Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 26

確 率 場 の 話 題

久 保 　 泉

1 9 6 7
確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

目　次

前　書 2

第1章　序　論 5
　§1　定　義 5
　§2　Gaussian 確率場の標本函数の連続性 17

第2章　多次元径数の Brown 運動 28
　§3　定義と基本的性質 28
　§4　内挿、外挿問題 39
　§5　M(t)-過程と球面調和函数 66

第3章　Random Current 74
　§6　Random Current 74
　§7　エークリッド空間 R_0^n の random current 88
　§8　局所 random current 105

第4章　確率場 110
　§9　多様体を径数にもつ Brown 運動 110
　§10　homogeneous な確率場の外挿と表現 116
　§11　無限次元径数の確率場 125

付　録 131
　§1　Grassman 代数 131
　§2　C^∞-多様体の上の微分形式 133
　§3　Current 135
　§4　バンドル 137
　§5　Radon 変換 138

文献表 142

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

前　書

時間を径数とした確率変数の系 —— 確率過程 —— の研究は、今世紀 特に最近 20 年間に はなばなしい発展を見せた。最もその基本的なアイデアの多くは、更にその以前 20 年間に *Kolmogorov* *Wiener*. *Lévy*、等によって指摘されたものであったが……。

振返ってその結果を眺めれば、確率過程の研究で最も重要なこと、興味あることは——当然のことだが——時間の変化に対してどのような確率的変化が起るか？ということにある。そして時間変化というとき、非常に多くの場合 時間の順序を問題としていて、時間が全順序であることが根幹になることが多い。喩えて言えば、マルコフ性 *Martingale*. 定常性等すべてそうである。我々は種々の問題に応じて確率過程、一般化拡張を重ねてきたが、今一歩 径数空間を拡張することが必要になる。

それは 形式的拡張を目指すのではなく、歴史的に言えば、乱流理論の研究と関連して問題が起ってきた。乱流理論の研究自体 現在のところ決定的な結果が得られていないようだが、確率論との結びつきは、さして成果をあげているとは思えない。

しかし、初期の段階で問題とされた、一様乱流の *correlation* テンソルのスペクトル分解、*Solenoidal irrotational* と *biased* 部分とへの分解、同じく *Kolmogorov* の等方性乱流に対する、対応した問題等に関連しては K. Ito の *random current* に於ける統一された優雅な結果がある。又、同じ方向として、*Yaglom* の群、代数を径数空間とする *random field* の表現の話題がある。

一方において P. *Lévy* は 多次元径数の *Brown* 運動を、一次元 *Brown* 運動の拡張として定義し、通常の *Brown* 運動で知られている確率論的性質を追求していった。"*path*" の性質、マルコフ性内挿、外挿の問題等が調べられている。しかし標本函数の連続性に関しては T. Shirao の最終結果が得られているが、それを除き、径数空間の多次元性の故に困難さ（*formulation*）にぶっつかり 奥歯に物の残るはがゆさがある。その点はここに深く立ち入らないが、第２章を読んで頂くだけで感取していただけよう。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

第1章§1で確率場の基本的定義と性質を記した。§2で Gaussian 確率場の標本函数の連続性について述べた。他の場所で書きにくかったので最初にまとめて簡単に　弱い結果を述べるに止めた。

第2章では典型的な場合を詳しく調べておくという意味で Lévy の多次元径数の Brown 運動について記した。§3で定義と簡単な性質、及び各種の Gaussian random measure、white noise との関係を書いたが、これは後の§4の内挿、外挿問題、§5の球面調和函数による展開等と深い関係がある。その点にもっと頁をさいてその関係を明確にする予定だったが結局、時間と頁の関係で止めてしまって興味を少なくしたことをおわびしたい。しかし、Radon 変換で random spectre measure と Chentsov の white noise の関連づけられることは、その関係の一端を示していると思う。§4ではほとんどの頁を内挿問題と多重調和函数の関係にさいたが　その結果を使って、多重マルコフ性も外挿問題も解かれる。§5では McKean の球面調和函数による展開を主としたが、もっと余裕があれば、Lévy、T. Hida の研究ももっと取入れたかった。

第3章§6で、一般の C^∞ Riemann 多様体で random current を定義したが、その目的は、§7のユークリッド空間の場合における幾何学的意味を明確にしたかったことにある。しかし、§7では接ベクトルと微分と混同しているように使っているため、混乱をかえって引起したかも知れない。§7においても意味をはっきりさせるために　共変テンソルと反変テンソルをきちんと書きわけた方がよかったかも知れない。§8では局所 random current の場合について述べた。

第4章では　確率場に戻って三つの topics について書いた。§9は、§3の Chentsov の方法を拡張することを考え、§10ではユークリッド空間の homogeneous な確率場の外挿と標準表現について、§11は無限次元の径数空間をもつ isotropic な確率場の deterministic な性質について書いた。

全体として謂ゆる、線形問題が中心になってしまったが、綜合報告を目的として書いた seminar note として仕方がなかった。又証明も叙述も最後の章では特にはぶいたものが多かったことは、おわびする。ひとえに著者の準備不足の為、予定の半分もの事柄が書けなかったのが原因である。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

記　号

M : 径数空間及びRiemann多様体

R_0^n : n次元ユークリッド空間

R^n : n次元アファイン空間

x : 点.　$|x|$: 長さ　xy : 内積

$B(x) = B(x, \omega)$: Brown 運動

$B_0(x) = B_0(x, \omega)$: 〃　$B_0(0) = 0$.

W_C, W_M, W_U : white noise

$\mathcal{F}$: Ω上の可測函数にFrechetの 距離を入れた空間

$L^p(\Omega)$

$\chi(\varphi)$: 特性汎函数

$C(\varphi)$: 〃

U^p : p次の random current

$\Phi^{(p)}$: compact 台のp次の C^∞- form

$\Phi'^{(p)}$: $\Phi^{(n-p)}$の dual

Z^p : random measure

σ_h : 変換 (translation)

σ_g : g : 運動. $\Phi^{(p)}$上の運動

$\mathcal{M}$: average

$\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(A, B(x)) = \mathcal{B}(B(x) : x \in A)$

$\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(A, B(x)) = c.l.m.\{B(x) : x \in A\}$

$\mathcal{D}$: Schwartz の $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}_1 = \{\varphi \in \mathcal{D} ; \int \varphi(x)\,dx = 0\}$

$G = (g_{ij})$: Riemannの基本計量

$g_p(x, y)$: P重調和函数の Green 函数

$\rho_{Up}(\varphi^{n-p}, \psi^{n-p})$ = 共分散双線形汎函数 (covariance bilinear functional)

$\rho^*(\varphi^p, \psi^p)$ = 共分散汎函数

$\rho(\varphi, \psi, a_p, b_p)$ = 共分散双線形形式 (covariance bilinear form)

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

第1章 序 論

§1 定 義

才2章以後、各論として述べる事柄に対し基礎的定義と準備を用意しておきたい。詳しい定義は各章で再び与えられる。

1° 確率場

Mをある径数空間（実際上はもっと具体的にMに構造を問題に応じて与えるが）としたある確率空間（Ω. $\mathcal{B}$. P）上の確率変数（スカラー、ベクトル、テンソル値）の系 $\{X(x)\ ;\ x\in M\}$ を確率場という。

多くの場合Mに位相$\mathcal{U}$. 位相的 Borel field. $\mathbb{B}(\mathcal{U})$. その上の完備な測度 μ が与えられる。〔才3章、5章参照〕 計算の都合上、可測性、可分性が必要になってくる J. L. Doob [11] にならって定義を与えておこう。スカラー値に対して与えておけば充分であろう。

定義 1.1 確率場 $\{X(x)\ ;\ x\in M\}$ が可測であるとは

$$\begin{aligned} M \underset{\psi}{\times} \Omega &\longrightarrow \underset{\psi}{R^1} \\ (x\ ,\ \omega) &\longrightarrow X(x,\omega) \end{aligned}$$

なる写像として $\mathbb{B}(\mathcal{U})\times\mathcal{B}\longrightarrow R'$ の Borel field として可測。

（M、$\mathcal{U}$）が才二可算公理を充す Hausdorff 空間のとき $\{\mathcal{U}_n\}$ を$\mathcal{U}$の閉基として、確率場 $\{X(x)\ ;\ x\in M\}$ が可分であることを定義する。

定義 1.2 M上の確率場 $\{X(x)\ ;\ x\in M\}$ が可分（separable）であるとは M の可算ヶの稠密集合 $\Gamma=\{x_n\}$ が存在して 任意の $\mathcal{U}_n$ に対し、測度 0 の ω を除き

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} \underset{x_m\in\mathcal{U}_n\cap\Gamma}{\mathrm{L.U.B.}} X(x_m) &= \underset{x\in\mathcal{U}_n\cap\Gamma}{\mathrm{L.U.B.}} X(x) \\ \underset{x_m\in\mathcal{U}_n\cap\Gamma}{\mathrm{G.L.B.}} X(x_m) &= \underset{x\in\mathcal{U}_n\cap\Gamma}{\mathrm{G.L.B.}} X(x) \end{aligned}$$

が成立するときに言う。
このとき J. L. Doob [11] 定理 2.4，2.5. に対応し、次の命題が成立する
証明は [11] を参照されたい。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

Proposition 1.1

Mを第二可算公理を充すHausdorff空間とすれば、Mを径数空間にもつ確率場は可分なversionをもつ.
即ち $\{X(x)\ ;\ x\in M\}$に対し、可測な確率場$\{\tilde{X}(x)\ ;\ x\in M\}$が存在し
$P\{X(x)=\tilde{X}(x)\}=1 \qquad {}^{\forall}x\in M$

Proposition 1.2

確率場$\{X(x)\ ;\ x\in M\}$が可分で、且つ確率連続ならば$\{X(x)\ ;\ x\in M\}$は、可分且つ可測なversionをもつ。

更にMの任意の稠密な可算集合が可分性の条件を充す可算集合となる。

この二つの命題により、必要に応じて可測及び可分なversionを考えて議論を進める。

確率空間$(\Omega, \mathcal{B}, P)$上の可測函数全体にFréchetの距離

$$(1.2) \qquad \rho(f,g)=E\left\{\frac{|f(\omega)-g(\omega)|}{1+|f(\omega)-g(\omega)|}\right\}$$

を入れた完備線形距離空間を$\mathcal{F}$と記す。又$L^P(\Omega)$でP-乗可積分函数全体にノルム$\|\quad\|_P$を

$$(1.3) \qquad \|f\|_P=\left[E|f(\omega)|^P\right]^{1/P}$$

で入れたBanach空間を表わす。

よく知られているように$\mathcal{F}$における点列の収束は確率収束と同等である。

定義1.3　Mが位相空間のとき確率場$\{X(x)\ ;\ x\in M\}$において

(i)　$\{X(x)\ ;\ x\in M\}$が$\mathcal{F}$-連続とは$X: x\to X(x,\omega)$がMから$\mathcal{F}$の中への写像とし連続のとき言う。

(ii)　$\{X(x)\ ;\ x\in M\}$がL^P-連続とは$X\ ;\ x\longrightarrow X(x,\omega)$が$M$から$L^P$への連続写像を与えるときに言う。特に$P=2$のとき平均連続とも言う。

(iii)　$\{X(x)\ ;\ x\in M\}$が確率連続とは

$$(1.4) \qquad P\{|X(y)-X(x)|>\varepsilon\}$$

が任意の$x\in M$と、任意の$\varepsilon>0$に対し$y\in M$の函数として$y=x$で連続であるときに言う。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

Proposition 1.3

位相空间 M上の確率場 $\{X(x)\ ;\ x\in M\}$ において

(i) $\{X(x)\ ;\ x\in M\}$ が L^P－連続（$P\geq 1$）ならば

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$－連続

(ii) $\{X(x)\ ;\ x\in M\}$ が $\mathcal{F}$－連続

$\Longleftrightarrow$ 確率連続

（証明）

(i) $$E\left[\frac{|X(x,\omega)-X(y,\omega)|}{1+|X(x,\omega)-X(y,\omega)|}\right]\leq\|X(x,\omega)-X(y,\omega)\|_1$$

$$\|X(x,\omega)-X(y,\omega)\|_1<\|X(x,\omega)-X(y,\omega)\|_P \quad P\geq 1$$

により明らか．

(ii) $\Rightarrow$ チェビシェフ の不等式より

$$P\{|X(x,\omega)-X(y,\omega)|>\varepsilon\}\leq\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\rho(X(x),X(y))$$

が成立することから明らか

$\Leftarrow$ $P\{|X(x,\omega)-X(y,\omega)|>\delta\}$ の $y=x$ における連続性から

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists V\in\mathcal{U}(x)\quad P\{|X(x,\omega)-X(y,\omega)|>\frac{\varepsilon}{2}\}<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall y\in V$$

$$\therefore\quad E\left\{\frac{|X(x)-X(y)|}{1+|X(x)-X(y)|}\right\}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}<\varepsilon\quad\forall y\in V$$

（証明終）

2° 超確率場

次に超確率場（generalized random field）を定義しよう．R^n で n 次元アファイン空間 R^n で n 次元 ユークリッド空間を表わすこととし、R^n 上の コンパクトな台をもつ C^∞－函数全体を $\mathcal{D}=\mathcal{D}(R^n)$ と記し、Schwartz の $\mathcal{D}$ の位相を入れる。その共役空間を $\mathcal{D}'$ としよう。$\mathcal{D}'$ に cylinder 集合から生成される最小の σ－集合体を考えておく。

ある確率空间（Ω、$\mathcal{B}$、P）上の $\mathcal{D}'$ 値 確率変数 $X(\omega)$ 或は 同じことだが、$M=\mathcal{D}(R^n)$ 上の確率場 $\{X(\varphi,\omega)\ ;\ \varphi\in\mathcal{D}(R^n)\}$ で 殆んどすべての ω に対し $X(\varphi,\omega)$が $\varphi\in\mathcal{D}$の連続線形汎函数であるとき R^n 上の超確率場（generalized random field，R^n上の 0 次の random current 第3章参照）という。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

もうすこし条件をゆるめ $\mathcal{D}(R^n)$ 上の確率場 $\{X(\varphi,\omega);\ \varphi\in\mathcal{D}(R^n)\}$ が $\mathcal{D}(R^n)\longrightarrow\mathcal{F}$ への連続線形変換のとき $\{X(\varphi,\omega);\ \varphi\in\mathcal{D}(R^n)\}$ を R^n 上の超確率場（in $\mathcal{F}$）といい $\mathcal{D}(R^n)\longrightarrow L^p$ への連続線形変換のとき R^n 上の超確率場（in L^p）ということにする。

しかし次にあげる Bochner-Minlos の定理によれば、超確率場(in $\mathcal{F}$)と同じ法則に従う超確率場が $\mathcal{D}'$ 上の測度として構成される。更にもっと強く M.Nishio〔42〕の second order の超過程における結果を拡張すれば超確率場 in L^p（$p\geq 1$）は適当な version をとれば超確率場になることが示される。

3° Bochner-Minlos の定理

次に、Bochner-Minlos の定理をあげ、その定理を複素化した空間に拡張しておこう。

Φ を局所凸な線形位相空間 Φ' をその共役空間とし Φ' の Borel 集合体として $\{\langle X,\xi\rangle,\ \xi\in\Phi\}$ を可測にする最小の σ－集合体 $\mathcal{B}$ を考え（Φ', $\mathcal{B}$）上のある確率測度を μ としよう。

そのとき

$$(1.5)\qquad \chi(\xi)=\int_{\Phi'}e^{i\langle X,\xi\rangle}\,d\mu(X)$$

を μ の特性汎函数（characteristic functional）と呼ぶが（1.5）により定義される $\chi(\xi)$ が i) Φ の連続な汎函数、ii) 正定符号、iii) $\chi(0)=1$、をみたすことは見やすい。有限次元の測度では逆に i)、ii)、iii) の性質からの測度の存在と一意性が Bochner の定理として知られている。

定理 1.1 （Bochner-Minlos）

Φ を nuclear 空間又はその inductive limit 空間とするとき、Φ 上の汎函数 $\chi(\xi)$ が ある Φ' の確率測度 μ の特性汎函数である為の必要十分条件は $\chi(\xi)$ が次の三条件を充すことである。

(i) $\chi(\xi)$ は Φ の連続な汎函数

(ii) 正定符号、即ち任意の N、複素数 $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_N$、任意の $\xi_1,\cdots,\xi_N\in\Phi$ に対し

$$(1.6)\qquad \sum\alpha_i\bar{\alpha}_j\,\chi(\xi_i-\xi_j)\geq 0$$

(iii) $\chi(0)=1$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

我々はこの定理を $\mathcal{S}$ 又は $\mathcal{D}$ に対して適用するが、種々の都合から、$\mathcal{S}$、$\mathcal{D}$ を複素数値の C^∞ー函数の中で考える必要が生じる。その為 複素化した空間で定理を示すことが要求される。

Φ を局所凸実線形位相空間としたとき Φ の複素化空間 $\Psi=\Phi+i\Phi$ はその要素 $\Psi \ni \zeta=(\xi,\eta)$ (形式的に $=\xi+i\eta$) は $\Phi\oplus\Phi$ の要素とし、複素数 $\gamma=\alpha+i\beta$ との積を

$$(1.7)\qquad \gamma\zeta \equiv (\alpha\xi-\beta\eta\ ,\ \beta\xi+\alpha\eta)$$

で定義する。このとき Ψ は局所凸、複素線形位相空間になる。又 Ψ の共役空間 Ψ' は $\Phi'+i\Phi' \ni Z=(X,Y)\ (=X+iY)$ を $\Phi'\oplus\Phi'$ の要素とし 複素数との積は (1.7) 式と同様に定義し、

$$(1.8)\qquad \langle Z,\zeta\rangle \equiv \langle X,\xi\rangle-\langle Y,\eta\rangle+i\langle X,\eta\rangle+i\langle Y,\xi\rangle$$

により与えられる線形汎函数の空間である。

θ を $\Psi' \ni Z'$ から $\Phi'\oplus\Phi'$ への自然な同相写像、
$\langle\theta Z',(\xi,\eta)\rangle \equiv R_e\langle Z',\ \xi-i\eta\rangle$ とすれば θ は実係数に関しては 同型写像になっている。

今 Ψ' 上の確率測度 μ は θ を通して $\Phi'\oplus\Phi'$ (測度空間としては $\Phi'\oplus\Phi'$ の測度 μ_0 を Ψ' の測度にうつせる。

Φ が nuclear 空間 (又はその inductive limit) ならば $\Phi\oplus\Phi$ もそうであるから、$\Phi\oplus\Phi$ と $\Phi'\oplus\Phi'$ には Bochner-Minlos の定理が使える。μ_0 を $\Phi'\oplus\Phi'$ の確率測度とし

$$(1.5)'\qquad C(\xi,\eta)\equiv\int_{\Phi'\oplus\Phi'} e^{i\langle X,\xi\rangle+i\langle Y,\eta\rangle}\,d\mu_0(X,Y)$$

$$=\int_{\Phi'\oplus\Phi'} e^{i\langle X,\xi\rangle+i\langle Y,\eta\rangle}\,d\mu_0(X,Y)$$

とおけば $C(\xi,\eta)$ は 定理 1.1 の i)、ii)、iii) を充す。逆に i)、ii)、iii) を充す $\Phi\oplus\Phi$ の汎函数に対しては、$\Phi'\oplus\Phi'$ 上の確率測度が定まる。
今 $\zeta=(\xi,\eta)\in\Phi+i\Phi$ に対し involution ${}^*\zeta=(\xi,-\eta)$、
${}^*Z=(X,-Y)$ を定義すれば $\Phi'\oplus\Phi'\ni(X,Y)$ に対し、$Z'=\theta^{-1}(X,Y)$、
$\mu=\mu_0\cdot\theta$ として

$$(1.5)''\qquad C(\zeta)\equiv\int_{\Phi'\oplus\Phi'} e^{i\langle X,\xi\rangle+i\langle Y,\eta\rangle}\,d\mu_0(X,Y)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$= \int_{\Phi'\oplus\Phi'} e^{i\langle (X,Y),(\xi,\eta)\rangle} d\mu_0(X,Y)$$

$$= \int_{\Phi'\oplus\Phi'} e^{iRe\langle \theta^{-1}(X,Y),\ \xi - i\eta\rangle} d\mu_0(X,Y)$$

$$= \int_{\Psi'} e^{iRe\langle Z',\ ^*\zeta\rangle} d\mu(Z')$$

又

$$(1.5)''' \quad \chi(\zeta) \equiv \int_{\Psi'} e^{iRe\langle Z',\zeta\rangle} d\mu(Z')$$

と定義しておけば、$\chi(^*\zeta) = C(\zeta) = C(\xi,\eta)$
明らかに $C(\xi,\eta)$ 及び $C(\zeta)$, $\chi(\zeta)$, が i), ii), iii) を充すことは互に同値であるから、例えば $\chi(\zeta)$ が i), ii), iii) を充したとすれば $C(\xi,\eta)$ が i), ii), iii) を充すことにより $\Phi'\oplus\Phi'$ 上の測度 μ_0 が存在して (1.5)''式を充す。よって θ で変数変換し $\mu = \mu_0\cdot\theta$ とおけば (1.8) 式及び θ の定義から

$$\chi(\zeta) = C(\xi,-\eta) = \int_{\theta^{-1}(\Phi'\oplus\Phi')} e^{iRe\langle\theta^{-1}(X,Y),(\xi,i\eta)\rangle} d\mu_0$$

$$= \int_{\Psi'} e^{iRe\langle Z,\zeta\rangle} d\mu(Z)$$

により、$\chi(\zeta)$ を特性汎函数にもつ Ψ' の測度 μ が存在する。

定理 1.1′ Φ を nuclear 空間 (又はその inductive limit), $\Psi = \Phi + i\Phi$ を複素化空間とするとき Ψ 上の汎函数 $C(\zeta)$, $\chi(\zeta)$ が各々 (1.5)'' (1.5)''' で定義されるある確率測度の特性汎函数であるための必要十分条件は 定理 1.1 の条件 i), ii), iii) が成立することである。

後で良く使う言葉として Gaussian 測度を定義しておこう。
Φ を nuclear 空間 又はその複素化空間の連続な内積 (φ,φ) から導かれるノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi,\varphi)}$ に対し

$$\chi(\varphi) = e^{-\frac{\|\varphi\|^2}{2}}$$

は 定理 1.1 及び定理 1.1′ の条件を充す。従って Φ' の確率測度 P が存在して、$\chi(\varphi)$ を特性汎函数にもつ。
この測度 P 又は 確率空間 $(\Phi',\mathcal{B},P)$ を Gaussian 測度という。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

4° homogeneousな確率場

n次元ユークリッド空間 $M = R^n_0$ 上に確率連続な確率場 $\{X(x); x \in M\}$ が与えられ $E|X(x)|$ が x について局所可積分ならば $\{X(x); x \in M\}$ の可測な version $\{\tilde{X}(x); x \in M\}$ をとって、$\varphi \in \mathcal{D}$ に対し

$$(1.9) \quad X(\varphi, \omega) \equiv \int \tilde{X}(x)\varphi(x)\,dx$$

により 超確率場が得られる。必要に応じて確率場を超確率場とみなす。

$\{X(\varphi); \varphi \in \mathcal{D}\}$ を超確率場としたとき

$\chi(\varphi) = \chi_X(\varphi) = E[e^{iR_e X(\varphi)}]$ をXの特性汎函数という。

h を R^n の変移（translation）$x \to x+h$, gを運動（motion）とするとき

$$(1.10) \quad \sigma_h \varphi(x) \equiv \varphi(x+h), \quad \sigma_h X(\varphi) \equiv X(\sigma_{-h}\varphi)$$

$$(1.11) \quad \sigma_g \varphi(x) \equiv \varphi(gx), \quad \sigma_g X(\varphi) \equiv X(\sigma_{g^{-1}}\varphi)$$

を定義する。

定義 1.4

$\sigma_g X$ の特性汎函数は $\chi_{\sigma_g X}(\varphi) = \chi_X(\sigma_{g^{-1}}\varphi)$ であるが $\sigma_h X$ の特性汎函数が任意の変移 h で不変のとき homogeneous; $\sigma_g X$の特性汎函数が任意の運動 g で不変のとき homogeneous and isotropic という。

R^n上の確率場に於ては 任意の N と任意の

$$x_1, x_2, \cdots, x_N \in R^n \text{ に対し}$$

$$(1.12) \quad \{X(x_1+h), \cdots, X(x_N+h)\}$$

の結合分布が h に関し不変のとき homogeneous

$$(1.13) \quad \{X(gx_1), \cdots, X(gx_N)\}$$

の結合分布が g に関し不変のとき homogeneous and isotropic という。いずれの場合にも homogeneous and isotropic を単に isotropic と呼んでも混乱は生じないと思われるので、このセミナー・ノートでは そのように呼んでおく。

確率場、超確率場 いずれの場合にも L^2ー 連続であり平均、共分散が任意の変移 h（又は任意の運動 g）に関して不変なとき weakly homogeneous,（及び weakly isotropic）呼び習わしている。一般に以後定義される概念が平均と共散分に関してのみ成立するとき、"Weakly"

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

という副詞つきで呼ばれる。又得られる結果が平均と共分散にのみに関した条件の場合には "Weakly" な場合に成立することを注意しておこう。

R_0^n 上の超確率場（in L^2）において

$$(1.14)\quad \begin{aligned} m(\varphi) &\doteq E(X(\varphi)) \\ \rho(\varphi,\psi) &= E(X(\varphi)\cdot\overline{X(\psi)}) - m(\varphi)\,\overline{m(\psi)} \end{aligned}$$

によって定義される、超函数 $m(\varphi)$ を平均汎函数（mean functional），双線形汎函数 $\rho(\varphi,\psi)$ を共分散双線形汎函数（covariance bilinear functional）と呼ぶ。

Proposition 1.4

R_0^n 上の homogeneous な超確率場 in L^2 の平均汎函数及び共分散双線形汎函数 $\rho(\varphi,\psi)$ の充すべき必要十分条件は緩増加な正測度 $F(\lambda)$，及び定数 m が存在して

$$(1.15)\quad \begin{aligned} m(\varphi) &= m\int\varphi\,dx = m\cdot\tilde{\varphi}(0) \\ \rho(\varphi,\psi) &= \int\tilde{\varphi}(\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\,dF(\lambda) \end{aligned}$$

と表現されることである。

証明 省略 Gelfand – Vilenkin [16] 参照

$$(1.16)\quad \begin{aligned} \tilde{\varphi}(\lambda) &= \int e^{i\lambda x}\varphi(x)\,dx \\ \tilde{\varphi}(\lambda) &= (2\pi)^{-n}\int e^{-i\lambda x}\varphi(x)\,dx \end{aligned}$$

で Fourier 変換及びその逆変換を表わすものとする。但し

$x = (x^1,\cdots,x^n)\in R_0^n$，$\lambda = (\lambda^1,\cdots,\lambda^n)\in R_0^n$ に対し

$$\lambda x = \sum_{j=1}^{n}\lambda^j x^j$$

$$|\lambda| = \left(\sum_{j=1}^{n}(\lambda^j)^2\right)^{\frac{1}{2}}\qquad |x| = \left(\sum_{j=1}^{n}(x^j)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

5° 局所確率場

A. M. Yaglom [54] は局所 homogeneous な確率場（locally homogeneous random field, field with homogeneous random incremens）を扱っている。この概念は Kolmogorov によって導入され、定常増分過程の確率場の拡張である。例えば P. Lévy の多次元径数の Brown 運動の記述には都合がよい。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

定義 1.5 R^n上の 確率場 $\{X(x);\ x\in R^n\}$ が局所 homogeneous とは すべての変移 y に対し

(1.17) $$\Delta_y X(x) = X(x) - \sigma_y X(x) = X(x) - X(x-y)$$

が homogeneous な確率場のときにいう。

又 (1.17) の $\Delta_y X(x)$ が 任意の回転 g に対し $\sigma_g \Delta_y X(x) = \Delta_{gy} X(gx)$ が 定義 1.4 の意味で不変のときに 局所 homogeneous and isotropic という。

もし $\Delta_y X(x)$ の平均、分散が存在すれば

(1.18) $$m(y) = E[\Delta_y X(z)]$$

$$\rho(x;y_1,y_2) = E\Delta_{y_1} X(x+z)\,\overline{\Delta_{y_2} X(z)} - m(y_1)\overline{m(y_2)}$$

が z に関して不変なことが 局所 homogeneous な確率場の平均、共分散である必要十分条件である。

同じく 平均、分散が存在するとき 更に

(1.19) $$m(gy) = m(y)$$

$$\rho(gx;gy_1,gy_2) = R(x;y_1,y_2)$$

が 任意の回転 g について成立することが 局所 homogeneous and isotropic な場の必要十分条件である。

局所的性質は超確率場での方がみやすい。今

(1.20) $$\mathfrak{D}_1 = \{\varphi(x)\in\mathfrak{D};\ \int\varphi(x)\,dx = 0\}$$

とおき $\mathfrak{D}_1$ に $\mathfrak{D}$ の relative 位相を入れる.

定義 1.6 超過程 $\{X(\varphi);\ \varphi\in\mathfrak{D}\}$ が 局所(locally) homogeneous とは 特性汎函数 $\chi(\varphi)$ が $\varphi\in\mathfrak{D}_1$ で 変移(translation) σ_h に不変のときにいう。

更に 運動 σ_g に対して不変ならば 局所 isotropic と呼ぶ.

<u>注意</u> 上の定義ではまず確率場、超確率場が与えられて "locally" と呼ばれる性質を付与したのだが、本来このように increments に対しての条件のみ与えられた場合、我々の観測し得る 即ち 知り得る量は increments に対してのみで その絶対量を知らないとすることが自然である。例えば 一次元の Brown 運動を process with stationary increments とみるならば 原点の値 0 にこだわらぬ方が自然である

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

（N. IKeda, T. Hida, H. Yoshizawa〔24〕参照） その意味で "local" な性質のみをもつ確率場、或は超確率場を考えておくことは意義がある。即ち、定義1.5で与えられるのは $\mathcal{D}''$ 上の連続線形な確率場 $\{X(\varphi);\varphi\in\mathcal{D}_1\}$ であるとして homogeneous, isotropic 性に関しては、それ以下の定義に従う、としてよかろう。これを便宜上 局所（超）確率場と呼ぼう。

Proposition 1.5 局所 homogeneous な超確率場（in L^2）$\{X(\varphi);\varphi\in\mathcal{D}_1\}$ の平均汎函数 $m(\varphi)$，共分散双線形汎函数 $\rho(\varphi,\psi)$ の充すべき必要十分条件は $m(\varphi)$, $\rho(\varphi,\psi)$ が次の表現をもつことである。

$$(1.21)\quad \begin{aligned} m(\varphi) &= i m\cdot\nabla\tilde{\varphi}(0) = i\sum m_k \frac{\partial}{\partial x^k}\tilde{\varphi}(\lambda)\Big|_{\lambda=0} \\ \rho(\varphi,\psi) &= \int_{\lambda\neq 0}\tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\,dF(\lambda) + \sum a_{kj}\frac{\partial}{\partial\lambda^k}\tilde{\varphi}(0)\frac{\partial}{\partial\lambda_j}\overline{\tilde{\psi}(0)} \end{aligned}$$

但し $m=(m_1,\cdots,m_n)$ は定数ベクトル，$A=(a_{jk})$ は 定非負エルミート行列、$F(\lambda)$ は正則度で非負の整数 k が存在し

$$(1.22)\quad \int_{\lambda\neq 0}\frac{|\lambda|^2}{(1+|\lambda|^2)^{k+1}}\,dF(\lambda) < \infty .$$

（証明） I. M. Gelfand − N. Y. Vilenkin〔16〕 第2章§4定理4により明らか．念の為 Proposition 1.4 から導く．

任意の $\varphi\in\mathcal{D}$ に対し $\frac{\partial}{\partial x^k}\varphi\in\mathcal{D}_1$ $k=1,2,\cdots,n$.

よって $\frac{\partial}{\partial x^k}m(\varphi) = -m\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\varphi\right)$ $k=1,2,\cdots,n$ は translation σ_h で 不変な超函数だから $\frac{\partial}{\partial x^k}m(\varphi) = m_k\int\varphi(x)\,dx$，$m_k$ は定数

よって
$$\begin{aligned} m(\varphi) &= \int\sum m_k x^k\,\varphi(x)\,dx \\ &= -i\sum_k m_k\frac{\partial}{\partial x^k}\tilde{\varphi}(0) \end{aligned}$$

これで（1.20）式の前半が示された．次に

$$X_y(\varphi) = X(\varphi-\sigma_y\varphi) \qquad \varphi\in\mathcal{D}$$

により 超確率場が定義される

$$\rho(\varphi,\psi,y_1,y_2) \equiv \rho(\varphi-\sigma_{y_1}\varphi,\ \psi-\sigma_{y_2}\psi)$$

とおけば

$$(1.23)\quad \begin{aligned} X_{y_1+y_2}(\varphi) &= X(\varphi-\sigma_{y_1}\varphi) + \sigma_{y_1}X(\varphi-\sigma_{y_2}\varphi) \\ &= X_{y_1}(\varphi) + \sigma_{y_1}X_{y_2}(\varphi) \end{aligned}$$

であるから

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

(1.24) $\quad \rho(\varphi\psi, y'+y'', y) = \rho(\varphi\psi ; y', y) + \rho(\sigma_{y'}^{-1}\varphi, \psi ; y'', y)$

Proposition 1.4 により緩増加な測度 $F(\lambda, y_1, y_2)$ が存在して

(1.25) $\quad \rho(\varphi, \psi ; y_1, y_2) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\, dF(\lambda ; y_1, y_2)$

(1.21) 式により

(1.26)
$$\int \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\, dF(\lambda\, y'+y'', y) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\, dF(\lambda, y', y) + \int \tilde{\varphi}(\lambda) e^{-i\lambda y'}\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\, dF(\lambda, y'', y)$$
$$= \int \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\, dF(\lambda, y'', y) + \int \tilde{\varphi}(\lambda) e^{-i\lambda y''}\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\, dF(\lambda, y', y)$$

よって $\quad (1-e^{-i\lambda y'})\, dF(\lambda, y, y) = (1-e^{-i\lambda y'})\, dF(\lambda, y'', y)$

よって $\quad \dfrac{dF(\lambda, y, y)}{(1-e^{i\lambda y'})}$ は y' に対し不変　同様の論法により

(1.27) $\quad F(\lambda) \equiv \dfrac{1}{(1-e^{i\lambda y_1})(1-e^{i\lambda y_2})}\, dF(\lambda, y_1, y_2)$

は y_1, y_2 に対し不変である。
(1.27) を (1.25) に代入して

$$\rho(\varphi, \psi ; y_1, y_2) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)(1-e^{-i\lambda y_1})(1-e^{i\lambda y_2})\, dF(\lambda) + F(0, y_1, y_2)$$

(1.26) 式から $F(0, y_1, y_2)$ が (y_1, y_2) の正値双線形形式であることがわかる。従って正値 Hermite 行列 $A = (a_{jk})$ が存在して

$$\tilde{\varphi}(0)\overline{\tilde{\psi}}(0)F(0, y_1, y_2) = \sum_{jk} a_{jk}\, y_1^j\, y_2^k\; \tilde{\varphi}(0)\; \overline{\tilde{\psi}}(0)$$
$$= \sum_{jk} a_{jk} \frac{\partial}{\partial\lambda^j}\tilde{\varphi}(0)\; \overline{\frac{\partial}{\partial\lambda^k}\tilde{\psi}(0)}$$
$$= \sum_{jk} a_{jk} \frac{\partial}{\partial\lambda^j}\, \widetilde{\varphi - \sigma_{y_1}\varphi}\,(0)\; \overline{\widetilde{\psi - \sigma_{y_2}\psi}}\,(0)$$

$$\rho(\varphi - \sigma_{y_1}\varphi, \psi - \sigma_{y_2}\psi) = \int (\widetilde{\varphi - \sigma_{y_1}\varphi})\,\overline{(\widetilde{\psi - \sigma_{y_2}\psi})}\, dF(\lambda)$$
$$+ \sum a_{jk} \frac{\partial}{\partial\lambda^j}\, \widetilde{\varphi - \sigma_{y_1}\varphi}\,(0) \times \overline{\frac{\partial}{\partial\lambda^k}\widetilde{\psi - \sigma_{y_2}\psi}\,(0)}$$

ところが $\varphi - \sigma_{y_1}\varphi$ の type の函数の一次結合は $\mathcal{D}_1$ で dense だから $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_1$ に対し

$$\rho(\varphi, \psi) = \int \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\, dF(\lambda) + \sum_{jk} a_{jk} \frac{\partial}{\partial\lambda^j}\tilde{\varphi}(0)\; \overline{\frac{\partial}{\partial\lambda^k}\tilde{\psi}(0)}$$

（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

L^2ー連続 homogeneous な局所確率場 $X(x)$ に対しては

$$X(\varphi) = \int X(x)\varphi(x)\,dx \qquad \varphi \in \mathcal{D}_1 \tag{1.28}$$

によって homogeneous な局所確率場が与えられるから、これに Proposition 1.5 を適用し $\varphi_\nu(x) \to \delta(x) - \delta(x+y)$ in $\mathcal{D}'_p$ となる点列を $\mathcal{D}_1$ からとって近似 対応する表現が得られる。

Proposition 1.5'

$$m(y) = \sum_{i=1}^{n} m_i y^i$$

$$\rho(x, y_1, y_2) = \int_{\lambda \neq 0} e^{i\lambda x}(1-e^{-i\lambda y_1})(1-e^{i\lambda y_2})\,dF(\lambda) + \sum_{i,j}^{n} a_{ij}\, y_1^i\, y_2^j \tag{1.29}$$

但し $m=(m_i)$ 定ベクトル (a_{ij}) は非負エルミート行列
$F(\lambda)$ 正の測度で

$$\int_{\lambda \neq 0} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\,dF(\lambda) < \infty .$$

注意　局所確率場と確率場の差異に関しての注意として 次のことを指摘しておこう。

(1)　差に関する事象のみ考察する場合には その差異はあらわれない．例えば 次の§2における連続性はその例である。

(2)　局所確率場は ある一点 x_0 での確率変数 $X(x_0)$ が与えられれば、確率場として定まるが、通常、局所確率場に与えられる条件は差に関してのみの条件の為、確率場として扱わぬ方が便利が良いことがある．例えば 後で述べる内、外挿問題がある。

Mを適当な径数空間で位相が与えられるとしよう。
M上の L^2ー 連続な確率場 $\{X(x)\,;\, x \in M\}$ が与えられたとき M のある開集合をDとし $\{X(z)\,;\, z \in D^c\}$ が与えられたとき $X(x)\,;\, x \in D$ を内挿する問題を考える。ここに内挿とは $V_D(x)$ を $\mathcal{B}\{X(z)\,;\, z \in D^c\}$ー 可測で $E|X(x) - V_D(x)|^2$ を 最小にする函数 $V_D(x)$ を見つけることを問題とする．それは良く知られたように

$$V_D(x) = E[X(x) \mid X(z) : z \in D^c]$$

で与えられるが もっと具体的に知りたいわけである。

L^2ー連続局所確率場 $\{X(x) - X(y) : x, y \in M\}$ に対しては $V_D(x,y)$ を $\mathcal{B}\{X(z) - X(z') : z, z' \in D^c\}$ 可測な函数で $E|X(x) - X(y) - V_D(x,y)|^2$ を最小とする確率函数とする。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

そのとき　$y \in D^c \Rightarrow U_D(x, y) + X(y)$ は y に依存しない。

$$\because \quad y, y' \in D^c$$

$$U_D(x,y) = E\{X(x) - X(y) \mid X(z_1) - X(z_2) \ ; \ z_1, z_2 \in D^c\}$$

$$U_D(x,y) = E[X(x) - X(y) \mid X(z_1) - X(z_2) \ ; \ z_1, z_2 \in D^c\}$$

$$U_D(x,y) - U_D(x,y') = E\{X(x) - X(y) - X(x) + X(y') \mid X(z) - X(z'), z, z' \in D^c\}$$

$$= -E[X(y) - X(y')|$$

$$= -X(y) + X(y') \qquad a.e.$$

$$U_D(x,y) + X(y) = U_D(x,y') + X(y')$$

この意味で $U_D(x) \equiv U_D(x,y) + X(y)$ と定義するとき上のような意味で $U_D(x)$ は $X(x)$ の内挿と呼ぶにふさわしい。

§2 Gaussian確率場の標本函数の連続性

Gaussian定常過程の path の連続性、不連続性に関しては Hunt [23] Belyaev [4][5] Doburshin [56] 及び T. Sirao [50] の上級函数、下級函数の判別に関する詳しい考察がある。

又定常過程をはずしたときの議論として　解析性、連続性、不連続性に関して Loéve [35 の付録] Belyaev [57] Z. Ciesielski [10] 等の研究がある。

又. Gaussian 確率場 においては P. Lévy [35] の Brown 運動の局所連続性 T. Hida [21] そして最終結果である T. Sirao [49] の一様連続性、局所連続性の上、下級函数の決定がある。

詳しいことは以上の文献を参照していただくことにして、ここでは証明が容易であることと、後での使い易すさに重点をおいて、比較的弱い結果を P. T. Strait [58] を少し拡張した形で紹介する。

1° Hölder 連続性

まず 一様連続性を考えるが P. Lévy の注意により Gaussian 確率場の一様連続性は コンパクト集合の上でしか意味のないことを思いだしておこう。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

Mを完備コンパクト距離空間 又は完備距離空間のコンパクトな部分集合としよう。Mの ε-entropy $\mathcal{E}(M)$を次のように定義する。Mは完備コンパクトだから全有界である。

$^\forall\varepsilon > 0$ に対し Mを有限ヶの半径 ε の球で被覆できる。

(2.1) $N(M, \varepsilon) \equiv \min\{n\,;\, M$ を被覆する半径εの球の個数$\}$

(2.2) $$\mathcal{E}(M) = \overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}} \frac{\log\log N(M,\varepsilon)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\mathcal{E}_2(M) = \overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}} \frac{\log\log N(M,\varepsilon)}{\log\log\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\mathcal{E}_3(M) = \overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}} \frac{\log N(M,\varepsilon)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}$$

と三つの量を定義すると

Lemma 2.1.

(i) $\mathcal{E}_3(M) < \infty \Rightarrow \mathcal{E}_2(M) = 0$, $\mathcal{E}_2(M) < \infty \Rightarrow \mathcal{E}(M) = 0$ であり、

(ii) Mが有限次元 Riemann 多様体のコンパクト部分集合ならば $\mathcal{E}_3(M) < \infty$

(iii) Φ を σ-Hilbert 空間、Mをそのコンパクト部分集合、距離として Φ の連続なノルムをとれば $\mathcal{E}_2(M) \leq d\,\Phi$

但し $d\Phi$ は Φ の functional dimension (Gelfand-Vilenkin [17] 第1章 §3 参照) 上で Φ が nuclear ならば $\mathcal{E}(M) = 0$

(iv) Mを l_2 の基本平行体

即ち $M = \{x \in l_2 : 0 \leq x^j < \frac{1}{2^j}\quad j = 1, 2, \cdots\}$ x^j は x の j 座標とすれば $\mathcal{E}_2(M) = 2$

Hölder 連続性に関する通常の記号に準じ $C^{(\alpha)}(M) = C^{(\alpha)}(M, r)$ で、距離 r をもつ距離空間 M における α位の Hölder 連続函数を表わすことにする。

即ち $u(x) \in C^{(\alpha)}(M, r) \iff {}^\exists A$ 定数

(2.3) $$|u(x) - u(y)| \leq A r^\alpha(x, y)$$

特に $M \subset R^n$ のとき $u \in C^{(k,\alpha)}(M)$: k 回連続微分可能で k 次の導函数が $C^{(\alpha)}(M)$に属する函数を表わすことにしておこう。

定理 2.1 M上の可分な Gaussian 確率場 $\{X(x) : x \in M\}$ において

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

定数 $C>0$、$\alpha>0$ が存在して

(2.4) $\quad \Gamma(x,y) \leq C r^{\alpha}(x,y) \qquad x,y \in M$

(2.5) $\quad \varepsilon(M) < \frac{\alpha}{2}$

を充すならば

$\Rightarrow$ $0<\beta<\frac{\alpha}{2}-\varepsilon(M)$ なる任意の β に対し $X(x,\omega)$ は ほとんどすべての ω に対し β 位 Hölder 連続性をもつ. i.e.

$$X(x,\omega) \in C^{(\beta)}(M) \qquad a.e.\ \omega.$$

但し $\quad \Gamma(x,y) = E|X(x)-X(y)|^2$

$r(x,y)$ は M の 距離

(証明)

$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ とおき 各 ε_n に対し $N(M,\varepsilon_n)$ 個からなる ε_nー 網、$A_n = \{x_1^n, \cdots, x^n_{N(M,\varepsilon_n)}\}$ を定める。$\beta<\theta<\frac{\alpha}{2}-\varepsilon(M)$ なる θ を固定する。$0<\delta<\frac{\alpha}{2}-\theta-\varepsilon(M)$ なる任意の δ に対し n_0 が存在して、任意の $n>n_0$ に対し

$$\frac{\log\log N(M,\varepsilon_n)}{\log\frac{1}{\varepsilon_n}} < \varepsilon(M)+\delta$$

が (2.2) の定義式から明らかに成立するから

(2.6) $\quad N(M,\varepsilon_n) \leq \exp[\varepsilon_n^{-\varepsilon(M)-\delta}] = \exp[2^{n(\varepsilon(M)+\delta)}]$

に注意しておく。一方、

$$|E(X(x)-X(y))| \leq [E|X(x)-X(y)|^2]^{\frac{1}{2}} \leq C^{\frac{1}{2}} r^{\frac{\alpha}{2}}(x,y)$$

により、$X(x)$ の平均は $C^{(\alpha)}(M)$ に属す

従って $X(x)-E(X(x)) \in C^{(\beta)}(M)$ $(\beta<\frac{\alpha}{2}-\varepsilon(M))$ を言えば充分である。一般性を失うことなく $E(X(x)-X(y))=0$ と仮定してよい。

Gauss 分布の評価式 $\qquad a>0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}du < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a}e^{-\frac{a^2}{2}}$$

を使って (2.4) 式に注意すれば

$$P(|X(x)-X(y)| \geq r^\theta(x,y))$$

$$= 2\int_{r^\theta(x,y)}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\Gamma(x,y)}} \exp\left[-\frac{u^2}{2\Gamma(x,y)}\right]du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{r^\theta(x,y)}{\sqrt{2}\,\Gamma(x,y)^{\frac{1}{2}}}}^\infty e^{-u^2}du \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{1}{\sqrt{2C}}r^{\theta-\frac{\alpha}{2}}(x,y)}^\infty e^{-u^2}du$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$(2.7) \quad \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{\frac{\alpha}{2}-\theta} \exp\left[-\frac{1}{2c} r^{\theta-\frac{\alpha}{2}}\right]$$ を得る。

$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ とおき

$$\sum_n P\{\max_{x\in A_n,\, y\in B_n,\, r(x,y)<3\varepsilon_n} |X(x) - X(y)| \geq r^\theta(x,y)\}$$

$$\leq \sum_n \sum_{\substack{x\in A_n\, y\in B_n \\ r(x,y)<3\varepsilon_n}} P\{|X(x)-X(y)| \geq r^\theta(x,y)\}$$

(2.7) により

$$\leq \sum_n \sum_{\substack{x\in A_n\, y\in B_n \\ r(x,y)<3\varepsilon_n}} \frac{1}{\sqrt{c}\,\sqrt{2\pi}} r(x,y)^{\frac{\alpha}{2}-\theta} \exp\left[-\frac{1}{2c} r(x,y)^{\theta-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$\leq O(1)\sum_n N(M\,\varepsilon_n)\sum_{k=1}^{n} N(M,\varepsilon_k)(3\varepsilon_n)^{\frac{\alpha}{2}-\theta} \exp\left[-\frac{1}{2c}(3\varepsilon_n)^{\theta-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

(2.6) により

$$\leq O(1)\sum_n n \exp[2^{n(\varepsilon(M)+\delta)}] \times 2^{n(\theta-\frac{\alpha}{2})} \exp\left[-\frac{3^{\theta-\frac{\alpha}{2}}}{2c} 2^{\frac{\alpha}{2}-\theta}\right]$$

$$\leq O(1)\sum_n n\cdot 2^{n(\theta-\frac{\alpha}{2})} \exp\left[-2^{n(\frac{\alpha}{2}-\theta)}\left(\frac{3^{\theta-\frac{\alpha}{2}}}{2c} - 2^{n(\varepsilon(M)+\delta-\frac{\alpha}{2}+\theta)}\right)\right]$$

$\varepsilon(M)+\delta-\frac{\alpha}{2}+\theta = \delta > 0$ により

$$\leq O(1)\sum_n n\cdot 2^{n(\theta-\frac{\alpha}{2})} \exp\left[-\frac{3^{\theta-\frac{\alpha}{2}}}{4c} 2^{n(\frac{\alpha}{2}-\theta)}\right] < \infty$$

よって Borel-Cantelli の Lemma から

$$P\{\overline{\lim_{n\to\infty}} (\max_{x\in A_n,\ y\in B_n,\, r(x,y)<3\varepsilon_n} |X(x)-X(y)| \geq r^\theta(x,y)\} = 0$$

i.e. Ω の部分集合 Ω_1 が存在して $P(\Omega_1)=1$，そしてすべての $\omega\in\Omega_1$ に対し $n_0(\omega)\ (<\infty)$ が存在して

$$(2.8) \quad |X(x,\omega) - X(y,\omega)| < r^\theta(x,y)$$

$$\text{for } {}^\forall x\in A_n,\ {}^\forall y\in B_n,\ r(x,y)<3\varepsilon_n \quad n\geq n_0(\omega)$$

が成立する。

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおけば A は M の可算稠密集合であることを思い出しておき，$\omega\in\Omega_1$ に対し，$\varepsilon_{p+1} \leq r(x,y) < \varepsilon_p = 2^{-p}$ $p > n_0(\omega)$ なる任意の $x, y \in A$ に対して $|X(x,\omega) - X(y,\omega)|$ を評価しよう。

A_k が ε_k - 網だから $x\in A_n$, $y\in A_m$ として

① $n \leq p$ ${}^\exists x_p \in A_p$ $r(x, x_p) < \varepsilon_p$

(2.8) 式により $|X(x,\omega) - X(x_p,\omega)| < r^\theta(x, x_p) = 2^{-\theta p}$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

② $n \geq p$ （或は $m \geq p$）ならば 任意 j、$p \leq j < n$ に対し

$^{\exists}x_j \in A_j \quad r(x_j, x) < \varepsilon_j$, $x_a = x$ と記すと

$$r(x_{j-1}, x_j) < r(x_{j-1}, x) + r(x, x_j) < \varepsilon_{j-1} + \varepsilon_j = 3\varepsilon_j$$

(2.6) を使って

$$|X(x_{j-1}, \omega) - X(x_j, \omega)| < r(x_{j-1}, x_j)^\theta = 3^\theta \varepsilon_j^\theta$$

$$\therefore \ |X(x_p, \omega) - X(x, \omega)| \leq \sum_{j=p+1}^{n} |X(x_{j-1}, \omega) - X(x_j, \omega)| \leq 3^\theta \sum_{j=p+1} \varepsilon_j^\theta$$

$$\leq \frac{3^\theta}{\theta \log 2} \ 2^{-\theta p}$$

①② いずれにしても $^{\exists}x_p \in A_p \quad r(x_p, x) < \varepsilon_p$

$$|X(x_p, \omega) - X(x, \omega)| < \frac{3^\theta}{\theta \log 2} \ 2^{-\theta p}$$

y に対しても同様で $^{\exists}y_p \in A_p \quad r(y_p, y) < \varepsilon_p$

$$|X(y_p, \omega) - X(y, \omega)| < \frac{3^\theta}{\theta \log 2} \ 2^{-\theta p}$$

又、 $r(x_p, y_p) < r(x_p, x) + r(x, y) + r(y, y_p) < \varepsilon_p + \varepsilon_p + \varepsilon_p = 3\varepsilon_p$

再び (2.8) を使って

$$|X(x_p, \omega) - X(y_p, \omega)| < r(x_p, y_p) < 3^\theta 2^{-\theta p}$$

$$\therefore \ |X(x, \omega) - X(y, \omega)| < |X(x, \omega) - X(x_p, \omega)| + |X(x_p, \omega) - X(y_p, \omega)|$$

$$+ |X(y_p, \omega) - X(x, \omega)|$$

$$< \frac{3^{\theta+1}}{\theta \log 2} \ 2^{-\theta p} \leq \frac{3^{\theta+1} \cdot 2^\theta}{\theta \log 2} \ r^\theta(x, y)$$

が $\omega \in \Omega_1$, $r(x, y) < 2^{-n_0(\omega)}$, $x, y \in A$ に対して成立する。

可分性により $^{\exists}\Omega_2 \subset \Omega_1$, $P(\Omega_2) = 1$ 任意の $\omega \in \Omega_2$ に対し $^{\exists}C(\omega)$

$$|X(x, \omega) - X(y, \omega)| < C(\omega) \ r^\theta(x, y)$$

$$X(x, \omega) \in C^{(\theta)}(M, r) \subset C^{(\beta)}(M, r) \quad \omega \in \Omega_2 \ .$$

（証明終）

2° 一様連続性

Hölder 連続性でなく 連続性だけならば 次の結果が得られる。

定理 2.2 M を 完備コンパクト距離空間 $\varepsilon_2(M)$ は有限とするとき M 上の可分な Gaussian 確率場 $\{X(x) : x \in M\}$ に対し 定数 $C > 0$, $\alpha > 2 + \varepsilon_2(M)$ が存在して

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

(2.9) $\qquad \Gamma(x,y) < C \dfrac{1}{|\log r(x,y)|^{\alpha}}$

が成立すれば

$\Longrightarrow$ $X(x,\omega)\ x\in M$ の標本函数は殆んどすべての ω に対し M で連続である。

証明は定理2.1と同様に $E(X(x)-X(y))=0$ を仮定して一般性を失わない。

$A_n=\{x_1^n,\dots,x^n_{N(M,\varepsilon_n)}\}$, B_n, $\varepsilon_n=1/2^n$ を定理2.1と同じ記号にして、θ を $\dfrac{\alpha-\varepsilon_2(M)}{2}>\theta>1$ にとれば十分大きな n に対し

$$\sum_n P\Big[\max_{\substack{x\in A_n,\ y\in B_n\\ r(x,y)<3\varepsilon_n}}|X(x)-X(y)|>\frac{1}{[\log\frac{1}{\varepsilon_n}]^{\theta}}\Big]$$

$$\le\sum_n n\,2^{2n^{(\varepsilon_2(M)+\delta)}}\int^{\infty}_{[\log\frac{1}{\varepsilon_n}]^{-\theta}[\log\frac{1}{3}+\log\frac{1}{\varepsilon_n}]^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$\le\sum_n O(1)\,2^{2n^{(\varepsilon_2(M)+\delta}}\,n^{-\frac{\alpha}{2}+\theta+1}\,e^{-\frac{c}{2}n^{\alpha-2\theta}}$$

$$\le\sum_n O(1)\,n^{-\frac{\alpha}{2}+\theta+1}\,e^{-\frac{c'}{2}(n^{\alpha-2\theta}-n^{\varepsilon_2(M)+\delta})}$$

$$<\infty$$

但し $\qquad \dfrac{\alpha-\varepsilon_2(M)-\delta}{2}>\theta>1$

よって Borel-Canteli の Lemma により、殆んどすべての ω に対し標本函数 $X(x,\omega)$ は $n_0(\omega)$ が存在して $n>n_0(\omega)$

$$x\in A_n,\ y\in B_n,\quad r(x,y)<3\varepsilon_n.$$

ならば

(2.10) $\qquad |X(x)-X(y)|<(\log 2)^{-\theta}\,n^{-\theta}.$

(2.10)の成立するような ω の集合を Ω_1 とおくと、$P(\Omega_1)=1$
任意の $\omega\in\Omega_1$ と任意の $p\ge n_0(\omega)$ に対し、もし $x,y\in A$ が $r(x,y)<\varepsilon_p$ ならば

定理2.1の証明と同様に $x_p, y_p\in A_p$ が存在して $r(x_p,y_p)<3\varepsilon_p$

$$|X(x_p)-X(x)|,\ |X(y_p)-X(y)|\le(\log 2)^{-\theta}\sum_{j=p}^{\infty}\frac{1}{j^{\theta}}$$

を得て

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$|X(x)-X(y)| \leq |X(x)-X(x_p)| + |X(x_p)-X(y_p)| + |X(y_p)-X(y)|$$

$$|X(x.\omega)-X(y.\omega)| \leq C' \frac{1}{p^{\theta-1}}, \quad r(x.y) < \varepsilon_p , \; x.y \in A . \; p \geq n_0(\omega) \quad \omega \in \Omega$$

即 可分性と A が M で稠密なことから ほとんどすべての ω に対し $X(x.\omega)$ は 連続函数である。

（証明終）

3° 系

系 1 M を n 次元 C^{∞}-Rieman 多様体 $\{X(x) : x \in M\}$ を M 上の可分な Gaussian 確率場で M_0 を M のあるコンパクトな集合とし、M 上で 定数 $C. \alpha > 0$ が存在し

(2.12) $\quad E|X(x)-X(y)|^2 < C\, r^{\alpha}(x,y) \qquad x, y \in M_0$

を充すならば ほとんどすべての標本函数 $X(x,\omega)$ は

任意の $0 < \beta < \frac{\alpha}{2}$ に対し $X(x.\omega) \in C^{(\beta)}(M_0 r)$

或はもっと弱く

(2.13) $\quad E|X(x)-X(y)|^2 < C\,|\log r(x.y)|^{-\alpha-2}$

を充すならば

$\Longrightarrow$ ほとんどすべての標本函数 $X(x.\omega)$ は M_0 で連続.

