Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 25 — II

分枝マルコフ過程の諸問題

櫃田倍之・福島正俊・池田信行・河野敬雄
長沢正雄・野本久夫・小倉幸雄・白尾恒吉
山田俊雄・渡辺藤逸

京都大学
1556908F
図書
数理解析研究所
1967

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

京都大学
1556908
図書
数理解析研究所

第 II 篇 目 次

第 I 篇 目 次

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

第5章 直線群の値をとるあるMarkov過程のクラスとそのadditive functionalに関する中心極限定理

§1. まえがき

ここで考える型のマルコフ過程は，多方面の応用問題にしばしばあらわれる。そのいくつかの例は§4でのべることにしよう。その例の1つは *Harris* [2] の本の *Chap.* VII，宇宙線理論における *branching process* の中にあるもので，1つ1つの粒子の運動を考える場合には，その方程式が *non-linear* になり，解くのが困難であるが，あるエネルギーを持つ粒子の平均個数に関する方程式は *linear* な発展方程式となり，まさに，ここで考えようとする *process* の *generator* になるのである。*Harris* [2] はそこで，平均個数に関する中心極限定理を予想しており，その問題は，*additive functional* の中心極限定理として一般化される。このことを解決するのが§3の目標である。

§2. 定義と *generator* の決定

state space $\{1, 2, \cdots, N\} \times R^1$ の上の *Markov* 過程 $(n(t), x(t))$ を考えよう。ここで，$x \in R^1$ に関して *homogeneous* と仮定する。これは $N = 1$ とした場合は *additive process* に他ならない。くわしくは，推移函数

$$F_{ij}(x,t) = P(n(t) = j,\ x(t) \le x \mid n(0) = i,\ x(0) = 0),$$
$$t > 0,\ 1 \le i,\ j \le N,\ x \in R^1$$

は次の条件をみたす。

(2.1) $\qquad F_{ij}(x,t) \geqq 0, \qquad {}^\forall(i, j, t)$

x に関して単調非減少。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

(2.2) $$F_{ij}(+\infty, t) = \lim_{x\to+\infty} F_{ij}(x,t) \leqq 1,$$

$$F_{ij}(-\infty, t) = \lim_{x\to-\infty} F_{ij}(x,t) = 0 \qquad 1 \leqq i, j \leqq N, \quad t > 0,$$

$$\sum_{j=1}^{N} F_{ij}(+\infty, t) = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, N, \quad t > 0$$

(2.3) $$F_{ij}(x, t+s) = \sum_{k=1}^{N} \int_{R^1} F_{ik}(x-y, t)\, dF_{kj}(y, s) \qquad t, s > 0$$

$$1 \leqq i, j \leqq N, \quad x \in R^1,$$

(2.4) $$\lim_{t\downarrow 0} F_{ij}(x,t) = \begin{cases} \delta_{ij} & x \in [0, \infty), \\ 0 & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

以後，主として Fourier 変換の形で考えるので，(2.1) ～ (2.4) をそれぞれ次のようにかきかえておく。

$$f_{ij}(z,t) = \int_{R^1} e^{ixz}\, dF_{ij}(x,t), \quad t > 0, \quad 1 \leqq i, j \leqq N, \quad z \in R^1.$$

として，行列 $\mathfrak{f}(z,t) = (f_{ij}(z,t))$ は次の条件をみたす。

(2.5) $$\sum_{j=1}^{N} f_{ij}(0,t) = 1, \qquad 1 \leqq i \leqq N, \quad t > 0$$

(2.6) $$\mathfrak{f}(z, t+s) = \mathfrak{f}(z,t)\,\mathfrak{f}(z,s) \qquad t, s > 0$$

(2.7) $$\lim_{t\downarrow 0} \mathfrak{f}(z,t) = E \quad (\text{単位行列})$$

但し，この収束は z に関する element ごとの広義一様収束．以後，この収束を行列の広義一様収束とよぼう。

さて，(2.1) ～ (2.4) をみたす Markov 過程が与えられたとする。そのとき行列として generator

$$A(z) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathfrak{f}(z,t) - E}{t}$$

の存在と，可能な型を Lévy-Khinchin にならって決定する。簡単な事実から，この $A(z)$ に対して，(2.1) ～ (2.4) をみたす Markov 過程が決定されることがわかる。

<u>Lemma 1</u> $$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathfrak{f}(z,t) - E}{t} = A(z)$$

が存在して，$z \in R^1$ について広義一様収束する。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

証明　$a>0$ を任意に与える。$[-a,a]$ における $\mathfrak{f}(z,t)\to E$ の一様性から，ある $v>0$ をひとつきめると
$z\in[-a,a]$ に対して

$$A_v(z)=\left(\int_0^v f_{ij}(z,s)ds\right)=\int_0^v \mathfrak{f}(z,s)\,ds$$

が逆行列 $A_v^{-1}(z)$ をもつ。

$$A_v(z)\,\mathfrak{f}(z,t)=\int_0^v \mathfrak{f}(z,s)\,\mathfrak{f}(z,s)\,ds=\int_0^v \mathfrak{f}(z,s+t)\,ds$$

$$=\int_0^{t+v}\mathfrak{f}(z,s)\,ds$$

従って，

$$\mathfrak{f}(z,t)=A_v^{-1}(z)\int_t^{t+v}\mathfrak{f}(z,s)\,ds$$

こうして，

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\mathfrak{f}(z,t)-E}{h}=\lim_{h\downarrow 0}A_v^{-1}(z)\frac{1}{h}\left[\int_h^{v+h}\mathfrak{f}(z,s)ds-\int_0^{v}\mathfrak{f}(z,s)\,ds\right]$$

$$=A_v^{-1}(z)\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\left[\int_0^{v+h}\mathfrak{f}(z,s)\,ds-\int_0^{v+h}\mathfrak{f}(z,s)\,ds\right]$$

$$=A_v^{-1}(z)\left[\,\mathfrak{f}(z,v)-E\,\right],\qquad z\in[-a,a].$$

この収束が一様であることは明らかである。さらに右辺は v に無関係であることから，Lemma 1 が証明される．（終）

ここで次のことに注意しよう。微分方程式論の簡単な事実から，z を固定したとき

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\,\mathfrak{f}(z,t)=A(z)\,\mathfrak{f}(z,t)\\[2ex] \lim\limits_{t\downarrow 0}\mathfrak{f}(z,t)=E \qquad \text{（初期条件）}\end{cases}$$

の解が一意的であることがわかり，従って，その解は

$$\mathfrak{f}(z,t)=exp\{A(z)\cdot t\}$$

に他ならない。

定理 1　$A(z)=(a_{ij}(z))$ とするとき，

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$a_{ij}(z)=\int e^{izx}\,\Gamma_{ij}(dx) \qquad i\neq j \quad 1\leq i,j\leq N$$

$$a_{ii}(z)=-\sum_{i\neq j}\Gamma_{ij}(R^1)+iv_i z-\frac{\sigma_i^2}{2}z^2+\int_{|u|>1}(e^{izu}-1)\,\Pi_i(du)$$

$$+\int_{|u|\leq 1}(e^{izu}-1-izu)\,\Pi_i(du), \qquad i=1,2,\cdots,N$$

ここで，Γ_{ij} は R^1 上の finite measure. v_i は実数。
σ_i は実数かつ $\geqq 0$， Π_i は R^1 上の measure で

$$\int_{|u|<1}x^2\Pi_i(dx)<\infty, \quad \Pi(u;\ |u|>\varepsilon)<\infty \quad (任意の\ \varepsilon>0\ に対して)$$

をみたすものである。

注意　この定理によって，粒子が同じ直線上を動いているかぎりは加法過程と同じ行動をして，他の直線への'飛び'は，有限時間内に有限回しかおこらないことがわかる。独立な成分への Lévy 型の分解は加法過程の時のように簡単ではない。

証明　$i\neq j$ のとき

$$a_{ij}(z)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{f_{ij}(z,h)}{h}$$

と，$f_{ij}(z,h)$ が positive definite，従って，$a_{ij}(z)$ が positive definite，収束が広義一様であることに注意すれば，ある $\Gamma_{ij}(dx)$ が存在して，

$$a_{ij}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}\,\Gamma_{ij}(dx)$$

とかけることは明らかである。

$i=j$ のときは，

$$a_{ii}(z)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}\,dF_{ii}(x,t)-1\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izx}-1)\,dF_{ii}(x,h)-\sum_{i\neq j}F_{ij}(\infty,h)\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izx}-1)\,dF_{ii}(x,h)\right)-\sum_{i\neq j}\Gamma_{ij}(R^1).$$

右辺の最初の項は

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$iv_i z - \frac{\sigma_i^2}{2} z^2 + \int_{|u|>1} (e^{izr} - 1)\, \Pi_i(du) + \int_{|u|\leq 1} (e^{izu} - 1 - izu)\, \Pi_i(du)$$

とかける．これは，例えば Gnedenko-Kolmogorov の本 [1] にあるよく知られた方法と全く同じであるから省略する。（終）

§3. 中心極限定理

$A(z)$ は定理 1 によって決定された generator とする。中心極限定理がなりたつために次の仮定を設ける。

仮定 1　　$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \Gamma_{ij}(dx) < \infty$,　$i \neq j$,　$1 \leq i, j \leq N$,

$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \Pi_i(dx) < \infty$,　　$1 \leqq i \leq N$.

仮定 2　　$A(0)$ は行列として分解不能．

ここで，仮定の意味を説明しておこう．仮定 1 は process $(x(t), x(t))$ の additive functional $x(t)$ の moment の存在に関する条件である．すなわち，仮定 1 は $x(t)$ の 2 次の moment が存在を保証する。この証明は，加法過程に関する 2 次以上 moment の存在が，その Lévy measure の 2 次以上の moment の存在に一致するという定理と同様にして証明される。仮定の 2 はいわゆる Perron-Frobenius の定理が $e^{A(0)} = \mathfrak{f}(0,1)$ に対してなりたつための条件である．すなわち，$A(0)$ は有限 state $\{1, 2, \cdots, N\}$ の上の Markov chain の generator であり，$e^{A(0)t}$ がその transition matrix．すなわち $e^{A(0)}$ は確率行列であり，そのすべての element が正であることが仮定 2 からわかる．従って Perron-Frobenius の定理によって，固有値 1 を重ねずに持ち，他の固有値の絶対値はすべて 1 より小さい。従って，$A(0)$ のことばでいいかえれば

$$det\,(A(0) - \lambda E) = \pi(0, \lambda) = 0$$

は単根 $\lambda = 0$ を持ち，他の根の実部はすべて負であることがわかる．

Lemma 2　　$z = 0$ のある近傍 $(-a, a)$ において $\lambda(z)$ が存在して，2 階連続的微分可能，かつ

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

(110)

$$\pi(z, \lambda(z)) = 0 , \qquad z \in (-a, a)$$
$$\lambda(0) = 0$$

ここで，$\pi(z,\lambda) = \det(A(z) - \lambda E)$． 更に $\lambda'(0)$ は純虚数 かつ $\lambda''(0)$ は非正。

<u>証明</u> $\lambda = 0$ は $\pi(0,\lambda) = 0$ の単根であるから，

$$\pi_\lambda(0, 0) = \frac{\partial \pi}{\partial \lambda}(0,0) \neq 0 .$$

$$\pi(z,\lambda) = \pi_1(z, \lambda_1, \lambda_2) + i\pi_2(z, \lambda_1, \lambda_2)$$

をおき，π_i ($i = 1, 2$) は実数値函数 かつ $\lambda_1 = \Re\lambda$, $\lambda_2 = \Im\lambda$ とする。そのとき，

$$\pi_1(0, 0, 0) = 0 , \quad \pi_2(0, 0, 0) = 0$$

一方，$\pi(z,\lambda)$ は λ に関して解析的。従って Cauchy-Riemann の方程式によって

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial \lambda_1}(0,0,0) & \dfrac{\partial \pi_2}{\partial \lambda_1}(0,0,0) \\[2ex] \dfrac{\partial \pi_1}{\partial \lambda_2}(0,0,0) & \dfrac{\partial \pi_2}{\partial \lambda_2}(0,0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial \lambda_1}(0,0,0) & \dfrac{\partial \pi_2}{\partial \lambda_1}(0,0,0) \\[2ex] -\dfrac{\partial \pi_2}{\partial \lambda_1}(0,0,0) & \dfrac{\partial \pi_1}{\partial \lambda_1}(0,0,0) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial \pi_1}{\partial \lambda_1}(0,0,0)\right)^2 + \left(\frac{\partial \pi_2}{\partial \lambda_1}(0,0,0)\right)^2 \neq 0 .$$

従って，陰函数の定理によって Lem. 2 の最初の部分が示された。次に $A(z)$ のかたちから $\pi_z(0,0) = \dfrac{\partial}{\partial z}\pi(0,0)$ は純虚数であり，$\pi_\lambda(0,0) = \dfrac{\partial \pi}{\partial \lambda}(0,0)$ は実数である。従って，$\lambda'(0) = \dfrac{-\pi_z(0,0)}{\pi_\lambda(0,0)}$ は純虚数であることがわかる．同様の方法で $\lambda''(0)$ が実数であることがわかるが，これが非正であることは，

$$\sum_{j=1}^{N} |f_{ij}(z, 1)| \leqq 1$$

(但し，$\mathfrak{f}(z, 1) = e^{A(z)} = (f_{ij}(z, 1))$ とする)

と，Frobenius の定理によって $A(z)$ のすべての固有値は非正の実数部分をもつことからわかる：

$$\frac{d^2}{dz^2} \Re\lambda(z)\Big]_{z=0} = \Re\lambda''(0) = \lambda''(0) \leqq 0 .$$

<u>注意.</u> もしひつようならば，近傍 $(-a, a)$ を狭くすることによって，$A(z)$ の固有値 $\lambda(z)$ は実部最大の固有値と考えることができる。実際 $z = 0$ のとき

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$\lambda(0)=0$ が実部最大の固有値であり，$\lambda(z)$ が $(-a,a)$ で連続であるからである。

中心極限定理の証明の前にいくつかの記号を導入しておく。$\{1,2,\cdots,N\}\times R^1$ の上の確率測度を μ とする。（μ_i，$1\leq i\leq N$ は R^1 の上の測度，$\sum_{i=1}^{N}\mu_i(R^1)=1$）。

$$F_i^{\mu}(x,t)=\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\mu_i(dy)F_{ij}(x-y,t) \quad , \qquad 1\leqq i\leqq N ,$$

$$F^{\mu}(x,t)=\{F_1^{\mu}(x,t),\ F_2^{\mu}(x,t),\cdots,\ F_N^{\mu}(x,t)\}$$

とおくと，F^{μ} は $\{1,2,\cdots,N\}\times R^1$ の初期分布 μ に対する推移函数を与える。

$$f^{\mu}(z,t)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}dF_1^{\mu}(x,t),\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}dF_2^{\mu}(x,t),\cdots,\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}dF_N^{\mu}(x,t)\right\}$$

とおくと，

$$f^{\mu}(z,t)=f^{\mu}(z,0+)\,f(z,t)$$

ここで，$f^{\mu}(z,0+)$ は μ の Fourier 変換とする．

(3.1) $\qquad m=-i\lambda'(0)$ ，$\qquad v=-\lambda''(0)$

としよう．

定理 2　任意の初期分布 μ に対して

(3.2) $$\lim_{t\to\infty} e^{-it^{\frac{1}{2}}mz}\ f^{\mu}(t^{-\frac{1}{2}}z,t)=e^{-\frac{1}{2}z^2v^2}e \quad , \quad z\in(-a,a) .$$

$e=(e_1,e_2,\cdots,e_N)$ は $A(0)$ の左固有ベクトル，$\sum_{i=1}^{N}e_i=1$

証明　$A(z)=T^{-1}(Z)\,J(Z)\,T(Z)$

ここで $T(Z)$ は適当な regular matrix に選ぶと，$J(Z)$ は Jordan の標準形になり，その $(1,1)$ 成分は $\lambda(z)$ になる。更に $T(z)$ は z について連続になるように選べる。これは，1次方程式を Crámer の方法でとってみれば直ちにわかる。

(3.3) $$f(t^{-\frac{1}{2}}z,t)\,e^{-izmt^{\frac{1}{2}}}$$

$$=f^{\mu}(t^{-\frac{1}{2}}z,0)\,T^{-1}(t^{-\frac{1}{2}}z)\left[e^{-izmt^{\frac{1}{2}}}exp(tJ(t^{-\frac{1}{2}}z))\right]T(t^{\frac{1}{2}}z) \quad .$$

として，各成分ごとに収束を調べよう。$T(z)$ の第1行 $e(z)$ は $T(z)$ の左固有ベクトル，$T^{-1}(z)$ の第1列 $i(z)$ は右固有ベクトルであるから，特に

Sem. on Probab.
Vol.25-II　1967年
P105-234

$$\mathbb{e}(0) = \mathbb{e} = (e_1, e_2, \cdots, e_N)$$
$$\mathbb{i}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

としてよい。$\mathbb{T}(z)$ の連続性から

(3.5)　$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{T}(t^{-\frac{1}{2}} z) = \lim_{z \to 0} \mathbb{T}(z) = \begin{pmatrix} e_1, e_2, \cdots, e_N \\ * \end{pmatrix}$$

(3.6)　$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{T}^{-1}(t^{-\frac{1}{2}} z) = \lim_{z \to 0} \mathbb{T}^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & * \\ \vdots & \\ 1 & \end{pmatrix}$$

次に，$exp\{t\mathbb{J}(z)\}$ の (i,j) 成分（$i, j \geqq 2$ 及び $j - i = \ell \geqq 0$）の絶対値は $\frac{1}{\ell!} t^{\ell} e^{-\alpha(z)t}$ でおさえられる。ここで

$$-\alpha(z) = max\, \mathcal{Re}\, \lambda_i(z)$$
$$\lambda_i(z) \in \{ the\ eigen\,value\ of\ \mathbb{A}(z)\} \setminus \{\lambda(z)\} .$$

一方，(i,j) 成分（$j-i<0$）はすべて 0。1 行は $(1,1)$ 成分を除いてすべて 0 である。従って $\sup_{z \in (-a,a)} |e^{-\alpha(z)}| < 1$ であることを考えれば，$(i,j)(\neq(1,1))$ 成分に対しては 0 に収束する。$(1,1)$ 成分については，

$$\lim_{t \to \infty} e^{-izmt^{\frac{1}{2}}} e^{t\lambda(t^{-\frac{1}{2}} z)} = e^{-\frac{1}{2} z^2 v^2}$$

ここで m, v は (3.1) で定義されたものとする。従って，

(3.6)　$$\lim_{t \to \infty} e^{-izmt^{\frac{1}{2}}} exp\{t\mathbb{J}(t^{\frac{-1}{2}} z)\} = e^{-\frac{1}{2} z^2 v^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & O & \\ 0 & & & \end{pmatrix} .$$

(3.3) ～ (3.6) によって (3.1) がなりたつ。（終）

<u>系</u>　$v = -\lambda''(0) > 0$ のとき

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{F}^{\mu}(xt^{\frac{1}{2}} + tm, t) = \int_0^{\frac{x}{v}} \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \cdot \mathbb{e}$$

が任意の初期分布 μ に対してなりたつ（中心極限定理）。

§4. いくつかの応用

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

1. 電信方程式に関する問題（Ikeda-Nomoto [4]）

池田，野本両氏の研究 [4] において，電信方程式の解は次の generator (4.1) を持つ $\{1,2\}\times R^1$ の上の Markov process の基本解を求めることに帰着できること及びその Markov process の additive functional $X(t)$ の Brown 運動への収束を示している。この Brown 運動への収束の部分は上の中心極限定理に帰着されることが次のようにして示される。すなわち，

$$(4.1)\qquad \mathbb{A}(z)=\begin{pmatrix} icz-\ell & \ell \\ \ell & -icz-\ell \end{pmatrix}\ ^{*)}$$

とおくと，

$$|\lambda E-\mathbb{A}(z)|$$
$$=(\lambda-icz+\ell)(\lambda+icz+\ell)-\ell^2 \qquad\qquad \ell\geqq 0$$
$$=\lambda^2+2\lambda\ell+c^2z^2$$
$$\lambda(z)=-\ell\pm\sqrt{\ell^2-c^2z^2}$$

ここで $\lambda(0)=0$ となるものは，

$$\lambda(z)=-\ell+\sqrt{\ell^2-c^2z^2}\ .$$
$$\lambda'(0)=0$$
$$\lambda''(0)=-\frac{c^2}{\ell}$$

であるから，定理2より直ちに

$$(4.2)\qquad \lim_{\ell\to\infty}\mathbb{F}\,(t^{\frac{1}{2}}z,t)=e^{-\frac{1}{2}z^2\frac{c^2}{\ell}}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

がわかる。$e=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ であることは明らかであろう。ここで $\frac{c^2}{\ell}=1$ すなわち $c^2=\ell$ として $\ell\to\infty$ と考えれば

$$\mathbb{A}_\ell(z)=\mathbb{A}(z)=\begin{pmatrix} icz-\ell & \ell \\ \ell & -icz-\ell \end{pmatrix}$$

として，

$$\lim_{\ell\to\infty}\mathfrak{f}^{\kappa}(z,0)\cdot e^{A_\ell(z)t}=\lim_{\ell\to\infty}\mathfrak{f}^{\kappa}(\ell^{-\frac{1}{2}}z,\ \ell t)$$
$$=e^{-\frac{1}{2}z^2t}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\qquad (4.2)\text{より}$$

---

*) 池田，野本氏の例では $\ell=\lambda$ となっているが，記号 λ は既に使ったので ℓ とかきなおす。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

これと Markov 性から $X_\ell(t)$ の有限次元分布は Brown 運動 $B(t)$ のそれに収束することがわかる。但し $X_\ell(t)$ は generator $A_\ell(z)$ に対応する. $X(t)$ である。

2、宇宙線に関する平均 process （Harris [2]）

Harris [2] は，最後の章で宇宙線の粒子の分裂を記述する方程式をたてている。しかしそれは non-linear な方程式である．ところが，時間 t におけるエネルギー dE をもつ粒子の'平均個数'を考えるとそれはここで考察した generator の特別な場合に関する解になっている。そして粒子のエネルギー分布の極限状態を記述する中心極限定理が予想としてのべてあり，その問題が§3で考察したものの特殊な場合であることを示そう。

モデルについてまず簡単な解説をする。いま，photon と electron という2種類の粒子があり，これをそれぞれ 1，2 とかこう。その分裂のようすは次のようである。

エネルギー E の photon が dt 時間内に $\lambda dt + o(dt)$ の割合で二つの electron に分裂する（プラス及びマイナスの）． dt 時間内に分裂しなかった photon はそのエネルギーをかえないとする。一方生成された2個 electron はエネルギー E を Eu ，$E(1-u)$ の割合でわけあう．ここで，u は $[0, 1]$ 上の確率法則 $q(u)$ に従う確率変数である。いま $q(u)$ は $\frac{1}{2}$ に関して対称としてもよい。electron の方は，dt の間に $[Eu, Eu+Edu]$ の間のエネルギーをもつ photon を放出する個数の平均は $k(u)\,du\,dt$ とする．$\int_0^1 k(u)\,du = \infty$ である場合が多い。こうして，electron がエネルギー E を持つとき，dt の間に失うエネルギーの平均は $E\cdot(\int_0^1 uk(u)\,du)\,dt$ である。

$M_{ij}(E,t)$ で，初期条件 i（$i=1,2$），エネルギー 1 から出発したときの t におけるエネルギー $>E$ の j 粒子の個数の平均をあらわそう。

$$\hat{M}_{ij}(s,t) = \int_0^1 E^{s-1} M_{ij}(E,t)\,dE$$

とおくと次の方程式（4.3）をみたす（Harris [2] p.193）。

$$(4.3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \hat{M}_{11}(s,t)}{\partial t} = -\lambda \hat{M}_{11}(s,t) + 2\lambda\left[\int_0^1 u^s q(u)\,du\right] \hat{M}_{21}(s,t) \\ \dfrac{\partial \hat{M}_{21}(s,t)}{\partial t} = \left[\int_0^1 u^s k(u)\,du\right] \hat{M}_{11}(s,t) - \left[\int_0^1 (1-u^s) k(1-u)\,du\right] \hat{M}_{21}(s,t) \\ \hat{M}_1(s,0) = 0, \quad \hat{M}_2(s,0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$E=e^{-x}$ とおき，さらに

$$dP_{ij}(x,t)=e^{-x}d_x M_{ij}(e^{-x},t)\quad,\qquad x\geqq 0$$
$$P_{ij}(0-,t)=0$$

とおき，更に

$$\hat{P}_{ij}(s,t)=\int_{0-}^{\infty}e^{-sx}\,dP_{ij}(x,t)$$

$$\hat{\mathbb{P}}(s,t)=(\hat{P}_{ij}(s,t))$$

を考えれば，

$$\hat{M}_{ij}(s,t)=\frac{1}{s}\,\hat{P}_{ij}(s-1,t)$$

を得る。一方，total エネルギーの不変性から，

$$\sum_{j=1}^{2}\int_{0}^{1}-E\,d_E M_{ij}(E,t)=1\qquad (i=1,2)$$

すなわち

$$\sum_{j=1}^{2}\int_{0-}^{\infty}dP_{ij}(x,t)=\lim_{x\to\infty}\sum_{j=1}^{2}P_{ij}(x,t)=1$$

がわかる。従って (4.3) から

$$(4.4)\qquad \frac{\partial\hat{\mathbb{P}}(s,t)}{\partial t}=\mathbb{A}(s)\,\hat{\mathbb{P}}(s,t)\quad,\quad \hat{\mathbb{P}}(s,0)=E\qquad \mathcal{R}e\,s\geqq 0$$

を得る。但し

$$\mathbb{A}(s)=\begin{pmatrix}-\lambda & 2\lambda\int_0^1 u^{s+1}q(u)\,du\\ \int_0^1 u^{s+1}k(u)\,du & -\int_0^1(1-u^{s+1})\,k(1-u)\,du\end{pmatrix}$$

我々は§3までは Fourier 変換で考えてきたが，ここでは Laplace 変換におきかえてみれば，全く同じ set up であることがわかる。

ここで Harris [2] p.198 の予想は (4.4) に対応する $\{1,2\}\times R^1$ 上の process $(n(t),x(t))$ に対して，$x(t)$ の極限状態について中心極限定理がなりたち，そのときの平均，分散はそれぞれ

$$-e\mathbb{A}'(0)\mathbb{1}\,,\quad e\left[\mathbb{A}''(0)-\frac{2}{(\lambda+K)^2}\,\mathbb{A}'(0)\,\mathbb{A}(0)\,\mathbb{A}'(0)\right]\mathbb{1}$$

であろうというのである。但しeは $\mathbb{A}(0)$ の夫々左，右固有ベクトルで $e_1+e_2=1$ をみたすものとする。また $K=\int_0^1 uk(u)\,du$ である。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

本質的な相異はないので，再び Fourier 変換の形にたち戻って $\lambda'(0)$, $\lambda''(0)$ を具体的に表現することで，上の形を求めよう。このときは，平均，分散はそれぞれ

$$-i\mathbb{e}\mathbb{A}'(0)\mathbb{1},\quad -\mathbb{e}\left[\mathbb{A}''(0)-\frac{2}{(a+b)^2}\mathbb{A}'(0)\mathbb{A}(0)\mathbb{A}'(0)\right]\mathbb{1}$$

となる。但し $\mathbb{A}(0)=\begin{pmatrix}-a & a\\ b & -b\end{pmatrix}$ とおこう。等式

(4.5) $\qquad \mathbb{e}(z)\mathbb{A}(z)=\lambda(z)\mathbb{e}(z)$,

(4.6) $\qquad \mathbb{A}(z)\,\mathbb{i}(z)=\lambda(z)\mathbb{i}(z)$

から，両辺を微分して $z=0$ とおけば

(4.7) $\qquad \mathbb{e}'(0)\mathbb{A}(0)+\mathbb{e}\mathbb{A}'(0)=\lambda'(0)\mathbb{e}$ $\qquad$ *)

(4.8) $\qquad \mathbb{A}(0)\,\mathbb{i}'(0)+\mathbb{A}'(0)\mathbb{1}=\lambda'(0)\mathbb{1}$

(4.7) によって

(4.9) $\qquad m=i\lambda'(0)=-i\mathbb{e}\mathbb{A}(0)\mathbb{1}$

(4.5) を2回微分して，(4.8) を使えば

$$v=-\lambda''(0)+2\mathbb{e}'(0)\mathbb{A}(0)\mathbb{i}'(0)$$

<u>Lemma 3.</u> $\qquad m=-i\mathbb{e}\mathbb{A}'(0)\mathbb{1}=\dfrac{E(X(t))}{t}\quad,\quad t>0$

$$v=-\mathbb{e}\mathbb{A}''(0)\mathbb{1}+2\mathbb{e}'(0)\mathbb{A}(0)\mathbb{i}'(0)=\lim_{t\to+\infty}\frac{E(x(t)-E(x(t))^2}{t}.$$

<u>証明</u>

$$E(x(t))=-i\mathbb{e}\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{f}(z,t)\right)_{z=0}\mathbb{1}=-i\mathbb{e}\left(\frac{\partial}{dz}e^{tA(z)}\right)_{z=0}\mathbb{1}$$

$$=-it\mathbb{e}\mathbb{A}(0)\mathbb{1}=mt\ ,$$

$$E((X(t)-E(x(t))^2=E(X(t)^2)-m^2t^2=-\mathbb{e}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}e^{tA(z)}\right)_{z=0}\mathbb{1}+\lambda'(0)^2t^2$$

$$=-t\mathbb{e}\mathbb{A}''(0)\mathbb{1}-2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathbb{e}\mathbb{A}'(0)\mathbb{A}^{k-2}(0)\mathbb{A}'(0)\mathbb{1}+\lambda'(0)^2t^2.$$

一方，この等式の第2項は (4.7) と (4.8) によって

$$-\lambda'(0)^2t^2-2\mathbb{e}'(0)\left(e^{tA(0)}-E-tA(0)\right)\mathbb{i}'(0)$$

---

*) ここで，左，右の eigen vector $\mathbb{e}(z)$, $\mathbb{1}(z)$ は微分可能になるように選べる。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

に等しい。以上から Lemma 3 は直ちにわかる。

注意　(4.5) 式から Lem.3 によって得られた式までは $N=2$ とは限らず一般の場合になりたつ。

$\mathbb{A}(0)=\begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$ は分解不能の仮定をおく（仮定2）と，$a>0$，$b>0$ である。

$$\mathbb{A}(0)^n=(-1)^{n-1}(a+b)\mathbb{A}(0) \quad , \qquad n \geq 1$$

と，(4.7)，(4.8)，(4.10) より

$$v=-e\mathbb{A}''(0)\mathbb{1}+\frac{2}{(a+b)^2}e\mathbb{A}'(0)\mathbb{A}(0)\mathbb{A}'(0)\mathbb{1}$$

がえられる。

付記　§3 の additive functional $X(t)$ に関する中心極限定理は時間が discrete のとき，Keilson-Wishart [3] によって証明されている。我々の証明はこれにならって $\mathbb{A}(z)$ から決定したものである。基本的な点は Perron-Frobenius の定理によって，2番目以下の固有値が無視可能になることである。

あとの問題点は，N が有限でない，すなわち，$\{1, 2, \cdots, N, \cdots\}\times R^1$ の上で同様のことを考えることであるが，これは §3 で使用した行列式，逆行列などの初等的な方法が使えなくなり急に困難になる。§2 の generator $\mathbb{A}(z)$ をきめること自体がそう簡単ではないであろう。

§4 の例1では $X_\ell(t)$ 有限次元分布が Brown 運動のそれに収束することを示したが，一般にも同様の考察で process の最も弱い意味での収束は示される。さらに函数空間の上の measure としてある topology に関する法則収束としてもいえるようであるが，一般的に述べることが未だ不可能なのでふれなかった。仮定1（§2）の下で，$D_{[0,1]}=\{\xi(t);\ \xi:[0,1]\longrightarrow R^1$ で第2種不連続点をもたないもの$\}$ とすると Skorohod のいわゆる J-topology の意味で法収束がいえる。これがいままでにわかっている最も一般の形であり，証明には，Lemma 3 のタイプの2次の moment の評価式を使う。

例2については $\int_0^1 k(u)\,du=\infty$ となることが Branching process としての formulation を困難にしているのであるが，ある量（ここではエネルギー dE を持つ粒子の平均個数）に着目すると見通しがよくなる例である。他にもこ

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

ういう例があるかどうか知りたいところである.

文　　献

[1] B.V. Gnedenko *and* A.N. Kolmogorov: *Limit distributions for sums of independent random variables.* *Addison-Wesley Pub. Comp.*, (1954) (ロシア語からの訳)

[2] T.E.Harris: *The theory of branching processes.* *Springer-Verlag*, (1963).

[3] J. Keilson *and* D.M.G. Wishart: *A central limit theorem for processes defined on a finite Markov chain.* *Proc. Camb. Phil. Soc.* 60 (1964), 547-567.

