定理により，$j>i$ ならば N_i は N_j の E_i 上への埋蔵核になっている。

上のような劣Markov核の列 $\{N_i\}$ と，その標準的な実現の列 $(W_i, \mathcal{B}_i, (P_i^x;\ x \in E_i))$ を埋蔵核および埋蔵鎖の完全系と呼ぶことにしよう.

可分な標準可測空間の射影列 $\{(W_i, \mathcal{B}_i), g_i\}$ の射影極限を $(\overline{W}, \overline{\mathcal{B}})$，標準写像を f_i によって表わす。任意の $x \in E$ にたいし，$x \in E_{i_0}$ なる i_0 を取ると，$\{(W_i, \mathcal{B}_i, P_i^x), g_i\}_{i \geq i_0}$ は測度空間として射影列である．したがって定理 29 によって

(i) $(\overline{W}, \overline{\mathcal{B}})$は可分な標準測度空間であり，

(ii) 任意の $x \in E$ と $x \in E_i$ なるすべての i にたいし

$$(32.3) \qquad f_i \circ \overline{P}^x = P_i^x$$

をみたすような $(\overline{W}, \overline{\mathcal{B}})$ 上の測度 $\overline{P}^x$ の組が一意的に定まる。

$(\overline{W}, \overline{\mathcal{B}}, (\overline{P}^x;\ x \in E))$を埋蔵鎖の（完全系）の射影極限と呼ぶ。

No.30で定義したように全空間Eに対応する見本空間を$(W, \mathcal{B})$とする．W から W_i への埋蔵写像を h_i によって表わす:

$$(32.4) \qquad h_i = g_{E_i}\ .$$

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$w \in W$ にたいし

(32.5) $\qquad \tau w = (h_1 w,\ h_2 w,\ \cdots)$

と定義する．τ が W から $\overline{W}$ への単射になっていることは，

$$\begin{tikzcd}
(W,\ \mathcal{B}) \arrow[r, "f_i"] & (W_i,\ \mathcal{B}_i) \arrow[r, "g_i"] & (W_{i-1},\ \mathcal{B}_{i-1}) \\
(W,\ \mathcal{B}) \arrow[u, "\tau"] \arrow[ur, "h_i"] \arrow[urr, "h_{i-1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

(32.6) $\quad \begin{cases} h_i \circ g_i = h_{i-1} \\ f_i \circ \tau = h_i \end{cases}$

より容易に分る（図示すれば上図のようである）.

33. <u>定理</u>. (a) $\tau W \in \overline{\mathcal{B}}$ であり，$(\tau W,\ \overline{\mathcal{B}} \cap \tau W)$ と $(W, \mathcal{B})$ は τ の下で同型である。

(b) つぎの条件は同等である.(*)

$(b)_1$ E 上の劣 Markov 核 N が存在し，すべての i にたいし N_i は N の埋蔵核である。

$(b)_2$ すべての $x \in E$ とすべての $x \in E_i$ なる i にたいして

(33.1) $\qquad h_i \circ P^x = P_i^x$

であるような $(W,\ \mathcal{B})$ 上の測度 P^x が存在する.

$(b)_3$ すべての $x \in E$ にたいし

(33.2) $\qquad \overline{P}^x(\tau W) = 1.$

(c) $(b)_1$ における N，$(b)_2$ における $(P^x;\ x \in E)$ は，もし存在すれば唯1つであり，$(W,\ \mathcal{B},\ (P^x;\ x \in E))$ は N の標準的な実現である.

<u>証明</u>. (a) $\tau^{-1}(\tau W \cap \overline{\mathcal{B}}) \subseteq \mathcal{B}$ をまず示す．$A \in \mathcal{B}_i^* = f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$，すなわち，$A = f_i^{-1}(A_i)$，$A_i \in \mathcal{B}_i$ とする.

$$\begin{aligned} \tau^{-1} A = \{w\ ;\ \tau w \in A\} &= \{w;\ (f_i \circ \tau)(w) \in A_i\} \\ = \{w;\ h_i w \in A_i\} &= h_i^{-1} A_i \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

$\overline{\mathcal{B}}$ は $\bigcup_i \mathcal{B}_i^*$ によって生成されるから，$\tau^{-1}\overline{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$．ゆえに $\tau^{-1}(\tau W \cap \overline{\mathcal{B}}) \subseteq \mathcal{B}$.