但し $r(x.y)$ は M の距離

(証明) Lemma 2.1 により $\varepsilon_3(M_0) < \infty$, $\varepsilon(M_0) = \varepsilon_2(M_0) = 0$
定理 2.1., 2.2. により明らか。

（証明終）

系 2. M が nuclear space Φ のある有界集合, $\| \;\; \|$ を Φ の連続なるノルムとするとき Φ 上の可分な Gaussian 確率場 $\{X(x) : x \in \Phi\}$ において M 上で $C. \alpha > 0$ が存在して

(2.14) $\quad E|X(x)-X(y)| \leq C\,\|x-y\|^{\alpha} \qquad x, y \in M$

を充すならば

$\Longrightarrow$ $X(x)$ は M 上で $\beta \left(< \frac{\alpha}{2}\right)$ 位の Hölder 連続. 又 $d\Phi$ を Φ の functional dimesion として

$$E|X(x)-X(y)|^2 \leq C\,|\log \|x-y\||^{-\alpha-2-d\Phi}$$

$\Longrightarrow$ ほとんどすべての標本函数 $X(x.\omega)$ は M 上で連続.

系 3. (P. T. Strait) M を l_2 の 基本平行体. 即ち

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$\ell_2 \supset M \equiv \{ x : 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2^n} \ ; n=1,2,\cdots \}$$

但し x_n は x の n 座標．とし ℓ_2 上の可分な Gaussian 確率場 $\{X(x) : x \in \ell_2\}$ が

(2.15) $\quad E|X(x) - X(y)|^2 \leq C\|x-y\|^\alpha$

を充せば $X(x)$ は M 上で $\beta(<\frac{\alpha}{2})$ 位の Hölder 連続性をもつ
又 $\alpha > 0$

(2.16) $\quad E|X(x) - X(y)|^2 \leq C|\log\|x-y\||^{-\alpha-4}$

ならば M 上で連続．

4° 微分可能性

R^n 上の確率場 $\{X(x) ; x \in R^n\}$ が与えられたとき、それ自身の微分可能性を考えるには時間径数の場合の困難さと大差ないが、径数空間が多次元になると例えば その標本函数自身は微分不可能でも、なにか parameter をもつ曲面上で積分すると．その parameter に関して微分可能になるという．不思議な現象が起る。その顕著な例は 才２章、§２．§４．で与えられるが．そのような複雑さのため 少し特別な議論を要す。準備として 可測函数の完備な線形位相空間の軌跡としての確率過程の微分、積分を考えておこう。（Ω、$\mathcal{B}$、P）を確率空間．$\mathcal{F}_0$ をその上の確率変数のある class の作る 完備な線形位相空間で．確率１で等しい確率変数を同一点とし、$\mathcal{F}$への 恒等写像が連続となるものとする。

$\{X(t) ; a \leq t \leq b\}$ を（Ω．$\mathcal{B}$、P）上の確率過程とし、各 t に対し $X(t) \in \mathcal{F}_0$，．$\{X(t) ; a \leq t \leq b\}$ は $\mathcal{F}_0$ の点の軌跡として連続であるとしよう。 $\{X(t) ; a<t<b\}$ の $\mathcal{F}_0$ の軌跡としての微分、$S\text{-}\dfrac{dX(t)}{dt}$ は $S\text{-}\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{X(t+h) - X(t)}{h}$ が存在するとき、その極限として定義し．積分 $S\text{-}\int$ は Rieman 和の極限として定義する。即ち Δ を区间 $[c,d] \subset [a,b]$ の任意の分割 $c = s_0 < s_1 < \cdots < s_n < s_{n+1} = d$． s_j' $j=0,\cdots,n$ を $s_j \leq s_j' < s_{j+1}$ なる任意の点 $|\Delta|$ を分割の巾 $= \max\limits_{0 \leq j \leq n} |s_{j+1} - s_j|$ とするとき

$$\sum_{j=0}^{n} X(s_j')(s_{j+1} - s_j) \text{ が 分割の巾 } |\Delta| \longrightarrow \text{ のとき}$$

分割の取り方、$\{s_j'\}$ の選び方に無関に $\mathcal{F}_0$ のある要素へ、$\mathcal{F}_0$ の位相で収束するとき、その極限を $S\text{-}\int_c^d X(s)ds$ で表わす。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

例えば $\mathcal{F}_0$ が Banach 空間で、$X(t)$ $a \le t \le b$ が連続ならば、$S-\int_c^d X(S)\,dS$ は存在する。

∵) $[a,b]$ 上で $\{X(t) : a \le t \le b\}$ は一様連続だから

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta.\quad \|X(t) - X(S)\| < \varepsilon \quad |t-S| < \delta \quad a \le t, S \le b.$

$|\Delta| < \delta$, $\hat{\Delta}$ を Δ の任意の細分とすれば

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} X(S_j')(S_{j+1}-S_j) - \sum_{j=0}^{\hat{n}} X(\hat{S}_j'')(\hat{S}_{j+1}-\hat{S}_j)\Big\|$$

$$= \Big\|\sum_{j=0}^{\hat{n}} (\hat{S}_{j+1}-\hat{S}_j)(X(S_j'') - X(\hat{S}_j'))\Big\| \qquad |S_j''-\hat{S}_j| < \delta$$

$$\le \sum_{j=0}^{\hat{n}} (\hat{S}_{j+1}-\hat{S}_j)\,\|X(S_j'') - X(\hat{S}_j')\|$$

$$\le \sum_{j=0}^{\hat{n}} (\hat{S}_{j+1}-\hat{S}_j)\,\varepsilon = (d-c)\,\varepsilon.$$

完備性から 極限の存在がわかる。 （証明終）

注意 1.

$\mathcal{F}_0$ の位相は $\mathcal{F}$ より強いから、適当な分割列をとれば

(2.17) $\quad \sum_j X(S_j^{(n)}, \omega)(S_{j+1}^{(n)} - S_j)$

は概収束する。それを $S-\int_c^d X(S)\,dS$ の代表元として取ってよい。

注意 2.

$\mathcal{F}_0 = L^2(\Omega)$ 場合において、微分可能性は covariance function をみることによってわかる。$\rho(t,S) = EX(t)X(S)$ とおき $\rho(t,S)$ が絶対連続、$\frac{\partial^2}{\partial t\partial S}\rho(t,S)$ が連続ならば $\frac{dX(t)}{dt}$ が存在し連続である。

$$∵)\quad E\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h} - \frac{X(t+h')-X(t)}{h'}\right|^2$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_t^{t+h}\int_t^{t+h}\rho'(t,S)\,dt\,dS - \frac{1}{hh'}\int_t^{t+h}\int_t^{t+h'}\rho'(t,S)\,dt\,dS$$

$$- \frac{1}{h'h}\int_t^{t+h'}\int_t^{t+h}\rho'(t,S)\,dt\,dS - \frac{1}{h'^2}\int_t^{t+h'}\int_t^{t+h'}\rho'(t,S)\,dt\,dS$$

$$\longrightarrow 0 \qquad h, h' \longrightarrow 0$$

から明らか。 但し $\rho'(t,S) = \frac{\partial^2}{\partial t\partial S}\rho(t,S)$.

又このとき $\frac{dX(t)}{dt}$ は $X(t)$ の導函数である。即ち

$$X(t) = S-\int_a^t \frac{dX(S)}{dS}\,dS + X_a \qquad \text{in } L^2(\Omega)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

以上の良く知られた事実を確めておいて

Lemma 2.2. 確率過程 $\{X(t); a\le t\le b\}$ のほとんどすべての path は連続であり、$\mathfrak{F}_0$ の只の軌跡として導函数 $Y(t)$ をもつ。即ち

$$(2.18) \qquad X(t) = s\text{-}\int_a^t Y(s)\,ds + X(a) \qquad \text{in } \mathfrak{F}_0$$

もし、$Y(t)$ の適当な version $\tilde{Y}(t)$ が存在して、$\tilde{Y}(t)$ のほとんどすべての path が連続ならば、$X(t)$ のほとんどすべての path は連続微分可能である。

（証明） $\tilde{Y}(t) = Y(t)$ a.e. $\forall t$ であるから $\{Y(t)\}$ と $\{\tilde{Y}(t)\}$ は $\mathfrak{F}_0$ の軌跡としては一致する。従って (2.18) より

$$X(t) = s\text{-}\int_a^t \tilde{Y}(s)\,ds + X(a) \qquad \text{in } \mathfrak{F}.$$

(2.17) 式の所で述べたように、右辺の積分の代表元として $(a.t]$ の分割の列を適当に定め、（t に依存して変る）

$$\sum_j \tilde{Y}(s_j^{(n)})\,(s_{j+1}^{(n)} - s_j^{(n)})$$

の概収束極限を取ることができる。

$$\tilde{X}(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_j \tilde{Y}(s_j^{(n)})(s_{j+1}^{(n)} - s_j^{(n)}) + X_a(\omega) \quad \text{---収束すれば}$$
$$= 0 \quad \text{----収束しなければ}$$

とおけば、$\{\tilde{X}(t)\}$ は $\{X(t)\}$ の version である。

ところが $\tilde{Y}(t)$ は $\Omega_1\subset\Omega$. $P(\Omega_1)=1$ なる Ω_1 が存在して $\tilde{Y}(t.\omega)$ $\omega\in\Omega_1$ は t の連続函数であるから任意の $\omega\in\Omega_1$ を固定して任意の t に対し分割の選び方に無関係に

$$\lim_{n\to 0} \sum_j \tilde{Y}(s_j^{(n)},\omega)(s_{j+1}^{(n)} - s_j^{(n)})$$

は収束してその極限は $\int_a^t \tilde{Y}(s.\omega)\,ds$ に一致する。

即ち
$$\tilde{X}(t.\omega) = \int_a^t \tilde{Y}(s.\omega)\,ds + X_a(\omega) \qquad \omega\in\Omega_1$$
$$= 0 \qquad \omega\notin\Omega_1$$

を得るから明らかに $\tilde{X}(t.\omega)$ は $X(t.\omega)$ の連続な version であるが $X(t.\omega)$ 自身連続であるから

$$P(X(t.\omega) = \tilde{X}(t.\omega) \ \forall t) = 1$$

$\Omega_2 = \{\omega;\ X(t.\omega) = \tilde{X}(t.\omega) \ \forall t\}$ とおけば $P(\Omega_1\cap\Omega_2) = 1$

任意の $\omega\in\Omega_1\cap\Omega_2$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$X(t,\omega) = \tilde{X}(t,\omega) = \int_a^t \tilde{Y}(s,\omega)\,ds + X_a(\omega)$$

であるから $X(t,\omega)$ は $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 上で連続微分可能な path をもつ。

Proposition 2.1.

(i) 確率場 $\{X(x)\,;\,x\in R^n\}$ のほとんどすべての標本函数が連続であり、共分散函数 $\rho(x,y)$ が、x, y 各々に関して p 階までの連続な偏導函数をもつならば、$X(x)$ は $L^2(\Omega)$ の中で p 階までの連続偏導函数をもつ。

(ii) 更に、$L^2(\Omega)$ における $X(x)$ の p 階までの偏導函数が、ほとんどすべての ω に対して標本函数が連続になる version をもてば、$\{X(x)\}$ のほとんどすべての標本函数は、p 階までの連続な偏導函数をもつ。

(証明) 注意 1、2 及び Lemma 2.1 を繰り返し使えばよい。

Proposition 2.2. Gaussian 確率場 $\{X(x)\,;\,x\in R^n\}$ のほとんどすべての標本函数が連続であり、その共分散函数 $\rho(x,y)$ が、x, y に関し p 階までの連続な偏導函数をもち、すべての p 階の偏導函数 $\rho'(x,y)$ をおくと

$$|\rho'(x,x) - 2\rho'(x,y) + \rho'(y,y)| < |\log|x-y||^{\alpha} \qquad \alpha > 2$$

$|k| = |l| = p$ を充すならば、$\{X(x),\,x\in R^n\}$ のほとんどすべての標本函数は、p 階までの連続な偏導函数をもつ、又、

$$|\rho'(x,x) - 2\rho'(x,y) + \rho'(y,y)| \leq C|x-y|^{\alpha} \qquad \alpha > 0$$

ならば

$$X(x,\omega) \in C^{(p,\beta)} \qquad 0 < {}^{\forall}\beta < \tfrac{1}{2}\alpha$$

(証明) 定理 2.2. Proposition 2.1 から明らか。

注意 3.

2 章 §4 で扱うように、$\{X(x)\,;\,x\in R^n\}$ は 他の確率場から、標本函数ごとの変換で決っていて、その「標本函数ごと」ということに意味のある場合には、version をとることは 面白くないため このような Lemma が必要となる。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

第2章　Lévyの多次元 径数 の Brown運動

§3.　定義と基本的性質

Lévyは [34] [35] [36] において、多次元パラメターのBrown運動を定義し、その詳細な性質を調べた。多次元パラメターのBrown運動の研究は、確率場の研究の典型を与える。

1° 定義

ここでは Lévy の定義そのままでなく、Yaglom [54] の局所 homogeneous and isotropic な確率場との関連もあり、多少変形して与える。

この Seminar Note を通して R_0^n で n次元ユークリッド空間を、R^n で n次元 アファイン空間を表わすものとする。又 R_0^n を通常のベクトル空間とみなし、その内積、ノルムは $x=(x^{(1)}\cdots,x^{(n)})$, $y=(y^{(1)}\cdots,y^{(n)})\in R_0^n$ に対し $xy=\sum_{i=1}^n x^{(i)}y^{(i)}$, $|x|=\sqrt{xx}$ で表わす。又 $x, y, z\in R^n$ に対し $(x-z)(y-z)$ $|x-y|$ 等は zを原点としたユークリッド空間とみての内積、ノルム、を考えることにより定義する。

定義 3.1. R^nを 径数空間にもつ確率変数の系 $\{B(x);x\in R^n\}$ が n次元径数の Brown 運動とは $\{B(x);x\in R^n\}$ は実 Gaussian 局所確率場であって

$$(3.1)\qquad E|B(x)-B(y)|^2=|x-y| \qquad x, y\in R^n$$

$$(3.2)\qquad E(B(x)-B(y))=0$$

を充すときに言う。

定義 3.1′　もし $B_0(x)$ が R_0^n を径数空間にもつ Gaussian system で

$$(3.1)'\qquad EB_0(x)B_0(y)=\frac{|x|+|y|-|x-y|}{2} \qquad x, y\in R_0^n$$

$$(3.2)'\qquad EB_0(x)=0$$

を充すときには Lévy の定義した n次元径数の Brown 運動である。

上の二つの定義は次の意味で同値である。即ち (3.1) を充す $\{B(x);x\in R^n\}$ が与えられたとする。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$O \in R^n$ を一点決めれば、R^n は R_0^n とみなされるから $x \in R_0^n$ に対し $B_0(x) \equiv B(x+O) - B(O)$ とおく．

$$E\,B_0(x)B_0(y) = \frac{1}{2}\{E(B_0(x)-B_0(y))^2-(B_0(x))^2-(B_0(y))^2\}$$
$$= \frac{1}{2}\{E|B(x)-B(y)|^2-E|B(x)-B(O)|^2-E|B(y)-B(O)|^2$$
$$= -\frac{1}{2}\{|x-y|-|x|-|y|\}.$$

逆に (1.1)′ を充す B_0 が与えられれば $O \in R^n$ を固定して $x \in R^n$ に対し $B(x) \equiv B_0(x-O)$ とおくことにより

$$E|B(x)-B(y)|^2 = E|B_0(x-O)-B_0(y-O)|^2$$
$$= E|B(x-O)|^2+E|B(y-O)|^2-2EB(x-O)B(y-O)$$
$$= |x-O|+|y-O|+|x-y|-|x-O|-|y-O|$$
$$= |x-y|$$

しかし、この定義の well-defined なこと 即ちこのような Gaussian system の存在は次の Proposition による。

Proposition 3.1 $\quad \rho_0(x,y) = \dfrac{|x|+|y|-|x-y|}{2}$ は

(B.3) $\quad \rho_0(x,y) = 2^{-1}\pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})\displaystyle\int_{R_0^n}\frac{(e^{i\lambda x}-1)(e^{-i\lambda y}-1)}{|\lambda|^{n+1}}d\lambda$

とあらわされ正定符号の２変数函数である。即ち 任意の実数 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$, 任意の $x_1,\cdots x_n \in R_0^n$ に対し

$$\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\bar{\alpha}_j\,r(x_i,x_j) \geq 0$$

従って、定義 1.1, 1.1′ の Gaussian system は存在する。

（証明） θ を λ と x のなす角度とすると $\lambda x = |\lambda||x|\cos\theta$ であるから

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{R_0^n}\frac{|e^{i\lambda x}-1|^2}{|\lambda|^{n+1}}d\lambda = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\,\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{4\sin^2(\frac{r|x|\cos\theta}{2})}{r^2}dr\,\sin^{n-2}\theta\,d\theta$$
$$= \frac{n-1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 r}{r^2}dr\cdot|x||\cos\theta|\sin^{n-2}\theta\,d\theta$$
$$= (n-1)|x|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\sin^{n-2}\theta\,d\theta = |x|$$

これから

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$P_0(x,y)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int\int\frac{(e^{i\lambda x}-1)(e^{i\lambda y}-1)}{|\lambda|^{n+1}}\,d\lambda$$

よって

$$\sum_{j,k}^{n} \alpha_j\alpha_k\cdot r(x_j\,x_k)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int\frac{\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(e^{ix_j\lambda}-1)\right|^2}{|\lambda|^{n+1}}\,d\lambda\geq 0$$

定義3.1によって与えられる n 次元の Brown 運動の局所 homogeneous isotropic であることは定義から明らかであるが、Proposition 3.1 により Proposition 1.5′と比較して homogeneous なことがわかる。

更に 第3章 § 、Proposition によれば isotropic なことも知られる。勿論 定義にもどって考えても明らか。

2° 基本的性質(1)

第1章§2. 定理2.1により可分な多次元径数の Brown 運動のほとんどすべての標本函数は Hölder連続性($\beta(<\frac{1}{2})$ の位数の)をもっている。従って n変数の連続函数の空間に n次元径数の Brown 運動の測度を構成できる。我々は今後、n次元径数の Brown というというときは 標本函数の連続性(従って勿論可分性も)を仮定する。ここに与えた Lévy の Brown 運動は通常の一径数の Brown 運動と類似の性質をもっていて、一径数の場合の拡張と呼ぶにふさわしい。それをいくつか指摘しよう。

(その1) 直線への制限

R^n の任意の直線 ℓ を固定し、ℓ 上の点 O をも 固定しよう。ℓ に方向を定め Oから、符号をつけたℓ上の距離を考え、x_t を O から ℓ にそって距離 t の 点とする。 $X_t(\omega)\equiv B(x_t,\omega)-B(O,\omega)$ とおけば、$X_t(\omega)$ は一径数の Brown 運動である。

∵) $\{X_t(\omega);\ -\infty<t<\infty\}$ の path は連続、平均 0 の Gaussian 過程であり

$$E[X_t(\omega)X_s(\omega)]=\frac{|x_t-O|+|x_s-O|-|x_t-x_s|}{2}$$

$$=\frac{|t|+|s|-|t-s|}{2}=\begin{cases}0 & t\cdot s\leq 0\\ |t|\wedge|s| & ts>0\end{cases}$$

逆に $X_t(\omega)$ が Brown運動ならば 任意の $x,y\in R^n$ に対し、x,yを通る直線 ℓ を考え、x を原点とすれば、ℓ 上で Brown 運動であるから

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$E|X(x) - X(y)|^2 = |x-y|$ により明らか。

(その2) 射影不変性

簡単のため 定義1.1′により R_0^n を径数空間にもち 原点では $B_0(0) = 0$ とする。

$$X(x) \equiv |x| \, B_0\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \qquad x \neq 0$$

$$X(0) \equiv 0 \qquad x = 0$$

とおけば $X(x)$ は定義1.1′の R_0^n 上の Brown 運動である。何故ならば $\{X(x) \; ; \; x \in R_0^n\}$ が平均零の Gaussian system である。

共分散に関しては、x と y のなす角度を θ とすると

$$E\,X(x)X(y) = \frac{|x||y|}{2}\left\{\frac{|x|}{|x|^2} + \frac{|y|}{|y|^2} - \left|\frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2}\right|\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{|x|+|y| - |x||y|\sqrt{\frac{1}{|x|^2} - 2\frac{\cos\theta}{|x||y|} + \frac{1}{|y|^2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{|x|+|y| - \sqrt{|x|^2 - 2|x||y|\cos\theta + |y|^2}\right\}$$

$$= \frac{|x|+|y| - |x-y|}{2}$$

3° 基本的性質 (2)

(その3) 連続性

先に注意したように 多次元径数の Brown 運動の標本函数は連続である。もっと詳しい連続性に関しては、一径数の Brown 運動と類似の結果が、T. Sirao [49] により得られている。

それを 紹介しよう。

局所連続性と一様連続性に対する 上級函数と下級函数を定義する。

$\varphi(t)$ を十分大きい t に対して定義された非負、非減少函数であるとし

(i) $\{x : B(x, \omega) > |x|^{\frac{1}{2}} \varphi(|x|)\}$ が ほとんどすべての ω に対して 有界集合であるとき $\varphi(t)$ は ∞ において上級函数であるといい、その class を $\mathfrak{U}_n^\infty$ と記す。

同じ上の集合が ほとんどすべての ω に対して非有界、∞において下級

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

函数であるといい、その class を $\mathcal{L}_n^\infty$ で記す．

(ii) $\{x : B(x,\omega) > |x|^{\frac{1}{2}} \varphi(\frac{1}{|x|})\}$ が、ほとんどすべての ω に対し 原点から分離されているとき（開集合で）$\varphi(t)$ は 0 において、上級函数であるといい、その class を $\mathcal{U}_n^0$ と記し 閉包が原点を含むとき 0 において下級函数といい、$\mathcal{L}_n^0 = \mathcal{L}_n^\infty$ でその class を表わす．

注） 射影不変性から $\mathcal{U}_n^0 = \mathcal{U}_n^\infty$, $\mathcal{L}_n^0 = \mathcal{L}_n^\infty$ である．

次に $\varphi(t)$ を 区間 $(0,T)$ 上の非負、連続性、非減少函数 $f(x)$ を R^n 上の 函数とするとき、$\exists \delta > 0$. $|x-y| \leq \varepsilon$ ならば $|f(x) - f(y)| \leq \varphi(|x-y|)$ を充すとき f は φ に関し Lipshitz 条件を充すという。

$$D = \{x ; \max_{i=1\cdots n} |x^i| \leq 1\}$$

もし $\psi(t) = \varphi(1/t)\, t^{\frac{1}{2}}$ とおくとき、ほとんどすべての $B(x,\omega)$ が $x \in D$ において $\psi(t)$ に関し Lipschitz 条件を充すとき $\varphi(t)$ は 一様連続に関し 上級函数であるという。その class を $\mathcal{U}^n$ と記し ほとんどすべての ω に対し Lipschitz 条件を充さないとき 下級函数といい、その class を $\mathcal{L}^u$ を記す．

定理 3.1. $\varphi(t)$ を非負連続、非減少函数とするとき

(3.5) $$\int^\infty t^{n-1} \varphi^{4n-1}(t)\, e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}\, dt$$

が 収束すれば $\varphi \in \mathcal{U}^u$. 発散すれば $\varphi \in \mathcal{L}^u$。

系．1

$$\varphi(t) = \{2n \log t + (4n+1)\log_{(2)} t + 2\log_{(3)} + \cdots + 2\log_{(n-1)} t + (2+\delta)\log_{(n)} t\}^{\frac{1}{2}}$$

は $\delta > 0 \Rightarrow \varphi \in \mathcal{U}^u$

$\delta < 0 \Rightarrow \varphi \in \mathcal{L}^u$

系．2.

$\varphi_\infty(t) = \{2n\log^+ t + (n+1)\log^+_{(2)} t + 2\sum_{n=3}^{\infty} \log^+_{(n)} t\}^{\frac{1}{2}}$ は $\varphi_\infty(t) \in \mathcal{L}^u$.

定理 3.2. $\varphi(t)$ を 非負連続、非減少函数とするとき

(3.6) $$\int^\infty \frac{1}{t}\, \psi^{2n-1}(t)\, e^{-\frac{1}{2}\psi^2(t)}\, dt$$

の収束、発散に従って $\psi(t)$ は $\mathcal{U}_n^0(\mathcal{U}_n^\infty)$ 又は $\mathcal{L}_n^0(\mathcal{L}_n^\infty)$ に属す。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

系 1.

$$\psi(t)=\{2\log_{(2)}t+(2n+1)\log_{(3)}t+2\log_{(4)}t+ \cdots + 2\log_{(n-1)}t+(2+\delta)\log_{(n)}t\}^{1/2}$$

は $\delta>0 \Rightarrow \psi\in\mathcal{U}_n^0$ (或は $\mathcal{U}_n^\infty$)
$\delta<0 \Rightarrow \psi\in\mathcal{L}_n^0$ (或は $\mathcal{L}_n^\infty$)

系 2

$$\psi_\infty(t)=\{2\overset{+}{\log}_{(2)}t+(2n+1)\overset{+}{\log}_{(3)}t+2\sum_{n=4}^{\infty}\overset{+}{\log}_{(n)}t\}^{1/2}$$

は $\mathcal{L}_n^0$ (或は $\mathcal{L}_n^\infty$) に属す.

4° 基本的性質(3)

(その4) White noise

多次元径数の場合, 真の White noise と呼ぶべきものを知らないが, 時間径数のときの Wiener 過程と White noise の間の次の関係が White noise のもっとも重要な性質と考えられる それをあげて見ると

(i) Gaussian random measure であること
(ii) 比較的 local な積分で Brown 運動が表現できること.
(iii) local 作用素で Brown 運動から取り出せること
(iv) 法則が運動に関して不変

の四点があげられる. このすべてを充すものは知らないが, いくつかを充すものはある。重要とおもわれるものは N. N. Chentsov [9] によって 与えられた。

R_0^n の $n-1$ 次元超平面全体に対し, 運動に関し不変な測度 dE_n が存在する。(記号に関しては 付録参照, 証明は M. Kurita [33])
超平面の座標として, 原点からの距離 t と, その足の方向をとるとき, $d\sigma$ を球面上の面積要素とすれば $dt\wedge d\sigma=dE_n$ である。$W_c(\Lambda)$ を超平面の集合に対する Gaussian random measure で $E\{W_c(\Lambda)\}=0$
$E|W_c(dt.d\sigma)|^2=\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\,dt\wedge d\sigma$ を充すものとしよう。

Proposition 3.2. $\int_c dW_c \doteqdot W_c$ (曲線 C と交わる超平面) と定義すれば

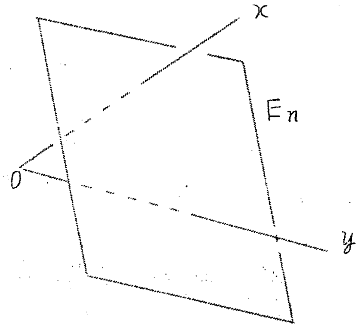
(3.7) $\qquad B_0(x)=\int_{\overline{0x}} dW_c$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

は Lévy の Brown 運動である.

(証明) $E\,B_0(x)\,B_0(y) = E[\int_{\overline{0x}} dW_c \cdot \int_{\overline{0y}} dW_c] = \int_{\overline{0x} \wedge \overline{0y}} dE_n$

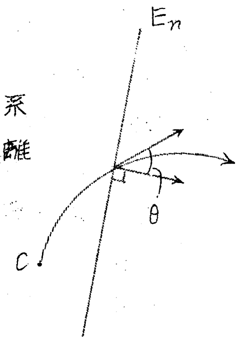
これは三角形 0. x. y に交わり $\overline{x.y}$ と交わらない超平面全体の測度であるがそれに関して 次の Lemma が成立する。



Lemma 3.1.

C を R^n の長さ L の曲線とするとき m を C と超曲面の交点の数として、

(3.8) $$\int_C m\,dE_n = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} L .$$



(証明) C上の点 x に対し x の近傍での局所座標系として $(x^1, x^2, ---, x^n)$, $x^n = s$ を C にそっての距離 $x^1, ---, x^{n-1}$ は $\frac{\partial}{\partial x^j}$ $j=1,---,n$ が正規直交系になるようにとる。

$$\int_C m\,dE_n = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \int_{S_{n-1}} \omega_n \wedge \omega_{1n} \wedge --- \wedge \omega_{n-1n}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L ds \int_{S_{n-1}} |\cos\theta|\, d\sigma = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} L$$

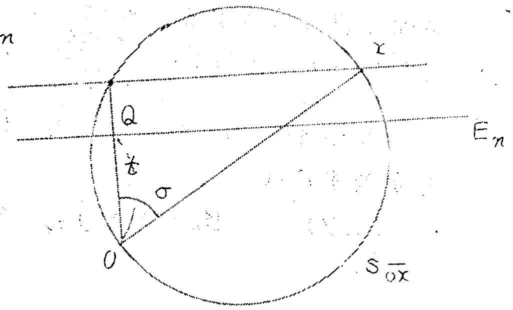
(証明終)

三角形△(0. x. y)と 超平面の交わる回数は 2. $\overline{xy}$ と超平面の交わる回数 1 であるから

$$E\,B(x)\,B(y) = \frac{1}{2} \int_{\overline{0x} \vee \overline{0y} \vee \overline{xy}} 2\,dE_{n-1} - \int_{\overline{xy}} dE_n$$

$$= \frac{1}{2}[|x|+|y|+|x-y|] - |x-y| = \frac{|x|+|y|-|x-y|}{2}$$

これを 先にあげた $(t.\sigma) = E_n$ と $(p.\sigma)$ を極座標にもつ R_0^n の点と 1対1 onto の対応がつく (即ち、超平面 E_n とその足 Q は1対1) そのとき $\overline{0x}$ を通る超曲面は、$\overline{0x}$ を直径にもつ球にうつる.



Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

Proposition 3.3. W_M を R_0^n 上の Gaussian random measure で平均 0,

$$E\,|W_M(dx)|^2 = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\,dr\,d\sigma \qquad |r| = x$$

を充すものとすると、$S_{\overline{ox}}$ を $\overline{ox}$ を直径とする球として

$$(3.9) \qquad B(x) \equiv \int_{S_{\overline{ox}}} dW_M(x)$$

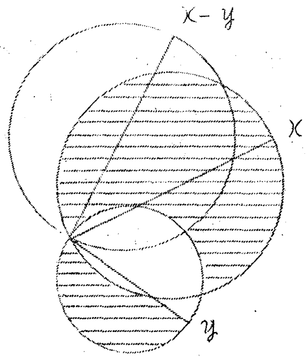
とおけば $B(x)$ は Lévy の Brown 運動である。

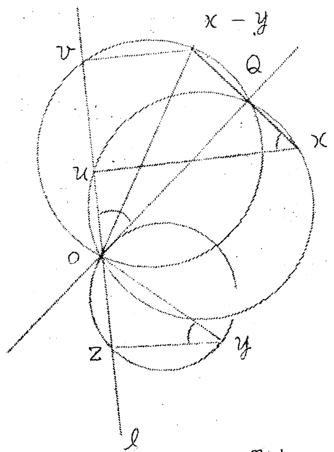
（別証明）

$$E\,|B(x)|^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int_{S_{ox}} dr\,d\sigma$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int d\sigma\int_0 \cos\theta\,dr = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}|x|\int_{0<\theta<\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\sigma = |x|$$

$$= (n+1)\,|x|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\sin^{n-2}\theta\,d\theta = |x|$$





$$E\,|B(x) - B(y)|^2 = 2\text{ 図の斜線の部分の体積（測度は上の }\frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\,dr\,d\sigma\text{）}$$

$= $ 図の $\overline{0,x,y}$ を直径とする球の体積

$= |x - y|$

2度目の等号の証明は　図において原点を通る任意の l に対し、$\overline{OZ} = \overline{vu}$ なることが初等幾何を使って証明され、測度の取方から明らか。

$\because)$ $\overline{x-y,\,x} = \overline{Oy}$ 　 $\angle(x-y)xu = \angle uOQ = \angle OyZ$

が $QO \perp Oy$ からわかるから明らか。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

W_C, W_Mによる表現は i) ii) iv) をみたしている。ただ問題なのは iii) である。今一つ別種の random measure W_U とその Fourier 変換 $\widetilde{W}_U$ を考える。

$W_U(\Lambda)$は 平均 0 の Gaussian random measure で

$$E\{W_U(\Lambda)W_U(\Lambda')\} = \text{Lebesgue measure of } \Lambda\cap\Lambda'$$

を充すもの $\widetilde{W}_U(\Lambda)$ はその Fourier 変換（3章参照）とする。

Proposition 3.4. $h(x,z) \equiv (-i)^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{\Gamma(\frac{n+1}{2})2^{n-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}}\left(\widetilde{\frac{e^{-i\lambda x}-1}{|\lambda|^{\frac{n+1}{2}}}}\right)$ とおけば

(3.10) $$B(x)-B(y)=\int h(x,z)\,dW_U(z)$$

(3.11) $$=(-i)^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{\Gamma(\tfrac{n+1}{2})2^{n-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int\frac{e^{-i\lambda x}-e^{-i\lambda y}}{|\lambda|^{\frac{n+1}{2}}}\,d\widetilde{W}_U(\lambda)$$

（証明） （3.11）は（3.3）式と Kari-Karhuner [27] の random measure による表現の一般論から明らか。（3.10）は（3.11）式を Fourier 変換して得られる。 （証明終）

W_U, $\widetilde{W}_U$ の特徴は i) ii) を充すことの他に Fourier 変換によって、同じ Lebesgue 測度に対する random measure にうつるという意味で、Fourier 変換に対する不変性があることと、$n=4q-1$ 次元のときには

(3.12) $$\Delta^{q}B(x)=-\sqrt{\Gamma(\tfrac{n+1}{2})2^{n-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}}\;W_U(x)$$

と局所作用素で Brown 運動から取り出せることにある。

W_C, W_M, W_U はいずれも $n=1$ 次元のときには i) ii) iii) iv) を共に満足しているが，$n\geq 2$ のときは夫々異なった特性をもっているので、目的に応じて適宜、使いわける。しかしこれ等は互に無関係ではなく 次に述べる如く互に密接な関係にある。

6° White noise と Radon 変換

R_0^n の $n-1$ 次元超平面全体に対する座標として、原点から超平面へおろした垂線の足の長さ t、その逆の方向の単位ベクトル ξ とし、(ξ, t); $|\xi|=1$ $0\leq t<\infty$ をとる。更に方向づけられた $n-1$ 次元超平面の座標として、ξをその超平面の正の単位法線ベクトル，t を原点からおろした垂線の足の長さに、ξ方向を正として符号をつけたものとし

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

て (ξ, t) ; $|\xi| = 1$ $-\infty < t <$ を採用する。前者は後者の $0 \leq t < \infty$ への制限と考えられる。更に、ξを超平面の 任意の正の法線ベクトルとして、それが $\{x ; \xi x = t\}$ で表わされるとき (ξ, t) でその超平面をあらわす。R^n_0 の急減少な C^∞ー函数 $\mathcal{S}$ に対し、Radon変換を考えよう。（詳細は付録及び、Gelfand - Graev - Vilenkin [18] 参照） それは φ $\mathcal{S}$ に対し

$$(3.13) \quad \check{\varphi}(\xi, t) = \int_{\xi \cdot x = t} \varphi(x) \sum_{i=1} \frac{(-1)^{i-1}}{\xi^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

$$= \int \varphi(x) \delta(\xi x - t) dx$$

で定義される。（記号に関しては Gelfand - shilov. [15] 参照）
$n = 2p-1$ 次元のときのみを考えよう。 ⇒ $\hat{\varphi}(t, \xi) = \frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} \check{\varphi}(t, \xi)$ とおく。$\check{\varphi}(\xi, t)$、$\hat{\varphi}(\xi, t)$ は、$a \neq 0$ に対し

$$(3.14) \quad \check{\varphi}(a\xi, at) = |a|^{-1} \check{\varphi}(\xi, t),$$

$$(3.14)' \quad \hat{\varphi}(a\xi, at) = \operatorname{sign} a \cdot |a|^{-p} \hat{\varphi}(\xi, t)$$

なる性質をもっているから、夫々 $|\xi| = 1$ $0 \leq t < \infty$ で与えられれば

$$(3.15) \quad \check{\varphi}(\xi, t) = |\xi|^{-1} \check{\varphi}(\operatorname{sign} t\, |\xi|^{-1} \xi, \ |t|\, |\xi|^{-1})$$

$$(3.15)' \quad \hat{\varphi}(\xi, t) = \operatorname{sign} t\, |\xi|^{-p} \hat{\varphi}(\operatorname{sign} t\, |\xi|^{-1} \xi, \ |t|\, |\xi|^{-1})$$

でもって $\xi \neq 0$ に拡張できる。従って $\check{\varphi}$, $\hat{\varphi}$ は $n-1$ 次元超平面全体を変域にもつ 函数と考えてよい。そのとき

$$(3.16) \quad \int \varphi(x) \psi(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{|\xi|=1} \int_0^\infty \hat{\varphi}(\xi, t) \hat{\psi}(\xi, t)\, dt\, d\sigma(\xi)$$

なる Planchel type の等式が成立する。又 $\hat{\varphi}$ と Fourier 変換 $\tilde{\varphi}$（Fourier 逆変換 $\tilde{\varphi}$）の間には

$$(3.17) \quad \tilde{\varphi}(\lambda) = i^{p-1} \int_{-\infty}^\infty \hat{\varphi}(\lambda, t) e^{it}\, dt,$$

$$(3.18) \quad \hat{\varphi}(\lambda) = \frac{(-i)^{p-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |s|^{p-1} \operatorname{sign} s\ \tilde{\varphi}(s\lambda) e^{-i s t} ds,$$

$$(3.17)' \quad \tilde{\varphi}(\lambda) = \frac{(-i)^{p-1}}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^\infty \hat{\varphi}(\lambda, t) e^{-it} dt$$

$$(3.18)' \quad \hat{\varphi}(\xi, t) = i^{p-1} (2\pi)^{n-1} \int_{-\infty}^\infty |s|^{p-1} \operatorname{sign} s\ \tilde{\varphi}(s\xi) e^{ist} ds$$

なる関係が成立する。従って $\hat{\mathcal{S}} = \{\hat{\varphi}, \varphi \in \mathcal{S}\}$ に内積 $(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$ を

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

(3.16)式の右辺で定義すると

$$\varphi \longleftrightarrow \hat{\varphi} \longleftrightarrow \tilde{\varphi} \longleftrightarrow \hat{\tilde{\varphi}}$$

は夫々の対応する内積に対し isometric な変換となっている。従って夫夫の内積に対する完備化空間にまで対応が拡張できることに注意しておこう。

$\mathcal{S}$上の超函数 $F \in \mathcal{S}'$ の変形 Radon 変換 $\hat{F} \in \hat{\mathcal{S}}'$ を

$$(\hat{F}, \hat{\varphi}) = (F, \varphi) \qquad \varphi \in \mathcal{S}$$

で定義する。今 Radon measure W_0 から

$$(3.19) \qquad W_0(\varphi) = \int \varphi(x)\, dW_0(x)$$

によって導かれる超確率場 $\{W_0(\varphi) : \varphi \in \mathcal{S}\}$ の変形 Radon 変換 $\{\hat{W}(\hat{\varphi}),\ \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{S}}\}$

$$(3.19)' \qquad \hat{W}_0(\hat{\varphi}) = W_0(\varphi) \qquad \varphi \in \mathcal{S}$$

を考えてみよう。これは Gaussian system であり $E\hat{W}(\hat{\varphi}) = EW(\varphi) = 0$

$$E(\hat{W}_0(\hat{\varphi})\cdot\hat{W}_0(\hat{\psi})) = E(W_0(\varphi)W(\psi)) = \int \varphi(x)\psi(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{|\xi|=1}\int_0^\infty \hat{\varphi}(\xi,t)\hat{\psi}(\xi,t)\,dt\,d\sigma(\xi)$$

であるから、各々の特性汎函数 $C_{W_0}(\varphi)$ $C_{\hat{W}_0}(\hat{\varphi})$ は

$$C_{W_0}(\varphi) = \exp\{-\tfrac{1}{2}\int|\varphi(x)|^2dx\} \quad C_{\hat{W}_0}(\hat{\varphi}) = \exp\left\{\frac{-1}{2(2\pi)^{n-1}}\iint|\hat{\varphi}(\xi,t)|^2dt\,d\sigma(\xi)\right\}$$

である。一方、W_M（或は W_C）に対しても

$$(3.19)'' \qquad W_M(\hat{\varphi}) \equiv \int \hat{\varphi}(\xi,t)\,W_M(dt \wedge d\sigma(\xi))$$

によって定義される超確率場 $\{W_M(\hat{\varphi}) : \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{S}}\}$ を考えれば

$$EW_M(\hat{\varphi}) = 0. \quad EW_M(\hat{\varphi})W_M(\hat{\psi}) = \frac{2\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int_{|\xi|=1}\int_0^\infty \hat{\varphi}(\xi,t)\hat{\psi}(\xi,t)\,dt \wedge d\sigma(\xi)$$

を得て、$$C_{W_M}(\hat{\varphi}) = \exp\left\{-\frac{2\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int_{|\xi|=1}\int_0^\infty|\hat{\varphi}(\xi,t)|^2dt \wedge d\sigma(\xi)\right\}$$

である。これと $C_{\hat{W}_0}(\hat{\varphi})$ を比較して、$\{\sqrt{\Gamma(\frac{n+1}{2})2^n\pi^{\frac{n-1}{2}}}\ \hat{W}_0(\hat{\varphi});\ \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{S}}\}$ $\{W_M(\hat{\varphi}) : \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{S}}\}$ の法則は一致することがわかった。しかしもっと強いことがわかる。

W_M によって Lévy の Brown 運動 $B_0(x)$ は

$$B_0(x) = \int \chi_{S_{\overline{0x}}}(\xi,t)\ W_M(dt \wedge d\xi)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

但し　$\chi_{S_{\overline{0x}}}$ は $\overline{0x}$ を直径とする球の定義函数　即ち

$$\chi_{S_{\overline{0x}}}(\xi, t) = \begin{cases} 1 & \xi x \geq t \geq 0 \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

と表現された。(3.15)′, (3.17)′ を使って、$\chi_{S_{\overline{0x}}}(t, \xi)$ の変域を拡張したものを、$\hat{\varphi}(\xi, t)$ とし、$\hat{\varphi}(\xi)$ を計算する。

$$(-i)^{p-1}(2\pi)^n \hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} t\, |\xi|^{-p} \chi_{S_{\overline{0x}}}(\operatorname{sign} t \cdot |\xi|^{-1} \cdot \xi, |t| |\xi|^{-1}) e^{-it} dt$$

$$= |\xi|^{-p} \int_0^{x\xi} e^{-it} dt = \frac{i(e^{-ix\xi} - 1)}{|\xi|^p}$$

を得る。

$$\varphi(z) \equiv \underset{A \to \infty}{l.i.m} \int_{-A}^{A} \hat{\varphi}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

とおけば

$$\begin{aligned} W_M(\hat{\varphi}) &= B_0(x) \\ &= \sqrt{\Gamma\left(\tfrac{n+1}{2}\right) 2^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}}}\ (2\pi)^n \hat{W}_0(\hat{\varphi}) \\ &= \sqrt{\Gamma\left(\tfrac{n+1}{2}\right) 2^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}}}\ W_0(\varphi) \\ &= \sqrt{\Gamma\left(\tfrac{n+1}{2}\right) 2^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}}}\ \hat{W}_0(\hat{\varphi}) \end{aligned}$$

が成立し、法則だけでなく、Proposition 3.3 の表現 (3.9) 式をこめて、W_M が $\hat{W}_0$ の $\sqrt{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) 2^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}}}$ 倍であることがわかった。

§4　内 挿，外 挿

多次元径数の Brown 運動を調べるにあたり、P. Lévy は R^n の $n-1$ 次元球面 S 上で $\{B(z); z \in S\}$ が与えられたとき、S の中心点 x_0 における $B(x_0)$ を内挿するには、S上の単位一様測度で $B(z)$ を積分すればよいことを見出した。この事実は多次元径数の Brown 運動の内挿問題と "調和性" との結びつきを暗示している。又、P. Lévy は半径 t の球面 S_t 上での average により得られる Gauss 過程 —— $M(t)$ 過程 —— を調べることによって、奇数次元径数の Brown 運動に 多重マ

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

ルコフ性が内在していることを示した。この性質は T.Hida [20] により鮮かに解明されているが それは後 § にゆずり、ここでは 内挿，外挿問題 ----- 多重マルコフ性の関連を中心に調べ、特別な場合は具体的に、内、外挿問題の解を与えよう。

1° 内挿、外挿と 多重調和性

多次元径数の Brown 運動を、局所 *homogeneous and isotropic* な確率場とみて、§1の最後に述べた注意に従って問題をたてよう。今 A を R^n の任意の部分集合とするとき、$\mathcal{B}(A;B(x))=\mathcal{B}(A)=$
$=\mathcal{B}\{B(Z_1)-B(Z_2);Z_1,Z_2\in A\}$, $\mathfrak{M}(A;B(\cdot))=\mathfrak{M}(A)=$
$=\mathfrak{M}(B(Z_1)-B(Z_2);Z_1,Z_2\in A)$ により、$\{B(Z_1)-B(Z_2);Z_1,Z_2\in A\}$ の一次結合で張られる *closed linear manifold* を表わすことにしよう。ついでのことに次のような準備をしておく。A_ε で集 A の ε ー近傍をあらわし、$\mathcal{B}_+(A;B(\cdot))=\mathcal{B}_+(A)\equiv\bigcap_{\varepsilon>0}\mathcal{B}(A_\varepsilon;B(\cdot))$,
$\mathfrak{M}_+(A;B(\cdot))=\mathfrak{M}_+(A)\equiv\bigcap_{\varepsilon>0}\mathfrak{M}(A_\varepsilon;B(\cdot))$ を定義する。又、$\bar{A}$ で A の閉包を表わしておこう。

Lemma 4.1.