[4] N. Ikeda *and* H. Nomoto: *Branching transport processes.* *Seminar on Probability Vol. 25.*

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

第６章　Multi-type Galton-Watson process に関連する固有値問題

§0. *Introduction*

Discrete time の（*one-type*の）*Galton-Watson process* の固有値問題は，*S.Karlin*, *J.McGregor*［・］により殆んど完全に解決された。即ち，極く緩い条件の下で，*transition probability*を，適当なヒルベルト空間上の，*transition probability* に密接な関係をもつ非対称な線型作用素の固有函数と，その共役作用素の固有函数によって表現することに成功している。特に，平均値が 1 でないときは，極く特殊な場合を除いては上述の作用素が完全連続になることを示し，0 でない固有値と，その固有函数を全て数え挙げることに成功している。それによれば，ある定数 $c>0$ があって，0 でない固有値の全体は $\{1, c, c^2, \cdots\}$ であり，各固有値は *simple* で，更に c^n に対応する固有函数は n 次の多項式になる。上の固有函数系は *biorthogonal system* をなしており，*Schmidt* の展開と異質なものであることを注意しておく。

S.Karlin は 1964 年 10 月に京大で講演を行なった際上掲の論文の方法と結果が *multitype Galton-Watson process* の場合にも有効で，解決されていることを述べた。しかし，そのことは未だ印刷物として発表されたものはないようであるし，また具体的な形での紹介も少なくとも日本では未だなされていないので，それを調べるのもあながち無益ではなかろうと思ってこの報告を作った。本質的には池田－長沢－渡辺(信)［ ］補足Ⅱ.2にある，「*one-type* での n 次の多項式に対応するものとしては，*multitype* では $\vee$ を施した函数（本文1,2 参照）の n 個の積であること」に気がつくことにより，少なくとも *discrete spectrum* のみが現われる場合には或る程度満足出来る形で解決されたと思う。結果的には *one-type* の時とは違った事情も多く，一般の分枝マルコフ過程の *transition probability* のスペクトル表現の問題の解決に対していくつかの点で参考になる事情が出て来ていると思う。さらに，一般に *transition probability* のスペクトル表現が出来れば，その *process* に対する具体的な問題の

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

統一的な解決に役立つ。

§1 では平均行列の絶対値最大の固有値 ρ（これが *well-defined* で正であることは本文 *Prop.* 1, 2 参照）が 1 より大きいとき，条件 [1.A] ~ [1.C]，[2.A] ~ [2.B]（本文参照）の下で，*one-type* の時と殆んど同じ結果が得られることを述べ，その応用として，*transition probability* の *asymptotic* な性質を述べる．原則として，*Lemma* の証明は §2 にまわし，定理には証明をつけた。

§2 では §1 で残された証明を述べる。

§3 では $\rho > 1$ のとき，条件 [2.A] を除いても §1 の定理 1 を除く結果が正しいことと，$\rho < 1$ のとき，条件 [1.A] [1.B] [2.B] 及び *generating functions* が 1 の近傍で正則であるという条件 [Ⅲ.A] の下で同様なことが言えることを述べる。

書き終ってみた感じでは，§3 の思想で統一的に書くべきだった．しかし，原稿のメ切期日をはるかに超えているので止むを得ずこのままの形でおく．

§1. 定義と結果

$\boxed{1.1}$ $\quad \mathscr{S} = \{e_1, e_2, \cdots, e_d\} \qquad (d \geqq 1)$

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots \}$

$S = \{x = x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d\ ;\ x_i \in \mathbb{Z}_+\ (1 \leqq i \leqq d)\}$

とし，S に *discrete topology* を入れ，$\bar{S} = S \cup \{\Delta\}$ を S の一点 *compact* 化とする．

$x = x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d \in S$ を $(x_1, x_2, \cdots, x_d)$ と，点 $0 = 0e_1 + \cdots + 0e_d \in S$ を ∂ とかくこともある。$x \in S$ に対し，絶対値を

$$|x| = x_1 + \cdots + x_d \qquad (x = (x_1, \cdots, x_d))$$

で定義する。*

---

*) このような空間 $\bar{S}$ は，池田，長沢，渡辺(信) [ ] における空間 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{S}^n \cup \{\Delta\}$ と同一視出来る。実際，対応

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{S}^n \cup \{\Delta\} \ni (\underbrace{e_1, \cdots, e_1}_{x_1}, \cdots, \underbrace{e_d, \cdots, e_d}_{x_d}) \longleftrightarrow \underset{|x| = n}{x = (x_1, \cdots, x_d) \in S}$$

は 1 対 1 対応を与え，位相は共に *discrete* で同じ，かつ $\bar{S}$ と $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{S}^n \cup \{\Delta\}$ は共にこれらの空間の一点 *compact* 化である。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

d-次元複素数空間を C^d で表わし，$s=(s_1, s_2, \cdots, s\ )\in C$ 　に対し，

$$\|s\| = max\{|s_i|;\ 1\leq i\leq d\}$$

$$\hat{s}(x) = s_1^{x_1}\cdots s_d^{x_d} \qquad (x=(x_1,\cdots,x_d)\in S)$$

とする。明らかに　$\hat{s}(e_i)=s_i$ である。

今，$\mathcal{S}\times S$ 上の probability kernel，すなわち

$$\begin{cases} \pi(e_i, x)\geq 0 & (1\leq i\leq d,\quad x\in S) \\ 0<\sum_{x\in S}\pi(e_i, x)\leq 1 & (1\leq i\leq d) \end{cases} \qquad (1.1)$$

をみたす system $\{\pi(e_i, x);\ 1\leq i\leq d,\ x\in S\}$ を与える。

下式が意味をもつような　$s\in C^d$ に対し，generating functions $f^i(s)$ $(1\leq i\leq d)$ を

$$f^i(s)=\sum_{x\in S}\pi(e_i, x)\ \hat{s}(x) \qquad (1\leq i\leq d) \qquad (1.2)$$

で定義する。

$$\begin{cases} f(s) = (f^1(s),\cdots, f^d(s)) \\ f_0^i(s) = s_i \\ f_n(s) = (f_n^1(s),\cdots, f_n^d(s)) & (n\geq 0) \\ f_{n+1}^i(s) = f^i(f_n(s)) = f_n^i(f(s)) & (n\geq 0) \end{cases} \qquad (1.3)$$

で帰納的に $f_n(s)$ 及び，$f_n^i(s)$ を定義する．但し，何れも右辺が意味をもつ $s\in C^d$ に対してのみ定義されているものとする．明らかに，$\|s\|\leq 1$ で $f_n^i(s)$ は定義され，$\|s\|<1$ で正則である．

正則函数の展開の一意性により，system $\{P_{xy};\ x, y\in S\}$ を

$$\sum_{y\in S}P_{xy}\ \hat{s}(y) = \widehat{f(s)}(x)\left(=(f^1(s))^{x_1}\cdots(f^d(s))^{x_d}\right) \qquad (\|s\|<1) \qquad (1.4)$$

で定義することが出来る。明らかに

$$\begin{cases} P_{xy}\geq 0 & (x, y\in S) \\ 0<\sum_{y\in S}P_{xy}\leq 1 & (x\in S) \end{cases} \qquad (1.5)$$

だから，Markov process に関する一般論により

$$P_x(x_1=y)=P_{xy}\ , \qquad (x, y\in S) \qquad (1.6)$$

をみたす S 上の minimal な Markov chain $X=(x_n,\ \zeta,\ \mathcal{N}_n,\ P_x)$ $(x\in S,\ n\in Z_+)$ が，同値を除いて unique に構成出来る。(1.1) 式の第二式の

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

等号が成り立つとき，この process は conservative である。

<u>Difinition 1.1</u>　上の X を（Branching system を $\{\pi(e_i, x)\}$ とする discrete time の d 次元）<u>multitype Galton-Watson process</u>（以下 M. G-W. P. とかく）という。

$$P_{xy}(n) \equiv P_x(x_n = y) \quad (x, y \in S, \quad n \geqq 0)$$

とする。

<u>Proposition 1.1</u>　$\|S\| \leqq 1$，$x \in S$，$n \geqq 0$ に対して

$$\sum_{y \in S} P_{xy}(n)\,\hat{S}(y) = \widehat{f_n(S)}(x) \tag{1.7}$$

が成り立つ。

［証明］　先ず，$\|S\| \leqq 1$ ならば $\|f_n(S)\| \leqq 1$ $(n \geqq 0)$ であることが容易に解る。

(1.7) ~~式は~~ $n=0$ のとき，明らかに正しいから，$n=n$ のとき正しいとして，$n=n+1$ のとき正しいことを示す。

$$\sum_{y \in S} P_{xy}(n+1)\,\hat{S}(y) = \sum_{y \in S}\sum_{z \in S} P_{xz} P_{zy}(n)\,\hat{S}(y)$$

$$= \sum_{z \in S} P_{xz} \sum_{y \in S} P_{zy}(n)\,\hat{S}(y)$$

$$= \sum_{z \in S} P_{xz}\,\widehat{f_n(S)}(z) \tag{1.8}$$

上の変形で Fubini の定理を用いたが，これは第三式が絶対収束するから正しい。$\|f_n(S)\| \leqq 1$ であることと，(1.3) (1.4) 式に注意すれば，(1.8) 式より

$$\sum_{y \in S} P_{xy}(n+1)\,\hat{S}(y) = \widehat{f_{n+1}(S)}(x)$$

を得る。　　q.e.d.

一般に $A \subset S$ に対して

$$\sigma_A(w) = \begin{cases} \min\{n;\ n \geqq 0,\ x_n \in A\}, & \text{if } \{\ \} \neq \phi \\ \infty, & \text{if } \{\ \} = \phi \end{cases}$$

とし，

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$\begin{cases} q_i = q(e_i) \equiv P_{e_i}(\sigma_{\{\partial\}} < \infty) \\ q \equiv (q_1, \cdots, q_d) \end{cases}$$

とし，qを extinction probability という。

(1.7)式から state $\partial \in S$ は trapであるから，(1.7)式より

$$P_x(\sigma_{\{\partial\}} < \infty) = \hat{q}(x) \qquad (1.9)$$

$$f(q) = q \qquad (1.10)$$

を得る。実際，

$$P_x(\sigma_{\{\partial\}} < \infty) = \lim_{n\to\infty} P_x(x_n = \partial) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n(0)}(x)$$
$$= \widehat{\lim_{n\to\infty} f_n(0)}(x) = \hat{q}(x)$$

より，(1.9)式を得。

$$q = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} f(f_n(0))$$
$$= f(\lim_{n\to\infty} f_n(0)) = f(q)$$

より(1.10)式を得る。

$x_n = (x_n^1, \cdots, x_n^d) \in S$ と表わすことにする。

今後特に断わらない限り，次の事を仮定する。

[1.A]　$N \geqq 0$ が存在して，

$$P_{e_i}(x_N^j \geqq 1) > 0 \qquad (1 \leqq i, j \leqq d)$$

[1.B]　$1 \leqq i \leqq d$ が存在して，$P_{e_i}(|x_1| \neq 1) > 0$

平均行列 M を次のように定義する。

$$m_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s_j} f^i(s)\Big|_{s\uparrow 1}, & \text{if } P_{e_i}(x_1 \in S) = 1 \\ \infty, & \text{if } P_{e_i}(x_1 \in S) < 1 \end{cases}$$

$$M = (m_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,d}$$

$P_{e_i}(x_1 \in S) = 1$ のとき，m_{ij} は無限大も許して $E_{e_i}[x_1^j]$ に等しい。

Proposition 1.2　$m_{ij} < \infty$ $(1 \leqq i, j \leqq d)$ ならば，平均行列 M の絶対値最大の固有値は，唯一つで，正で simple である。

証明は後に述べる。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

行列 M に附随した数 ρ を，$m_{ij}<\infty$ $(1\leq i,j\leq d)$ ならば Prop. 1.2 の絶対値最大の固有値とし，それ以外のときは $+\infty$ として定義しておく．

Proposition 1.3　i) $\rho>1$ ならば $\|q\|<1$ で，q は

$$f(s)=s \qquad (\|s\|<1) \tag{1.11}$$

の唯一つの解である。

ii) $\rho\leq 1$ ならば，$q=(1,\cdots,1)\equiv 1$ である。

証明は $\rho<\infty$ のときは T. H. Harris [　] II. 定理 7.1 及び定理 7.2 の Cor. 1 にあるので $\rho=\infty$ の時のみを述べる。

[$\rho=\infty$ の時の Prop. 1.3 の証明]

先ず仮定 [1. A] の自然数を N とすれば

$$P_{e_i}(x_n^j\geq 1)>0 \qquad (n\geq N,\quad 1\leq i,j\leq d) \tag{1.12}$$

である。実際，仮定 [1. A] より任意の $1\leq i,j\leq d$ に対して $f_N^i(1-e_j)<f_N^i(1)$ となるから，(1.7) 式より，$|y|\geq 1$ なる $y\in S$ と任意の $1\leq j\leq d$ に対して，$\widehat{f_N(1-e_j)}(y)<\widehat{f_N(1)}(y)$，すなわち

$$P_y(x_N^j\geq 1)>0 \qquad (|y|\geq 1\ ,\ 1\leq j\leq d) \tag{1.13}$$

を得る．今，$1\leq i,j\leq d$ が存在して，$P_{e_i}(x_{N+1}^j\geq 1)=0$ とすれば，関係式

$$0=P_{e_i}(x_{N+1}^j\geq 1)=\sum_{y\in S}P_{e_i}(x_1=y)\,P_y(x_N^j\geq 1)$$

と (1.13) 式より，$P_{e_i}(x_1=y)=0$ $(|y|\geq 1)$ を得る。従って

$$P_{e_i}(x_N^j\geq 1)=\sum_{y\in S}P_{e_i}(x_1=y)\,P_y(x_{N-1}^j\geq 1)$$

$$=P_{e_i}(x_1=\partial)\,P_\partial(x_{N-1}^j\geq 1)$$

となるが，これは state ∂ が trap だから 0 となり，仮定 [1. A] に矛盾する。従って，$n=N+1$ に対して，(1.12) 式が得られたことになるが，後は帰納的に行えば，結局 $n\geq N$ に対して，(1.12) 式が成立する。

1) 任意の $1\leq i\leq d$ に対して，$P_{e_i}(x_1\in S)=1$ とし，

$$m_{ij}=E_{e_i}[x_1^j]=\infty$$

とする。このとき，$P_y(x_1\in S)=1$ $(y\in S)$ であることから，

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$E_y[x_1^j] = \frac{\partial}{\partial s_j} \widehat{f(s)}(y)\Big|_{s\uparrow 1}$$

を得るから，$y=(y_1,\cdots,y_d)\in S$ とするとき

$$E_y[x_1^j] = \infty \qquad (y_i \geqq 1)$$

を得る。従って，任意の $1 \leqq k \leqq d$ に対して，関係式

$$E_{e_k}[x_{n+1}^j] = \sum_{y\in S} P_{e_k}(x_n = y)\, E_y[x_1^j]$$

と(1.12)式より，

$$E_{e_k}[x_{n+1}^j] = \infty \qquad (n \geqq N)$$

を得るが，これは $q_k < 1$ を意味する。k は任意だったから，$\|q\| < 1$ である。q が(1.11)式の唯一つの解であることは $\rho < \infty$ の時と全く同様に出来る。

2) $1 \leqq i \leqq d$ が存在して $P_{e_i}(x_1 \in S) < 1$ とすれば，$f^i(1) < 1$ だから，$y_i \geqq 1$ なる y に対して，$\widehat{f(1)}(y) < 1$．故に

$$P_y(x_1 \in S) < 1 \qquad (y_i \geqq 1)$$

これと，(1.12) 式を用いれば，1) と同様にして，任意の $1 \leqq k \leqq d$ に対して，

$$P_{e_k}(x_{n+1} \in S) < 1 \qquad (n \geqq N) \tag{1.14}$$

が得られる。一般に $P_x(x_n \in S) \geqq P_x(x_{n+1} \in S) \geqq \cdots$ 及び $\partial \in S$ であることに注意すれば，(1.14)式より $\|q\| < 1$ を得る。主張の後半は $\rho < \infty$ の時と全く同じである。 q.e.d.

<u>Proposition 1.4</u>　$\|s\| < 1$ なる s に対して

$$q = \lim_{n\to\infty} f_n(s) \tag{1.15}$$

である。

証明は $\rho < \infty$ の時 T.H.Harris [ ] II.定理7.2 にあるが，その証明は本質的には $\rho = \infty$ の場合も含んでいる。

以下計算の必要上から，次の仮定をおく。

[1.C]　$q_i > 0 \qquad (1 \leqq i \leqq d)$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

行列 Q_n 及び Q を次のように定義する。

$$q_{ij}^{n} = \frac{1}{q_i} E_{e_i}[x_n^j \hat{q}(x_n)] = \frac{1}{q_i} \frac{\partial}{\partial s_j} f_n^i(q)\ q_j$$

$$Q_n = (q_{ij}^n)_{i,j=1,2,\cdots,d}$$

$$Q = Q_1$$

このとき行列 Q の n 回の累乗を Q^n とすれば

$$Q_n = Q^n \tag{1.16}$$

である．実際 (1.10) 式より

$$q = f_n(q) \qquad (n \geqq 1)$$

を得るから，

$$\frac{1}{q_i} \frac{\partial}{\partial s_j} f_{n+1}^i(q)\ q_j = \frac{1}{q_i} \frac{\partial}{\partial s_j} f^i(f_n(q))\, q_j$$

$$= \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{q_i} \frac{\partial}{\partial s_k} f^i(q)\, q_k \cdot \frac{1}{q_k} \frac{\partial}{\partial s_j} f_n^k(q)\, q_j$$

$$= \sum_{k=1}^{d} q_{ik}\, q_{kj}^n \qquad (n \geqq 1)$$

が得られるから，帰納法を用いれば，(1.16) 式を得る．但し，上の定義及び計算で，$q = 1$ で，$f^i(s)$ が $s = 1$ で正則でないときは，q における微分は，すべて各成分が実数で q の対応する成分より小さい点 s で微分し，$s \uparrow q$ としたものとする。

<u>*Proposition* 1.5</u>　行列 Q の絶対値最大の固有値は唯一つで正で *simple* である。これを σ とすれば　$\rho \neq 1$ のとき，

$$0 < \sigma < 1 \tag{1.17}$$

である。

証明は後に述べるが，定義から明らかなように $\rho < 1$ のときは $\rho = \sigma$，$Q = M$ となり，*Prop.* の主張は *Prop.* 1.2 と同じになることだけを注意しておく．

$\boxed{1.2}$ この小節では　$\rho > 1$　の場合だけを考える。このとき $\|q\| < 1$ であるから，$\sqrt{q} \equiv (\sqrt{q_1}, \cdots, \sqrt{q_d})$ とすれば $\|\sqrt{q}\| < 1$　である。

$$D(\sqrt{q}) = \{ s\ ;\ |s_i| < \sqrt{q_i} \qquad 1 \leqq i \leqq d \}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$D_\varepsilon(\sqrt{q}) = \{ s ;\ |s_i| < \sqrt{q_i} + \varepsilon \qquad 1 \leq i \leq d \}$$

とし，更にこの小節を通して，[1.A]～[1.C]の他に次の仮定をおく。

[2.A]　$\varepsilon > 0$ が存在して，$f(s) \in D(\sqrt{q})$　　$(s \in D_\varepsilon(\sqrt{q}))$

[2.B]　　$\det Q \neq 0$

さて，

$$\mathcal{H} \equiv \{ \varphi(x) \in C^S ;\ \sum_{x \in S} |\varphi(x)|^2 \hat{q}(x) < \infty \}$$

とし，$\mathcal{H}$ に内積を

$$(\xi, \eta) = \sum_{x \in S} \xi(x) \overline{\eta(x)}\, \hat{q}(x) \qquad (\xi, \eta \in \mathcal{H})$$

で入れる。

$$\mathcal{H}_n \equiv \{ \varphi(x) \in C^S ;\ \varphi(x) \text{ は } x_1, \cdots, x_d \text{ に関する } n \text{ 次の同次形式} \}$$

$$\mathcal{H}_{(n)} \equiv \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \cdots + \mathcal{H}_n$$

とする．明らかに，$\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_{(n)} \subset \mathcal{H}$ である．

$\xi \in C^S$ に対して generating function $\xi(s)$ を形式的に

$$\xi(s) = \sum_{x \in S} \xi(x) \hat{s}(x) \tag{1.18}$$

とする。$\mathcal{H}$ の定義と Lemaire の公式*1) によれば，$\xi \in \mathcal{H}$ のとき

$$\limsup_{|x| \to \infty} \left(|\xi(x)|^2 \hat{q}(x) \right)^{\frac{1}{|x|}} \leq 1$$

従って

$$\limsup_{|x| \to \infty} \left(|\xi(x)| \widehat{\sqrt{q}}(x) \right)^{\frac{1}{|x|}} \leq 1$$

を得るから，再び Lemaire の公式を用いれば $\xi(s)$ は少なくとも領域 $D(\sqrt{q})$ で正則である．

generating function $\xi(s)$ が或る $\varepsilon > 0$ に対して $D_\varepsilon(\sqrt{q})$ で正則ならば，簡単な計算により

$$\|\xi\|^2 = (\xi, \xi) = \frac{1}{(2\pi i)^d} \int_{|s_1| = \sqrt{q_1}} \cdots\cdots \int_{|s_d| = \sqrt{q_d}} \frac{|\xi(s)|^2}{s_1 \cdots s_d}\, ds_1 \cdots ds_d \tag{1.19}$$

---

*1) 一変数函数論における Cauchy-Hadamond の公式に対応する公式，参考書としては，例えば酒井[　]定理1.5 .

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

が得られる。

$\xi,\ \varphi\in\mathcal{H}$ に対して，形式的に

$$A_n\varphi\cdot(x)=\frac{1}{\hat{q}(x)}\sum_{y\in S}P_{xy}(n)\varphi(y)\hat{q}(y)\qquad(n\geqq 0,\ x\in S)\qquad(1.20)$$

$$A_n^*\xi\cdot(y)=\sum_{x\in S}\xi(x)P_{xy}(n)\qquad(n\geqq 0,\ y\in S)\qquad(1.21)$$

$$A=A_1,\quad A^*=A_1^*$$

とする。(1.7) 式より，下式の何れか一方が絶対収束するとき，*Fubini* の定理が使えて

$$(A_n^*\xi)(s)=\xi(f_n(s))\qquad(n\geqq 0)\qquad(1.22)$$

である。仮定 [2. A] より，(1.22)式は任意の $\xi\in\mathcal{H}$ に対して少なくとも $s\in D_\varepsilon(\sqrt{q})$，$n\geqq 1$ で正しい。

<u>定理 1.1</u>　$\rho>1$ で，仮定 [1. A]～[1.C] 及び [2.A] が充たされているとする。

このとき，作用素 A は $\mathcal{H}$ を $\mathcal{H}$ に写す完全連続作用素で，作用素 A^* は A の共役作用素である。

[証明]　作用素 A^* が $\mathcal{H}$ を $\mathcal{H}$ に写す完全連続であることと，A が A^* の共役作用素であることを示せば充分である。

1° 仮定 [2.A] の ε として，$0<\varepsilon<1-\|\sqrt{q}\|$ をみたすものをとることが出来る。このとき，函数 $\xi(f(s))$ は $D_\varepsilon(\sqrt{q})$ で正則だから，(1.22) (1.19) 式より

$$\|A^*\xi\|^2=\frac{1}{(2\pi i)^\ell}\int_{|s_1|=\sqrt{q_1}}\cdots\cdots\int_{|s_d|=\sqrt{q_d}}\frac{|\xi(f(s))|^2}{s_1\cdots s_d}\,ds_1\cdots ds_d\qquad(1.23)$$

一方，仮定 [2. A] と *Schwarz* の不等式によれば，$0<\varepsilon'<\varepsilon$ なる ε' に対して，$\sqrt{q}+\varepsilon'\equiv(\sqrt{q_1}+\varepsilon',\cdots,\sqrt{q_d}+\varepsilon')$ とするとき，

$$|\xi(f(s))|^2=\Big|\sum_{x\in S}\xi(x)\,\widehat{f(s)}\,(x)\Big|^2$$

$$\leqq\sum_{x\in S}|\xi(x)|^2\,\hat{q}(x)\sum_{x\in S}\frac{|\widehat{f(s)}\,(x)|^2}{\hat{q}(x)}$$

$$=\|\xi\|^2\sum_{x_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_d=0}^{\infty}\left(\frac{f^1(\sqrt{q}+\varepsilon')}{\sqrt{q_1}}\right)^{2x_1}\cdots\cdots\left(\frac{f^d(\sqrt{q}+\varepsilon')}{\sqrt{q_d}}\right)^{2x_d}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$= \|\xi\|^2 \left(1-\left(\frac{f^1(\sqrt{q}+\varepsilon')}{\sqrt{q}}\right)^2\right)^{-1} \cdots\cdots \left(1-\left(\frac{f^d(\sqrt{q}+\varepsilon')}{\sqrt{q_d}}\right)^2\right)^{-1}$$

$$\fallingdotseq \|\xi\|^2 K_{\varepsilon'} < \infty \qquad (S \in D_{\varepsilon'}(\sqrt{q})) \qquad (1.24)$$

である。(1.23)(1.24)より，先ず $A^*\xi \in \mathcal{H}$ $(\xi \in \mathcal{H})$ であることがわかる。

2° 今，$\mathcal{H}$の中から $\{\xi_n\}$ を $\|\xi_n\| \leq 1$ となるようにとって来る。このとき部分列 $\{\xi_{n_j}\}$ が存在して，弱収束している。*1)

しかし，(1.24)式の第三項以降の変形と全く同じことから，

$\dfrac{\widehat{f(S)}(\cdot)}{\hat{q}(\cdot)} \in \mathcal{H}$ $(S \in D_{\varepsilon'}(\sqrt{q}))$ であることがわかるから，

$$\xi_{n_j}(f(S)) - \xi_{n_k}(f(S)) = \left(\xi_{n_j}, \frac{\widehat{f(S)}(\cdot)}{\hat{q}(\cdot)}\right) - \left(\xi_{n_k}, \frac{\widehat{f(S)}(\cdot)}{\hat{q}(\cdot)}\right)$$

$$\longrightarrow 0 \; ; \quad j, k \longrightarrow \infty \quad (S \in D_{\varepsilon'}(\sqrt{\varepsilon})). \qquad (1.25)$$

一方，(1.23)式より

$$\|A^*\xi_{n_j} - A^*\xi_{n_k}\|^2 = \frac{1}{(2\pi i)^\ell} \int_{|S_1|=\sqrt{q_1}} \cdots\cdots \int_{|S_d|=\sqrt{q_d}} \frac{|(\xi_{n_j}-\xi_{n_k})(f(S))|^2}{S_1 \cdots\cdots S_d} dS_1 \cdots dS_d$$

となるが，(1.24)式と $\|\xi\| \leq 1$ であることから，右辺の被積分函数は一様に有界だから，(1.25)式と併わせて，Lebesgue の定理を用いて

$$\|A^*\xi_{n_j} - A^*\xi_{n_k}\| \longrightarrow 0 \quad ; \quad j, k \longrightarrow \infty$$

を得る。

3° $$(A^*\xi, \varphi) = \sum_{y \in S} \sum_{x \in S} \xi(x) P_{xy} \overline{\varphi(y)} \hat{q}(y)$$

$$= \sum_{x \in S} \xi(x) \overline{\left(\frac{1}{\hat{q}(x)} \sum_{y \in S} P_{xy} \varphi(y) \hat{q}(y)\right)} \hat{q}(x)$$

$$= (\xi, A\varphi) \qquad (\xi, \varphi \in \mathcal{H})$$

より，A が A^* の共役作用素であることがわかる．但し，上式の変形で第二辺から第三辺への移行は，$\xi(\cdot) \in \mathcal{H}$ に対して，$|\xi|(\cdot) \fallingdotseq |\xi(\cdot)|$ とするとき $|\xi| \in \mathcal{H}$ であることから，

---

*1) 例えば吉田，河田，岩村[ ]，p.174にある。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

(130)

$$\sum_{y\in S}\sum_{x\in S}\left|\xi(x)P_{xy}\overline{\varphi(y)}\,\hat{q}(y)\right|$$

$$\leqq \sum_{y\in S}\left|A^*|\xi|\cdot(y)\right|\left|\overline{\varphi(y)}\right|\hat{q}(y)$$

$$\leqq \|A^*|\xi|\|\ \|\varphi\| < \infty \qquad (\xi,\varphi\in\mathcal{H})$$

が言えるから，*Fubini*の定理により保障される。 *q.e.d.*

ここで，*Hilbert space* 上の完全連続作用素に関する *lemma* を一つ述べておく。

<u>*Lemma* 1.1</u>　$\mathcal{H}$: *Hilbert space*

A：　$\mathcal{H}$上の完全連続作用素

A^*：　Aの共役作用素

とする。このとき，次のことが成立つ。

1）作用素Aの広い意味の（以後この言葉は省略する）固有値を $\lambda\neq 0$ とすると，λの共役数 $\overline{\lambda}$ は A^* の固有値で，両者の固有空間の次元は有限で等しい。

2）$\lambda\neq\mu$，$\lambda,\mu\neq 0$ で，φ_λ と ξ_μ はそれぞれ λ と $\overline{\mu}$ に対応するAとA^*の固有函数とする。このとき，φ_λ と ξ_μ は直交する。

3）作用素Aの固有値は高々可算個で，0以外には集積点を持たない。

4）$\{\lambda_i;\ i=0,1,2,\cdots\}$ を作用素Aの0でない固有値とし，$\{\varphi_{ij};\ 1\leqq j\leqq n_i\}$ を λ_i に対応するAの固有函数とする。

このとき，$\{\varphi_{ij};\ i=0,1,2,\cdots,\ 1\leqq j\leqq n_i\}$ が $\mathcal{H}$ で *complete* ならば，0でない作用素Aの固有値は $\{\lambda_i\}$ に限り，又，$\{\varphi_{ij};\ 1\leqq j\leqq n_i\}$ は λ_i の固有空間を張る。

証明は後に述べる。

行列Qの固有値 $\lambda_1=\sigma, \lambda_2,\cdots,\lambda_d$（重複を許す）と，これらに対応する1次独立な左固有ベクトル $\{\varphi_i=(\varphi_i(e_1),\cdots,\varphi_i(e_d));\ 1\leqq i\leqq d\}$ が存在する。すなわち，各iごとに $n_i\geqq 1$ が存在して，

$$(Q-\lambda_i I)^{n_i}\varphi_i=0 \qquad (1\leqq i\leqq d) \tag{1.26}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

となる．但し，一般に I は単位行列又は単位作用素とする．行列に関して良く知られているように，各 n_i は $d-1$ より小さくとれる．

添数の空間 T を

$$T=\{\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_d)\ ;\quad \nu_i\in\mathbb{Z}_+\quad 1\leq i\leq d\}\quad とする．$$

これは state space S と同じ空間である．S の場合に倣って $|\nu|=\nu_1+\cdots+\nu_d$ とし，$s\in C^d$ に対して

$$\hat{s}(\nu)=s_1^{\nu_1}\cdots s_d^{\nu_d}\qquad (s=(s_1,\cdots,s_d)\in C^d,\ \nu=(\nu_1,\cdots,\nu_d)\in T)$$

とする．ベクトル $\varphi=(\varphi(e_1),\cdots,\varphi(e_d))$ を $\check{\varphi}\in\mathscr{H}$ に関係式

$$\check{\varphi}(x)=x_1\varphi(e_1)+\cdots+x_d\varphi(e_d)\qquad (x\in S)$$

で拡張し，

$$\varphi_\nu\equiv(\check{\varphi}_1)^{\nu_1}\cdots\cdots(\check{\varphi}_d)^{\nu_d}\qquad (\nu\in T)$$

とする．$\varphi_\nu\in\mathscr{H}_{|\nu|}\subset\mathscr{H}_{(|\nu|)}\subset\mathscr{H}$，$\varphi_0\equiv 1$ である．

<u>Lemma 1.2</u>　任意の system $\{F_\nu\in\mathscr{H}_{(|\nu|-1)}\ ;\ \nu\in T\}$ に対して

$$\varphi^{(\nu)}\equiv\varphi_\nu+F_\nu\qquad (\nu\in T)$$

とすれば

1) $\{\varphi^{(\nu)}\ ;\ \nu\in T,\ |\nu|\leq n\}$ は空間 $\mathscr{H}_{(n)}$ を張る。
2) $\{\varphi^{(\nu)}\ ;\ \nu\in T\}$ は $\mathscr{H}$ で complete である。

証明は後に述べる。

<u>Remark.</u>　system $\{\varphi^{(\nu)}\ ;\ \nu\in T\}$ は一次独立である。

[証明]　$\{\varphi^{(\nu)}\ ;\ \nu\in T,\ |\nu|\leq n\}$ が一次独立であることを言えばよい。

先ず，空間 $\mathscr{H}_{(n)}$ の次元は

$$N(n)\equiv\sum_{i=0}^{n}{}_dH_i=\sum_{i=0}^{n}\binom{d+i-1}{i}$$

但し，${}_dH_i$ は d 個から i 個をとる重複組合せの総数

である．実際，函数

$$1,\ x_i\ (i=1,\cdots,d),\ \ x_ix_j\ (i,j=1,\cdots,d),\ \cdots$$
$$\cdots,\ x_{i_1}\cdots x_{i_n}\ (i_1,\cdots,i_n=1,2,\cdots,d)$$

は明らかに一次独立で，その個数は $N(n)$ 個であり，しかも，これらの一次結合は空間 $\mathscr{H}_{(n)}$ を張っているからである。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

しかし，system $\{\varphi^{(\nu)};\ |\nu|\leq n\}$ もまた，$N(n)$ 個で，空间 $\mathcal{H}_{(n)}$ を張っているから，これらは一次独立でなければならない。 q.e.d.