(*) 証明から分るように，$(b)_1$ と $(b)_2$ の同等性は，任意の可測空間 $(E,\ \mathcal{E})$ について正しい.

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

つぎに $\tau^{-1}(\tau W\cap\overline{\mathcal{B}})\supseteq\mathcal{B}$ を示すために $C=\tau^{-1}(\tau W\cap\overline{\mathcal{B}})$ とおく．$\mathcal{B}$[*resp.* C]-可測有界関数の全体を $b\mathcal{B}$[*resp.* bC] と書く．$bC\supseteq b\mathcal{B}$ を示せばよい．

W_j における坐標写像を $X_j(n)$ によって表わす．任意の w にたいし，すべての十分大きな j にたいし

$$[X(n)](w)=[X_j(n)](h_j w)=(X_j(n)\circ f_j)(\tau w) \tag{33.3}$$

である。実際，j が十分大きければ，$X(0,w),\cdots,\ X(n,w)$ がすべて $E_j\cup\{\Delta\}$ に含まれるから，w と $h_j w$ は第 n 坐標迄の値が一致する．したがって，φ が E_Δ から R^1 への有界可測関数なら

$$[\varphi\circ X(n)](w)=\lim_{j\to\infty}(\varphi\circ X_j(n)\circ f_j)(\tau w)\in bC\ .$$

である．ゆえに $\mathcal{B}$ における筒集合

$$A=\{w;\ X(0)\in A_0,\cdots,\ X(n)\in A_n\},\quad A_k\in\mathcal{E}_\Delta \tag{33.4}$$

にたいして，

$$I_A(w)=\prod_{k=0}^{n} I_{A_k}\circ X(k)\in bC\ .$$

$\mathcal{B}$ は筒集合(33.4)によって生成されるから，Dynkinの定理[, p.4, Lemma 1.2] によって $b\mathcal{B}\subseteq bC$ である．

$\tau W\in\overline{\mathcal{B}}$ を示そう．(33.3) と類似の考えにより

$$\tau W=\left\{\overline{w}\ \middle|\ \begin{array}{l}\text{すべての } n \text{ にたいし，ある } j_0 \text{ が存在し，すべて}\\ \text{の } j\geqq j_0 \text{ にたいし } X_j(n)\circ f_j(\overline{w})=X_{j_0}(n)\circ f_{j_0}(\overline{w})\end{array}\right\}^{(*)} \tag{33.5}$$

$$=\bigcap_n\bigcup_{j_0}\bigcap_{j\geqq j_0}\{\overline{w};\ X_j(n)\circ f_j(\overline{w})=X_{j_0}(n)\circ f_{j_0}(\overline{w})\}\in\overline{\mathcal{B}}\ .$$

(b) <u>$(b)_1$ と $(b)_2$ の同等性.</u> $(b)_1$ が成り立てば，$(P^x;\ x\in E)$ として N の標準的実現を取ればよい（定理31）.

逆に $(b)_2$ が成り立っているとして

$$N(x,A)\underset{(def)}{=}P^x(X(1)\in A)\ ,\qquad A\in\mathcal{E}_\Delta \tag{33.6}$$

(*) $\overline{w}\in\tau W$ なら{ }の性質をもつことは(33.3)である．逆に $\overline{w}\in\overline{W}$ が{ }の性質をもてば，$[X(n)](w)\underset{(def)}{=}X_{j_0}(n)\circ f_{j_0}(\overline{w})$ によって $w\in W$ を定義せよ。そのとき $\tau w=\overline{w}$ であることを確かめられたい。

と定義する。N の E 上への制限（同じ N で表わす）はあきらかに劣 Markov 核である.