(i) $\mathcal{B}(A)=\mathcal{B}(\bar{A})$ $\quad\mathfrak{M}(A)=\mathfrak{M}(\bar{A})$

(ii) A が滑かな境界をもつ領域ならば

$$\Longrightarrow\qquad \mathcal{B}_+(A)=\mathcal{B}(A)\ ,\quad \mathfrak{M}_+(A)=\mathfrak{M}(A)$$

（証明）

(i) 殆んどすべての ω に対し、$B(x,\omega)$ が 連続函数であるから、A 上で $B(x,\omega)$ の値がわかれば、$\bar{A}$ 上で $B(x,\omega)$ が定まる。よって、$\mathcal{B}(A)=\mathcal{B}(\bar{A})$, $\mathfrak{M}(A)=\mathfrak{M}(\bar{A})$。

(ii) $\mathfrak{M}(R^n)\ni X$ に対し次のような強連続な *unitary* 作用素群 $\{T_h\}$ を 定義することができる。h を R^n における変位として

$$(4.1)\qquad T_h\,(B(Z_1)-B(Z_2))=B(Z_1-h)-B(Z_2-h)\qquad Z_1,Z_2\in R^n$$

をみたす。それには $B(Z_1)-B(Z_2)$ の一次結合には、(4.1) 式を使って T_h を定義し、その閉包に連続に拡張すれば、$B(x)$ $x\in R^n$ の平均連続性（L^2ー連続）から強連続性は明らか。∂A の 任意の点 Z の十分小さい近傍 G をとれば、∂A が滑らかなことから変位 h と、$\delta>0$ が存在して、$T_{th}(\partial A\cap G)\subset A$ $\quad 0\le t<\delta$. が成立する。任意の $\varepsilon<\frac{\delta}{2}$ に対し、

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$T_{th}\mathfrak{M}((\partial A\cap G)_\varepsilon) = \mathfrak{M}((T_{th}(\partial A\cap G))_\varepsilon) \subset \mathfrak{M}(A)$$

$\varepsilon \le t < \frac{\delta}{2}$ ，が成立する。 $\varepsilon \downarrow 0$ にして、

$$T_{th}\mathfrak{M}_+(\partial A\cap G) \subset \mathfrak{M}(A) \qquad 0<t<\frac{\delta}{2}$$

$\{T_h\}$ の強連続性と、$\mathfrak{M}(A)$ が closed なことから $\mathfrak{M}_+(\partial A\cap G)\subset\mathfrak{M}(A)$ このことから $\mathfrak{M}_+(\partial A)\subset\mathfrak{M}^*(A)$，従って、$\mathfrak{M}_+(A)=\mathfrak{M}_+(\partial A)+\mathfrak{M}(A)\subset\mathfrak{M}(A)$ を得る。

（証明終）

$\{B(z) : z\in A\}$ が与えられたとき、$B(x)$ $x\notin A$ の外挿とは、次の様に考える。今仮に、$\{B_0(x) : x\in R_0^n\}$ を考えているとしてみよう。$B_0(\cdot)$ では $B_0(0)=0$ であるから、原点に対して $B_0(0)$ は与えられていることになっている。即ち、$0\in A$ と解釈しなければならない。$0\in A$ ならば、前頁で定義した σ-集合体に対し $\mathcal{B}(A ; B_0(\cdot)) = \mathcal{B}\{B_0(z) ; z\in A\}$ が成立するから、$B_0(x)$ の外挿 $U_0(x)$ は、$\mathcal{B}(A, B_0(\cdot))$-可測で $E|B_0(x)-U_0(x)|^2$ を最小にする、確率変数として定義される。従って等式

$$U_0(x) = E[B_0(x)|\mathcal{B}(A;B_0(\cdot)] = Proj_{\mathfrak{M}\{A;B_0(\cdot)}B_0(x)$$

が $B_0(x)$ $x\in R_0^n$ が Gaussian 確率場であることにより導かれる。このことを基盤として

定義 4.1. $\{B(z) ; z\in A\}$ が与えられたとき、$B(x)$ $x\notin A$ の外（内）挿とは、$y_0\in A$ を固定して $U(x)-B(y_0)$ が $\mathcal{B}\{A ; B(\cdot)\}$-可測な $U(x)$ で $B(x)-U(x)$ が二乗可積分で、$E|B(x)-U(x)|^2$ を最小にするものをいう。

Proposition 4.1. $\{B(z) ; z\in A\}$ が与えられたとき $B(x)$, $x\notin A$ の外挿 $U(x)$ は、$y_0\in A$ を固定し

(4.2) $$U(x) = E[B(x)-B(y_0)|\mathcal{B}(A;B(\cdot))] + B(y_0)$$

(4.3) $$U(x) = Proj_{\mathfrak{M}[A;B(\cdot)]}(B(x)-B(y_0)) + B(y_0)$$

で与えられる，$y_0\in A$ の取り方には依存しない。

（証明） $y_0\in A$ を固定して、$U(x)-B(y_0)$ を考えれば $U(x)-B(y_0)$ は $\mathcal{B}(A ; B(\cdot))$-可測であり、$(B(x)-B(y_0))-(U(x)-B(y_0))$ の二乗の平均を最小にするから

$$U(x)-B(y_0) = E[B(x)-B(y_0)|\mathcal{B}(A ; B(\cdot))]$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$y_1 \in A$ をとると

$$E[B(x)-B(y_1) \mid \mathcal{B}(A; B(\cdot))] + B(y_1) - U(x)$$
$$= E[B(x)-B(y_1)-(B(x)-B(y_0)) \mid \mathcal{B}(A)] + B(y_1) - B(y_0)$$
$$= -E[B(y_1)-B(y_0) \mid \mathcal{B}(A)] + B(y_1) - B(y_0) = 0$$

が成立するから、y_0 の取り方によらぬ。(4.2) 式が証明されたから、Gaussian system の性質から (4.3) は明らか。　(証明終)

注意． Lemma 4.1. $\mathfrak{M}(A) = \mathfrak{M}(\bar{A})$, $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(\bar{A})$ によって、A は閉集合のときのみ考えればよい。以後多くの場合 D を開集合として、$\{B(z) ; z \in D^c\}$ が与えられたときの $B(x)$ $x \in D$ の内挿 (interpolation) を $U_D(x)$ で表わす。

Proposition 4.2. Dを開集合，$\{B(z) ; z \in D^c\}$ が与えられたときの $B(x)$ $x \in D$ の内挿 $U_D(x)$ は，

(i) 適当な version を取れば、R^n で連続．（但し $U_D(x) \equiv B(x)$ $x \notin D$ と定義する.）D で C^∞－函数である。

(ii) $n = 2p-1$ 次元ならば，D で p 重調和函数、即ち

(4.4)
$$\Delta^p U_D(x) = 0 \qquad x \in D \qquad a.e.\ \omega.$$

(証明)　まず $n = 2p-1$ 次元のときに示す。

$$E|U_D(x) - U_D(y)|^2 = E|E[B(x)-B(y) \mid \mathcal{B}(D^c)]|^2$$
$$\leq E|B(x) - B(y)|^2 = |x - y|$$

従って 第1章・§1. Proposition 1.2. により可分，可測な version が存在する。§2、定理2.1. により $U_D(x)$ の可分な version は、ほとんどすべての ω に対して，標本函数は $C^{(\alpha)}(R^n)$ $(0<\alpha<\frac{1}{2})$ に属す。簡単のため $U_D(x)$ 自身そのような version をとったものとしよう。

$\varphi \in \mathcal{D}$, に対し、$B(\varphi) \equiv \int B(x)\varphi(x)\,dx$, $U_D(\varphi) \equiv \int U_D(x)\varphi(x)\,dx$ とおいて，局所超確率場 を考える。

(4.5)
$$E[B(\varphi) \mid \mathcal{B}(D^c)] = E\{\int B(x)\varphi(x)\,dx \mid \mathcal{B}(D^c)\}$$
$$= E\{\int (B(x)-B(z_0))\varphi(x)\,dx \mid \mathcal{B}(D^c)\} \qquad z_0 \in D^c$$
$$= \int E\{(B(x)-B(z_0)) \mid \mathcal{B}(D^c)\}\varphi(x)\,dx \qquad a.e.\ \omega$$
$$= \int U_D(x)\varphi(x)\,dx \qquad a.e.\ \omega$$
$$= U_D(\varphi)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

が成立する。$A=\{z_0, z_1, z_2 \cdots\}$ を D^c における稠密な可算集合とする。$A_n=\{z_0, z_1, \cdots, z_n\}$ とおけば

$$\mathcal{B}(A_n) \uparrow \mathcal{B}(A)=\mathcal{B}(\bar{A})=\mathcal{B}(D^c)$$

だから

$$(4.6) \qquad \begin{aligned} U_D(\varphi) &= E\{B(\varphi) \mid \mathcal{B}(D^c)\} \\ &= \lim_{n\to\infty} E\{B(\varphi) \mid \mathcal{B}(A_n)\} && a.e. \\ &= \lim_{n\to\infty} \int E\{B(x)-B(z_0) \mid \mathcal{B}(A_n)\}\, \varphi(x)\, dx && a.e. \end{aligned}$$

ところが、一方、Gaussian system であることから

$$(4.7) \qquad E\{B(x)-B(z_0) \mid \mathcal{B}(A_n)\} = \sum_{j=1}^{n} C_j^n(x)\,(B(z_j)-B(z_0)) \qquad a.e.$$

であり、$C_j^n(x)$ は連立方程式.

$$E\Big(B(x)-B(z_0)-\sum_{j=1}^{n} C_j^n(x)(B(z_j)-B(z_0))\Big)(B(z_k)-B(z_0))=0$$

$$|x-z_0|+|z_k-z_0|-|x-z_k| = \sum_{j=1}^{n} C_j^n(x)\,(|z_j-z_0|+|z_k-z_0|-|z_j-z_k|)$$

$$k=1,2,\cdots, n.$$

の解であるが. 2章 §3. Proposition 3.1. により $a_{jk}=$
$=|z_j-z_0|+|z_k-z_0|-|z_j-z_k|$.（$a_{jk}$）は正値エルミート行列であるから（$a_{jk}$）の逆行列（$a^{jk}$）によって

$$C_j^n(x)=\sum_{k=j}^{n} a^{jk}\,(|x-z_0|+|z_k-z_0|-|x-z_k|)$$

で与えられる。勿論 $C_j^n(x)$ は連続であり $x \notin A_n$ で C^∞－函数である。

$n=2p-1$ 次元ならば

$$(4.8) \qquad \begin{aligned} \Delta^p C_j^n(x) &= \sum a^{jk} \Delta^p (|x-z_0|+|z_k-z_0|-|x-z_k|) \\ &= 0 \qquad\qquad x \notin A_n \end{aligned}$$

$$\because \quad \Delta |x|^m = m(m+n-2)\,|x|^{m-2} \qquad x \neq 0$$

$$\Delta^q |x|^m = m(m-2)\cdots(m-2q+2)(m+n-2)\cdots(m+n-2q)\,|x|^{m-2q}$$

特に $m=1$. $q=p$. $n=2p-1$ ならば

$$\begin{aligned} \Delta^p |x| &= 1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdots(3-2p)(2p-2)\cdots(2p-2p)\,|x|^{1-2p} \quad x \neq 0 \\ &= 0 \qquad x \neq 0 \end{aligned}$$

により明らか。今 $\Delta^{p-1}|x| = 1\cdot(-1)\cdots(3-2p)(2p-2)\cdots(2p-2p)\,|x|^{2-n}$
に注目し、Δ の基本解が $|x|^{2-n}$ であることを思い出せば

$$(4.9) \qquad \Delta^p |x| = (-1)^p\, 2^{2p-2}\, \pi^{p-1} (p-1)!\; \delta(x)$$

であることがわかる。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

（4.6）式において、$\varphi=\Delta^p\psi$，$supp\,\psi\subset D$ にとれば（4.7）（4.8）式を使って

$$
\begin{aligned}
U_D(\varphi) &= \lim_{n\to\infty}\int E\{B(x)-B(z_0)\mid \mathcal{B}(A_n)\}\,\varphi(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int\sum_{j=1}^{n}C_j^n(x)\,\varphi(x)\,(B(z_j)-B(z_0))\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j,k}^{n}(B(z_j)-B(z_0))\,a^{jk}\int_D(|x-z_0|+|z_k-z_0|-|x-z_k|)\,\Delta^p\psi(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}(B(z_j)-B(z_0))\,a^{jk}\int_D\Delta^p(|x-z_0|+|z_k-z_0|-|x-z_k|)\,\psi(x)\,dx \\
&= 0 \qquad\qquad a.e.
\end{aligned}
$$

即ち、 $U_D(\Delta^p\psi)=0$ a.e. [47] [59] によれば $U_D(x)$ は D で C^∞－函数であって、 $\Delta^p U_D(x)=0$ $x\in D$. a.e.

n が偶数次元のときは、$D\subset R^n$ を R^{n+1} にうめこみ、それに応じて $\{B(x):x\in R^n\}$ をも又 $\{B(x):x\in R^{n+1}\}$ にうめこむ．そこで $\{B(z);z\in D^c\cap R^n\}$ が与えられたとき、$B(x)$ $x\in(D^c\cap R^n)^c$ の内挿（外挿？）$U(x)$ を考え、それの $D\subset R^n$ への制限 $U_D(x)$ を考えれば、$U(x)$ が C^∞－函数であることから、$U_D(x)$ が C^∞－函数であることがわかる。 （証明終）

Proposition 4.2. により奇数次元の Brown 運動と多重調和性の関係が明示された。それは実は共分散函数、もっと言えば structure 函数 $R(x,y)=E|X(x)-X(y)|^2=|x-y|$ が Δ^p の基本解になっていることに起因する。

内挿誤差 $V_D(x)\equiv B(x)-U_D(x)$ に対し

(4.10) $\qquad g(x,y)\equiv E\,V_D(x)\,V_D(y)$

又、$z_0\in D^c$ を固定し

(4.11) $\qquad h(x,y)\equiv -E(U_D(x)-B(z_0))(U_D(y)-B(z_0))+\dfrac{|x-z_0|+|y-z_0|}{2}$

とおけば、$h(x,y)$ は $z_0\in D^c$ の取り方によらず 次の Proposition が成立する。

Proposition 4.3

(i) $\qquad g(x,y)=g(y,x)=E\,V_D(x)(B(y)-B(z_0)) \qquad \forall z\in D^c$

$\qquad\qquad =E(B(x)-B(z))\,V_D(y) \qquad \forall z\in D^c$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

(ii) $$h(x,y) = h(y,x) = E\,V_D(x)(B(y)-B(z_0)) + \frac{|x-y|}{2}$$
$$= E\,V_D(x)\,V_D(y) + \frac{|x-y|}{2}$$

従って $h(x,y)$ は $z_0 \in D^c$ の取り方によらない。

(iii) $$g(x,y) = h(x,y) - \frac{1}{2}|x-y|$$

（証明） $z \in D^c$ に対し

(i) $$g(x,y) = E\,V_D(x)\,V_D(y) = E\,V_D(x)(B(y)-U_D(y))$$
$$= E\,V_D(x)(B(y)-B(z)+B(z)-U_D(y))$$
$$= E\,V_D(x)(B(y)-B(z))$$

同様に $$g(x,y) = E(B(x)-B(z))\,V_D(y)$$

但し 次の等式を使った $B(z)-U_D(y)$ は $\mathcal{B}(D^c)$ − 可測

$$V_D(x) = B(x) - E\{B(x) \mid \mathcal{B}(D^c)\}$$
$$E\{V_D(x)(B(z)-U_D(y))\} = E\{E\{V_D(x)(B(z)-U_D(y)) \mid \mathcal{B}(D^c)\}\}$$
$$= E\{(B(z)-U_D(y))\,E\{B(x)-E\{B(x)\mid\mathcal{B}(D^c)\} \mid \mathcal{B}(D^c)\}\} = 0$$

(ii) (iii) の証明

$$h(x,y) = -E(U_D(x)-B(z_0))(U_D(y)-B(z_0)) + \frac{|x-z_0|+|y-z_0|-|x-y|}{2} + \frac{|x-y|}{2}$$
$$= -E(U_D(x)-B(z_0))(U_D(y)-B(y)+B(y)-B(z_0))$$
$$\quad - E(B(x)-B(z_0))(B(y)-B(z_0)) + \frac{|x-y|}{2}$$
$$= -E(U_D(x)-B(z_0))(B(y)-B(z_0)) + E(B(x)-B(z_0))(B(y)-B(z_0)) + \frac{|x-y|}{2}$$
$$= E(B(x)-U_D(x))(B(y)-B(z_0)) + \frac{|x-y|}{2}$$
$$= E\,V_D(x)\,V_D(y) + \frac{|x-y|}{2}$$
$$= g(x,y) + \frac{|x-y|}{2}$$

（証明終）

Proposition 4.2. により $\Delta^P U_D(x) = 0 \quad x \in D^c$ であるから

$$\Delta_x^P h(x,y) = -E(\Delta^P U_D(x))(U_D(y)-B(z_0)) + \Delta^P \frac{|x-z_0|+|y-z_0|}{2} = 0$$

又、$z \in \partial D$ に対し $\lim_{x \to z} U_D(x) = B(z)$ であるから

$$\lim_{x\to z} h(x,y) = \lim_{x\to z}\left\{E(B(x)-U_D(x))(B(y)-B(z_0)) + \frac{|x-y|}{2}\right\} = \frac{|z-y|}{2}$$

従って (4.9) 式によって

$$\Delta_x^P g(x,y) = \Delta_x^P h(x,y) - \frac{1}{2}\Delta_x^P |x-y|$$
$$= -\frac{1}{2}(-1)^P 2^{2P-2} \pi^{P-1} (P-1)! \quad \delta(x-y)$$

$$\lim_{x\to z} g(x,z) = \lim_{x\to z}\left(h(x,y) - \frac{|x-y|}{2}\right) = \frac{|z-y|}{2} - \frac{|z-y|}{2} = 0$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

このことは 調和方程式の Dirichlet 問題の Green 函数と類似の性質を $g(x,y)$ が もっていることを意味する。しかし P 重調和方程式の Dirichlet 問題は境界上の値ばかりでなく、境界での $p-1$ 階の偏微分方程式が Dirichlet deta として与えられて 始めて一意に解ける。それに応じて P－重調和方程式の Green 函数には、$\frac{\partial}{\partial n}$ を境界における外法線微分として

$$\frac{\partial^k}{\partial n^k}\, g(z, y) = 0 \qquad k = 0, 1, \cdots, P-1$$

なる 条件が要請される。

その条件は Lévy が提唱した条件 x と境界 ∂D の距離を δ とするとき

$$(4.12)' \qquad B(x) - U_D(x) = o(\delta^{P-1})$$

と関係がある。これを少しかえて

$$(4.12) \qquad E(B(x)-U_D(x))(B(y)-B(z_0)) = o(\delta^{P-1}) \quad {}^{\forall} y \in D \quad z_0 \in D^c$$

が 成立することを仮定してみよう。

(4.12) 式は $g(x,y) = o(\delta^{P-1})$ を意味するから

$$\frac{\partial^k}{\partial n^k}\, g(z, y) = 0 \qquad k = 0, \cdots, P-1 \qquad z \in \partial D$$

を得る。

Proposition 4.4. $n = 2P-1$ 次元 Brown 運動において x と境界の距離を δ とするとき

$$(4.12) \qquad E(B(x)-U_D(x))(B(y)-B(z_0)) = o(\delta^{P-1}) \qquad {}^{\forall} y \in D \quad z_0 \in D^c$$

が成立すれば (4.10) (4.11) により定義される $g(x,y)$ $h(x,y)$ は 次の性質をもつ。

(i) $g(x,y) = g(y,x) \qquad h(x,y) = h(y,x)$

(ii) $\Delta^P h(x,y) = (-1)^{P-1}\, 2^{2P-3}\, \pi^{P-1} (P-1)!\ \delta(x-y)$

$\Delta^P h(x,y) = 0 \qquad\qquad x, y \in D$

(iii) $\frac{\partial^k}{\partial n^k}\, g(z,y) = 0 \qquad z \in \partial D \qquad k = 0, \cdots, P-1$

$\frac{\partial^k}{\partial n^k}\, h(z,y) = \frac{1}{2}\, \frac{\partial^k}{\partial n^k} |z-y| \qquad z \in \partial D \qquad k = 0, \cdots, P-1$

(iv) 内 (外) 挿の平均誤差 $\sigma_D(x) = E|V_D(x)|^2$ は

$$\sigma_D(x) = g(x,x) - h(x,x)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

2° Green函数とPoisson積分

Proposition 4.1〜4.4から 奇数次元径数の Brown 運動の内挿、外挿問題が多重調和函数の Dirichlet 問題であることが、想像される。しかし一般には p 重調和函数の Dirichlet deda は、境界での $p-1$ 次の法線微分が必要であるが、Brown 運動の path が微分不可能のため 完全に定式化するには、困難がともなう。まず 準備として 重調和函数の Green 函数と Green 形式について述べよう。

Dを有界な連結領域で、境界の ∂D は十分滑らかであるとしよう。∂D の近傍での C^∞－函数 $v(x)$ に対し

$$(4.13)\qquad \Delta^p u(x) = 0 \qquad x\in D$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k v(x) \quad x\in\partial D \qquad 0\le |k|\le p-1$$

但し $k=(k_1,\cdots,k_n)$, $|k| = k_1+\cdots+k_n$, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{k_n}$

なる方程式を p－重調和方程式の Dirichlet 問題という。

Proposition 4.2.の証明で述べた如く $n=2p-1$ 次元のとき $|x-y| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x^j-y^j)^2}$ は p－重調和方程式の基本解である。

即ち、$x\neq y$ で C^∞－函数であり、

$$(4.9)\qquad \Delta^p_{(x)}|x-y| = (-1)^p 2^{2p-2}\pi^{p-1}(p-1)!\ \delta(x-y)$$

が成立する。

定義 4.2. $g(x,y)$ が $x\neq y$ $x,y\in D$ で C^∞－函数

$$(4.14)\qquad \Delta^p g(x,y) = (-1)^{p-1}2^{2p-3}\pi^{p-1}(p-1)!\ \delta(x-y)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial n^k} g(z,y) = 0 \qquad z\in\partial D \qquad k=0,\cdots,p-1$$

を充すときに Green函数と呼ぼう。

もし方程式(4.13)において ∂D の近傍で $\frac{1}{2}|x-y|$ に一致する C^∞ 函数 $v_g(x)$ に対する Dirichlet 問題の解が存在すれば それを $h(x,y)$ としたとき

$$(4.15)\qquad g(x,y) = h(x,y) - \frac{1}{2}|x-y|$$

により定義される $g(x,y)$ は Green 函数である。簡単のため $x\in D^c$ or $y\in D^c$ のとき $g(x,y)=0$ と定義しておく。

u_1, u_2 を C^∞－函数として、その双線形な ∂D 上の函数への変換 $[u_1, u_2]$ として

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

(4.16) $\quad [u_1, u_2] \equiv \dfrac{(-1)^p}{2^{2p-3}\pi^{p-1}\Gamma(p)} \sum_{k=0}^{p-1} [\Delta^{p-k-1} u_2 \dfrac{\partial}{\partial n} \Delta^k u_1 - \Delta^{p-k-1} u_1 \dfrac{\partial}{\partial n} \Delta^k u_2]$

を定義すれば 次の Green 形式が成立する。

(4.17) $$\frac{(-1)^p}{2^{2p-3}\pi^{p-1}\Gamma(p)} \int_D (u_2 \Delta^p u_1 - u_1 \Delta^p u_2)\, dx = \int_{\partial D} [u_1, u_2]\, dS.$$

証明は Δ に対する通常の Green 形式をくりかえし適用すればよい。

$$\int_D (\Delta^k u_2 \cdot \Delta^{p-k} u_1 - \Delta^{k+1} u_2 \cdot \Delta^{p-k-1} u_1)\, dx$$

$$= \int_{\partial D} (\Delta^k u_2 \cdot \frac{\partial}{\partial n} \Delta^{p-k-1} u_1 - \frac{\partial}{\partial n} \Delta^k u_2 \cdot \Delta^{p-k-1} u_1)\, dS$$

両辺を $k = 0, \cdots, p-1$ について和をとれば

$$\int_D (u_2 \Delta^p u_1 - u_1 \Delta^p u_2)\, dx = \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{p-1} (\Delta^k u_2 \cdot \frac{\partial}{\partial n} \Delta^k u_1 - \Delta^{p-k-1} u_1 \frac{\partial}{\partial n} \Delta^k u_2)\, dS$$

$$= \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{p-1} [\Delta^{p-k-1} u_2 \cdot \frac{\partial}{\partial n} \Delta^k u_1 - \Delta^{p-k-1} u_1 \cdot \frac{\partial}{\partial n} \Delta^k u_2]\, dS.$$

により明らか.

特に (4.13) の解 u に対し $u_1 = u$. $u_2 = g(x, y)$ とおいて形式的に (4.17) を適用すれば (4.14) の故に

(4.18) $$u(y) = \int_{\partial D} [v, g(\cdot, y)]\, dS$$

が成立する. $g(x, y)$ が境界で $p-1$ 階までの偏微分が 0 であることに注意して、∂D 上で再び Green 形式を適用して、次の Poisson 積分を考えることが出来る。

$z \in \partial D$, $y \in D$ 上の函数, $K_k(z, y)$ $k = 0, \cdots, p-1$ が存在して

(4.19) $$u(y) = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\partial D} \frac{\partial^k}{\partial n^k} u(z)\, K_k(z, y)\, dS_z$$

と表現される。$|x-y|$ に適用して (4.15) 式から

(4.20) $$g(x-y) = -\frac{1}{2}|x-y| + \int_{\partial D} [\frac{|z-x|}{2}, g(z, y)]\, dS_z$$

又 Green 函数の一意性は もし $g_1(z, x)$, $g_2(z, x)$ と (4.4) を充す函数が存在したとして Green 形式を $g_1(z, x)$, $g_2(z, y)$ に適用して

$$0 = \int_{\partial D} [g_1(z, x), g_2(z, y)]\, dS_z$$

$$= \int_D (g_2(z, y)\,\delta(z-x) - g_1(z, x)\,\delta(z-y))\, dz$$

$$= g_2(x, y) - g_1(y, x)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

即ち　$g_2(x, y) = g_1(y, x)$，　特に $g_1 = g_2$　として
$g_1(x, y) = g_1(y, x) = g_2(x, y)$　から明らかである。又

$$(4.21)\qquad g(x, y) = g(y, x)$$

をも得る。(4.20) と (4.21) 式は 形式的な適用だが 通常の調和方程式の場合と同様の手段で正しく証明できるから 証明は省略する。
(4.18) (4.19) に $u \equiv 1$ を適用すれば

$$(4.22)\qquad 1 = \int_{\partial D} [1, g(z, x)]\, dz$$

$$1 = \int_{\partial D} K_0(z, x)\, dz$$

が成立する。

Lemma 4.1.

(i) $\displaystyle\int_D (u_2 \Delta^p u_1 - u_1 \Delta^p u_2)\, dx = (-1)^p 2^{2p-3} \pi^{p-1} P(p) \int_{\partial z} [u_1, u_2]\, dS_z$

(ii) $\Delta^p u(x) = 0 \qquad x \in D$

$$\Rightarrow \quad u(y) = \int_{\partial D} [u(z), g(z, y)]\, dS_z$$

(iii) $\displaystyle g(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} [|z - x|, g(z, y)]\, dS_z - \frac{1}{2} |x - y|$

$$= g(y, x)$$

(iv) $\Delta^p u(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad u(y) = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\partial D} \frac{\partial^k}{\partial n^k} u(z) \cdot K_k(z, y)\, dS_z$$

(v) $\displaystyle\int_{\partial D} u(z) K_k(z, y)\, dS_z = 0 \qquad y \in \partial D \qquad k = 1, 2, \cdots, p-1.$

$\displaystyle\int_{\partial D} u(z) K_k(z, y)\, dS_z = u(y) \qquad y \in \partial D$

(vi) $\displaystyle\int_{\partial D} K_k(z, y)\, dS_z = 0 \qquad y \in D \qquad k = 1, \cdots, n.$

$\displaystyle\int_{\partial D} K_0(z, y)\, dS_z = 1 \qquad y \in D \qquad k = 1, \cdots, n.$

ここで示された Green 函数の存在から 1° で述べた如く 内挿誤差 $V_D(x)$ が、Lévy の条件 (4.12) を充すならば (4.10) 式で与えられる $g(x, y) = E V_D(x) V_D(y)$ はここで言う Green 函数である。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

3° 滑らかな境界をもつ有界連結領域の内挿

多次元径数の Brown 運動の標本函数は、§3、定理3.2. からわかるように 微分不可能であり、L^2-sense においてすら微分出来ないが、Green 形式（4.13）及び Poisson の積分表示（4.14）が適用出来るとして $z_0 \in D^c$ を固定し

$$U(x) \equiv \int_{\partial D} [B(z)-B(z_0),\ g(z,x)]\,dS_z + B(z_0)$$

$$= \int_{\partial D} [B(z),\ g(z,x)]\,dS_z$$

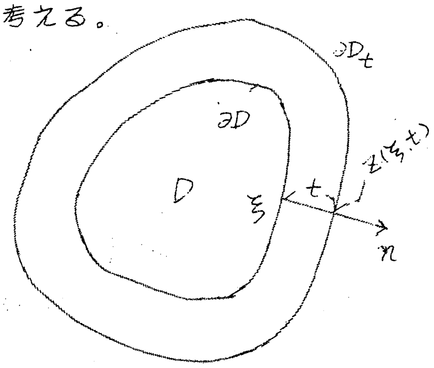
とおけば $U(x)$ が $\mathcal{B}_+(\partial D) \subset \mathcal{B}(D^c)$ 可測なことと、$y_1, y_2 \in D^c$ に対し $\Delta^p|x-y_i| = 0$　$x \in D$　$i=1,2$ に注意して、Lemma 4.1. (ii) により

$$E(B(x)-U(x))(B(y_1)-B(y_2)) = \int_{\partial D} [E(B(x)-B(z))(B(y_1)-B(y_2)),\ g(z,x)]$$

$$= \int_{\partial D} \left[\frac{-|x-y_1|+|z-y_1|+|x-y_2|-|z-y_2|}{2},\ g(z,x)\right] dS_z = 0$$

であるから $U(x)$ は 1° の $U_D(x)$ と一致する。以上の形式的議論を定式化する必要がある。その為 次のように考える。

D を C^∞-級の境界をもつ有界な連結領域、D の境界点 $\xi \in \partial D$ において、∂D の外法線方向へ距離 t の点を $z(\xi, t)$ で表わす。十分小さい t に対して、$\partial D_t = \{z = z(\xi, t);\ \xi \in \partial D\}$ も亦 滑かな $n-1$ 次元の閉曲面となる。



Lemma 4.2. D は C^∞-級の境界をもつ有界領域 $f(\xi)$ を連続函数とする。

(4.23)　$$X(t) \equiv \int_{\partial D} f(\xi)\{B(z(\xi,t)) - B(z_0)\}\,dS_\xi$$

とおけば 絶対値の十分小さい t に関し、$X(t)$ のほとんどすべての path は

(i)　$n = 2p-1$ 次元のとき

$p-1$ 回連続微分可能で、$\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} X(t) \in C^{(\beta)}$　$0 < \beta < \frac{1}{2}$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

(ii) $n=2P$ 次元のとき

$P-1$ 回連続微分可能で、$\dfrac{d^{P-1}}{dt^{P-1}}X(t)\in C^{(\beta)}\quad 0<\beta<1$

（証明）

$$\rho_X(t,S)\equiv EX(t)X(S)$$
$$=\int_{\partial D}\int_{\partial D}f(\xi)f(\eta)\frac{|Z(\xi,t)-Z_0|+|Z(\eta,S)-Z_0|-|Z(\xi,t)-Z(\eta,S)|}{2}dS_\xi dS_\eta$$

$k_1,k_2\geq 1$ に対して

$$-2\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial t^{k_1}\partial S^{k_2}}\rho_X(t,S)=\int_{\partial D}\int_{\partial D}f(\xi)f(\eta)\frac{\partial^{k_1+k_2}|Z(\xi,t)-Z(\eta,t)|}{\partial t^{k_1}\partial S^{k_2}}dS_\xi dS_\eta$$

$$\left|\frac{\partial^{l_1+l_2}|x-y|}{(\partial x)^{l_1}(\partial y)^{l_2}}\right|\leq\frac{const.}{|x-y|^{|l_1+l_2|-1}}\quad l_1=(l_1^{(1)},\cdots,l_n^{(1)})\quad l_2=(l_1^{(2)},\cdots,l_n^{(2)})$$

であり $Z(\xi,t)$ が (ξ,t) に関し十分滑かであることと

$0<\alpha<1$ に対し

$$\frac{|Z(\xi,t_1)-Z(\eta,S)|-|Z(\xi,t_2)-Z(\eta,S)|}{|t_1-t_2|^\alpha}$$
$$=\frac{2|t_1-t_2|^{1-\alpha}\sum_{j=1}^{n}(Z^j(\xi,t_1)-Z(\xi,t_2)\,Z^j(\eta,S)}{(|Z(\xi,t_1)-Z(\eta,S)|+|Z(\xi,t_2)-Z(\eta,S)|t_1-t_2|}$$
$$\leq\frac{const.|t_1-t_2|^{1-\alpha}}{(|t_1-S|+|t_2-S|)^{1-\alpha}|\xi-\eta|^\alpha}$$
$$\leq const.|\xi-\eta|^{-\alpha}$$

が成立するから

$$\rho_Y(t,S)=EY(t)Y(S)=\frac{\partial^{2P-2}}{\partial t^{P-1}\partial S^{P-1}}\rho_X(t,S)$$
$$\left|\frac{\partial^{2P-2}}{\partial t^{P-1}\partial S^{P-1}}\rho_X(t_1,S)-\frac{\partial^{2P-2}}{\partial t^{P-1}\partial S^{P-1}}\rho_X(t_2,S)\right|$$
$$\leq const\;|t_1-t_2|^\alpha\int_{\partial D}\int_{\partial D}f(\xi)f(\eta)\frac{dS_\xi dS_\eta}{|\xi-\eta|^{2P-3+\alpha}}\qquad 2P-3=n-2$$

∂D が $n-1$ 次元の滑かな曲面だから

$$\int_{\partial D}\int_{\partial D}f(\xi)f(\eta)\frac{dS_\xi dS_\eta}{|\xi-\eta|^{2P-3+\alpha}}<\infty$$

$\rho(t,S)\equiv\dfrac{\partial^{2P-2}}{\partial t^{P-1}\partial S^{P-1}}\rho_X(t,S)$ とおけば

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$|\rho(t,t)-2\rho(t,s)+\rho(s,s)| = |\rho(t,t)-\rho(s,t)| + |\rho(t,s)-\rho(s,s)|$$
$$\leq \text{const}\ |t-s|^{\alpha}$$

であるから §2 Proposition 2.2 により $X(t)$ はほとんどすべての path に対し $p-1$ 回微分可能で $Y(t)=\frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} X(t)$ は β 位の Hölder 連続性 ($0<\beta<\frac{1}{2}$) をもつ。

(ii) の証明　(i) と同じ理由により

$$\left| \frac{\partial^{2p-1}}{\partial t^{p} \partial s^{p-1}} \rho_x(t,s) - \frac{\partial^{2p-2}}{\partial t^{p-1} \partial s^{p-1}} \rho_x(t_2,s) \right|$$
$$\leq \text{const.}\, |t_1-t_2|^{\alpha} \int_{\partial D}\int_{\partial D} f(\xi) f(\eta)\, \frac{dS_\xi\, dS_\eta}{|\xi-\eta|^{n-2+\alpha}}$$
$$\leq \text{const.}\, |t_1-t_2|^{\alpha}$$

よって $\rho'(t,s) \equiv \frac{\partial^{2p-2}}{\partial t^{p-1}\partial s^{p-1}} \rho_x(t,s)$ とおけば

$$|\rho'(t,t)-\rho'(t,s)-\rho'(t,s)+\rho'(s,s)| \leq \text{const.}\, |t_1-t_2|^{1+\alpha}$$

よって 2 Proposition 2.2 より

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} X(t) \in C^{(\beta)} \qquad 0<{}^{\forall}\beta<1$$ （証明終）

(4.19) 式において

$$(4.24) \qquad u(y) = \sum_k \int_{\partial D} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(z(\xi,t))\Big|_{t\uparrow 0} K_k(\xi,y)\, dS_\xi$$
$$= \sum_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int_{\partial D} u(z(\xi,t)\, K_k(\xi,y)\, dS_\xi \Big|_{t\uparrow 0}$$

が成立することに注意して

$$(4.25) \qquad U_t(x) \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int_{\partial D} \{B(z(\xi,t))-B(z_0)\} K_k(\xi,y)\, dS_\xi \Big|_{t=0} \quad y\in D + B(z_0)$$

とおけば Lemma 4.1 により右辺の標本函数は；ほとんどすべて $p-1$ 回連続微分可能だから 十分小さい t に対し $U_t(x)$ は well defined であり、ほとんどすべての ω に対し

$$(4.25)' \qquad U_0(x) = \lim_{t\uparrow 0} U_t(x) = \lim_{t\downarrow 0} U_t(x)$$

であるから　$U_0(x) \in \mathfrak{M}(D^c)$　i.e.　$\mathcal{B}(D^c)$ − 可測

更に $z \in D^c$ ならば $\Delta_x^p |x-z_0| = 0$ 　$z\in D$. だから

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$E(B(x)-U_0(x))\ (B(z)-B(z_0)) =$$
$$= \frac{|x-z_0|+|z-z_0|-|x-z|}{2} - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\partial}{\partial t^k} \int_{\partial D} \frac{|z(\xi,t)-z_0|+|z-z_0|-|z(\xi,t)-z|}{2} K_k(\xi,x)\,dS_\xi \Big|_{t\uparrow 0}$$
$$= 0$$

を得て　$U_0(x) = U_D(x) \quad \forall x \in D \cdot a.e.$　がわかる。

$$E(B(x)-U_0(x))(B(y)-B(z_0)) = g(x,y)$$

定理 4.1.　D を C^∞－級の境界をもつ有界連結領域とし、$\{B(z);\ z\in D^c\}$ が与えられたとき、$B(x)$　$x\in D$ の内挿 $U_D(x)$ は $z_0 \in \partial D$ を固定して

$$U_D(x) \equiv E[B(x)-B(z_0) \mid \mathcal{B}_+(\partial D)] + B(z_0)$$

で与えられ、その可分な version をとれば、D 内で C^∞ 函数であり、

又、　$\Delta^p U_D(x) = 0 \quad x\in D,\quad U_D(z) = B(z) \quad z\in \partial D.$

$$V_D(x) \equiv B(x) - U_D(x),\quad E\,V_D(x)\,V_D(y) \equiv g(x,y)$$

とおくとき　$g(x,y)$ は D の Green 函数であって (4.25) の意味で

$$U_D(x) = \int_{\partial D} [B(z),\ g(z,x)]\,dS_z$$

なる境界上の積分で $U_D(x)$ が求まる。

又、誤差は $\sigma_D(x) = g(x,x)$ である。

定理 4.1. は 奇数次元 の Brown 運動においては 充分滑かな境界の内部と外部は、境界の infinitesimal な近傍で条件をつけたとき独立になるということを意味している。その意味で Markov 性が見られる。又、$p-1$ 階までの法線微分が必要という意味では $p-1$ 重マルコフ性と言ってもよかろうと思われる。

例 4.1.　$S_t \equiv \{z;\ |z| = t\}$，$D_t \equiv \{z;\ |z| < t\}$ として $\{B(z);\ z\in D^c\}$ が与えられたとき、内挿問題を考える。それには Green 函数 $g(x,y)$、或は (4.19) 式の Poisson の積分表示がわかればよい。球 D に関しての積分表示は、R. J. Duffin － Z. Nehari [12] で具体的に求まっている。

Lemma 4.3.　$u(x)$ を R^n の球 $\bar{D}_t$ で p－重調和とすれば

$$(4.26)\qquad u(x) = \frac{(t^2-|x|^2)^p}{(p-1)!} \int_{|z|=t} \left(-\frac{\partial}{\partial |z|^2}\right)^{p-1} \frac{|z|^{n-2}\,u(z)}{|z-x|^n}\,d\omega_n(z)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

とPoisson積分表示される。又 $t_1 > t_2 > \cdots > t_p = t$ に対し、u は $|x| \le t_1$ で重調和 各 S_{t_j} $j=1 \cdots p$ で $u(x)$ が与えられたとき $x \in D_t$ に対する $u(x)$ の内挿は

$$(4.27) \qquad u(x) = \sum_{\nu=1}^{p} \prod_{k \ne \nu} \frac{t_k^2 - |x|^2}{t_k^2 - t_\nu^2} \cdot t_\nu^{n-2} (t_\nu^2 - |x|^2) \int_{|z|=t_\nu} \frac{u(z)\, d\omega_n(z)}{|z-x|^n}.$$

但し $d\omega_n(z)$ は $|z| = t_\nu$ なる球面上の単位一様測度。 $n \ge 3$

証明概略

まず、$|x| \le t$ 内での p 重調和函数 u は、調和函数 $u_0, u_1, \cdots, u_{p-1}$ が存在して

$$(4.28) \qquad u(x) = \sum_{\nu=0}^{p-1} u_\nu(x)\, |x|^{2\nu} \qquad |x| < t$$

と表現される。 $v(x, r^2) = \sum_{\nu=0}^{p-1} u_\nu(x)\, r^{2\nu}$ とおけば

Lagrange の多項式の内挿法により $t_1 > t_2 > \cdots > t_p$ に対し

$$(4.29) \qquad u(x) = \sum_{\mu=1}^{p} v(x, t_\mu^2) \prod_{\substack{k \ne \mu \\ k=1}}^{p} \frac{t_k^2 - |x|^2}{t_k^2 - t_\mu^2}$$

を得る。各 $v(x, t_\mu^2)$ は調和函数であるから $|x| < t_\mu$ に対し Poisson の積分表示を行えば

$$v(x, t_\mu^2) = \sum_{\nu=0}^{p-1} t_\mu^{2\nu}\, t_\mu^{n-2} (t_\mu^2 - |x|^2) \int_{|z|=t_\mu} \frac{u_\nu(z)}{|z-x|^n}\, d\omega_n(z)$$

$$= t_\mu^{n-2} (t_\mu^2 - |x|^2) \int_{|z|=t_\nu} \frac{u(z)}{|z-x|^n}\, d\omega_n(z)$$

これを (4.29) に代入して、(4.27)式を得る。

$t_j^2 = t^2 + (p-j)\varepsilon \qquad j = 1, \cdots, p.$ とおいて (4.27) 式を使い $\varepsilon \to 0$. にやれば、(4.26) が得られる。 （証明終）

この Lemma を定理 4.1. で使えば、$n = 2p-1$ 次元のとき $(p \ge 2)$ 半径 t の球の外部で Brown 運動が知られたとき、内部の点の内挿 $U_t(x)$ は

$$(4.30) \qquad U_t(x) \equiv \frac{(t^2 - |x|^2)^p}{(p-1)!} \left(-\frac{1}{2t} \frac{\partial}{\partial t}\right)^{p-1} \int_{|z|=t} \frac{|z|^{n-2} B(z)}{|x-z|^n}\, d\omega_n(z)$$

である。

$p = 1$ の場合はどうなるだろうか？ 一次元の Brown 運動だから簡単に計算できて、$D = (a, b)$ ととれば $a < x < b$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$U_{(a,b)}(x) = \frac{b-x}{b-a}B(a) + \frac{x-a}{b-a}B(b)$$

である。何故ならば $y \leq a$ or $y \geq b$

$$E(B(x) - U_{(a,b)}(x))(B(y) - B(a))$$

$$= E(B(x)-B(a))(B(y)-B(a)) - E\,\frac{x-a}{b-a}(B(b)-B(a))(B(y)-B(a))$$

$$= \frac{|x-a|+|y-a|-|x-y|}{2} - \frac{x-a}{b-a}\,\frac{|b-a|+|y-a|-|b-y|}{2}$$

よって $y \geq b$ のとき

$$= \frac{x-a+y-a-y+x}{2} - \frac{x-a}{b-a}\,\frac{b-a+y-a-y+b}{2} = 0$$

$y \leq a$ のときは

$$= \frac{x-a+a-y-x+y}{2} - \frac{x-a}{b-a}\,\frac{b-a+a-y-b+y}{2} = 0$$

から明らかに、$U_{(a,b)}(x)$ は、内挿である。形式的に (4.30) を $D=(-t,t)$ に適用したものと較べると

$$U_+(x) = (t^2-x^2)\left\{\frac{1}{2}\frac{|-t|^{-1}B(-t)}{|x+t|} + \frac{1}{2}\frac{|t|^{-1}B(t)}{|x-t|}\right\}$$

$$= \frac{t-x}{2t}B(-t) + \frac{t+x}{2t}B(t)$$

$$= U_{(-t,t)}(x)$$

だから (4.30) は全ての奇数次元に対してなりたつ

さて次に、この内挿の二乗平均誤差はどの程度だろうか? それは、explicit には、球に対する Green 函数がわかるか、(4.27) を使って、積分

$$(4.31)\quad \frac{1}{2}\,\frac{(t^2-|x|^2)^p}{(p-1)!}\int_{|z|=t}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{p-1}\frac{|z|^{n-2}}{|z-x|^{n-1}}\,d\omega_n(z)$$

が explicit に計算できればよいわけであるが結構面倒である。

$n=3$ $(p=2)$ の場合に計算してみよう。

$$\frac{1}{2\cdot 2}(t^2-|x|^2)^2\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t^2}\,\frac{t}{t^2-2|x|t\cos\theta+|x|^2}\,\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}(t^2-|x|^2)^2\,\frac{1}{2t}\,\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{t+|x|}{t-|x|}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{t^2-|x|^2}{t}$$

となる。又 $n=1$ $(p=1)$ のときには $\frac{t^2-x^2}{2t}$ である。一般に (4.31) を計

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

算することはあきらめて、原点に対する誤差を考えよう。球のときは誤差は原点に対するのが最大であることが想像されるから、他の点に対しても目安を与えてくれるだろう。その為には Green 函数の原点の値が決まれば十分だが、それは

$$(4.32) \qquad g(z,0) = +\frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)}\,t - \frac{|z|}{2} + \frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p-1)}\,t\int_0^{\frac{|z|}{t}}\int_0^{s_1}(1-s_2^2)^{p-2}\,ds_2\,ds_1$$

であることは、境界条件を調べてみればすぐわかる。

即ち $\left(\frac{\partial}{\partial|z|}\right)^k g(z,0)\Big|_{|z|=t} = 0 \quad k=2,3,\cdots$

は明らかだし、$\displaystyle\int_0^1\int_0^{s_1}(1-s_2^2)^{p-2}\,ds_2\,ds_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(p-1)}{\Gamma(p-\frac{1}{2})} + \frac{1}{2(p-1)}$

$$\int_0^1(1-s_2^2)^{p-2}\,ds_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(p-1)}{\Gamma(p-\frac{1}{2})}$$ から $g(z,0)=0 \quad |z|=t,\ \frac{\partial}{\partial|z|}g(z,0)\Big|_{|z|=t}=0$

がわかる。従って誤差は $\displaystyle\sigma_t^{(n)}(0) = \frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)}$

である。つぎ次元と誤差の関係をみるために $p\to\infty$ としてみれば

$$\sigma_t^{(n)}(0) = t\cdot O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad n\to\infty$$

即ち、次元が大きくなれば、誤差は減少し、0 に近づく、この間の事情は無限次元径数をもつ Brown 運動の内挿誤差が 0 であることを示唆しているが、事実それは確められる。

4° 一般の境界をもつ内挿問題

∂D は $n-1$ 次元の曲面のみならず、$n-2$ 次元以下の曲面をも含んでいるとしよう。もっとも単純な例として、充分滑かな境界をもつ有界連結領域 D_1 から、その内部の点 z_0 を取り除いた領域を D, $\partial D = \partial D_1 \cup \{z_0\}$ としよう。$\{B(z) : z\notin D\}$ が与えられるということは、$\{B(z) ; z\in D_1\}^c \cup \{B(z_0)\}$ が与えられることを意味する。このとき $B(x),\ x\in D$ の内挿問題はどうなるであろうか。

もしこれが p-重調和函数の Dirichlet 問題として解けるならば、3° の意味での ∂D_1 における $p-1$ 階までの法線微分と、z_0 における値が与えられたとき、Dirichlet の問題が解け、それが Poisson 積分表示できればよいわけだが、それは次のようにすればよい。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

Lemma 4.4. $g_{D_1}(x.y)$ を領域 D_1 の Green 函数，$v(x)$ を ∂D の近傍で C^∞－函数，aを任意の実数として

$$\Delta^p u(x) = 0 \qquad x \in D$$

(4.13)′ $$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k v(x) \qquad x \in \partial D, \qquad 0 \leq |k| \leq p-1$$

$$u(z_0) = a \qquad x = z_0$$

なる p－重調和方程式の Dirichlet 問題の解は

(4.33) $$u(x) = \int_{\partial D}[v(z), g_{D_1}(z,x)]dS_z + \frac{a - \int_{\partial D_1}[v(z), g_{D_1}(z,z_0)]dS_z}{g_{D_1}(z_0,z_0)} g_{D_1}(x,z_0)$$

で与えられる．

（証明） $g_{D_1}(x.y)$ は領域 D_1 の Green 函数であるから $\Delta^p g_{D_1}(x.z_0) = 0 \quad x \neq z_0 \in D$， $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k g(x,z_0) = 0 \quad x \in \partial D$，$0 \leq |k| \leq p-1$．

である．$u_1(x) \equiv \int_{\partial D_1}[v(z).g_{D_1}(z.x)]dS_z$ は，$\Delta^p u_1(x) = 0 \quad x \in D$．

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u_1(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k v(x) \quad x \in \partial D, \quad 0 \leq |k| \leq p-1$ を充すから

$$\Delta^p u(x) = \Delta^p u_1(x) + \frac{a - \int_{\partial D_1}[v(z), g_{D_1}(z.z_0)]dS_z}{g_{D_1}(z_0,z_0)} \Delta^p g_{D_1}(x,z_0) = 0 \qquad x \in D,\ x \neq z_0.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u_1(x) + \frac{a - \int_{\partial D_1}[v(z), g_{D_1}(z,z_0)]dS_z}{g_{D_1}(z_0,z_0)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k g_{D_1}(x,z_0)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k v(x) \qquad x \in \partial D.$$

$$u(z_0) - \int_{\partial D_1}[v(z), g_{D_1}(z.z_0)]dS_z + \frac{a - \int_{\partial D_1}[v(z), g_{D_1}(z,z_0)]dS_z}{g_{D_1}(z_0,z_0)} g_{D_1}(z_0 z_0)$$

$$= a$$

によって，(4.13)′ を充すことがわかる． （証明終）

注意 1 $$g_D(z.y) \equiv g_{D_1}(z.x) - \frac{g_{D_1}(z,z_0)g_{D_1}(z_0,x)}{g_{D_1}(z_0.z_0)}$$