Lemma 1.3　system $\{F_\nu \in \mathcal{H}_{(|\nu|-1)};\ \nu\in T\}$ が存在して

$$\psi^{(\nu)} = \varphi_\nu + F_\nu$$

は作用素 A の $\hat{\lambda}(\nu)$ に対応する固有函数となる。

ここに $\lambda \equiv (\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$ とする。

証明は後に述べる。

定理 1.2　$\rho>1$ で仮定 [1.A]～[1.C] 及び仮定 [2.A]～[2.B] がみたされているとする。このとき，

1) 作用素 A の 0 でない固有値は $\{\hat{\lambda}(\nu);\ \nu\in T\}$ に限り，また $\hat{\lambda}(\nu)$ に対応する固有空間は一次従属を除いて $\{\psi^{(\mu)};\ \hat{\lambda}(\mu)=\hat{\lambda}(\nu),\ \mu\in T\}$ のみである。

2) 函数の system $\{\xi^{(\nu)};\ \nu\in T\}$ が存在して

$$(\xi^{(\mu)},\ \psi^{(\nu)}) = \delta_{\mu\nu}$$

で，$\xi^{(\nu)}$ は $\overline{\hat{\lambda}(\nu)}$ に対応する作用素 A^* の固有函数に出来る。

[証明]　1) 仮定 [2.B] より，$\hat{\lambda}(\nu)\neq 0$ $(\nu\in T)$ が得られることに注意して，定理 1.1. Lemma 1.1.−4) 及び Lemma 1.2−2)，Lemma 1.3 をそのまま適用すればよい。

2) $\{\alpha;\ \alpha=\hat{\lambda}(\nu),\ {}^\exists\nu\in T\}$ (集合 $\{\hat{\lambda}(\nu);\ \nu\in T\}$ から重複しているものを除いた集合) に番号をつけて，

$$\alpha_0=1,\ \alpha_1=\sigma=\lambda_1,\ \alpha_2=\lambda_2=\cdots=\lambda_{h_1+h_2}\ (h_1=1),\ \alpha_3=\lambda_{h_1+h_2+1}=\cdots$$
$$=\lambda_{h_1+h_2+h_3},\cdots,\ \alpha_e=\lambda_{h_1+\cdots+h_{e-1}+1}=\cdots=\lambda_{h_1+\cdots+h_e},\ (h_1+\cdots+h_e=d),\ \alpha_{e+1},$$
$$\alpha_{e+2},\cdots\cdots$$

とし，集合 $\{\nu;\ \hat{\lambda}(\nu)=\alpha_k\}$ (これは有限個) に，$1\leq k\leq e$，$1\leq p\leq h_k$ に対しては $\nu_p^k = e_{h_1+\cdots+h_{k-1}+p}$ となるように，番号をつけて $\nu_1^k,\cdots,\nu_{n_k}^k$ とする。更に，

$$\psi_p^k \equiv \psi^{(\nu_p^k)} \qquad (1\leq p\leq n_k,\ k=0,1,2,\cdots)$$

とする。

以下 k を fix して考える。定理 1.1 と Lemma 1.1−1) によれば A^* の $\overline{\alpha_k}$ に対応する n_k 個の一次独立な固有函数，$\xi_1'^k, \xi_2'^k, \cdots, \xi_{n_k}'^k$ が存在する。このと

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

き，

$$\det\Big(\big(\xi'^{k}_{p},\ \psi^{k}_{q}\big)\Big)_{p,q=1,2,\cdots,n_k}\neq 0 \qquad (1.27)$$

である．実際，もし，$\det(\quad)\neq 0$ とすれば，$(C_1,\cdots,C_{n_k})\neq 0\in C^{n_k}$ が存在して，

$$\sum_{p=1}^{n_k} c_p(\xi'^{k}_{p},\ \psi^{k}_{q})=0 \qquad (1\leq q\leq n_k)$$

$$\text{i.e.}\quad \Big(\sum_{p=1}^{n_k} c_p\xi'^{k}_{p},\ \psi^{k}_{q}\Big)=0 \qquad (1\leq q\leq n_k)。$$

しかし，Lemma 1.1-2）によれば

$$\Big(\sum_{p=1}^{n_k} c_p\xi'^{k}_{p},\ \psi^{\ell}_{q}\Big)=0 \qquad (k\neq\ell,\ 1\leq q\leq n_\ell)$$

だから，Lemma 1.2-2）より

$$\sum_{p=1}^{n_k} c_p\,\xi'^{k}_{p}=0\ 。$$

$\{\xi'^{k}_{p}\ ;\ 1\leq p\leq n_k\}$ は一次独立だったから $(c_1,\cdots,c_{n_k})=0\in C^{n_k}$ となり，矛盾を生ずる。

（1.27）式より，正則行列

$$\Big((\xi'^{k}_{p},\ \psi^{k}_{q})\Big)^{-1}_{p,q=1,\cdots,n_k}\equiv(C_{pq})$$

が存在する．すなわち

$$\sum_{q=1}^{n_k} c_{pq}(\xi'^{k}_{q},\ \psi^{k}_{r})=\delta_{pr} \qquad (1\leq p,r\leq n_k)$$

故に

$$\xi''^{k}_{p}=\sum_{q=1}^{n_k} c_{pq}\,\xi'^{k}_{q} \qquad (1\leq p\leq n_k)$$

とおけば $\{\xi''^{k}_{p}\ ;\ 1\leq p\leq n_k\}$ は A^* の $\overline{\alpha_k}$ に対応する一次独立な固有函数で

$$(\xi''^{k}_{p},\ \psi^{k}_{q})=\delta_{pq} \qquad (1\leq p,q\leq n_k)$$

かつ

$$(\xi''^{k}_{p},\ \psi^{\ell}_{q})=0 \qquad (k\neq\ell,\ 1\leq p\leq n_k,\ 1\leq q\leq n_\ell)$$

q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

上の定理によれば，各 $1 \leqq i \leqq d$ に対して，A^* の $\overline{\lambda_i}$ に対応する固有函数 ξ_i が存在して

$$\begin{cases} (\xi_i, \check{\varphi}_j) = \delta_{ij} \\ (\xi_i, 1) = 0 \qquad (\because \varphi_0 \equiv 1) \end{cases} \tag{1.28}$$

となる。$\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して

$$\xi * \eta(z) = \sum_{x+y=z} \xi(x)\eta(y) \qquad (z \in S)$$

と定義し，

$$\xi_\nu = \underbrace{\xi_1 * \cdots * \xi_1}_{\nu_1 \text{ケ}} * \cdots\cdots * \underbrace{\xi_d * \cdots * \xi_d}_{\nu_d \text{ケ}}$$

とする。

Lemma 1.4　1)　$\xi_\nu \in \mathcal{H}$　$(\nu \in T)$

2)　ξ_ν は $\overline{\lambda(\nu)}$ に対応する A^* の固有函数である。

3)　$(\xi_\mu, \varphi_\nu) = 0$　$(|\nu| \leqq |\mu|,\ \mu \neq \nu)$

4)　$(\xi_\nu, \varphi_\nu) > 0$　$(\nu \in T)$

証明は後に述べる。

定理 1.3　$\rho > 1$ で仮定 [1.A]〜[1.C] 及び [2.A]〜[2.B] が充たされているとする。このとき

1) 作用素 A^* の 0 でない固有値は $\{\overline{\hat{\lambda}(\nu)};\ \nu \in T\}$ に限り，また，$\overline{\hat{\lambda}(\nu)}$ に対応する A^* の固有函数は一次従属を除いて $\{\xi_\mu;\ \hat{\lambda}(\mu) = \hat{\lambda}(\nu),\ \mu \in T\}$ のみである。

2) 函数の system $\{F'_\nu;\ F'_\nu \in \mathcal{H}_{(|\nu|-1)},\ \nu \in T\}$ と，定数の組 $\{k_\nu;\ \nu \in T\}$ が存在して

$$\psi_\nu = k_\nu \varphi_\nu + F'_\nu$$

とするとき，ψ_ν は A の $\hat{\lambda}(\nu)$ に対応する固有函数で

$$(\xi_\mu, \psi_\nu) = \delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu \in T)$$

かつ，$\hat{\lambda}(\nu)$ に対応する A の固有函数は一次従属を除いて $\{\psi_\mu;\ \hat{\lambda}(\mu) = \hat{\lambda}(\nu),$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$\mu \in T\}$ のみである。

［証明］ 1） 前半は Lemma 1.1－1），定理 1.1 及び定理 1.2－1）の前半より明らか。

後半は定理 1.1, Lemma 1.1－1), Lemma 1.2 の Remark 及び定理 1.2－1）の後半に注意すれば，$\{\xi_\nu;\ \nu \in T\}$ の一次独立性を言えば充分である。しかし，このことは Lemma 1.4－3）4） より明らかである。

2） Induction で行なう．$|\nu| \leq 1$ のときは明らかだから $|\mu| < |\nu|$ なる μ に対して ψ_μ が出来たとする．このとき

$$\psi_\nu' = \psi^{(\nu)} - \sum_{|\mu|<|\nu|,\ \hat{\lambda}(\mu)=\hat{\lambda}(\nu)} (\xi_\mu, \psi^{(\nu)})\, \psi_\mu \qquad (1.29)$$

とおけば，明らかに ψ_ν' は A の $\hat{\lambda}(\nu)$ に対応する固有函数で，明らかに

$$(\xi_\mu,\ \psi_\nu') = 0 \qquad (|\mu| < |\nu|)$$

しかし，Lemma 1.4－3）4）によれば

$$(\xi_\nu, \psi_\nu') > 0 \qquad (\nu \in T) \qquad (1.30)$$

$$(\xi_\mu, \psi_\nu') = 0 \qquad (|\nu| \leq |\mu|,\ \nu \neq \mu)$$

だから，(1.30)式の左辺を k_ν とし，$\psi_\nu = \frac{1}{k_\nu}\psi_\nu'$ とすれば，$\{\psi_\nu;\ \nu \in T\}$ が求めるものである． q.e.d.

$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_e, \alpha_{e+1}, \cdots,\ \nu_p^k,\ \psi_p^k\ \ (0 \leq p \leq n_k,\ k = 0, 1, 2, \cdots)$ 等すべて定理 1.2－2）の証明の中で作ったものとする。

函数 ξ_p^k を

$$\xi_p^k = \xi_{\nu_p^k} \qquad (0 \leq p \leq n_k,\ \ k = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定義する。

Lemma 1.4－2）と定理 1.3－1）によれば，函数 ξ_p^k は A^* の $\overline{\alpha_k}$ に対応する固有函数で，逆に A^* の $\overline{\alpha_k}$ に対応する固有空間は $\{\xi_p^k;\ 1 \leq p \leq n_k\}$ で張られる。

関係式

$$(A^* - \overline{\alpha} I)^n A^* \xi = (A^* - \overline{\alpha} I)^{n+1} \xi + \overline{\alpha}\,(A^* - \alpha I)^n \xi$$

は，作用素 A^* が固有空間を不変にすることを意味する。従って定数 a_{pq}^k ($k = 0, 1, 2, \cdots,\ 1 \leq p, q \leq n_k$) が存在して

$$A^* \xi_p^k = \sum_{q=1}^{n_k} a_{pq}^k\, \xi_q^k \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots,\ \ 1 \leq p \leq n_k) \qquad (1.31)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

となる。行列 A^k, A_n^k 及び定数 ${}_n a_{pq}^k$ を

$$A^k \equiv \left(a_{pq}^k \right)_{p,q=1,2,\cdots,n_k}$$

$$\left({}_n a_{pq}^k \right) \equiv A_n^k \equiv (A^k)^n$$

で定義する。明らかに

$$A_n^* \xi_p^k = \sum_{q=1}^{n_k} {}_n a_{pq}^k \xi_q^k \qquad (n \geqq 0,\ k = 0, 1, \cdots,\ 1 \leqq p \leqq n_k) \quad (1.32)$$

である。

<u>Proposition 1.6</u>　正則行列 $B^k = \left(b_{pq}^k \right)_{p,q=1,2,\cdots,n_k}$ が存在して

$$B^k A_n^k (B^k)^{-1} = \begin{pmatrix} (\bar{\alpha}_k)^n & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & (\bar{\alpha}_k)^n \end{pmatrix} \qquad (n \geqq 1) \qquad (1.33)$$

従って

$$\left| {}_n a_{pq}^k \right| = O(|\alpha_k|^n)\ ;\ n \to \infty \quad (k = 0, 1, \cdots,\ 1 \leqq p, q \leqq n_k) \quad (1.34)$$

証明は後に述べる。

<u>Proposition 1.7</u>　$\xi_\nu(s)$ は $\|s\| < 1$ で正則である.
従って　$\xi(s) \equiv (\xi_1(s), \cdots, \xi_d(s))$　とすれば

$$\xi_\nu(s) = \widehat{\xi(s)}\,(\nu) \qquad (\|s\| < 1,\ \nu \in T) \qquad (1.35)$$

$$(A_n^* \xi_\nu)(s) = \xi_\nu(f_n(s)) \qquad (\|s\| < 1,\ \nu \in T,\ n \geqq 1) \qquad (1.36)$$

[証明]　(1.32)式の両辺の形式的な generating function をとって

$$(A_n^* \xi_p^k)(s) = \sum_{q=1}^{n_k} {}_n a_{pq}^k \xi_q^k(s)$$

(1.15), (1.22)式より, $0 < r < 1$ に対して, $n \geqq 1$ が存在して, 函数 $(A_n^* \xi_p^k)(s)$ は, $\|s\| < r$ で正則な函数 $\xi_p^k(f_n(s))$ に $\|s\| < r$ で等しくなる。従って, その n に対して,

$$\xi_p^k(f_n(s)) = \sum_{q=1}^{n_k} {}_n a_{pq}^k \xi_q^k(s) \qquad (1 \leqq p \leqq n_k,\ \|s\| < r) \qquad (1.37)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

(1.13)式によれば $\det A_n^k \neq 0$ であるから，kを固定して考えれば，$\xi_q^k(s)$ は $\|s\|<r$ で正則な函数 $\{\xi_p^k(f_n(s));\ 1\leq p\leq n_k\}$ の一次結合で表わされるから，$\|s\|<r$で正則になる．$0<r<1$は任意だったから，$\xi_q^k(s)$ は $\|s\|<1$で正則である。(1.35) (1.36)式は ξ_ν の定義と (1.22) 式を思い出すだけでよい。 q.e.d.

さて，$\check{\varphi}_i(x)$ の作り方に注意すれば

$$\begin{pmatrix}\check{\varphi}_1(x)\\ \vdots\\ \check{\varphi}_d(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \varphi_i(e_j) & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_d\end{pmatrix} \equiv L\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_d\end{pmatrix}$$

ベクトル $\{\varphi_i;\ 1\leq i\leq d\}$ は一次独立だったから $\det L\neq 0$．
従って，逆行列 L^{-1} が存在するが，この (i,j)-成分を ℓ_{ij}^{-1} で表わす。このとき，

$$\frac{\partial}{\partial s_j}\xi_i(q)=\sum_{x\in S}\xi_i(x)\,x_j\,\hat{q}(x)\cdot\frac{1}{q_j}=\sum_{x\in S}\xi_i(x)\,\overline{x_j}\,\hat{q}(x)\cdot\frac{1}{q_j}$$

$$=\sum_{k=1}^{d}\sum_{x\in S}\xi_i(x)\,\overline{\ell_{jk}^{-1}\,\check{\varphi}_k(x)}\cdot\frac{1}{q_j}$$

$$=\frac{1}{q^j}\sum_{k=1}^{d}(\xi_i,\check{\varphi}_k)\,\overline{\ell_{jk}^{-1}}$$

であるから，

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j}\xi_i(q)\right)=\left((\xi_i,\check{\varphi}_j)\right)\left(\frac{1}{q_j}\overline{\ell_{ji}^{-1}}\right) \tag{1.38}$$

が得られる．(1.28)と$\det L^{-1}\neq 0$ であることと，これより $\det\left(\frac{\partial}{\partial s_j}\xi_i(q)\right)\neq 0$ を得る。

また，

$$\xi_i(q)=(\xi_i,1)=0$$

であるから，逆函数の定理（例えば H.カルタン[ ] p.139）により $w=0\in C^d$ の近傍 $U(0)$ で正則な函数 $\theta_i(w)$ $(1\leq i\leq d)$ と，$s=q$ の近傍 $V(q)\subseteq\{s;\ \|s\|<1\}$ が存在して，

$$\theta_i(\xi(s))=s_i \qquad (s\in V(q),\ 1\leq i\leq d) \tag{1.39}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$\xi_i(\theta(w)) = w_i \qquad (w \in U(0),\ 1 \leq i \leq d) \tag{1.40}$$

但し，$\theta(w) = (\theta_1(w), \cdots, \theta_d(w))$とした。更に上の $U(0)$ と $V(q)$ は $\theta(w)$ と $\xi(s)$ によって 1対1 onto に対応づけられるようにとれるから，そのようにとっておく。

領域 $U(0)$ で正則な函数 $\theta_x(w)$ と，その展開の係数 $\theta_x(\nu)$を

$$\sum_{\nu \in I} \theta_x(\nu)\, \hat{w}(\nu) \equiv \theta_x(w) \equiv \widehat{\theta(w)}(x) \qquad (w \subset U(0),\ x \in S)$$

で定義する。

Lemma 1.5　　1) $\frac{1}{\hat{q}(\cdot)} \theta_{\cdot}(\nu) \in \mathcal{H}$

2) $\psi_\nu = \frac{1}{\hat{q}(\cdot)} \overline{\theta_{\cdot}(\nu)}$

証明は後に述べる。

定理 1.4　　$\rho > 1$ で仮定 [1.A]～[1.C] 及び [2.A] [2.B] が充たされているとする。

このとき，nが十分大きければ

$$P_{xy}(n) = \hat{q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p,q=1}^{n_k} \overline{\varphi_p^k(x)}\ {}^n a_{pq}^k\ \xi_q^k(y) \tag{1.41}$$

［証明］　Prop. 1.4 より，その閉包が領域 $\{s;\ \|s\| < 1\}$ に入るような原点を含む領域Dに対して，$N \geq 0$ が存在して $n \geq N$ ならば，$f_n(s) \in V(q)$ $(s \in D)$ となる。

従って，(1.39) 式より

$$\theta_i(\xi(f_n(s)) = f_n^i(s)$$

又は

$$\widehat{f_n(s)}(x) = \theta_x(\xi(f_n(s)))$$

$$= \sum_{\nu \in I} \theta_x(\nu)\ \widehat{\xi(f_n(s))}(\nu)$$

$$= \sum_{\nu \in I} \theta_x(\nu)\ \xi_\nu(f_n(s))$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{n_k} \theta_x(\nu_p^k)\ \xi_p^k(f_n(s))$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

故に Lemma 1.5-2) と(1.37)式より

$$\widehat{f_n(s)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{n_k} \overline{\varphi_p^k(x)}\ \hat{q}(x) \sum_{q=1}^{n_k} {}^n a_{pq}^k\ \xi_q^k(s)$$

$$= \hat{q}(x) \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p,q=1}^{n_k} \overline{\varphi_p^k(x)}\ {}^n a_{pq}^k\ \xi_q^k(s), \qquad (s \in D)$$

故に，正則函数の絶対収束性から Fubini の定理が使えて

$$\sum_{y\in S} P_{xy}(n)\,\hat{s}(y) = \sum_{y\in S} \hat{q}(x) \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p,q=1}^{n_k} \overline{\varphi_p^k(x)}\ {}^n a_{pq}^k\ \xi_q^k(y)\,\hat{s}(y) \qquad (s\in D)$$

を得るから，D が原点を含んでいることに注意して，$\hat{s}(\cdot)$ の係数を比較することにより(1.41)式を得る。

<u>定理 1.5</u>　$\rho > 1$ で仮定[1.A]〜[1.C] 及び [2.A][2.B] が充たされているとする。

このとき，$\|s\| < 1$ で正則な函数 $A(s)$ と，ベクトル $C = (c_1, \cdots, c_d)$ 及び定数 $0 < \alpha < \sigma$ が存在して

$$f_n^i(s) = q_i + c_i \sigma^n A(s) + O(\alpha^n);\quad n\to\infty \qquad (\|s\| < 1) \qquad (1.42)$$

又はベクトルとして，

$$f_n(s) = q + C\sigma^n A(s) + O(\alpha^n);\quad n\to\infty \qquad (\|s\| < 1) \qquad (1.42')$$

[証明]　先ず $\theta_i(w)$ $(1 \le i \le d)$ が $w\in U(0)$ で正則であることから，c_{ij} が存在して，

$$\theta_i(w) = q_i + \sum_{j=1}^{d} c_{ij}\, w_j + O(|w|^2);\quad w\to 0 \qquad (1.43)$$

但し，　$|w|^2 = |w_1|^2 + \cdots + |w_d|^2$

$$\left(c_{ij}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial w_j}\theta_i(w)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial s_j}\xi_i(q)\right)^{-1} \qquad (1.44)$$

である．$0 < r < 1$ を固定すれば，Prop. 1.4 より，n を大きくすれば $\xi(f_n(s)) \in U(0)$ $(\|s\| < r)$ となるから，(1.43)(1.39)式より

$$f_n^i(s) = \theta_i(\xi(f_n(s)))$$

$$= q_i + \sum_{j=1}^{d} c_{ij}\,\xi_j(f_n(s)) + O(|\xi(f_n(s))|^2);\quad n\to\infty \qquad (1.45)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

(1.34), (1.37) 式及び $\sup\{|\xi_q^k(s)|;\ \|s\|<r,\ 1\leq k\leq d,\ 1\leq q\leq n_k\}<\infty$ であることに注意すれば，$0<\alpha'<\sigma$ が存在して，
$\|s\|<r$ で

$$\xi_1(f_n(s)) = \sigma^n \xi_1(s)$$

$$\xi_i(f_n(s)) = O(\alpha'^n);\quad n\to\infty \quad (2\leq i\leq d) \qquad (1.46)$$

を得るから，$A(s)=\xi_1(s)$，$c_i=c_{i1}$，$\alpha=\alpha'\vee\sigma^2$ に対して (1.42) 式が正しいことが結論される。 q.e.d.

Remark. 1　(1.42) 式の $O(\alpha^n)$ は $\|s\|<1$ の中の任意の compact 集合の上で一様である。実際このことは，(1.46) 式の $O(\alpha'^n)$ が $\|s\|<r$ で一様であることから容易に得られる。

Remark. 2　証明の中で明らかなように，$A(s)=\xi_1(s)$ である。
又，

$$c_{ij} = \overline{\varphi_j(e_i)}\,q_i \qquad (1\leq i, j\leq d) \qquad (1.47)$$

従って

$$c_i = c_{i1} = \overline{\varphi_1(e_i)}\,q_i \qquad (1\leq i\leq d) \qquad (1.48)$$

である。実際 (1.38) 式より

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial s_j}\xi_j(q)\,\overline{\varphi_k(e_j)}\,q_j = \sum_{j=1}^{d}\frac{1}{q_j}\,\overline{l_{ji}^{-1}}\cdot q_j\,\overline{\varphi_k(e_j)}$$

$$= \delta_{ki}$$

となるから，(1.44) 式より (1.47) 式を得る。

Corollary　$|x|, |y|\geq 1$ のとき，x に独立な極限

$$\lim_{n\to\infty} P_x(x_n=y,\ x_m\to 0\ |\ |x_n|\geq 1,\ x_m\to 0) \equiv b(y) \qquad (1.49)$$

が存在する。更に，函数

$$B(s) = \sum_{|y|\geq 1} b(y)\,\hat{s}(y)$$

は領域 $D\left(\frac{1}{q}\right)\equiv\{s;\ |s_i|<\frac{1}{q_i}\quad(1\leq i\leq d)\}$ で正則で，かつ函数方程式

$$B\left(\frac{f(qs)}{q}\right) = \sigma B(s) - \sigma + 1 \qquad \left(s\in D\left(\frac{1}{q}\right)\right) \qquad (1.50)$$

を充たす。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

［証明］ $|x|, |y| \geqq 1$ のとき，マルコフ性により

$$P_x(x_n = y,\ x_m \to 0) = P_{xy}(n)\, P_y(x_m \to 0)$$
$$= P_{xy}(n)\, \hat{q}(y)$$

であることと，関係式

$$P_x(|x_n| \geqq 1,\ x_m \to 0) = P_x(x_m \to 0) - P_x(x_n = 0)$$
$$= \hat{q}(x) - \widehat{f_n(0)}(x)$$

より，

$$\sum_{|y|\geqq 1} P_x(x_n = y,\ x_m \to 0 \mid |x_n| \geqq 1,\ x_m \to 0)\, \hat{s}(y)$$
$$= \frac{\widehat{f_n(qs)}(x) - \widehat{f_n(0)}(x)}{\hat{q}(x) - \widehat{f_n(0)}(x)} = \frac{\widehat{f_n(qs)}(x) - \widehat{f_n(0)}(x)}{\widehat{f_n(q)}(x) - \widehat{f_n(0)}(x)} \quad \left(s \in D\left(\frac{1}{q}\right)\right)$$

しかし，一般に，$\|s\| < 1$，$\|t\| < 1$ に対して (1.51)

$$\widehat{f_n(s)}(x) - \widehat{f_n(t)}(x) = \sum_{r=1}^{d} (f_n^1(s))^{x_1} \cdots (f_n^{r-1}(s))^{x_{r-1}} \{(f_n^r(s))^{x_r} - (f_n^r(t))^{x_r}\} \times$$
$$\times (f_n^{r+1}(t))^{x_{r+1}} \cdots (f_n^d(t))^{x_d}$$

及び， $(f_n^i(s))^{x_i} \longrightarrow q_i^{x_i} \qquad (n \to \infty)$

$$(f_n^r(s))^{x_r} - (f_n^r(t))^{x_r} = (f_n^r(s) - f_n^r(t))\{(f_n^r(s))^{x_r - 1} + (f_n^r(s))^{x_r - 2} f_n^r(t) + \cdots$$
$$\cdots + f_n^r(s)(f_n^r(t))^{x_r - 2} + (f_n^r(t))^{x_r - 1}\}$$

であることに注意すれば，(1.42)(1.48)式より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widehat{f_n(s)}(x) - \widehat{f_n(t)}(x)}{\sigma^n} = \sum_{r=1}^{d} x_r \overline{\varphi_1(e_r)}\, \hat{q}(x)\, [A(s) - A(t)]$$
$$= \overline{\varphi_1(x)}\, \hat{q}(x)\, [A(s) - A(t)] \qquad (1.52)$$

かつ上の収束は，s と t が $\|s\| < 1$ の中の compact 集合上にあるとき一様である。

さて，$A(0) \neq 0$ である。実際，$A(0) = 0$ とすれば，関係式 $A(f_n(0)) = \sigma^n A(0) = 0$ より，$\|s\| < 1$ の中に集積点を持つ集合 $\{f_n(0);\ n \geqq 0\}$ で，函数

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$A(s)$ は 0 になるから，解析接続の一意性から，$A(s)\equiv 0$ となり，ξ_1 が固有函数であることに反する。

このことと，$A(q)=\xi_1(q)=0$，及び Perron-Frobenius の定理より，$\check{\varphi}_1(x)\neq 0$ $(|x|\geq 1)$ が得られること（Lemma 2.3-ii) 参照）に注意すれば，(1.51)(1.52) 式より，

$$\lim_{n\to\infty} P_x(x_n=y,\ x_m\to 0 \,|\, |x_n|\geq 1,\ x_m\to 0)\,\hat{S}(y)$$

$$=\frac{A(qs)-A(0)}{-A(0)} \qquad \left(s\in D\left(\frac{1}{q}\right)\right) \tag{1.53}$$

を得る。かつ，上の収束は s が $D(\frac{1}{q})$ の中の compact 集合の上で一様であるから，展開の係数毎に収束しているので (1.49) 式の存在が言える。(1.50)式は，関係式

$$B\left(\frac{f(qs)}{q}\right)=\frac{A(f(qs))-A(0)}{-A(0)}=\frac{\sigma A(qs)-\sigma A(0)+(\sigma-1)A(0)}{-A(0)}$$

$$=\sigma B(s)-\sigma+1$$

より明らか。 q.e.d.

§2 証　　明

ここでは §1 の中で残された証明を述べる。

先ず，Prop. 1.2 及び Prop. 1.5 を証明するために，非負正方行列の定義と，これに関連する Lemma から始める。

A と a をそれぞれ $d\times d$-正方行列と d-次元ベクトルとするとき，$A[a]$ の各成分が非負のとき，$A\geq 0$ $[a\geq 0]$ とかき，$A[a]$ は非負であるといい，同様に $A[a]$ の各成分が正のとき，$A>0$ $[a>0]$ とかき，$A[a]$ は正であるという。又 $|A|$ は A の各成分の絶対値の和とする。又，$a-b\geq 0$ のとき，$a\geq b$ とかく。

Lemma 2.1 (Perron)　正方行列 A が正ならば，A の絶対値最大の固有値 ρ は唯一つで，正で，simple である。更に，ρ は次の式で与えられる。

$$\rho=\max\{\lambda;\ 0\neq{}^{\exists}x\geq 0,\ Ax\geq\lambda x\} \tag{2.1}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

かつ，対応する左，右の固有ベクトルは正にとれる。

証明は R.Bellmann [ ] 16. 定理1，又は F.R.Gantmacher [ ] 等にあるので省略する。

Lemma 2.2 (Frobenius) 正方行列 A の固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$（重複を許す）とし，$f(x)$ を x の多項式とする。

このとき，行列 $f(A)$ の固有値は $f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_d)$（重複を許す）である。

証明は例えば佐武一郎 [ ] IV. §2. 例4. にある。

Lemma 2.3 非負正方行列 A に対して，自然数 N が存在して $A^N > 0$ とする。このとき，

i）行列 A の絶対値最大の固有値 ρ は唯一つで，正で simple で，任意の $1 \leq r \leq d$ に対して，

$$\rho \geq \min \left\{ \sum_{j=1}^{r} a_{ij} ; \quad 1 \leq i \leq r \right\} \tag{2.2}$$

をみたす。但し，a_{ij} は行列 A の (i, j)- 成分である。

ii）ρ に対応する右と左の固有ベクトル $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_d \end{pmatrix}$，$\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_d)$ は共に正にとれる。

iii）μ と ν を $\sum_{i=1}^{d} \mu_i \nu_i = 1$ とし，$A_1 = (\mu_i \nu_j)$ とする。

このとき，行列 A_2 と定数 $0 < \alpha < \rho$ が存在して，次の各式が成立つ。

$$A^n = \rho^n A_1 + A_2^n \tag{2.3}$$

$$|A_2^n| = O(\alpha^n) \quad ; \quad n \to \infty \tag{2.4}$$

但し，一般に行列 A に対して，$|A|$ は A の各成分の絶対値の和をとったものである。

［証明］ i）先ず $A \geq 0$，$A^N > 0$ ならば，

$$A^n > 0 \qquad (n \geq N) \tag{2.5}$$

であることに注意する。実際 $A^N > 0$ で $A^{N+1} = AA^N \not> 0$ ならば，行列 A の或る行ベクトルは 0 になり，従って，A^N の同じ行ベクトルは 0 になり矛盾を生ずる。

さて，行列 A の固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$（重複を許す。又 d は正方行列 A の行数）

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

とし，ρを $max\{|\alpha_i|;\ 1\leq i\leq d\}$ とする．このとき

$$\rho^n = max\{|\alpha_i|^n;\ 1\leq i\leq d\} \quad (n\geq 1) \qquad (2.6)$$

である。一方，Lemma 2.2 によれば，行列 A^n の固有値は $\alpha_1^n,\cdots,\alpha_d^n$（重複を許す）であるから，(2.5)式とLemma 2.1 より，$n\geq N$ に対して，$1\leq i_n\leq d$ が存在して，

$$\alpha_{i_n}^n > 0 \quad \alpha_{i_n}^n > max\{|\alpha_i^n|;\ 1\leq i\leq d,\ i\neq i_n\}\ (n\geq n_0) \quad (2.7)$$

となるが，この i_n は n に無関係にとれる。実際，このことは(2.7)式から不等式

$$|\alpha_{i_n}| > max\{|\alpha_i|;\ 1\leq i\leq d,\ i\neq i_n\} \qquad (2.8)$$

が導かれることから明らかである。

従って，i_n を i_0 と表わせば，(2.6)(2.7)式より，$n\geq N$ となるnに対し，$\alpha_{i_0}^n=\rho^n$ となり，従って $\alpha_{i_0}=\rho$ を得，(2.8)式より

$$\rho=\alpha_{i_0} > max\{|\alpha_i|;\ 1\leq i\leq d,\ i\neq i_0\}$$

を得る。(2.2)式は(2.1)式より，

$$\rho^N = max\{\lambda;\ A^N x\geq\lambda x,\ {}^\exists x\geq 0\}$$

$$\geq\left[max\{\lambda;\ Ax\geq\lambda x,\ {}^\exists x\geq 0\}\right]^N$$

を得，従って

$$\rho\geq max\{\lambda;\ Ax\geq\lambda x,\ {}^\exists x\geq 0\}$$

となるから，特に

$$x=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow \text{第}r\text{番目}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

に対して

$Ax\neq\rho x$ となるから，明らかである．

ii) Lemma 2.1 によれば，行列 A^N の ρ^N に対応する右固有ベクトルは正にとれるから，これを μ とする。μ' を行列Aのρに対応する右固有ベクトルとす

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

れば，これはまた，行列 A^N の ρ^N に対応する右固有ベクトルである。従って，固有値 ρ^N の simple 性より定数 $k \neq 0$ が存在して，$\mu = k\mu'$ となるから，μ も行列 A の ρ に対応する右固有ベクトルである。左固有ベクトルについても事情は全く同じである。

iii) μ と v が固有ベクトルであることと，normalization より

$$A_1 A_1 = A_1 \tag{2.9}$$

$$AA_1 = A_1 A = \rho A_1 \tag{2.10}$$

今，

$$A_2 \equiv A - \rho A_1 \quad i.e.\quad A = \rho A_1 + A_2 \tag{2.11}$$

とおけば，(2.9) ～ (2.11) 式より

$$A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0 \tag{2.12}$$

を得るから，この A_2 に対して (2.3) 式が得られる。

i) より正則行列 B が存在して，

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \equiv A' \tag{2.13}$$

ここに D は $(d-1)\times(d-1)$ 次正方行列で，固有値の絶対値は ρ より小さい。

$$\begin{cases} B^{-1}A_1 B \equiv \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & D_1 \end{pmatrix} \equiv A_1' \\ B^{-1}A_2 B \equiv \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & D_2 \end{pmatrix} \equiv A_2' \end{cases} \tag{2.14}$$

とおく。但し，$a_i\ (i=1,2)$ は定数，b_i は $(d-1)$ 次横ベクトル，c_i は $(d-1)$ 次縦ベクトル，D_i は $(d-1)\times(d-1)$ 行列である。このとき (2.9)～(2.12) に対応して，

$$A_1' A_1' = A_1' \tag{2.9$'$}$$

$$A' A_1' = A_1' A' = \rho A_1' \tag{2.10$'$}$$

$$A' = \rho A_1' + A_2' \tag{2.11$'$}$$

$$A_1' A_2' = A_2' A_1' = 0 \tag{2.12$'$}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

が言える。

(2.10)′ (2.13) (2.14) 式より

$$D\mathfrak{c}_1 = \rho\mathfrak{c}_1, \quad \mathfrak{b}_1 D = \rho\mathfrak{b}_1, \quad DD_1 = \rho D_1$$

となり，行列 D は ρ を固有値に持たないから，$\mathfrak{b}_1 = 0$，$\mathfrak{c}_1 = 0$，$D_1 = 0$ を得る。

行列 A_1' の rank は 0 ではないから，$a_1 \neq 0$。しかし (2.9)′ より $a_1^2 = a_1$ だから $a_1 = 1$ となり，結局，

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

となる。このことと (2.11)′ より $a_2 = 0$，$\mathfrak{b}_2 = 0$，$\mathfrak{c}_2 = 0$，$D_2 = D$ が得られる。

行列 D の固定値を $\alpha_2, \cdots, \alpha_d$ (重複を許す) とし，

$$\alpha' = max\{|\alpha_i|; \quad 2 \leq i \leq d\} < \rho \tag{2.16}$$

とする。佐武一郎 [ ] IV, §2, 例1, によれば

$$\begin{cases} D = S + R \\ SR = RS, \quad S^d = 0 \\ P^{-1} S P = \begin{pmatrix} \alpha_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_d \end{pmatrix} \quad (P\text{はある正則行列}) \end{cases} \tag{2.17}$$

と分解出来るから，

$$D^n = S^n + \binom{n}{1} S^{n-1} R + \cdots + \binom{n}{r} S^{n-r} R^r + \cdots + \binom{n}{d} S^{n-d} R^d, \quad (n \geq d) \tag{2.18}$$

しかし，$$P^{-1} S^{n-r} P = \begin{pmatrix} \alpha_2^{n-r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_d^{n-r} \end{pmatrix}$$

$$\text{i.e.} \quad S^{n-r} = P \begin{pmatrix} \alpha_2^{n-r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_d^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1}$$

となり，$$|S^{n-r}| = O(\alpha'^n); \quad n \to \infty \quad (1 \leq r \leq d)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

を得るから，(2.18)式より，$\alpha' < \alpha < \rho$ が存在して

$$|D^n| = O(\alpha^n)\ ;\quad n \to \infty。 \tag{2.19}$$

$$A_2^n = BA_2'B^{-1} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^n \end{pmatrix} B^{-1}$$

だったから，(2.19)式より(2.4)式を得る。 q.e.d.