i_0 を任意に固定し，$A_0, \cdots, A_n \in \mathcal{E}_\Delta \cap (E_{i_0} \cup \{\Delta\})$ にたいする筒集合

$$B = \{X(0) \in A_0, \cdots, X(n) \in A_n\}$$

を考える．（33.3）と同様に

$$(33.7) \qquad B = \bigcap_{j \geq i_0} \{[X_j(0)](h_j\omega) \in A_0, \cdots, [X_j(n)](h_j\omega) \in A_n\}$$

$$= \bigcap_{j \geq i_0} f_j^{-1} B_j \ , \quad (f_j^{-1} B_j \text{ は減少}),$$

$$B_j = \{w_j ; [X_j(0)](w_j) \in A_0, \cdots, [X_j(n)](w_j) \in A_n\}$$

であるから，

$$(33.8) \qquad P^x(B) = \lim_{j\to\infty} P^x(f_j^{-1} B_j) = \lim_{j\to\infty} P_j^x(B_j)$$

$$= \lim_{j\to\infty} (J_{A_0} \cdot N_j J_{A_1} \cdot \cdots \cdot N_j J_{A_{n-1}} \cdot N_j)(x, A_n)^{(*)}.$$

$n=0$ として

$$(33.9) \qquad P^x\{X(0) \in A_0\} = J_{A_0}(x, A_0) = J_{A_0}(x).$$

これを考慮し，$n=1$ と定義（33.6）から

$$(33.10) \qquad J_{A_0} N(x, A_1) = P^x\{X(0) \in A_0, \ X(1) \in A_1\}$$

$$= \lim_{j\to\infty} J_{A_0} N_j(x, A_1).$$

A_1 の代りに $A \cap A_1$ $(A \in \mathcal{E}_\Delta)$ を考えると，（33.10）は E 上の核 $J_{A_0} N_j J_{A_1}$ が，核 $J_{A_0} N J_{A_1}$ に減少することを示している。これと $J_A = J_A^2$ を用いて，（33.8）の右辺で $j \to \infty$ としたとき，極限の交換が可能で

$$(33.11) \qquad P^x\{X(0) \in A_0, \cdots, X(n) \in A_n\} = (J_{A_0} \cdot NJ_{A_1} \cdot \cdots \cdot NJ_{A_{n-1}} \cdot N)(x, A_n)$$

が任意の $A_0, \cdots, A_n \in \mathcal{E}_\Delta \cap (E_{i_0} \cap \{\Delta\})$ にたいしてえられる．これから（33.11）が任意の $A_0, \cdots, A_n \in \mathcal{E}_\Delta$ にたいして成立することは容易に示される．し

(*) N_j は（30.7）と同じように $E_j \cup \{\Delta\}$ に拡張しておく．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

たがって（P^x; $x\in E$）は（33.6）によって定義される劣Markov核Nの標準的な実現である．このNが$(b)_1$の条件をみたすことは定理31から明らかである．

$(b)_2$と$(b)_3$の同等性．これは(a)から殆んど自明である．実際$(b)_2$が成り立てば，

$$\overline{Q}^x \underset{(def)}{=} \tau\circ P^x \tag{33.12}$$

によって定義される$(\overline{W},\overline{\mathcal{B}})$上の測度は$\overline{Q}^x(\tau W)=1$と，$f_i\circ\overline{Q}^x=P_i^x$ $(x\in E_i)$をみたす。射影極限の一意性により，$\overline{Q}^x=\overline{P}^x$．ゆえに(33.2)が成り立つ。

逆に(33.2)が成り立っていれば，

$$P^x(A)\underset{(def)}{=}\overline{P}^x(\tau A)\ ,\quad A\in\mathcal{B} \tag{33.13}$$