とおけば，(4.33) 式は，

(4.33)′ $$u(x) = \int_{\partial D_1}[v(z).g_D(z,x)]dS_{(z)} + a\frac{g_{D_1}(z_0.x)}{g_{D_1}(z_0,z_0)}$$

となる。

注意 2 $K'_j(z.x)$ $j = 0, \cdots, p-1$ を D_1 に対する (4.19) 式における積分核とするとき $K_j(z.x) \equiv K'_j(z.x) - K_j(z.z_0)\frac{g_{D_1}(z_0.x)}{g_{D_1}(z_0.z_0)}$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

とおけば

$$(4.34)\qquad u(x)=\sum_{j=0}^{p-1}\int_{\partial D_1}\frac{\partial^k}{\partial n^k}\,\nu(z)K_k(z,x)\,dS_{(z)}+a\,\frac{g_{D_1}(x,z_0)}{g_{D_1}(z_0,z_0)}$$

Proposition 4.3. D は上に述べた形の有界領域とし、$\{B(z)\,;\,z\in D^c\}$ が与えられたとき、$B(x)\,;\,x\in D$ の内挿は定理 4.1 の意味と同様に解釈して

$$(4.35)\qquad U_D(x)=\sum_{j=0}^{p-1}\int_{\partial D_1}\frac{\partial^k}{\partial n^k}\,B(z)K_k(z,x)\,dS_{(z)}+B(z_0)\,\frac{g_{D_1}(x,z_0)}{g_{D_1}(z_0,z_0)}$$

$$=\int_{\partial D_1}\left[B(z),\,g_D(z,x)\right]dS_{(z)}+B(z_0)\,\frac{g_{D_1}(x,z_0)}{g_{D_1}(z_0,z_0)}$$

で与えられる。又 $V_D(x)=B(x)-U_D(x)$

$$(4.36)\qquad E\,V_D(x)V_D(y)=g_{D_1}(x,y)-\frac{g_{D_1}(x,z_0)\,g_{D_1}(z_0,y)}{g_{D_1}(z_0,z_0)}$$

$$=g_D(x,y)$$

であり、二乗平均誤差 $\sigma_D(x)$ は

$$(4.37)\qquad \sigma_D(x)=g_D(x,x)=g_{D_1}(x,x)-\frac{g_{D_1}^2(x,z_0)}{g_{D_1}(z_0,z_0)}$$

で与えられる。

(証明) (4.33), (4.33)′, (4.34) 式を考慮して、定理 4.1 の証明と全く同じに出来る。

例 4.2. 多次元径数の Brown 運動を局所確率場としてではなく Lévy の如く、$B_0(0)=0$ を仮定して $\{B_0(z)\,;\,z\in D_1^c\}$ が与えられたときの $B(x),\,x\in D$ の内挿を考えるとき、$0\notin D$ ならば、定理 4.1 で考えたものと同じであるが、$0\in D$ ならば、原点 0 で $B_0(0)=0$ が知られているわけだから、Proposition 4.3. で考えた場合になる。そこで $z_0=0$ として適用すれば

$$U_D(x,B_0)=\int_{\partial D}\left[B_0(z),\,g(z,x)\right]dS_z$$

で表わされる。但し、$g_D(x,y)$ を、D の Green 函数として、

$$g(x,y)=g_D(x,y)-\frac{g_D(x,0)\,g(0,y)}{g_D(0,0)}$$

$D=D_t=\{z\,;\,|z|<t\}$ として、$\{B_0(z)\,;\,z\notin D\}$ が与えられたとき、$B_0(x)\,;\,0<|x|<t$ の内挿は、p ー 重調和函数の積分表

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

示が Lemma 4.3. (4.26) 式で与えられており (4.37) で原点における Green 函数 $g(0,x)=g(x,0)$ がわかっているから

$$\frac{g(0,x)}{g(0,0)}=1-\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)}{\Gamma(p-\frac{1}{2})}\frac{|x|}{t}+2(p-1)\int_0^{\frac{|x|}{t}}\int_0^{s_1}(1-s_2^2)^{p-2}\,ds_2\,ds_1$$

である。今

$$K(z,x)\equiv\frac{|z|^{n-2}}{|x-z|^n}-\frac{1}{|z|^2}\frac{g(0,x)}{g(0,0)}$$

とおこう。このとき内挿問題の解 $U_{D+}(x)$ は

$$U_{D+}(x)=\frac{(t^2-|x|^2)^p}{(p-1)!}\left(-\frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p-1}\int_{|z|=t}B_0(z)K(z,x)\,d\omega_n(z)$$

で与えられる。

原点で $B_0(0)=0$ が知られることにより、よくなる近似の程度は

$$\frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)}\,t\left\{1-\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)}{\Gamma(p-\frac{1}{2})}\frac{|x|}{t}+2(p-1)\int_0^{\frac{|x|}{t}}\int_0^{s_1}(1-s_2^2)^{p-2}\,ds_2\,ds_1\right\}^2$$

である。例えば $n=3$ $(p=2)$ のときは

$$\frac{t}{4}\left\{1-2\frac{|x|}{t}+\frac{|x|^2}{t^2}\right\}=\frac{t}{4}\left(1-\frac{|x|}{t}\right)^4$$

従って誤差全体は 例4.1 から

$$\frac{t}{4}\left\{\left(1-\frac{|x|^2}{t^2}\right)-\left(1-\frac{|x|}{t}\right)^4\right\}=\frac{t}{4}\left(1-\frac{|x|}{t}\right)\left(4-3\frac{|x|}{t}+\frac{|x|^2}{t}\right)\frac{|x|}{t}$$

である。

もっと一般に、D は連結な有界領域として、境界 ∂D は k 次元曲面 S_k, $k=0,1,\dots,n-1$ からなっており、各々は十分滑かであるとしよう。$n=2p-1$ 次元において、p 重調和方程式の Dirichlet 問題は Dirichlet data として S_{2k}, S_{2k-1} $(k=0,1,\dots,p-1)$ 上で k 階までの偏導函数の値が決まれば一意に解ける。(S.L. Sobolev [51] 参照) そこでもし積分核 $K_{k,j}(z,x)$, $0\le|j|\le[\frac{k+1}{2}]$, $k=0,\dots,p-1$, $j=(j_1,\dots,j_n)$ $|j|=\sum^n j_\nu$ が存在して

$\Delta^p u(x)=0$ $x\in\bar{D}$ なる函数 u が

$$(4.38)\qquad u(x)=\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{[\frac{k+1}{2}]}\int_{S_k}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^j u(z)\,K_{k,j}(z,x)\,dS_k(z)$$

と表わされるとしよう。但し $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^j=\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{j_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{j_n}$, dS_k は S_k 上の面積要素とす。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

Lemma 4.2 と同様に。$\xi \in S_k$ の近傍で局所座標 $(\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^n)$ を $(\xi^1, \cdots, \xi^k, 0, \cdots 0)$ が S_k を定めるようにとる．$t = (t^{k+1}, \cdots, t^n)$ に対し

$$Z(\xi, t) = (\xi^1, \cdots, \xi^k, t^{k+1}, \cdots, t^n). \qquad \xi \in S_k$$

とおく。

$$(4.39) \qquad X(t) = \int_{S_k} B(Z(\xi, t)) K_{kj}(\xi, x)\, dS_k(\xi)$$

は $n-k$ 次元の Gaussian 確率場になるが Proposition 2.1 を使って，$\left[\frac{k+1}{2}\right]$ 階までの 連続な偏導函数をもつことが知られる。そこで、定理 4.1 と同じ方法で

$$\int_{S_k} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^j B(z) K_{kj}(z, x)\, dS_k(z)$$

が正当化できる．そうして

$$(4.40) \qquad U_D{+}(x) \equiv \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{|j|=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \int_{S_k} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^j B(z) K_{k,j}(z, x)\, dS_k(z)$$

とおけば、$y_1, y_2 \notin D$ に対し

$$\begin{aligned} &E(B(x) - U_D{+}(x))(B(y_1) - B(y_2)) \\ &= \frac{|x-y_2| + |y_1 - y_2| - |x - y_1|}{2} - \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{|j|=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \int_{S_k} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^j \left(\frac{|z-y_2| + |y_1 - y_2| - |z - y_1|}{2}\right) K_{kj}(z, x)\, dS_k(z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

がわかる。さて問題は $U_D{+}(x) \in \mathfrak{M}(D^c)$ だが、これは必ずしも言えない．それは、Lemma 4.1 の (ii) が $n-1$ 次元の曲面の境界以外では，言えない．即ち，$\mathfrak{M}(D^c) = \mathfrak{M}_+(D^c)$ が成立しない可能性があるからである。しかし，定義から 明らかに，$U_D{+}(x) \in \mathfrak{M}_+(\partial D) \subset \mathfrak{M}_+(D^c)$

Proposition 4.4. $B(z)$ が ∂D の infinitesimal な近傍で与えられたときの $B(x)$，$x \in D$ の内挿は，(4.40) 式で与えられ，$z_0 \in \partial D$ に対し

$$\begin{aligned} U_D{+}(x) &= E[B(x) - B(z_0) \mid \mathcal{B}_+(\partial D)] + B(z_0) \\ &= E[B(x) - B(z_0) \mid \mathcal{B}_+(D^c)] + B(z_0) \end{aligned}$$

が成立する。

例 4.3. z_0 を 中心とした半径の t の球面 $S_t(z_0)$ 上だけさ

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$\{B(z) : z \in S_t(z_0)\}$ が与えられたとき、内点に対する内挿問題を考えてみよう。その中心に対しては、Lévy が与えた

$$M(t) \equiv \int_{|z-z_0|=t} B(z)\, d\omega_n(z)$$

とおく。$M(t)$ が求めるものである。何故ならば $M(t) \in \mathfrak{B}(B(z) : |z-z_0|=t)$ は明らか。y_1, y_2 を $|y_1 - z_0| = |y_2 - z_0| = t$ とする。

$$E(B(z_0) - M(t))(B(y_1) - B(y_2))$$

$$= \int_{|z-z_0|=t} E(B(z_0) - B(z))(B(y_1) - B(y_2))\, d\omega_n(z)$$

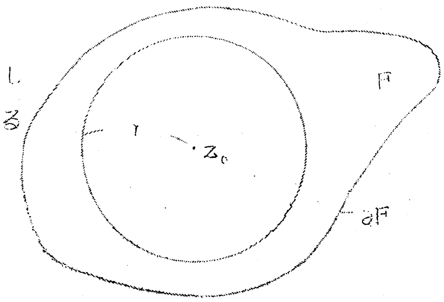
$$= \frac{1}{2} \int_{|z-z_0|=t} \{-|z_0 - y_1| + |z_0 - y_2| + |z - y_1| - |z - y_2|\}\, d\omega_n(z)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{|z-z_0|=t} \{|z - y_1| - |z - y_2|\}\, d\omega_n(z) = 0$$

による。

5° 外挿問題

F を有界な、閉領域として $\{B(z) ; z \in F\}$ が与えられたとき $B(x) : x \notin F$ を外挿することを考える。§3、基本的性質その(2)で述べた射影変性を使って、内挿問題に変換して考えよう。

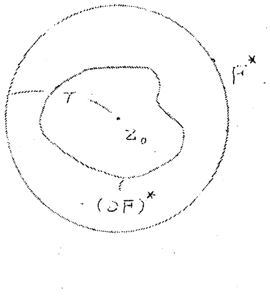


F の内点 z_0 を固定し、z_0 を中心とし F に含まれる球を定めその半径を r とする

$$B_{z_0}(z) = B(z + z_0) - B(z_0)$$

$$X(z) = \begin{cases} \dfrac{|z - z_0|}{r} B_{z_0}\left(\dfrac{r^2 (z - z_0)}{|z - z_0|^2} \right) & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

とおけば、$\{X(z)\}$ は再び、n 次元径数の Brown 運動となる。



$$F^* = \left\{ z : z = \frac{r^2 (y - z_0)}{|y - z_0|^2} + z_0,\ y \in F \right\}$$

とおけば、F^{*c} は $|z - z_0| < r$ の球の内部に含まれる。そうして、$\{B(z) ; z \in F\}$ が与えられることと、$\{X(z) ; z \in F^*\} \cup \{X(z_0)\}$ は同じである。

z に対し $z^* = \dfrac{r^2 (z - z_0)}{|z - z_0|^2} + z_0$ と記すことにすれば

$z_1 \in F \quad z_1 \neq z_0$.

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$E[X(z^*)-X(z_1^*)\mid \mathcal{B}(F^*, X)] + X(z_1^*)$$

$$= E\left[\frac{|z-z_0|}{r} B_0(z-z_0) - \frac{|z_1-z_0|}{r} B_0(z_1-z_0) \mid \mathcal{B}(F, B_0)\right] + \frac{|z_1-z_0|}{r} + B_0(z_1-z_0)$$

$$= \frac{|z-z_0|}{r} E[B(z)-B(z_0)\mid \mathcal{B}(F, B)]$$

従って、$D=F^{*c}$ に対する $X(x^*)$ $x^*\in D$ の内挿問題の解を $U_D(x^*, X)$ とおけば、F における $x\in F$ $B(x)$ の外挿問題のを $U_F^e(x, B)$ とすれば

$$U_F^e(x, B) = \frac{r}{|z-z_0|} U_D(x^*, X) + B(z_0)$$

で与えられる。

従って 外挿問題は全て内挿問題に置きかえて議論出来ることがわかった。∂F の滑かさは $(\partial F)^* = \{z^* ; z\in\partial F\}$ にそのまま保存されるから、∂F が充分滑かな $n-1$ 次元の閉曲面からなるとすれば、$\partial F^* = (\partial F)^* \cup \{z_0\}$ $D=F^{*c}$. $D_1 = D\cup\{z_0\}$ とおけば、D_1 は十分滑かな $n-1$ 次元の閉曲面 $(\partial F)^* = \partial D$ を境界にもつ有界領域であるから Green 函数 $g_{D_1}(x, y)$ が存在する. Proposition 4.3. により

$$g_D(x, y) = g_{D_1}(x, y) - \frac{g_{D_1}(x, z_0)g_{D_1}(z_0, x)}{g_{D_1}(z_0, z_0)} \quad \text{とおけば}$$

$g_D(x, y)$ は D の Green 函数となっている。そうして、定理 4.1. の意味で

$$U_D(x^*, X) = \int_{\partial D_1} [X(z), g_D(z, x^*)]\, dS(z)$$

が成立する. 即ち

$$(4.42) \quad U_F^e(x, B) = \frac{r}{|x-z_0|}\int_{\partial D_1}\left[\frac{|z-z_0|}{r} B_{z_0}\left(\frac{r^2(z-z_0)}{|z-z_0|^2}\right), g_D(z, x^*)\right] dS(z) + B(z_0)$$

$$= \int_{\partial D}\left[\frac{|z-z_0|}{|x-z_0|} B_{z_0}\left(\frac{r^2(z-z_0)}{|z-z_0|^2}\right), g_D(z, x^*)\right] dS(z) + B(z_0)$$

によって、外挿問題が解ける. この形式から想像されるだろうが、外挿問題は Dirichlet の外部問題の Green 函数が求まれば解ける。それは、内挿問題と同様に証明されるので、詳しくは、H.P. Mckean [39] を参照願うことにして、ここでは外部問題の Green 函数の境界条件が、∂F での $p-1$ 回までの偏微分が 0 以外に

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k g(x, y)\right| \leq \frac{const}{|x|^k} \qquad k\leq n$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

が加わることを注意しておこう。

Proposition 4.5. F を有界閉領域として $\{B(z) : z \in F\}$ が与えられたとき $B(x) : x \notin F$ の外挿は 上の記号の下で

(i) $$U_F^e(x, B) = \frac{r}{|x - z_0|} U_D(x^*, X) + B(z_0)$$

で与えられる。

(ii) $n = 2p-1$ 次元 F が充分滑かな $n-1$ 次元閉曲面の境界 ∂F をもてば、 $U_F^e(x, B) = E\{B(x) - B(z_0) \mid \mathcal{B}(\partial F)\} + B(z_0)$ $D = F^{*c}$ の Green 函数 $g_D(x, y)$ により

$$U_F^e(x, B) = \int_{\partial F^*} \left[\frac{|z - z_0|}{|x - z_0|} B_{z_0}\left(\frac{r^2(z - z_0)}{|z - z_0|^2}\right), g_D(z, x^*)\right] dS(z) + B(z_0)$$

で外挿される。

(iii) 更に $g_F(x, y)$ を Dirichlet の外部問題の Green 函数とすると 定理 4.1. と同様の意味で

$$U_F^e(x, B) = \int_{\partial F} [B(z), g_F(z, x)]\, dS(z)$$

で与えられる。

例 4.4. $F = \{z ; |z| \leq t\}$ とし $\{B_0(z) ; z \in F\}$ が与えられたときの外挿問題を考える。例 4.2. から

$$U_t^e(x, B_0) = \frac{(t^2 - |x^*|^2)^p}{(p-1)!}\left(-\frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p-1} \int_{|z|\frac{|z|}{|x|} = t} B_0(z^*) K(z, x^*)\, d\omega_n(z)$$

$$= \frac{t^{2p}}{|x|^{2p}} \frac{(|x|^2 - t^2)^p}{(p-1)!}\left(-\frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p-1} \int_{|z| = t} B_0(z) K^e(z, x)\, d\omega_n(z)$$

但し. $K^e(z, x) = |z| K(z, x^*)$

$$= \frac{|x|^n}{t |x - z|^n} - \frac{1}{t}\left\{1 - \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)}{\Gamma(p - \frac{1}{2})} \frac{t}{|x|} + 2(p-1)\int_0^{\frac{t}{|x|}} \int_0^{s_1} (1 - s_2^2)^{p-2} ds_2\, ds_1\right\}$$

である。例えば. $n = 3$ $(p = 2)$ のときは

$$U_t^e(x, B_0) = \frac{t^4(|x|^2 - t^2)^2}{|x|^5}\left(-\frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial t}\right) \int_{|z| = t} B_0(z) \left\{\frac{|x|^3}{t|x - z|^3} - \frac{1}{t}\left(1 - \frac{|x|}{t}\right)^4\right\} d\omega_n(z)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

6°. 多重マルコフ性と Splitting field

$\mathcal{B}_+(D)$, $\mathcal{B}_+(\partial D)$, $\mathcal{B}_+(D^c)$ の間の関係を調べてみよう．ある $\mathcal{B}_+(D)$ の部分 σ－field, $\mathcal{B}_1$ が splitting とは

$\forall A_1 \in \mathcal{B}_+(D)$, $\forall A_2 \in \mathcal{B}_+(D^c)$ に対し，

$$(4.43) \qquad P(A_1 \cap A_2 \mid \mathcal{B}_1) = P(A_1 \mid \mathcal{B}_1)\, P(A_2 \mid \mathcal{B}_1) \qquad a.e.$$

が成立するときにいう．splitting field は次の性質をもっている。

Proposition 4.6

(i) $\mathcal{B}_+(D^c)$ は splitting field

(ii) $\mathcal{B}_1$ が splitting field で $A \in \mathcal{B}_+(D)$ ならば，$P(A \mid \mathcal{B}_+(D^c)) = P(A \mid \mathcal{B}_1)$

(iii) $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ が splitting field ならば $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ は splitting field.

(iv) 最小の splitting field $\dot{\mathcal{B}}$ が存在する．

(v) $\dot{\mathcal{B}} \supset \mathcal{B}_+(D) \cap \mathcal{B}_+(D^c) \supset \mathcal{B}_+(\partial D)$

(vi) $n = 2p-1$ 次元で，∂D が十分滑かな $n-1$ 次元閉曲面ならば

$$\dot{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_+(D) \cap \mathcal{B}_+(D^c) \doteq \mathcal{B}_+(\partial D)$$

（証明） (i) $A_1 \in \mathcal{B}_+(D)$ $A_2 \in \mathcal{B}_+(D^c)$, とすると

$$P(A_1 \cap A_2 \mid \mathcal{B}_+(D^c)) = P(A_2 \mid \mathcal{B}_+(D^c))\, P(A_1 \mid \mathcal{B}_+(D^c))$$

は明らか．

(ii) $\mathcal{B}_1$ を splitting field, $A \in \mathcal{B}_+(D)$ とする．

任意の $A_1 \in \mathcal{B}_+(D^c)$ に対し

$$P(A \cap A_1) = E\{P(A \cap A_1 \mid \mathcal{B}_1)\} = E\{P(A \mid \mathcal{B}_1) \cdot P(A_1 \mid \mathcal{B}_1)\} =$$

$= E\{P(A \mid \mathcal{B}_1), A_1\}$ が成立する．$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_+(D^c)$ であるから $P(A \mid \mathcal{B}_1)$ は $\mathcal{B}_+(D^c)$ －可測．よって $P(A \mid \mathcal{B}_+(D^c)) = P(A \mid \mathcal{B}_1)$ a.e.

(iii) $L^2(\Omega, \mathcal{B}) \ni f(\omega)$ に対し $Pr_j f = E[f \mid \mathcal{B}_j]$ $j = 1, 2$, とおけば Pr_j $j = 1, 2$, は projection 作用素である．$\lim_{m\to\infty}(Pr_1 Pr_2)^m = \lim_{m\to\infty}(Pr_2 Pr_1)^m = Pr$

$Pr f = E[f \mid \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2]$ が成立するから $A_+ \in \mathcal{B}_+(D)$ $A_- \in \mathcal{B}_+(D^c)$ とおくと

$$P(A_- \cap A_+ \cap A) = E[P(A_- \mid \mathcal{B}_1), A_+ \cap A] = E[Pr_1 \chi_{A_-}, A_+ \cap A]$$

$= E[E(Pr_1 \chi_{A_-} \mid \mathcal{B}_2), A_+ \cap A] = E[Pr_2 Pr_1 \chi_{A_-}, A_+ \cap A]$

$= \lim_{m\to\infty} E\{(Pr_2 Pr_1)^m \chi_{A_-}, A_+ \cap A\} = E[P(A_- \mid \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2), A_+ \cap A]$

$= E[P(A_- \mid \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)\, P(A_+ \mid \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2), A]$ $\qquad A \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$

$$\therefore \quad P(A_- \cap A_+ \mid \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = P(A_- \mid \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)\, P(A_+ \mid \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) \quad a.e.$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

(iv) (iii) から明らか.

(v) $A \in \mathcal{B}_+(D) \cap \mathcal{B}_+(D^c)$ とすると, splitting field の定義から $P(A|\dot{\mathcal{B}}) = P(A \cap A|\mathcal{B}) = (P(A|\dot{\mathcal{B}}))^2$, 又, $E|P(A|\dot{\mathcal{B}}) - \chi_A|^2 = 2P(A) - 2E\chi_A P(A|\dot{\mathcal{B}}) = -2E(\chi_A - P(A|\dot{\mathcal{B}})) \times P(A|\dot{\mathcal{B}}) = 0$

よって $A \in \dot{\mathcal{B}}$.

(vi) 定理 4.1. と Proposition 4.5. から明らか. (証明終)

この最後の結果は, ずっと主張してきたマルコフ性の定義とみてよいであろう。もう一つの見方をしてみよう。これは, Gaussian 過程の多重マルコフ性において, T. Hida [39] がとった立場に近いのであるが, $t_1 > t_2 > \cdots > t_p = t$ に対し, $S_{t_\nu} = \{x : |x| = t_\nu\}$ $\nu = 1, \cdots, p$. $U_{t_1 \cdots t_p}(x, \omega)$ を $\mathcal{B}(\bigcup_{\nu=1}^{p} S_\nu ; B(\cdot))$ 可測であって, $B(x) - U_{t_1 \cdots t_p}(x, \omega)$ が $\{B(z) : |z| \geq t_1\}$ と独立になるように取れる。(もし更に $\{B(z) : |z| = t_\nu : \nu = 1, \cdots, p\}$ とも独立し出来ればもっと自然なのだが) この意味で p-重マルコフ性がある.

$U_{t_1 \cdots t_p}(x)$ は次のように与えればよい。Lemma 4.3. (4.27) 式を使って

$$U_{t_1 \cdots t_p}(x) = \sum_{\nu=1}^{p} \prod_{k \neq \nu} \frac{t_k^2 - |x|^2}{t_k^2 - t_\nu^2} \cdot t_\nu^{n-2} (t_\nu^2 - |x|^2) \int_{|z| = t_\nu} \frac{B(z)}{|z - x|^n} d\omega_n(z) \tag{4.44}$$

$\because$ $|y| > t_1$ ならば, $\Delta^p |y - x| = 0$ $|x| < t_p$ であるから (4.27) により

$$E(B(x) - U_{t_1 \cdots t_p}(x))(B(y_1) - B(y_2))$$
$$= \frac{|x - y_2| + |y_1 - y_2| - |x - y_1|}{2} - \sum_{\nu=1}^{p} \prod_{k \neq \nu} \frac{t_k^2 - |x|^2}{t_k^2 - t_\nu^2} t_\nu^{n-2} (t_\nu^2 - |x|^2) \int_{|z| = t_\nu} \frac{|z - y_2| + |y_1 - y_2| - |z - y_1|}{2|z - x|^n} d\omega_n(z)$$
$$= 0$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

§5. $M(t)$－過程と球面調和函数

1° 球面調和函数と Gegenbauer 多項式

球面調和函数と Gegenbauer 多項式の定義と簡単な性質をあげておこう．Gegenbauer 多項式 $C_k^{\nu}(x)$ は母函数

(5.1) $$(1-2xt+t^2)^{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\nu}(x)\,t^k$$

で定義される．k 次の多項式であり q を整数とすれば

(5.2) $$C_k^{\frac{1}{2}q}(1) = \frac{(k+q-1)!}{k!\,(q-1)!}$$

(5.3) $$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\frac{q}{2}}(x)\,\frac{2k+q}{q}\,t^k = \frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{\frac{q}{2}+1}}$$

が成立する．何故ならば (5.1) の母函数を使って

$$\frac{d^k}{dx^k}(1-2xt+t^2)^{-\nu} = (2t)^k\,\frac{(\nu+k-1)!}{(\nu-1)!}\,(1-2xt+t^2)^{-\nu-n-1}$$

から，$\dfrac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}C_k^{\nu}(x) = 0$．を得て $C_k^{\nu}(x)$ は k 次の多項であることがわかる．特に $\nu = \dfrac{q}{2}$，$x = 1$ とおけば，$(1-2xt+t^2)^{-\nu} = (1-t)^{-q}$ 従って．$\dfrac{d^k}{dt^k}(1-t)^{-q} = \dfrac{(k+q-1)!}{(q-1)!}(1-t)^{-q-k}$ によって (5.2) は明らか．

$$\frac{d}{ds}\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\frac{q}{2}}(x)\,s^{2k+q} = \frac{d}{ds}\left\{(1-2xs^2+s^4)^{-\frac{q}{2}}s^q\right\}$$
$$= q s^{q-1}(1-s^4)(1-2xs^2+s^4)^{-\frac{q}{2}-1}$$

により $$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{q/2}(x)\,\frac{2k+q}{q}\,t^k = \frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{\frac{q}{2}+1}}$$ を得る．

Lemma 5.1. 任意の $\eta \in R_0^n$ $|\eta| = 1$，に対し，次の条件を充す k 次の斉次調和函数が唯一存在して，それは

$$f(x) = |x|^n C_k^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{x}{|x|}\cdot\eta\right) \Big/ C_k^{\frac{n}{2}-1}(1)$$ で与えられる

(i) $f(x)$ は $|x|$ と $x\cdot\eta$ のみに依存する。

(ii) $f(\eta) = 1$.

（証明） 仮定により $f(x) = \sum_{j=0}^{k} C_j r^j (x.\eta)^{k-j}$ とかける．そこで

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$\Delta f(x)=0$ により $C_1=0$. 及び

$$(k-j)(k-j-1)\,C_j+(j+2)(2k-j+n)\,C_{j+2}=0 \qquad j=0,\cdots,k-2.$$

を充さねばならない．従って C_0 を決めれば $f(x)$ は一意に定まる。(ii) の条件から、$\sum_{j=0}^{k} C_j=1$ を充すものとして C_0 は一意に定まる。これで、$f(x)$ の一意性が示されたので、$|x|^k C_k^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{x}{|x|}\cdot\eta\right)/C_k^{\frac{n}{2}-1}(1)$ が 条件 (i) (ii) を充すことを示せば充分、(ii) は明らか．一方

$$\Delta\,(1-2(x\cdot\eta)t+|x|^2t^2)^{-\frac{n}{2}+1}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2(1-2(x\cdot\eta)t+|x|^2t^2)^{-\frac{n}{2}+1}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\{-(n-2)t^2(1-2(x\cdot\eta)t+|x|^2t^2)^{-\frac{n}{2}}+n(n-2)t^2(\eta_j-x_jt)^2(1-2(x\cdot\eta)t+|x|^2t^2)^{-\frac{n}{2}-1}\}$$

$$=0$$

から、$|x|^k C_k^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{x}{|x|}\cdot\eta\right)$ が調和函数であることがわかる． （証明終）

$x\in R_0^n$ の k 次の斉次多項式で 調和なものの内 一次独立なものは $h(k)=h(k,n)=(2k+n-2)\dfrac{(n+k-3)!}{(n-2)!\,k!}$ ヶ ある。

今、$h_k^l(x)$ $l=1,\cdots,h(k)$ は、この k 次の斉次調和多項式で

$$(5.4)\qquad \int_{|x|=1} h_k^l(x)\,h_k^{l'}(x)\,d\omega_n(x)=\delta_{ll'}$$

を充すものとしよう．

$\mathcal{P}=\mathcal{P}(R_0^n)$ を R_0^n 上の 多項式函数の作る線形空間、$\mathcal{H}_k=\mathcal{H}_k(R_0^n)$ を k 次の斉次調和多項式の作る $\mathcal{P}$ の線形部分空間としよう。

$O(n)\ni g$ に対し R_0^n 上の函数 $f(x)$ の変換 gf を $gf(x)\equiv f(g^{-1}x)$ で定義する。$\mathcal{P}$ には (5.5) 式により内積が定義される。

$$(5.5)\qquad (f_1,f_2)=\int_{|x|=1} f_1(x)\,f_2(x)\,d\omega_n(x)$$

Lemma. 5.2.

$\mathcal{H}_k$ は $O(n)$－不変な極小部分空間であり、$\mathcal{P}=\sum_{k=0}^{\infty}\oplus\,\mathcal{H}_k$

$$(5.6)\qquad P_k(x\cdot y)=\sum_{l=1}^{h(k)}\frac{1}{h(k)}\,h_k^l(x)\,h_k^l(y) \qquad |x|=|y|=1$$

とおけば 右辺は $x\cdot y$ にのみ依存して

$$(5.7)\qquad P_k(x\cdot y)=C_k^{\frac{n}{2}-1}(x\cdot y)\,/\,C_k^{\frac{n}{2}-1}(1)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

（証明）. $\mathcal{H}_k$ が $g\in O(n)$ で不変なことは、$f(x)$ が k 次の斉次多項式ならば $gf(x)=f(gx)$ もそうであり、Δ が $O(n)$ 不変なことから $\Delta gf(x)=g(\Delta f)=0$. $\{h_k^l\ ;\ l=1,\cdots,h(k)\}$ は $\mathcal{H}_k$ の C. O. N. S だから、$^\exists(g_{lj})$, $g h_k^l(x)=\sum_{j=1}^{h(k)} g_{l,j}\, h_k^j(x)$ であり、$d\omega_n$ が $O(n)$ − 不変なことから $(g_{l,j})$ は直交行列になる。従って 任意の $g\in O(n)$ に対し

$$\sum_{l=1}^{h(k)} h_k^l(g^{-1}x)\,h_k^l(g^{-1}y)=\sum g_{lj}\,h_k^j(x)\,g_{li}\,h_k^i(x)=\sum_{j=1}^{h(k)} h_k^j(x)\,h_k^j(y)$$

が成立するから、これは $x\cdot y$ のみに依存する函数である。y を固定すれば、x の k 次の斉次調和多項式であり．$C\equiv\sum(h_k^l(x))^2$ とおけば

$$C=\int_{|x|=1} C\,d\omega_n(x)=\int\sum_{l=1}^{h(k)}(h_k^l(x))^2=h(k),\quad \text{により、}\ P_k(x\cdot y)$$

は Lemma. 5.1. の条件を充す函数であるから $P_k(x\cdot y)=C_k^{\frac{n}{2}-1}(x\cdot y)/C_k^{\frac{n}{2}-1}(1)$ である。又、このような函数の一意性を使って、$\mathcal{H}_k$ が極小であることがわかる。（証明終）

$\{h_k^l\}$ は 更に次のような性質をもっている。e を R_0^n の固定した単位ベクトルとして、便宜上 e を北極と呼ぼう。e を不変にする $O(n)$ の要素を $O(n-1)$ と同一視することにし、$\int_{O(n-1)}\cdots dg$ は $O(n-1)$ 上の単位 Haar 測度による積分を意味することにしておこう。

$$(5.8)\qquad \int_{O(n-1)} h_k^l(gg'x)\,dg'=h_k^l(ge)\,P_k(x\cdot e)\qquad |x|=1$$

$f(\ )$ を R^1 上の可測函数とするとき

$$(5.9)\qquad \int_{|x|=t} f(|x-y|)\,h_k^l\!\left(\frac{x}{|x|}\right)d\omega_n(x)=h_k^l\!\left(\frac{y}{|y|}\right)\int_{|x|=t} f(|x-|y|e|)\,P_k\!\left(\frac{x\cdot e}{|x|}\right)d\omega_n(x)$$

何故ならば、$\varphi(x)=\int_{O(n-1)} h_k^l(gg'x)\,dg'$ とおけば、$\Delta h_k^l(gg'x)=0$ により、$\Delta\varphi(x)=0$, $g_1\in O(n-1)$ に対し $\varphi(g_1x)=\int_{O(n-1)} h_k^l(gg_1g'x)\,dg'=$ $=\varphi(x)$ から $\varphi(x)$ は $|x|$ と $(x\cdot e)$ にのみ依存する。Lemma. 5.1. から $\varphi(x)=C\,P_k(x\cdot e)$ 又 $C=\varphi(e)=\int_{O(n-1)} h_k^l(ge)\,dg'=h_k^l(ge)$.

以上により、(5.8) 式が証明された、(5.9) 式も同様に示される。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

2° Lévyの多次元径数Brown運動の展開

$B_0(x)$: $x \in R_0^n$ の球面調和函数による展開を考える。後の為、一般に Gaussian 局所 homogeneous and isotropic 確率場 $\{X(x)$ $x \in R_0^n\}$ の球面調和函数による展開を調べておく。

Proposition 5.7. $X(x)$: $x \in R_0^n$ を平均零の Gaussian 局所 homogeneous and isotropic 確率場で、$X(0)=0$ を仮定し、$E|X(x)|^2 = R(x) = R^*(|x|)$ は原点で Hölder 連続であるとする。

$$(5.10) \qquad X_k^l(t) \equiv \int_{|x|=t} X(x) h_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right) d\omega_n(x)$$

とおけば

$$E\, X_k^l(t) = 0$$

$$(5.11) \qquad E\, X_k^l(t) X_{k'}^{l'}(s) = \begin{cases} -\dfrac{\delta_{ll'}\delta_{kk'}}{2C_k^{\frac{n}{2}-1}(1)\,C(2,n)} \displaystyle\int_0^{\pi} R^*(t^2-2ts\cos\theta+s^2)\, C_k^{\frac{n}{2}-1}(\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\, d\theta & k, k' \neq 0 \\ \dfrac{R^*(t^2)+R^*(s^2)}{2} - \dfrac{1}{2C(2,n)} \displaystyle\int_0^{\pi} R^*(t^2-2ts\cos\theta+s^2)\sin^{n-2}\theta\, d\theta & k = k' = 0 \end{cases}$$

であり $\{X_k^l(t)\}$ は互に独立な Gaussian 過程である。又、

$$(5.12) \qquad X(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(k)} h_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right) X_k^l(|x|) \qquad a.e.$$

(証明) $E\, X_k^l(t) = 0$ は明らか、(5.7)式を使って、

$$E\, X_k^l(t) X(y) = \int_{|x|=t} E(X(x)X(y))\, h_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right) d\omega_n(x)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{|x|=t} \{R(x)+R(y)-R(x-y)\}\, h_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right) d\omega_n(x)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{|x|=t} \{R^*(t^2)+R^*(|y|^2)-R^*(|x-y|^2)\}\, h_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right) d\omega_n(x)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{2} h_k^l\left(\dfrac{y}{|y|}\right) \displaystyle\int_{|x|=t} R^*(|x-|y|\mathbf{e}|^2)\, P_k\left(\frac{x\cdot\mathbf{e}}{|x|}\right) d\omega_n(x) & k \neq 0 \\ \dfrac{R^*(t^2)+R^*(|y|^2)}{2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{|x|=t} R^*(|x-|y|\mathbf{e}|^2)\, d\omega_n(x) & k = 0 \end{cases}$$

これから $k \neq 0$ ならば

$$E\, X_k^l(t) X_{k'}^{l'}(s) = -\frac{1}{2}\int_{|y|=s} h_k^l\left(\frac{y}{|y|}\right) h_{k'}^{l'}\left(\frac{y}{|y|}\right) d\omega_n(y) \int_{|x|=t} R^*(|x-|y|\mathbf{e}|^2)\, P_k\left(\frac{x\cdot\mathbf{e}}{|x|}\right) d\omega_n(x)$$

$$= -\frac{\delta_{ll'}\cdot\delta_{kk'}}{2}\int_{|x|=t} R^*(|x-s\mathbf{e}|^2)\, \frac{C_k^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{x\cdot\mathbf{e}}{|x|}\right)}{C_k^{\frac{n}{2}-1}(1)}\, d\omega_n(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$= -\frac{\delta_{ll'}\delta_{kk'}}{2C_k^{\frac{n}{2}-1}(1)\cdot C(2,n)}\int_0^\pi R^*(t^2-2ts\cos\theta+s^2)\sin^{n-2}\theta\, d\theta$$

$k=0$. のときも同様．(5.12)が収束することは，

$$\sum_{k=0}^\infty\sum_{l=1}^{h(k)} E|X_k^l(t)|^2 = R^*(t^2) - \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=1}^{h(k)} \int_0^\pi \frac{R^*(t^2-2tt\cos\theta+t^2)}{2C_k^{\frac n2-1}(1)\cdot C(2,n)}\, C_k^{\frac n2 -1}(\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\, d\theta$$

$$= R^*(t^2) - \frac{1}{2\cdot C(2,n)}\sum_{k=0}^\infty \int_0^\pi \frac{2k+n-2}{n-2}\, C_k^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)\cdot R^*(2t^2-2t^2\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\, d\theta$$

の収束が、(5.3) 式からわかることにより示される．　（証明終）

このProposition を Lévy の Brown 運動に適用して

$$B_k^l(t) = \int_{|x|=t} B_0(x)\, h_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right) d\omega_n(x)$$

の性質を調べれば，$B_0(x)$ の性質を知ることが出来るだろう．まず最初にわかることは、$B_k^l(t)$ の 標本函数はほとんど全て、$[\frac{n-1}{2}]$ 回連続微分可能である。それは、§4. Lemma. 4.2. の帰結である。$k\neq 0$ のとき

(5.13) $$E B_k^l(t)B_{k'}^{l'}(s) = -\frac{\delta_{ll'}\delta_{kk'}}{2C_k^{\frac n2-1}(1)C(2,n)}\int_0^\pi\sqrt{t^2-2ts\cos\theta+s^2}\; C_k^{\frac n2-1}(\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\, d\theta$$

に注意すれば，

(5.14) $$Y_k^l(t) \equiv e^t B_k^l(e^{-2t})\qquad k=0,1,2,\cdots$$

とおくことにより $\{Y_k^l(t)\}$ は、Gaussian定常過程となる．

何故ならば、$k\neq 0$ のとき

$$EY_k^l(t)Y_k^l(s) = \frac{-1}{a_k}\int_0^\pi \sqrt{e^{2(t-s)}-2\cos\theta+e^{-2(t-s)}}\; C_k^{\frac n2-1}(\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\, d\theta$$

$k=0$ のとき、

$$EY_0^1(t)Y_0^1(s) = e^{t-s}+e^{-(t-s)} - \frac{1}{a_0}\int_0^\pi\sqrt{e^{2(t-s)}-2\cos\theta+e^{-2(t-s)}}\;\sin^{n-2}\theta\, d\theta$$

であることから明らか．

但し $$a_k = 2C_k^{\frac n2-1}(1)\cdot C(2,n) = 2\,\frac{\Gamma(k+n-2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-2)}\,\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac n2)}$$

この $k=0$ の場合 $Y_0^1(t)=M(t)$ を特に $M(t)$ − 過程と呼んでいる。

$\{B_k^l(t)\}$, $\{Y_k^l(t)\}$ と white noise の関係を調べてみよう。

§3. Proposition 3.3. によれば

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$B_0(x)=\int_{0<s<x\cdot\xi} W_M(ds\wedge d\sigma(\xi))=\int \chi_{(s,\infty)}(x\cdot\xi)\,W_M(ds\wedge d\sigma(\xi))$$

と表現される。

$$B_k^{\ell}(t)=\int_{|x|=t} B_0(x)\,h_k^{\ell}\left(\frac{x}{|x|}\right)\,d\omega_n(x)$$

$$=\int\left\{\int_{|x|=t}\chi_{(s,\infty)}(x\cdot\xi)\,h_k^{\ell}\left(\frac{x}{|x|}\right)d\omega_n(x)\right\}W_M(ds\wedge d\sigma(\xi))$$

ここで g_1 を e を ξ へ移す $O(n)$ の要素とする。(5.8)式により

$$\int_{|x|=t}\chi_{(s,\infty)}(x\cdot\xi)\,h_k^{\ell}\left(\frac{x}{|x|}\right)d\omega_n(x)=\int_{|x|=t}\chi_{(s,\infty)}(x\cdot e)\,h_k^{\ell}\left(\frac{g_1x}{|x|}\right)\,d\omega_n(x)$$

$$=\int_{O(n-1)}\int_{|x|=t}\chi_{(s,\infty)}(x\cdot e)\,h_k^{\ell}\left(\frac{g_1gx}{|x|}\right)\,d\omega_n(x)\,dg$$

$$=\int_{|x|=t}\chi_{(s,\infty)}(x\cdot e)\int_{O(n-1)}h_k^{\ell}\left(\frac{g_1gx}{|x|}\right)dg\;\,d\omega_n(x)$$

$$=h_k^{\ell}(\xi)\int_{|x|=t}\chi_{(s,\infty)}(x\cdot e)\,P_k(x\cdot e)\,d\omega_n(x)$$

$$=\frac{1}{a_k}\,h_k^{\ell}(\xi)\int_0^{\cos^{-1}\frac{s}{t}}C_k^{\frac{n}{2}-1}(\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\,d\theta.$$

よって

$$(5.15)\qquad C_k\left(\frac{s}{t}\right)\equiv\frac{1}{a_k}\int_0^{\cos^{-1}\frac{s}{t}}C_k^{\frac{n}{2}-1}(\cos\theta)\,\sin^{n-2}\theta\,d\theta.$$

$$(5.16)\qquad dW_k^{\ell}(s)\equiv\int_s^{s+ds}\int_{|\xi|=1}h_k^{\ell}(\xi)\,W_M(ds\wedge d\sigma(\xi))$$

とおけば、$dW_k^{\ell}(s)$ は平均零の Gaussian random measure で

$$E|dW_k^{\ell}(s)|^2=\int_s^{s+ds}\int_{|\xi|=1}|h_k^{\ell}(\xi)|^2\;\frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\,ds\,d\sigma$$

$$=4\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,ds$$

を充す。且、$B_k^{\ell}(t)$ は

$$(5.17)\qquad B_k^{\ell}(t)=\int_0^t C_k\left(\frac{s}{t}\right)\,dW_k^{\ell}(s)$$

と表現される。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

表現の問題を考えるには定常過程で考えた方が楽であるから(5.14)の変換で定常過程に変換して考える．

$$(5.18)\qquad \begin{aligned} dZ_k^\ell(t) &\equiv e^{-t}\, dW_k^\ell(e^{2t}) \\ d_k(t) &\equiv e^{t}\, C_k(e^{2t}) \end{aligned}$$

とおく $\quad E|dZ_k^\ell(t)|^2 = 2e^{-2t}\cdot 4\sqrt{\pi}\,\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}-)}\, e^{2t}dt = 8\sqrt{\pi}\,\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}-)}\,dt$

をみたし、(5.17)式は

$$(5.19)\qquad Y_k^\ell(t) = \int_{-\infty}^{t} d_k(s-t)\, dZ_k^\ell(s)$$

と変形される．この Gaussian 定常過程 $Y_k^\ell(t)$ の表現は、片側移動表現ではあるが、標準表現とはなっていない．その他の詳しい性質もこの形でみるよりも、スペクトルの方が見やすいので、$d_k(t)$ の Fourier 逆変換を考えてみよう．A. Erdelyi [60] 2. p. 280. の結果から

$$(5.20)\qquad \hat{d}_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} d_k(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2a_k\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-i\lambda t}dt\; e^{t}\int_0^{\cos^{-1}e^{-2t}} C_k^{\frac{n}{2}-1}(\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2a_k\pi(1-i\lambda)}\int_0^1 u^{\frac{1-i\lambda}{2}}\, C_k^{\frac{n}{2}-1}(u)(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}\, du$$

$$= \pi^{-1}2^{-k+1}\Gamma(\tfrac{n}{2})\,\frac{1}{1-i\lambda}\,\frac{\Gamma(\frac{1-i\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{1-i\lambda}{2}-k)}\,\frac{\Gamma(\frac{1-i\lambda-2k}{4}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-i\lambda-2k}{4}+k+\frac{n}{2})}$$

となる．特に $n=2p-1$ 次元のときには、$\hat{d}_k(\lambda)$ は有理式となり

$$(5.20)'\qquad \hat{d}_k(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi}\,\dfrac{(-1)^{k_0}}{1-i\lambda}\,\dfrac{1}{(p-1+k_0-\frac{1+i\lambda}{4})\cdots(1+k_0-\frac{1+i\lambda}{4})}\displaystyle\prod_{j=1}^{k_0}\frac{4j-1+i\lambda}{4j-1-i\lambda} & k=2k_0 \\[2ex] \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi}\,\dfrac{(-1)^{k_0}}{1-i\lambda}\,\dfrac{1}{(p-1+k_0+\frac{1-i\lambda}{4})\cdots(1+k_0+\frac{1-i\lambda}{4})}\displaystyle\prod_{j=0}^{k_0-1}\frac{4j+1+i\lambda}{4j+1-i\lambda} & k=2k_0-1. \end{cases}$$

となる。(5.20)′の最後の項の絶対値が 1 であることに注意すれば、T. Hida. [20] の意味で、$\{Y_k^\ell(t)\}$ は $p-1$ 重 Markov Gaussian 定常過程であり、従って $\{B_k^\ell(t)\}$ が $p-1$ 重 Markov Gaussian 過程である．特に $k=0$ の場合が、$M(t)$－過程における結果である．

(5.20)′からわかるように、$n=2p-1$ 次元では、標準表現

$$Y_k^\ell(t) = \int_{-\infty}^{t} d_k'(s-t)\, dZ_k'^\ell(s)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

をもつ．ただし，$d_k'(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s}\, \tilde{d}'(\lambda)\, d\lambda$

$$(5.21) \quad \tilde{d}'(\lambda) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi} \frac{1}{1-i\lambda} \frac{1}{(p-1+k_0-\frac{1+i\lambda}{4})\cdots(1+k_0-\frac{1+i\lambda}{4})} \qquad k = 2k_0$$

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi} \frac{1}{1-i\lambda} \frac{1}{(p-1+k_0+\frac{1-i\lambda}{4})\cdots(1+k_0+\frac{1-i\lambda}{4})} \qquad k = 2k_0-1$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

第3章　Random current.

§6. Random current.