<u>Prop. 1.2 の証明</u>　(1.16) 式と全く同じ方法で

$$M^n = \left(\frac{\partial}{\partial s_j} f_n^i(s) \Big|_{s \uparrow 1} \right) = E_{e_i}[x_n^j] \quad (n \geqq 1) \tag{2.20}$$

を得るから，条件 [1.A]は行列 M^N が正であることと同値である。従って Prop. の主張は Lemma 2.3-i) そのものである。 q.e.d.

<u>Prop. 1.5 の証明</u>　先ず，条件 [1.A] [1.C] 及び (1.10)式より $Q^N > 0$ を得るから，前半は Lemma 2.3-i) より明らか。$\sigma \geqq 1$ とすると，Lemma 2.3-ii) iii) より，任意の $1 \leqq i, j \leqq d$ に対して，$\varepsilon > 0$ と自然数 N_1 が存在して

$$q_{ij}^n > \varepsilon \qquad (n \geqq N_1) \tag{2.21}$$

しかし，十分小さい $\delta > 0$ を固定すれば，Prop. 1.4 より自然数 N_2 があって

$$\frac{1}{q_i}\{f_n^i(q+\delta e_j) - q_i\}\, q_j < \delta\varepsilon \qquad (n \geqq N_2)$$

となり，$f_n^i(s)$ が convex であることから，

$$q_{ij}^n = \frac{1}{q_i} \frac{\partial}{\partial s_j} f_n^i(q)\, q_j \leqq \frac{f_n^i(q+\delta e_j) - q_i}{\delta q_i} < \varepsilon \qquad (n \geqq N_2)$$

となり，(2.21)式と矛盾する。 q.e.d.

次に Lemma 1.1 の証明を述べる。

<u>Lemma 1.1 の証明</u>

1)
$$N_n = \{\varphi\ ;\ (A - \lambda I)^n \varphi = 0\}$$

$$\mathcal{M}_n = \{\xi\ ;\ (A^* - \overline{\lambda} I)^n \xi = 0\}$$

$$\mathcal{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n \quad , \qquad \mathcal{M} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

とおくとき，$\mathcal{N}$と$\mathcal{M}$ の次元が有限で等しいことを言えばよい。

$$\{0\}=\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}_1 \subseteq \cdots\cdots \subseteq \mathcal{N}_n \subseteq \mathcal{N}_{n+1} \subseteq \cdots\cdots$$
$$\{0\}=\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{M}_{n+1} \subseteq \cdots\cdots$$

で，更に自然数 n_0 と m_0 があって，$\mathcal{N}_{n_0}=\mathcal{N}_{n_0+1}=\cdots\cdots$，$\mathcal{M}_{m_0}=\mathcal{M}_{m_0+1}=\cdots$，となる（例えば溝畑茂[ ] p.190）から，$\mathcal{N}_n$ と $\mathcal{M}_n$の次元が有限で等しいことを言えば充分である。しかし，このことは

$$(A-\lambda I)^n=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}(-\lambda)^i A^{n-i}+(-\lambda)^n I$$

$$(A^*-\bar{\lambda}I)^n=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}(-\bar{\lambda})^i (A^*)^{n-i}+(-\bar{\lambda})^n I$$

$$=\Big[\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}(-\lambda)^i A^{n-i}\Big]^*+\overline{(-\lambda)^n} I$$

で，作用素 $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}(-\lambda)^i A^{n-i}$ は完全連続だから，Riesz-Schauder の理論の直接の結果である．

2)
$$\mathcal{N}_\lambda=\{\varphi\,;\,(A-\lambda I)^n\varphi=0,\ {}^\exists n\geqq 0\}$$
$$\mathcal{M}_\mu=\{\xi\,;\,(A-\bar{\mu}I)^n\xi=0,\ {}^\exists n\geqq 0\}$$

とし，$\mathcal{N}_\lambda$ の base を $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$，$\mathcal{M}_\mu$ の base を $\{\xi_1,\cdots,\xi_m\}$ とする。このとき，$A(\mathcal{N}_\lambda)\subseteq\mathcal{N}_\lambda$，$A^*(\mathcal{M}_\mu)\subseteq\mathcal{M}_\mu$ であることより

行列 $\quad B=(b_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,n}$， と $\quad C=(c_{ij})_{i,j=1,\cdots,m}$

が存在して

$$A\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}A\varphi_1\\ \vdots\\ A\varphi_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix}$$

$$A^*\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_m\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}A^*\xi_1\\ \vdots\\ A^*\xi_m\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_m\end{pmatrix}$$

となる。Jordan の標準形の理論によれば

正則行列 $\quad P=(p_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ と $\quad Q=(q_{ij})_{i,j=1,\cdots,m}$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

が存在して，

$$PBP^{-1} = \begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ * & \diagdown \end{pmatrix}, \qquad QCQ^{-1} = \begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ * & \diagdown \end{pmatrix}$$

となる。このことと，関係式

$$A \cdot P \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \sum_j P_{1j}\varphi_j \\ \vdots \\ \sum_j P_{nj}\varphi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j P_{1j}A\varphi_j \\ \vdots \\ \sum_j P_{nj}A\varphi_j \end{pmatrix}$$

$$= P \begin{pmatrix} A\varphi_1 \\ \vdots \\ A\varphi_n \end{pmatrix} = PB \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = PBP^{-1} \cdot P \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

より， $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ とするとき， $A\psi_i = \sum_{j \leq i} d_j \psi_j$

が得られるから， $\psi_i \in \mathcal{N}_\lambda$ に注意すれば

$$A\psi_i = \lambda\psi_i + \sum_{j<i} d_j \psi_j \tag{2.22}$$

が得られる。同様に $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$ とすれば

$$A^*\eta_i = \bar{\mu}\eta_i + \sum_{j<i} e_j \eta_j \tag{2.23}$$

を得る。

さて，関係式

$$(A\psi_1, \eta_1) = \lambda(\psi_1, \eta_1) = (\psi_1, A^*\eta_1) = \mu(\psi_1, \eta_1)$$

より，$(\psi_1, \eta_1) = 0$ である。今

$$(\psi_1, \eta_k) = 0 \qquad (k \leq j)$$

とすれば，(2.23) 式より

$$(A\psi_1, \eta_{j+1}) = \lambda(\psi_1, \eta_{j+1}) = (\psi_1, A^*\eta_{j+1}) = \mu(\psi_1, \eta_{j+1})$$

となるから，*Induction* により

$$(\psi_1, \eta_j) = 0 \qquad (1 \leq j \leq m) \tag{2.24}$$

を得る。次に

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$(\psi_\ell, \eta_j) = 0 \qquad (\ell \leq i,\ 1 \leq j \leq m) \tag{2.25}$$

とすれば，(2.22) 式より

$$(A\psi_{i+1}, \eta_1) = \lambda(\psi_{i+1}, \eta_1) = (\psi_{i+1}, A^*\eta_1) = \mu(\psi_{i+1}, \eta_1)$$

だから，$(\psi_{i+1}, \eta_1) = 0$ を得る。更に，(2.25) 式と

$$(\psi_{i+1}, \eta_k) = 0 \qquad (k \leq j)$$

を仮定すれば，(2.22) (2.23) 式より

$$(A\psi_{i+1}, \eta_{j+1}) = \lambda(\psi_{i+1}, \eta_{j+1}) = (\psi_{i+1}, A^*\eta_{j+1}) = \mu(\psi_{i+1}, \eta_{j+1})$$

だから，$(\psi_{i+1}, \eta_{j+1}) = 0$ となる。従って，*Induction* により (2.25) 式から，

$$(\psi_{i+1}, \eta_j) = 0 \qquad (1 \leq j \leq m)$$

を得る。このことと，(2.24) 式を合わせて，i についての *Induction* を適用すれば，

$$(\psi_i, \eta_j) = 0 \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$$

が得られる。$\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ 及び $\{\eta_1, \cdots, \eta_m\}$ はまた，$\mathcal{N}_\lambda$ と $\mathcal{M}_\mu$ の *base* であるから，結論を得る。

3) (2.22) 式を $i=1$ に適用すれば

$$\{A \text{ の狭い意味の固有値}\} = \{A \text{ の広い意味の固有値}\}$$

だから，*Riesz-Schauder* の理論そのものに過ぎない。

4) $\{\lambda_i\}$ 以外に固有値 λ があったとすれば，1) により $\bar{\lambda}$ に対応する A^* の固有函数 ξ_{*0} が存在する。しかし，2) によれば

$$(\xi, \varphi_{ij}) = 0 \qquad (1 \leq j \leq n_i,\quad i = 0, 1, 2, \cdots)$$

だから，$\{\varphi_{ij}\}$ の *complete* 性より，$\xi = 0$ を得るから，矛盾を生ずる。

次に $\{\varphi_{ij};\ 1 \leq j \leq n_i\}$ と一次独立な λ_i に対応する固有函数があったとする。$\{\varphi_{ij};\ 1 \leq j \leq n_i\}$ 自身一次独立として一般性を失わないから，そのよう

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

にとっておくと，1）により，少なくとも，(n_i+1)個の一次独立な，$\bar{\lambda}_i$ に対応する A^* の固有函数 $\{\xi_1, \cdots, \xi_{n_i+1}\}$ が存在する。

さて，このとき

$$\det\begin{pmatrix} (\xi_1, \varphi_{i1}) & \cdots\cdots & (\xi_1, \varphi_{in_i}) \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ (\xi_{n_i}, \varphi_{i1}) & \cdots\cdots & (\xi_{n_i}, \varphi_{in_i}) \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (2.26)$$

である。実際，もし，$\det(\ \ )=0$ とすれば，ベクトル $(a_1, \cdots, a_{n_i})\neq 0$ が存在して，

$$\sum_{j=1}^{n_i} a_j(\xi_j, \varphi_{ik}) = 0 \qquad (1 \leq k \leq n_i)$$

となるが，2）より

$$\left(\sum_{j=1}^{n_i} a_j\xi_j, \varphi_{\ell k}\right) = 0 \qquad (1 \leq k \leq n_\ell,\ \ell \neq i)$$

だから，$\{\varphi_{ij}\}$ の complete 性より $\sum_{j=1}^{n_i} a_j\xi_j = 0$ を得，$\{\xi_j\}$ の一次独立性に反する。

（2.26）式より，ベクトル $((\xi_{n_i+1}, \varphi_{i1}), \cdots, (\xi_{n_i+1}, \varphi_{in_i}))$ に対応して，ベクトル $(b_1, \cdots, b_{n_i}) \neq 0$ が存在して，

$$(b_1, \cdots, b_{n_i})\left((\xi_k, \varphi_{i\ell})\right) = \left((\xi_{n_i+1}, \varphi_{i1}), \cdots, (\xi_{n_i+1}, \varphi_{in_i})\right)$$

$$\therefore\ \left(\xi_{n_i+1} - \sum_{k=1}^{n_i} b_k\xi_k, \varphi_{i\ell}\right) = 0 \qquad (1 \leq \ell \leq n_i)$$

となるから，前と同様に，2）と $\{\varphi_{ij}\}$ の complete 性より

$$\xi_{n_i+1} = \sum_{k=1}^{n_i} b_k\xi_k$$

を得るから，$\{\xi_1, \cdots, \xi_{n_i+1}\}$ の一次独立性に矛盾する。　　　q.e.d.

次に Lemma 1.2 の証明を述べる。

<u>Lemma 1.2 の証明</u>　　1）Induction で行なう。$n=0$ のときは明らかだから，$n=n$ のとき正しいとする。

$$\begin{cases} \check{\varphi}_1(x) = x_1\varphi_1(e_1) + \cdots + x_d\varphi_1(e_d) \\ \check{\varphi}_d(x) = x_1\varphi_d(e_1) + \cdots + x_d\varphi_d(e_d) \end{cases} \qquad (2.27)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

で，ベクトル $\{\varphi_i ;\ 1 \leq i \leq d\}$ は一次独立だから

$$det\left(\varphi_i(e_j)\right) \neq 0$$

故に，(2.27) 式は，一意的に解けて

$$x_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} \check{\varphi}_j(x) \qquad (1 \leq i \leq d,\ x \in S) \tag{2.28}$$

今，$\varphi \in \mathcal{H}_{(n+1)}$ とすると，$\psi \in \mathcal{H}_{(n)}$ と，定数 c_ν が存在して，

$$\varphi(x) = \sum_{|\nu|=n+1} c_\nu x_1^{\nu_1} \cdots x_d^{\nu_d} + \psi(x) \qquad (x \in S)$$

従って，(2.28) 式より，定数 α_ν が存在して

$$\varphi(x) = \sum_{|\nu|=n+1} \alpha_\nu (\check{\varphi}_1)^{\nu_1} \cdots (\check{\varphi}_d)^{\nu_d}(x) + \psi(x)$$

$$= \sum_{|\nu|=n+1} \alpha_\nu \varphi^{(\nu)}(x) - \sum_{|\nu|=n+1} \alpha_\nu F_\nu(x) + \psi(x) \qquad (x \in S)$$

最後の二項は $\mathcal{H}_{(n)}$ の元であるから，*Induction* の仮定より結論を得る。

2) $\xi \in \mathcal{H}$ が

$$(\xi,\ \varphi^{(\nu)}) = 0 \qquad (\nu \in I)$$

をみたすとする。このことと，1) より任意の n に対し

$$(\xi,\ \psi) = 0 \qquad (\psi \in \mathcal{H}_{(n)}) \tag{2.29}$$

である。さて，*generating function* $\xi(s)$ は領域 $D(\sqrt{q})$ で正則で，$q \in D(\sqrt{q})$ だから，q の近傍で

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n \xi(s, q) \tag{2.30}$$

ここに
$$d^n \xi(s,q) = \sum_{|\nu|=n} \binom{n}{\nu_1 \cdots \nu_d} \frac{\partial^{|\nu|} \xi(q)}{\partial s_1^{\nu_1} \cdots \partial s_d^{\nu_d}} \cdot (s_1 - q_1)^{\nu_1} \cdots (s_d - q_d)^{\nu_d}$$

$$= \sum_{|\nu|=n} \binom{n}{\nu_1 \cdots \nu_d} \frac{1}{\hat{q}(\nu)} \sum_{x \in S} \xi(x) (x_1)_{\nu_1} \cdots (x_d)_{\nu_d} \hat{q}(x) \times$$
$$\times (s_1 - q_1)^{\nu_1} \cdots (s_d - q_d)^{\nu_d}$$

$$\binom{n}{\nu_1 \cdots \nu_d} = \frac{n!}{\nu_1! \cdots \nu_d!}$$

$$(x)_r = x(x-1) \cdots (x-r+1)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

となる。$\psi_\nu(x)=(x_1)_{\nu_1}\cdots(x_d)_{\nu_d}\in\mathcal{H}_{(|\nu|)}$ とおけば，(2.29) 式より

$$\sum_{x\in S}\xi(x)(x_1)_{\nu_1}\cdots(x_d)_{\nu_d}\hat{q}(x)=(\xi,\psi_\nu)=0$$

従って，(2.30)式より，q のある近傍で $\xi(s)\equiv 0$ となるが，$\xi(s)$ は領域 $D(\sqrt{q})$ で正則だから，解析接続の一意性（例えば，酒井[ ]定理2.1）により

$$\xi(s)\equiv 0 \qquad (s\in D(\sqrt{q}))$$

を得る。領域 $D(\sqrt{q})$ は原点を含むから，これより $\xi=0$ となる。 q.e.d.

次に Lemma 1.3 を証明するが，準備として二三の Lemma を述べる。

<u>Lemma 2.4</u>　函数 $\psi^{(i)}(z_1,\cdots;z_d)$ $(1\leq i\leq d)$ の微分可能性が充分保障されているとき

$$\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_d^{\nu_d}}\psi^{(1)}\cdots\psi^{(d)}$$

$$=\sum_{(r_{11},\cdots,r_{1d})}^{(\nu_1)}\cdots\sum_{(r_{d1},\cdots,r_{dd})}^{(\nu_d)}\binom{\nu_1}{r_{11},\cdots,r_{1d}}\cdots\binom{\nu_d}{r_{d1},\cdots,r_{dd}}[\psi^{(1)}]_{r_{11},\cdots,r_{d1}}\cdots[\psi^{(d)}]_{r_{1d},\cdots,r_{dd}} \tag{2.31}$$

である。但し $\sum\limits_{(r_{11},\cdots,r_{1d})}^{(m)}$ は $r_1+\cdots+r_d=m$ をみたす非負整数の組 $(r_1,\cdots,r_d)$ 全体についての和を表わし，$[\psi]_{r_1,\cdots,r_d}$ は $\dfrac{\partial^{r_1+\cdots+r_d}}{\partial z_1^{r_1}\cdots\partial z_d^{r_d}}\psi$ のことである。

［証明］　$|\nu|=0$ のとき明らか。

$\nu=\nu$ のとき正しいとして，$\nu'=(\nu_1+1,\nu_2,\cdots,\nu_d)$ のとき正しいことを言えば充分である。

(2.31)式を z_1 で偏微分して

$$\frac{\partial^{|\nu'|}}{\partial z^{\nu_1+1}\partial z_2^{\nu_2}\cdots\partial z_d^{\nu_d}}\psi^{(1)}\cdots\psi^{(d)}$$

$$=\sum_{(r_{11},\cdots,r_{1d})}^{(\nu_1)}\cdots\sum_{(r_{d1},\cdots,r_{dd})}^{(\nu_d)}\sum_{i=1}^{d}\binom{\nu_1}{r_{11},\cdots,r_{1d}}[\psi^{(i)}]_{r_{1i}+1,r_{2i},\cdots,r_{di}}\cdot\Pi_i$$

$$=\sum_{(r_{21},\cdots,r_{2d})}^{(\nu_2)}\cdots\sum_{(r_{d1},\cdots,r_{dd})}^{(\nu_d)}\sum_{i=1}^{d}\sum_{(r_{11},\cdots,r_{1d})}^{(\nu_1)}\binom{\nu_1}{r_{11},\cdots,r_{1d}}[\psi^{(i)}]_{r_{1i}+1,\cdots,r_{di}}\cdot\Pi_i$$

ここに

$$\Pi_i=\prod_{j\neq i}[\psi^{(j)}]_{r_{1j},\cdots,r_{dj}}\binom{\nu_2}{r_{21},\cdots,r_{2d}}\cdots\binom{\nu_d}{r_{d1},\cdots,r_{dd}}$$

を得る。$r_{1i}+1=r_{1i}$ とおき，$\binom{n}{r_1,\cdots,r_d}$ を，$r_1,\cdots,r_d$ の中の少なくとも一

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

つが負になったときは0と解釈すれば，

$$\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial z_1^{\nu_1+1}\partial z_2^{\nu_2}\cdots\partial z_d^{\nu_d}}\ \psi^{(1)}\cdots\ \psi^{(d)}$$

$$=\sum_{(r_{21},\cdots,r_{2d})}^{(\nu_2)}\cdots\sum_{(r_{d1},\cdots,r_{dd})}^{(\nu_d)}\sum_{i=1}^{d}\sum_{(r_{11},\cdots,r_{1d})}^{(\nu_1+1)}\binom{\nu_1}{r_{11},\cdots,r_{1i}-1,\cdots,r_{1d}}[\psi^{(i)}]_{r_{1i},\cdots,r_{di}}\cdot\Pi_i$$

$$=\sum_{(r_{11},\cdots,r_{1d})}^{(\nu_1+1)}\sum_{(r_{21},\cdots,r_{2d})}^{(\nu_2)}\cdots\sum_{(r_{d1},\cdots,r_{dd})}^{(\nu_d)}\sum_{i=1}^{d}\binom{\nu_1}{r_{11},\cdots,r_{1i-1},\cdots,r_{1d}}\cdot\Pi$$

$$=\sum_{(r_{11},\cdots,r_{1d})}^{(\nu_1+1)}\sum_{(r_{21},\cdots,r_{2d})}^{(\nu_2)}\cdots\sum_{(r_{d1},\cdots,r_{dd})}^{(\nu_d)}\binom{\nu_1+1}{r_{11},\cdots,r_{1d}}\cdot\Pi$$

ここに

$$\Pi=\prod_{j=1}^{d}[\psi^{(j)}]_{r_{1j},\cdots,r_{dj}}\cdot\binom{\nu_2}{r_{21},\cdots,r_{2d}}\cdots\binom{\nu_d}{r_{d1},\cdots,r_{dd}}$$

となる。 q.e.d.

<u>Lemma 2.5</u>　$\psi(z_1,\cdots,z_d)$ が充分微分可能で，$\psi(1,\cdots,1)=\psi(1)=1$ ならば，$r=(r_1,\cdots,r_d)\in T$ に対して，

$$\frac{\partial^{|r|}}{\partial z_1^{r_1}\cdots\partial z_d^{r_d}}\ \psi^n(z)\Big|_{z=1}=n^{|r|}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\psi(1)\right)^{r_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial z_d}\psi(1)\right)^{r_d}+F(n)$$

但し，$F(n)$ は n に関する $(|r|-1)$ 次以下の多項式，

である。

[証明]　$r\geqq 0$ に対し，

$$\frac{\partial^r}{\partial z_i^r}\psi^n(z)=(n)_r\,\psi^{n-r}(z)\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\psi(z)\right)^r$$

$$+\sum_{\substack{p_1<r\\ p_1+2p_2+\cdots+rp_r=r}}a^i_{p_1,p_2,\cdots,p_r}(n)_{p_1}\psi^{n-p_1}_{(z)}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\psi(z)\right)^{p_1}\cdots\left(\frac{\partial^r}{\partial z_i^r}\psi(z)\right)^{p_r}$$

であることに注意すれば，容易にわかる。 q.e.d.

<u>Lemma 2.6</u>　$1\leqq i\leqq d$ に対して，$\check{\varphi}_i\in\mathcal{H}$ は作用素 A の λ_i に対応する固有函数である。

[証明]　(1.7) (1.20) より，一般に $\check{\varphi}\in\mathcal{H}$ に対して，

$$A_n\lambda^{\check{\varphi}}\cdot(x)=(A_n\lambda^{\check{\varphi}}\cdot(e_1))^{x_1}\cdots\ (A_n\lambda^{\check{\varphi}}(e_d))^{x_d}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

が領域 $\{\lambda ; |\lambda^{\varphi(e_i)} q_i| < 1\}$ で成立ち，かつ，正則である。1 がこの領域に入っていることから，$\lambda = 1$ において項別微分，すなわち作用素 A_n と微分の交換が可能であること，及び $A_n 1 = 1$ であることに注意すれば

$$A_n \check{\varphi}\cdot(x) = \frac{d}{d\lambda} A_n \lambda^{\check{\varphi}}(x)\Big|_{\lambda=1} = x_1 A_n \check{\varphi}(e_1) + \cdots + x_d A_n \check{\varphi}(e_d) \tag{2.32}$$

更に

$$A_n \check{\varphi}(e_i) = \frac{1}{q_i} \sum_{y \in S} P_{e_i y}(n)\,(y_1 \varphi(e_1) + \cdots + y_d \varphi(e_d))\,\hat{q}(y)$$

$$= q_{i1}^{n}\, \varphi(e_1) + \cdots + q_{id}^{n}\, \varphi(e_d)$$

であるから，

$$A_n \check{\varphi}\cdot(x) = (x_1, \cdots, x_d)\, Q_n \begin{pmatrix} \varphi(e_1) \\ \vdots \\ \varphi(e_d) \end{pmatrix}$$

$A_n = A^n$，$Q_n = Q^n$ であることに注意すれば，これより

$$(A - \lambda_i I)^n \check{\varphi}_i(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\lambda_i)^k A_{n-k} \check{\varphi}_i(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\lambda_i)^k \ (x_1, \cdots, x_d)\, Q_{n-k} \begin{pmatrix} \varphi_i(e_1) \\ \vdots \\ \varphi_i(e_d) \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, \cdots, x_d) \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\lambda_i)^k Q^{n-k}\Big] \begin{pmatrix} \varphi_i(e_1) \\ \vdots \\ \varphi_i(e_d) \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, \cdots, x_d)\,(Q - \lambda_i \cdot I)^n \begin{pmatrix} \varphi_i(e_1) \\ \varphi_i(e_d) \end{pmatrix}$$

となるから，例えば $n \geqq d$ とすれば $(A - \lambda_i I)^n \check{\varphi}_i(x) \equiv 0$ となる。 q.e.d.

<u>Lemma 2.7</u>　　$n \geqq 1$ と $\nu \in T$ に対して，$F_{\nu,n} \in \mathcal{H}_{(|\nu|-1)}$ が存在して，

$$A_n \varphi_\nu = (A_n \check{\varphi}_1)^{\nu_1} \cdot \cdots \cdot (A_n \check{\varphi}_d)^{\nu_d} + F_{\nu,n} \tag{2.33}$$

が成立つ。

［証明］　$|\nu| = 0$ のときは，$A_n 1 = 1$ より明らかである。

$|\mu| < |\nu|$ なる $\mu \in T$ に対して正しいとする。このとき，Lemma 1.2-1) より，$A_n(\mathcal{H}_{(|\nu|-1)}) \subseteq \mathcal{H}_{(|\nu|-1)}$ である。

(1.7) (1.20) 式に注意すれば

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$A_n z_1^{\check{\varphi}_1}\cdots z_d^{\check{\varphi}_d}(x) = (A_n z_1^{\check{\varphi}_1}\cdots z_d^{\check{\varphi}_d}(e_i))^{x_1}\cdots(A_n z_1^{\check{\varphi}_1}\cdots z_d^{\check{\varphi}_d}(e_d))^{x_d}$$

が領域 $\{z=(z_1,\cdots,z_d);\ |z_i^{\varphi_1(e_i)+\cdots+\varphi_d(e_i)}q_i|<1,\ \ 1\leq i\leq d\}$ で成り立ちかつ正則である。Lemma 2.6 の証明の時と同じ理由で，$z=1$ において作用素 A_n と，微分が交換可能であることと，$A_n 1=1$ に注意して，Lemma 2.4 と Lemma 2.5 を適用すれば，

$$A_n(\varphi_\nu+F')(x) = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_d^{\nu_d}} A_n z_1^{\check{\varphi}_1}\cdots z_d^{\check{\varphi}_d}\cdot(x)\Big|_{z=1}$$

$$=\sum_{(\gamma_{11},\cdots,\gamma_{1d})}^{(\nu_1)}\cdots\sum_{(\gamma_{d1},\cdots,\gamma_{dd})}^{(\nu_d)}\binom{\nu_1}{\gamma_{11},\cdots,\gamma_{1d}}\cdots\binom{\nu_d}{\gamma_{d1},\cdots,\gamma_{dd}}$$

$$\times\left[(A_n z_1^{\check{\varphi}_1}\cdots z_d^{\check{\varphi}_d}(e_1))^{x_1}\right]_{\gamma_{11},\cdots,\gamma_{d1}}\cdots\left[(A_n z_1^{\check{\varphi}_1}\cdots z_d^{\check{\varphi}_d}(e_d))^{x_d}\right]_{\gamma_{1d},\cdots,\gamma_d}$$

$$=\sum_{(\gamma_{11},\cdots,\gamma_{1d})}^{(\nu_1)}\cdots\sum_{(\gamma_{d1},\cdots,\gamma_{dd})}^{(\nu_d)}\binom{\nu_1}{\gamma_{11},\cdots,\gamma_{1d}}\cdots\binom{\nu_d}{\gamma_{d1},\cdots,\gamma_{dd}}$$

$$\times\left[x_1^{\gamma_{11}+\cdots+\gamma_{d1}}(A_n\check{\varphi}_1(e_1))^{\gamma_{11}}\cdots(A_n\check{\varphi}_d(e_1))^{\gamma_{d1}}+F_1(x_1)\right]\times\cdots$$

$$\cdots\times\left[x_d^{\gamma_{1d}+\cdots+\gamma_{dd}}(A_n\check{\varphi}_1(e_d))^{\gamma_{1d}}\cdots(A_n\check{\varphi}_d(e_d))^{\gamma_{dd}}+F_d(x_d)\right]$$

但し，$F_i(x_i)$ は x_i に関する $(\gamma_{1i}+\cdots+\gamma_{di}-1)$ 次以下の多項式 $F'\in\mathcal{H}_{(|\nu|-1)}$ となるから，

$$A_n(\varphi_\nu+F')(x)=\sum_{(\gamma_{11},\cdots,\gamma_{1d})}^{(\nu_1)}\cdots\sum_{(\gamma_{d1},\cdots,\gamma_{dd})}^{(\nu_d)}\binom{\nu_1}{\gamma_{11},\cdots,\gamma_{1d}}\cdots\binom{\nu_d}{\gamma_{d1},\cdots,\gamma_{dd}}\times$$

$$\times\left[x_1^{\gamma_{11}}(A_n\check{\varphi}_1(e_1))^{\gamma_{11}}\cdots x_d^{\gamma_{1d}}(A_n\check{\varphi}_1(e_d))^{\gamma_{1d}}\right]\times\cdots$$

$$\cdots\times\left[x_1^{\gamma_{d1}}(A_n\check{\varphi}_d(e_1))^{\gamma_{d1}}\cdots x_d^{\gamma_{dd}}(A_n\check{\varphi}_d(e_d))^{\gamma_{dd}}\right]+F''(x)$$

$$=\left[x_1A_n\check{\varphi}_1(e_1)+\cdots+x_dA_n\check{\varphi}_1(e_d)\right]^{\nu_1}\times\cdots$$

$$\cdots\times\left[x_1A_n\check{\varphi}_d(e_1)+\cdots+x_dA_n\check{\varphi}_d(e_d)\right]^{\nu_d}+F''(x)$$

但し，$F''\in\mathcal{H}_{(|\nu|-1)}$

となるから，Induction の仮定と(2.32)式に注意すれば，これより(2.33)式

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

を得る。 q.e.d.

Remark 1. Lemma 1.2-1)に注意すれば明らかに $A_n(\mathcal{H}_{(m)}) \subseteq \mathcal{H}_{(m)}$ $(n, m = 0, 1, 2, \cdots)$ である。

Remark 2. 任意の $\check{\psi}_1, \cdots, \check{\psi}_m \in \mathcal{H}_1$ に対して，$G \in \mathcal{H}_{(m-1)}$ があって

$$A_n \check{\psi}_1, \cdots, \check{\psi}_m = (A_n \check{\psi}_1) \cdots (A_n \check{\psi}_m) + G$$

である。

[証明] $\{\check{\varphi}_j ; 1 \leq j \leq d\}$ の一次結合が $\mathcal{H}_1$ を張っていることから

$$\check{\psi}_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} \check{\varphi}_j \qquad (1 \leq i \leq m)$$

これより，

$$\check{\psi}_1 \cdots \check{\psi}_m = \sum_{j_1, \cdots, j_m = 0}^{d} a_{1j_1} \check{\varphi}_{j_1} \cdots a_{mj_m} \check{\varphi}_{j_m}$$

しかし，A_n は線型だから，(2.32)式より，$G \in \mathcal{H}_{(m-1)}$ があって

$$A_n \check{\psi}_1 \cdots \check{\psi}_m = \sum_{j_1, \cdots, j_m = 0}^{d} a_{1j_1} \cdots a_{mj_m} (A_n \check{\varphi}_{j_1}) \cdots (A_n \check{\varphi}_{j_m}) + G$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{d} a_{ij} A_n \check{\varphi}_j \right) + G$$

$$= \prod_{i=1}^{m} A_n \left(\sum_{j=1}^{d} a_{ij} \check{\varphi}_j \right) + G$$

$$= \prod_{i=1}^{m} A_n \psi_i + G$$

q.e.d.