によって$(W,\mathcal{B})$上の確率測度が定義され（(a)による），それが$(b)_2$の条件の条件をみたすことが確かめられよう。

(c)　N, Mが共に$(b)_1$をみたせば，対応する標準的実現P^x, Q^xが共に(33.1)をみたす。すぐ上に示したように

$$\overline{P}^x=\tau\circ P^x=\tau\circ Q^x.$$

(a)により，任意の$A\in\mathcal{B}$にたいし，$\tau^{-1}B=A$なる$B\in\tau W\cap\overline{\mathcal{B}}$が唯1つ存在する．ゆえに$P^x(A)=P^x(\tau^{-1}B)=Q^x(\tau^{-1}B)=Q^x(A)$．したがって$P^x=Q^x$．これは$N=M$を含む。

後半は(b)の所で示した。

§4. ポテンシャル核への埋蔵鎖の応用

$(E,\mathcal{E})$が可分な標準可測空間とする．この条件の下で，§2の定理24の別証明を与え，そこに表われた条件の確率論的意味をあきらかにしたい。$(E,\mathcal{E})$が一般の可測空間の場合にも，埋蔵鎖の射影列によって定理24の別証明がえられる（方法はここで与えるものとは全く異なる．筆者[16]）。しかしここでは射影極限の応用という点を重視して空間の方を制限して議論する．

最後に可算状態空間上の再帰Markov鎖のポテンシャル核の構成について簡

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

単にふれる.

34. $(E, \mathcal{E})$ は可分な標準可測空間, Gは原理(RM) をみたす $(E, \mathcal{E})$ 上の固有核とする. G-有界な可算被覆 $\{E_i\}$ が与えられているとする. No.17において定義された, Gに対応する埋蔵核の完全系 $\{N_i\}$ を考える. この N_i に対応する埋蔵鎖の完全系を $(W_i, \mathcal{B}_i, (P_i^x ; x \in E_i))$, その射影極限を前節と同じく $(\overline{W}, \overline{\mathcal{B}}, (\overline{P}^x ; x \in E))$ によって表わす.

uが準超過的関数であるとき, $A \in \mathcal{E}$ への擬縮小関数 $\overline{H}_A u$ が

$$(34.1) \qquad \overline{H}_A u = \lim_{j \to \infty} H^j_{A_j} u_j , \quad A_j = A \cap E_j$$

であることを知っている(定理21). $H^j_{A_j}$ は核 N_j に関する掃散核である.(*)

確率過程 $X_j(n)$ に関する A_j への最小到達時間を σ_j によって表わす.(**)

(12.11), (32.3) により (34.1) の右辺はつぎのように書かれる:

$$(34.2) \qquad \overline{H}_A u(x) = \lim_{j \to \infty} E^x_j [u_j(X_j(\sigma_j, w_j))]$$

$$= \lim_{j \to \infty} \overline{E}^x [u_j(X_j(\sigma_j, f_j(\overline{w}))].$$

この関係のみを用い, 準超過関数, 擬縮小関数の性質を全く使わないで定理24の別証明を与えよう.

35. 補題. $\{H_p\}$ は E に増加する $\mathcal{E}$ の列であるとする. $\overline{w} \in \overline{W}$ と $j > i$ にたいして確率過程 $[X_j(n)](f_j \overline{w})$ に関する $E_j - E_i$ への最小到達時間を σ_{ij} によって表わす.

$$(35.1) \qquad A_p \underset{(def)}{=} \left\{ \overline{w} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{すべての } i \text{ にたいし, 適当な } j > i \text{ が存在し, ある} \\ n \geqq \sigma_{ij} \text{ にたいし } [X_j(n)](f_j \overline{w}) \in H_p \quad \text{である.} \end{array} \right\}$$

(*) 実際ここでは, (34.1)の極限が存在することを知っている必要はない. 極限が $\{E_i\}$ のえらび方に無関係なことも必要でない。(34.1)の右辺の上極限を $\overline{H}_A u$ と定義したものとして以下の結果が成り立つ。しかし混乱をさけるために $\overline{H}_A u$ の意味は前通りとして (20.1), (34.1) が成り立つことを認めよう.

(**) 厳密には $\sigma_j(w_j)$ である.