1° 定義

M を σ-compact な可符号 n 次元 Riemann 多様体、その Riemann 計量を g とする．$\Psi^{(p)}$ を M 上の p 次の C^∞-微分型式全体（実又は複素数値）、$\Phi^{(p)}$ を $\Psi^{(p)}$ の要素で compact な台をもつもの全体の作る線型空間とする．$\Phi^{(p)}$ における収束は $\varphi_j \in \Phi^{(p)}$ $j=1,2\cdots\cdots$ に対し $\varphi_j \longrightarrow 0$ を次のように定義する．

$$\varphi_j = \sum_{[i]} \varphi^{(j)}_{i_1\cdots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

は同一の compact 集合 K に台が含まれており、K を有限ヶの局所座標近傍で被覆したとき、各近傍で、各階の偏導函数とともに φ_j が 0 へ一様収束するとき、$\varphi_j \longrightarrow 0$ と定義する．更に $\Phi^{(p)}$ には nuclear space 又はその inductive limit としての位相を入れられる。例えば $p=0$ の場合には次のようにすればよい．

M が σ-compact だから、閉包が compact な開集合 K_m の可算系と、有限交叉性をもつ局所座標近傍の可算系 $\{U_j\}$ が存在し、K_m は単調増加、$\bigcup_m K_m = M$，各 K_m は有限ヶの U_j で被覆される．$\{h_k\}_{k=1}^\infty$ を $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ に属する単位の分解とする．h_k の台を V_k で表わしておこう．$\varphi \in \Phi^{(0)}$ に対し、$h_k\varphi$ の V_k での偏導函数を $\frac{\partial}{\partial x^j}(h_k\varphi)$，高次の偏導函数を $(\frac{\partial}{\partial x})^\nu (h_k\varphi)$ と記そう．$\varphi, \psi \in \Phi^{(0)}$ の内積を φ, ψ の台が K_m に入るとき

$$(6.1) \qquad (\varphi,\psi)_{m,l} = \sum_{|\nu|\le l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{U_k \cap K_m} (\tfrac{\partial}{\partial x})^\nu (h_k\varphi)\cdot(\tfrac{\partial}{\partial x})^\nu (h_k\psi)\, dx^1 \wedge\cdots\wedge dx^n$$

で定義する。m を固定して、$\{(\varphi,\psi)_{m,l} : l=1,2\cdots\}$ は K_m に台をもつ C^∞-函数全体に完備な σ-Hilbert 空間としての内積の系を与えることは明らかであろう。

この章に使われる定義、記号等は付録を参照されたい。
C^∞-多様体に関しては　秋月［1］　松島［38］参照。

nuclear 性を示そう．K_mは有限ヶの$\{V_j\}$で被覆されるが簡単のため$K_m \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$としておこう．$T_k$を$\Phi^{(0)}$上の連続線型汎函数で

$$\sum_{k=1}^{\infty} |< T_k, \varphi >| < \infty \qquad {}^{\forall}\varphi \in \Phi^{(0)}$$

なるものとする．φの台がK_mに含まれれば，

$$\sum_{i,j}^{m} < h_i T_k, h_j \varphi > = < T_k, \varphi >$$

に注意して，特に$V_i \cap V_j$に台をもつ任意のφを考えれば，

$$\sum_{k=1}^{\infty} |< h_i T_k, h_j \varphi >| < \infty$$

$V_i \cap V_j$では局所的にユークリッド空間と同じだから，ユークリッド空間の場合の nuclear 性から，${}^{\exists} l_{ij}$ ${}^{\exists}\varepsilon_{ij} > 0$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \sup\{|< h_i T_k, h_j \varphi >| ; \varphi \ \|\varphi\|_{m l_{ij}} < \varepsilon_{ij}\} < \infty$$

よって　$l_0 = \max_{1 \le i, j \le m} l_{ij}$，$\varepsilon_0 = \min_{1 \le i, j \le m} \varepsilon_{ij}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \sup\{|< T_k, \varphi >| ; \varphi \ \|\varphi\|_{l_0} < \varepsilon_0\} \\
&= \sum_{k=1} \sup\{|\sum_{i,j}^{m} < h_i T_k, h_j \varphi >| ; \varphi \ \|\varphi\|_{l_0} < \varepsilon_0\} \\
&\le \sum_{i,j}^{m} \sum_{k=1} \sup\{|< h_i T_k, h_j \varphi >| ; \varphi \ \|\varphi\|_{m l_{ij}} < \varepsilon_{ij}\} \\
&\le \sum_{i,j}^{m} a_{ij} < \infty
\end{aligned}$$

Gelfand-Vilenkin [17] 第1章 §3 定理2により K_mに台が含まれる$\Phi^{(0)}$の要素全体に，$\{< , >_{m.l} ; l = 1, 2 \cdots\}$で内積を入れた$\sigma$-Hilbert空間は nuclear 空間である．

$\Phi^{(n-p)}$上の連続線型汎函数T^pをp次の current と呼ぶ．p次の current 全体の作る$\Phi^{(n-p)}$の共役空間を$\Phi'^{(p)}$で表わす。

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$をある確率空間としよう．

定義 6.1.　$\Phi^{(n-p)} \ni \varphi^{(n-p)}$を径数空間にもつ確率変数の系$U^p(\varphi^{n-p}) = U^p(\varphi^{n-p}, \omega)$が　ほとんど全ての$\omega$に対し，$\omega$を固定したとき，$\Phi^{(n-p)}$上の連続線型汎函数となるとき，$U^p$を random current と呼ぶ．

この定義では強すぎるので　もう少し弱い定義を与えよう。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

定義 6.2. $\mathcal{F}$ を $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の 確率変数全体に (1.2) により Fréchet の距離を入れた、線型位相空間とする。$\Phi^{(n-p)}$ から $\mathcal{F}$ への連続線型変換 U^p が与えられたとき、U^p 又は $U^p(\varphi^{n-p}, \omega)$ を random current (in $\mathcal{F}$) と呼ぶ。又 $\mathcal{F}$ の代りに $L^q(\Omega)$ のとき random current (in L^q) と呼ぶ。特に L^2 の場合には second order の random current とも呼ばれる。

定義 6.1 と 6.2 の Gapp は相当あるが、例えば、
○ U_p が random current (in $\mathcal{F}$), $\varphi_\nu^{(n-p)} \longrightarrow \varphi^{(n-p)}$ in $\Phi^{(n-p)}$ ならば、ν の部分列 $\{\nu_k\}$ が存在して、ほとんど全ての ω に対し

$$U^p(\varphi_{\nu_k}, \omega) \longrightarrow U^p(\varphi, \omega).$$

∵) $\varphi_\nu \to \varphi$ のとき、$U^p(\varphi_\nu, \omega)$ が $U^p(\varphi, \omega)$ へ確率収束するから明らか。しかし、第1章で述べた Bochner-Minlos の定理によれば、次の定理が示される。

定理 6.1. U^p が 可符号、σ-compact な C^∞ Riemann 多様体 M 上の random current (in $\mathcal{F}$) である為の必要十分条件は $\Phi'^{(p)}$ 上の確率測度、$(\Phi'^{(p)}, \mathcal{B}^{(p)}, P^{(p)})$ が存在して、$\{U^p(\varphi^{n-p}, \omega);\ \varphi^{n-p} \in \Phi^{(n-p)}\}$ と $\{\langle T^p, \varphi^{(n-p)} \rangle;\ \varphi^{n-p} \in \Phi^{(n-p)}\}$ が同じ法則に従う。即ち、U^p はある random current と同じ法則をもつ、ことである。

(証明) 十分性は明らかだから 必要性を示す。

$$\chi(\varphi^{n-p}) \equiv \int e^{i\,\mathrm{Re}\, U^p(\varphi^{n-p}, \omega)}\, dP$$

とおけば、$\chi(\varphi^{n-p})$ が 定理1.1′の条件 i) iii) を充すことは明らか。ii) の 連続性を示そう。U^p が random current (in $\mathcal{F}$) であるから、$\forall \varepsilon > 0$, に対し、$\Phi^{(n-p)}$ の原点の近傍 V が存在して $\varphi^{n-p} \in V$ ならば $\rho(0, U^p(\varphi^{n-p})) < \varepsilon$ である。$|1 - e^{i|u|}| \le \frac{4|u|}{1+|u|}$ により 任意の $\varphi^{n-p} \in V$ に対し

$$|\chi(\varphi^{n-p}) - 1| \le \int |e^{i\,\mathrm{Re}\, U^p(\varphi^{n-p})} - 1|\, dP$$

$$\le 4 \int \frac{|\mathrm{Re}\, U^p(\varphi^{n-p}, \omega)|}{1 + |\mathrm{Re}\, U^p(\varphi^{n-p})|}\, dP \le 4\rho(0, U^p(\varphi^{n-p})) < \varepsilon$$

よって、定理1.1′により、$\chi(\varphi^{n-p})$ を特性汎函数にもつ $\Phi'^{(p)}$ との確率測度 $P^{(p)}$ が存在する。P と $P^{(p)}$ が 同じ法則に従うことは、特性汎函数の性質から明らか。念の為示せば任意の N と任意の $\varphi_j^{(n-p)}$ $j=1,\cdots,N$, 任意の

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

複素数 $\alpha_1 \cdots \alpha_N$ に対し

$$\varphi^{n-p} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j^{(n-p)} \quad \text{とおけば}$$

$$\int_{\Omega} e^{iRe \sum_{j=1}^{N} \alpha_j U^p(\varphi_j^{n-p}, \omega)} dP = \chi(\varphi^{n-p}) = \int_{\Phi(p)} e^{iRe \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle T^p, \varphi_j^{n-p} \rangle} dP^{(p)}(T^p)$$

通常の特性函数の性質から、$\{U^p(\varphi^{n-p}), \cdots U^p(\varphi_N^{n-p})\}$ と $\{\langle T^p, \varphi_N^{n-p} \rangle\}$ は同じ法則に従う。（証明終）

例. 6.1. Lévy の n 次元球面の Brown 運動 $\{B(x), |x|=1\}$

$$B(\varphi^n) \equiv \int_{S^n} B(x)\varphi^n(x) = \int B(x)\varphi(x)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

によって 0 次の random current とみなせる. その特性汎函数は

$$\chi(\varphi^n) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\iint \varphi(x)\varphi(y) \frac{r(x,\mathbb{E})+r(y,\mathbb{E})-r(x,y)}{2} dx\, dy\right\}$$

但し、$dx = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, $dy = dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$, $\mathbb{E}$ は北極.
$r(x,y)$ は x, y の距離.

以後我々は多くの場合 random current (in $\mathcal{F}$) の話で間に合せるが、その裏には定理6.1. により常に定義6.1.の意味での random current で同じ法則に従うものの存在を意識して扱う。又 random current を全て ($\Phi'^{(p)}$, $\mathbb{B}^{(p)}$, $P^{(p)}$) で表わす立場もあるがそれはやめて、空間 $\Phi'^{(p)}$の構造及び duality がきく所にのみ ($\Phi'^{(p)}$ $\mathbb{B}^{(p)}$ $P^{(p)}$) を考えることにして、一般には定義6.1.に従うが、それは与えられた C^∞-Riemann 多様体上の確率場 (random field) を random current と見なして扱う場合とか、同じ確率空間で異なった random current を考えたり、例えば 外微分とか Δ とかの演算を許したい為もある。

例. 6.2. $a_p(x,\omega)$ を、Ω から M 上の p-vector field への可測な写像とし、各局所近傍 U で

$$a_p(x,\omega) = \sum_{[i]} a^{i_1 \cdots i_p} L_1 \wedge \cdots \wedge L_p, \qquad L_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$$

と表わされるとしよう。$a^{i_1 \cdots i_p}(x,\omega)$ が $U \times \Omega$ 上の可測函数のとき Random p-vector field と呼ぼう。

p-vector field は p-微分形式の共役空間だから、

$$\langle a_{n-p}(x,\omega), \varphi^{n-p}(x) \rangle = \sum_{[i]} a^{i_1 \cdots i_p} \varphi_{i_1 \cdots i_{n-p}}.$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

によって，M上の0次の Random field が得られる。もしこれが，ω を fixed して可積分，即ち $a^{i_1 \cdots i_{n-p}}$ が局所可積分ならば，

$$\int < a_{n-p}(x, \omega),\ \varphi^{n-p}(x) > dx$$

により pー次の random current が得られる。

もう一つ言葉として，平均汎函数と共分散汎函数を定義しよう。
U^p が random current (in L^2) のとき，

$$m_{U_p}(\varphi^{n-p}) = E\{U^p(\varphi^{n-p})\}$$
$$\rho_{U_p}(\varphi^{n-p}, \psi^{n-p}) = E\{U^p(\varphi^{n-p})\overline{U^p(\psi^{n-p})}\}$$

を各々，平均汎函数，共分散汎函数と呼ぶ。

2° Random current の演算

基本的に付録に述べた current の演算と同じだが，複素係数にした為共役演算*が修正される。$\Phi^{(p)} \ni \varphi = \sum_{[i]} \varphi_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ に対し $\Phi^{(n-p)} \ni {}^*\varphi$ への写像*を

$$(6.2) \qquad {}^*\varphi \equiv \sum_{[i][j][l]} \sqrt{g}\, g^{i_1 l_1} \cdots g^{i_p l_p}\, \bar{\varphi}_{l_1 \cdots l_p}\, \delta\begin{pmatrix} 1\ 2 \cdots\cdots n \\ i_1 \cdots i_p\, j_1 \cdots j_{n-p} \end{pmatrix} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-p}}$$

で定義する。$\varphi, \psi \in \Phi^{(p)}$ に対し $\Phi^{(p)}$ で連続な内積

$$(6.3) \qquad (\varphi, \psi) \equiv \int_M \varphi \wedge {}^*\psi$$

が定義されるが，この内積に対し*は skew-isometry である即ち

$$(6.4) \qquad ({}^*\varphi, {}^*\psi) \equiv \overline{(\varphi, \psi)} \qquad \text{又,}$$

$$(6.5) \qquad (\alpha^q \wedge \varphi^p, \psi^{p+q}) = (\varphi^p, \alpha^q \vee \psi^{p+q})$$

$$(6.6) \qquad (d\varphi^{p-1}, \psi^p) = (\varphi^{p-1}, \delta\psi^p)$$

が成立する。即ち，演算 $\alpha^q\wedge$ の共役作用素は $\alpha^q\vee$，外微分 d の共役作用素は δ である。従って $\Delta = d\delta + \delta d$ は正値自己共役。

但し，ここで*は上の意味で $\alpha^q \vee \psi^{p+q} = (-1)^{p(n-p-q)} {}^*(\alpha^q \wedge {}^*\psi^{p+q})$
証明は付録参照。

定義 6.3. U^p を p次の random current とするとき

$$dU^p(\varphi^{n-p-1}) \equiv (-1)^{p+1} U^p(d\varphi^{n-p-1})$$
$$\langle U^p, \varphi^p \rangle \equiv U^p({}^*\varphi^p)$$
$${}^*U^p(\varphi^p) \equiv (-1)^{p(n-p)} \overline{U^p({}^*\varphi^p)} = (-1)^{p(n-p)} \overline{\langle U^p, \varphi^p \rangle}$$
$$\delta U^p \equiv (-1)^{n(p-1)+1} {}^*d\, {}^*U^p$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

このとき次の公式が成立する.

$$\begin{aligned}
&\langle dU^{(p-1)}, \varphi^p \rangle = \langle U^{p-1}, \delta\varphi^p \rangle \\
(6.7)\quad &\langle U^p, d\varphi^{p-1} \rangle = \langle \delta U^p, \varphi^{p-1} \rangle \\
&\langle \Delta U^p, \varphi^p \rangle = \langle U^p, \Delta\varphi^p \rangle
\end{aligned}$$

（証明） $\langle dU^{(p-1)}, \varphi^p \rangle = dU^{(p-1)}({}^*\varphi^{p-1}) \equiv (-1)^p U^p(d{}^*\varphi^{p-1}) = U^{p-1}({}^*\delta\varphi^{p-1}) = U^p(\delta\varphi^{p-1})$. 以下２番目も同様. $\Delta = d\delta + \delta d$ から上の二つを繰かえして使えば、３番目は明らか。

$U^{i_1\cdots i_p}(\varphi) \equiv U^p(\varphi dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})$　$\varphi \in \Phi^{(0)}$ とおき

$${}^*U^p \equiv \sum_{[i]} U^{i_1\cdots i_p} L_{i_1}\wedge\cdots\wedge L_{i_p}, \quad L_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$$

とおけば

$${}^*U^p(\varphi^p) = \sum_{[i]} U^{i_1\cdots i_p}(\varphi_{i_1\cdots i_p}) = \langle {}^*U^p, \varphi^p \rangle$$

と考えることも出来る。最後の項の＜　，＞は、接ベクトルと、微分の間の共役を表わす。

例. 6.3.　Lévy の n 次元径数の Brown運動 $B_0(x)$ は、ほとんど全ての ω に対し、標本函数が連続であった。従って、$\varphi \in \Phi^{(n)}$ に対し

$$B_0(\varphi) = \int_{R_0^n} B(x)\varphi(x)\,dx$$

で 0－次（n－次）の random current（超確率場）と考えられる。この外微分 $dB(\varphi^{n-1})$ により１次の random current を考える。

$$dB({}^*\varphi') = \sum_{k=1}^{n} B\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\varphi_k\right) = B\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}\varphi_k\right)$$

この特性汎函数は

$$C(\varphi') = \chi({}^*\varphi') = \exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\iint |x-y| \frac{\partial}{\partial x^k}\varphi_k(x)\frac{\partial}{\partial y^k}\varphi_k(y)\,dx\,dy\right]$$

である。

3° random measure

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ をある確率空間、$L_0^2(\Omega) = L^2(\Omega) \ominus C$ とし、C^∞ Riemann manifold M 上のある測度 $m(dx)$ に対し、M 上の可測集合 Λ から $L_0^2(\Omega)$ への写像 $Z(\Lambda)$ が与えられ、

$$(6.8)\quad E\, Z(\Lambda_1)\overline{Z(\Lambda_2)} = m(\Lambda_1\cap\Lambda_2) \qquad \forall \Lambda_1, \Lambda_2$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

を充すとき、$Z(\Lambda)$ を M 上の m に対する random measure という。適当な確率空間でこのような (6.8) を充す $Z(\Lambda)$ が存在することは、$m(\Lambda_i \cap \Lambda_j)$ が正定符号なことから、Gaussian 測度の存在定理により明らか。$m(\Lambda_i \cap \Lambda_j)$ が正定符号であることは、χ_{Λ_j} を Λ_j の定義函数とし

$$0 \leq \int \Big| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{\Lambda_j} \Big|^2 dm = \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \, m(\Lambda_i \cap \Lambda_j)$$

による。

$\varphi(x)$ を $\int |\varphi|^2 dm < \infty$ なる函数とすると、$\varphi(x)$ は simple function で、$L^2(m)$ − 近似が出来る。

$$\varphi(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_j \alpha_j^{(N)} \chi_{\Lambda_j^{(N)}}(x)$$

simple function に対しては

$$\int \sum \alpha_j \chi_{\Lambda_j}(x) \, dZ(x) \equiv \sum \alpha_j Z(\Lambda_j)$$

で積分を定義し、φ に対しては

$$(6.9) \qquad \int \varphi(x) \, dZ(x) = \operatorname*{l.i.m}_{N \to \infty} \int \sum \alpha_j^{(N)} \chi_{\Lambda_j^{(N)}} \, dZ(x)$$

で積分を定義する。右辺の平均収束は $L^2(\Omega)$ での平均収束を意味する。この右辺が平均収束することは一般に、simple function の積分に対し、

$$E \Big| \int \sum \alpha_j \chi_{\Lambda_j}(x) \, dZ(x) \Big|^2 = \int \Big| \sum_j \alpha_j \chi_{\Lambda_j}(x) \Big|^2 dm(x)$$

なる isometry が成立するから $\{ \sum_j \alpha_j^{(N)} \chi_{\Lambda_j^{(N)}} \}_{N=1}^{\infty}$ が Cauchy 列なことから (6.9) の右辺が Cauchy 列となって収束が言える。更に上にのべた isometry は極限でも保存されるから、$\int \varphi(x) \, dZ(x)$ が近似列によらぬことと

$$(6.10) \qquad E \Big\{ \int \varphi(x) \, dZ(x) \cdot \overline{\int \psi(x) \, dZ(x)} \Big\} = \int \varphi(x) \overline{\psi(x)} \, dm(x)$$

がわかる。

$\varphi \in \Phi^{(0)}$ に対して $Z(\varphi) \equiv \int \varphi \, dZ(x)$ は $\Phi^{(0)}$ から $L^2_0(\Omega)$ への連続線型変換を与えること、即ち、Z が $n-1$ 次の random current (in L^2) (従って in F) であることは、(6.10) から明らかである。

M の各点 x で、任意の接 p-vector $a_p(x)$, $b_p(x)$ に対しその座標近傍 V での測度、$m(dx, a_p, b_p)$ が存在し $\Lambda \subset V$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$m(\Lambda; a_p, b_p)$ は、(a_p, b_p) の双線型形式、$m(\Lambda; a_p, a_p)$ は局所有限な正測度、$y \in V$ なる y の 座標近傍 V_1 に対し、$V \cap V_1$ では

(6.11) $\quad m(dx; a_p(x), b_p(x)) = m(dy; a_p(y), b_p(y))$

が成立するとする。

$Z_p(\Lambda, a_p) \in L^2_n(\Omega)$ は、$\Lambda \subset V$ を固定したとき、

$$a_p \longrightarrow Z_p(\Lambda, a_p)$$

は、線型変換、であって

$$E\{Z_p(\Lambda; a_p)\, Z_p(\Lambda, b_p)\} = m(\Lambda; a_p, b_p)$$

を充すとする。ここで

$$Z^{i_1 \cdots i_p}(\Lambda) \equiv Z_p\left(\Lambda; \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right)$$

$$Z_p(\Lambda) \equiv \sum_{[i]} Z_p^{i_1 \cdots i_p}\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right)$$

とおけば、$\varphi^p(x) \in \Phi^{(p)}$ に対し

(6.12) $\quad Z_p(\varphi^p) \equiv \int \langle Z_p(dx), \varphi^p(x) \rangle = \sum_{[i]} \int Z^{i_1 \cdots i_p}(dx)\, \varphi_{i_1 \cdots i_p}(x)$

と定義すれば、$Z_p(\varphi^p)$ は $n-p$ 次の random current である。そして

(6.13) $\quad E Z_p(\varphi^p)\overline{Z_p(\varphi^p)} = \sum_{[i][j]} \int \varphi_{i_1 \cdots i_p}(x)\, \overline{\varphi_{j_1 \cdots j_p}(x)}\, dm\left(x; \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}, \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right)$

この $Z_p(\cdot)$ を P 次の random measure と呼ぼう

特に、$Z_p(\varphi^p)$ の特性函数 $\chi(\varphi^p) = E\exp[i \operatorname{Re} Z_p(\varphi^p)]$ が、

(6.14) $\quad \chi(\varphi^p) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{[i][j]} \int \varphi_{i_1 \cdots i_p}(x)\, \overline{\varphi_{j_1 \cdots j_p}}(x)\, dm\left(x; \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_p}}\right)\right]$

のときに、$Z_p(\cdot)$ を p 次の Gaussian random measure という。

4°. de・Rham – Kodaira の分解

M を compact 可符号な Riemann 多様体とする。$\Phi^{(p)}$ に (6.3) で内積を定義した準 Hilbert 空間は、次の三つの線型部分空間の直和にわかれる。

(i) $\Phi_\Delta^{(p)}$ ： 調和形式全体のつくるもの即ち

$$\Phi_\Delta^{(p)} = \{\varphi \in \Phi^{(p)} ;\ \Delta\varphi = 0\}$$

(ii) $\Phi_d^{(p)}$ ； d－境界全体のつくるもの、即ち

$$\Phi_d^{(p)} = \{\varphi \in \Phi^{(p)} ;\ \varphi = d\psi,\ \psi \in \Phi^{(p-1)}\}$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

(iii) $\Phi_\delta^{(p)}$; δ-境界全体のつくるもの 即ち

$$\Phi_\delta^{(p)} = \{ \varphi \in \Phi^{(p)} ; \ \varphi = \delta \psi , \ \psi \in \Phi^{(p+1)} \}$$

任意の $\varphi \in \Phi^{(p)}$ に対し

$$(6.14) \qquad \varphi = H\varphi + \Delta G\varphi = H\varphi + d\delta G\varphi + \delta d G\varphi$$

但し、H は φ の調和部分への射影、G は φ を $\Delta\alpha = \varphi - H\varphi$. $H\alpha = 0$ の一意な解 $\alpha = G\varphi$ にうつす作用素で Green 積分作用素といわれる。これが、de Rham-Kodaira の直交分解定理である。証明は Akizuki [1] を参照願うことにして、我々は、Radon current の分解を考えよう。p 次の current T に対し

$$(6.15) \qquad \begin{aligned} \langle HT, \varphi \rangle &= \langle T, H\varphi \rangle \\ \langle GT, \varphi \rangle &= \langle T, G\varphi \rangle \end{aligned} \qquad \varphi \in \Phi^{(p)}$$

により HT, GT を定義すると

$$(6.14)' \qquad T = HT + d\delta GT + \delta d GT$$

を得る。そこで

random current $U^p(\ )$ に対しても、HU^p、GU^p が定義出来 U^p は

$$(6.16) \qquad U^p = HU^p + d\delta GU^p + \delta dGU^p$$

と一意に分解される。

例. 6.4. $Z_p(A)$ を random measure で

$m(dx ; a_p . b_p) = (a_p(x), b_p(x))\,dx$ に対応するものとしよう。

このとき、$E\{Z_p(\varphi^p)\overline{Z_p(\psi^p)}\} = \sum_{[i]} \int \varphi_{i_1\cdots i_p}(x) \bar{\psi}(x)_{i_1\cdots i_p}\, dx = (\varphi_p , \psi_p)$

であるから、HZ_p, $d\delta GZ_p$, δdGZ_p は互に直交する。

例. 6.5. $U^{(0)}$ を 0 次の radom current とすれば M が compact だから、$HU^{(0)}$ は constant 確率変数 $d\delta GU^{(0)} = 0$ により、(6.16) は「U^p から適当な定確率変数を引けば δ 境界になる.」と、言いかえられる。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

5° 各点独立な random current.

1° で p 次の random current U^p の特性汎函数 $\chi(\varphi^{n-p})$ を

(6.17) $\quad \chi(\varphi^{n-p}) = E\{\exp[i\,Re\, U^p(\varphi^{n-p})]\}$

で定義した。2° で定義された演算 $\langle U^p, \varphi^p\rangle = U^p(*\varphi^p)$ を使って

(6.18) $\quad C(\varphi^p) = E\{\exp[i\,Re\langle U^p, \varphi^p\rangle]\} = \chi(*\varphi^p)$

をも U^p の特性汎函数と呼ぶことにしよう。

$\varphi^p \in \Phi^{(p)}$ に対して $Car(\varphi^p) = \bigcup_{[i]} carrier(\varphi_{i_1 \cdots i_p})$ とおく

定義 6.4. Random current U^p の特性汎函数 $C(\varphi^p)$ が

(6.19) $\quad Car(\varphi^p) \cap Car(\psi^p) = \phi \Longrightarrow C(\varphi^p + \psi^p) = C(\varphi^p)\,C(\psi^p)$

なる条件を充すとき、U^p を各点独立な random current という。

M上の運動に対して不変な特性汎函数 C をもつ各点独立な random current の class を決めることを目標としよう。しかしそれはむつかし過ぎることは [17] におけるアファイン空間の例からみてもわかる。そこでもう少し特殊な場合を考える。$M \ni x$ における接空間 $T_x(M)$ において、Riemann 計量 g から定まる正規直交系を $(e_1, \cdots, e_n)$、これに双対な微分形式の基底を $(f^1, \cdots, f^n)$ とする。M上の P-ベクトル field の作るバンドル空間 $\mathbb{B}$ $\mathbb{B}^p$ 内の単位ベクトル即ち $v_p = \sum_{[i]} v^{i_1 \cdots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} = \sum_{[i]} u^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \in \mathbb{B}$

$\sum_{[i]} |u^{i_1 \cdots i_p}|^2 = (v_p, v_p) = 1$ なもの全体の作る部分空間を $\mathbb{B}_1$ と記す。$\mathbb{B}, \mathbb{B}_1$ は共に C^∞-Riemann 多様体で、M がコンパクトならば $\mathbb{B}_1$ もコンパクトである。

σ を M の運動とすれば、σ が接空間に引起す変換は座標 $(e_1, \cdots, e_n)$ によって、$d\sigma = (\sigma^i_j)$、$d\sigma\, e_j = \sum e_i \sigma^i_j$ と表わされ、σ^i_j は直交行列である。このとき σ は $\mathbb{B}^p_1$ の運動を導く。$v_p \in \mathbb{B}^p_1$ を一つ固定したとき、$\Phi^{(p)}$ 上のディラック函数 $Y_{x,v}(\varphi^p)$ を、

(6.20) $\quad Y_{x,v}(\varphi^p) = \sum_{[i]} \varphi_{i_1 \cdots i_p}(x)\, v^{i_1 \cdots i_p}(x)$

によって定義する。$M \ni x$ を固定すれば、あきらかに $Y_{x,v}(\varphi^p)$ は $n-p$ 次の current であり、v, φ^p を固定すれば $Y_{(v_p;\varphi^p)}(x) = Y_{x,v_p}(\varphi^p)$ はコンパクトな台をもつ C^∞-函数である。即ち $Y_{(v_p;\varphi^p)}(x) \in \Phi^{(0)}$。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

今 f を複素数変数の連続函数として

(6.21) $$C(\varphi) = \exp\left[\int_{B_1^p} f(Y_{x v}(\varphi))\, dv\right]$$ dv は B_1^p の体積要素

と $\Phi^{(p)}$ 上の汎函数 $C(\varphi)$ を定義すれば

Proposition 6.1. $C(\varphi)$ を (6.21) で定義される $\Phi^{(p)}$ 上の汎函数とすると、

(i) $Car(\varphi^p) \cap Car(\psi^p) = \phi$ ならば

(6.19) $$C(\varphi^p + \psi^p) = C(\varphi^p)\, C(\psi^p)$$

(ii) σ を M の運動とすれば

(6.22) $$C(\sigma\varphi^p) = C(\varphi^p)$$

(証明) もし $Car(\varphi^p) \cap Car(\psi^p) = \phi$ ならば

$$C(\varphi^p + \psi^p) = \exp\int_{B_1^p} f(Y_{x,v}(\varphi^p + \psi^p))\, dv$$

$$= \exp\left[\int_{B_1^p \cap Car(\varphi^p)\times S^m} f(Y_{x v}(\varphi^p+\psi^p))\, dv + \int_{B_1^p \cap Car(\psi^p)\times S^m} f(Y_{x v}(\varphi^p+\psi^p))\, dv\right]$$

$$= C(\varphi^p)\cdot C(\psi^p)$$

ここで $S^m = S^{\binom{n}{p}-1}$ は $m+1=\binom{n}{p}$ 次元 同接空間の m 次元球面、とする

$$C(\sigma\varphi) = \exp\int f(Y_{x,v}(\sigma\varphi))\, dv$$
$$= \exp\int f(Y_{\sigma x \cdot \sigma v}(\varphi))\, dv$$
$$= \exp\int f(Y_{x,v}(\varphi))\, dv.$$

何故ならば dv は σ に関して不変な測度。(σ は M の Riemann 計量 (g_{ij}) を不変にし、$T_x(M)$、従ってその上の p 次の Grassmann 代数の上で $d\sigma$ が直交変換!) 又、

$$Y_{x.v}(\sigma\varphi) = Y_{x.v}\Big(\sum_{(i)} \varphi_{i_1\cdots i_p}(\sigma x)\,(d\sigma)^*(f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_p})\Big)$$

$$= \sum_{(i)(j)} \varphi_{i_1\cdots i_p}(\sigma x)\, v^{j_1\cdots j_p} \langle f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_p},\ d\sigma(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p})\rangle$$

$$= Y_{\sigma x, \sigma v}(\varphi)$$

による。

Proposition 6.2.

(6.21) の型の汎函数 $C(\varphi)$ がある各点独立な random current の特性汎函数である為の必要十分条件は $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $f(z) = f(\xi_1, \xi_2)$ $z =$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$z = \xi_1 + i\xi_2$ と記せば、$f(\xi_1, \xi_2)$ が

$$(6.23) \qquad f(\xi_1, \xi_2) = \sum_{|k|=0}^{2} a_k \frac{(i\xi)^k}{k!} + \int_{|\lambda| \neq 0} \left[e^{i\lambda\cdot\xi} - \alpha(\lambda)(1 + i\lambda\cdot\xi) \right] dF(\lambda)$$

と表現されることである。

但し $\{a_k\}_{|k|=2} = \{a_{ij}\}_{i+j=2}$ は正定符号行列，$dF(\lambda) = dF(\lambda_1, \lambda_2)$ は $|\lambda| > 0$ での正測度で $\int_{|\lambda| \neq 0} \frac{|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2} dF(\lambda) < \infty$ なもの

$\alpha(\lambda) \in Z$.（$\mathcal{D}$ の Fourier 変換の空間）であり $\alpha(\lambda) - 1$ は $\lambda = 0$ で 3 位の零点をもち．$\int_{|\lambda| \neq 0} [1 - \alpha(\lambda)] dF(\lambda) + a_0 = 0$.

（証明） (6.21) の $C(\varphi)$ が各点独立な random current の特性汎函数である為の必要十分条件は、Bochner-Minlos の定理の条件 i) と iii) を充すことである。 i) が成立する為の必要十分条件は、$f(0) = 0$ が成立することだから Shönberg の定理により $f(\xi_1, \xi_2)$ が conditionally negative definite なことが、iii) の成立する必要十分条件になる。[17] p. 352 によれば、$f(\xi_1, \xi_2)$ は、(6.23) の形に表現されることが、その為の必要十分条件である。 （証明終）

Proposition 6.2 において特に $dF(\lambda) = 0$ のときには、$\{\mathrm{Re}\langle U^p, \mathrm{Re}\,\varphi^p\rangle, \mathrm{Im}\langle U^p, \mathrm{Re}\,\varphi^p\rangle ; \varphi^p \in \Phi^{(p)}\}$ が Gaussian system になる。更に $a_{11} = a_{22}$. $a_{12} = a_{21} = 0$ $a_1 = a_2$ のときには、$\{\langle U^p, \varphi^p\rangle ; \varphi^p \in \Phi^{(p)}\}$ は複素 Gaussian system になる。又、$a_{22} = a_{12} = a_{21} = = a_2 = 0$ の場合は、本質的に言って、実 Gaussian system である。即ち、$\mathrm{Im}\langle U^p, \mathrm{Re}\,\varphi^p\rangle = 0$ a.e. 従って $\{\langle U^p, \mathrm{Re}\,\varphi^p\rangle\}$ は実 Gaussian system である。このことは かかる random current は実係数のコンパクトな台をもつ C^∞ P次微分形式全体の空間の共役空間の測度として構成できることを意味している。

以上の理由で $dF(\lambda) = 0$ の、各点独立な random current の測度を、仮に Gaussian 測度と呼んでおこう。この場合にはもっと具体的に 特性汎函数が決まる。φ, v ともに $\{f^i\}$ 及び $\{e_i\}$ を使って表示して

$$\int |Y_{x,v}(\mathrm{Re}\,\varphi^p)|^2 \, dv = \sum_{[i][j]} \int_{B_1^p} \mathrm{Re}\,\varphi_{i_1\cdots i_p} u^{i_1\cdots i_p} \mathrm{Re}\,\varphi_{j_1\cdots j_p} u^{j_1\cdots j_p} \, dv$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$= \frac{(n-p)!p!}{n!} \sum_{[i]} \int_M |\mathrm{Re}\,\varphi_{i_1\cdots i_p}|^2 dx$$

$$= \frac{(n-p)!p!}{n!} (\mathrm{Re}\,\varphi^p, \mathrm{Re}\,\varphi^p)$$

同様に $\int |Y_{x,v}(\mathrm{Im}\,\varphi^p)|^2 dv = \frac{(n-p)!p!}{n!} (\mathrm{Im}\,\varphi^p, \mathrm{Im}\,\varphi^p)$

$$\int Y_{x,v}(\mathrm{Re}\,\varphi^p)\, Y_{x,v}(\mathrm{Im}\,\varphi^p)\, dv = \frac{(n-p)!p!}{n!} (\mathrm{Re}\,\varphi^p, \mathrm{Im}\,\varphi^p)$$

が計算される。又

$$\int Y_{x,v}(\mathrm{Re}\,\varphi^p)\, dv = \sum_{[i]} \int_{B_1^p} \mathrm{Re}\,\varphi_{i_1\cdots i_p} u^{i_1\cdots i_p}\, dv = 0$$

$\int Y_{x,v}(\mathrm{Im}\,\varphi^p)\, dv = 0$ も同じくわかる。

定数は適当にかえて

(6.24) $C(\varphi^p) = \exp[-\frac{1}{2}\{a_{11}(\mathrm{Re}\,\varphi^p, \mathrm{Re}\,\varphi^p) + 2a_{12}(\mathrm{Re}\,\varphi^p, \mathrm{Im}\,\varphi^p) + a_{22}(\mathrm{Im}\,\varphi^p, \mathrm{Im}\,\varphi^p)\}]$

を得る。

アファイン空間にならって、$a_1 = a_2$ $a_{12} = a_{21} = 0$ の場合に M 上の複素 Gaussian white noise, $a_2 = a_{12} = a_{21} = 0$ のときに M 上の実 Gaussian white noise と呼んでよいと思う。

Gaussian 以外の場合はどうなるであろうか，それには 次の積分の計算をすればよい。

$$\int_{B_1^p} (e^{i Y_{x,v}(\mathrm{Re}\,\varphi^p)\lambda_1 + i Y_{x,v}(\mathrm{Im}\,\varphi^p)\lambda_2} - 1)\, dv$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_M \left\{ Y_m\left(\sqrt{\sum_{[i]} (\lambda_1 \mathrm{Re}\,\varphi_{i_1\cdots i_p} + \lambda_2 \mathrm{Im}\,\varphi_{i_1\cdots i_p})^2}\right) - 1 \right\} dx$$

但し $m = \binom{n}{p}$, $Y_m(t) = 2^{\frac{m-2}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) t^{-\frac{m-2}{2}} J_{\frac{m-2}{2}}(t)$

よって

$$C(\varphi^p) = \exp[-\tfrac{1}{2}\{a_{11}\|\mathrm{Re}\,\varphi^p\|^2 + 2a_{12}(\mathrm{Re}\,\varphi^p, \mathrm{Im}\,\varphi^p) + a_{22}\|\mathrm{Im}\,\varphi^p\|^2\} + ia_1 \int \mathrm{Re}\,\varphi^p dx + a_2 \int \mathrm{Im}\,\varphi^p dx]$$

$$\times \exp\left[\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \iint_M \left\{ Y_m\left(\sqrt{\sum_{[i]} (\lambda_1 \mathrm{Re}\,\varphi_{i_1\cdots i_p} + \lambda_2 \mathrm{Im}\,\varphi_{i_1\cdots i_p})^2}\right) - 1 \right\} dx\, dF(\lambda)\right]$$

以上で (6.21) の型の特性汎函数をもつ各点独立な random current はわかったが、(6.21) の制限は強過ぎた感がある。それは実際に Riemann 多様体の運動は非常に少ないかも知れないのに、あり得るもの全部に対して

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

の不変性を条件付けたことに因がある.
例えば 0次の場合には、(6.21)の代りに

$$(6.25)\qquad C(\varphi) = \exp\left[\int_M f(\varphi(x))\,dx\right] \qquad \varphi \in \Phi^{(0)}$$

なる型の汎函数は、運動に関して不変だから、これで十分である。
(6.25)の型で 特性汎函数になる爲の必要十分条件は f が(6.23)で表現されることである。よってこのときは、

$$(6.26)\qquad C(\varphi)=\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big\{a_{11}\int|\mathrm{Re}\,\varphi|^2dx+2a_{12}\int\mathrm{Re}\,\varphi\,\mathrm{Im}\,\varphi\,dx+a_{22}\int|\mathrm{Im}\,\varphi|^2dx\Big\}$$
$$+ia_1\int\mathrm{Re}\,\varphi\,dx+ia_2\int\mathrm{Im}\,\varphi\,dx+a_0$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{e^{i(\lambda_1\mathrm{Re}\,\varphi+\lambda_2\mathrm{Im}\,\varphi)}-\alpha(\lambda)\big[1+i\lambda_1\mathrm{Re}\,\varphi+i\lambda_2\mathrm{Im}\,\varphi\big]\Big\}dx\,dF(\lambda)\Big]$$

である。Gaussian white noise のときには、平均を除外して(6.24)と(6.26)は一致する。

(6.26)の型の各点独立な、random current、というよりは、むしろ各点独立な超確率場に関して、多重 Wiener 積分が論じられるが、別な機会にゆずってここでは深く立入らないことにする。

例. 6.6. 3°で述たGaussian random measure で特に、$m(dx, a_p, b_p) = (a_p, b_p)\,dx$ を充すもの、即ち 例6.4.にあげた場合は、各点独立な $n-p$ 次の random current である。この特性汎函数 $\chi(\varphi^p)$ は

$$\chi(\varphi^p)=E\{\exp[i\,\mathrm{Re}\,Z_p(\varphi^p)]\} = \exp\left[-\frac{1}{2}(\varphi^p, \varphi^p)\right]$$

即ち、複素 Gaussian white noise である。

例. 6.7. §3. Chantsov の white noise W_c は、Mとして n次元アファイン空間の $n-1$ 次元超平面としてとったときの、実 Gassian white noise である。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

§7. ユークリッド空間 R_0^n 上の Random current

この章では Riemann 多様体として n 次元アファイン空間 R^n を考える。しかしこれに適当な原点を決め、n 次元ユークリッド空間 R_0^n とみなす。その正規直交系 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ を固定する。これによる座標系 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ をとれば $dx^1, \cdots, dx^n$ を一次微分形式の直交基と見られる。即ち $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ が接空間における直交基になる。又、ハンドル空間 B は $B = R_0^n \times R_0^n$ と考えられ、接空間、一次微分形式は、共に R_0^n に同型である。

$dx^i \longleftrightarrow e_i \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^i}$ その意味で dx^i の代りに e_i で表わす。

$$\Phi^p \ni \varphi^p = \sum_{[i]} \varphi_{i_1 \cdots i_p}(x)\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

の各係数は $\varphi_{i_1 \cdots i_p}(x) \in \mathcal{D}$ (Schwart の $\mathcal{D}$) 即ち compact support をもつ C^∞ 函数、従って $\Phi^{(p)}$ は $\mathcal{D}$ の ${}_nC_p = n!/p!(n-p)!$ の直積空間と同型である。それは又 p 次の current の空間 $\Phi^{(p)\prime}$ は $\mathcal{D}'$ の ${}_nC_p$ ケの直積 或は p 次のテンソル積と同型であることを意味している。更に φ^p は p-vector field と考えることも出来る。

$g_{ij} = \delta_{ij}$ ということから 種々の作用素、量が簡単な形をしている。

$$d\varphi^p(x) = \sum_{k[i]} \frac{\partial \varphi_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^k}\, e_k \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

$${}^*\varphi^p(x) = \sum_{[i][j]} \overline{\varphi}_{i_1 \cdots i_p}\, \delta\binom{1, 2 \cdots\cdots n}{i_1 \cdots i_p\, j_1 \cdots j_{n-p}} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-p}}$$

$$\delta\varphi^p(x) = -\sum \frac{\partial \varphi_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x_k}\, \delta\binom{k\, j_1 \cdots j_{p-1}}{i_1 \cdots\cdots i_p} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{p-1}}$$

$$\langle \varphi^p\ \psi^p \rangle = \sum \int_{R^n} \varphi_{i_1 \cdots i_p}\, \psi_{i_1 \cdots i_p}\, dx$$

$$\Delta \varphi^p(x) = -\sum_{k[i]} \frac{\partial^2 \varphi_{i_1 \cdots i_p}}{\partial {x^k}^2}\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

$$= -\sum_{[i]} (lap)\, \varphi_{i_1 \cdots i_p}\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

ただし C^∞ 函数 α に対 $(lap)\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^k} \alpha$

又 a^p を p-vector, 即ち $a^p = \sum a_{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ とするとき C^∞-函数 $\alpha(x)$ に対して $\alpha(x) a^p$ は C^∞-微分形式 (C^∞-p-vector) ともみなせる。そこで

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$T_{i_1 \cdots i_p}(\varphi) \equiv T^p(\varphi^* e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p})$ とおこう。$X < T^p, a_p > (\varphi)\ \varphi \in \mathcal{D}$ を

$$(T^p, a_p)(\varphi) = T^p(\varphi^* a_p) = \sum T_{i_1 \cdots i_p}(\varphi)\, a^{i_1 \cdots i_p}$$

で定義する。

アファイン空間 R^n の運動群とその変移からなる部分群を考える。

$$\tau_h \ ; \ x \to x + h$$

$$(7.2) \qquad \sigma_h \varphi^p(x) \equiv d\tau_h \ [\varphi^p(x+h)]$$

$$(\sigma_h U^p)(\varphi^{n-p}) \equiv U^p(\sigma_h^{-1} \varphi^{n-p}) = U^p(\sigma_{-h} \varphi^{n-p})$$

定義 7.1. random current U^p において、その特性汎函数が

$$\chi(\sigma_h \varphi) = \chi(\varphi) \quad \forall h$$

を充すとき homogeneous random current と呼ぶ。

もし random current $U^p(\varphi^{n-p})$ が二次のモーメントをもち、random current (in L^2) と見なせるとき、$\Phi^{(n-p)}$ 上の連続線形汎函数、及び連続双線形汎函数

$$(7.3) \qquad m_{U^p}(\varphi^{n-p}) \equiv E\{U^p(\varphi^{n-p})\}$$

$$\rho_{U^p}(\varphi^{n-p}, \psi^{n-p}) \equiv E\{U^p(\varphi^{n-p})\, \overline{U^p(\psi^{n-p})}\} - m_{U^p}(\varphi^{n-p})\, \overline{m_{U^p}(\psi^{n-p})}$$

を夫々、平均線形汎函数、(mean linear functional) 及び 共分散双線形汎函数 (covariance bilinear functional) と呼んだ。又、$\Phi^{(p)}$ 上の汎函数

$$(7.4) \qquad m^*(\varphi^p) \equiv E\{< U^p, \varphi^p >\}$$

$$\rho^*(\varphi^p, \psi^p) \equiv E\{< U^p, \varphi^p > \overline{< U^p, \psi^p >}\} - m^*(\varphi^p)\, \overline{m^*(\psi^p)}$$

を夫々、平均反線形汎函数 (mean anti-linear functional) 及び共分散反双線形汎函数 (covariance anti-bilinear functional) と呼ぶ。簡単のため単に平均汎函数、共分散汎函数と呼んでおこう。又、p-vector a^p, $\varphi \in \Phi^{(0)} = \mathcal{D}$ に対し、又 $< U^p, a^p > (\varphi)$ を考え

$$(7.5) \qquad \rho(\varphi, \psi ; a^p, b^p) = E\{(U^p, a^p)(\varphi)\, \overline{(U^p, b^p)(\psi)}\} - E(U^p, a^p)(\varphi)\, \overline{E(U^p, b^p)(\psi)}$$

$$= \rho^*(\varphi a^p, \psi b^p) = \rho_{U^p}(\varphi^* a^p, \psi^* b^p)$$

を 共分散双線形形式 (covariance bilinear form) という。

定義 7.2. random current U^p において、共分散汎函数 $\rho^*(\varphi, \psi)$ が存在し、φ, ψ に関して連続、

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$(7.6)\qquad \begin{aligned} m(\sigma_h\varphi) &= m(\varphi) \\ \rho^*(\sigma_h\varphi,\ \sigma_h\psi) &= \rho^*(\varphi,\psi) \quad {}^\forall h \end{aligned}$$

が成立するとき、weakly homogeneous random current と言う。

あきらかに homogeneous random current が連続な共分散函数をもてば weakly に homogeneous である。

weakly homogeneous random current においては 共分散汎函数 $\rho(\varphi,\psi)$ は $\Phi^{(p)}$ 上の 正値連続で双線形な汎函数であり、共分散双線形形式 $\rho(\varphi.\psi\ ;a^p.\ b^p)$ は $(\varphi.\psi)$ の 双線形な汎函数であり $(a^p.\ b^p)$ の反双線形形式である。

2° 共分散汎函数のスペクトル分解

以下 weakly な homogeneous random current の K. Ito のスペクトル分解の紹介をする。簡単のため平均汎函数 $m(\varphi)=0$ を仮定する。

Proposition 7.1. 共分散双線形形式 $\rho(\varphi.\psi,\ a^p.\ b^p)$ が $(\varphi.\psi)$ について連続、且つ

$$(7.7)\qquad \rho(\tau_h\varphi,\ \tau_h\psi\ ;a^p,\ b^p) = \rho(\varphi.\ \psi,\ a^p.\ b^p)$$

を充すことが weakly homogeneous current であることの必要十分条件である。

（証明）

$$\begin{aligned} {}^*\varphi^p &= \sum_{[i]} \bar\varphi_{i_1\cdots i_p}\,\delta\begin{pmatrix} 1 \cdots\cdots\cdots n \\ i_1\cdots i_p\, j_1 \cdots j_{n-p}\end{pmatrix} e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p} \\ &= \sum_{[i]} \bar\varphi_{i_1\cdots i_p}\ {}^*(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(\tau_h\varphi,\ \tau_h\psi) &= \rho\Big(\sum_{[i]} \tau_h\varphi_{i_1\cdots i_p}\ {}^*(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}),\\ &\qquad\qquad \sum_{[j]} \tau_h\ \psi_{j_1\cdots j_p}\ {}^*(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}) \\ &= \sum_{[i][j]} \rho\big(\sigma_h\varphi_{i_1\cdots i_p}{}^*(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}),\ \sigma_h\psi_{j_1\cdots j_p}{}^*(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p})\big) \\ &= \sum_{[i][j]} \rho(\sigma_h\bar\varphi_{i_1\cdots i_p},\ \sigma_h\bar\psi_{j_1\cdots j_p}\ ;\ e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},\ e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}) \\ &= \sum_{[i][j]} \rho(\bar\varphi_{i_1\cdots i_p},\ \bar\psi_{j_1\cdots j_p};\ e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},\ e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}) \end{aligned}$$

により明らか。　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

定理 7.1.

Weakly homogeneous random current の共分散双線形形式は次の形に表現できる。

$$(7.8)\quad \rho(\varphi, \psi\ ;\ a^p, b^p) = \int_{R_0^n} \tilde{\varphi}(y)\, \bar{\tilde{\psi}}(y)\ m(dy\ ;\ a^p, b^p)$$

ただし $m(\Lambda\ ;\ a^p, b^p)$ は Λ を fixed するとき (a_p, b_p) の正値反双線形形式, $m(\Lambda\ ;\ a^p, b^p)$ は緩増加正測度、$\tilde{\varphi}$ は φ の Fourier 変換

$$\tilde{\varphi}(y) = \int \varphi(x)\, e^{iyx}\, dx$$

逆に上の式で定義される ρ は homogeneous random current の共分散線形形式である。

(証明) $\rho(\varphi, \psi\ ;\ a^p, a^p)$ は $\mathfrak{D}$ 上の連続正値 transitive な Hermitian bilinear functional であるから Proposition 1.4 により (例えば Gelfand [17] 参照)

$$\exists\ m(\Lambda\ ;\ a_p, a_p)\ ;\ \text{緩増加な測度}$$

$\rho(\varphi, \psi\ ;\ a^p, b^p)$ が (b^p, a^p) の bilinear form だから

$$\rho(\varphi, \psi\ ;\ a^p, b^p) = \frac{1}{4}\{\rho(\varphi, \psi\ ;\ (a^p+b^p), (a^p+b^p)) - \rho(\varphi, \psi\ ;\ a^p-b^p, a^p-b^p)$$
$$- i\rho(\varphi, \psi\ ;\ a^p+ib^p, a^p+ib^p) + i\rho(\varphi, \psi\ ;\ a^p-ib^p, a^p-ib^p)\}$$

従って

$$m(\Lambda\ ;\ a^p, b^p) = \frac{1}{4}\{m(\Lambda\ ;\ a^p+b^p, a^p+b^p) - m(\Lambda\ ;\ a^p-b^p, a^p-b^p)$$
$$- im(\Lambda\ ;\ a^p+ib^p, a^p+ib^p) + im(\Lambda\ ;\ a^p-ib^p, a^p-ib^p)\}$$

とおけば

$$\rho(\varphi, \psi\ ;\ a^p, b^p) = \int \tilde{\varphi}(y)\, \bar{\tilde{\psi}}(y)\ m(dy\ ;\ a^p, b^p)$$

一意性は $m(\Lambda\ ;\ a^p, a^p)$ の一意性と上の式で結ばれることから明らか。

逆は $\varphi^p, \psi^p \in \Phi^{(p)}$ に対し

$$\rho(\varphi^p, \psi^p) \equiv \sum_{[i][j]} \rho(\bar{\varphi}_{i_1\cdots i_p}, \bar{\psi}_{i_1\cdots i_p}\ ;\ e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}, e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p})$$

$$C(\varphi^p) \equiv \exp\left[-\frac{1}{2}\rho(\varphi^p, \psi^p)\right]$$

は $\Phi^{(p)}$ 上の連続函数、正定符号, $C(0) = 1$ を充す. よって Bochner-Minlos の定理 1.1' により C を特性汎函数にもつ homogeneous random current が存在する. この covariance functional は $\rho(\varphi^p, \psi^p)$, covariance bilinear form $\rho(\varphi, \psi\ ;\ a^p, b^p)$ である。

又,

$$\rho(\tau_h\varphi, \tau_h\psi\ ;\ a^p, b^p) = \int e^{ihy}\tilde{\varphi}(y)\, e^{-ihy}\,\bar{\tilde{\psi}}(y)\ m(dy\ ;\ a^p, b^p)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$= \int \tilde{\varphi}(y)\,\bar{\tilde{\psi}}(y)\, m(dy\,;a^p\, b^p)$$
$$= \rho(\varphi.\ \psi\ ;\ a^p\ b^p)$$

により homogeneous 性が確められる。

3° スペクトル表現

Z^pを $\Phi^{(n-p)}$から $L^2_0(\Omega)$ への連続な線形写像とする。§6で述べた如く これも又 Random current (in L^2) とみなすことが出来る。§1とは逆の立場で random measure を定義してみよう。

定義 7.3. p次の random current $Z^p(\varphi^{n-p})$ が p次の random measure であるとは locally finite な測度. $m(dy\,;a^p, b^p)$ が存在し、(b^p, a^p) の Hermitian 線形形式であり.