Lemma 2.8 定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ と $\check{\psi}_1, \cdots, \check{\psi}_m \in \mathcal{H}_1$ に対し

$$(A - \alpha_1 \cdots \alpha_m I)^n \check{\psi}_1 \cdots \check{\psi}_m$$

$$= \sum_{(r_1, \cdots, r_m)}^{(n)} \binom{n}{r_1, \cdots, r_m} F_1(r, \alpha, \psi) \cdots F_m(r, \alpha, \psi) + G \qquad (2.34)$$

但し，$r = (r_1, \cdots, r_m)$，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，$\psi = (\check{\psi}_1, \cdots, \check{\psi}_m)$ と表わし，G は $\mathcal{H}_{(m-1)}$ の元で

$$F_i(r, \alpha, \psi) = A^{r_1 + \cdots + r_{i-1}} (A - \alpha_i I)^{r_i} \check{\psi}_i \, \alpha_i^{r_{i+1} + \cdots + r_m} \qquad (2.35)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

である。

［証明］ 1) $n=1$ のとき,

Lemma 2.7 の Remark. 2 に注意すると

$$(A-\alpha_1\cdots\alpha_m I)\,\check{\psi}_1\cdots\check{\psi}_m$$

$$=(A\check{\psi}_1)\cdots(A\check{\psi}_m)-\alpha_1\cdots\alpha_m\check{\psi}_1\cdots\check{\psi}_m+G$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\alpha_1\check{\psi}_1\cdots\alpha_{j-1}\check{\psi}_{j-1}\{(A-\alpha_j I)\check{\psi}_j\}(A\check{\psi}_{j+1})\cdots(A\check{\psi}_m)+G$$

しかし,

$$F_i((0,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{番目}}}{1},\cdots,0),\alpha,\psi)=\begin{cases}\alpha_i\check{\psi}_i & (i<j)\\ (A-\alpha_j)\check{\psi}_j & (i=j)\\ A\check{\psi}_i & (i>j)\end{cases}$$

だから,このときは (2.34)式は正しい。

2) $n=n$ まで正しいとする。

このとき

$$(A-\alpha_1\cdots\alpha_m I)^{n+1}\,\check{\psi}_1\cdots\check{\psi}_m$$

$$=(A-\alpha_1,\cdots,\alpha_m I)^{n}\Big\{\sum_{j=1}^{m}\alpha_1\check{\psi}_1,\cdots,\alpha_{j-1}\check{\psi}_{j-1}[(A-\alpha_j I)\check{\psi}_j](A\check{\psi}_{j+1})\cdots(A\check{\psi}_m)$$

$$+G'\Big\}\qquad(2.36)$$

である。$(A-\alpha_j I)\check{\psi}_j$, $A\check{\psi}_k\in\mathcal{H}_1$ であることと,

$$F_i(r,\alpha,(\alpha_1\check{\psi}_1,\cdots,\alpha_{j-1}\check{\psi}_{j-1},(A-\alpha_j I)\check{\psi}_j,A\check{\psi}_{j+1},\cdots,A\check{\psi}_m))$$

$$=\begin{cases}A^{r_1+\cdots+r_{i-1}}(A-\alpha_i I)^{r_i}\check{\psi}_i\,\alpha_i^{r_{i+1}+\cdots+r_m+1} & (i<j)\\[2mm] A^{r_1+\cdots+r_{j-1}}(A-\alpha_j I)^{r_j+1}\check{\psi}_j\,\alpha_j^{r_{j+1}+\cdots+r_m} & (i=j)\\[2mm] A^{r_1+\cdots+r_{i-1}+1}(A-\alpha_i I)^{r_i}\check{\psi}_i\,\alpha_i^{r_{i+1}+\cdots+r_m} & (i>j)\end{cases}$$

$$=F_i((r_1,\cdots,r_j+1,\cdots,r_m),\alpha,\psi)$$

であることに注意すると,(2.36)式と,Induction の仮定より

$$(A-\alpha_1,\cdots,\alpha_m I)^{n+1}\check{\psi}_1,\cdots,\check{\psi}_m$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{(r_1,\cdots,r_m)}^{(n)}\binom{n}{r_1,\cdots,r_m}\prod_{i=1}^{m}F_i((r_1,\cdots,r_j+1,\cdots,r_m),\alpha,\psi)+G$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{(r_1,\cdots,r_m)}^{(n+1)} \binom{n}{r_1,\cdots,r_j-1,\cdots,r_m} \prod_{i=1}^{m} F_i(r,\alpha,\psi) + G$$

$$= \sum_{(r_1,\cdots,r_m)}^{(n+1)} \sum_{j=1}^{m} \binom{n}{r_1,\cdots,r_j-1,\cdots,r_m} \prod_{i=1}^{m} F_i(r,\alpha,\psi) + G$$

$$= \sum_{(r_1,\cdots,r_m)}^{(n+1)} \binom{n+1}{r_1,\cdots,r_m} \prod_{i=1}^{m} F_i(r,\alpha,\psi) + G$$

但し，上の変形で $\binom{n}{r_1,\cdots,r_m}$ は $r_1,\cdots,r_m$ のうち少なくとも一つが負になったときは 0 と解釈するものとした。また，G は $\mathcal{H}_{(m-1)}$ の元である。

q.e.d

Remark　nが十分大きければ

$$(A-\hat{\lambda}(\nu)I)^n \varphi_\nu \in \mathcal{H}_{(|\nu|-1)}$$

である。

［証明］　Lemma 2.6 とその証明によれば，$n \geqq d$のとき

$$(A-\lambda_i I)^n \check{\varphi}_i = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq d) \tag{2.37}$$

$n \geqq |\nu|\cdot d$, $m=|\nu|$, $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=(\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{\nu_1},\cdots,\underbrace{\lambda_d,\cdots,\lambda_d}_{\nu_d})$

$(\check{\psi}_1,\cdots,\check{\psi}_m)=(\underbrace{\check{\varphi}_1,\cdots,\check{\varphi}_1}_{\nu_1},\cdots,\underbrace{\check{\varphi}_d,\cdots,\check{\varphi}_d}_{\nu_d})$ として Lemma 2.8 を適用する。

このとき $r_1+\cdots+r_m=n$ となる $r_1,\cdots,r_m$ の中には，少なくとも一つは d より大きい数があるから，(2.37) 式より (2.35) 式は 0 になる。従って，(2.34) 式より求める結論を得る。

q.e.d.

以上の準備の下で，Lemma 1.3 の証明を述べる。

Lemma 1.3 の証明　Induction で行なう。

1) $|\nu| \leqq 1$ のとき；　Lemma 2.6 及び $A1=1$ より明らか。

2) $|\mu|<|\nu|$ なる $\mu \in T$ に対して正しいとする；

集合 $\{\hat{\lambda}(\mu);\ |\mu|<|\nu|\} \cup \{\hat{\lambda}(\nu)\}$ の中から重複しているものを除いた集合に番号をつけて，$\alpha_0=\hat{\lambda}(\nu)$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ とし，$\{\psi^{(\mu)};\ \hat{\lambda}(\mu)=\alpha_k,\ |\mu|<|\nu|\}$ に番号をつけて，$\psi_1^k,\cdots,\psi_{n_k}^k$ $(0 \leqq k \leqq r)$ とする。函数の system

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$\{\psi_p^k;\ 0\leq k\leq r,\ 1\leq p\leq n_k\}$ は空间 $\mathcal{H}_{(|\nu|-1)}$ を張り，$\mathcal{H}(\alpha_k)=\{\varphi;(A-\alpha_k I)^n\varphi=0\ \ \exists n\geq 1,\ \ \varphi\in\mathcal{H}_{|\nu|-1}\}$ とすれば $\{\psi_p^k;\ 1\leq p\leq n_k\}$ は $\mathcal{H}(\alpha_k)$ を張っている。また，$A\psi_p^k\in\mathcal{H}(\alpha_k)$ で，従って

$$A\psi_p^k=\sum_{q=1}^{n_k}\alpha_{pq}^k\,\psi_q^k \tag{2.38}$$

と書き表わせる。以上のことは $\mathcal{H}_{(|\nu|-1)}$ が有限次元であることから出る。

Lemma 2.8の *Remark* より，自然数 n' を十分大きくとるとき，定数の組 $\{b_p'^k;\ 0\leq k\leq r,\ 1\leq p\leq n_k\}$ がとれて，

$$(A-\alpha_0 I)^{n'}\varphi_\nu=\sum_{p=1}^{n_0}b_p'^0\,\psi_p^0+\sum_{k=1}^{r}\sum_{p=1}^{n_k}b_p'^k\,\psi_p^k \tag{2.39}$$

となる。自然数 n を十分大きくとり，作用素 $(A-\alpha_0 I)^{n-n'}$ を (2.39)式に施せば，右辺の第一項は消え，従って (2.38)式に注意すれば

$$(A-\alpha_0 I)^n\varphi_\nu=\sum_{k=1}^{r}\sum_{p=1}^{n_k}b_p^k\,\psi_p^k \tag{2.30}$$

を得る。

さて，(2.38)式の $\{a_{pq}^k\}$ に対し，行列 $A_{(k)}=(a_{pq}^k)_{p,q=1,\cdots,n_k}$ を定義する。このとき，$det[A_{(k)}-\alpha_0 I]\neq 0$ $(1\leq k\leq r)$ である。実際，もし，$det[A_{(k)}-\alpha_0 I]=0$ とすれば，ベクトル $(c_1,\cdots,c_{n_k})\neq 0$ が存在して，

$$(c_1,\cdots,c_{n_k})(A_{(k)}-\alpha_0 I)=0$$

故に，$\psi=\sum_{p=1}^{n_k}c_p\,\psi_p^k\neq 0$ とおけば

$$(A-\alpha_0 I)\psi=\sum_{p=1}^{n_k}c_p(A-\alpha_0 I)\psi_p^k$$

$$=(c_1,\cdots,c_{n_k})(A_{(k)}-\alpha_0 I)\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \vdots\\ \psi_{n_k}^k\end{pmatrix}=0$$

となるが，これは $\psi\in\mathcal{H}(\alpha_k)$ $(1\leq k\leq r)$ と矛盾する。

このことより，任意の $n\geq 1$ に対して，$det[A_{(k)}-\alpha_0 I]^n\neq 0$. 従って，(2.30)式の n と，$\{b_p^k\}$ に対して，$(\theta_1^k,\cdots,\theta_{n_k}^k)$ があって，

$$(b_1^k,\cdots,b_{n_k}^k)+(\theta_1^k,\cdots,\theta_{n_k}^k)(A_{(k)}-\alpha_0 I)^n=0$$

i.e.

$$(b_1^k,\cdots,b_{n_k}^k)\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \vdots\\ \psi_{n_k}^k\end{pmatrix}+(\theta_1^k,\cdots,\theta_{n_k}^k)(A_{(k)}-\alpha_0 I)^n\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \vdots\\ \psi_{n_k}^k\end{pmatrix}=0$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

となる。

故に $\quad \psi^{(\nu)}=\varphi_\nu+\sum_{k=1}^{r}\sum_{p=1}^{n_k}\theta_p^k\psi_p^k \quad$ とすれば

$$
\begin{aligned}
(A-\alpha_0 I)^n\psi^{(\nu)} &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{p=1}^{n_k} b_p^k\psi_p^k+\sum_{k=1}^{r}(\theta_1^k,\cdots,\theta_{n_k}^k)(A-\alpha_0 I)^n\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \vdots\\ \psi_{n_k}^k\end{pmatrix}\\
&=\sum_{k=1}^{r}\left[(b_1^k,\cdots,b_{n_k}^k)+(\theta_1^k,\cdots,\theta_{n_k}^k)(A_{(k)}-\alpha_0 I)^n\right]\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \vdots\\ \psi_{n_k}^k\end{pmatrix}\\
&=0 \qquad\qquad q.e.d.
\end{aligned}
$$

<u>*Remark.*</u> 上の証明から明らかなように *Lemma* 1.3 は [1.A]~[1.C] のみの仮定の下で正しい。

次に，*Lemma* 1.4 の証明を述べる。

<u>*Lemma* 1.4 の証明</u> 1) ξ_i の作り方より，自然数 n があって $(A^*-\bar\lambda_i I)^n\xi_i=0$ となるから

$$(-\bar\lambda_i)^n\xi_i=-\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}(-\bar\lambda_i)^{n-p}A^{*p}\xi_i$$

両辺の *generating functions* をとって

$$(-\bar\lambda_i)^n\xi_i(s)=-\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}(-\bar\lambda_i)^{n-p}(A^{*p}\xi_i)(s) \tag{2.31}$$

条件 [2.A] と，$D(\sqrt{q})\subset D(\sqrt{q}+\varepsilon)$ より，$f_p(s)\in D(\sqrt{q})$ $(s\in D(\sqrt{q}+\varepsilon),\ p\geqq 1)$ となるから，(1.22) 式より (2.31)式の右辺は領域 $D(\sqrt{q}+\varepsilon)$ で，同じ領域で正則な函数 $-\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}(-\bar\lambda_i)^{n-p}\xi_i(f_p(s))$ に等しいから，$\xi_i(s)$ もそうである。従って $\xi_i(s)$ は $D(\sqrt{q}+\varepsilon)$ で正則である。

$\xi(s)$ と $\eta(s)$ が絶対収束するような s に対しては

$$(\xi*\eta)(s)=\xi(s)\eta(s)$$

が成立つことに注意すれば

$$\xi_\nu(s)=(\xi_1(s))^{\nu_1}\cdots(\xi_d(s))^{\nu_d} \qquad (s\in D(\sqrt{q}+\varepsilon))$$

従って $\xi(s)$ は $D(\sqrt{q}+\varepsilon)$ で正則になるから，(1.19) 式より $\xi_\nu\in\mathcal{H}$ を得る。

2) $\eta_{i_1}*\eta_{i_2}*\cdots*\eta_{i_k}\in\mathcal{H}$ $(\{i_1,\cdots,i_k\}\subset\{1,2,\cdots,m\})$ をみたす $\{\eta_i$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$\in \mathcal{H}$; $1 \leqq i \leqq m\}$ に対して

$$A_n^*(\eta_1 * \cdots * \eta_m) = (A_n^* \eta_1) * \cdots * (A_n^* \eta_m) \quad (n \geqq 1)$$

が得られることに注意すれば，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in C$ に対して

$$(A^* - \alpha_1 \cdots \alpha_m I)^n \eta_1 * \cdots * \eta_m$$

$$= \sum_{(r_1, \cdots, r_m)}^{(n)} \binom{n}{r_1, \cdots, r_m} F_1^*(r, \alpha, \eta) * \cdots * F_m^*(r, \alpha, \eta)$$

但し

$$F_i^*(r, \alpha, \eta) = A^{*\, r_1 + \cdots + r_{i-1}} (A^* - \alpha_i I)^{r_i} \eta_i \alpha_i^{r_{i+1} + \cdots + r_m}$$

であることが Lemma 2.8 と同様に得られるから，その Remark と同様にして $(A^* - \overline{\lambda(\nu)})^n \xi_\nu = 0$ を得る。

3) a) $|\mu| < |\nu|$ のとき； Induction を用いる。

i) $|\nu| = 1$ のとき； $(\xi_i, 1) = 0$ $(1 \leqq i \leqq d)$ より明らか.

ii) $\nu \in T$ を fix したとき

$$(\xi_\nu, \varphi_\mu) = 0 \qquad (|\mu| < |\nu|) \tag{2.32}$$

を仮定して

$$(\xi_\nu * \xi_1, \varphi_\mu) = 0 \qquad (|\mu| \leqq |\nu|) \tag{2.33}$$

を言えばよい。

$$\varphi_\mu(x+z) = (\check{\varphi}_1(x+z))^{\mu_1} \cdots (\check{\varphi}_d(x+d))^{\mu_d}$$

$$= (\check{\varphi}_1(x) + \check{\varphi}_1(z))^{\mu_1} \cdots (\check{\varphi}_d(x) + \check{\varphi}_d(z))^{\mu_d}$$

$$= \left[\sum_{r_1=0}^{\mu_1} \binom{\mu_1}{r_1} (\check{\varphi}_1(x))^{r_1} (\check{\varphi}_1(z))^{\mu_1 - r_1}\right] \times \cdots$$

$$\cdots \times \left[\sum_{r=0}^{\mu_d} \binom{\mu_d}{r_d} (\check{\varphi}_d(x))^{r_d} (\check{\varphi}_d(z))^{\mu_d - r_d}\right]$$

$$= \sum_{r_1=0}^{\mu_1} \cdots \sum_{r_d=0}^{\mu_d} \binom{\mu_1}{r_1} \cdots \binom{\mu_d}{r_d} \varphi_r(x) \varphi_{\mu - r}(z)$$

但し，$r = (r_1, \cdots, r_d) \in T$，$\mu - r = (\mu_1 - r_1, \cdots, \mu_d - r_d) \in T$

に注意すると

$$(\xi_\nu * \xi_1, \varphi_\mu) = \sum_{z \in S} \sum_{x+y=z} \xi_\nu(x) \xi_1(y) \overline{\varphi_\mu(z)} \hat{q}(z)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$=\sum_{x\in S}\sum_{y\in S}\xi_\nu(x)\xi_1(y)\overline{\varphi_\mu(x+y)}\hat{q}(x)\hat{q}(y)$$

$$=\sum_{r_1=0}^{\mu_1}\cdots\sum_{r_d=0}^{\mu_d}\binom{\mu_1}{r_1}\cdots\binom{\mu_d}{r_d}\sum_{x\in S}\sum_{y\in S}\xi_\nu(x)\xi_1(y)\overline{\varphi_r(x)\varphi_{\mu-r}(y)}\hat{q}(x)\hat{q}(y)$$

$$=\sum_{r_1=0}^{\mu_1}\cdots\sum_{r_d=0}^{\mu_d}\binom{\mu_1}{r_1}\cdots\binom{\mu_d}{r_d}(\xi_\nu,\varphi_r)(\xi_1,\varphi_{\mu-r}) \qquad (2.34)$$

だから，先ず $|\mu|<|\nu|$ ならば，(2.32) 式より $(\xi_\nu,\varphi_r)=0$ となるから，$(\xi_\nu*\xi_1,\varphi_\mu)=0$ を得る。

$|\mu|=|\nu|$ のときも，$r\neq\mu$ ならば $|r|<|\mu|=|\nu|$ だから，(2.32) 式より $(\xi_\nu,\varphi_r)=0$。しかし $r=\mu$ のときは $\varphi_{\mu-r}=\varphi_0=1$ となり，$(\xi_1,\varphi_{\mu-r})=0$ となるから，やはり $(\xi_\nu*\xi_1,\varphi_\mu)=0$ を得る。(2.34)式の変形で *Fubini* の定理を用いたが，これは *Schwarz* の不等式と $\xi_\nu*\xi_1\in\mathcal{H}$ により保障される。

b) $|\nu|=|\mu|$ のとき； $|\mu|=|\nu|=n$ として，nに関する *Induction* を用いる。

$n=1$ のときは明らかだから，$n=n$ まで正しいとして $n=n+1$ のとき正しいことを示す。

$|\mu|=|\nu|=n+1$，$\mu\neq\nu$，$\nu^{(i)}=(\nu_1,\cdots,\nu_i-1,\cdots,\nu_d)$
$\mu^{(j)}=(\mu_1,\cdots,\mu_j-1,\cdots,\mu_d)$ とする。

(2.34)式と同様に

$$(\xi_\nu,\varphi_\mu)=(\xi_{\nu^{(i)}}*\xi_i,\ \varphi_{\mu^{(j)}}\check{\varphi}_j)$$

$$=\sum_{x\in S}\sum_{y\in S}\xi_{\nu^{(i)}}(x)\xi_i(y)\overline{\varphi_{\mu^{(j)}}(x+y)}\ \overline{\check{\varphi}_j}(x+y)\hat{q}(x)\hat{q}(y)$$

$$=\sum_{r_1=0}^{\mu_1^{(j)}}\cdots\sum_{r_d=0}^{\mu_d^{(j)}}\binom{\mu_1^{(j)}}{r_1}\cdots\binom{\mu_d^{(j)}}{r_d}\Big[\sum_{x\in S}\sum_{y\in S}\xi_{\nu^{(i)}}(x)\xi_i(y)$$

$$\times\overline{\varphi_r(x)\varphi_{\mu^{(j)}-r}(y)}\ \overline{\check{\varphi}_j}(x)\hat{q}(x)\hat{q}(y)$$

$$+\sum_{x\in S}\sum_{y\in S}\xi_{\nu^{(i)}}(x)\xi_i(y)\overline{\varphi_r(x)\varphi_{\mu^{(j)}-r}(y)}\ \overline{\check{\varphi}_j(y)}\hat{q}(x)\hat{q}(y)\Big]$$

$$=\sum_{r_1=0}^{\mu_1^{(j)}}\cdots\sum_{r_d=0}^{\mu_d^{(j)}}\binom{\mu_1^{(j)}}{r_1}\cdots\binom{\mu_d^{(j)}}{r_d}\Big[(\xi_{\nu^{(i)}},\varphi_r\check{\varphi}_j)(\xi_i,\varphi_{\mu^{(j)}-r})$$

$$+(\xi_{\nu^{(i)}},\varphi_r)(\xi_i,\varphi_{\mu^{(j)}-r}\check{\varphi}_j)\Big] \qquad (2.35)$$

を得る。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

i) $1 \leq {}^\exists i, j \leq d,\ i \neq j,\ \nu^{(i)} = \mu^{(j)}$ のとき。

(2.35)式の中の $(\xi_{\nu^{(i)}}, \varphi_r \check{\varphi}_j)$ は，$|r| \leq n-1 = |\nu^{(i)}|-1$ のとき，$r = \nu^{(i)} - e_j$ $(e_j = (0, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第}j\text{番目}}}{1}, 0, \cdots, 0) \in T)$ を除けば 0 である。

しかし，このときは，

$(\xi_i, \varphi_{\mu^{(j)}-r}) = (\xi_i, \varphi_{\nu^{(i)}-r}) = (\xi_i, \check{\varphi}_j) = 0$ となる。

また，$|r| = n$ のとき，即ち $r = \mu^{(j)}$ のときは，$(\xi_i, \varphi_{\mu^{(j)}-r}) = (\xi_i, 1) = 0$ となるから，結局[ ]の中の第一項は常に 0 である。

次に $(\xi_{\nu^{(i)}}, \varphi_r)$ は $|r| \leq n-1$ のときは 0，$r = \mu^{(j)}$ のときは $(\xi_i, \varphi_{\mu^{(j)}-r}\check{\varphi}_j) = (\xi_i, \check{\varphi}_j) = 0$ で第二項も消える。

ii) i)でないとき。

(2.35)式で $(\xi_{\nu^{(i)}}, \varphi_r \check{\varphi}_j)$ は $|r| \leq n-1$ のとき，$r = \nu^{(i)} - e_j$ を除いて 0 となる。しかし，$r = \nu^{(i)} - e_j$ とすると，$1 \leq k \leq d$ が存在して，$r = \mu^{(j)} - e_k$ となるから，$\nu^{(i)} = \mu^{(j)} + e_j - e_k = \mu^{(k)}$ となって条件に反する。

$r = \mu^{(j)}$ のときは $(\xi_i, \varphi_{\mu^{(j)}-r}) = 0$ だから，第一項は消える。第二項も，$r = \nu^{(i)}$ となり得ないことから，$|r| \leq n$ に対して，$(\xi_{\nu^{(i)}}, \varphi_r) = 0$ を得るから消える。

4) $(\xi_\nu, \varphi_\nu) > 0$ から，$(\xi_\nu * \xi_1, \varphi_\nu \check{\varphi}_1)$ を導けば充分である。

(2.35)式より

$$(\xi_\nu * \xi_1, \varphi_\nu \check{\varphi}_1) = \sum_{r_1=0}^{\nu_1} \cdots \sum_{r_d=0}^{\nu_d} \binom{\nu_1}{r_1} \cdots \binom{\nu_d}{\nu_d} \Big[(\xi_\nu, \varphi_r \check{\varphi}_1)(\xi_1, \varphi_{\nu-r}) + (\xi_\nu, \varphi_r)(\xi_1, \varphi_{\nu-r}\check{\varphi}_1) \Big]$$

を得るが，[ ]の中の第一項は $r = \nu - e_1$ を除いて 0，$r = \nu - e_1$ のときは，$(\xi_\nu, \varphi_r \check{\varphi}_1)(\xi_1, \varphi_{\nu-r}) = (\xi_\nu, \varphi_\nu)(\xi_1, \check{\varphi}_1) = (\xi_\nu, \varphi_\nu)$ に等しい。第二項は $r = \nu$ を除いて 0 となるが，$r = \nu$ のときは (ξ_ν, φ_ν) に等しい。従って

$$(\xi_\nu * \xi_1, \varphi_\nu \check{\varphi}_1) = \nu_1 (\xi_\nu, \varphi_\nu) + (\xi_\nu, \varphi_\nu) > 0$$

を得る. q.e.d.

次に Prop. 1.6 の証明を述べる。

<u>Prop. 1.6 の証明</u>　(1.33)式は行列 $A^{(k)}$ の定義と，Lemma 1.1-2) の証明の中の行列 C の定義を比較すれば，(2.33)式より明らか。

(1.34)式は Lemma 2.3-ii) の証明の中で(2.17)式から(2.19)式を導いた方法で，(1.33)式より得られる。 q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

最後に $Lemma$ 1.5 の証明を述べる。

<u>$Lemma$ 1.5 の証明</u>

1) $$\theta_x(w)=(\theta_1(w))^{x_1}\cdots(\theta_d(w))^{x_d}$$

$$=\sum_{u_1=0}^{x_1}\cdots\sum_{u_d=0}^{x_d}\binom{x_1}{u_1}\cdots\binom{x_d}{u_d}(q_1)^{x_1-u_1}\cdots(q_d)^{x_d-u_d}$$

$$\times\Big(\sum_{|\nu|\geq 1}\theta_1(\nu)\hat{w}(\nu)\Big)^{u_1}\cdots\Big(\sum_{|\nu|\geq 1}\theta_d(\nu)\hat{w}(\nu)\Big)^{u_d}$$

$$=\sum_{u_1=0}^{x_1}\cdots\sum_{u_d=0}^{x_d}\binom{x_1}{u_1}\cdots\binom{x_d}{u_d}(q_1)^{x_1-u_1}\cdots(q_d)^{x_d-u_d}$$

$$\times\Big(\sum_{|\nu_1|\geq 1}\cdots\sum_{|\nu_{u_1}|\geq 1}\theta_1(\nu_1)\cdots\theta_1(\nu_{u_1})\hat{w}(\nu_1+\cdots+\nu_{u_1})\Big)\times\cdots$$

$$\cdots\times\Big(\sum_{|\nu_1|\geq 1}\cdots\sum_{|\nu_{u_d}|\geq 1}\theta_d(\nu_1)\cdots\theta_d(\nu_{u_d})\hat{w}(\nu_1+\cdots+\nu_{u_d})\Big)$$

$$=\sum_{u_1=0}^{x_1}\cdots\sum_{u_d=0}^{x_d}\sum_{|\nu_{11}|\geq 1}\cdots\sum_{|\nu_{1u_1}|\geq 1}\cdots\sum_{|\nu_{d1}|\geq 1}\cdots\sum_{|\nu_{du_d}|\geq 1}\binom{x_1}{u_1}\cdots\binom{x_d}{u_d}$$

$$\times(q_1)^{x_1-u_1}\cdots(q_d)^{x_d-u_d}\prod_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{u_i}\theta_i(\nu_{ij})\times\hat{w}\Big(\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{u_d}\nu_{ij}\Big)$$

$$(w\in\bar{U}(0))\qquad\qquad(2.36)$$

上の変形で $Fubini$ の定理を用いたが，これは正則函数の絶対収束性から言える。

(2.36)式の $\hat{w}(\cdot)$ の係数を比較して

$$\theta_x(\nu)=\sum_{u_1=0}^{x_1}\cdots\sum_{u_d=0}^{x_d}\binom{x_1}{u_1}\cdots\binom{x_d}{u_d}\hat{q}(x-u)\prod_{\substack{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{u_i}\nu_{ij}=\nu\\ |\nu_{ij}|\geq 1}}\theta_i(\nu_{ij})\qquad(2.37)$$

を得る。以下，$\nu\in T$ を fix する。

関係式

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{x\in S}\frac{|\theta_x(\nu)|^2}{\hat{q}(x)}=\sum_{k=1}^{d}\sum_{(j_1,\cdots,j_k)(j_{k+1},\cdots,j_d)}^{\gamma_k(1,2,\cdots,d)}\sum_{x_{j_1},\cdots,x_{j_k}\geq N}\sum_{x_{j_{k+1}},\cdots,x_{j_d}<N}\frac{|\theta_x(\nu)|^2}{\hat{q}(x)}\\ \text{但し}\displaystyle\sum_{(j_1,\cdots,j_k)(j_{k+1},\cdots,j_d)}^{\gamma_k(1,\cdots,d)}\text{ は }\{1,\cdots,d\}\text{ から相異なる}k\text{個の数 }\{j_1,\cdots,j_k\}\text{を}\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅱ 1967年
P105-234

し とるとり方（残りを $\{j_{k+1},\cdots,j_d\}$ とする）全体についての和 とする。
に注意すれば，自然数 N が存在して，任意の $1\leq k\leq d$ に対して

$$\sum_{x_1,\cdots,x_k\geq N}\ \sum_{x_{k+1},\cdots,x_d\leq N}\frac{|\theta_x(\nu)|^2}{\hat{q}(x)}<\infty \qquad (2.38)$$

を言えば充分である。

$|\nu|=n$ とし，$x_1,\cdots,x_k>n$ とするとき，$u_1,\cdots,u_k$ の中の少なくとも一つが n を超えれば，$\left|\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{u_i}\nu_{ij}\right|>n=|\nu|$ となり，(2.37) 式は 0 となるから，

$$|\theta_x(\nu)|\leq\sum_{u_1=0}^{n}\cdots\sum_{u_k=0}^{n}\ \sum_{u_{k+1}=0}^{x_{k+1}}\cdots\sum_{u_d=0}^{x_d}\binom{x_1}{u_1}\cdots\binom{x_d}{u_d}\hat{q}(x-u)$$

$$\times\prod_{\substack{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{u_i}\nu_{ij}=\nu\\ |\nu_{ij}|\geq 1}}\theta_i(\nu_{ij})$$

故に

$$K_1(x_{k+1},\cdots,x_d)=\max_{0\leq u_1,\cdots,u_k\leq n}\Big[\sum_{u_{k+1}=0}^{x_{k+1}}\cdots\sum_{u_d=0}^{x_d}\binom{x_{k+1}}{u_{k+1}}\cdots\binom{x_d}{u_d}$$

$$\times(q_{k+1})^{x_{k+1}-u_{k+1}}\cdots(q_d)^{x_d-u_d}\prod_{\substack{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{u_i}\nu_{ij}=\nu\\ |\nu_{ij}|\geq 1}}|\theta_i(\nu_{ij})|\Big]$$

とすれば

$$|\theta_x(\nu)|\leq K_1(x_{k+1},\cdots,x_d)\sum_{u_1=0}^{n}\cdots\sum_{u_k=0}^{n}\binom{x_1}{u_1}\cdots\binom{x_k}{u_k}(q_1)^{x_1-u_1}\cdots(q_k)^{x_k-u_k}$$

故に，特に $x_1,\cdots,x_k\geq 2n$ ならば

$$|\theta_x(\nu)|\leq K_1(x_{k+1},\cdots,x_d)\cdot n^k\cdot\binom{x_1}{n}\cdots\binom{x_k}{n}(q_1)^{x_1-n}\cdots(q_k)^{x_k-n}$$

$$\leq K_2(x_{k+1},\cdots,x_d)\binom{x_1}{n}(q_1)^{x_1}\cdots\binom{x_k}{n}(q_k)^{x_k} \qquad (2.39)$$

但し，$K_2(x_{k+1},\cdots,x_d)=K_1(x_{k+1},\cdots,x_d)\cdot n^k\cdot(q_1)^{-n}\cdots(q_k)^{-n}$

しかし， $\binom{x_i}{n}\sim x_i^n$ ； $x_i\longrightarrow\infty$ $(1\leq i\leq k)$

だから，$0<\varepsilon<1-\|q\|$ に対して，$N(1,2,\cdots,k)$ が存在して

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$|\theta_x(\nu)| \leq K_2(x_{k+1},\cdots,x_d)(q_1)^{\frac{x_1}{2}}\cdots(q_k)^{\frac{x_k}{2}}\cdot K'\cdot(q_1+\varepsilon)^{\frac{x_1}{2}}\cdots(q_k+\varepsilon)^{\frac{x_k}{2}}$$

$$\equiv K(x_{k+1},\cdots,x_d)(q_1)^{\frac{x_1}{2}}\cdots(q_k)^{\frac{x_k}{2}}(q_1+\varepsilon)^{\frac{x_1}{2}}\cdots(q_k+\varepsilon)^{\frac{x_k}{2}}$$

$$(x_1,\cdots,x_k \geqq N(1,2,\cdots,k)) \qquad (2.40)$$

を得る。

$N = max\{N(j_1,\cdots,j_k);\ 0\leq k\leq d,\ j_1,\cdots,j_k$ は $\{1,2,\cdots,n\}$ の中の k 個の数$\}$

とすれば，(2.40) 式は $x_1,\cdots,x_k \geqq N$ に対して正しい。このとき，

$$M = \sum_{x_{k+1},\cdots,x_d\leq N} \frac{K(x_{k+1},\cdots,x_d)^2}{(q_{k+1})^{x_{k+1}}\cdots(q_d)^{x_d}}$$

とすれば，

$$\sum_{x_1,\cdots,x_k\geqq N}\ \sum_{x_{k+1},\cdots,x_d\leqq N} \frac{|\theta_x(\nu)|^2}{\hat{q}(x)}$$

$$\leqq M\sum_{x_1,\cdots,x_k\geqq N}\frac{(q_1)^{x_1}\cdots(q_k)^{x_k}}{(q_1)^{x_1}\cdots(q_k)^{x_k}}\cdot(q_1+\varepsilon)^{x_1}\cdots(q_k+\varepsilon)^{x_k}<\infty$$

を得る。

2) $s=q$ の近傍 $V_1(q)$ があって，$f(s)\in V(q)\ (s\in V_1(q))$ と出来るから，定理1.4 の証明と同様に

$$\widehat{f(s)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{n_k}\theta_x(\nu_p^k)\,\xi_p^k(f(s))$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p,q=1}^{n_k}\theta_x(\nu_p^k)\,a_{pq}^k\,\xi_q^k(s) \qquad (s\in V_1(q))$$

を得る。$\theta(o)=q$ より $w=o$ の近傍 $U_1(o)\subset U(o)$ があって $\theta(w)\in V_1(q)$ $(w\in U_1(o))$ とできるから，(1.40)式より

$$\widehat{f(\theta(w))}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p,q=1}^{n_k}\theta_x(\nu_p^k)\,a_{pq}^k\,\hat{w}(\nu_q^k) \quad (w\in U_1(o)) \qquad (2.41)$$

を得るが，Fubini の定理より

$$\widehat{f(\theta(w))}(x) = \sum_{y\in S}P_{xy}\sum_{\nu\in T}\theta_y(\nu)\,\hat{w}(\nu)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{n_k}\Big(\sum_{y\in S}P_{xy}\,\theta_y(\nu_q^k)\Big)\,\hat{w}(\nu_q^k)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

となるから，(2.41)式の両辺の $\hat{\omega}(\nu_q^k)$ の係数を比較して

$$\frac{1}{\hat{q}(x)} \sum_{y \in S} P_{xy} \frac{\theta_y(\nu_q^k)}{\hat{q}(y)} \cdot \hat{q}(y) = \sum_{p=1}^{n_k} a_{pq}^k \cdot \frac{\theta_x(\nu_p^k)}{\hat{q}(x)}$$

を得る。(1.33)式に注意すれば，これより容易に函数 $\dfrac{\overline{\theta.(\nu_q^k)}}{\hat{q}(\cdot)}$ $(1 \leq q \leq n_k)$ が作用素Aの α_k に対応する固有函数であることがわかる。故に，定理1.3−2）と，(1.40)式から直接得られる式

$$\left(\xi_{\nu_p^k} , \frac{\theta.(\nu_q^k)}{\hat{q}(\cdot)} \right) = \delta_{pq}$$

に注意すれば， $\psi_{\nu_q^k} = \dfrac{\overline{\theta.(\nu_q^k)}}{\hat{q}(\cdot)}$ を得る。　　　q.e.d.