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

と定義すれば，A_p は $\overline{\mathcal{B}}$-可測であり，

$$\overline{W} - \tau W \subseteq \bigcup_p A_p \tag{35.2}$$

証明. σ_{ij} は可測だから，

$$A_p = \bigcap_i \bigcup_{j>i} \bigcup_{n_0} \bigcup_{n \geq n_0} \{\sigma_{ij} = n_0,\ [X_j(n)](f_j \overline{w}) \in H_p\} \in \overline{\mathcal{B}}.$$

$\overline{w} \in \overline{W} - \tau W$ であるとすると，(33.5) の{　}の中の条件がある n について否定される．そのような n の最小値を n_0 で表わす。$n < n_0$ にたいしては (33.5) の{　}の中の条件がみたされるから，ある j_0 が存在し，すべての $j \geq j_0$ にたいして

$$[X_j(n)](f_j \overline{w}) = [X_{j_0}(n)](f_{j_0} \overline{w}) \quad (n < n_0) \tag{35.3}$$

が同時的 (*simultaneously*) に成り立っている．さらに j_0 は (5.3) の性質をもつ最小値であるとする．さて適当に $j_1 > j_0$ をとると

$$[X_{j_1}(n_0)](f_{j_1} \overline{w}) \neq [X_{j_0}(n_0)](f_{j_0} \overline{w}) \tag{35.4}$$

である．このとき $[X_{j_1}(n_0)](f_{j_1} \overline{w}) \in E_{j_1} - E_{j_0}$ でなければならない．実際もし $[X_{j_1}(n_0)](f_{j_1} \overline{w}) \in E_{j_0}$ であったとすると，(35.3) および適合条件

$$f_{ij} \circ f_j(\overline{w}) = f_i(\overline{w}) \quad (f_{ij} = g_{i+1} \circ \cdots \circ g_j \text{ は } W_j \text{ から } W_i \text{ への埋蔵写像}) \tag{35.5}$$

によって，(35.4) で等号がなり立たなければならないからである。

同じように $j_2, j_3, \cdots$ をえらんで

$$[X_{j_k}(n_0)](f_{j_k} \overline{w}) \in E_{j_k} - E_{j_{k-1}} \tag{35.6}$$

であるようにできる.(*) 一方適合条件 (35.5) によって，任意の j にたいして

$$[X_{j_0}(n_0)](f_{j_0} \overline{w}) = [X_j(m)](f_j \overline{w}) \tag{35.7}$$

であるような $m \geq n_0$ が存在する。

n_0 および j_0 は $\overline{w}$ の関数で,(**) $\overline{w} \in \overline{W} - \tau W$ ならば $[X_{j_0}(n_0)](f_{j_0} \overline{w}) \in E$

(*) $j \geq j_p$ なるすべての j について，$[X_j(n_0)](f_j \overline{w}) \in E_j - E_{j_{p-1}}$ であることも容易に分る．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

である．したがって

$$(35.8) \qquad \overline{W} - \tau W = \bigcup_p \{[X_{j_0}(n_0)](f_{j_0}\overline{w}) \in H_p\}.$$

(35.6)，(35.7) より

$$\{[X_{j_0}(n_0)](f_{j_0}\overline{w}) \in H_p\} \subseteq A_p ,$$

これは (35.2) を含む。

36. 定理24の別証明

定理24 の (b) を仮定したとき，定理33 の $(b)_3$ がみたされることを示す．そのために

$$(36.1) \qquad \overline{P}^x(\overline{W} - \tau W) > 0$$

であるような $x \in E$ が存在したとして矛盾を導く．定理24(b) の f にたいして

$$(36.2) \qquad H_p = \{x;\ f(x) > \frac{1}{p}\}$$

とおく．$f > 0$ だから，$\{H_p\}$ は増加して E に近づく．したがってもし (36.1) ならば，ある p にたいして

$$(36.3) \qquad \overline{P}^x(A_p) > 0 .$$

$$A_{pij} = \{\overline{w};\ ある\ n \geq \sigma_{ij}\ にたいして\ [X_j(n)](f_j\ \overline{w}) \in H_p\}$$