(7.9) $\quad E\{(Z^p, a^p)(\varphi)\overline{(Z^p, b^p)(\psi)}\} = \int \varphi(y)\overline{\psi(y)}\, dm(dy, a^p, b^p)$

が成立するときに言う.

$m(dx\,;a^p, a^p)$ が緩増加のとき $Z^p(\Phi^{n-p})$ が緩増加であると言う。

$Z^p(\Phi^{n-p})$ を緩増加な p次の random measure とする.

$L^2_m \equiv \bigcap_{a^p \in V^p} L^2(m(dx\,;a^p, a^p))$ とおき. $L^2_m \ni f, g$ に対し

$$(f, g)_m = \sum_{[i]} \int f(x)\, g(x)\, m(dx\,;e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},\ e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})$$
$$Z^p(\Lambda, a^p) \equiv \underset{\varphi_n \to \chi_\Lambda}{\mathrm{l.i.m.}}\ (Z^p, a^p)(\varphi_n)$$

但し. $\varphi_n \in \mathcal{D} = \Phi^{(0)}$ を同一のコンパクトな台をもちながら Λ の定義函数 χ_Λ に L^2_m 収束させる。このとき 右辺の平均収束することは

$$\int |(Z^p, a^p)(\varphi_n - \varphi_m)|^2 dP = \int |\varphi_n - \varphi_m|^2 dm(dy\,;a^p\, a^p) \to 0$$

によりわかる. これによって 通常の random measure $Z^p(\Lambda, a^p)$ が定まり

$$E(Z^p(\Lambda_1, a^p)\,\overline{Z^p(\Lambda_2, b^p)}) = m(\Lambda_1 \cap \Lambda_2\ ;\ a^p.\ b^p)$$

をみたす.

$$(Z^p, a^p)(\varphi) = \int \varphi\, Z^p(dy, a^p) \qquad a.e.$$
$$Z^p(dy) \equiv \sum_{[i]} Z_{i_1\cdots i_p}(dy)\ e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$
$$Z_{i_1\cdots i_p}(dy) \equiv Z(dy,\ e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

とおけば

$$Z^p(\varphi^{n-p}) = \overline{(\int Z^p \wedge \varphi^{n-p})^*}$$

$Z^p(\Lambda, a^p)$ は a^p に対して反線形である。
何故ならば、任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し

$$\begin{aligned}\int \varphi(y) Z^p(dy, \alpha a^p + \beta b^p) &= (Z^p, \alpha a^p + \beta b^p)(\varphi) \\ &= Z^p(\varphi(\bar{\alpha}^* a^p + \bar{\beta}^* b^p)) \\ &= \bar{\alpha}\int \varphi Z(dy, a^p) + \bar{\beta}\int \varphi Z(dy, b^p)\end{aligned}$$

よって

$$Z(dy, \alpha a^p + \beta b^p) = \bar{\alpha} Z(dy, a^p) + \bar{\beta} Z(dy, b^p)$$ （証明終）

定理 7.2. weakly homogeneous random current U^p は ある緩増加な random measure Z^p の Fourier 変換である。即ち

(7.10) $$U^p(\varphi^{n-p}) = Z^p(\widetilde{\varphi}^{n-p})$$

（証明） $(U^p, a^p)(\varphi) \equiv U^p(\varphi^* a^p)$ は通常の超確率場で スペクトル測度 $m(dx, a^p, a^p)$ をもつから random measure $Z(dy, a^p)$ が存在して

$$\begin{aligned}E|Z(dy, a^p)|^2 &= m(dy, a^p, a^p) \\ (U^p, a^p)(\varphi) &= \int \widetilde{\varphi} Z(dy, a^p) \qquad a.e.\end{aligned}$$

である。その為には、実は次のことを調べればよい。即ち $\mathcal{E}$: exponential type の entire function の空間、言いかえれば $\mathcal{D}$ の Fourier 変換の空間とする $\mathcal{E} \ni \psi$ に対し $^\exists \varphi \in \mathcal{D}$ $\widetilde{\varphi} = \psi$ であるから $Z(\psi, a^p)$ を

$$Z(\psi, a^p) \equiv (U^p, a^p)(\varphi)$$

で定義することにより $\mathcal{E} \ni \psi \longrightarrow L^2(\Omega)$ への連続な線形変換が与えられる。

$$E|Z(\psi, a^p)|^2 = \int |\psi|^2 m(dy, a^p, a^p)$$

により、それは $L^2(m(dy, a^p, a^p)) \longrightarrow L^2(\Omega)$ への isometric な線形変換に拡張される。$Z(\Lambda, a^p)$ を χ_Λ の像として定義すればよい。

$$\begin{aligned}Z_{i_1\cdots i_p}(dy) &\equiv Z(dy, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) \\ Z^p(dy) &\equiv \sum_{[i]} Z_{i_1\cdots i_p}\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \\ Z_1^p(\varphi^{n-p}) &\equiv \overline{(\int Z^p(dy) \wedge \varphi^{n-p})^*} \\ &= \sum_{[i][j]} \int \varphi_{j_1\cdots j_{n-p}}\, \delta\binom{1 \cdots\cdots\cdots n}{i_1 \cdots i_p\, j_1 \cdots j_{n-p}} Z_{i_1\cdots i_p}(dy)\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

が求める $Z^p(\varphi^{n-p})$ である。なんとなれば

$$Z^p(\tilde{\varphi}^{n-p}) = \sum_{[j]} \int \tilde{\varphi}_{j_1\cdots j_{n-p}} Z(dy, \sum_{[i]} \delta(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots\cdots & n \\ i_1\cdots i_p & j_1\cdots & j_{n-p}\end{smallmatrix}) e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})$$

$$= \sum_{[j]} (U^p, \sum_{[i]} \delta(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots\cdots & n \\ i_1\cdots i_p & j_1\cdots & j_{n-p}\end{smallmatrix}) e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})\ \varphi_{j_1\cdots j_{n-p}})$$

$$= \sum_{[j]} U^p(\varphi_{j_1\cdots j_{n-p}}\ e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_{n-p}})$$

$$= U^p(\varphi^{n-p})$$

（証明終）

系　weakly homogeneous random current の スペクトル測度 $m(dx, a^p, b^p)$ が finite である為の必要十分条件は ほとんどすべての $\omega\in\Omega$ に対して，$U^p(\varphi^{n-p}, \omega)$ が 函数型の current であることである。言いかえれば Random p－微分形式 $\mathcal{U}^p(x)$ が存在して

$$U^p(\varphi^{n-p}) = \int_{R^n} \mathcal{U}^p(x)\wedge\varphi^{n-p} \qquad a.e.$$

ここに Random p－微分形式とは

$$\mathcal{U}^p(x) = \sum_{[i]} \mathcal{U}_{i_1\cdots i_p}(x)\ e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

$\mathcal{U}_{i_1\cdots i_p}(x, \omega)$ が $R^n\times\Omega$ 上の可測函数の ときにいう。

（証明）

$$\mathcal{U}^p(x) \equiv \int e^{iyx} Z^p(dy) \qquad \text{とおけばよい.}$$

$$\int \mathcal{U}^p(x)\wedge\varphi^{n-p} = \sum_{[i][j]} \int e^{iyx} Z_{i_1\cdots i_p}(dy)\,\varphi_{j_1\cdots j_{n-p}}(x) \times \delta(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots\cdots & n \\ i_1\cdots i_p & j_1\cdots & j_{n-p}\end{smallmatrix})\, e_1\wedge\cdots\wedge e_n$$

$$= \sum_{[i][j]} \int \tilde{\varphi}_{j_1\cdots j_p}(y) Z_{i_1\cdots i_p}(dy)\ \delta(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots\cdots & n \\ i_1\cdots i_p & j_1\cdots & j_{n-p}\end{smallmatrix})$$

$$= Z^p(\tilde{\varphi}^{n-p}) = U^p(\varphi^{n-p}) \qquad a.e.$$

（証明終）

4° 標準分解

以上で Homogeneous random current のスペクトル分解の様子がわかった。次に古典的には乱流理論における longitudinal component と transverse component とへの分解定理を求めることである。標準分解を調べる。それは §6 での言葉で de Rham-Kodaira の分解にほかならない。我々は §6 では 証明を与えなかったが、ここではユークリッ

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

ド空間の特性を使ってではあるが 証明を与える．本質は Riemann 空間の場合も同じである。

定義 7.4.

$$(7.12)\quad \mathcal{M}U^p(\phi^{n-p}) \equiv \lim_{A\to\infty} \frac{1}{(2A)^n} \int_{-A}^{A}\cdots\int_{-A}^{A} \sigma_h U^p(\varphi^{n-p})\, dh_1\cdots dh_n$$

で average 作用素 $\mathcal{M}$ を定義するとき

	U^p が	invariant	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{M}U^p = U^p$	
	U^p が	unbiased	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{M}U^p = 0$	
unbiased	U^p が	irrotational	$\Longleftrightarrow$	$dU^p = 0$	即ち d 境界
− unbiased	U^p が	solenoidal	$\Longleftrightarrow$	$\delta U^p = 0$	即ち δ 境界

random measure $Z^p(\Lambda)$ に対し

$$Z_0^p(\Lambda) \equiv Z^p(\Lambda \cap \{0\})$$

$$Z_u^p \equiv Z^p(\Lambda - \{0\})$$

とおく．この各々は Z^p の invariant part, unbiased part と呼ぶ．

定理 7.3. homogeneous random current U^p が spectre random measure Z^p をもつとき

i)	U^p が	invariant	$\Longleftrightarrow$	$Z_0^p = Z^p$
ii)	U^p が	unbiased	$\Longleftrightarrow$	$Z_0^p = 0$
iii)	U_0^p が	irrotational	$\Longleftrightarrow$	$Z_0^p = 0$, $y \wedge Z^p(dy) = 0$
iv)	U_0^p が	solenoidal	$\Longleftrightarrow$	$Z_0^p = 0$, $y \wedge Z^p(dy) = 0$

（証明）

$$\mathcal{M}U^p(\varphi^{n-p}) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{(2A)^n} \int_{-A}^{A}\cdots\int_{-A}^{A} \sigma_h U^p(\varphi^{n-p})\, dh_1\cdots dh_n$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{(2A)^n} \int_{-A}^{A}\cdots\int_{-A}^{A} \int \overline{(Z^p(dy), \tilde{\varphi}^{n-p}(y) e^{-iAy})^*}\, dh_1\cdots dh_n$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int \overline{\left(\frac{e^{-iAy}-e^{iAy}}{-2iAy}\right)^n (Z^p(dy), \tilde{\varphi}^{n-p}(y))^*}$$

$$= \overline{(Z^p(0), \tilde{\varphi}^{n-p}(0))^*}$$

このことから i) ii) は明らか。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$d\varphi^{n-p-1} = \sum_{k[i]} \frac{\partial}{\partial x^k} \varphi_{i_1 \cdots i_{n-p-1}}(x)\, e_k \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-p-1}}$$

(7.13)
$$\widetilde{d\varphi}^{n-p-1} = \sum_{k[i]} i y^k \tilde{\varphi}_{i_1 \cdots i_{n-p-1}}(y)\, e_k \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-p-1}}$$
$$= \sum_{[i]} i y \wedge \tilde{\varphi}^{n-p-1}(y) \qquad y = \sum_k y^k e_k$$

故に

(7.14)
$$dU^p(\varphi^{n-p-1}) = (-1)^{p+1} \int^* (Z^p(dy) \wedge i y \wedge \tilde{\varphi}^{n-p-1}(y))$$
$$= -i \int^* (y \wedge Z^p(dy) \wedge \tilde{\varphi}^{n-p-1}(y))$$

よって $Z_0^p(dy) = 0$ の下では $dU^p = 0$ と $y \wedge Z^p(dy) = 0$ は同値、同じく

$$\delta\varphi^{n-p+1} = \sum_{k[i][m]} \frac{\partial}{\partial x^k} \varphi_{i_1 \cdots i_{n-p+1}}\, \delta\binom{i_1 \cdots\cdots i_{n-p+1}}{k, m_1 \cdots m_{n-p}} e_{m_1} \wedge \cdots \wedge e_{m_p}$$

(7.15)
$$\widetilde{\delta\varphi}^{n-p+1} = \sum_{k[i][m]} i y^k \tilde{\varphi}_{i_1 \cdots i_{n-p+1}}\, \delta\binom{i_1 \cdots\cdots i_{n-p+1}}{k, m_1 \cdots m_{n-p}} e_{m_1} \wedge \cdots \wedge e_{m_p}$$
$$= (-1)^n\, i \cdot y \vee \tilde{\varphi}^{n-p+1}(y)$$

故に (6.5) 式を使って

(7.16)
$$\delta U^p(\varphi^{n-p+1}) = (-1)^{(n-p)p}\, i \int^* (Z^p(dy) \wedge (y \vee \tilde{\varphi}^{n-p+1}(y)))$$
$$= (-1)^{n-p}\, i \int^* ((y \vee Z^p(dy)) \wedge \tilde{\varphi}^{n-p+1}(y))$$

よって $Z_0^p(dy) = 0$ の下では、$\delta U^p = 0$ と $y \vee Z^p(dy) = 0$ は同値

定理 7.3. U^p を homogeneous random current (in L^2) Z^p を そのスペクトル random measure とするとき

$$Z_0^p(dy) \equiv Z^p(dy \wedge \{0\}), \quad Z_v^p(dy) \equiv Z^p(dy - \{0\})$$
$$Z_i^p(dy) \equiv \frac{y \wedge [y \vee Z_v^p(dy)]}{|y|^2}$$
$$Z_\delta^p(dy) \equiv \frac{y \vee [y \wedge Z_v^p(dy)]}{|y|^2}$$

とおくとき

(7.18)
$$U_0^p(\varphi^{n-p}) \equiv Z_0^p(\tilde{\varphi}^{(n-p)})$$
$$U_i^p(\varphi^{n-p}) \equiv Z_i^p(\tilde{\varphi}^{n-p})$$
$$U_\delta^p(\varphi^{n-p}) \equiv Z_\delta^p(\tilde{\varphi}^{n-p})$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

は夫々 *invariant*, *irrotational*, *solenoidal* であって

(7.17) $\quad U^p = U^p_0 + U^p_i + U^p_s$

が成立する。特に U^p_0 は U^p_i, U^p_s と直交する。

（証明）

$$Z^p_i(\Lambda \cap \{0\}) = \int_{\Lambda \cap \{0\}} \frac{y \wedge [y \vee Z^p_u(dy)]}{|y|^2} = 0$$

$$Z^p_s(\Lambda \cap \{0\}) = \int_{\Lambda \cap \{0\}} \frac{y \vee [y \vee Z^p_u(dy)]}{|y|^2} = 0$$

だから，定理 7.3. により U^p_i, U^p_s が unbiased なことと，U^p_0 が invariant なことは明らか．

$$y \wedge Z^p_i(dy) = \frac{y \wedge y \wedge [y \vee Z^p_u(dy)]}{|y|^2} = 0$$

$$y \vee Z^p_s(dy) = \frac{y \vee \{y \vee [y \wedge Z^p_u(dy)]\}}{|y|^2} = (-1)\, y \vee {}^*(y \wedge {}^*[y \wedge Z^p_u(dy)])$$

$$= (-1)^*(y \wedge y \wedge {}^*[y \wedge M^p_u(dy)]) = 0$$

再び定理 7.3 iii) iv) により U^p_i は irrotational U^p_s は solenoidal

次に 次の式が成立する． $\quad y = \sum_i y^i e_i$

(7.20) $\quad y \wedge (y \vee a^p) + y \vee (y \wedge a^p) = |y|^2 a^p$

∵)

(7.21) $\quad y \wedge (y \vee a^p) = (-1)^{(p-1)(n-p)}\, y \wedge {}^*(y \wedge {}^* a^p)$

$$= \sum_{[i][l][m]\nu,\mu} a_{i_1 \cdots i_p}\, y^\mu y^\nu\, \delta\binom{i_1 \cdots\cdots i_p}{\mu l_1 \cdots l_{p-1}}\, \delta\binom{\nu l_1 \cdots l_{p-1}}{m_1 \cdots\cdots m_p}\, e_{m_1} \wedge \cdots \wedge e_{m_p}$$

(7.22) $\quad y \vee (y \wedge a^p) = (-1)^{p(n-p+1)}\, {}^*(y \wedge {}^*(y \wedge a^p))$

$$= \sum_{[i][m]\nu,\mu} a_{i_1 \cdots i_p}\, y^\mu y^\nu\, \delta\binom{\mu\, m_1 \cdots m_p}{\nu\, i_1 \cdots i_p}\, e_{m_1} \wedge \cdots \wedge e_{m_p}$$

$$\sum_{[l]} \delta\binom{i_1 \cdots\cdots i_p}{\mu l_1 \cdots l_{p-1}}\, \delta\binom{m_1 \cdots m_p}{\nu l_1 \cdots l_{p-1}} + \delta\binom{\mu\, m_1 \cdots m_p}{\nu\, i_1 \cdots i_p} = \begin{cases} 0 & \nu \neq \mu \\ 1 & \nu = \mu \end{cases}$$

だから，(7.21)，(7.22) の和を作れば，(7.20) を得る。

(7.20) 式により (7.17) において $Z^p_i(dy)$ と $Z^p_s(dy)$ を作れば

$$Z^p_i(dy) + Z^p_s(dy) = Z^p_u(dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

がわかるから、(7.19)式が成立する.

$$E\{Z_0^p(\varphi^{n-p})\overline{Z_i^p(\varphi^{n-p})}\} = E\{Z_0^p(\varphi^{n-p})\overline{Z_s^p(\varphi^{n-p})}\} = 0$$

も明らかだから U_0^p と U_i^p, U_s^p が直交することがわかる。

定理 7.4. U^p を homogeneous random current とするとき

(7.23)
$$G(x.y) \equiv \begin{cases} \dfrac{e^{ix\cdot y} - 1 - i\,x\cdot y}{|y|^2} & |y|<1 \\ \dfrac{e^{ixy}}{|y|^2} & |y| \geq 1 \end{cases}$$

(7.24)
$$(G\varphi^p)(y) \equiv \sum_{[i]} \int G(x.y)\,\varphi_{i_1\cdots i_p}(x)\,dx\, e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

$$W^p(\varphi^{n-p}) \equiv Z_u^p(G\varphi^{n-p})$$

とおくとき.

(7.25) $U_i^p = d\delta\, W^p \qquad U_s^p = \delta d\, W^p$

(証明)
$$d\delta\, W^p(\varphi^{n-p}) = W^p(\delta d\,\varphi^{n-p}) = Z^p(G(\delta d\,\varphi^{n-p}))$$
$$\delta d\, W^p(\varphi^{n-p}) = W^p(d\delta\,\varphi^{n-p}) = Z^p(G(d\delta\,\varphi^{n-p}))$$

に注意して $\delta d\,\varphi^{n-p}$, $G(\delta d\,\varphi^{n-p})$ を計算してみよう. (7.1),(7.22)式により

$$\delta d\,\varphi^{n-p} = -\sum_{\substack{[i][m]\\ \nu\,\mu}} \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\,\varphi_{i_1\cdots i_p}\,\delta\binom{\nu\ i_1\cdots i_{n-p}}{\mu\ m_1\cdots m_{n-p}}\, e_{m_1}\wedge\cdots\wedge e_{m_{n-p}}$$

$$G(\delta d\,\varphi^{n-p})(y) = -\int G(x.y)\,\delta d\,\varphi^{n-p}(x)\,dx$$

$$= \sum_{[i][m]\nu\mu} \frac{y^\mu y^\nu}{|y|^2}\,\tilde{\varphi}_{i_1\cdots i_{n-p}}(y)\,\delta\binom{\nu\, i_1\cdots i_{n-p}}{\mu\, m_1\cdots m_{n-p}}\, e_{m_1}\wedge\cdots\wedge e_{m_p}$$

$$= \frac{1}{|y|^2}\, y \vee (y \wedge \tilde{\varphi}^{n-p})$$

同様に. $$d\delta\,\varphi^{n-p} = -\sum_{[i][m][l]\nu,\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\,\varphi_{i_1\cdots i_{n-p}}\,\delta\binom{i_1\cdots i_{n-p}}{\nu\, l_1\cdots l_{n-p-1}}\,\delta\binom{\mu\, l_1\cdots l_{n-p-1}}{m_1\cdots m_{n-p}}\, e_{m_1}\wedge\cdots\wedge e_{m_{n-p}}$$

$$G(d\delta\,\varphi^{n-p})(y) = \frac{1}{|y|^2}\, y\wedge(y\vee\tilde{\varphi}^{n-p})$$

よって $$d\delta\ W^p(\varphi^{n-p}) = Z_u^p\left(\frac{1}{|y|^2}\, y\vee(y\wedge\tilde{\varphi}^{n-p})\right) = Z_i^p(\tilde{\varphi}^{n-p})$$

$$\delta d\ W^p(\varphi^{n-p}) = Z_u^p\left(\frac{1}{|y|^2}\, y\wedge(y\vee\tilde{\varphi}^{n-p})\right) = Z_s^p(\tilde{\varphi}^{n-p})$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

を得る。 （証明終）

はじめにのべたように、この定理は、まさに de Rham-Kodaira の分解である。 U_0^p が 調和形式であることは、

(7.26) $\Delta U_0^p(\varphi^{n-p}) = U_0^p(\Delta\varphi^{n-p}) = Z_0^p(\widetilde{\Delta\varphi^{n-p}}) = Z_0^p(|y|^2\widetilde{\varphi^{n-p}}) = 0$

により 明らかである。

5° isotropic random current

前§で 運動群の部分群として、平行移動を考えそれに対して不変な 共分散汎函数をもつ random current（in L^2）を考えたが、次に運動群全体を考え、それに対して不変なものを考えよう。

$O(n)$ で n 次元ユークリッド空間の直交変換全体を表わす。

$g \in O(n)$ に対し

$$(\sigma_g\varphi^p)(x) \equiv \sum_{(i)} \varphi_{i_1\cdots i_p}(gx)g^{-1}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{-1}e_{i_p} = g^{-1}\varphi^p(gx).$$
(7.27)
$$(\sigma_g U^p)(\varphi^{n-p}) \equiv U^p(\sigma_{g^{-1}}\varphi^{n-g}) = U^p(g\varphi^{n-p}(g^{-1}x))$$

と定義する。

定義 7.5. random current U^p が isotropic であるとは、U^pの 特性汎函数 $C(\varphi^p) = E\{\exp[iRe\langle U^p, \varphi^p\rangle]\}$ が

(7.28) $C(\sigma_g\varphi^p) = C(\varphi^p) \qquad \forall g \in O(n)$

を充すときに言う。

注意. 特性汎函数 $\chi(\varphi^{n-p}) = E\{\exp[iRe\, U^p(\varphi^{n-p})]\}$に対して(7.28) が成立することで定義してもよい。又、U^p の特性汎函数 $C_{U^p}(\varphi^p)$ とするとき $C_{\sigma_g U^p}(\varphi^p)$ が $g \in O(n)$ に対し不変と、言っても同じである。

定義 7.6. U^pを random current（in L^2）とするとき U^pが weakly isotropic であるとは、U^pの 平均汎函数，共分散汎函数が任意の $g \in O(n)$ に対し

$$m^*(\sigma_g\varphi^p) = m(\varphi^p)$$
(7.29)
$$\rho^*(\sigma_g\varphi^p, \sigma_g\psi^p) = \rho^*(\varphi^p, \psi^p) \qquad \varphi^p, \psi^p \in \Phi^{(p)}$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

を充すときにいう。

以下簡単のため 平均汎函数 zero を仮定する。

Proposition 7.2. weakly homogeneous random current U^p が weakly isotropic であるための必要十分条件は、U^p のスペクトル測度 $m(dx\,;\,a_p\,b_p)$ が

(7.30) $$m(g\cdot dx\,;\,ga_p\,,\,gb_p) = m(dx\,;\,a_p\,.\,b_p)$$

を充すことである。

(証明) Proposition 7.1. と同様に、$\rho^*(\varphi^p,\psi^p)$ が (7.30) を充すことと、

(7.30)′ $$\rho(\varphi,\psi,a^p,b^p) = \rho(\sigma_g\varphi,\ \sigma_g\psi,\ g^{-1}a^p,\ g^{-1}b^p)$$

が成立することは同値である，何故ならば、$\rho(\varphi,\psi\,;\,a^p,b^p) = \rho(\bar{\varphi}a^p,\bar{\psi}b^p) =$
$= \rho(\bar{\varphi}(gx)\,g^{-1}a^p,\ \bar{\psi}(gx)\,g^{-1}b^p) = \rho(\sigma_g\varphi,\sigma_g\psi\,;\,g^{-1}a^p,\ g^{-1}b^p)$.

逆に (8.3)′ が成立すれば

$$\rho^*(\varphi^p,\psi^p) = \sum_{[i][j]}\rho(\bar{\varphi}_{i_1\cdots i_p},\ \bar{\psi}_{j_1\cdots j_p}\,;\,e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},\ e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}) =$$

$$= \sum_{[i][j]}\rho(\bar{\varphi}_{i_1\cdots i_p}(gx),\ \bar{\psi}_{j_1\cdots j_p}(gx),\ g^{-1}\cdot e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},\ g^{-1}\cdot e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p})$$

$= \rho^*(\sigma_g\varphi^p,\ \sigma_g\psi^p)$ により (7.21) が示される。定理 7.1 により

$$\rho(\varphi.\psi\,;\,a^p.b^p) = \int\tilde{\varphi}(y)\,\bar{\tilde{\psi}}(y)\ m(dy\,;\,a^p.b^p)$$

であるが $g\in O(n)$ であるから、$g^* = g^{-1}$ に注意すれば

$$\widetilde{\sigma_g\varphi}(y) = \int e^{iyx}\,\sigma_g\varphi(x)\,dx = \int e^{iyx}\,\varphi(gx)\,dx =$$
$$= \int e^{iy\cdot g^{-1}x}\cdot\varphi(x)\,dx = \int e^{igy\cdot x}\,\varphi(x)\,dx = \tilde{\varphi}(gy)$$

であるから、$\int\tilde{\varphi}(y)\bar{\tilde{\psi}}(y)\,m(dy\,;\,a^p\,b^p) = \rho(\varphi.\psi\,;\,a^p,b^p) =$
$$= \rho(\sigma_g\varphi,\sigma_g\psi,g^{-1}a^p,g^{-1}b^p) = \int\widetilde{\sigma_g\varphi}(y)\,\overline{\widetilde{\sigma_g\psi}}(y)\ m(dy\,;\,g^{-1}a^p,g^{-1}b^p)$$
$$= \int\tilde{\varphi}(gy)\,\bar{\tilde{\psi}}(gy)\,m(dy\,;\,g^{-1}a^p.\,g^{-1}b^p) = \int\tilde{\varphi}(y)\,\bar{\tilde{\psi}}(y)\ m(g^{-1}dy\,;\,g^{-1}a^p,\,g^{-1}b^p)$$

測度の一意性から、$m(dy\,;\,a^p.b^p) = m(g^{-1}dy\,;\,g^{-1}a^p.\ g^{-1}b^p)$ を得る。

(証明終)

定理 7.5 homogeneous and isotropic random current U^p 標準の分解において、U_i, U_s, U_0 は互に直交し、その各々のスペクトル

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

測度は $(\xi^\vee b^p, \xi^\vee a^p)\, F_i(r)\, d\sigma(\xi)$, $(\xi_\wedge b^p, \xi_\wedge a^p)\, dF_s(r)\, d\sigma(\xi)$, $dF_0(x)$ である.

（証明） Proposition 7.3 の記号を使ってyにおける、局所座標系として $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$, $\xi_1 = \frac{y}{|y|}$ を取れば、

$$a^p = \sum_{[i]} a_{i_1\cdots i_p}(y)\, \xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_p} \quad \text{とすると}$$

$$\langle U_L^p, a^p\rangle(\varphi) = \sum_{\substack{\mu,\nu[i]\\ [j][\ell]}} \int \tilde\varphi(y)\, \bar a_{j_1\cdots j_p} Z_p^u(dy, \xi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi_{i_p})\, \delta\binom{\ell_1\cdots\ell_{p-1}}{j_1\cdots j_p}\delta\binom{\ell_1\cdots\ell_{p-1}}{i_1\cdots i_p}$$

$$= \sum_{[i]} \int \tilde\varphi(y)\, \bar a^{-1}_{1 i_1\cdots i_{p-1}}, Z_p^u(dy, \xi_1\wedge\xi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi_{i_{p-1}}) .$$

同様に

$$\langle U_s^p, a_p\rangle(\varphi) = \sum_{[i]} \int \tilde\varphi(y)\, \bar a'_{i_1\cdots i_p} Z_p^u(dy, \xi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi_{i_p})$$

従って Proposition 7.3. の証明 (iii) により

$$E\{\langle U_i^p, a_p\rangle(\varphi)\overline{\langle U_s, b_p\rangle(\psi)}\} = \sum_{[i][j]} \int_{|y|\neq 0} \tilde\varphi\bar{\tilde\psi}\, a'_{1 i_1\cdots i_{p-1}}, b'_{j_1\cdots j_p} \times m(dy; \xi_1\wedge\xi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi_{i_{p-1}}, \xi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi_{i_p}) = 0$$

$$E\{\langle U_i^p, a^p\rangle(\varphi)\overline{\langle U_i^p, b^p\rangle(\psi)}\}$$

$$= \sum_{[i][j]} \int_{|y|\neq 0} \tilde\varphi\bar{\tilde\psi}\, \bar a'_{1 i_1\cdots i_p} b'_{j_1\cdots j_{p-1}} m(dy; \xi_1\wedge\xi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi_{i_{p-1}}, \xi_1\wedge\xi_{j_1}\wedge\cdots\wedge\xi_{j_{p-1}})$$

$$= \int \tilde\varphi\bar{\tilde\psi}\, (\xi^\vee b^p, \xi^\vee a^p)\, F_i(dr)\, d\sigma(\xi)$$

$$E\{\langle U_s^p, a^p\rangle(\varphi)\overline{\langle U_s^p, b^p\rangle(\psi)}\}$$

$$= \sum_{[i][j]} \int_{|y|\neq 0} \tilde\varphi\bar{\tilde\psi}\, \bar a'_{i_1\cdots i_p} b'_{j_1\cdots j_p} m(dy; \xi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi_{i_p}, \xi_{j_1}\wedge\cdots\wedge\xi_{j_{p-1}})$$

$$= \int \tilde\varphi\bar{\tilde\psi}\, (\xi_\wedge b^p, \xi_\wedge a^p)\, F_s(dr)\, d\theta .$$

U_0^p が U_s^p. U_i^p と直交することは定理7.3で示した、又 スペクトル測度が F_0 であることは明らか. （証明終）

6° 共分散汎函数の表現

homogeneous and isotropic random current の共分散汎函数のスペクトルによらない表現、即ち Fourier 変換によらない表現を求める。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$C(2.n)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})/\Gamma(\frac{n}{2})$ として，$Y_n(t)$ を

$$Y_n(t)\equiv\frac{1}{C(2.n)}\int_0^{\pi}e^{it\cos\theta}\sin^{n-2}\theta\,d\theta=2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\tfrac{n}{2})\,t^{-\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(t)$$

とおくと $Y_n'(t)=\frac{t}{n}Y_{n+2}(t)$，$Y_n''(t)=\frac{n-1}{n}Y_{n+2}(t)-Y_n(t)$ なる式が成立するから

$$(7.34)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^\nu\partial x^\mu}Y_n(|x|)=\frac{x^\nu x^\mu}{|x|^2}\{Y_{n+2}(|x|)-Y_n(|x|)\}-\frac{\delta_{\nu\mu}}{n}Y_{n+2}(|x|).$$

なる性質を知る．定理 7.5 より U_s の 共分散双線形形式は

$$\rho_s(\varphi.\psi,a^p,b^p)=\iint\tilde{\varphi}(r\xi)\overline{\tilde{\psi}}(r\xi)(\xi\wedge b^p,\xi\wedge a^p)\,d\sigma(\xi)\,dF_s(r)$$

$$=\iiiint\varphi(x)\psi(y)e^{ir(x-y)\cdot\xi}(\xi\wedge b^p,\xi\wedge a^p)\,d\sigma(\xi)\,dF_s(r)\,dx\,dy$$

$$=\sum_{[i][j]\nu,\mu}\bar{a}_{i_1\cdots i_p}b_{j_1\cdots j_p}\iiiint\varphi(x)\overline{\psi}(y)e^{ir(x-y)\cdot\xi}\xi^\nu\xi^\mu\delta\binom{\nu i_1\cdots i_p}{\mu j_1\cdots j_p}d\sigma(\xi)\,dF_s\,dx\,dy$$

$$=C(1.n-1)\sum\bar{a}_{i_1\cdots i_p}b_{j_1\cdots j_p}\iiint\frac{\varphi(x)\overline{\psi}(y)}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial x^\nu\partial x^\mu}Y_n(r|x-y|)\,dx\,dy\,dF_s(r)$$

$$=C(1.n-1)\sum\bar{a}_{i_1\cdots i_p}b_{j_1\cdots j_p}\iiint\frac{\varphi(x)\overline{\psi}(y)}{|x-y|^2}\{Y_{n+2}(r|x-y|)-Y_n(r|x-y|)\}$$
$$\times\ (x^\nu-y^\nu)(x^\mu-y^\mu)\delta\binom{\nu i_1\cdots i_p}{\mu j_1\cdots j_p}\,dx\,dy\,dF_s(r)$$
$$-C(1.n-1)\sum\bar{a}_{i_1\cdots i_p}b_{j_1\cdots j_p}\iiint\frac{\varphi(x)\overline{\psi}(y)}{n}Y_{n+2}(r|x-y|)\delta_{\nu\mu}\delta\binom{\nu i_1\cdots i_p}{\mu j_1\cdots j_p}\,dx\,dy\,dF_s$$

$$=C(1.n-1)\iiint\varphi(x)\overline{\psi}(y)\{Y_{n+2}(r|x-y|)-Y_n(r|x-y|)\}\frac{((x-y)\wedge b^p,(x-y)\wedge a^p)}{|x-y|^2}\,dx\,dy\,dF_s$$
$$-C(1.n-1)\iiint\varphi(x)\overline{\psi}(y)\frac{n-1}{n}Y_{n+2}(r|x-y|)(b^p,a^p)\,dx\,dy\,dF_s.$$

同様にして，U_i の共分散双線形形式 ρ_i は

$$\rho_i(\varphi.\psi,a^p,b^p)=\int_0^\infty\!\!\iint\tilde{\varphi}(r\xi)\overline{\tilde{\psi}}(r\xi)(\xi\vee b^p,\xi\vee a^p)\,d\sigma(\xi)\,dF_i(r)$$

$$=C(1.n-1)\int_0^\infty\!\!\iint\varphi(x)\overline{\psi}(y)\{Y_{n+2}(r|x-y|)-Y_n(r|x-y|)\}\frac{((x-y)\vee b^p,(x-y)\vee a^p)}{|x-y|^2}\,dx\,dy\,dF_i(r)$$
$$-C(1.n-1)\int_0^\infty\!\!\iint\varphi(x)\overline{\psi}(y)\frac{1}{n}Y_{n+2}(r|x-y|)(b^p,a^p)\,dx\,dy\,dF_i(r).$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

定理 7.6. homogeneous and isotropic random current の共分散双線形汎函数 $\rho(\varphi^{n-p}, \psi^{n-p})$ は

$$\rho = \rho_0 + \rho_i + \rho_s$$

と分解され、各 ρ は、invariant, irrotational, solenoidal part の共分散双線形汎函数であって

$$(7.35)\quad \rho_0(\varphi^{n-p}, \psi^{n-p}) = \iint (\varphi^{n-p}(x), \psi^{n-p}(y))\, dx\, dy \quad F_0(0)$$

$$(7.36)\quad \rho_i(\varphi^{n-p}, \psi^{n-p}) = C(1, n-1)\int_0^\infty\iint ((x-y)\wedge\varphi^{n-p}(x), (x-y)\wedge\psi^{n-p}(y))$$
$$\times \frac{1}{|x-y|^2}\{Y_{n+2}(r|x-y|) - Y_n(r|x-y|)\}\, dx\, dy\, dF_i$$
$$-C(1, n-1)\int_0^\infty\iint (\varphi^{n-p}(x), \psi^{n-p}(y))\frac{1}{n}Y_{n+2}(r|x-y|)\, dx\, dy\, dF_i$$

$$(7.37)\quad \rho_s(\varphi^{n-p}, \psi^{n-p})$$
$$= C(1, n-1)\int_0^\infty\iint ((x-y)^\vee\varphi^{n-p}(x), (x-y)^\vee\psi^{n-p}(y))$$
$$\times \frac{1}{|x-y|^2}\{Y_{n+2}(r|x-y|) - Y_n(r|x-y|)\, dx\, dy\, dF_s$$
$$-C(1, n-1)\int_0^\infty\iint (\varphi^{n-p}(x), \psi^{n-p}(y))\frac{n-1}{n}Y_{n+2}(r|x-y|)\, dx\, dy\, dF_s$$

6° random current の演算

U^p を p 次の random current, $C(\varphi^p) = E\{\exp[i\,Re\langle U^p, \varphi^p\rangle]\}$ をその特性汎函数とする。 U^p に 外微分、内微分、Δ、等の演算をほどこすことによって、どのように変化するかみてみよう。勿論

dU^p の 特性汎函数は $C_{dU}(\varphi^{p+1}) = C(\delta\varphi^{p+1})$,

δU^p の 特性汎函数は $C_{\delta U}(\varphi^{p-1}) = C(d\varphi^{p-1})$, $C_{\Delta U}(\varphi^p) = C(\Delta\varphi^p)$

等は明らかだが 実際にどのように変化するかが 興味がある。その一つとして 共分散汎函数の変化をみてみよう。U^pを homogeneous random current とし その共分散汎函数はスペクトル測度 $m(dx, a^p, b^p)$ で

$$\rho(\varphi, \psi, a^p, b^p) = \int \tilde{\varphi}(y)\,\overline{\tilde{\psi}}(y)\, m(dy\,; a^p, b^p)$$

と表現されているとする。

$$(dU^p, a^{p+1})(\varphi) = \sum_k (U^p, e_k{}^\vee a^{p+1})(\frac{\partial}{\partial x^k}\varphi)$$

だから dU^p の共分散線形形式 $\rho_{dU}(\varphi,\psi,a^{p+1},b^{p+1})$ は

$$(7.38)\quad \rho_{dU}(\varphi,\psi,a^{p+1},b^{p+1})=\sum_{k,l}\rho\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\varphi,\frac{\partial}{\partial x^l}\psi,e_k\vee a^{p+1},e_l\vee b^{p+1}\right)$$

$$=\sum_{k,l}\int\tilde{\varphi}(y)\overline{\tilde{\psi}}(y)\,y_k y_l\,m(dy;e_k\vee a^{p+1},e_l\vee b^{p+1})$$

$$=\int\tilde{\varphi}(y)\overline{\tilde{\psi}}(y)\,m(dy;y\vee a^{p+1},y\vee b^{p+1})$$

特に isotropic であれば $m(dy;a^p,b^p)$ は (7.31) を充すから

$$(7.38)'\quad \sum_{k}y_k\cdot y_l\cdot m(dy;e_k\vee a^{p+1},e_l\vee b^{p+1})=m(dy;y\vee a^{p+1},y\vee b^{p+1})$$

$$=|y|^2(\xi\wedge(\xi\vee b^{p+1}),\xi\wedge(\xi\vee a^{p+1}))\,d\sigma(\xi)F_\lambda(dr)$$

同様に

$$(7.39)\quad \rho_{\delta U}(\varphi,\psi,a^{p-1},b^{p-1})=\sum_{k,l}\rho\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\varphi,\frac{\partial}{\partial x^l}\psi;e_k\wedge a^{p-1},e_k\wedge b^{p-1}\right)$$

$$=\int\tilde{\varphi}(y)\overline{\tilde{\psi}}\sum_{k,l}y_k y_l\,m(dy;e_k\wedge a^{p-1},e_k\wedge b^{p-1})$$

$$=\int\tilde{\varphi}(y)\overline{\tilde{\psi}}\,m(dy;y\wedge a^{p-1},y\wedge b^{p-1})$$

$$=\int\tilde{\varphi}(y)\overline{\tilde{\psi}}(y)|y|^2(\xi\vee(\xi\wedge b^{p-1}),\xi\vee(\xi\wedge a^{p-1}))\,d\sigma(\xi)\,dF_i(r)$$

$$(\Delta U^p,a^p)(\varphi)=(d\delta U^p,a^p)(\varphi)+(\delta dU^p,a^p)(\varphi)$$

$$=\sum_k\sum_l\{(U^p,e_l\wedge(e_k\vee a^p))+(U^p,e_l\vee(e_k\wedge a^p))\}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l}\varphi\right)$$

$$=(U^p,a^p)(\Delta\varphi)$$

$$\rho_{\Delta U}(\varphi,\psi,a^p,b^p)=\int\tilde{\varphi}(y)\overline{\tilde{\psi}}(y)|y|^4\,m(dy;a^p,b^p)$$

例. 7.1. $dB(\varphi^{n-1})$ を n 次元径数の Brown 運動の外微分とする。§3. Proposition 3.1. により

$$\rho_{dB}(\varphi,\psi,a',b')=\int\tilde{\varphi}(y)\overline{\tilde{\psi}}(y)|y|^2(\xi\wedge(\xi\vee b')\,\xi\wedge(\xi\vee a'))\,d\sigma(\xi)\,dF(r)$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int\tilde{\varphi}(y)\overline{\tilde{\psi}}(y)\,(b',\xi)(\xi,a')\,d\sigma(\xi)\,\frac{dr}{r^{n-1}}$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

§8. 局所 homogeneous random current

第1章で（超）確率場のとき述べた如く、定常増分な確率過程の拡張として、局所 homogeneous, isotropic 性を考える必要がある。そのとき、局所（超）確率場と呼ぶべきものを考えた方がよいと主張した．第2章では、うるさいほど $B(x)$ と $B_0(x)$ の区別を行い、又反面 勝手に同一視も行なった．それは内、外挿問題において特に要求されたわけである。"局所性" current の場合どう扱うか考え、§6、7、の結果に対応する結果を導こう。

1° 準　備

超確率場の局所性を random current の場合に拡張するわけだが、まず、$M = R^n_0$ の場合には、次のように考えてよいであろう。$\Phi_1^{(p)}$ を

$$\Phi_1^{(p)} = \{ \varphi^p(x) \in \Phi^{(p)} ; \varphi^p = \sum_{[i]} \varphi_{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, \int \varphi_{i_1 \cdots i_p}(x)\, dx = 0 \}$$

と定義する．$\Phi_1^{(p)}$ には $\Phi^{(p)}$ の双対位相を入れる．$\Phi_1^{(n-p)}$ を径数空間にする。確率場 $\{ U_0^p(\varphi^{n-p}) ; \varphi^{n-p} \in \Phi_1^{(n-p)} \}$ において、ほとんどすべての ω に対し、$U^p(\varphi^{n-p}, \omega)$ が $\Phi_1^{(p)}$ 上の連続線形汎函数であるときに．$U^p(\varphi^{n-p})$ を局所 random current と仮に呼んでおく。U^p を（局所）random current として U^p が局所 homogeneous（局所 isotropic）であるとは、U^p の $\Phi_1^{(p)}$ 上の特性汎函数 $C(\varphi^p) = E\{\exp[i Re \langle U^p, \varphi^p \rangle]\}$ が任意の変換（or 回転）σ に対して、$C(\sigma\varphi^p) = C(\varphi^p)$ $\varphi^p \in \Phi_1^{(p)}$ を充すときに言うことにする。U^p が random current in L^2 であり、又、平均汎函数 及び 共分散汎函数が変移（or 回転）不変のとき weakly 局所 homogeneous (or weakly 局所 isotropic) という。以上の定義は 0次の random current．即ち．超確率場のときには、第1章と同じ定義になっている．しかしこの方法は一般の Riemann 多様体 M 上ではうまくゆかない。$\Phi_1^{(p)}$ の定義でつまづいてしまう．しかし、一般の多様体の上で 局所性を論じてもそこに何等かの定常性が定義されてなければ意味がないわけで、論じる必要がないかも知れない。その為 Riemann 多様体への一般化は、後回しにして．今は $M = R^n$ のときを考える。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

2° ユークリッド空間上の局所 homogeneous な random current.

定理 8.1. 平均0の p次の random current U^p が weakly 局所 homogeneous な為の必要十分条件は、その共分散線形形式が、$\varphi, \psi \in \Phi_1^{(0)} = \mathcal{D}_1$ に対して

$$(8.1)\quad \rho(\varphi, \psi; a^p, b^p) = \int_{\lambda \neq 0} \widetilde{\varphi}(\lambda)\overline{\widetilde{\psi}}(\lambda) m(d\lambda; a^p, b^p) + \sum_{k,l} A_{kl}(a^p, b^p)\frac{\partial}{\partial\lambda^k}\widetilde{\varphi}(0)\frac{\partial}{\partial\lambda^l}\overline{\widetilde{\psi}}(0)$$

と表現されることである。但し、$m(d\lambda, a^p, a^p)$ は、

$\int_{\lambda \neq 0} \frac{|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2} m(d\lambda, a^p, a^p) < \infty$ なる正測度であり、$m(\Lambda, a^p, b^p)$ は (b^p, a^p) の双線形形式、$A_{kk}(a^p, b^p)$ は (b^p, a^p) の正の双線形形式。$A_{kl}(a^p, a^p)$ は正定符号行列.