§3. 条件［2.A］について

$\boxed{3.1}$ 小節1,2と同様に，$\rho > 1$ で，条件[1.A]～[1.C]及び条件[2.B]が充たされている場合のみを考えるが，条件[2.A]は仮定しない。

Lemma 1.3 の証明の *Remark* によれば，この場合でも *Lemma* 1.3 は成立つ。このことを用いれば，定理1,2と全く同じ次の定理が成り立つ。

定理3.1　$\rho > 1$ で条件[1.A]～[1.C]及び条件[2.B]が充たされているとする。このとき

1）作用素Aの 0 でない固有値は $\{\hat{\lambda}(\nu);\ \nu \in T\}$ に限り，また $\hat{\lambda}(\nu)$ に対応する固有函数は，一次従属を除いて $\{\psi^{(\mu)};\ \hat{\lambda}(\mu) = \hat{\lambda}(\nu),\ \mu \in T\}$ のみである。

2）函数の *system* $\{\xi^{(\nu)};\ \nu \in T\}$ が存在して

$$(\xi^{(\nu)}, \psi^{(\mu)}) = \delta_{\nu\mu}$$

で，$\xi^{(\nu)}$ は $\hat{\lambda}(\nu)$ に対応する A^* の固有函数である。

証明に入る前に，*Lemma* 1.1 の中で述べるべき性質の *Lemma* を一つ述べる。

Lemma 3.1　$\mathcal{H}$; *Hilbert space*
　　A ; $\mathcal{H}$上の完全連続作用素
　　A^* ; Aの共役作用素

とする。$\{\lambda_i;\ i = 0, 1, 2, \cdots\}$ を作用素Aの 0 でない固有値とし，$\{\varphi_{ij};\ 1 \leq j \leq n_i\}$ を λ_i に対応するAの固有函数とする。このとき $\{\varphi_{ij}\}$ が $\mathcal{H}$ で com-

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

plete ならば，各 $\overline{\lambda_i}$ に対応して A^* の固有函数 $\{\xi_{ij};\ 1 \leq j \leq n_k\}$ が存在して

$$(\varphi_{ij},\ \xi_{kl}) = \delta_{(ij),(kl)}$$

をみたす。

証明は定理 1.2-2) の証明の中に含まれているので省略する。

［定理3.1 の証明］　任意の $N \geq 1$ に対して，*process* $X_N = (x_{nN},\ \zeta,\ N_{nN},\ P_x)$ $(x \in S,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ もまた，$\rho > 1$ で条件［1.A］～［1.C］及び条件［2.B］を充たす *M.G.-W.P.* であることが容易に解る。*Prop.* 1.4 によれば，N を充分大きくとれば条件［2.A］も充たされる。従って，作用素 $A_N = A^N$ は完全連続作用素となる。

1）関係式

$$(A^N - \alpha^N I)^n \varphi = (A^{N-1} + A^{N-2} \cdot \alpha + \cdots + \alpha^{N-1} I)^n (A - \alpha I)^n \varphi$$

によれば，$\{\psi^{(\mu)};\ \hat{\lambda}(\mu) = \hat{\lambda}(\nu),\ \mu \in T\}$ はまた，作用素 A_N の $(\hat{\lambda}(\nu))^N$ に対応する固有函数である。$\{\psi^{(\nu)};\ \nu \in T\}$ は $\mathcal{H}$ で *complete* だから，作用素 A_N の 0 でない固有値は $\{(\hat{\lambda}(\nu))^N\}$ に限り，固有函数は $\{\psi^{(\nu)}\}$ に限る。このことから，背理法により，1）の結論を得る。

2）A_N が完全連続だから，*Lemma* 3.1 より

$$(\xi^{(\nu)},\ \psi^{(\mu)}) = \delta_{\nu\mu}$$

をみたす，A_N^* の $\overline{(\hat{\lambda}(\nu))}^N$ に対応する固有函数の *system* $\xi^{(\nu)}$ $(\nu \in T)$ が存在する。$\xi^{(\nu)}$ は A_{nN}^* の $\overline{(\hat{\lambda}(\nu))}^{nN}$ に対応する固有函数であることに注意して，*Lemma* 1.4-1) の証明の前半を繰り返せば $\xi^{(\nu)}(s)$ は $\|s\| < 1$ で正則となるから，(1.22) 式より，$(A^*\xi^{(\nu)})(s)$ は $\|s\| < 1$ で正則，従って $A^*\xi^{(\nu)} \in \mathcal{H}$，すなわち $\xi^{(\nu)} \in \mathcal{D}(A^*)$（$A^*$ の定義域の意味）である。従って $(A^*\xi^{(\nu)},\ \psi^{(\mu)}) = (\xi^{(\nu)},\ A\psi^{(\mu)})$ を得る。

$\{\alpha_k\}$ と $\{\nu_p^k\}$ 及び $\{\psi_p'^k\}$ を定理 1.2-2) の証明の中で定義したものと同じものとすれば，1）より定数 $\{a_{pq}^k\}$ があって

$$A\psi_p'^k = \sum_{q=1}^{n_k} a_{pq}^k \psi_q'^k \qquad (1 \leq p \leq n_k,\ k = 0, 1, \cdots\ ) \qquad (3.1)$$

となるが，*Lemma* 1.1-2) の証明と同様にして $A_k = (a_{pq}^k)$ $\quad p, q = 1, \cdots, n_k$ とするとき　正則行列 $B_{(k)}$ が存在して

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$B_{(k)}^{-1}\, A_{(k)}\, B_{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha_k & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \alpha_k \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

を得る。

$\xi_p'^k = \xi^{(\nu_p^k)}$ $(1 \leq p \leq n_k,\ k = 0, 1, \cdots)$ とすれば

$$\left(A^* \xi_q'^k - \sum_{p=1}^{n_k} \overline{a_{pq}^k}\, \xi_p'^k,\ \psi_r'^k\right)$$

$$= \overline{a}_{qr}^k - \overline{a_{qr}^k} = 0 \qquad (1 \leq r \leq n_k)$$

$$\left(A^* \xi_q'^k - \sum_{p=1}^{n_k} \overline{a}_{pq}^k\, \xi_p'^k,\ \psi_r'^\ell\right) = \left(\xi_q'^k,\ \sum_{s=1}^{n_\ell} a_{rs}^\ell\, \psi_s'^\ell\right) - \sum_{p=1}^{n_k} \overline{a}_{pq}^k \left(\xi_p'^k,\ \psi_r'^\ell\right)$$

$$= 0 \qquad (k \neq \ell)$$

となるから，$\{\psi_p'^k\}$ の complete 性より

$$A^* \xi_q'^k = \sum_{p=1}^{n_k} \overline{a_{pq}^k}\, \xi_p'^k \qquad (1 \leq q \leq n_k,\ k = 0, 1, \cdots)$$

を得るが，(3.2) 式とこれより，$\xi_q'^k$ は $\overline{\alpha_k}$ に対応する作用素 A^* の固有函数である。 q.e.d.

以下定理 1.3 〜 1.5 まで全く同じ推論が成り立つ。ただその際，新しく定義した $A_{(k)}$ は，前の行列 $A^{(k)}$ の共役行列であることに注意すればよい。

$\boxed{3.2}$ $\rho < 1$ で，条件 [1.A] 〜 [1.B] 及び条件 [2.B] と次の条件

[III.A] $\varepsilon > 0$ が存在して各 $f^i(s)$ は $D(1+\varepsilon) = \{s;\ |s_i| < 1+\varepsilon\}$ で正則である.

をみたしているとする。

一般に $r, s \in C^d$ に対して，ベクトル rs を $(r_1 s_1, \cdots, r_d s_d)$，$\frac{s}{r}$ を $\left(\frac{s_1}{r_1}, \cdots, \frac{s_d}{r_d}\right)$ というように定義する。

<u>*Proposition 3.1*</u> $r > 1$，$r \in D(1+\varepsilon)$ が存在して

$$f^i(r) < r_i \qquad (1 \leq i \leq d) \tag{3.3}$$

と出来る。

[証明] Prop. の主張を否定すると，任意の $s^{(n)} \downarrow 1$ となる $\{s^{(n)}\}$ に対して，

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

部分列 $\{s^{(m)}\}\subset\{s^{(n)}\}$ と，$1\leq i\leq d$ が存在して

$$f^i(s^{(m)}) \geqq s_i^{(m)} \qquad (m=1,2,\cdots)$$

となるが，$f^i(s)$ は $s=1$ で正則だから，これより $m_{ii}\geqq 1$ を得る。しかし ρ の定義と (2.2) 式より，$\rho\geqq m_{ii}$ を得るから，これは $\rho<1$ に矛盾する。

q.e.d.

さて，今与えられている M.G.-W.P. を決める (1.1) 式をみたす Probability kernel に対して

$$\widetilde{\pi}(e_i,x)\equiv\frac{1}{r_i}\,\pi(e_i,x)\hat{r}(x) \quad (1\leq i\leq d,\ x\in S) \qquad (3.3)$$

とすれば，$\{\widetilde{\pi}(e_i,x)\}$ はまた (1.1) 式をみたす。実際，$\widetilde{\pi}(e_i,x)\geqq 0$ は明らかであるが，

$$\sum_{x\in S}\widetilde{\pi}(e_i,x)=\frac{1}{r_i}\sum_{x\in S}\pi(e_i,x)\hat{r}(x)=\frac{f^i(r)}{r_i}<1$$

となるから，後の式も明らかである。

従って，1.1 節と同様に，対応する M.G.-W.P. $\widetilde{X}=(x_n,\widetilde{\xi},\widetilde{N}_n,\widetilde{P}_x)$ $(x\in S,\ n\in\mathbb{Z}_+)$ が存在するが，この process は明らかに条件 [1.A]～[1.C] 及び [2.B] をみたし，$\rho>1$ である。実際，[1.A] [1.B] は明らかであるが，[1.C] は M.G.-W.P. $\widetilde{X}$ の generating function $\widetilde{f}(s)$ が $\frac{1}{r_i}f(rs)$ に等しいことに注意すれば，(1.15) 式より extinction probability $\widetilde{q}$ が $\frac{1}{r}$ に等しくなることが解るから，明らかである。条件 [2.B] は同様にして，$\widetilde{Q}=M$ を得るから明らか。

従って，小節 1.2 と同様に

$$\widetilde{\mathcal{H}}=\{\widetilde{\varphi}(x)\in C^S;\ \sum_{x\in S}|\widetilde{\varphi}(x)|^2\,\hat{\widetilde{q}}(x)<\infty\}$$

とし，

$$\widetilde{A}_n\widetilde{\varphi}(x)=\frac{1}{\hat{\widetilde{q}}(x)}\sum_{y\in S}\widetilde{P}_{xy}(n)\widetilde{\varphi}(y)\hat{\widetilde{q}}(x)$$

$$\widetilde{A}_n^*\,\widetilde{\xi}(y)=\sum_{x\in S}\widetilde{\xi}(x)\,\widetilde{P}_{xy}(n)$$

とおくとき，transition function $\widetilde{P}_{xy}(n)$ は n を大きくするとき作用素 $\widetilde{A}$ と $\widetilde{A}$ の固有函数によって (1.41) 式の形の展開

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

(172)

$$\widetilde{P}_{xy}(n) = \widehat{q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p,q=1}^{n_k} \overline{\widetilde{\varphi}_p^k(x)}\ \overline{{}^n\widetilde{a}_{pq}^k}\ \widetilde{\xi}_q^k(y)$$

$$\text{i.e. } P_{xy}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p,q=1}^{n_k} \overline{\widetilde{\varphi}_p^k(x)}\ {}^n\widetilde{a}_{pq}^k \frac{\widetilde{\xi}_q^k(y)}{\widehat{r}(y)}$$

を得る。その際一般には r のとり方に depend しているが，そのし方は極く少ない。

実際，　$\widetilde{P}_{xy}(n) = \dfrac{1}{\widehat{r}(x)} P_{xy} \widehat{r}(y)$　であることに注意すれば，

$$\widetilde{A}_n \widetilde{\varphi}(x) = \widehat{r}(x) \cdot \sum_{y \in S} \frac{1}{\widehat{r}(x)} P_{xy}(n)\, \widehat{r}(y) \cdot \frac{1}{\widehat{r}(y)} \cdot \widetilde{\varphi}(y)$$

$$= \sum_{y \in S} P_{xy}(n)\, \widetilde{\varphi}(y)$$

となり，$\widetilde{A}_n$ は r に depend しない。更に，多項式が，r に関係なく $\mathcal{H}$ に入っていることから，$\widetilde{A}$ の固有函数もまた r に無関係。更に ${}^n\widetilde{a}_{pq}^k$ は (1.31) 式で定義したものであるが，実は (3.1) 式で定義した $\widetilde{A}_{(k)}$ の共役行列の成分に過ぎないので，これも r に無関係となる。

$\widetilde{\xi}_\nu$ は r に depend しているが，そのし方は単純である。すなわち，これは $\widetilde{\varphi}^{(\nu)}$ と biorthonomal な system として $\widetilde{\xi}_i$ を与え，その何回かの convolution によって作られたものであるが，それは $r^{(1)}$ に対して，作られた $\widetilde{\xi}_\nu^{(1)}$ と $\widetilde{\xi}_\nu^{(1)}(x)\,\widehat{r}\,(x) = \widetilde{\xi}_\nu(x)\,\widehat{r^{(1)}}(x)$ なる関係で結ぶだけで充分であることが容易にわかる。従って，(1.41) 式の展開で，$(\widehat{r}(x))^{-1}\,\widetilde{\xi}_p^k(x)$ を一つの函数と思うだけで，展開は r に independent であることがわかる。

(1.51) 式より

$$\sum_{|y| \geq 1} \widetilde{P}_x(x_n = y,\ x_m \to 0 \mid |x_n| \geq 1,\ x_m \to 0)\, \widehat{s}(y)$$

$$= \frac{\widehat{f_n(\widetilde{q}s)}(x) - \widehat{f_n(0)}(x)}{\widehat{f_n(\widetilde{q})}(x) - \widehat{f_n(0)}(x)}$$

$$= \frac{\widehat{f_n(s)}(x) - \widehat{f_n(0)}(x)}{\widehat{f_n(1)}(x) - \widehat{f_n(0)}(x)}$$

$$= \sum_{|y| \geq 1} P_x(x_n = y \mid |x_n| \geq 1)\, \widehat{s}(y)$$

であることに注意すると，

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

"$|x|, |y| \geqq 1$ のとき x に独立な極限

$$\lim_{n\to\infty} P_x(x_n = y \mid |x_n| \geqq 1) = b(y)$$

が存在する。更に函数

$$B(s) = \sum_{|y|\geqq 1} b(y)\,\hat{s}(y)$$

は領域 $D(r) \equiv \{s;\ |s_i| < r_i \quad (1 \leqq i \leqq d)\}$ で正則で かつ函数方程式

$$B(f(s)) = \sigma B(s) - \sigma + 1 \qquad (s \in D(r))$$

を充たす"

ことがわかる。これは，$M. Ji\check{r}ina$ [ ] の結果より，多少強い条件を必要とするが，一応別証明を与えていることになる。

文　　献

[1] Bellmann; *Introduction to Matrix Analysis*; McGraw-Hill Comp. 1960.

[2] H. カルタン; 複素函数論; 岩波書店, 1965.

[3] F.R.Gantmacher; *Application of theory of Matrices*; New York, 1959.

[4] T.H.Harris; *The theory of Branching processes*; Springer. 1963.

[5] M.Jirina; *The asymptotic behavior of branching stochastic processes*; Czechoslovak Math, I.7.(1957), 130～153.

[6] 池田, 長沢, 渡辺(信); 分岐マルコフ過程の基礎; Sem. on Prob. Vol. 23 I.II. 1966.

[7] S.Karlin, J.McGregor; *Spectral theory of Branching processes I.II.*; Whar. Bd. 6 (1965), 6-54.

[8] 溝畑 茂; 偏微分方程式論; 岩波書店, 1965.

[9] 酒井栄一; 多変数函数論; 共立全書, 1966.

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

[10] 佐武一郎； 行列と行列式； 裳華房，1958.

[11] 吉田，岩村，河田； 位相解析の基礎； 岩波書店，1960

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

第7章 符号をもった年令附 分枝マルコフ過程

§1. Introduction.

このノートで取扱う主題は *Seminar on Probability Vol. 23*（以下では単に *Vol. 23* として引用する）で展開された議論の一つの延長線上にあると考えることが出来る。従って，用語や記号等は *Vol. 23* のものを用いているし，その結果を利用して，議論を省略したところがかなりある。そのために読みにくくなっている点があると思われるので，詳しい議論に入る前に次節で結果の概略を述べよう。

ここではまず最初に主題に対する我々の考え方を簡単に述べておこう。勿論考え方というものは得られた結果の一つの解釈である場合が多い。従って，それに固執すると，問題の展開の可能性を狭めることになるかと思う。しかし，研究の方向を定める上での一つの参考にはなると思うので簡単に述べることにしよう。

今，Δをd-次元ラプラシアンとして，半線型放物型方程式

$$(1.1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + F[u]$$

を考えよう。ここで $F[\xi]$ は実数上のある函数である（例えば，$F[\xi]$ は ξ の多項式と考えていただきたい。）。(1.1) で $F[u]$の項を除いたもの，すなわち

$$(1.2)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u$$

はd-次元 *Brownian motion* の *transition probability* が満たす方程式としてよく知られている。従って (1.1) は *Brownian motion* に対し，ある外的な要因 $F[u]$ が加わっている現象を記述していると考えることが出来よう。

今，簡単な場合として，

$$F[\xi] = -C\xi\,, \qquad (C\text{は正の定数})$$

であるとしよう。そのとき，(1.1) は

$$(1.3)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u - Cu$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

となる。これは最もよく知られている例であって，この場合には外的要因 $F[u] = -Cu$ は mass の減少に関係しており，マルコフ過程論の立場からは e^{-Ct} の割合で吸収が起っている（killing）として記述されている。（例えば [1], [10] 参照）。すなわち，出発点が x の Brownian motion の確率法則を P_x，その期待値を E_x と書けば，f を初期函数として，

$$u(t,x) = E_x[f(B_t)\,e^{-ct}]$$

が (1.3) の解になっている。ここで B_t は Brownian motion である。ここで強調すべき重要な点は，$u(t,x)$ が (1.3) の解になるのみでなく，

$$P^\circ(t,x,dy) = E_x[I_{dy}(B_t)\,e^{-Ct}] \text{ 注)}$$

を推移確率とするマルコフ過程を作ることが出来るという点である。それは次の場合と対比して考えて見ると明らかになる。すなわち，今
$F[\xi] = C\xi$ （C は正の定数）とすると (1.1) は

$$(1.3') \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + Cu$$

となる。これの初期値 f に対する解は

$$u(t,x) = E_x[f(B_t)\,e^{ct}]$$

で与えられる。この点までは $F[\xi] = -C\xi$ のときと本質的な相異はみとめられない。しかしこの場合には新たな問題が生ずる。

$$q^\circ(t,x,dy) = E_x[I_{dy}(B_t)\,e^{ct}]$$

と置いたものは，すでに通常の方法では，あるマルコフ過程の推移確率であるとは考えられないからである。何故なら，$q^\circ(t,x,dy)$ の total mass は 1 より大きい。従って $q^\circ(t,x,dy)$ を推移確率過程として持つマルコフ過程があったとすれば，その確率法則 P_x の total mass も 1 より大きくなる。このような process は例えば Ito-Mckean [10] 又は Dynkin [1] で取扱われている枠組にはそのままでは入っていない。

上の問題に対しては大きくわけて，二つの立場が可能であろう。一つは，マル

注） $I_A(\cdot)$ は A の indicator である。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

コフ過程の定義そのものを拡張し，*total mass* が 1 より大きくなることを許すことであろう。このような試みは *Hunt*[3] で述べられている．*Knight*[12] も同様な問題を扱っている。

第二の立場は，マルコフ過程の今までの枠組はそのままにし，(1.3′) は推移確率そのものを記述しているのではなく，*Brownian motion* に別のある構造を加えたマルコフ過程があって，それのある量が満たす方程式であると考える。このような二段階を考えるのである。これは *Vol. 23* に於て *Skorohod* 方程式を取扱った際の思想である。我々はこの立場で問題を扱うことにしよう。

さて，議論を先に進めよう。以上の例 (1.3), (1.3′) では，いずれも方程式は線型であった。$F(\xi)$ が例えば ξ の多項式 (*i.e. non-linear*) のときに第一の立場での記述が可能であるかどうかは我々は知らない。しかし，

$$\frac{1}{c}F[\xi]=\sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty} q_n\xi^n-\xi,\quad q_n\geqq 0,\quad q_1\equiv 0,\quad \sum_{n=0}^{\infty}q_n=1,\quad c\geq 0$$

のときには，第二の立場からの記述は可能であった。それが *Branching Markov process* についての *Vol. 23* で述べられた重要な結果であると考えられる。このとき (1.1) は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\frac{1}{2}\Delta u-cu\right)+c\sum_{n\neq 1}q_n u^n \tag{1.4}$$

となり，右辺の第一項，(　) の部分は *Brownian motion* が吸収を伴っている現象を記述しており，第二項は第一の粒子が吸収される点で，q_n なる確率で粒子が n 個に分裂するという現象が起っており，(1.4) はその事実の一つの記述形式であるとして意味づけられている。

このように，(1.4) に現われている各項の確率論的意味がわかり，かつ，この方程式から一つの *Markov process*，すなわち，*Branching Markov process* が一意的に構成出来るのであるから，*Vol. 23* の結果はその意味で，この問題の一応の解決を与えていると考えられる。

それでは，一般に $F[\xi]$ が ξ の一般の多項式，あるいは，ξ の *analytic function*，さらに *Hölder* 連続函数等々であるとき，その確率論的意味づけが可能であろうか。このノートの主題は，この問題の一つの解決を与えることと，その応用を議論することを目的としている。

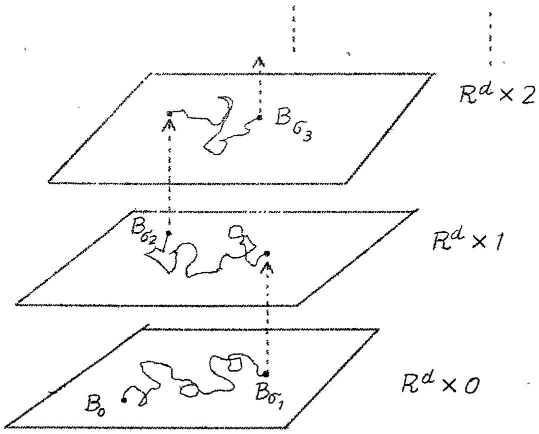
Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

§2. 結果の概略

この節では結果の概略を述べる。

d-次元 Brownian motion注) に年令を附加して考えよう。そのためには Brownian motion の状態を記述する変数 $x \in R^d$ に加えて，年令を記述する変数 k を考え，年令を附加した Brownian motion の状態は (x, k) で記述する。

状態空间 $S = R^d \times N$，$N = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ 上の process は次のように構成される。まず通常の d-次元 Brownian motion がある random な時间 σ までは $R^d \times \{0\}$ 上を運動していると考え，$\sigma_1 = \sigma$ より σ_2，$(\sigma_1 < \sigma_2)$ までは $R^d \times \{1\}$ 上を運動し，σ_2 から σ_3 の间では $R^d \times \{2\}$ の上を運動している…… 等々と考えればよい。



この process を $x_t = (B_t, k_t)$ で表わそう。これを以降<u>年令附 Brownian motion</u> と呼ぶことにする。さて，この年令附 Brownian motion は年令に weight をつけることによって，いろいろな解釈を可能にする。例えば weight を 2 としてみよう。すなわち，

f を R^d 上の有界連続函数として

$$f \cdot 2(x, k) = f(x)\, 2^k \tag{2.1}$$

とおくのである。この函数 $f \cdot 2$ の年令附 Brownian motion による平均，即ち

注) 次節では一般の Markov process に対し定式化するが，ここでは話を具体的にするため，Brownian motion としよう。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$(2.2) \qquad E_{(x,0)}[f\cdot 2(B_t, k_t)]$$

を $u(t,x)$ とすると，これは

$$(2.3) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + cu, \qquad (c>0)$$

の解を与えることがわかる。（ここで $c>0$ は *random time* σ に依存してきまる。）

これに対する一つの解釈は，実は年令が進むと粒子の個数が2倍になっているのであると考える。それか $f\cdot 2$ の 2^k なる項で表現されていると考えるのである。このようにして，上の *model* は *mass* の増加を記述していることになる。しかしここでは，あとの便利のために年令の *weight* に対しこのような解釈を与えないでおくことにしよう。

さて，次に上に述べた年令附 *Brownian motion* を基礎にして，*Vol.* 23 で行なったとまったく同様に分枝マルコフ過程をつくる。即ち，ある *random* な時間 τ 注) まで運動を続けていた年令附 *Brownian motion* は時刻 $\tau_1=\tau$ で，定められた確率 q_n で $(n-1)$ 個の年令 0 の子供を生む。子供を生んだ粒子がその時年令が k であれば，勿論年令は k として，運動を再び続ける。従って，年令が $(k, \underbrace{0,0,\cdots 0}_{n-1})$ の粒子が独立にそれぞれ年令附 *Brownian motion* として運動する。次に *random time* τ_2 になると，その n 個の粒子の中のいずれか一個が再び定められた法則に従って年令 0 の子供を生む‥‥。このような運動を考える。この運動を<u>年令附分枝 *Brownian motion*</u> と呼ぶことにしよう。

さて，前と同様に年令に対し *weight* 2 をつけてみる。更に，分枝マルコフ過程の議論（*Vol.* 23）で行なったと同様に次のように置く。

f を R^d 上の連続函数で *uniform norm* は 1 より大でないとする。それに対し

$$(2.4) \qquad \widehat{f\cdot 2}(\underline{x}, \underline{k}) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j)\cdot 2^{\sum_{j=1}^{n} k_j}$$

とおく。ここで $\underline{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$，$x_j\in R^d$，$\underline{k}=[k_1, k_2, \cdots, k_n]$，$k_j\in N$ であって，$(\underline{x}, \underline{k})$ と $(\underline{y}, \underline{\ell})$ とは $[y_1, \cdots, y_n]$ が $[x_1, \cdots, x_n]$ の *permutation* であり，且つ $\sum_{j=1}^{n} k_j = \sum_{j=1}^{n} \ell_j$ であるとき *equivalent* であ

注) 前に現われた *random time* σ とは異なる。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

るとしている.

このようにおいたとき，年令0でxを出発した年令附分枝 Brownian motion $(Y_t, P_{(x,\underline{k})})$による $\widehat{f\cdot 2}$ の平均を

$$u(t,x)=E_{(x,0)}[\widehat{f\cdot 2}(Y_t)] \tag{2.5}$$

と置くと，これは

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta u+C\sum_{\substack{n=0\\n\neq 1}}^{\infty} q_n u^n, \qquad (C>0) \tag{2.6}$$

を満たすことがわかる。ここに現われたCは random time σ とτを同時に決定している。(詳しくは次節.)注1)

Vol. 23 で取り扱われた Backward equation (Vol. 23. p. 121, (5.52)式) と比べて違っている点は(2.6)式には$-cu$ なる項がなくなっていることである. この差異は年令に weight 2 をつけたことによって生じた重要な事実である。そのために，(2.6)式は$\|f\|<1$ なる初期値に対しても，有限時間で解$u(t,x)$が爆発するという現象がおこる。この点に関しては§6を参照していただきたい。

次に符号をもった年令附分枝 Brownian motion を考えよう。これは次のようなものである. まず，上で述べた年令附分枝 Brownian motion の状態空間

$$S=\bigcup_{n=0}^{\infty}(R^d\times N)^n \tag{2.7}$$

を二つ用意する. それをS_0とS_1としよう。ここでS_0は(+)の状態を表わし，S_2は(−)の状態を表わすと考える。

そこで，今，年令0で点xを出発した年令附 Brownian motion の粒子は時刻τで，$q_n^+>0$のときには q_n^+ なる確率で$(n-1)$個の年令0の粒子を生み，(+)の状態空間S_0の中を運動する。一方$q_n^->0$のときにはq_n^-なる確率で，$(n-1)$個の年令0の粒子を生み(−)の状態空間S_1の中を運動する.注2) このような運動を符号をもった年令附 Brownian motion と呼ぶことにしよう。この process の状態空間はS_0とS_1の topological sum S_0+S_1であって，その状態を指定するには，例えば正の世界に$[x_1, x_2, x_3]$の位置に年令$[k_1, k_2,$

注1) 次節では更に一般に，Cはかってな有界可測函数としている.