とおく．あきらかに

$$\begin{aligned}\overline{P}^x(A_{pij}) &\leq \overline{E}^x[\sum_{n \geq \sigma_{ij}} I_{H_p}(X_j(n, f_j\overline{w}))] \\ &\leq p\overline{E}^x[\sum_{n \geq \sigma_{ij}} f(X_j(n, f_j\overline{w}))] \\ &= p\overline{E}^x[Gf(X_j(\sigma_{ij}, f_j\overline{w}))] \qquad (強Markov性).\end{aligned}$$

$j \to \infty$ は A_{pij} は増加だから

$$\overline{P}^x(\bigcup_{j>i} A_{pij}) \leq p \cdot \lim_{j\to\infty} E^x[Gf(X_j(\sigma_{ij}, f_j\overline{w}))]$$

(**) $n_0(\overline{w})$，$j_0(\overline{w})$ が可測なことも分るが，ここでは必要でない。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

$$= p\overline{H}_{F_i}\, Gf(x) \qquad (F_i = E - E_i) .$$

$i \to \infty$ のとき $\bigcup_{j>i} A_{pij}$ は A_p に減少するから

$$0 < \overline{P}^x(A_p) \leq p \cdot \lim_{i\to\infty} \overline{H}_{F_i}\, Gf(x) .$$

これは Gf が $\{E_i\}$ に関して準ポテンシャルであることに反する．

定理33(b)により，E 上の劣Markov核 N が存在して，すべての i にたいして N_i は N の埋蔵核になっている．

(36.4) $$G = \sum_{n\geq 0} N^n$$

であることを示そう。N のポテンシャル核を $\overline{G}$ とすれば，定理14(c)により

$$J_{E_i}\overline{G}\, J_{E_i} = \sum_{n\geq 0} N_i^n = J_{E_i}\, G\, J_{E_i} .$$

$i \to \infty$ として $G = \overline{G}$.

37. $(E, \mathcal{E})$ を可算空間，μ はいたるところ正の σ-有限測度，G は固有核であるとする．前と同じように $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{G} ;\ G|f| \in \mathcal{G}\}$ である．

(37.1) $$\mathcal{B}_\mu = \{f \in \mathcal{B} \ ,\ \int \mu(dx) f(x) = 0\}$$

と定義する．G は以下の最大値原理（RSM）(*) をみなすものとする．すなわち，f が 0 でない $\mathcal{B}_\mu$ の元，a が実数（負でもよい）にたいして

(37.2) $$[a \geq Gf]_S , \qquad S \supseteq S_f^+$$

ならば

(37.3) $$a - f^- \geq Gf$$

である．これは実数 a が "族 $\mathcal{B}_\mu$ に関して準超過的" といってもよい。

(a) E が有限集合ならば，

(37.4) $$\mu N = \mu$$

(*) *Reinforced semi-complete principle of the maximum.* 第Ⅱ部では原理（$RRMP$）と書かれたもの．

$$(37.5) \qquad (I-N)\,Gf = f \quad , \quad f \in \mathcal{B}_\mu$$

をみたすような Markov 核 N が唯1つ定まる．N は再帰的かつ既約である．

E の有限性がきいて証明は本質的に簡単である（第Ⅱ部，補題 8.2, 8.3）．

(b) E が可算でも μ が有限集合ならば (a) と同じ結果が成り立つ．

これは第Ⅱ部定理 8.1 である．これを埋蔵鎖の立場から考えて見よう．

E に増加する有限集合 $\{E_i\}$ を取り，$G_i = J_{E_i}\, G\, J_{E_i}$，$\mu_i = \mu|_{E_i}$ とする．G_i が E_i 上に μ_i に関し原理（RSM）をみたすことは容易に確かめられる．(a) によって

$$(37.6) \qquad \mu_i N_i = \mu_i \ ,$$

$$(37.7) \qquad (I_i - N_i)\, G_i f_i = f_i \quad , \quad f_i \in \mathcal{B}_{\mu_i}$$