このとき、U^p は random measure Z^p により表現できる。

$$(8.2)\quad (U^p, a^p)(\varphi) = \int_{|\lambda| \neq 0} \widetilde{\varphi}(\lambda) Z(d\lambda, a^p) + i\sum_{k=0}^{n} Z_k(a^p)\frac{\partial}{\partial\lambda^k}\widetilde{\varphi}(0)$$

但し、$Z^p(d\lambda)$ は $m(d\lambda; a^p, b^p)$ に対応する random measure であり、$Z_k(a^p)$ は、$Z^p(d\lambda)$ と直交する確率変数で

$$E Z_k(a^p)\overline{Z_l(b^p)} = A_{kl}(a^p, b^p), \quad E Z_k(a^p) = 0.$$

(証明) a^p を固定すると、$(U^p, a^p)(\varphi)$ $\varphi \in \mathcal{D}_1$ は (weakly) 局所 homogeneos な超確率場であるから、第1章 §1 Proposition 1.5 により、非負エルミート行列 $A(a^p) = (a_{ij}(a^p)) = (a_{ij})$ と緩増加な正測度 $F(d\lambda, a^p)$, $\int_{\lambda \neq 0} \frac{|\lambda|^2}{(1+|\lambda|^2)^{k+1}} dF(\lambda, a^p) < \infty$. が存在して

$$\rho(\varphi, \psi; a^p) = \int_{\lambda \neq 0} \widetilde{\varphi}(\lambda)\overline{\widetilde{\psi}}(\lambda) dF(\lambda, a^p) + \sum_{k,j} a_{k,j}(a^p)\frac{\partial}{\partial\lambda^k}\widetilde{\varphi}\ \frac{\partial}{\partial\lambda^l}\overline{\widetilde{\psi}}(0)$$

となる。$\rho(\varphi, \psi, a^p, b^p)$ が、$\rho(\varphi, \psi; a^p, a^p) = \rho(\varphi, \psi, a^p)$ なる (b^p, a^p) の正定符号の双線形形式であるから、定理7.1. の証明と同様にして、$m(d\lambda, a^p, b^p)$, $A_{k,j}(a^p, b^p)$ が存在して、$m(d\lambda, a^p, a^p) = F(d\lambda, a^p)$, $A_{k,j}(a^p, a^p) = a_{k,j}(a^p)$ を充し $m(d\lambda, a^p, b^p)$, $A_{k,k}(a^p, b^p)$ は共に (b^p, a^p) の正の双線形形式であり、(8.1) 式が成立する。

後半は、(8.1) の表現に Kari-Karhunen の表現の一般論を適用してもよいし、次のようにすればよい。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$L^2(m) = L^2(m(d\lambda, a^p, a^p))$ を $R^n - \{0\}$ 上の $m(d\lambda, a^p, a^p)$ に関し二乗可積分函数の作る Hilbert 空間とすると $\mathcal{D}_1$ の Fourier 変換がそこで稠密になる。もっと言えば $\varphi \in \mathcal{D}_1$ に対し、$(\tilde{\varphi}(\lambda), \nabla\tilde{\varphi}(0))$ 但し $\nabla\tilde{\varphi}(0) = $
$= (\frac{\partial}{\partial\lambda^1}\tilde{\varphi}(0), \cdots, \frac{\partial}{\partial\lambda^n}\tilde{\varphi}(0))$ を考え 内積を

$$\int_{\lambda\neq 0} \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}}(\lambda)\, m(d\lambda, a^p, a^p) + \sum_{k,\ell} \frac{\partial}{\partial\lambda^k}\tilde{\varphi}(0)\frac{\partial}{\partial\lambda^\ell}\overline{\tilde{\psi}}(0) \cdot A_{k,\ell}(a^p, a^p)$$

で定義したとき、この内積から決まるノルムで、完備化した空間は $L^2(m) \oplus V^n$. V^n は n 次元複素ベクトル空間

$L^2(m) \oplus V^n \ni (f(\lambda), f_1, \cdots, f_n)$ に対し内積は

$$\int f(\lambda)\,g(\lambda)\, m(d\lambda, a^p, a^p) + \sum_{k,\ell} f_k \overline{g}_\ell A_{k\ell}(a^p, b^p)$$

で定義した空間である。今 $(\tilde{\varphi}(\lambda), \nabla\tilde{\varphi}(0))$ に対して $(U^p, a^p)(\varphi)$ を対応さす対応は、$L^2(m) \oplus V^n$ の 稠密な線形部分集合から $L^2(\Omega)$ への isometric な線形変換を与える。従ってそれを $L^2(m) \oplus V^n$ へ isometric に拡張できる。そのとき、$R^n - \{0\}$ の可測集合 Λ の定義函数 $\chi_\Lambda(\lambda)$, と $(0, \cdots \overset{j}{1}, \cdots 0) \in V^n$ に対し $(\chi_\Lambda(\lambda), 0, \cdots 0)$ の像を $Z(\Lambda, a^p)$, $(0, 0, \cdots, \overset{j}{1} \cdots 0)$ の像を $Z_j(a^p)$ とおけば、定理の帰結の条件を充すことがわかり、線形性と random measure の性質から

$$(U^p, a^p)(\varphi) = \int_{\lambda\neq 0} \tilde{\varphi}(\lambda)\, dZ(\lambda, a^p) + \sum_j Z_j(a^p) \frac{\partial}{\partial\lambda^j}\tilde{\varphi}(0)$$

を得る。 (証明終)

標準分解に関しても (7.12) 式の平均作用素 $\mathcal{M}$ その他 定義 7.4 の定義をそのまま採用する。

定理 8.2. 平均 0 の homogeneous random current U^p が スペクトル random measure による (8.2) の表現をもつとき、

(i) U^p が invariant $\iff$ $Z^p = 0$
U^p が unbiased $\iff$ $Z_k(a^p) = 0 \quad k = 1, 2, \cdots n, \ \forall a^p$
U^p が irrotational $\iff$ $y \wedge Z^p(dy) = 0, \ Z_k(a^p) = 0$
U^p が solenoidal $\iff$ $y \vee Z^p(dy) = 0, \ Z_k(a^p) = 0$

(ii) $Z_i(dy)$, $Z_j(dy)$ を

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$(8.3)\qquad Z_i^p(dy) \equiv \frac{1}{|y|^2}\, y\wedge[y\vee Z^p(dy)]$$
$$Z_s^p(dy) \equiv \frac{1}{|y|^2}\, y\vee[y\wedge Z^p(dy)]$$

で定義すれば、

$$U_0^p(\varphi^{n-p}) = \sum_k Z_k\left({}^*\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\tilde{\varphi}^{n-p}(0)\right)\right)$$

$$(8.4)\qquad U_i^p(\varphi^{n-p}) = Z_i^p(\tilde{\varphi}^{n-p})$$
$$U_s^p(\varphi^{n-p}) = Z_s^p(\tilde{\varphi}^{n-p})$$

は、U^p の夫々 invariant part, irrotational part, solenoidal part である。

(iii) (7.24) と同じく $G(x, y)$ を定義し、

$$(G\varphi^p)(y) = \sum_{(i)} \int G(x, y)\varphi_{i_1\cdots i_p}(y)\,dy \quad e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

$W^p(\varphi^{n-p}) \equiv Z^p(G\varphi^{n-p})$ とおけば、

$$(8.5)\qquad U_i^p = d\delta W^p \qquad U_s^p = \delta d W^p.$$

定理 8.3. weakly locally homogeneous and isotropic random current U^p においては、そのスペクトル測度 $m(dx; a^p, b^p)$ は、

$$(8.6)\qquad m(dx, a^p, b^p) = (\xi\vee b^p, \xi\vee a^p)\,d\sigma(\xi)F_i(dr) + $$
$$+ (\xi\wedge b^p, \xi\wedge a^p)\,d\sigma(\xi)\,dF_s(dr).$$

と分解される。但し、$F_i(dr)$, $F_s(dr)$ は、整数 k が存在して、

$\int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r^2)^k} F_i(dr) < \infty$, $\int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r^2)^k} F_s(dr) < \infty$ なる $(0, \infty)$ の正測度である。又 $A_{k,\ell}(a^p, b^p)$ は

$$(8.7)\qquad A_{k\ell}(a^p, b^p) = \alpha_1\delta_{k,\ell}(b^p, a^p) + \alpha_2(e_k\vee b^p, e_\ell\vee a^p) + \alpha_B(e_\ell\vee b^p, e_k\vee a^p)$$

と表現できる。そうして、$(\xi\vee b^p, \xi\vee a^p)\,d\sigma(\xi)F_i(dr)$ は U_i^p のスペクトル測度であり、$(\xi\wedge b^p, \xi\wedge a^p)\,d\sigma(\xi)F_i(dr)$ は U_s^p のスペクトル測度である。又、U_i^p、U_S^p、U_0^p は互に直交する。

(証明) Proposition 7.3, 定理 7.5. と同様に行えばよいから省略する。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

3° 局所確率場の定義について

M を適当な径数空間として、ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率変数の系 $\{X(x)-X(y);\ x, y \in M\}$ をこの semina note では局所確率場 $\{X(x);\ x \in M\}$ ということにする。即ち 局所確率場においては、定確率変数だけの不確定さを許容することにし、又考える対象としては常に、差 $X(x)-X(y)$ をとって考える。例えば、局所確率場 $\{X(x);\ x \in M\}$ が生成する最小の σ-集合体は、$\mathcal{B}\{X(x)-X(y);\ x, y \in M\}$ の意味とする。2章の Brown 運動の場合にはこのような立場で話をすすめた。

ここで、ついでだから、実局所確率場の共分散についての注意をしておこう。$\{X(x);\ x \in M\}$ を $\{X(x)-X(y);\ {}^\forall x, y \in M\}$ が 二乗可積分な平均零の局所確率場としたとき、$D(x,y)=E|X(x)-X(y)|^2$ とおけば

$$E(X(x)-X(y))(X(z)-X(v)) = \frac{-D(x,z)+D(x,v)+D(y,z)-D(y,v)}{2} \tag{8.8}$$

が成立する。この $D(x,y)$ を Yaglom は structure function と呼んだ。

Proposition 8.1. $D(x,y)$ がある平均零の実確率場の structure function である為の必要十分条件は $D(x,y)$ が conditionary negative definite であること、即ち、任意の N と任意の $x_1, \cdots, x_N \in M$, 任意の実数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$, $\sum_{j=0}^{N}\alpha_j = 0$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^{N} D(x_i, x_j)\alpha_i\alpha_j \leq 0 .$$

(証明) $\Rightarrow$, $Y(x) = X(x)-X(x_N)$ とおけば $\{Y(x);\ x \in M\}$ は確率場、であることを注意して

$$\sum_{i,j=1}^{N} D(x_i, x_j)\alpha_i\alpha_j = -\sum_{i,j=1}^{N-1}\{D(x_i, x_N)+D(x_j, x_N)-D(x_i, x_j)\}\alpha_i\alpha_j$$

$$= -2\sum_{i,j=1}^{N} E(X(x_i)-X(x_N))(X(x_j)-X(x_N))\alpha_i\alpha_j = -2\sum_{i,j=1}^{N-1} E\{Y(x_i)Y(x_j)\}\alpha_i\alpha_j \leq 0.$$

逆は、$x_0 \in M$ を固定して $\rho(x,y) = \frac{1}{2}\{D(x,x_0)+D(y,x_0)-D(x,y)\}$ とおけば、上の式からもわかるように、$\rho(x,y)$ が正定符号 従って、$\rho(x,y)$ を 共分散にもつ確率場が存在する。それは 求めるものである。

(証明終)

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

第4章 確率場 (0次の random current)

§9. 多様体の上の Brown 運動

第2章で詳述した R^n 上の Brown 運動を多様体の上で考えてみることを話題にする。

1° Gaussian white noise と Brown 運動

第2章 §3 において、Chentsov の white noise W_c を紹介した。それは、R_0^n の $n-1$ 次元超平面全体の作る多様体上の不変測度に対応する Gaussian random measure であった。そのとき原点と点 x を結ぶ直線と交わる $n-1$ 次元超平面全体に対する W_c の値が、R_0^n の Lévy の Brown 運動になることを知った。このような関係は、ユークリッド空間の特性であろうか、又はもっと広く成立することか調べてみよう。

S^n を $n+1$ 次元ユークリッド空間 R_0^{n+1} 内の n 次元の単位球面とする。S^n は C^∞ Riemann 多様体である。$S^n \ni x$ における単位接ベクトル ξ を定め ξ に直交する測地線全体の集合がつくる $n-1$ 次元超曲面を $E_n(\xi)$ としよう。$E_n(\xi)$ は球の中心に、ベクトル ξ をうつし、それを法線ベクトルにもつ R_0^{n+1} の原点を通る n 次元超平面と S^n の交わりの作る S^n の $n-1$ 次元球面と一致する。この $n-1$ 次曲面 $E_n(\xi)$ に符号を付して考え、ξ 方向を正にとることに決め、$E_n(\xi)$ の座標として ξ; $|\xi|=1$ を採用する。$\check{S}^n = \{E_n(\xi) : |\xi|=1\}$ とおけば $\check{S}^n$ と S^n は一対一の対応が ξ によってつくられる。

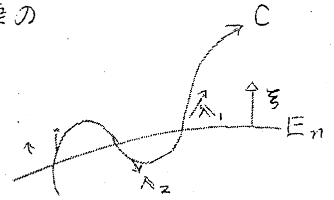
$\check{S}^n$ には運動に関して不変な測度 $dE_n(\xi)$ が存在するが、座標 ξ を使えば $dE_n = const\ d\sigma_n(\xi)$ である。この定数を $\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}$ にとっておくと $\int_{\check{S}^n} dE_n = 2\pi$. である。この $dE_n(\xi)$ に対応する $\check{S}^n$ 上の Gaussian random measure を $W_c(dE_n)$ 又は座標 ξ で表わして $W_c(\xi)$ としよう。S^n 上の有限の長さをもつ有向曲線 C に対して

$$(9.1)\qquad \int_C W_c(dE_n) = W_c\{C \text{ と交わる } E_n(\xi) \text{ 全体}\}$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$(9.2) \qquad \oint_C dW_c(\xi) = \int_C (n^+(\xi) - n^-(\xi))\, dW_c(\xi)$$

但し，$n^+(\xi)$，$n^-(\xi)$ は，$E_n(\xi)$ が C と交わる点において，C の正方向の接ベクトル λ に対し，$(\lambda, \xi) > 0$ なる点の個数を $n^+(\xi)$ $(\lambda, \xi) < 0$ なる点の個数を $n^-(\xi)$ とする。



もし C が，区分的に滑かな有限の長さをもつ閉じた曲線ならば ほとんど全て ξ に対して $n^+(\xi) - n^-(\xi) = 0$ が成立するから

$$(9.3) \qquad \oint_C dW_c = \int_C (n^+(\xi) - n^-(\xi))\, dW_c(\xi)$$

従って，$C_{y,x}$ で y と x を結び y から x の方へ向いている区分的に滑かな長さ有限の曲線を表わせば

$$(9.4) \qquad \oint_{C_{y,x}} dW_c = \int_{C_{y,x}} (n^+(\xi) - n^-(\xi))\, dW_c(\xi)$$

は始点と終点だけに依存して $C_{y,x}$ の取方によらない。更に

$$\oint_{C_{y,x}} dW_c + \oint_{C_{z,y}} dW_c = \int_{C_{z,x}} dW_c$$

が成立するから，不定積分と同じ意味において，ある局所 Gaussian 確率場 $\{B(x) : x \in S^n\}$ が存在して

$$B(x) - B(y) = \oint_{C_{y,x}} dW_c$$

となる。例えば，$B(x)$ として，e_0 を R_0^{n+1} の単位ベクトルとして，これを S^n 上の点とみなし 更に e_0 を S^n 上の北極とみておく。$B_{e_0}(x) = \oint_{C_{e_0,x}} dW_c$ をとることができる。このようにして得られる Gaussian 確率場の性質を調べよう。まず，$E\, B_{e_0}(x) = 0$，次に $\overrightarrow{y_0 x}$ で y_0 から x へ向けて両者を結ぶ S^n 上の測地線をあらわすことにする。$C_{e_0,x}$ として特に $\overrightarrow{e_0 x}$ をとれば

$$E|B_{e_0}(x)|^2 = E|\int_{\overrightarrow{e_0 x}} dW_c|^2 = \int_{\overrightarrow{e_0 x}} dE_n(\xi) = r(e_0, x)$$

$$E|B_{e_0}(x) - B_{e_0}(y)|^2 = E|\int_{\overrightarrow{e_0 x}} dW_c - \int_{\overrightarrow{e_0 y}} dW_c|^2 =$$

$$\left(= E|\int_{x\cdot\xi>0,\, y\cdot\xi<0} dW_c - \int_{y\cdot\xi>0,\, x\cdot\xi<0} dW_c|^2 = r(x,y) \right)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

但し $r(x, y)$ は S^n 上の点 x, y の測地距離 即ち R^{n+1} の点と考えれば、x と y のなす角とする。従って

$$(9.5)' \quad E\,B_{e_0}(x)B_{e_0}(y) = \frac{r(e_0, x) + r(e_0, y) - r(x, y)}{2}$$

となる。この共分散の形はユークリッド空間の Lévy の Brown 運動と類似の形をしているから、我々はこれを球面上の Lévy の Brown 運動と呼び、局所確率場 $\{B(x) : x \in S^n\}$ を S^n を径数空間にもつ Brown 運動と呼んでよいと思う。只、Lévy はこの B_{e_0} ではなく（Gaussian random measure は $\check{S}^n$ ではなく S^n 上と考えて だが、我々の記号で言えば）

$$(9.6) \quad B_0(x) = \int_{x\cdot\xi>0} dW_c(\xi)$$

を S^n を径数空間にもつ Brown 運動と呼んだ。勿論 $B_0(x) - B_0(y) = \int_{x\cdot\xi>0} dW_c(\xi) - \int_{y\cdot\xi} dW_c(\xi) = B(x) - B(y)$ は成立するから、局所確率場としては $\{B_0(x)\}\{B_{e_0}(x)\}$、$\{B(x)\}$ は全て同じ法則である。

我々はこのようにして 球面上の場合に §3.5° でのべたような関係を保持する white noise と Brown 運動を定義することが出来た。それは、§3 で示した n 次元径数をもつ Brown 運動と同様の性質をもっているだろうか？ 例えば §3 の 基本的性質 (1)〜(3) は、

(1) 測地線に上に制限し、時間を $[0, \pi)$ で切れば、そこでは一次元の Brown 運動である。

(2) $X(x) = B_0(-x)$ とおけば、$\{X(x) : x \in S^n\}$ も $\{B_0(-x)\}$ と同じ法則

(3) 連続性も弱い。Hölder 連続であることだけなら、§2 系1 から明らか。更に §3 の T. Sirao の結果に類似のことが成立かどうかは知らないが 成立することが想像される。

これよりもっと興味があることは、§4の内挿、外挿における多重調和方程式との関係が、球面でもあるかどうかという点である。しかし球面における内、外挿の問題でユークリッド空間と異なる点は次のことである。

例えば $B_0(x)$ を例にとれば

$$(9.7) \quad B_0(x) + B_0(-x) = \int_{x\cdot\xi>0} dW_c(\xi) + \int_{x\cdot\xi<0} dW_c(\xi) = W_c(\check{S}^n) \quad a.e.$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

即ち もし $B_0(x)$ と $B_0(-x)$, $B_0(y)$ が与えられれば、
$B_0(-y) = B_0(x) + B_0(-x) - B_0(y)$ a.e. によって $B_0(-y)$ が定まる。
この事情は次の点と関係があると思える.

$n = 2p-1$ 次元とするとき Δ を球面上の Laplacian
$\Delta = \delta d + d\delta$ としておけば

(9.8) $\Delta^p \gamma(x,y) = 0$ $x \neq y$, $x \neq -y$.

が成立することが確められる。そして、$x=y$, $x=-y$ においては、$\Delta^p \gamma(x,y)$ は δ函数と見なされる。§4の議論では単に $|x-y|$ は Δ^p の基本解であることをのみ使ったことに注意すれば、内外挿問題を、S^n の半球に限れば、§4と同様の議論ができるが ここではこれ以上立入らないことにする。ただここで注意しておきたいことは、S^n を半球に限るということは、$E_n(\xi)$ の一方の符号だけをとること従って符号を考えないことに対応している。事実ユークリッド空間では $n-1$ 次元超平面の符号を考えないでよかった。

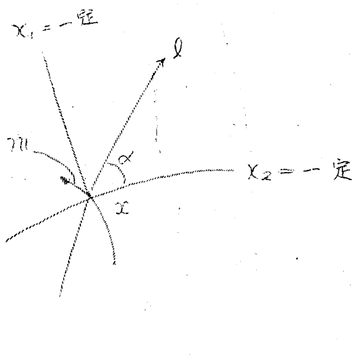
2°. 2次元多様体上の Brown 運動

M を 2次元の符号な C^∞-Riemann 多様体で次の条件を充すものとする。条件(W) M は単連結であり、その任意の二点を唯一の測地線で結ぶことができる。

このとき、M上の測地線 l の全体 $\check{M}$ に対して測度を入れる.
まず Riemann の基本計量 g_{ij} に対し適当な座標を定め、$g_{11} = 1$,
$g_{12} = g_{21} = 0$ $g_{22} = g^2$ $g > 0$ と出来る。
点 x の回りのこのような座標 (x^1, x^2) に対し、x を通る測地線 l が $x_2 =$ 一定なる曲線となす角を α として

$$dl = -\sin\alpha\, dx^1 \wedge d\alpha + g\cos\alpha\, dx^2 \wedge d\alpha - \frac{\partial g}{\partial x^1} \sin\alpha\, dx^1 \wedge dx^2$$

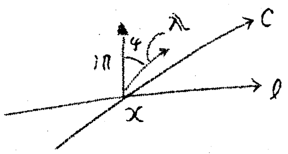
が、極値曲線(現在は測地線)に対する不変測度である



今、C を滑かな有向曲線として、その曲線にそった長さ s を径数にしているとしよう。l に向を与え l と C の交点 x におけるその上の単位法線ベクトルを n, x における C の単位接ベクトルを λ とすると.

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$dl = (\lambda, n)\, ds \wedge d\varphi = \cos\alpha\, ds \wedge d\varphi.$$



Lemma 9.1. Cを区分的に滑かな長さLの曲線とし、nを測地線lがCと交わる回数とすると、

(9.9) $$\int n\, dl = 2L$$

(証明) M. Kurita [33] P. 109 を参照. §3. Lemma 3.1. と同様にできる。

$\mathring{M}$ の dl に対応する Gaussian random measure を $W_c(dl)$, $E|W_c(dl)|^2 = \frac{dl}{2}$ としよう; C を区分的に滑かな有限の有向曲線とし

(9.10) $$\int_C W_c(dl) = W_c\{C \text{ と交わる測地線全体}\}$$

$n^+(l)$を $(n, \lambda) > 0$ なるCとlの交点の数, $n^-(l)$を $(n, \lambda) <$ なるCとlの交点の数とし、

(9.11) $$\oint_C W_c(dl) = \int_C (n^+(l) - n^-(l))\, W_c(dl)$$

とおけば、Cが閉じた曲線のとき $\oint_C W_c(dl) = 0$ であり、$C_{y,x}$ をyとxを結ぶ区分的に滑かな曲線とすれば

$$\oint_{C_{y,x}} W_c(dl) + \oint_{C_{z,y}} W_c(dl) = \int_{C_{z,x}} W_c(dl)$$

が成立するから、ある局所 Gaussian 確率場 $\{B(x) : x \in M\}$ が存在して、

(9.12) $$B(x) - B(y) = \oint_{C_{y,x}} W_c(dl)$$

Lemma 9.1. により 2次元の条件 (W) を充す Riemann 多様体の上で、Brown 運動と white noise が定義できた。

例. 9.1 Mとして2次元のトーラスを考えると、Mは条件(W)を充さないから、上のような Gaussian random measure を考えることができない。

又別に、x, y の測地距離を $r(x, y)$ とするとき $E|B(x) - B(y)|^2 = r(x, y)$ を充す Gaussian system $\{B(x) : x \in M\}$ が存在しないこともわかる。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

しかし、Mの部分多様体を取って(W)を充すようにできる。そのときは、上の議論が適用できるが、それは、本質的にユークリッド空間の場合にほかならない。

3° 一般の多様体でのBrown運動

一般に距離空間 M においてその距離を $r(x,y)$ とするとき M 上のGaussian確率場 $\{B(x) ; x\in M\}$ が $E|B(x)-B(y)|^2 = r(x,y)$, $E(B(x)-B(y))=0$ を充せば、Mを径数空間にもつBrown運動と呼んでもよい、と思われるが 任意の M に対してそのようなGaussian確率場が存在するわけではない。存在するための必要十分条件は $r(x,y)$ が conditionary negative definite なこと、即ち、任意の N と任意の $x_1,\cdots x_N\in M$ と任意の実数、$\alpha_1,\cdots\alpha_n$, $\sum_{j=1}^{N}\alpha_j=0$ に対し

(9.14) $\quad \sum\alpha_i\alpha_j r(x_i,x_j)\leq 0$

が成立することである。(9.14)の成立する為の条件は知らない。

このseminar noteでは、Riemann多様体の上で(9.14)を充す局所確率場 $\{B(x) ; x\in M\}$ が与えられたときそれを M を径数空間にもつ(或は、M上の)Brown運動と呼んでおく。この存在する条件を、Gaussian random measureとの関係で示そう。Mは可符号 n次元 C^∞-Riemann多様体とし

条件(W.I) Mは単連結であって、その任意の二点を測地線で結ぶことができ、それは一通りである。

条件(W.II) $M\ni x$における任意の接ベクトル ξ に対し、ξに直交する測地線全体の作る集合 $E_n(\xi,x)$ が $n-1$次元の滑かで可符号な曲面であり、$E_n(\xi)$ の任意の点 y における法線ベクトル η に対し $E_n(\xi,x)=E_n(\eta,y)$ が成立する。

注意 条件(W.I)、(W.II)により、Mの任意の点における接空間に $E_n(\xi,x)=E_n(\eta,y)$ なるとき $\xi\longleftrightarrow\eta$ となる対応を与えることによって、バンドル空間における類別を行なって得られる空間と $E_n(\xi,x)$ 全体の空間 $\check{M}$ は一対一に対応する。

更に $\check{M}$ に測度 dE_n が導入できて、Cを区分的に滑かで長さLの曲線とするとき、次の条件(W III)が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

条件（W.III）　$n(E_n)$ を C と E_n の交点の数とするとき

(9.15)　$$\int_C n(E_n)\,dE_n = L.$$

が成立する。

Proposition 9.1.　条件 (I)(II)(III) の成立する可符号な C^∞-Riemann 多様体 M において $\mathring{M}$ 上に dE_n に対応する Gaussian random measure $W_C(dE_n)$ が存在して、

(9.16)　$$\oint_{C_{yx}} W_C(dE_n) \equiv \int_{C_{yx}} (n^+(E_n) - n^-(E_n))\, W_C(dE_n)$$

は、y と x を結び y から x の方向へ向いた曲線 $C_{y.x}$ の選び方に依存せず始点と終点だけで決まり

$$\oint_{C_{y.x}} W_C(dE_n) + \oint_{C_{z.y}} W_C(dE_n) = \oint_{C_{z.x}} W_C(dE_n)$$

を充す。従って、M 上の局所確率場 $\{B(x) : x \in M\}$ が存在して

(9.17)　$$B(x) - B(y) = \oint_{C_{yx}} W_C(dE_n)$$

(9.18)　$$E(B(x) - B(y)) = 0, \quad E|B(x) - B(y)|^2 = r(x, y)$$

を充す，Gaussian System である。

但し、$n^+(E_n)$ は C_{yx} と E_n の交点における C_{yx} の正の接ベクトル λ と E_n に定められた向きに対する E_n の正の法線 n において、$(n, \lambda) > 0$ なる交点の数、$n^-(E_n)$ は $(n, \lambda) < 0$ なる交点の数とする。

§10　homogeneous な確率場

R^n 上の homogeneous な、確率場の共分散函数のスペクトル表現は第1章§1で与えた。又 random measure による確率場のスペクトル表現、標準分解、isotropic な場合の対応する問題は、第3章§1で述べた random current において random current が特に函数型の場合即ち、スペクトル測度が有限なときの結果が、確率場における結果になっている。この種の議論はスカラー値並にベクトル値の場合には、A. M. Yaglom [54] に詳しい。この§では、R^n_0 の一つの軸を時間軸と

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

みて、その方向への予測問題を中心とした表現を考える。又第2章§4で扱った Brown 運動の内挿問題の方法が $1/$(多項式) の形のスペクトル密度をもつ場合に、つかえることを指摘する。

イ° 線形表現

今、このパラグラフに限り記号の都合上、R_0^n の点を $R_0^n \ni (x,t)$ $R^{n-1} \ni x = (x^1, \cdots, x^{n-1})$ $-\infty < t < \infty$. で表わす。又、$R_0^n \ni (\lambda, \mu)$, $R^{n-1} \ni \lambda = (\lambda^1, \cdots, \lambda^{n-1})$. $-\infty < \mu < \infty$. とも表わすことにする。

$\{X(x,t) ; (x,t) \in R_0^n\}$を ある確率空间 ($\Omega, \mathcal{B}, P$) 上の L^2-連続で homogeneous な Gaussian 確率場とし、その平均は零、共分散函数 $\rho(x,t)$ 及び $X(x,t)$ は

$$(10.1) \qquad \rho(x,t) = \int_{R^n} e^{i\lambda\cdot x + i\mu t}\, dF(\lambda, \mu)$$

$$(10.2) \qquad X(x,t) = \int_{R^n} e^{i\lambda\cdot x + i\mu t}\, dZ(\lambda,\mu) \qquad E|dZ(\lambda,\mu)|^2 = dF(\lambda,\mu)$$

と表現されているとする。

$\mathfrak{M}(t) = \mathfrak{M}(t, X)$ で $\{X(x,s) ; x \in R_0^{n-1}, -\infty < s \le t\}$ の一次結合で張られる閉線形空间を表わす。又、$\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}(t, X)$ で $\{X(x,s) ; x \in R_0^{n-1}, -\infty < s \le t\}$ を可測にする最小の σ-集合体、$\mathfrak{H}(t) = \mathfrak{H}(t, X)$ で $\mathcal{B}(t)$-可測で2乗可積分函数の作る $L^2(\Omega)$ の線形部分空间とする。このとき

$$(10.3) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{M}(\infty) \equiv \mathfrak{M} = \bigvee_t \mathfrak{M}(t) & &\mathfrak{M}(-\infty) \equiv \bigwedge_t \mathfrak{M}(t) \\ &\mathcal{B}(\infty) \equiv \mathcal{B}(X) = \bigvee_t \mathcal{B}(t) & &\mathcal{B}(-\infty) \equiv \bigwedge_t \mathcal{B}(t) \\ &\mathfrak{H}(\infty) \equiv H = \bigvee_t \mathfrak{H}(t) & &\mathfrak{H}(-\infty) \equiv \bigwedge_t \mathfrak{H}(t) \end{aligned}$$

と定義する。

定義 10.1. $\mathfrak{M}(-\infty) = \mathfrak{M}(\infty)$ のとき X は特異 (singular) であるといい、$\mathfrak{M}(-\infty) = 0$ のとき X は正則 (regular) であるという。

今、我々は、$\tau > 0$ に対し $\{X(x,s) ; x \in R^{n-1}, -\infty < s \le t-\tau\}$ が与えられたとき、$X(y,t) ; y \in R^{n-1}$ を外挿する问題を考える。ここで

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

外挿とは、$\mathcal{B}(t-\tau)$－可測な $U_\tau(y,t)$ で $E|X(y,t)-U_\tau(y,t)|^2$ を最小にするものを言うことにする。その時、§4で述べた如く

$$(10.4)\qquad U_\tau(x,t) = E\{X(x,t)\mid\mathcal{B}(t-\tau)\} = \mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}(t-\tau)} X(x,t)$$

で与えられることはよく知られている。

$$Y_\tau(x,t) \equiv X(x,t) - U_\tau(x,t)$$

$$\sigma(\tau) = E|Y_\tau(x,t)|^2 \qquad \sigma(\infty) = \lim_{\tau\to\infty}\sigma(\tau)$$

とおこう。

Proposition 10.1.

(i) X が特異 $\Longleftrightarrow \sigma(\infty)=0 \Longleftrightarrow \mathcal{B}(-\infty)=\mathcal{B}(\infty) \Longleftrightarrow \mathfrak{h}_y(-\infty)=H$

X が正則 $\Longleftrightarrow \sigma(\infty)=\rho(0) \Longleftrightarrow \mathcal{B}(-\infty)=z \Longleftrightarrow \mathfrak{h}_y(-\infty)=0$

(ii) L^2－連続な homogeneous な Gaussian random field は、正則な $X_1(x,t)$ と、特異な $X_2(x,t)$ に分解され

$$(10.4)\qquad X(x,t) = X_1(x,t) + X_2(x,t)$$

$\{X_1(x,t)\}$ と $\{X_2(x,t)\}$ は互に独立な確率場である。

（証明） (i) Xが特異ならば、$X(x,t)\in\mathfrak{M}(\infty)=\mathfrak{M}(-\infty)\subset\mathfrak{M}(t-\tau)$
$U_\tau(x,t) = \mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}(t-\tau)}X(x,t) = X(x,t)$. よって $Y_\tau(x,t)=0$.

即ち 任意の τ に対して $\sigma(\tau)=0$. よって $\sigma(\infty)=0$.

$\sigma(\infty)=0$ ならば、$\mathcal{B}(t-\tau)\downarrow\mathcal{B}(-\infty)$ $\tau\to-\infty$ により

$$0=\lim_{\tau\to\infty}E|X(x,t)-E\{X(x,t)\mid\mathcal{B}(t-\tau)\}|^2=E|X(x,t)-E\{X(x,t)\mid\mathcal{B}(-\infty)\}|^2$$

よって $\qquad X(x,t)=E\{X(x,t)\mid\mathcal{B}(-\infty)\}$ a.e.

このことから任意の x,t に対して $X(x,t)$ が $\mathcal{B}(-\infty)$－可測、従って、$\mathcal{B}(\infty)=\mathcal{B}(-\infty)$ を得る。 $\mathcal{B}(-\infty)=\mathcal{B}(\infty)$ と $\mathfrak{h}_y(-\infty)=\mathfrak{h}_y(\infty)$ の同値なことは明らか。

$\mathfrak{h}_y(-\infty)=\mathfrak{h}_y(\infty)$ ならば 任意の $t>s$ に対し $X(x,t)\in\mathfrak{h}_y(t)=\mathfrak{h}_y(s)$ だから

$$X(x,t)=E\{X(x,t)\mid\mathcal{B}(s)\}=\mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}(s)}X(t)\in\mathfrak{M}(s)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

により、 $\mathfrak{M}(t) \subset \mathfrak{M}(s) \subset \mathfrak{M}(t)$ が 任意の $t > s$ に対して成立する
が $\mathfrak{M}(\infty) = \mathfrak{M}(-\infty)$. 即ち、Xは特異である。

(i)′. Xが正則ならば. $\mathfrak{M}(t) \downarrow \mathfrak{M}(-\infty) = 0 \quad t \to -\infty$ により
$U_\tau(x,t) = \mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}(t-\tau)} X(x,t) \to 0 \quad (\tau \to \infty)$. 従って $\sigma(\tau) =$
$= E|Y_\tau(x,t)|^2 = E|X(x,t) - U_\tau(x,t)|^2 \longrightarrow E|X(x,t)|^2 = \rho(0) \quad (\tau \to \infty)$.

逆に $\sigma(\tau) \longrightarrow \rho(0) \quad \tau \to \infty$ なるとき. もし $\mathfrak{M}(-\infty) \neq 0$ としよう。 $X_2(x,t) \equiv \mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}(-\infty)} X(x,t) \qquad X_1(x,t) \equiv X(x,t) - X_2(x,t)$ と.
おくと t が存在して、$X_2(x,t) \neq 0$. homogeneous なことから 任意の t に対し

$$E|X_2(x,t)|^2 = \text{constant} \neq 0. \qquad \text{そこで}$$

$$X(x,t) = X_2(x,t) + (U_\tau(x,t) - X_2(x,t)) + Y_\tau(x,t)$$

右辺は、各々の項が互に直交するから

$$E|X(x,t)|^2 = E|X_2(x,t)|^2 + E|U_\tau(x,t) - X_2(x,t)|^2 + E|Y_\tau(x,t)|^2$$

$$\therefore \qquad \rho(0) \geq E|X_2(x,t)|^2 + \sigma(\infty) > \rho(0) \qquad \text{矛盾}$$

よって $\mathfrak{M}(-\infty) = 0$.
又. $\mathfrak{B}(-\infty) = 0$ と $\mathfrak{H}_y(-\infty) = 0$ の同値なことは明らか.
$\mathfrak{H}_y(-\infty) = 0$. ならば $H(t) \supset \mathfrak{M}(t)$ により $\mathfrak{M}(-\infty) = 0$ は明らか.
最後に、$\mathfrak{M}(-\infty) = 0 \implies \mathfrak{B}(-\infty) = 0$ が残ったが、これは、まだこの段階では証明できないので残しておく。

(ii). (10.4) (i)′ の証明で用いた分解がそれである。

(証明終)

Proposition. 10.2.

(i) $Y_\tau(x,t)$ に対し $\gamma_\tau(\lambda,\mu) \in L^2(dF(\lambda,\mu))$ が存在して、

$$(10.5) \qquad Y_\tau(x,t) = \int e^{i\lambda x + i\mu t} \gamma_\tau(\lambda,\mu)\, dZ(\lambda,\mu)$$

と表現される. $\{Y_\tau(x,t)\,;\,(x,t) \in R_0^n\}$ は homogeneous な Gaussian 確率場であって、そのスペクトル測度 $F_Y(\lambda,\mu)$ は

$$(10.6) \qquad F_Y(\lambda,\mu) = \int_{-\infty}^{\mu}\int_{-\infty}^{\lambda} |\gamma_\tau(\lambda,\mu)|^2\, dF(\lambda,\mu)$$

である. 又次の式が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

(10.7) $\int_{R^n} e^{i\lambda x + i\mu t} |\gamma_\tau(\lambda,\mu)|^2 dF(\lambda,\mu) = 0 \qquad |t| \geq \tau$

(10.8) $\int_{R^n} e^{i\lambda x + i\mu t} \gamma_\tau(\lambda,\mu)\, dF(\lambda,\mu) = 0 \qquad t \geq \tau$

(証明) $L^2(dF(\lambda,\mu))$ と $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\infty)$ とは 1対1 *isometry* に対応していた。その対応による $Y_\tau(0,0)$ の像を $\gamma_\tau(\lambda,\mu)$ とおく。更に、(10.2) の式から、$\sigma_{h,s}$; $X(x,t) \longrightarrow \sigma_{h,s} X(x,t) = X(x-h, t-s)$ なる条件を充す $\mathfrak{M}$ 上の作用素には、$L^2(dF(\lambda,\mu))$ では $e^{-i\lambda x - i\mu t}$ をかける作用素が対応することに注意すれば、$\tau_{-x,-t} Y_\tau(0,0) = Y_\tau(x,t)$ に対応する $L^2(dF(\lambda,\mu))$ の要素は $\gamma_\tau(\lambda,\mu) e^{i\lambda x + i\mu t}$ であることがわかる。又この対応は、*random measure* による積分で与えられることから、(10.5)、(10.6) を得る。

$$Y_\tau(x,t) = X(x,t) - \mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}(t-\tau)} X(x,t)$$

であったから $Y_\tau(x,t)$ は $\mathfrak{M}(t-\tau)$ と直交する。又 $Y_\tau(x,t) \in \mathfrak{M}(t)$ 従って

$$E\, Y_\tau(x,t) \overline{Y_\tau(y,t-s)} = \int_{R^n} e^{i\lambda(x-y)+i\mu s} |\gamma_\tau(\lambda,\mu)|^2 dF(\lambda,\mu) = 0 \qquad |s| \geq \tau$$

$$E\, Y_\tau(x,t) \overline{X(y,t-s)} = \int_{R^n} e^{i\lambda(x-y)+i\mu s} \gamma_\tau(\lambda,\mu)\, dF(\lambda,\mu) = 0 \qquad s \geq \tau$$

(証明終)

Lemma 10.T.

$dF(\lambda,\mu)$ の $dF(\lambda,\infty)d\mu$ に対する特異な部分を $dF_s(\lambda,\mu)$、絶対連続な部分の微分を $\dfrac{dF(\lambda,\mu)}{dF(\lambda,\mu)d\mu} = f(\lambda,\mu)$ で表わすと

(10.9) $\int |\gamma_\tau(\lambda,\mu)|^2 dF_s(\lambda,\mu) = 0$

(10.10) $dF_Y(\lambda,\mu) = |\gamma_\tau(\lambda,\mu)|^2 f(\lambda,\mu)\, dF(\lambda,\infty)\, d\mu$

(10.11) $\int e^{i\lambda x + i\mu t} |\gamma_\tau(\lambda,\mu)|^2 f(\lambda,\mu)\, dF(\lambda,\infty)\, d\mu = 0 \qquad |t| \geq \tau$

(10.12) $\int e^{i\lambda x + i\mu t} \gamma_\tau(\lambda,\mu) f(\lambda,\mu)\, dF(\lambda,\infty)\, d\mu = 0 \qquad t \geq \tau$

(証明)

$$\rho_Y(x,t) = E\, Y_\tau(x,t) \overline{Y_\tau(0,0)} = \int_{R^n} e^{i\lambda x + i\mu t} dF_Y(\lambda,\mu)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

であるが、$\rho_Y(x.n\tau)$; $x\in R^{n-1}$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ を考える。と(10.6)、(10.7)により $\rho_Y(x,n\tau)=0$ $n\neq 0$, であり

$$\rho_Y(x.0)=\int_{R^n}e^{i\lambda x}dF_Y(\lambda,\mu)-\int_{R^{n-1}}e^{i\lambda x}dF_Y(\lambda.\infty)$$

よって $$\rho_Y(x.n)=\rho_Y(x.0)\delta_{n.0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{R^{n-1}}e^{i\lambda x}dF_Y(\lambda.\infty)\cdot e^{in\mu}d\mu$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{R^{n-1}}e^{i\lambda x+i\mu n}dF_Y(\lambda.\infty)d\mu$$

一方 $$\rho_Y(x.n)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{R^{n-1}}e^{i\lambda x+i\mu n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}dF_Y(\lambda.2\pi j+\mu)$$

表現の一意性から、$\sum_{j=-\infty}^{\infty}dF(\lambda,2\pi j+\mu)=\frac{1}{2\pi}dF_Y(\lambda.\infty)d\mu$

従って $dF_Y(\lambda.\mu)$ は $dF_Y(\lambda.\infty)d\mu$ に絶対連続、更に $dF_Y(\lambda,\mu)$ が $dF_Y(\lambda,\mu)$ に絶対連続なことから、$dF_Y(\lambda.\infty)$ が $dF(\lambda.\infty)$ に絶対連続、即ち

(10.13) $$|\gamma_\tau(\lambda,\mu)|^2(dF_s(\lambda,\mu)+f(\lambda)dF(\lambda.\infty)d\mu)=$$
$$=|\gamma_\tau(\lambda,\mu)|^2dF(\lambda\mu)=dF_Y(\lambda,\mu)<dF_Y(\lambda.\infty)d\mu<dF(\lambda.\infty)d\mu$$

を得る。(10.13)式の最初と最後を較べて、(10.9)が直ちにわかる。(10.9)と(10.13)の第一項と第二項の等式から(10.10)がわかる。(10.10)を(10.7)及び(10.8)に適用すれば(10.11)と(10.12)を知る。 (証明終)

定理 10.I. L^2-連続 homogeneous な Gaussian 確率場 $\{X(x.t):(x.t)\in R^n\}$ が正則ならば

(i) $dF(\lambda.\mu)$ は $dF(\lambda.\infty)d\mu$ に関し絶対連続

(ii) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\log\frac{dF(\lambda.\mu)}{dF(\lambda.\infty)d\mu}\right|}{1+\mu^2}d\mu<\infty \qquad \lambda\notin A$$

(iii) $$\frac{dF(\lambda.\mu)}{dF(\lambda.\infty)d\mu}=0 \qquad a.e.\ dF(\lambda.\infty)d\mu \text{ on } A\times(-\infty,\infty)$$

(証明) 集合 $A\subset R_0^n$ が存在して、任意の可測集合 E に対し

$\int_{A\cap E}dF(\lambda.\mu)=\int_E dF_s(\lambda.\mu)$, $\int_A dF(\lambda.\infty)d\mu=0$ を充す。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

(10.14) $\quad X_1(x,t)=\int_A e^{i\lambda x+i\mu t}\,dZ(\lambda,\mu),\quad X_2=\int_A e^{i\lambda x+i\mu t}\,dZ(\lambda,\mu)$

とおけば $\{X_1(x,t)\}$ と $\{X_2(x,t)\}$ は互に独立な homogeneous 確率場である。

$$Y_\tau(x,t)=\int_{A^c}\gamma_\tau(\lambda,\mu)\,e^{i\lambda x+i\mu t}\,dZ(\lambda,\mu)+$$

$$+\int_A \gamma_\tau(\lambda,\mu)\,e^{i\lambda x+i\mu t}\,dZ(\lambda,\mu)$$

Aの取方と (10.9) により

(10.15) $\quad Y_\tau(x,t)=\int_{A^c}\gamma_\tau(\lambda,\mu)\,e^{i\lambda x+i\mu t}\,dZ(\lambda,\mu)$

よって

$$Y_\tau(x,t)=X_1(x,t)-\mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}_{X_1}(t-\tau)}X_1(x,t).$$

∵) $\{X_1(x,t)\}$ と $\{X_2(x,t)\}$ の独立性から

$$Y_\tau(x,t)=X(x,t)-\mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}_{X_1}(t-\tau)}X(x,t)$$

$$=X_1(x,t)-\mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}_{X_1}(t-\tau)}X_1(x,t)+\underbrace{X_2(x,t)-\mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}_{X_1}(t-\tau)}X_2(x,t)}$$

(10.15) から $\{Y_\tau(x,t)\}$ と $\{X_2(x,t)\}$ は互に独立だから

$$Y_\tau(x,t)=X_1(x,t)-\mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}_{X_1}(t-\tau)}X_1(\lambda,t)$$

よって $\sigma(\tau)=E|Y_\tau(\lambda,t)|^2\le E|X_1(x,t)|^2\le\rho(0)$

$\tau\to\infty$ のとき $\sigma(\tau)\to\rho(0)$ だから $E|X_1(x,t)|^2=\rho(0)$.

よって

$$\iint f(\lambda,\mu)\,dF(\lambda,\infty)\,d\mu=\iint\big(dF_s(\lambda,\mu)+f(\lambda,\mu)\,dF(\lambda,\infty)\,d\mu\big)$$

$\therefore\quad \iint dF_s(\lambda,\mu)=0$ これは、$dF(\lambda,\mu)$ が $dF(\lambda,\infty)\,d\mu$ に対し絶対連続なことを示す。(10.11)、(10.12) から、Fubini の定理を使って ほとんど全ての λ $(dF(\lambda,\infty))$ に対し

(10.16) $\quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{it\mu}\,|\gamma_\tau(\lambda,\mu)|^2 f(\lambda,\mu)\,d\mu=0 \qquad |t|\ge\tau$

(10.17) $\quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{it\mu}\,\gamma_\tau(\lambda,\mu)\,f(\lambda,\mu)\,d\mu=0 \qquad t\ge\tau$

$A_\tau=\{\lambda\,;\,|\gamma_\tau(\lambda,\mu)|^2 f(\lambda,\mu)=0.$ ほとんど全ての μ に対して$\}$

とおけば、$\lambda \in A_\tau$ に対して、Hille and Tamarkin の定理を [28]、もしくは [59] と同様に適用して

$$\infty > \int \frac{\log[|\gamma_\tau(\lambda,\mu)|^2 P(\lambda,\mu)]}{1+\mu^2}d\mu = 2\int \frac{\log|\gamma_\tau(\lambda,\mu)|}{1+\mu^2}d\mu + \int \frac{\log P(\lambda,\mu)}{1+\mu^2}d\mu > -\infty$$

$$\infty > \int \frac{\log[|\gamma_\tau(\lambda,\mu)|P(\lambda,\mu)]}{1+\mu^2}d\mu = \int \frac{\log|\gamma_\tau(\lambda,\mu)|}{1+\mu^2}d\mu + \int \frac{\log P(\lambda,\mu)d\mu}{1+\mu^2} > -\infty$$

から $\int \frac{\log P(\lambda,\mu)}{1+\mu^2}d\mu > -\infty$, $\int \frac{\log|\gamma_\tau(\lambda,\mu)|}{1+\mu^2}d\mu > -\infty$ を得る。

最後に、$A' = \{\lambda\ ;\ P(\lambda,\mu)=0$ がほとんど全ての μ に対して成立$\}$ とおき $A = \bigcap_{m=1} A_m - A'$ と記せば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log P(\lambda,\mu)}{1+\mu^2}d\mu > -\infty \qquad \lambda \in A$$

であるから、$\int_A dF(\lambda,\infty) = 0$ を示せばよい。その為には

$$(10.18) \qquad X_3(x,t) = \int_A e^{i\lambda x + i\mu t}dZ(\lambda,\mu), \quad X_4(x,t) = \int_{A^c} e^{i\lambda x + i\mu t}dZ(\lambda,\mu)$$

とおいて、A の定義から $\iint |\gamma_m(\lambda,\mu)|^2 dF_{X_3}(\lambda,\mu) = 0$ に注意して

$$(10.19) \qquad Y_m(x,t) = X_4(x,t) - \mathrm{Proj}_{H_{X_4}(t-m)} X_4(x,t)$$

を得る。よって $\sigma(m) = E|Y_m(x,t)|^2 \le E|X_4(x,t)|^2 \le E|X(x,t)|^2 = \rho(0)$, $\sigma(m) \to \rho(0)$ $(m \to \infty)$ だから、$E|X_4(x,t)|^2 = \rho(0)$ 即ち $\iint_{A^c} P(\lambda,\mu)dF(\lambda,\infty)d\mu$

$= \iint P(\lambda,\mu)dF(\lambda,\infty)d\mu$ よって、$\iint_A P(\lambda,\mu)dF(\lambda,\infty)d\mu = 0$

A 上では、$P(\lambda,\mu) > 0$ ($d\mu$ 測度正き) だから、$\int_A dF(\lambda,\infty) = 0$

(証明終)

以上で、この問題における Chiang Tse-Pei [8] の基本的なアイデアの部分は証明できた。以下は通常の定常過程における方法によって証明できるので [8] を参照して頂くことにして 結果だけを述べる。

定理 10.2. L^2 - 連続な homogeneous な Gaussian 確率場 $\{X(x,t)\ ;\ (x,t) \in R_0^n\}$ において、$F(\lambda,\mu)$ を そのスペクトル測度とし、もし

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

(1) R_0^{n-1} 上の測度 $K(\lambda)$ が存在し $dF(\lambda,\mu)$ が $dK(\lambda)d\mu$ に対して 絶対連続

(2) R_0^{n-1} の部分集合 A が存在して

$$(10.20)\qquad \frac{dF(\lambda,\mu)}{dK(\lambda)d\mu}=0 \qquad a.e.\quad dK(\lambda)d\mu \qquad A\times(-\infty,\infty)$$

$$(10.21)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\dfrac{dF(\lambda,\mu)}{dK(\lambda)d\mu}}{1+\mu^2}\,d\mu>-\infty \qquad \lambda\notin A$$

ならば、 $\{X(x,t):(x,t)\in R_0^n\}$ は 正則である。

定理 10.3. 上と同じ仮定の下で、$\{X(\lambda,t);(x,t)\in R_0^n\}$ が特異である為の必要十分条件は

$$(10.22)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\dfrac{dF(\lambda,\mu)}{dF(\lambda,\infty)d\mu}}{1+\mu^2}\,d\mu=-\infty \qquad a.e.\ dF(\lambda,\infty)$$

$\{X(x,t);(x,t)\in R_0^n\}$ が正則ならば、定理 10.1 により $\lambda\notin A$ ならば $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log P(\lambda,\mu)}{1+\mu^2}d\mu$ であるから Paley-Wiener の定理により $P(\lambda,\mu)$ の平方根で、μ に関する Fourier 変換が片側で消えるものがある，例えば

$$(10.23)\qquad P_0(\lambda,\omega)=k(\lambda)\exp\left\{-\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\mu\omega}{\mu-\omega}\,\frac{\log p(\lambda,\mu)}{1+\mu^2}d\mu\right\},\ I_m(\omega)<0,\ \lambda\notin A,$$

$$P_0(\lambda,\mu)=\lim_{v\downarrow 0}P_0(\lambda,\mu+iv)$$

$k(\lambda)$ はある．可測函数で $|k(\lambda)|=1$. とおけばよい．

今 $dZ_1(\lambda,\mu)=\dfrac{dZ(\lambda,\mu)}{P_0(\lambda,\mu)}$ とすれば $E|dZ_1(\lambda,\mu)|^2=d\lambda d\mu\quad \lambda\notin A$

この Gaussian random measure の Fourier 変換を $W(z,u)$，$P_0(\lambda,\mu)$ の Fourier 変換を $g(z,u)$ とすれば

$$X(x,t)=\int_{u\le t}\int_{-\infty}^{\infty}g(x-z,t-u)\,dW(z,u)$$

と表現できる．これを 標準表現と呼ぶが、その理由は

$$\mathfrak{M}\{X(x,s);x\in R_0^{n-1}:s\le t\}=\mathfrak{M}\{dW(z,u):z\in R_0^{n-1},u\le t\}$$

が成立することによる．

この表現を使って、外挿は

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$(10.20) \qquad U_\tau(x,t) = \int^{t-\tau}\int_{-\infty}^{\infty} g(z,u)\, dW(z,u)$$

として得られる。

注意 1. 以上の議論は局所 homogeneous の場合にも出来る。Fortus [13] を参照されたい。

注意 2. 以上の議論は "Gaussian" でなくとも、L^2-sense の話題とすれば、独立性を直交性に、条件付平均値は Projection におきかえて成立する。

2° 高階の楕円型方程式と確率場

§4の多次元径数の Brown 運動と多重調和函数の関係は、$E|B(x)-B(y)|^2 = |x-y|$ であって、$n=2p-1$ 次元のときには $|x-y|$ が Δ^p の基本解になっている所から派生していることを思い出しておく。$\{X(x);\ x\in R^n\}$ を L^2-連続 homogeneous な Gaussian 確率場であり そのスペクトル測度を $dF(\lambda)$ としよう。
もし $dF(\lambda)$ が密度をもち、$P(i\lambda)$ なる多項式で $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{(2\pi)^n P(i\lambda)}$ と表わせるとしよう。$P(i\lambda) = \sum_{j_1+\cdots+j_n\le 2p} i^{|j|} P_{j_1\cdots j_n}\lambda^j$、$|j| = j_1+\cdots+j_n$ なる

として、偏微分作用素 $P(\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|j|\le 2p} P_{j_1\cdots j_n}(\frac{\partial}{\partial x})^j$ を考えれば、

$\rho(x) = \int e^{i\lambda x} dF(x)$ は $P(\frac{\partial}{\partial x})$ の基本解である。

従って、もし $P(\frac{\partial}{\partial x})$ が楕円型の方程式であって、それに対する Green 函数が存在すれば、§4と同様の議論ができる。標本函数の微分可能性等も、$\rho(x)$ の原点での特異性を調べれば必要な階数だけ言える、ことも示されるがこのことには深く立入らぬことにする。

§11. 無限次元径数の確率場

P. Lévy は [37] において Hilbert 空間を径数にもつ Brown 運動が決定的 (deterministic) な性質をもっていることを示した。その方法は、一般の homogeneous and isotropic な確率場に拡張できる。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

1° Hilbert 空間を径数にもつ確率場

H を無限次元 Hilbert 空間，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ をその完全正規直交系とし，$H \ni x$ のその直交系に対する座標表示を，$x = (x^1, x^2, \cdots, x^n, \cdots)$ とし，H における内積は単に $xy = x \cdot y$ で表わす．ノルムは $|x| = \sqrt{xx}$ とおく．H_n を $\{e_1, \cdots, e_n\}$ が張る H の n 次元部分空間とし，$S_t = \{x ;\ |x| = t,\ x \in H\}$，$S_t^{n-1} = H_n \cap S_t$ と記そう。

定義 11.1. H 上の P-連続な確率場 $\{X(x) ;\ x \in H\}$ が homogeneous であるとは，任意の変位 $\sigma_y : x \longrightarrow x + y,\ x, y \in H$ に対して，任意の N と，任意の $x_1, x_2, \cdots, x_N \in H$ に対して $\{X(\sigma_y x_1), \cdots, X(\sigma_y x_N)\}$ の結合分布が，$y \in H$ によらないときに言う。
更に homogeneous and isotropic であるとは，H 上の任意の直交変換 g に対して，$\{X(g x_1), \cdots, X(g x_N)\}$ の結合分布が g に依存しないときに言う。

又，確率場 $\{X(x) : x \in H\}$ が L^2-連続であるとき，weakly homogeneous な確率場であるとは，その平均 $EX(x)$ と共分散 $\rho(x, y) = E(X(x)\overline{X(y)}) - EX(x)\overline{EX(y)}$ が変位に対して不変のときに言う。

更に weakly homogeneous and isotropic であるとは，平均，共分散が直交変換に対して不変のときに言う。

Proposition 11.1. H 上の L^2-連続な確率場 $\{X(x) ;\ x \in H\}$ において

(i) $\{X(x) ;\ x \in H\}$ が homogeneous ならば，その共分散 $\rho(x, y) = \rho(x - y)$ は $x - y$ にのみ依存する。

(ii) $\{X(x) ;\ x \in H\}$ が homogeneous and isotropic ならば共分散 $\rho(x - y)$ は $|x - y|$ にのみ依存する。

(iii) $\{X(x) ;\ x \in H\}$ が homogeneous and isotropic なとき共分散 $\rho(x) = \rho(|x|)$ は，$(0, \infty)$ 上の有限測度 $d\mu$ により

$$(11.1) \qquad \rho(x) = \rho(|x|) = \int_0^\infty e^{-c|x|^2}\, d\mu(c).$$

と表現される。

逆に (11.1) によって定義される $\rho(x)$ は ある homogeneous and isotropic な確率場の共分散である。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

（証明）(i) 定義により．任意の変移 σ_y に対し $\rho(\sigma_y x_1, \sigma_y x_2) = \rho(x_1, x_2)$，特に $x_2 = -y$ にとれば．$\rho(x_1 - x_2, 0) = \rho(x_1, x_2)$ が任意の $x_1, x_2 \in H$ に対して成立する．

(ii) *homogeneous and isotropic* とならば．任意の直交変換 g に対し $\rho(x-y) = \rho(gx - gy)$ が任意の $x, y \in H$ に対して成立する．よって $\rho(x) = \rho(gx)$ であるが、任意の x に対し x を $|x|e_1$ に移す直交変換が存在するから．その g をとれば $\rho(x) = \rho(gx) = \rho(|x|e_1)$；よって．$|x|$ にのみ依存する。

(iii) $R(t)$ を $[0, \infty)$ 上の函数で $R(t^2) = \rho(t)$ なるものとすると．$\rho(x, y) = R(|x-y|^2)$ が正定符号なことに注意しておく．

$$(11.2) \qquad \Delta_h^{(1)} R(t) \equiv R(t+h) - R(t), \quad \Delta_h^{(n)} R(t) \equiv \Delta_h^{(1)}(R^{(n-1)}(t)) \qquad h > 0$$

と定義し．$\Delta_h^{(n)} \rho(x) \equiv \Delta_h^{(n)}(|x|)$ とおけば

イ) $\Delta_h^{(1)} \rho(x)$ は負定符号である．即ち．任意の N と．任意の $x_1, \cdots x_N$，任意の複素数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ に対して $\sum_{i,j}^{N} \alpha_i \bar{\alpha}_j \Delta_h^{(1)} \rho(x_i - x_j) \leq 0$.