注2) $$\sum_{\substack{n=0\\n\neq 1}}^{\infty}(q_n^+ + q_n^-)=1$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

k_3] の粒子があるとか，負の世界に [x_1', x_2', x_3', x_4'] なる位置に年令 [k_1', k_2', k_3', k_4'] の粒子が存在している，等々を指定すればよい。S_0+S_1 は丁度そのようなものである。

さて，この process を $z_t=(Y_t, j_t)$ 注) と書くことにしよう．前と同様に，今 R^d 上の連続函数で $\|f\|\leq 1$ をみたすものをとり，

$$(2.8)\qquad \widetilde{f\cdot 2}(\underline{x}, \underline{k}, j)=(-1)^j\,\widehat{f\cdot 2}(\underline{x}, \underline{k})$$

とおく，ここで $\widehat{f\cdot 2}$ は (2.4) と同じである。$\widetilde{f\cdot 2}$ の z_t による平均を

$$(2.9)\qquad u(t,x)=E_{(x,0,0)}[\widetilde{f\cdot 2}(z_t)]$$

とおくと，この $u(t,x)$ は方程式

$$(2.10)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta u+c\sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty}(q_n^+-q_n^-)u^n\quad,\qquad (c>0)$$

の解を与える。（ここで $q_n^+(x)\,q_n^-(x)=0$ としておく。）

このようにして，perturbation term の係数が正であると云う (2.6) 式での制約も除かれた．しかし，この形式では $n=1$ を除外しなければならないという制約が残っている．これを除くためには，子供を生まないという状態と子供を0個生んだという状態を区別する方法を導入すればよい。これは非常に技術的なことであるが，状態空間として，年令附分枝 Brownian motion の状態空間 (2.7) を4つ用意し，それを合わせたものを状態空間とする運動を考えることによって解決される。このようにして，perturbation term が u の解析函数である場合にはその方程式の各項に確率論的意味をつけ，確率論的方法で解を与えることが可能になる。更に進んで，F が u に関して Lipschitz condition をみたす連続函数の時には解析函数で近似することにより解を与えることが出来る。しかし，この場合には perturbation term に直接に確率論的意味を与えることは出来ない。

以上が次の節以下で述べる事実の概略である。

§3. 年令附 Markov process

注) j_t は0と1の値をとり，0は粒子が正の世界，1は負の世界にいることを表わす。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

まず最初に以下の議論に必要となる「pathのつなぎ合せ法」の概略をVol.23に従って述べよう。注1)

この節では$\{W, \mathcal{B}_t, x_t, \zeta, P_x\}$をlocally compact Hausdorff space S上の強マルコフ過程とする。$P_x[\zeta<\infty]\geqq 1$ としよう。注2)

さて，$\bar{S}=S\cup\{\Delta\}$をSの一点compact 化とし，$W\times\bar{S}$（直積）上に次の条件を満たす核$\mu(w, dx)$が与えられたとしよう。

(i) $\zeta(w)=0$ なる $w\in W$ に対しては

(3.1) $\mu(w, dx)=\delta_\Delta(dy)$ ，（δ_Δ はΔ上のpoint mass）

(ii) 任意のMarkov time $T(w)$ に対し

(3.2) $P_x[\mu(w, dy)=\mu(\theta_T w, dy),\ T(w)<\zeta(w)]=P_x[T(w)<\zeta(w)]$.

この条件を満たすμをVol. 23ではinstantaneous distributionと呼んでいる。ここで，μが「核である」とは$\mu(\cdot, dy)$が可測函数で且つ$\mu(w,\cdot)$は$\bar{S}$上のprobability measure であることである。

次に

$$\Omega_j=W\times\bar{S}\ (j=1,2,3,\cdots),\quad \mathcal{F}_j=\mathcal{B}_\infty\otimes\mathcal{B}(\bar{S})\quad(j=1,2,3,\cdots)$$

(3.3) $$\tilde{\Omega}=\prod_{j=1}^{\infty}\Omega_j,\qquad \tilde{\mathcal{B}}=\bigotimes_{j=1}^{\infty}\mathcal{F}_j$$

$$Q_x(dw)=P_x[dw]\mu(w, dy),\quad (\text{但し}\ \omega=(w,y)\in\Omega)$$

とおくと，Ionescu-Tulceaの定理を適用することが出来て，$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{B}})$上にprobability measure $\tilde{P}_x$が一意的に存在することがわかり，それは

(3.4) $$\tilde{P}_x[d\omega^1, d\omega^2, \cdots, d\omega^n]=Q_x(d\omega^1)Q_{x_1}(d\omega^2)\cdots Q_{x_{n-1}}(d\omega^n)$$

をみたしている。ここで $\omega^j=(w_j, x_j)\in\Omega$ である。

注1) 以下では[15]に従って確率論的構成法を述べる。解析的方法については[18]を見ていただきたい。

注2) $x_{\zeta-}$から新たにpathをつないで行くという以下の構成法に従えば，この条件の下で考えておけば十分である。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

さて，probability space $(\widetilde{\Omega},\ \widetilde{\mathcal{B}},\ \widetilde{P}_x)$上に path をつなぎ合せて確率過程を作ろう。まず $\omega=(w,y)\in\Omega$ に対して，

$$(3.5)\qquad \dot{x}_t(\omega)=\begin{cases} x_t(w) & ,\quad t<\zeta(w) \\ y & ,\quad t\geq\zeta(w) \end{cases}$$

とおく。ここで y は $t\geq\zeta$ 以後につなぎ合わせる path が出発する点であることが次の構成法からわかる。

$\widetilde{\omega}=(\omega^1,\ \omega^2,\cdots)\in\widetilde{\Omega}$ に対し

$$(3.6)\qquad X_t(\widetilde{\omega})=\begin{cases} \dot{x}_t(\omega^1) & ,\quad 0\leq t<\zeta(w_1) \\ \dot{x}_{t-\zeta(w_1)}(\omega^2) & ,\quad \zeta(w_1)<t\leq\zeta(w_1)+\zeta(w_2) \\ \text{--------} & \\ \dot{x}_{t-(\zeta(w_1)+\cdots+\zeta(w_n))}(\omega^{n+1}), & \sum_{j=1}^{n}\zeta(w_j)<t\leq\sum_{j=1}^{n+1}\zeta(w_j) \\ \text{--------} & \\ \Delta & ,\quad t\geq\sum_{j=1}^{N(\widetilde{\omega})}\zeta(w_j) \end{cases}$$

とおく。ここで $N(\widetilde{\omega})=inf\{j;\ \zeta(w_j)=0\}$ である。

$\sum_{j=1}^{n}\zeta(w_j)$ は n 回目のつなぎ合せ時間を表わすから，今後それを

$$(3.7)\qquad \tau_n(\widetilde{\omega})=\sum_{j=1}^{n}\zeta(w_j)\quad,\quad n\geq1,\quad \tau_0(\widetilde{\omega})\equiv0$$

及び

$$(3.8)\qquad \widetilde{\zeta}(\widetilde{\omega})=\sum_{j=1}^{N(\widetilde{\omega})}\zeta(w_j)$$

と書く。この X_t の作り方から，

$$\widetilde{\Omega}_0=\{\widetilde{\omega};\ X_t(\widetilde{\omega})\ \text{は右連続}\}$$

とおくと，$\widetilde{P}_x[\widetilde{\Omega}_0]=1$ となることがすぐにわかり，$\{\widetilde{\Omega}_0,\ \widetilde{N}_t,\ X_t,\ \widetilde{\zeta},\ \widetilde{P}_x\}$ は $\widetilde{S}$ 上の強マルコフ過程になることが Vol.23 で証明されている。

さて，以上の構成法を利用して，前節で述べた (1) 年令附 Brownian motion，(2) 年令附分枝 Brownian motion，(3) 符号を持った年令附 Brownian motion を構成し，その性質を調べることにしよう。

以下では基礎にとるマルコフ過程は Brownian motion と限定せずに少し一

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

般に述べることにしよう。

Dを compact metrizable space とし，D上の conservative strong Markov process を $\{W, \mathcal{N}_t, x_t, P_x, x \in D\}$ としよう。このノートでは Markov process は常に right continuous で left limit を持つとしておく。構成を扱うこの節及び，4，5節を通じ，上に与えられた conservative process を基礎の process と呼ぶこととし，その semi-group を T_t で表わす．すなわち，$f \in \mathbb{B}(D)$ 注) に対し

$$(3.9) \qquad T_t f(x) = E_x[f(x_t)]$$

である。

次に，$C \in \mathbb{B}(D)$ をかってに取って固定する．（必ずしも non-negative でなくてもよい）．

$$C = C^+ - C^-$$

と分解し，

$$(3.10) \qquad \begin{cases} \varphi_t(w) = \int_0^t |C|(x_s(w))\,ds, \\ \varphi_t^+(w) = \int_0^t C^+(x_s(w))\,ds, \\ \varphi_t^-(w) = \int_0^t C^-(x_s(w))\,ds, \end{cases}$$

とおく。いずれも x_t の additive functional である．

さて，

$$(3.11) \qquad m_t(w) = exp\{-\varphi_t\}$$

とおき，この multiplicative functional m_t による x_t の subprocess を $\{\overline{W}, \overline{\mathcal{N}}_t, \overline{x}_t, \overline{\xi}, \overline{P}_x, x \in D \cup \{\Delta\}\}$ としよう．すなわち，

$$\overline{E}_x[f(\overline{x}_t)] = E_x[f(x_t)m_t] \quad , \quad f \in \mathbb{B}(D) \,, \quad f(\Delta) = 0$$

である．ここで $\overline{W}$ は path space としておく。

次に $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, +\infty\}$ として

注) $\mathbb{B}(D)$ はD上の有界可測函数の全体。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$\mathcal{S}=(D\times\mathcal{N})\cup\{\Delta\}$$
$$W^{\circ}=(\overline{W}-\{w_{\Delta}\})\times\mathcal{N}\cup\{w_{\Delta}\}$$

(3.12) $$x_t^{\circ}(w^{\circ})=\begin{cases}(\overline{x}_t(w),k) , & w^{\circ}=(w,k)\in(\overline{W}-\{w_{\Delta}\})\times\mathcal{N},\ \text{且つ}\ t<\overline{\zeta}(w)\ \text{のとき},\\ \Delta , & w^{\circ}=w_{\Delta}\ \text{のとき, 又は}\ t\geqq\overline{\zeta}(w)\ \text{のとき},\end{cases}$$

$$\zeta^{\circ}(w^{\circ})=\begin{cases}\overline{\zeta}(w) , & w^{\circ}=(w,k)\in(\overline{W}-\{w_{\Delta}\})\times\mathcal{N}\ \text{のとき}\\ 0 , & w^{\circ}=w_{\Delta}\ \text{のとき}\end{cases}$$

$$\theta_t^{\circ}(w,k)=\begin{cases}(\theta_t w,k) , & t<\overline{\zeta}(w)\ \text{のとき}\\ w_{\Delta} , & t\geqq\overline{\zeta}(w)\ \text{のとき},\end{cases}$$

とおき，x_s° $(\forall s\leq t)$ から生成された σ-*field* を $\mathcal{N}_t^{\circ}$，$\mathcal{N}_{\infty}^{\circ}=\bigvee_{t>0}\mathcal{N}_t^{\circ}$ として，$A\in\mathcal{N}_{\infty}^{\circ}$ に対し

(3.13) $$P^{\circ}_{(x,k)}[A]=P_x[(A,\ k_0(w)=k)|_{\overline{W}}] ,$$
$$P^{\circ}_{\Delta}[A]=P_{\Delta}[A\cap\overline{W}]$$

と置く．上で $x_t^{\circ}(w^{\circ})=(\overline{x}_t(w),\ k_t(w))$ と書いている。勿論 $w^{\circ}=(w,k)$ のときには $k_t(w)=k$，$(\forall t<\overline{\zeta}(w))$ である。

この $\{W^{\circ},\ \mathcal{N}_t^{\circ},\ x_t^{\circ},\ \zeta^{\circ},\ P^{\circ}_{(x,n)},\ \theta_t^{\circ}\}$ は明らかに $\mathcal{S}=(D\times\mathcal{N})\cup\{\Delta\}$ 上の強マルコフ過程を定義する。

さて次に

(3.14) $$\pi((x,k),dy^{\circ})=\begin{cases}\delta_x(dy)\delta_{k+1,k'} , & c^{+}(x)\geqq 0\ \text{のとき},\ y^{\circ}=(y,k')\\ \delta_{\Delta}(dy^{\circ}) , & c^{-}(x)\geqq 0\ \text{のとき},\end{cases}$$

$$\pi(\Delta,\ dy^{\circ})=\delta_{\Delta}(dy^{\circ})$$

とおき，更に上の π を用いて

(3.15) $$\pi(w^{\circ},\ dy^{\circ})=\pi(x^{\circ}_{\zeta^{\circ}(w^{\circ})-}(w^{\circ}),\ dy^{\circ}),\qquad \zeta^{\circ}(w^{\circ})>0\ \text{のとき}$$
$$=\delta_{\Delta}(dy^{\circ}) ,\qquad \zeta^{\circ}(w^{\circ})=0\ \text{のとき},$$

とおくと $\pi(w^{\circ},\ dy^{\circ})$ は $W^{\circ}\times\mathcal{S}$ 上の *kernel* であって，*instantaneous distribution* の条件を満たしている。従って，上で述べたマルコフ過程のつ

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

なぎ合せ法により x_t° の path をつなぎ合わせることによって $\mathcal{S}$ 上の強マルコフ過程を作ることが出来る。それを $\{\Omega, \mathcal{N}_t, X_t, P^\circ_{x^\circ}, x^\circ \in \mathcal{S}\}$ と書くことにしよう。又，簡単のために

(3.16) $$\bar{X}_t(\omega) = (x_t(\omega),\ k_t(\omega)),$$

と書くことにしよう。

上で構成されたマルコフ過程 $\{\Omega, \mathcal{N}_t, X_t, P^\circ_{x^\circ}, x^\circ \in \mathcal{S}\}$ を年令つき Markov process と呼ぶことにする。この process の性質を調べよう．まず

(3.17) $$\sigma(\omega) = inf\{t;\ k_t(\omega) \neq k_0(\omega)\}$$

とし，

(3.18) $$\sigma_0 \equiv 0,\quad \sigma_1 = \sigma,\quad \sigma_n = \sigma_{n-1} + \theta_{\sigma_{n-1}}\sigma \qquad (n \geqq 2)$$

とおく。

前節で定義したように，$f \in \mathbb{B}(D)$，$\lambda > 0$ に対し

(3.19) $$\begin{cases} f\cdot\lambda(x, k) = f(x)\lambda^k, & (x,k) \in D \times \mathcal{N} \quad \text{のとき}^{\text{注)}} \\ f\cdot\lambda(\Delta) = 0 \end{cases}$$

とおく。

そのとき次の Lemma が成立する。

Lemma 3.1. $f \in \mathbb{B}(D)$，$\lambda > 0$ として，

(3.20) $$E^\circ_{(x,k)}[f\cdot\lambda(X_t):\ \sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}] = E_x[f(x_t)e^{-\varphi_t}\cdot\frac{(\lambda\varphi_t^+)^n}{n!}]\,\lambda^k$$

がなり立つ。右辺は基礎の process による平均であり，φ_t, φ_t^+ は (3.10) で定義した additive functional である。

Remark. 従って $E^\circ_{(x,k)}[f\cdot\lambda(X_t);\ \sigma_n \leqq t < \sigma_{n+1}] = E_{(x,0)}[f\cdot\lambda(X_t);\ \sigma_n \leqq t < \sigma_{n+1}]\lambda^k$。

(Proof) induction による．$n=0$ のときは process の構成の仕方から

$$E^\circ_{(x,k)}[f\cdot\lambda(X_t);\ t < \sigma]$$

注） $\lambda > 1$ のとき $\lambda^{+\infty} = \infty$，$\lambda < 1$ のとき $\lambda^{+\infty} = 0$，$\lambda = 1$ のとき $\lambda^{+\infty} = 1$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$= \bar{E}_x[f(\bar{x}_t);\ t<\zeta]\lambda^k$$
$$= E_x[f(x_t)e^{-\varphi_t}]\lambda^k .$$

$n-1$ で成立しているとしよう．

$$I = E^\circ_{(x,k)}[f\cdot\lambda(X_t);\ \sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}]$$
$$= E^\circ_{(x,k)}[f\cdot\lambda(X_t);\ \sigma_n \leq t < \sigma_{n+1},\ C^+(X_{\sigma-}) \geq 0]^{\text{注1)}}$$
$$= E^\circ_{(x,k)}[E^\circ_{X_\sigma}[f\cdot\lambda(X_{t-s});\ \sigma_{n-1} \leq t-s < \sigma_n]|_{s=\sigma};\ C^+(X_{\sigma-}) \geq 0]$$

$E^\circ_{(x,k)}[g(X_{\sigma-})] = E_x[\int_0^\infty g(x_s)e^{-\varphi_s}d\varphi_s]$ 注2) であること及び $P^\circ_{(x,k)}$ 測度 1 で $k_\sigma = k_0+1$ であることに注意して，

$$I = E_x[\int_0^t d\varphi_s e^{-\varphi_s} E_{x_s}[f(x_{t-s})e^{-\varphi_{t-s}}\frac{(\lambda\varphi^+_{t-s})^{n-1}}{(n-1)!}];\ C^+(x_{s-}) \geq 0]\lambda^{k+1}$$
$$= E_x[\int_0^t d\varphi^+_s e^{-\varphi_s} E_{x_s}[f(x_{t-s})e^{-\varphi_{t-s}}\frac{(\lambda\varphi^+_{t-s})^{n-1}}{(n-1)!}];\ C^+(x_{s-}) \geq 0]\lambda^{k+1}\ ^{\text{注3)}}$$
$$= E_x[\int_0^t d\varphi^+_s e^{-\varphi_s} f(x_t)e^{-\varphi_{t-s}(\theta_s\omega)}\frac{(\lambda\varphi^+_{t-s}(\theta_s\omega))^{n-1}}{(n-1)!}]\lambda^{k+1}$$
$$= E_x[e^{-\varphi_t}f(x_t)\int_0^t \lambda d\varphi^+_s \frac{(\lambda(\varphi^+_t-\varphi^+_s))^{n-1}}{(n-1)!}]\lambda^k$$
$$= E_x[f(x_t)e^{-\varphi_t}\frac{(\lambda\varphi^+_t)^n}{n!}]\lambda^k .$$

<u>Corollary 3.2.</u>　$f \in \mathbb{B}(D)$， $\lambda > 0$ として，

(3.21)　$E^\circ_{(x,k)}[f\cdot\lambda(X_t)] = E_x[f(x_t)e^{-\varphi_t+\lambda\varphi^+_t}]\lambda^k$

が成立する。

今後，以上の議論に現われた $\lambda>0$ を<u>年令の weight</u> と呼ぶことにしよう。

注1)　$C^-(X_{\sigma-}) > 0$ ならば $f\cdot\lambda(X_t) = 0$ であることに注意．

注2)　*Nagasawa-Sato* [4] 参照．

注3)　$\int_0^t I_{\{C^+(x_{s-}) \geq 0\}}\, d\varphi^-_s = 0$ に注意。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

さて，ここで年令の weight を $\lambda=2$ としてみよう。そのとき (3.21) より

$$E^{\circ}_{(x,0)}[f\cdot 2(X_t)] = E_x[f(x_t)\, e^{\varphi_t^{+}-\varphi_t^{-}}]$$

となる．今，$\alpha>0$ として，

$$G_\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x[f(x_t)]\,dt$$

$$R_\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x[f(x_t)\, e^{\varphi_t^{+}-\varphi_t^{-}}]\,dt$$

とすれば，Kac の公式により（cf. [ ]）

(3.22) $\quad G_\alpha f - R_\alpha f + G_\alpha(C R_\alpha f) = 0$

がなりたつ。従って，semi-group T_t の Ito-McKean の意味の generator を $\mathfrak{G}$ とすると[注1)],
semi-group

$$T_t^{\circ} f(x) = E_x[f(x_t)\, exp(\int_0^t C(x_s)\,ds)]$$

の generator $\mathfrak{G}^{\circ}$ は

$$\mathfrak{G}^{\circ} = \mathfrak{G} + C$$

となる。

特に T_t が $\mathbb{C}(D)$[注2)]上の強連続半群で $C\in\mathbb{C}(D)$ ならば，T_t の Hille-Yosida の generator を G として，

$$u(t,x) = E^{\circ}_{(x,0)}[f\cdot 2(X_t)]$$

は

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = (G+C)\,u_t$$

を満たすことがわかる。

注意. $C\leq 0$ ならば，上の議論は killing に帰着し，$C\geqq 0$ ならば，mass の creation である。

注1) Ito [8], Ito-McKean [10] 参照.

注2) $\mathbb{C}(D)$ は D 上の有界連続函数の全体.

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

§4. 年令附 Branching Markov process.

この節では年令附分枝 Markov process を構成しよう。勿論，これは次節で述べる一般の場合に含まれているのであるが，筋道を理解する上で重要と思うので，この簡単の場合を重複を厭わずここで繰り返すことにしよう。

さて，$\{\Omega,\ \mathcal{N}_t,\ X_t,\ P^{\circ}_{x^{\circ}},\ x^{\circ}\in\mathcal{S}\}$ を前節で構成した年令附 Markov process としよう。

この節では簡単のため，$C\in\mathbb{B}(D)$，$C\geqq 0$ とし，

$$\varphi_t(\omega)=\int_0^t C(x_s)\,ds \tag{4.1}$$

とおく。ここで $X_t=(x_t,\ k_t)$ と書いている。

X_t の $exp(-\varphi_t)$-subprocess を non-branching part とする Branching Markov process を作ろう。それには Vol. 23，第6章の確率論的構成法又は第7章の解析的構成法をそのまま適用すればよい。ただしここでは年令の変数を導入している点に注意する必要があるが，形式的にはまったく同じである。(state space が $\mathcal{S}=D\times\mathcal{N}$ となっているだけである。) しかし，単に引用するにとどめず，以下で簡単に確率論的な作り方について述べよう。

Branching を起こす時点以前の粒子の行動を記述するのが，上で述べた X_t の $exp(-\varphi_t)$-subprocess である。それを $\{\overline{\Omega},\ \overline{\mathcal{N}}_t,\ \overline{\zeta},\ \overline{X}_t,\ \overline{P}_x,\ x^{\circ}\in\mathcal{S}\}$ と書くことにしよう。

n 個の粒子が独立に運動している状態を記述するため，$\{\overline{\Omega},\ \overline{\mathcal{N}}_t,\ \overline{X}_t,\ \overline{P}_{x^{\circ}}\}$ の n 重直積を考える．それを $\{\overline{\Omega}^n,\ \overline{\mathcal{N}}_t^n,\ \overline{\zeta},\ \overline{X}_t^n,\ \overline{P}^n_{\underline{x}^{\circ}},\ \underline{x}^{\circ}\in\mathcal{S}^n\}$ としよう．ただし，粒子の個性を認めない為に，対称直積である。(Vol. 23 参照)。 従って，$\mathcal{S}^n$ は次のように classify された空间である。すなわち，$\mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\cdots\times\mathcal{S}$ の点を $(\underline{x},\ \underline{k})$，$\underline{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\underline{k}=(k_1,\cdots,k_n)$ と書くことにし，$(\underline{x},\underline{k})$ と $(\underline{y},\ \underline{\ell})$ は $(x_1,\cdots,x_n)$ が $(y_1,\cdots,y_n)$ の置換であり，且つ $|\underline{k}|=\sum_{j=1}^n k_j=\sum_{j=1}^n \ell_j=|\underline{\ell}|$ であるとき equivalent であるとする。

その class を $[\underline{x},\underline{k}]$ と書くことにしよう．$\mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\cdots\times\mathcal{S}$ をその equivalent relation で割ったものが $\mathcal{S}^n$ である。

更に

$$\overline{S}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}^n\cup\{\Delta\},\qquad \text{但し，}\ \mathcal{S}^{\circ}=\{(\partial,\ k)\}_{k=0}^{+\infty} \tag{4.2}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$\Omega'=\bigcup_{n=0}^{\infty}\bar{\Omega}^n\ ,\quad \bar{\Omega}^n=\underbrace{\bar{\Omega}\times\cdots\times\bar{\Omega}}_{n}\ ,\quad \bar{\Omega}^0=\{\omega_{(\partial,k)}\}$$

とし，$\omega\in\Omega'$ に対し

$$X'_t(\omega)=\begin{cases}\bar{X}^n_t(\omega) & ,\quad \omega\in\bar{\Omega}^n \text{ のとき,}\\ (\partial,k) & ,\quad \omega=\omega_{(\partial,k)} \text{ のとき,}\end{cases}$$

$$(4.3)\qquad \zeta'(\omega)=\begin{cases}\bar{\zeta}(\omega) & ,\quad \omega\in\bar{\Omega}^n \text{ のとき,}\\ \infty & ,\quad \omega=\omega_{(\partial,k)} \text{ のとき,}\end{cases}$$

$$\theta'_t\omega=\begin{cases}\bar{\theta}_t\omega & ,\quad \omega\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{\Omega}^n \text{ のとき,}\\ \omega_{(\partial,k)} & ,\quad \omega=\omega_{(\partial,k)} \text{ のとき,}\end{cases}$$

とおき，X'_s ($\forall s\leq t$) から生成された σ-*field* を $\mathcal{N}'_t$ とする。又 $\mathcal{N}'_\infty=\bigvee_{t>0}\mathcal{N}'_t$ である。$A\in\mathcal{N}'_\infty$ に対し

$$(4.4)\qquad \begin{cases}P'_{[\underline{x},\underline{k}]}[A]=\bar{P}^n_{[\underline{x},\underline{k}]}[A\cap\bar{\Omega}^n]\ ,\quad [\underline{x},\underline{k}]\in S^n,\quad n=1,2,\cdots\\ P'_{(\partial,k)}[A]=\delta_{\{\omega_{(\partial,k)}\}}(A)\\ P'_\Delta \text{ は } P'_\Delta[X'_t(\omega)\equiv\Delta,\ \forall t\in[0,\infty)]=1 \text{ となる } (\Omega',\mathcal{N}'_\infty)\\ \text{上の確率測度とする}\end{cases}$$

とおくと，$\{\Omega',\mathcal{N}'_t,\zeta',X'_t,P'_{[\underline{x},\underline{k}]},[\underline{x},\underline{k}]\in\bar{S},\theta'_t\}$ は $\bar{S}$ 上の *strong Markov process* になる。*Vol. 23* ではこれを $\bar{X}^n_t$ の直和と呼んでいる。

次に，粒子の個数の変化（年令の変化を込めて）を記述するために *instantaneous distribution* を作ろう。

一個の粒子が n 個に分裂する確率を $q_n(x)$ とする。

$$(4.5)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}q_n(x)=1,\quad q_n(x)\geq 0,\quad q_1(x)\equiv 0$$

ある点 x で n 個に分裂した粒子が $d\underline{y}$ に分布するとして，それを $\pi_n(x,d\underline{y})$ としよう。次に $\underline{y}^\circ=(\underline{y},\underline{k})$ として

$$(4.6)\qquad \begin{cases}\pi((x,\ell),d\underline{y}^\circ)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x)\pi_n(x,d\underline{y}\cap D^n)\,\delta_{\ell,|\underline{k}|}\\ \text{但し}\quad \pi_0((x,\ell),d\underline{y}^\circ)=\delta_{(\partial,\ell)}(d\underline{y}^\circ)\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

とし，$\omega \in \overline{\Omega}^n$ に対し

$$(4.7)\quad \mu'(\omega, d\underline{x}_1^\circ, \cdots, d\underline{x}_n^\circ) = \begin{cases} = \sum_{k=1}^{n} I_{\{\zeta'(\omega)=\zeta(\omega^k)<\infty\}}(\omega)\cdot \pi(X'_{\zeta'(\omega^k)-}(\omega), d\underline{x}_k^\circ) \\ \times \prod_{j\neq k} \delta_{\{X'_{\zeta'(\omega)-}(\omega^j)\}}(d\underline{x}_j^\circ), \quad \zeta'(\omega)>0 \text{ のとき}, \\ = \delta_{(\Delta,\cdots,\Delta)}(d\underline{x}_1^\circ, \cdots, d\underline{x}_n^\circ), \quad \zeta'(\omega)=0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

とおく。ここで $\omega=(\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^n)$ と書いている。更に γ を $\overline{S}^n$ から $\overline{S}$ への自然な *mapping* として，

$$(4.8)\quad \begin{cases} \mu(\omega, d\underline{x}^\circ) = \mu'(\omega, \gamma^{-1}(d\underline{x}^\circ)) \\ \mu(\omega_{(\partial,k)}, d\underline{x}^\circ) = \delta_{(\partial,k)}(d\underline{x}^\circ) \end{cases}$$

とおくと，μ は *instantaneous distribution* になることがわかる。

この $(X'_t, P'_{[\underline{x},\underline{k}]})$ と μ を用いて，前節で述べたつなぎ合せ法により構成した *Markov process* を $\{\Omega, \mathcal{N}_t, Y_t, P_{[\underline{x},\underline{k}]}, [\underline{x},\underline{k}]\in \overline{S}\}$ 注) としよう。この *process* を年令附分枝マルコフ過程と呼ぶことにする。実際，*Vol.23* と同様にして次の定理が成りたつことがわかる。

Theorem 4.1.　Y_t の *semi-group* を U_t とする。$f\in \mathbb{B}(D)$, $\|f\|\leq 1$ $\lambda>0$ として，

$$(4.10)\quad U_t\widehat{f\cdot\lambda}(\underline{x},\underline{k}) = \widehat{(U_t\widehat{f\cdot\lambda})|_D\cdot\lambda}(\underline{x},\underline{k})$$

がなりたつ。ここで $(\ )|_D$ は $\overline{S}$ 上の函数を $D\times\{0\}$ へ制限し，それを D 上の函数とみなしたものである。

ここで $\widehat{\ }$ は次のように定義される。$f\in \mathbb{B}(D)$ として

$$\widehat{f\cdot\lambda}(\underline{x},\underline{k}) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n} f(x_j)\lambda^{|k|}, & [\underline{x},\underline{k}]=(x_1,\cdots,x_n, k_1,\cdots,k_n) \text{ のとき} \\ \lambda^{|k|}, & [\underline{x},\underline{k}]=(\partial, k) \text{ のとき} \\ 0, & [\underline{x},\underline{k}]=\Delta \text{ のとき} \end{cases}$$

である。ここで $|\underline{k}|=\sum_{j=1}^{n} k_j$, $\underline{k}=(k_1,\cdots,k_n)$ である。

注) ここで同じ Ω なる記号を用いているが混乱は起こらないであろう。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

(4.10) は Vol. 23 に於ける branching property と少々形がちがっているが，それは次の Lemma に注意すればよい。

<u>Lemma 4.2.</u> 記号は上の定理と同じとして，

(4.11) $$U_t \widehat{f\cdot\lambda}(\underline{x}, \underline{k}) = U_t \widehat{f\cdot\lambda}(\underline{x}, 0)\,\lambda^{|\underline{k}|}.$$

ここで $|\underline{k}| = \sum_{j=1}^{n} k_j$，$\underline{k} = (k_1, \cdots, k_n)$.

(Proof) Vol. 23 の branching property により，$(\underline{x}, \underline{k}) = (x_1, \cdots, x_n, k_1, \cdots, k_n)$ のとき

(4.12) $$U_t \widehat{f\cdot\lambda}(\underline{x}, \underline{k}) = \prod_{j=1}^{n} U_t \widehat{f\cdot\lambda}(x_j, k_j)$$

である。一方

$$U_t \widehat{f\cdot\lambda}(x_j, k_j) = E_{(x_j, k_j)}[\widehat{f\cdot\lambda}(Y_t)]$$

Lemma 3.1. の注意により

$$= E_{(x_j, 0)}[E_{Y_\sigma}[\widehat{f\cdot\lambda}(Y_{t-s})]|_{s=\sigma}]\,\lambda^{k_j}$$

$$= E_{(x_j, 0)}[\widehat{f\cdot\lambda}(Y_t)]\,\lambda^{k_j}$$

となり，(4.12) と合わせて，(4.11) を得る. q.e.d.

次に，Skorohod 方程式を書き上げるために，次の量を導入する。
τ を first branching time として，

(4.13) $$\begin{cases} U_t^0 \widehat{f\cdot\lambda}(x, k) = E_{(x,k)}[\widehat{f\cdot\lambda}(Y_t);\ t < \tau] \\ K((x,k), ds, d(y, k+p)) = P_{(x,k)}[\tau \in ds,\ Y_{\tau-} \in d(y, k+p)] \end{cases}$$

(4.14) $$F[x; u] = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) \int \pi_n(x, d\underline{y})\,\hat{u}(\underline{y})$$

とおく.

<u>Theorem 4.3.</u> $f \in \mathbb{B}(D)$，$\|f\| \leq 1$，$\lambda > 0$ として

(4.15) $$u(t, x) = U_t \widehat{f\cdot\lambda}(x, 0)$$

とおくと，$u(t, x)$ の存在する範囲で

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

(4.16) $$u(t,x)= U_t^\circ f\cdot\lambda(x,0)+\int_0^t\int_{D\times N} K((x,0),ds,d(y,p))\,\lambda^p[y;u(t-s,\cdot)]$$

を満たす。

証明は省略する。Vol. 23 と同じである。

(4.16) 式は process Y_t を作る際の基礎の process[注1)] の semi-group T_t を用いて簡単に書き表わすことが出来る。

Lemma 4.4. $\lambda=2$ とすると，

(4.17) $$\int_{D\times N} K((x,0),ds,d(y,p))\,2^p f(y) = T_s(c\cdot f)(x)\,ds$$

(4.18) $$U_t^\circ\,\widehat{f\cdot 2}\,(x,0) = T_t f(x)$$

が成り立つ。

(Proof) (4.17) を示す。まず，年令附 Markov process の expectation は $E^\circ_{(x,k)}$ で，その $\exp(-\varphi_t)$-subprocess の expectation は $\bar{E}_{(x,k)}$ で表わしていたことを思い出そう。その記号を使うと，

$$\int_{D\times N} K((x,0),ds,d(y,p))2^p f(y)$$
$$= E_{(x,0)}[\tau\in ds,\ f(Y'_{\tau-})\,2^{k_{\tau-}}]\quad \text{注2)}$$
$$= E_{(x,0)}[\tau\in ds,\ f\cdot 2(Y_{\tau-})]$$
$$= \bar{E}_{(x,0)}[\zeta\in ds,\ f\cdot 2(X_{\zeta-})]$$
$$= E^\circ_{(x,0)}[f\cdot 2(X_s)\,e^{-\varphi_s}\,d\varphi_s]$$
$$= E_x[f(x_s)\,C(x_s)\,ds\,e^{\varphi_s}\,e^{-\varphi_s}]\ .$$

ここで，Corollary 3.2. と $\varphi_s=\int_0^t c(x_s)ds$ であることを用いている。等号の最後は丁度 $T_s(cf)(x)ds$ になっていて，(4.17) が示された。

(4.18) も上と同じ記号を使い Corollary 3.2 に注意して次のように示される。

$$U_t^\circ\ \widehat{f\cdot 2}\,(x,0)$$

注1) D上の conservative strong Markov process.