なる E_i 上の既約，再帰 Markov 核 N_i が対応する．

$\{N_i\}$ は埋蔵核の完全系をなす（これは第Ⅱ部，補題 8.4 に含まれている）．N_i の標準的な実現（W_i, $\mathcal{B}_i$, (P_i^x ; $x \in E_i$)）の射影極限が

$$(37.8) \qquad \overline{P}^x(\tau W) = 1$$

をみたすことを証明しよう．

(35.6) によって

$$(37.9) \qquad \overline{W} - \tau W \subseteq \left\{ \overline{w} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{あるnが存在し無限に多くのjにたいして,} \\ [X_j(n)](f_j\overline{w}) \in E_j - E_{j-1} \end{array} \right\}$$

$$= \bigcup_n B_n \ ,$$

$$B_n = \{\text{無限に多くの} j \text{にたいし}, \ [X_j(n)](f_j\overline{w}) \in E_j - E_{j-1}\} .$$

$B_{nj} = \{[X_j(n)](f_j\overline{w}) \in E_j - E_{j-1}\}$ とおく．

$$\overline{P}^x(B_{nj}) = N_j^n(x, E_j - E_{j-1}) \leq \frac{1}{\mu(x)} \cdot \mu(E_j - E_{j-1}) .$$

したがって，$\sum_j \overline{P}^x(B_{nj}) < \infty$ （μ は有限）．

Borel-Cantelli の定理から $\overline{P}^x(B_n) = 0$，ゆえに $\overline{P}^x(\bigcup_n B_n) = 0$．

したがって定理 33(b) により，すべての i にたいし N_i が E_i 上への埋蔵核になっているような E 上の核 N が唯一つ定まる．

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

このNが求めるものであるが詳しいことは省略する。

(c) (b) における証明の方法は，第Ⅳ部で与えられた必要十分条件の場合にも適用できると思う。

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

文　献

[1] S. Bochner: *Harmonic analysis and the theory of probability*, Berkeley, Univ. of California Press, 1955.

[2] N. Bourbaki: *Topologie général*, Chaps. 1-2 (4th ed.), Éléments de Mathématique, Livre III, Paris, Hermann, 1965.

[3] ———— : *Intégration*, Chaps. 1-4 (2nd ed.), Éléments de Mathématique, Livre VI, Paris, Hermann, 1965.

[4] ———— : *Intégration*, Chap. 9, *Éléments de Mathématique*, Livre VI, Paris, Hermann (to appear).

[5] J. Deny: *Les noyaux élementaire*, *Séminaire de Théorie du Potentiel* (Brelot-Choquet-Deny), 4 (1959/60), 12 pages.

[6] E. B. Dynkin: *Theory of Markov processes* (*English translation*), London, Pergamon Press, 1961.

[7] X. Fernique: *Processus linéaire, processus généralisés*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17 (1967), 1-92.

[8] P. R. Halmos: *Measure theory*, Princeton, Van Nostrand, 1950.

[9] 近藤亮司: *Markov chain の potential kernel*, Topics in Markov chains (上), Seminar on Probability, vol. 28, 1968, 49 pages.

[10] L. H. Loonis: *An introduction to abstract harmonic analysis*, Princeton, Van Nostrand, 1953.

[11] P. A. Meyer: *Probability and potentials*, Waltham, Blaisdell, 1966.

[12] ———— : *Caractérisation des noyaux potentiels des semi-groupes discrets*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16 (1966), 225-240.

[13] J. Neveu: *Mathematical foundation of the calculus of probability*, London, Holden-Day, 1965.

[14] K. R. Parthasarathy: *Probability measures on metric spaces*, New York, Academic Press, 1967.

[15] T. Watanabe: *Boundaries of Markov processes and related*

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

topics, to appear.

[16] T. Watanabe: *Potential kernels of transient submarkov kernels and the projective limits of imbedded Markov chains*, in preparation.

[17] M. Weil: *Quasi-processus*, *Séminaire de Probabilités* IV, Univ. de Strasbourg, Lecture Notes in Mathematics, vol. 124, Berlin, Springer, 1970, pp. 216-239.

Sem. on Probab.
Vol.32 1970年
P111-243

1970．10 発行　確率論セミナー