なぜならば、x_0 を[illegible]して $x_0 x_j = 0$ $j = 1, 2, \cdots, N$. $|x_0|^2 = h$

$$y_j = \begin{cases} x_j & 1 \leq j \leq N \\ x_{j-N} - x_0 & n+1 \leq j \leq 2N \end{cases} \qquad \beta_j = \begin{cases} \alpha_j & 1 \leq j \leq N \\ -\alpha_{j-N} & N+1 \leq j \leq 2N \end{cases}$$

とおくと、$\rho(x)$ が 正定符号だから

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{2N} \beta_i \bar{\beta}_j \rho(y_i - y_j) = -2 \sum_{i,j}^{N} \Delta_h^{(1)} \rho(x_i - x_j) \alpha_i \bar{\alpha}_j$$

ロ) $\rho(x) \geq 0$．を示す．何故ならば．

$$0 \leq \sum_{i,j}^{N} \rho(te_i - te_j) = \sum_{i=j} R(0) + \sum_{i \neq j} R(2t^2)$$

によって、$0 \leq NR(0) + N(N-1) R(2t^2)$，従って．$\frac{R(0)}{N-1} \leq R(2t^2)$

$N \longrightarrow \infty$ にやって．$0 \leq R(2t^2)$.

ハ) イ)を繰かえし使うことによって $(-1)^n \Delta_h^{(n)} \rho(x)$ は 正定符号であり、それにロ)を適用して $(-1)^n \Delta_h^{(n)} \rho(x) \geq 0$. 即ち $(-1)^n \Delta_h^{(n)} R(t) \geq 0$ を得る。このことは、$R(t)$ が *completely monotonic* なことを意味する。確率場の L^2－連続性から $\rho(|x|)$ 従って $\rho(t)$ の連続性がわかるから $R(t)$ は或有限正測度 $d\mu$ の *Laplace* 変換になっている。即ち

$$R(t) = \int_0^\infty e^{-ct} \, d\mu(c).$$

（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

2° H上の isotropic な確率場の内挿問題

Proposition 11.2. $\{X(x)\,;\, x\in H\}$ をH上の L^2-連続で平均0の homogeneous and isotropic な確率場とするとき

(11.2) $$M_n(t,x) \equiv C(2,n)\,C_n(t)\int_{|y|=t,\,y\in H_n} X(x+y)\,d\omega_n(y)$$

とおく．但し．積分は $X(x+y)$ $y\in H_n$ を y に関して n次元ユークリッド空間上の確率場とみて、$|y|=t$ なる球面上の単位一様測度で行う。又．

$$C_n(t) \equiv \frac{R(t^2)}{\int_0^\pi R(2t^2(1-\cos\theta))\sin^{n-2}\theta\,d\theta}, \quad R(|x|^2)=\rho(x)$$

$$C_n(2,n) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$ このとき次のことが成立する。

(11.3) $$M_n(t,x) = E\{X(x)\,;\,\mathcal{B}\{X(x+z)\,;\,z\in S_t^{n-1}\}\} \quad a.e.$$
$$= \mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}\{X(x+z)\,;\,z\in S_t^{n-1}\}}\,X(x)$$

$\{M_n(t,x)\}$ は．$n\to\infty$ で、平均収束及び概収束して

(11.4) $$M(t,x) \equiv \lim_{n\to\infty} M_n(t,x) = E\{X(x)\,;\,\mathcal{B}\{X(x+z)\,;\,z\in S_t\}\} \quad a.e.$$
$$= \mathrm{Proj}_{\mathfrak{M}\{X(x+z)\,;\,z\in S_t\}}$$

$\rho_M(t,s\,;\,x-y) = E\,M(t,x)\overline{M(s,y)}$ とおけば

(11.5) $$\rho_M(t,s\,;\,x-y) = \frac{R(t^2)R(s^2)}{R^2(0)}\,R(|x-y|^2+t+s^2)$$

(証明)

$$E\{(X(x)-M_n(t,x))\overline{X(x+z)}\} = R(t^2) - C(2,n)\,C_n(t)\int_{|z|=t} R(|z-y|^2)\,d\omega_n(y)$$ $\overline{y\in S_t^{n-1}}$ に対し

$$= R(t^2) - C_n(t)\int_0^\pi R(2t^2(1-\cos\theta))\sin^{n-2}\theta\,d\theta = 0$$

$M_n(t,x)\in\mathfrak{M}\{X(x+z)\,;\,z\in S_t\}$ は明らかだから、Gaussian system の性質から、(11.3) を得る。次に S_t^{n-1} が n に対し単調増大な集合なことと、確率場の連続性により．$\mathcal{B}\{X(x+z):z\in S_t^{n-1}\}\uparrow\mathcal{B}\{X(x+z)\,;\,z\in S_t\}$，だから $M_n(t,x)$ が平均並びに概収束することがわかり、(11.4) を得る。

$$E\{M(t,x)\overline{M(s,y)}\} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} C(2,n)\,C(2,m)\,C_n(t)\,C_m(t)\;\times$$

$$\times\int_{S_t^{n-1}}\int_{S_t^{m-1}} R(|x-y-z-v|^2)\,d\omega_m(v)\,d\omega_n(z)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{C(2,n)C_n(t)R(s^2)}{R(0)} \int_{S_t^n} R(|x-y-z|^2+s^2)\, d\omega_n(z)$$

$$= \frac{R(t^2)R(s^2)}{R(0)^2} R(|x-y|^2+t^2+s^2)$$

但しここで、$f(t)$ を原点の近傍で連続な可積分函数とするとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^\pi f(\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\, d\theta}{\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta\, d\theta} = f(0)$$

が成立することを使った。 （証明終）

(11.6) $\quad Y(\alpha ; x) \equiv M\left(\frac{|x|\sin\alpha}{2}, \frac{1-\cos\alpha}{2} x\right)$

とおけば、$x \in H$ を固定したとき、$Y(\alpha, x)$ の共分散函数は

(11.7) $\quad \rho_Y(\alpha, \beta) \equiv E\{Y(\alpha, x)\overline{Y(\beta, x)}\}$

$$= R\left(\frac{|x|^2}{4}(\cos\alpha-\cos\beta)^2+\frac{|x|^2}{4}(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\right)$$

$$= R\left(\frac{|x|^2}{2}(1-\cos\alpha\cos\beta)\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\left(\frac{|x|^2}{2}(1-\cos\alpha\cos\beta\right)}\, d\mu(c)$$

であるから、$(0,\pi)\times(0,\pi)$ で解析的である。Yu. K. Belyaev [57] の意味で、$Y(\alpha, x)$ は、$(0,\pi)$ 上で解析的な確率過程であり、$Y(\alpha, x)$ の可分な *version* を取れば、ほとんど全ての標本函数は $(0,\pi)$ で解析的である。

定理 11.1. H 上の L^2-連続な *homogeneous and isotropic* な確率場 $\{X(x) : x \in H\}$ に対して、(11.6) で定義される確率過程 $Y(\alpha, x)$ は $(0,\pi)$ で解析的確率過程であり、

(11.8) $\quad \underset{\alpha\downarrow 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, Y(\alpha, x) = X(0), \quad \underset{\alpha\uparrow\pi}{\mathrm{l.i.m.}}\, Y(\alpha, x) = X(x)$

が成立する。従って、H の半径 t の球 $V_t = \{y : \|y\| \le t,\ y \in H\}$ 上で $\{X(z) ; z \in H\}$ が与えられたとき、任意の $x \in H$ に対し $Y(\alpha, x)$ を $(0,\pi)$ で解析接続することにより、$X(x)$ を決定出来る。

（証明） 十分小さい $\varepsilon > 0$ が存在して 任意の $0<\alpha<\varepsilon$ に対して $S\left(\frac{|x|}{2}\sin\alpha\right) + \frac{1-\cos\alpha}{2}\cdot x \subset V_t$ より、
$Y(\alpha : x) \in \mathfrak{M}\{X(z+x) ; z \in V_t\}$ $0<\alpha<\varepsilon$. だから $\{X(z) : z \in V_t\}$ が与えられれば、$Y(\alpha, x)$ が $0<\alpha<\pi$ で決まる。（各 x と α に対し

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

測度0を除いて)。(11.8)式を示す。 $s = \frac{\sin\alpha}{2}|x|$ とおき、

$$E|Y(\alpha,x)-X(x)|^2 = R(\tfrac{|x|^2}{2}\sin^2\alpha) + R(0) - 2\lim_{n\to\infty} C(2,n)C_n(s)\int_{S_0^n} R(|\tfrac{1-\cos\alpha}{2}x - x + y|^2)\,d\omega_n(y)$$

$$= R(\tfrac{|x|^2}{2}\sin\alpha) + R(0) - 2\frac{R(\frac{\sin^2\alpha}{4}|x|)}{R(0)} R(\tfrac{|x|^2}{2}(1+\cos\alpha)) \to 0 \quad (\alpha\to\pi)$$

同様に、

$$E|Y(\alpha,x)-X(0)|^2 = R(\tfrac{|x|^2}{2}\sin^2\alpha) + R(0) - 2\frac{R(\frac{\sin^2\alpha}{4}|x|)}{R(0)} R(\tfrac{|x|^2}{2}(1+\cos\alpha)) \to 0 \quad (\alpha\to 0)$$

(証明終)

注意　話題を Gaussian 確率場に限ったが、内、外挿問題は謂ゆる線形問題と考え 概収束を全て平均収束におきかえれば、weakly homogeneous and isotropic な確率場の場合に成立する。

3° H上の局所 homogeneous and isotropic な確率場

H上の局所確率場 $\{X(x): x\in H\}$ に対し homogeneous性、isotropic性は、定義11.1 と 同様に、定義 1.5を拡張した形で与えられる。その定義の仕方は明らかだと思われるので省略させて頂く。

Proposition 11.3. L^2-連続な局所 homogeneous and isotropic なH上の確率場 $\{X(x): x\in H\}$ の structure function. $D(x-y) = E|X(x)-X(y)|^2$ は、$(0,\infty)$ 上の有限測度 $\mu(c)$ と非負の定数 μ_0 が存在して

$$R(t) = \int_0^\infty (1-e^{-ct})\frac{1+c}{c}\,d\mu(c) + \mu_0 t \tag{11.9}$$

でもって、$D(x-y) = R(|x-y|^2)$ と表わされる。

(証明概略)　$D(x-y)$ は $|x-y|$ にのみ依存する。conditionary negative definite な函数だから $D(x-y) = R(|x-y|^2)$ とかけて、Prop. 11.1. の証明の 1) により $\Delta_h^{(1)} R(|x-y|^2)$ が positive definite である Prop. 11.1. の結果から、有限測度 μ_h が存在して $\Delta_h^{(1)} R(t) = \int_0^\infty e^{-ct}d\mu_h(t)$ とかける。このことから $R(t)$ が単調増加で、$\gamma(t) = \int_0^t dR(s)$ととると $\gamma(|x-y|^2)$ が positive definite であることが知られる。よって $\gamma(t) = \int_0^\infty e^{-ct}d\mu(c)$, $R(t) = \gamma(0) - \gamma(t) + \int_0^t \gamma(s)\,ds$ $= \int_{0+}^\infty (1-e^{-tc})(1+\frac{1}{c})\,d\mu(c) + t\mu(0)$.　(証明終)

このProposition を使って、前パラグラフに等応する結果が示される。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

付　　録

§1 Grassman代数

1° Vを係数体K（実又は複素数体）上のn次元ベクトル空間
V^*をその共役空間としよう。$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$をVの基底
$(f^1, f^2, \cdots, f^n)$を$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$に共役なV^*の基底とする。Vの
pケの直積$\overset{p}{\Pi} V$上のp-線形形式全体を$\overset{p}{\otimes} V^*$と記すことにして、これ
をV^*のテンソル積という。ここに　p-線形形式$a \in \overset{p}{\otimes} V^*$とは　任意
の$\alpha, \beta \in K$、任意の$u_1, \cdots, u_n, u_j \in V$に対し

$$a(u_1, \cdots, \alpha u_j + \beta v_j, \cdots, u_p) = \alpha a(u_1, \cdots, u_j, \cdots u_p) + \beta a(u_1, \cdots, v_j, \cdots, u_p)$$

を充す。$\overset{p}{\Pi} V \ni (u_1, \cdots, u_p)$上のK値函数をいう。
$\overset{p}{\otimes} V^*$は$a_1, a_2 \in \overset{p}{\otimes} V^*$，$\alpha_1, \alpha_2 \in K$に対し

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)(u_1, \cdots, u_p) \equiv \alpha_1 a_1(u_1, \cdots, u_p) + \alpha_2 a_2(u_1, \cdots, u_p)$$

により　積和を定義して、n^p次元ベクトル空間になる。$a \in \overset{p}{\otimes} V^*$と
$b \in \overset{q}{\otimes} V^*$のテンソル積を$(u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q) \in \overset{p+q}{\Pi} V$に対し

$$a \otimes b\,(u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q) \equiv a(u_1, \cdots, u_p)\, b(v_1, \cdots, v_q)$$

で定義する。

$\mathfrak{S}_p$を$(1, 2, \cdots, p)$の置換群とし$\sigma \in \mathfrak{S}_p$のとき

$$(\sigma a)(u_1, \cdots, u_p) \equiv a(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(p)})$$

とおくと　$\sigma a \in \overset{p}{\otimes} V^*$　もし、すべての$\sigma \in \mathfrak{S}_p$に対して$\sigma a = a$のとき
aを対称p次形式、もし$\sigma a = \operatorname{sign} \sigma\, a$ならば、交代$p$次形式と
呼ぶ。
$\overset{p}{\otimes} V^*$上の交代作用素$A_p a$を

$$A_p a = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sign} \sigma \cdot \sigma \varphi$$

により定義すると$A_p \overset{p}{\otimes} V^* \equiv \overset{p}{\wedge} V^*$は交代$p$次形式全体の作る
${}_nC_p = n!/p!(n-p)!$次元部分空間である。
$a \in \overset{p}{\wedge} V^*$，$b \in \overset{q}{\wedge} V^*$に対して

$$a \wedge b \equiv \frac{1}{p!\,q!} A_{p+q}(a \otimes b)$$

により　aとbの外積$a \wedge b \in \overset{p+q}{\wedge} V^*$を定義する。
$a, a_1, a_2 \in \overset{p}{\wedge} V^*$，$b, b_1, b_2 \in \overset{q}{\wedge} V^*$，$c \in \overset{r}{\wedge} V^*$，$\alpha_1, \alpha_2 \in K$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \wedge b = \alpha_1 (a_1 \wedge b) + \alpha_2 (a_2 \wedge b)$$
$$a \wedge (\alpha_1 b_1 \wedge \alpha_2 b_2) = \alpha_1 (a \wedge b_1) + \alpha_2 (a \wedge b_2)$$
$$(a \wedge b) \wedge C = a \wedge (b \wedge C)$$

更に $a \in \overset{p}{\wedge} V^*$ は

$$a = \sum_{[i]} a_{i_1 \cdots i_p} f^{i_1} \wedge \cdots \wedge f^{i_p}$$

と表わされることがわかる。但し $\sum_{[i]}$ は $(1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n)$ すべてに渡る和を意味するものとする。このとき次の関係が成立する。

$$f^i \wedge f^j = -f^j \wedge f^i \qquad f^i \wedge f^i = 0$$

$a \in \overset{p}{\wedge} V^*$ $\quad b \in \overset{q}{\wedge} V^*$

$$a \wedge b = \sum a_{i_1 \cdots i_p} b_{j_1 \cdots j_q} \begin{pmatrix} i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q \\ k_1 \cdots\cdots k_{q+p} \end{pmatrix} f^{k_1} \wedge \cdots \wedge f^{k_{p+q}}$$
$$= (-1)^{pq}\, b \wedge a$$

$\sum_{p=0}^{n} \oplus \overset{p}{\wedge} V^*$ は 多元環になるが これを V に建られたGrassman代数 $\overset{p}{\wedge} V^*$ を p 次の同次形式という。

2° 更に V が内積空間であり $(e_1, \cdots, e_n)$ が 正規直交基底 $(f^1, \cdots, f^n)$ をその共役基底としよう。V^* には自然に $(f^i, f^j) = \delta_{ij}$ により 内積が定義される。このとき次の如き演算が定義される。

$$^*a^p \equiv \sum_{[i][j]} \bar{a}_{i_1 \cdots i_p} \delta \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots\cdots n \\ i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_{n-p} \end{pmatrix} f^{j_1} \wedge \cdots \wedge f^{j_{n-p}}$$

$$(a^p, b^p) \equiv \sum_{[i]} \bar{a}_{i_1 \cdots i_p} b_{i_1 \cdots i_p} = {}^*(a_p \wedge {}^* b_p)$$

$$a^p \vee b^q \equiv (-1)^{(q-p)(n-q)}\, {}^*(a^p \wedge {}^* b^p)$$

$$= \sum_{[i][j][k]} a_{i_1 \cdots i_p} b_{j_1 \cdots j_q} \delta \begin{pmatrix} i_1 \cdots i_p k_1 \cdots k_{q-p} \\ j_1 \cdots\cdots j_q \end{pmatrix} f^{k_1} \wedge \cdots \wedge f^{k_{q-p}} \quad q > p$$

3° $(f^1, \cdots, f^n)$ の代りに他の基底 $(g^1, \cdots, g^n)$ をとったとしよう。この座標変換は

$$f^i = \sum_{j=1}^{n} \alpha^i_j \; g^j$$ で与えられるとする。

$$\sum_{[i]} b_{i_1 \cdots i_p} f^{i_1} \wedge \cdots \wedge f^{i_p} = \sum_{j_1 \cdots j_p} b_{i_1 \cdots i_p} \alpha^{i_1}_{j_1} \cdots \alpha^{i_p}_{j_p} \; g^{j_1} \wedge \cdots \wedge g^{j_p}$$

$$= \sum_{\substack{[i][k] \\ j_1 \cdots j_p}} b_{i_1 \cdots i_p} \alpha^{i_1}_{j_1} \cdots \alpha^{i_p}_{j_p} \delta \begin{pmatrix} j_1 \cdots j_p \\ k_1 \cdots k_p \end{pmatrix} g^{k_1} \wedge \cdots \wedge g^{k_p}$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$= \sum_{[i][k]} b_{i_1\cdots i_p} \alpha^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_p}\, g^{k_1} \wedge \cdots \wedge g^{k_p}$$

但し

$$\alpha^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_p} = \det \begin{pmatrix} \alpha^{i_1}_{k_1} & \cdots & \alpha^{i_1}_{k_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha^{i_p}_{k_1} & \cdots & \alpha^{i_p}_{k_p} \end{pmatrix}$$

§2. C^∞-多様体上の微分形式

1° C^∞-多様体M上の一点 x における一次微分の作るベクトル空間 $D_x(M)$ に建てられる Grassmann 代数 $\mathcal{D}_x(M)$ を点 x における微分式といい、p 次形式を x における p 次微分形式という。

x における二つの局所座標 $(x^1,\cdots,x^n)$ $(y^1,\cdots,y^n)$ で p 次微分形式 φ が

$$\varphi(x) = \sum_{[i]} \alpha_{i_1\cdots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$
$$= \sum_{[j]} \beta_{j_1\cdots j_p}\, dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_p}$$

と書かれたとすれば、§1の座標変換の法則から

$$\beta_{j_1\cdots j_p} = \sum_{[i]} \alpha_{i_1\cdots i_p} \left(\frac{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_p})}{\partial(y^{j_1},\cdots,y^{j_p})} \right)_x$$

点 x における接空間 $T_x(M) = \{ \sum \alpha_i L_i,\ L_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \}$ に建てられた Grassmann 代数 $G_x(M)$ でその p 次の同次のもの全体を接 p-ベクトル空間という。これは $\mathcal{D}_x(M)$ の p 次微分形式全体のつくる部分空間と双対である。

2° φ を $M \ni x$ から $\overset{p}{\wedge} D_x(M) = \overset{p}{\wedge} T^*_x(M)$ への対応 $\varphi(x)$ を p 次微分形式というがここでは特に C^∞-p 次微分形式、即ち点 x の局所座標近傍 U で

$$\varphi(x) = \sum_{[i]} \varphi_{i_1\cdots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

と書かれたとき $\varphi_{i_1\cdots i_p}(x)$ が C^∞-函数であるときを指すことにする。
一次微分形式のことを Paff 形式とも呼ぶ。$\Phi^{(p)} = \Phi^{(p)}(M)$ で C^∞-p 次

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

微分形式全体の作る線形空間を表わす。

$\Psi^{(p)} \ni \varphi$ を $d\varphi \in \Psi^{(p+1)}$ にうつす演算を

$$d\varphi \equiv \sum_{k} \sum_{[i]} \frac{\partial \varphi_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

$$= \sum_{[i][j]k} \frac{\partial \varphi_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^k} \delta\binom{k i_1 \cdots i_p}{j_1 j_2 \cdots j_{p+1}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{p+1}}$$

で定義すると

$$d(\alpha\varphi \pm \beta\psi) = \alpha d\psi \pm \beta d\psi$$

$$d(\varphi^p \ \psi^q) = d\varphi^p \wedge \psi^q + (-1)^p \varphi^p \wedge d\psi^q$$

$$d(d\varphi) = 0$$

が成立する。

3° Mを可符号 C^∞- Riemann 多様体, 即ち, C^∞-多様体であり, Mの各点 x の接空間 $T_x(M)$ において内積が定義されている。詳しく言えば

(i) 局所座標 $(x^1, \cdots, x^n)$, $T_x(M)$ の基底ベクトルを $L_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $1 \le i \le n$ とするとき $(L_i, L_j) = g_{ij}$, $g_{ij} = g_{ji}$ が 二階共変テンソル.

(ii) $\{g_{ij}\}$ 正定符号

(iii) $g_{ij}(x)$ が座標近傍で C^∞ である.

が みたされているときに言う。この $g\{g_{ij}(x)\}$ を Rieman 計量 という。このとき, 座標近傍 U の開部分集合 V が取れ, V の 中 の各点の接空間で正の正規直交系 $(e_1, \cdots, e_n)$

$$L_j = \sum e_i \ a^i_j(x) \qquad a^i_j(x) : C^\infty$$

$$f^i = \sum a^i_j(x) \ dx^j \qquad A = (a^i_j(x))$$

とおくと

$$g_{ij}(x) = (L_i, L_j) = (\sum_k e_k a^k_i(x), \sum_k e_k a^k_j)$$

$$= \sum_k a^k_i \ a^k_j$$

が成立する。このとき $(f^1, \cdots, f^n)$ は $D_x(M)$ の $(e_1, \cdots, e_n)$ に共役な基底である。

$\Psi^{(p)} \ni \varphi^p$ を $\Psi^{(n-p)} \ni {}^*\varphi^p$ にうつす線形作用素を

$${}^*\varphi = \sum_{[i][j]} \sum_{[l]} \sqrt{g}\, g^{i_1 l_1} \cdots g^{i_p l_p} \varphi_{l_1 \cdots l_p} \delta\binom{1\,2 \cdots\cdots n}{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_{n-p}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-p}}$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

で定義する。但し、g^{ij} は g_{ij} の逆行列、$g = \det(g_{ij})$

このとき

$$*(f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_p}) = \delta\binom{1\,2\,\cdots\cdots\,n}{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_{n-p}} f^{j_1}\wedge\cdots\wedge f^{j_{n-p}}$$

$$*1 = f^1\wedge\cdots\wedge f^n = \sqrt{g}\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

が成立する。$*1$ を体積要素という。又 $*\varphi$ を φ の同伴形式 (adjoint form) という。

4°

$$\varphi, \psi \in \Psi^{(p)}$$

$$*^{-1} = (-1)^{p(n-p)}*$$

$$\delta \equiv (-1)^p *^{-1} d * = (-1)^{n(p-1)+1} * d *$$

$$\Delta \equiv d\delta + \delta d$$

を定義する。δ は $\Psi^{(p)}$ を $\Psi^{(p-1)}$ にうつし Δ は $\Psi^{(p)}$ を $\Psi^{(p)}$ にうつす。

$$**^{-1} = I \qquad \Delta d = d\delta d = d\Delta$$

$$*d = (-1)^{p+1}\delta * \qquad \Delta\delta = \delta d\delta = \delta\Delta$$

$$*\delta = (-1)^p d * \qquad \Delta * = *\Delta$$

$$d^2 = \delta^2 = 0$$

§3. Current

1° カレントの定義は C^∞ 多様体で定義できるが、ここでは C^∞ Riemann [illegible] で行う。C^∞ 多様体の場合も明らかであろう。

$$[illegible] \equiv \{\varphi\in\Phi^{(p)} ;\ \varphi \text{ がコンパクトな台をもつ}\}$$

とおき $\Phi^{(p)} \ni \{\varphi_j\}$ の収束を φ_j の台が同一のコンパクト集合 K に含まれ、K を有限ヶの座標近傍 Q_i でおおうとき、各 Q で φ_j をその局所座標で表わしたとき

$$\varphi_j = \sum_{[k]} \varphi^{(j)}_{k_1\cdots k_p}\, dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_p}$$

とすれば、$\varphi^{(j)}_{k_1\cdots k_p}$ がその各階の導函数と共に Q で 0 に一様収束するとき、$\varphi_j \to 0$ と定義する。或は Schwarz の $\mathcal{D}$ と同様に、σ-Normed 空間の inductive limit としての位相を入れる。

定義 3.1. C^∞ 多様体 M における p 次の current T とは

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$\Phi^{(n-p)}$ 上の連続線形作用素をいう。

例 1. α を M 上の C^∞ - p 次微分形式. $\alpha \in \Psi^{(p)}$ $\varphi \in \Phi^{(n-p)}$ とする.

$$T[\varphi] \equiv \int_M \alpha \wedge \varphi$$

この型の current T を. T は微分形式 α に等しいという。

$\alpha \in \Psi^{(q)}$, T を p 次の current に対し. T との外積 $T \wedge \alpha$ を

$$(T \wedge \alpha)[\varphi] \equiv T[\alpha \wedge \varphi] \equiv (-1)^{pq}(\alpha \wedge T)[\varphi]$$

で定義する.

Uをある座標近傍 φ. $\varphi^{(i)}$ を台が U に含まれる C^∞ 函数とする.

Uにおける 0次の current $T_{i_1 \cdots i_p}$ を

$$T_{i_1 \cdots i_p}[\varphi^0 dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n] \equiv \delta\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & n \\ i_1 \cdots i_p & j_1 & \cdots & j_{n-p} \end{pmatrix} T[\varphi^0 dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-p}}]$$

で定義すると

$$T = \sum_{(i)} T_{i_1 \cdots i_p} \; dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

が成立する. 即ち T は局所的に 0次の current の交代テンソルで表わされる。

外微分は

$$(dT^{(p)})[\varphi] \equiv (-1)^{p+1} T^{(p)}[d\varphi]$$

で定義する.

2° 次に C^∞- Riemann 多様体上の current に対し 次の如く演算が定義される.

φ. $\psi \in \Phi^{(p)}$ に対し

$$(\varphi, \psi) \equiv \int_M \varphi \wedge * \psi$$

により内積が定義され、$\Phi^{(p)}$ は pre - Hilbert 空間になる。

(i) $*$ は isometric

$$(* \varphi^p, * \psi^p) = (\varphi^p, \psi^p)$$

(ii) $\alpha \in \Psi^{(q)}$ $e(\alpha)\varphi \equiv \alpha \wedge \varphi$

$$i(\alpha^q) \equiv (-1)^{p(n-p-q)} * e(\alpha) *$$

$$(e(\alpha^q)\varphi^p, \psi^{p+q}) = (\varphi^p, i(\alpha^q)\psi^{p+q})$$

$$= (\varphi^p, \alpha^{\gamma\vee} \psi^{p+q})$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$i(\alpha)$ は $e(\alpha)$ の共役作用素

(iii) Δ は自己共役、正値

$$(\Delta\varphi^p, \varphi^p) = (\varphi^p, \Delta\varphi^p)$$

$$\because \quad (\Delta\varphi^p, \varphi^p) = (d\delta\varphi, \varphi) + (\delta d\varphi, \varphi)$$
$$= (\delta\varphi, \delta\varphi) + (d\varphi, d\varphi) \geq 0$$

同次の current と微分形式の内積を

。 $(T^p, \varphi^p) \equiv T[*\varphi]$

$(dT^{p-1}, \varphi^p) = (T^{p-1}, \delta\varphi^p)$

。 $*T^p[\varphi^p] \equiv (-1)^{p(n-p)} T^p[*\varphi^p] = (-1)^{p(n-p)}(T, \varphi)$

と定義する.

$$*T^p[*\varphi^{n-p}] = T[\varphi]$$

。 $\delta T^p = (-1)^{n(p-1)+1} * d * T^p$

$(T^p, d\varphi^{p-1}) = (\delta T^p, \varphi^{p-1})$

。 $(\Delta T, \varphi) = (T, \Delta\varphi)$

§4. バンドル

1° M を C^∞– 多様体, M 上の点 x における接空間 $T_x = T_x(M)$ の接ベクトルを $L_x \in T_x$ とする. $B = \{L_x ; L_x \in T_x,\ x \in M\}$ に対し B から M への写像(射影と呼ぶ)π を $\pi(L_x) = x$ で定義する. M の x における局所座標を $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$, その座標近傍を V とする。$y \in V$ $L_y = L_{1y}\, d_y x^1 + \cdots + L_{ny}\, d_y x^n$ $L_{iy} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_y$ であって, L_y は, $(x^1(y), \cdots, x^n(y), dx^1(L_y), \cdots, dx^n(L_y))$ で表わされる。この対応を Φ_V によって $\pi^{-1}V$ と $V \times R_0^n$ が1対1に対応し, $V \times R_0^n$ 近傍の像で B の近傍を定義すれば、B は位相づけられ、C^∞– 多様体となる. それは C^∞– 函数 F_i $i = 1, 2 \cdots, n$, でもって, $y^i(y) = F_i(x^1, \cdots x^n)$, $d_y y^i = \sum_j \left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\right)_y d_y x^j$ なる関係が, (x, dx) と (y, dy) の間にあり. 又逆の関係も成立するから明らか. この B を接–バンドルという. 同様に p 次接バンドルも定義される。

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

2°. M を n 次元 C^∞-Riemann 多様体, T_x の正規直交ベクトル系を $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ その全体を F_x, $B = \{(a_1,\cdots,a_n) \in F_x : x \in M\}$ とすれば, $M \ni x$ の座標近傍 V を適当にとって, $\{F_x ; x \in V\}$ と $V \times SO(n)$ との間に1対1の対応が得られ, $V \times SO(n)$ の位相を B にうつして, B は C^∞-多様体となる. それは, $(a_1,\cdots,a_n)$ を $(e_1,\cdots,e_n)$ 座標で

$a_j = \sum_i U_{ij} e_i$ と表示したときの $U = \{U_{ij}\} \in SO(n)$ として, $(x^1,\cdots,x^n, U_{ij})$ と $(a_1,\cdots,a_n)$ を対応させればよい. このとき B を principal fiber bundle という。

今, $\omega^i = \sum_j u_{ij} f^j$ なる微分形式を 基本微分形式という.

$d\omega_i = \sum_j \omega_j \omega_{ji}$ と一意に $d\omega_i$ を表わすことが出来 $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ を充す. $\{\omega_i, \omega_{ij}\}$ は B 上の 1 次微分形式の完全系をなす。

§5. Radon 変換

I. M. Gelfand - M. I. Graev - N. Y. Vilenkin [18] に従って Radon 変換に関する簡単な事実を紹介しておく。

R^n を n 次元アファイン空間とし, E_n をそこにおける $n-1$ 次元超平面, $\check{R}^n$ でその全体を表わすことにする。R^n の点 x 及び E_n を座標で表わすため, 座標原点を固定した デカルト座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を考える。方向づけられた超平面 E_n の座標として, E_n の単位法線ベクトルを ξ, 原点から E_n におろした足と, 原点の ξ 方向を正にして符号のついた距離を t として (ξ, t) で表わす.
$z \in E_n = (\xi, t)$ は $\sum_{i=1}^n z^i \xi^i = z\xi = t$ なる点として表わされる。
$\mathcal{S} = \mathcal{S}(R^n)$ を急減少な函数の class として, $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ に対して $\check{R}^n$ 上の函数を対応する変換として $E_n = (\xi, t)$ 上で $\varphi(x)$ を積分した値

$$(5.1) \qquad \check{\varphi}(\xi, t) = \int_{x\xi = t} \varphi(x)\, \alpha^{n-1}$$

但し α^{n-1} は $n-1$ 次微分形式で

$$d_x x\xi \wedge \alpha^{n-1} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

を充すもの, 例えば

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$*\left(\sum_j \frac{1}{\xi^j} dx^j\right) = \sum_j (-1)^{j-1} \frac{1}{\xi^j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

[15] に従えば (5.1) は

$$(5.2) \qquad \check{\varphi}(\xi, t) = \int \varphi(x)\, \delta(x\xi - t)\, dx$$

にも記すことができる。(5.1)(或は(5.2))によって定まる変換を Radon 変換と呼ぶ。我々は、(ξ, t) は $n-1$ 次元超平面の座標と解したが、(5.1)式では必ずしもそう解釈する必要もない。(5.1)式では $|\xi| = 1$ の条件をはずす。そうすると次の Proposition が成立する。

Proposition 5.1. $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $\check{\varphi}(\xi, t)$ は

(i)

$$(5.3) \qquad \check{\varphi}(a\xi, at) = |a|^{-1} \check{\varphi}(\xi, t)$$

(ii) $\check{\varphi}(\xi, t)$ は $\xi \neq 0$ で (ξ, t) の無限回微分可能函数

(iii) $|t| \to \infty$ のとき 任意の k に対し

$$|\check{\varphi}(\xi, t)| = O(|t|^{-k})$$

(iv) 任意の $k = 0, 1, 2, \cdots$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} \check{\varphi}(\xi, t)\, t^k\, dt$$

は ξ の k 次の同次多項式である。

(証明)

(i)
$$\check{\varphi}(a\xi, at) = \int_{x, a\xi = at} \varphi(x) \sum (-1)^{j-1} \frac{1}{a\xi^j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \cdots \wedge dx^n$$
$$= \frac{1}{a} \int_{x \cdot \xi = t} \varphi(x) \sum (-1)^{j-1} \frac{1}{\xi^j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \cdots \wedge dx^n$$
$$= \frac{1}{a} \check{\varphi}(\xi, t) \qquad a > 0$$

$a = -1$ に対しては $x(-\xi) = -t$ は $x\xi = t$ と向が逆にとられた、と解すべきだから

$$\check{\varphi}(-\xi, -t) = -\int_{x(-\xi) = -t} \varphi(x) \sum (-1)^{j-1} \frac{1}{\xi^j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \cdots \wedge dx^n$$
$$= \int_{x\xi = t} \varphi(x) \sum (-1)^{j-1} \frac{1}{\xi^j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \cdots \wedge dx^n$$
$$= \check{\varphi}(\xi, t)$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

(ii) $\varphi(x)\in\mathcal{S}$ から $\dfrac{\partial^k}{\partial t^k}\check{\varphi}(\xi,t)=-\displaystyle\int_{\xi x=t}\Big(\sum_i \frac{1}{\xi^i}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^k\varphi(x)\,dx$ を得る

から明らか。但し $\Big(\dfrac{\partial}{\partial\xi}\Big)^k\check{\varphi}(\xi,t)=\displaystyle\int_{\xi x=t}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k\varphi(x)\,dx$

(iii) ξ の方向に才一座標軸をとれば

$$\check{\varphi}(\xi,t)=\int\varphi\Big(\frac{t}{|\xi|}x^2\cdots x^n\Big)\,dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$\varphi\in\mathcal{S}$ から $|\check{\varphi}(\xi,t)|\le\displaystyle\int\frac{dx^2\cdots\cdots dx^n}{\big(1+\frac{t^2}{|\xi|^2}+(x^2)^2+\cdots+(x^n)^n\big)^k}=O^{(1)}\int\frac{r^{n-2}\,dr}{\big(1+\frac{t^2}{\xi^2}+r^2\big)^{\frac{k}{2}+\frac{n+1}{2}}}$

$$=O(t^{-k})\int\frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^{\frac{n}{2}}}\,dr=O(t^{-k})$$

(iv) $\displaystyle\int\varphi(x)(\xi,x)^k dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\xi x=t}\varphi(x)(\xi,x)^k\,dx\,dt$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\check{\varphi}(\xi,t)\,t^k\,dt$$

左辺は、ξ の k 次の同次多項式　　　　（証明終）

注意1　(i)によって、$\check{\varphi}(\xi,t)$ はその超平面の向に独立に定まることがわかった。従って $\check{\varphi}(\xi,t)$ は、"方向づけを考えない"超平面 $|\xi|=1$ $\infty>t>0$ $\xi x=t$ 上で $\varphi(x)$ を その面積要素で積分したものと定義しておいた。

(5,4)　$\check{\varphi}(\xi,t)=|\xi|\,\check{\varphi}\Big(\mathrm{sigt}\,\dfrac{\xi}{|\xi|},\ \dfrac{|t|}{|\xi|}\Big)$

によって　拡張することによっても定義できる。
即ち "方向づけを考えない超平面" 全体上の函数と考えることができる（1対1に対応する！）　以下の性質も（5,4）式を使って言いなおすことが出来る。

Proposition 5.2.　奇数次元の時

(5.5)　$\varphi(x)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{(2\pi)^{n-1}}{2}\displaystyle\int_{\Gamma}\check{\varphi}_t^{(n-1)}(\xi,\xi x)\,\beta(\xi)$

但し、Γ は原点を含む任意の区分的に滑かな $n-1$ 次元閉曲面

$\check{\varphi}_t^{(n-1)}(\xi,t)=\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\check{\varphi}(\xi,t)$，$\beta(\xi)$ は $n-1$ 次微分形式

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

$$\beta(\xi) = \sum_j (-1)^{j-1} \xi^j d\xi^1 \wedge \cdots \wedge d\xi^{j-1} \wedge d\xi^j \wedge \cdots \wedge d\xi^n = {}^*\left(\sum_{j=1}^n (\xi^j\, d\xi^j)\right)$$

Proposition 5.3. $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ $n = 2p-1$ 奇数次元のとき

$$(5.6) \quad \int \varphi(x)\psi(x)\,dx = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} \check{\varphi}_t^{(n-1)} \check{\psi} \quad dt$$

$$(5.7) \quad = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} \int_\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} \check{\varphi}_t^{(p-1)}(\xi, t)\, \check{\psi}_t^{(p-1)}(\xi, t) \quad \beta(\xi)$$

$n = 2p$ 次元のとき

$$(5.8) \quad \int \varphi(x)\psi(x)\,dx = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n} \int_\Gamma \int \check{\varphi}(\xi, t_1)\check{\psi}(\xi, t_2)(t_1 - t_2)^{-n}\, dt_1\, dt_2 \quad \beta(\xi)$$

今一つ、Fourier 変換と Radon 変換の関係は

Proposition 5.4.

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{\varphi}(\xi, t)\, e^{-iut}\, du$$

$$\check{\varphi}(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(u\xi)\, e^{iut}\, du$$

$$= (2\pi)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(u\xi)\, e^{iut}\, du$$

$$\varphi_t^k(\xi, t) = (2\pi)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} (iu)^k\, \hat{\varphi}(u\xi)\, e^{iut}\, du$$

注意. Proposition 5.3. によれば $n = 2p-1$ 次元のとき

$$\varphi \longleftrightarrow \varphi_t^{(p-1)}(\xi, t) = \hat{\varphi}(\xi, t) \longleftrightarrow \hat{\varphi} \longrightarrow \check{\varphi}$$

は互に L^2-space で isometric な対応である。従って

$\varphi \in \mathcal{S}$ の Fourier 逆変換 $\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \varphi(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$ は

Planchel の等式

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi(x)\psi(x)\,dx = (2\pi)^n \int \hat{\varphi}(\lambda)\, \overline{\hat{\varphi}}(\lambda)\, d\lambda = (\hat{\varphi}, \hat{\psi})$$

によって (φ, ψ)

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \varphi(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint \varphi(x)\, \delta(\lambda x - t)\, dx\, e^{-it}\, dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \check{\varphi}(\lambda, t)\, e^{-it}\, dt$$

$$= \frac{(-i)^n}{(2\pi)^n} \int \check{\varphi}_t^{(m)}(\lambda, t)\, e^{-it}\, dt = \frac{(-i)^m}{(2\pi)^n} \int \hat{\varphi}(\lambda, t)\, e^{-it}\, dt$$

$$\hat{\varphi}(\omega\lambda) = \frac{(-i)^m}{(2\pi)^n} \int \hat{\varphi}(\omega\lambda, t)\, e^{-it}\, dt = \frac{(-i)^m}{(2\pi)^n}\, \omega \int \hat{\varphi}(\omega\lambda, \omega\frac{t}{\lambda})\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{(-i)^m |\omega|^m}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\lambda, t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

文 献 表

[1] Y. Akizuki (秋月康夫); 調和積分論 上.下. : 岩波書店 (1954)

[2] N. Aronszajn ; Green's functions and reproducing Kernels. Proceeding of the Sympsium on spectral Theory and Differential Problems. p. 355-411.

[3] G. K. Batchelor ; The Theory of homogeneous turbulence. Cambridge (1953) (乱流理論 吉岡書店 巽 友正 訳)

[4] ―――――― ; Kolmogoroff's theory of locally isotropic turbulence. Proc. Cambridge Phil. Soc. Vol. 43. (1946) p. 533-557.

[5] Yu. K. Belyaev ; Local properties of the sample functions of stationary Gaussian processes. Theory of Prob. and Appli. Vol. 5, No. 1. (1960) p. 117-119.

[6] ―――――― ; Continuity and Hölder's conditions for sample functions of stationary Gaussian process. 4th Berkeley Symp. (1961)

[7] ―――――― ; Analytic random processes. Theory of Prob. and Appli. Vol. 4. (1959) p. 402-409.

[8] Chiang Tse-Pei. ; On the linear extrapolation of a continuous homogeneous random field. Theory of Prob. and Appli. Vol. 2, No. 1. (1957) p. 58-89.

[9] N.N. Chentsov ; Lévy Brownian motion for several parameters and generalized white noise. Theory of Prob. and Appli. Vol. 2. (1957) p. 265-266.

[10] Z. Ciesielski ; Hölder conditions for realizations of Gaussian processes. (1961) p. 403-413.

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

[11] J. L. Doob ; Stochastic processes. John Wiley New York (1953)

[12] R. J. Duffin and Z. Nehari ; Note on polyharmonic functions. Proc. A.M.S. Vol. 12. (1961) p. 110 – 115.

[13] M. I. Fortus ; Formulas for extrapolation of random fields. Theory of Prob. and Appli. Vol. 7, No. 1. (1962) p. 101 – 108.

[14] ———— ; On extrapolation of a random field satisfying the wave equation. Theory of Prob. and Appli. Vol. 8, No. 2. (1963) p. 204 – 207.

[15] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов ; Обобщенные функции идействия над ними. (Обобщенные функции 1). Москва. (1959) (超函数論入門 I. II、共立全書)

[16] ———— и ———— ; Пространства основных и обобщенных функций. (Обобщенные функции 2). Москва. (1958)

[17] ———— и Н. Я. Виленкин ; Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. (Обобщенные функции 4). Москва. (1961)

[18] ————, М. И. Граев и Н. Я. Виленкин ; Интегральная геометрияи связанные с ней вопросы теории представлений. (Обобщенные функции 5). Москва. (1962)

[19] S. Helgason ; Differential geometry and symmetric spaces. New York. (1962)

[20] T. Hida (飛田武幸) ; Gaussian process の表現とその応用 Sem. on Prob. Vol. 7. (1961)

[21] ———— ; On the uniform continuity of Wiener process with a multi dimensional parameter. Nagoya Math. Journal. Vol. 13. (1958)

[22] E. Hopf ; Statical hydromechanics and functional calculus. Jour. of Math. and Mech. Vol. 1, No. 1. (1952) p. 87-123.

[23] G. A. Hunt ; Random Fourier transforms. Trans. Amer. Math Soc. Vol. 71. (1951) p. 38-69.

[24] N. Ikeda., T. Hida and H. Yosizawa (池田信行、飛田武幸、吉沢尚明) Flowの理論 上. Sem. on Prob. Vol. 12. (1962).

[25] K. Itô ; Stationary random distributions. Memoirs of the college of Sience Univ. Kyoto. Vol. 28, No. 3. (1953) p. 209-223.

[26] ——— ; Isotropic random current. 3rd Berkeley Symp. (1956).

[27] Kari Karhunen ; Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Ann. Acad. Sci. Fennica. Ser. Math. Phys. Vol. 37. (1947) p. 79.

[28] ——— ; Über die Struktur stationären zufälligen Function Ark. Mat. Vol. 1. (1950) p. 141-160.

[29] T. Kárman ; Progress in the statistical theory of Turbulence. Proc. Nat. Acad. Sci., Wash. Vol. 34. (1948) p. 530-539

[30] T. Kōno (河野敬雄) ; エルミート多項式. Sem. on Prob. Vol. 27. (1967)

[31] A. N. Kolmogoroff : The local structure of turbulence in compressible visscous fluid for very large Reynolds numbers. C. R. Acad. Sci. U. R. S. S. Vol. 30. (1941) p. 301.

[32] ——— ; Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. C. R. Acad. Sci. U. R. S. S. Vol. 32. (1941) p. 16.

[33] M. Kurita (栗田 稔) ; 積分幾何学 (現代数学講座20) 共立出版 (1955)

[34] P. Lévy ; Processus Stochastiques et Movement Brownien.

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

Gauthier-Villars. Paris. (1948)

[35] P. Lévy ; Le Mouvement Brownien fonction d'un ou de Plusieurs Pramètres. Rendiconti di Mathematica. Vol. 22. p. 24-101.

[36] ———— ; A special problem of Brownian motion and general theory of Gaussian random functions. Proc. of 3 rd. Berkeley Symp. of Math. Prob. Vol. 2. Univ. California Berkeley (1956) p. 133-175.

[37] ————; Le determinisme de fonction Brownienne dans l'espace de Hilbert. Ann. Sci. de l'Ecole Normale Sup. Serie 4. Vol. 79. (1962) p. 377-398.

[38] Y. Matusima (松島与三): 多様体入門 裳華堂 (1965).

[39] H. P. Mckean ; Brownian motion with a several-dimensional time. Theory of Prob. and Appli. Vol. , No. 4. (1963) p. 335-354.

[40] S. Mizohata (溝畑 茂); 偏微分方程式論. 岩波書店 (1965)

[41] J. E. Moyal ; The spectre of turbulence in a compressible fluid eddy turburence and random noise. Proc. of the Cambrige Philosophical Society. Vol. 48. (1952) p. 329-344.

[42] M. Nishio (西尾眞喜子) ; Wiener積分と強定常過程の表現. Sem. on Prob. Vol. 10. (1961)

[43] M. Nishio ; On the regularization of the second order random distribution. Jour. Math. Kyoto Univ. Vol. 4, No. 3. (1965).

[44] L. Pontrjagin ; Topological groups. (連続群論 上.下. 岩波書店)

[45] Yu. V. Prohorov ; The method of characteristic functionals. 4 th Berkeley Symp. (1961) p. 403-420.

[46] Ю. А. Розанов; Стационрные случайные процессы (1963)

[47] L. Schwartz; Theorie des Distributions. Hermann and C. Paris (1950).

[48] Я. Г. Синай; Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром. II. Известия Акад. Наук Ссср Серия Мат. Вып. 30. (1966) p. 15-68.

[49] T. Sirao; On the continuity of Brownian motion with a multi dimensional parameter. Nagoya Math. Jour. Vol. 16. (1960)

[50] ———— ; Gaussian stationary process の path の上級. 下級函数 数学会講演.

[51] S. L. Sobolev; Applications of functional Analysis in Mathematical physics. A.M.S. (1963)

[52] G. I. Taylor; Statical theory of turbulence. Proc. of the Royal Society A. Vol. 151 (1935) p. 421-478.

[53] H. Totoki; (十時東生); Flow とエントロピー. Sem. on Prob. Vol. 20. (1964)

[54] A. M. Yaglom; Some classes of random fields in n-dimensional space related to stationary random process. Theory of Prob. and Appli. Vol. 2. No. 3. (1957).

[55] ———— ; Second-order homogeneous random fields. 4th Berkeley Symp. (1961) p. 593-622.

[56] R. L. Dobrushin; Properties of sample functions of a stationary Gaussian process. Theory of Prob. and Appli. Vol. 5. No. 1. (1960) p. 120-122.

[57] . Widder; The Laplace transform.

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

[58] P. T. Strait ; Sample function regularity for Gaussian processes with the parameter in a Hilbert space. Pacif. Jour. of Math. Vol. 19, No. 1. (1966) p. 159 – 173.

[59] A. Erdélyi ; Higher transcendental functions. Vol. 1, 2, 3. New York. (1953)

[60] A. Erdélyi ; Tables of integral transforms. Vol. 1, 2. New York.

Sem. on Probab.
Vol.26 1967年
P1-147

1967年１月発行　確率論セミナー