注2) $Y_t=(Y'_t,k_t)$ と書いた Y'_t は「空間変数の部分」である。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$= E_{(x,0)}[f\cdot 2(Y_t);\quad t<\tau]$$

$$= \bar{E}_{(x,0)}[f\cdot 2(X_t)]$$

$$= \mathring{E}_{(x,0)}[f\cdot 2(X_t)\, e^{-\varphi_t}]$$

$$= E_x[f(x_t)\, e^{\varphi_t} e^{-\varphi_t}]$$

$$= T_t f(x).$$

Corollary 4.5. $f\in \mathbb{B}(D)$, $\|f\|\leq 1$ $\lambda>0$ として,

(4.15') $$u(t,x) = U_t \widehat{f\cdot 2}(x,0)$$

とおくと, $u(t,x)$ はその存在する範囲で

(4.16') $$u(t,x) = T_t f(x) + \int_0^t T_s(C\cdot F[\cdot, u(t-s)])(x)\, ds$$

を満たす。

注意. (4.16') を semi-linear parabolic equation の形に書きかえるためには, 解析的な条件を付け加えなくてはならない。詳しい議論はここでは省略するが, T_t が $C(D)$ 上の強連続半群であって, Fが適当な条件をみたせば (4.16') から

(4.19) $$\frac{u_{t+h}-u_t}{h} = \frac{T_h u_t - u_t}{h} + \frac{1}{h}\int_0^h ds\, T_s(C\cdot F[\cdot, u_{t+h-s}])$$

となり, u_t は

(4.20) $$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \mathcal{G} u_t + C\cdot F[u_t]$$

を満たすであろうことは推察出来るであろう。ここで $\mathcal{G}$ は T_t の generator である。特に基礎の process が Brownian motion ならば, (4.20) は

(4.21) $$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u_t + CF[u_t]$$

となる。$\pi_n(x, d\underline{y}) = \delta_{(x,\cdots,x)}(d\underline{y})$ であれば, $F[x\ \ \xi] = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)\xi^n$ である。

Branching Markov process の場合と異なり, ここでは年令に weight 2 をつけているので, 初期値f が十分小さくても u_t が爆発する場合が生ずる。そ

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

のことについては§6で

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u_t + cu^\beta \quad , \quad (\beta \geq 1)$$

を含む場合について議論する。

§5 符号をもった年令附Branching Markov process.

ここでは一歩進んで $F[u]=\Sigma q_n(x)u^n$ に現われる $q_n(x)$ が negative な値をとることもゆるす場合に議論を拡張しよう．それを可能にするのが符号をもった年令附 Branching Markov process である。

さて，この節でも $\{\Omega, \mathcal{N}_t, X_t, P^\circ_{x^\circ}, x^\circ \in \mathcal{S}\}$ を３節で与えた $\mathcal{S}=(D\times N)\cup\{\Delta\}$ 上の年令附 Markov process としよう．又，前節と同様に $c \geq 0$, $c \in \mathbb{B}(D)$ をとり

$$(5.1) \qquad \varphi_t = \int_0^t c(x_s)ds \quad , \quad 但し \quad X_s=(x_s, k_s)$$

として，X_t の $m_t = exp(-\varphi_t)$-subprocess の n重直積を作り，その直和を $\{\Omega', \mathcal{N}'_t, \zeta', X'_t, P'_{[\underline{x},\underline{k}]}, [\underline{x},\underline{k}] \in \bar{S}\}$ とする。

さて，この節ではさらに次のような構造を付加する。まず，

$$(5.2) \qquad \begin{aligned} &S_1 = (\bar{S}\times J)\cup\{\Delta\}, \qquad J=\{0,1,2,3\} \\ &\Omega^\circ = \Omega' \times J \end{aligned}$$

とし，新たに random variable Z°_t を

$$(5.3) \qquad \begin{aligned} &Z^\circ_t(\omega^\circ) = (X'_t(\omega), j) \;, \quad \omega^\circ = (\omega, j) \quad のとき \\ &\zeta^\circ(\omega^\circ) = \zeta'(\omega) \qquad\qquad , \qquad〃 \qquad\qquad 〃 \end{aligned}$$

で定義しよう。

Z°_s, $(\forall s \leq t)$ から生成された σ-field を $\mathcal{N}^\circ_t$ とし，$\mathcal{N}^\circ_\infty = \bigvee_{t\geq 0}\mathcal{N}^\circ_t$ とおく。$\mathcal{N}^\circ_\infty$ 上の probability measure を $(\underline{x}, \underline{k}, j) \in S_1$ に対し

$$(5.4) \qquad P^\circ_{[\underline{x},\underline{k},j]}[A] = P'_{[\underline{x},\underline{k}]}[(A, J_0=j)|_{\Omega'}] \quad , \quad A \in \mathcal{N}^\circ_\infty$$

とおく．ここで $Z^\circ_t = (X'_t, J_t)$ と書いている。勿論 J_t は $\{0,1,2,3\}$の値をとる。そのとき $\{\Omega^\circ, \mathcal{N}^\circ_t, \zeta^\circ, Z^\circ_t, P^\circ_{[\underline{x},\underline{k},j]}\}$ は S_1 上の強マルコフ過程

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

である．

次に $q_n \in \mathbb{B}(D)$ が次の条件を満たしているとしよう。

(5.5) $$\sum_{n=0}^{\infty} (q_n^+(x) + q_n^-(x)) = 1$$

ただし，ここで

(5.6) $$q_n = q_n^+ - q_n^- \quad , \quad q_n^+ = q_n \vee 0 \quad , \quad q_n^- = (-q_n) \vee 0$$

である。ここでは $n=1$ もゆるしている点に注意していただきたい。(Vol. 23 の branching process では $q_1 \equiv 0$ であった)。又，$\pi_n(x, d\underline{y})$ は前節と同様，$D \times D^n$ 上の kernel であるとして，π^+, π^- を前節と同様に次のように定義する。すなわち，$\underline{y}^\circ = (\underline{y}, \underline{k}) \in \overline{S}$ として

(5.7) $$\begin{cases} \pi^+((x,\ell), d\underline{y}^\circ) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^+(x)\, \pi_n(x, d\underline{y} \cap D^n)\, \delta_{\ell, |\underline{k}|} \\ \pi^-((x,\ell), d\underline{y}^\circ) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^-(x)\, \pi_n(x, d\underline{y} \cap D^n)\, \delta_{\ell, |\underline{k}|} \\ \text{但し，} \pi_0((x,\ell), d\underline{y}^\circ) = \delta_{(\partial,\ell)}(d\underline{y}^\circ) \quad \text{である。} \end{cases}$$

さて，以下では $Z_t^\circ = (x_t^\circ, k_t^\circ, J_t^\circ)$, $X_t' = (x_t^\circ, k_t^\circ)$ と書くことにして，次のように kernel を定義する。$\omega = (\omega^1, \cdots, \omega^n) \in \overline{\Omega}^n$ に対し，

(5.8) $$\pi^+(\omega, d\underline{x}_1^\circ, \cdots, d\underline{x}_n^\circ) \begin{cases} = \sum_{k=1}^{n} I_{\{\zeta(\omega) = \zeta(\omega^k) < \omega\}}(\omega)\, \pi^+(X'_{\zeta'(\omega^k)-}(\omega^k), d\underline{x}_k^\circ) \\ \times \prod_{j \neq k} \delta_{\{X'_{\zeta'(\omega)-}(\omega^j)\}}(d\underline{x}_j^\circ), \quad \zeta'(\omega) > 0 \text{ のとき，} \\ = \delta_{(\Delta, \cdots, \Delta)}(d\underline{x}_1^\circ, \cdots, d\underline{x}_n^\circ), \quad \zeta'(\omega) = 0 \text{ のとき，} \end{cases}$$

とおく。$\pi^-(\omega, d\underline{x}_1^\circ, \cdots, d\underline{x}_n^\circ)$ も同様に定義する．γ を $\overline{S}^n$ から $\overline{S}$ への自然な mapping として，

(5.9) $$\begin{cases} \mu^+(\omega, d\underline{x}^\circ) = \pi^+(\omega, \gamma^{-1}(d\underline{x}^\circ)) \\ \mu^+(\omega_{(\partial,k)}, d\underline{x}^\circ) = \delta_{(\partial,k)}(d\underline{x}^\circ) \end{cases}$$

として，$\mu^-(\omega, d\underline{x}^\circ)$ も同様に定義する。

さて，上の μ^+, μ^- を用いて $\Omega^\circ \times S_1$ 上の instantaneous distribution $\mu((\omega, j), d(\underline{x}^\circ, j'))$ を定義しよう。すなわち，次のようにおく．

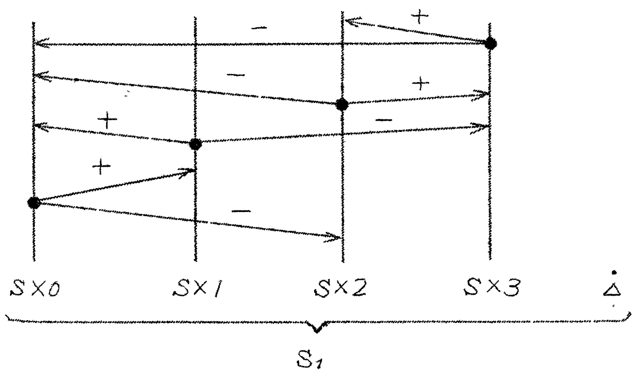
Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$(5.10)\quad \begin{aligned} &\mu((\omega, j),\ d(x^\circ, j')) \\ &= \mu^+(\omega, d\underline{x}^\circ)\,\delta_{j_1, j'} + \mu^-(\omega, d\underline{x})\,\delta_{j_2, j'} \ . \end{aligned}$$

ここで j_1, j_2 は j の函数であって，次の表で与えられる。

j	j_1	j_2
0	1	2
1	0	3
2	3	0
3	2	1

この関係を図示すると，



である。このようにして定義された $\mu((\omega, j),\ d(x^\circ, j'))$ が *instantaneous distribution* になることはほとんど明らかであろう。

従って，3節で述べた *path* のつなぎ合せ法により *process* $\{\Omega^\circ, N_t^\circ, \zeta^\circ, Z_t^\circ, P^\circ_{[\underline{x}, \underline{k}, j]}\}$ と *kernel* μ を用いて，S_1 上の強マルコフ過程を作ることが出来る。それを $\{\Omega, N_t, Z_t, P_{[\underline{x}, \underline{k}, j]}, (\underline{x}, \underline{k}, j) \in S_1\}$ と書こう。今後この *process* を<u>符号をもった年令附 *Branching Markov process*</u> と呼ぶことにしよう。この *process* は *Vol.* 23 で扱われた *Branching Markov process* と本質的には同じ性質を持っている。以下でその性質を調べよう。

まず，*mapping* $\frown$ を拡張して，次のような *mapping* を考える。

<u>定義 5.1.</u>　$f \in \mathbb{B}(D)$ ，$\lambda > 0$ に対し

$$(5.12)\quad \widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x}, \underline{k}, j) = (-1)^{[\frac{j}{2}]}\,\widehat{f\cdot\lambda}(\underline{x}, \underline{k})$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

とおく。右辺の[ ]はGaussの記号，$\widehat{f\cdot\lambda}$は前と同じであるが，繰返して書けば，

$$(5.13)\qquad \widehat{f\cdot\lambda}(\underline{z})=\begin{cases}\lambda^{|\underline{k}|}\prod_{j=1}^{n}f(x_j)\ , & z=(\underline{x},\underline{k})\in S^n \text{ のとき,}\\ \lambda^{k}\ , & \underline{z}=(\partial,k) \text{ のとき,}\\ 0\ , & \underline{z}=\Delta \text{ のとき,}\end{cases}$$

である。ここで $|\underline{k}|=\sum_{i=1}^{n}k_i$ ，（$\underline{k}=(k_1,\cdots,k_n)$ のとき）である。

記号として，$z_t=(X_t,K_t,J_t)$ と書くことにする。これは S_1 の点を（$\underline{x}$，$\underline{k}$，j）と書いたのと同じ記号法である。

次に

$$(5.14)\qquad \tau(\omega)=\inf\{t;\ J_t(\omega)\neq J_0(\omega)\}$$

とおき，$\tau(\omega)$ を z_t の first branching time と呼ぶことにする。ここで τ をこう呼んだが，例えば $z_{\tau-}\to z_\tau$ のとき，$D\times\{k\}\times\{0\}\to D\times\{k\}\times\{1\}$ という場合もあるので，「Branching」の前と後とで個数が必ずしも変化しているわけではない。この点はVol.23と異なる。

ここで，以下の議論に必要となる簡単なLemmaを一つ述べておこう。

<u>Lemma 5.1.</u>　Fは S_1 上の可積分函数で変数 $\underline{k}$，j には依らないとする。そのとき

$$(5.15)\qquad E_{(\underline{x},\underline{k},j)}[(-1)^{[\frac{J_\tau}{2}]}\lambda^{|K_\tau|}F(X_\tau);\ \tau\le t]$$

$$=(-1)^{[\frac{j}{2}]}\lambda^{|\underline{k}|}E_{(\underline{x},\underline{0},0)}[(-1)^{[\frac{J_\tau}{2}]}\lambda^{|K_\tau|}F(X_\tau);\ \tau\le t]$$

が成り立つ。ここで[ ]はGaussの記号である。

（Proof）　pathのつなぎ合せ法の際のmeasureの作り方から，

(5.15)の左辺 $=\iint P^{\circ}_{[\underline{x},\underline{k},j]}[d\omega^{\circ}]I_{\{\zeta^{\circ}\le t\}}\mu[\omega^{\circ},d(\underline{x}',\underline{k}',j')](-1)^{[\frac{j'}{2}]}\lambda^{|\underline{k}'|}F(\underline{x}')$

年令附Markov processでは(3.21)が成り立つので，まず $\underline{k}$ について

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$=\iint \lambda^{|k|} P^{\circ}_{[x,0,j]}[d\omega^{\circ}] I_{\{\zeta^{\circ}\le t\}} \mu[\omega^{\circ}, d(\underline{x}', \underline{k}', j')](-1)^{[\frac{j'}{2}]} \lambda^{|k'|} F(\underline{x}')$$

となる。更にμの定義の仕方と右辺の integrand が $(-1)^{[\frac{j'}{2}]}$ の形であることに注意すれば，

$$=(-1)^{[\frac{j}{2}]} \lambda^{|k|} \iint P^{\circ}_{[x,0,0]}[d\omega^{\circ}] I_{\{\zeta^{\circ}\le t\}} \mu(\omega^{\circ}, d(\underline{x}', \underline{k}', j'))(-1)^{[\frac{j'}{2}]} \lambda^{|k'|} F(\underline{x}')$$

$=$ (5.15) の右辺

となる。

符号をもった年令附 Branching Markov process の「Branching property」とも云うべき性質として，次の基本定理がなり立つ。

Theorem 5.1. $\{\Omega, \mathcal{N}_t, z_t, P_{[\underline{x},\underline{k},j]}, (\underline{x}, \underline{k}, j)\in S_1\}$ を符号をもった年令附 Branching Markov process とする。そのとき，z_t の半群を U_t として，$f\in \mathbb{B}(D)$，$\|f\|\le 1$，$\lambda>0$ に対し

$$U_t\,\widehat{f\cdot\lambda} = \widehat{(U_t \widehat{f\cdot\lambda})|_D\cdot\lambda} \tag{5.16}$$

がなりたつ。ここで $(\ \ )|_D$ は S_1 上の函数を $D\times\{0\}\times\{0\}$ へ制限し，それを D 上の函数とみなしたものである。

証明に移る前に，ここで簡単に上の process の直観的な意味を考えてみよう．まず state space の変数 $(\underline{x}, \underline{k}, j)$ であるが，$\underline{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\underline{k}=(k_1, k_2,\cdots,k_n)$ のとき，n個の粒子がそれぞれ $x_1, x_2,\cdots, x_n$ にあり，その年令がそれぞれ $k_1, k_2,\cdots, k_n$ であり，$j=0$ or 1 ならばそれらは正の世界を運動しており，$j=2$ or 3 ならば負の世界を運動していると考えるのである。その粒子がある点xで Branching を起こすと，もし $q_n^+(x)>0$ ならば，符号は変化せず，$q_n^-(x)>0$ なら符号が変化して別の世界に移るのである。

さて，上の定理の証明にもどろう。その証明は Vol.23 で property B.III(i),(ii) から Branching property を示した道すじ（p.54 から p.63 まで）とまったく同じである。従って，ここでは符号が入ったことによって生じた二三の事実について述べることにし，証明の細かい点は繰返さないことにする。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$\tau(\omega)$ を z_t の first branching time として，n-th Branching time を

$$(5.17)\qquad \tau_n(\omega) = \tau_{n-1}(\omega) + \theta_{\tau_{n-1}}\tau(\omega) \quad , \quad n \geq 2$$

とし，$\tau_0(\omega) \equiv 0$ としよう。

さて，$f \in \mathbb{B}(D)$ に対し

$$(5.18)\qquad \begin{aligned} U_t^0 \widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x}, \underline{k}, j) &= E_{(\underline{x},\underline{k},j)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(z_t);\ t<\tau] \\ U_t^{(r)} \widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x}, \underline{k}, j) &= E_{(\underline{x},\underline{k},j)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(z_t);\ \tau_r \leq t < \tau_{r+1}] \end{aligned}$$

とおき，更に，

$$(5.19)\qquad \Psi^{(r)}((\underline{x}, \underline{k}, j), ds, d\underline{z}) = P_{[\underline{x},\underline{k},j]}[\tau_r \in ds,\ z_{\tau_r} \in d\underline{z}] , \quad r = 0, 1, 2, \cdots, \quad \underline{z} \in S_1$$

とする。又，$\Psi^{(1)} = \Psi$ とも書くことにしよう。

$$(5.20)\qquad K((x,k,j), dt, d(y, k+p, j)] = P_{(x,k,j)}[\tau \in dt,\ z_{\tau-} \in d(y, k+p, j)]$$

とおく。

まず process の構成の仕方から Vol.23 の Property B.III に対応する次の性質が成り立つことがわかる。

[Property B.III]

(i) $U_t^0 \widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x}, \underline{k}, j) = \widetilde{(U_t^0 f\cdot\lambda)|_D \cdot \lambda}(\underline{x}, \underline{k}, j)$

(ii) $E_{[\underline{x},\underline{k},j]}[\widetilde{f\cdot\lambda}(z_\tau);\ \tau \leq t]$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \int_0^t E_{(x_\ell,k_\ell,j)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(z_\tau);\ \tau \in ds] \cdot \prod_{i\neq\ell} E_{(x_i,k_i,j)}[\widehat{f\cdot\lambda}(z_s);\ s<\tau]$$

ここで，$\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$，$\underline{k} = (k_1, \cdots, k_n)$ とした（nは任意）。

（Proof）　まず (i) を示そう。measure $P_{[\underline{x},\underline{k},j]}$ の定義の仕方に注意すれば，

$$U_t^0 \widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x}, \underline{k}, j) = E_{(\underline{x},\underline{k},j)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(z_t);\ t<\tau]$$

$$= (-1)^{[\frac{j}{2}]} E^0_{(\underline{x},\underline{k},j)}[\widehat{f\cdot\lambda}(z_t);\ t<\tau]$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$= (-1)^{[\frac{j}{2}]} E'_{(\underline{x},\underline{k})}[\widehat{f\cdot\lambda}(X_t);\ t<\zeta']$$

$$= (-1)^{[\frac{j}{2}]} \lambda^{|\underline{k}|} E'_{(\underline{x},0)}[\widehat{f\cdot\lambda}(X_t);\ t<\zeta']$$

$$= (-1)^{[\frac{j}{2}]} \lambda^{|\underline{k}|} \prod_{\ell=1}^{n} E_{(x_\ell,0,0)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(Z_t),\ t<\tau]$$

$$= \widetilde{(U_t^\circ \widehat{f\cdot\lambda}|_D \cdot \lambda}(\underline{x},\underline{k},j)$$

ここで　$\underline{x}=(x_1,\cdots,x_n)$　とした。

次に (ii) を示す。(i) と同様 $P_{[\underline{x},\underline{k},j]}$ の作り方に注意して

$$E_{(\underline{x},\underline{k},j)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(Z_\tau);\ \tau\le t]$$

$$= \sum_{j'=0}^{3} E_{(\underline{x},\underline{k},j)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(Z_\tau);\ J_\tau=j',\ \tau\le t]$$

$$= \sum_{j'=0}^{3}\sum_{\ell=1}^{n}\int_0^t (-1)^{[\frac{j'}{2}]} E_{(\underline{x},\underline{k},j)}[\widehat{f\cdot\lambda}(Z_\tau);\ J_\tau=j',\ \tau=\tau(\omega^\ell)\in ds,\ s<\tau(\omega^i) \text{ for } i\neq\ell]$$

$$= \sum_{j'=0}^{3}\sum_{\ell=1}^{n}\int_0^t E_{(x_\ell,k_\ell,j)}[\widehat{f\cdot\lambda}(Z_s);\ J_\tau=j',\ \tau\in ds]$$

$$\times \prod_{i\neq\ell} E_{(x_i,k_i,j)}[\widehat{f\cdot\lambda}(Z_s);\ s<\tau]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n}\int_0^t E_{(x_\ell,k_\ell,j)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(Z_s);\tau\in ds]\prod_{i\neq\ell} E_{(x_i,k_i,j)}[\widehat{f\cdot\lambda}(Z_s);\ s<\tau].$$

となり，(ii) が成り立つ。

次の事実に注意しよう。

<u>*Lemma* 5.3.</u>　$U_t^{(r)}$ は (5.18) で定義したものである．そのとき，

(5.21)　$$U_t^{(r)}\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x},\underline{k},j) = (-1)^{[\frac{j}{2}]}\lambda^{|\underline{k}|} U_t^{(r)}\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x},\underline{0},0)$$

(5.22)　$$U_t\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x},\underline{k},j) = (-1)^{[\frac{j}{2}]}\lambda^{|\underline{k}|} U_t\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x},\underline{0},0)$$

が成り立つ。

(*Proof*)　$r=0$ のときは (5.21) は [*Property* B.Ⅲ] の (i) である．r で成り立つとしよう。

$$U_t^{(r+1)}\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x},\underline{k},j)$$

$$= E_{(\underline{x},\underline{k},j)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(Z_t);\ \tau_{r+1}\le t<\tau_{r+2}]$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$= E_{(\underline{x},\underline{k},j)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(z_{t-\tau}(\theta_\tau\omega));\ \theta_\tau\tau_r \leq t-\tau < \theta_\tau\tau_{r+1}]$$

$$= E_{(\underline{x},\underline{k},j)}[E_{(X_\tau, K_\tau, J_\tau)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(z_{t-s});\ \tau_r \leq t-s < \tau_{r+1}]|_{s=\tau}]$$

$$= E_{(\underline{x},\underline{k},j)}[(-1)^{[\frac{J_\tau}{2}]}\lambda^{|K_\tau|}E_{(X_\tau,\underline{0},0)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(z_{t-s});\ \tau_r \leq t-s < \tau_{r+1}]|_{s=t}]$$

Lemma 5.1 により

$$= (-1)^{[\frac{j}{2}]}\lambda^{|k|}E_{(\underline{x},\underline{0},0)}[\quad ״ \qquad\qquad ״ \quad]$$

$$= (-1)^{[\frac{j}{2}]}\lambda^{|k|}E_{(\underline{x},\underline{0},0)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(z_t);\ \tau_{r+1} \leq t < \tau_{r+2}]$$

(5.22) は $U_t\widetilde{f\cdot\lambda} = \sum_{r=0}^{\infty} U_t^{(r)}\widetilde{f\cdot\lambda}$ であることに注意すれば (5.21) から明らかである。

さて，*Vol.* 23 では *Branching property* を *Lemma* 2.4〜*Lemma* 2.8 を用いて証明している．*Lemma* 2.8 に対応するものとして次の *Lemma* が成り立つとしよう．

<u>*Lemma* 5.4</u>　　$\underline{x}=(x_1,\cdots,x_n)$,　$\underline{k}=(k_1,\cdots,k_n)$ として，

(5.23)　$$U_t^{(r)}\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x},\underline{k},j) = (-1)^{[\frac{j}{2}]}\sum_{r_1+\cdots+r_n=r}\prod_{i=1}^{n}U_t^{(r_i)}\widetilde{f\cdot\lambda}(x_i,k_i,0)$$

がなり立つ．ここで $\sum_{r_1+\cdots+r_n=r}$ は $r_1+\cdots+r_n=r$ を満たす重複をゆるす順列 $(r_1,\cdots,r_n)$ の全体についての和である。

さて，この *Lemma* が成り立つとすると，*Theorem* 5.2 の証明は次のように完結する．$\underline{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\underline{k}=(k_1,\cdots,k_n)$ としよう。

$$U_t\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x},\underline{k},j) = \sum_{r=0}^{\infty}U_t^{(r)}\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x},\underline{k},j)$$

$$= (-1)^{[\frac{j}{2}]}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r_1+\cdots+r_n=r}\prod_{i=1}^{n}U_t^{(r_i)}\widetilde{f\cdot\lambda}(x_i,k_i,0)$$

$$= (-1)^{[\frac{j}{2}]}\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}U_t^{(r_i)}\widetilde{f\cdot\lambda}(x_i,k_i,0)$$

$$= (-1)^{[\frac{j}{2}]}\prod_{i=1}^{n}\sum_{r_i=0}^{\infty}U_t^{(r_i)}\widetilde{f\cdot\lambda}(x_i,k_i,0)$$

$$= (-1)^{[\frac{j}{2}]}\prod_{i=1}^{n}U_t\widetilde{f\cdot\lambda}(x_i,k_i,0)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$=(-1)^{[\frac{j}{2}]}\lambda^{|k|}\prod_{j=1}^{n} U_t\,\widetilde{f\cdot\lambda}(x_i,0,0)$$

$$=(U_t\widetilde{f\cdot\lambda})_{|D}\cdot\lambda(\underline{x},\underline{k},j)$$

又，作り方から，(∂,k)，Δ は $trap$ であるから，

$$U_t\,\widetilde{f\cdot\lambda}(\partial,k,j)=(-1)^{[\frac{j}{2}]}\lambda^{k}=\widetilde{(U_t\widetilde{f\cdot\lambda})_{|D}\cdot\lambda}(\partial,k,j),$$

$$U_t\,\widetilde{f\cdot\lambda}(\Delta)=E_\Delta[\widetilde{f\cdot\lambda}(X_t)]=0=\widetilde{U_t\widetilde{f\cdot\lambda})_{|D}\cdot\lambda}(\Delta),$$

である。

さて，$Vol.23$ の $Lemma$ を現在の場合に書き換えることにしよう。まず，$Lemma$ 2.4 は強マルコフ性であるから，そのままなり立つ，すなわち，

<u>Lemma 5.5</u>　　$f\in\mathbb{B}(D)$，$\lambda>0$ として，

$$(5.24)\quad U_s^0(U_{t-s}^{(r)}\widetilde{f\cdot\lambda})(\underline{x},\underline{k},j)=\int_s^t\int_{S_1}\Psi((\underline{x},\underline{k},j),dv,d(\underline{x}',\underline{k}',j'))\,U_{t-v}^{(r-1)}\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x}',\underline{k}',j').$$

次に $Lemma$ 2.5 は $property$ B.III の (ii) から導かれる関係式であった。$\widetilde{f\cdot\lambda}$ に対しても類似の関係がなりたつ，すなわち，

<u>Lemma 5.6</u>　　$(\underline{x},\underline{k})\in\mathcal{S}^m$ として，

$$(5.25)\quad \int_0^t\int_{\mathcal{S}^m\times J}\Psi((\underline{x},\underline{k},j),ds,d(\underline{x}',\underline{k}',j'))\,\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x}',\underline{k}',j')$$

$$=\sum_{\ell=1}^{n}\int_0^t\int_{\mathcal{S}^{m-(n-1)}\times J}\Psi((x_\ell,k_\ell,j),ds,d(\underline{x}',\underline{k}',j'))\,\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x}',\underline{k}',j')$$

$$\times\prod_{i\neq\ell}E_{(x_i,k_i,j)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(Z_s);\ s<\tau]$$

がなりたつ。

$Lemma$ 5.6 と $Combinatorial\ lemma$（$Vol.23$, $p219$）により，$Vol.23$, $Lemma$ 2.6 は次の形になる。

<u>Lemma 5.7</u>　　$f_i^t\in\mathbb{B}(D)$，$\lambda>0$，$(\underline{x},\underline{k})\in\mathcal{S}^n$，$m\geq n-1$，$m\neq n$ とする。そのとき，次の関係がなりたつ。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

(5.26) $$\int_0^t\int_{S^m\times J}\Phi((\underline{x},\underline{k},j),dv,d(\underline{x}',\underline{k}',j))\left\{\frac{1}{m!}\sum_{\pi}\prod_{i=1}^{m}f^{v}_{\pi(i)}(x'_i)\cdot\lambda^{k'_i}(-1)^{[\frac{j}{2}]}\right\}$$
$$=\int_0^t\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{{}_mC_{n-1}}\sum_{(q_1,\cdots,q_{m-n+1})}\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\hat{\pi}}^{(\hat{q})}\int_{S^{m-n+1}\times J}\Phi((x_\ell,k_\ell,j),dv,d(\underline{x}',\underline{k}',j'))$$
$$\times\left\{\frac{1}{(m-n+1)!}\sum_{\pi}^{(q)}\prod_{h=1}^{m-n+1}f^{v}_{\pi(q_h)}(x'_h)\,\lambda^{k'_h}(-1)^{[\frac{j}{2}]}\right\}$$
$$\times\prod_{i\neq\ell}E_{(x_i,k_i,j)}[\widehat{f^{v}\hat{q}_{\hat{\pi}(i)}\cdot\lambda}(z_v);\ v<\tau]$$

ここで $\sum_{(q_1,\cdots,q_{m-n+1})}$ は $(1,\cdots,m)$ から $(q_1,\cdots,q_{m-n+1})$ を取出すえらび方の全体についての和を表わす。$\sum_{\pi}^{(q)}$ は $(q_1,\cdots,q_{m-n+1})$ の *permutation* についての和，$\sum_{\hat{\pi}}^{(\hat{q})}$ は $(1,\cdots,m)$ より $(q_1,\cdots,q_{m-n+1})$ を取出した残り $(\hat{q}_1,\cdots,\hat{q}_{n-1})$ の *permutation* についての和である。

Vol.23 の *Lemma 2.7* は微分に関する *Lemma* であって，ここでもそのままなりたつ。すなわち

<u>*Lemma 5.8*</u>　$(\underline{x},\underline{k})\in S^n$ とする．そのとき，

(5.27) $$\sum_{r_1+\cdots+r_n=r}\int_0^t\sum_{\ell=1}^{n}\int_{S_1}\Phi((x_\ell,k_\ell,j),dv,d(\underline{x}',\underline{k}',j'))\,U^{(r_\ell)}_{t-v}\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x}',\underline{k}',j)$$
$$\times\prod_{i\neq\ell}U^{0}_{v}[U^{(r_i)}_{t-v}\widetilde{f\cdot\lambda}](x_i,k_i,j)$$
$$=\sum_{r_1+\cdots+r_n=r+1}\prod_{i=1}^{n}U^{(r_i)}_{t}\widetilde{f\cdot\lambda}(x_i,k_i,j)$$

ここで $\sum_{r_1+\cdots+r_n=r}$ は *Lemma 5.4* と同じ意味である。

さて，これだけの準備の下で先にあげた *Lemma 5.4* を証明する方法は，*Vol.23* で *Lemma 2.4*～*2.7* を用いて *Lemma 2.8* を示した方法と同じである。*Vol.23* を見ていただくことにして，ここではそれは省略することにする。

次に，符号をもった年令附 *Branching Markov process* に対する *Skorohod equation* を導こう。まず

(5.28) $$\pi((x,\ell,0),(d\underline{x}^{\cdot},j'))=\{\pi^{+}((x,\ell),d\underline{x}^{\cdot})\,\delta_{1,j'}+\pi^{-}((x,\ell),d\underline{x}^{\cdot})\,\delta_{2,j'}\}$$

とおく。ここで π^{+},π^{-} は (5.7) で定義したものである．この π を <u>*branching law*</u> と呼ぶことにしよう。π に関する次の性質は構成法から簡単に示せるが重

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

要である。

Lemma 5.9 　 B_1 を $[0,\infty]$ の Borel set, B_2 は $\mathcal{S}\times J$ の Borel set, B_3 は $\mathcal{S}_1$ の Borel set とする。そのとき

(5.29) $$E_{(x,0,0)}[I_{B_1}(\tau)I_{B_2}(z_{\tau-})I_{B_3}(z_\tau)] = E_{(x,0,0)}[I_{B_1}(\tau)I_{B_2}(z_{\tau-})\pi(z_{\tau-},B_3)]$$

である。

(Proof) 　 measure $P_{(x,0,0)}$ の作り方と π 及び μ の作り方に注意すると次のようにして示される。

$$E_{(x,0,0)}[I_{B_1}(\tau)I_{B_2}(z_{\tau-})I_{B_3}(z_\tau)]$$
$$= E^\circ_{(x,0,0)}[I_{B_1}(\zeta^\circ)I_{B_2}(z^\circ_{\zeta^\circ-})\int\mu(\omega^\circ, d(\underline{x}', \underline{k}', j'))I_{B_3}((\underline{x}', \underline{k}', j))]$$
$$= E^\circ_{(x,0,0)}[I_{B_1}(\zeta^\circ)I_{B_2}(z^\circ_{\zeta^\circ-})\pi(z^\circ_{\zeta^\circ-}, B_3)]$$
$$= E_{(x,0,0)}[I_{B_1}(\tau)I_{B_2}(z_{\tau-})\pi(z_{\tau-}, B_3)] .$$

Skorohod equation を書き上げるために次のようにおく.

(5.30) $$F[x;u] = \sum_{n=0}^{\infty}(q_n^+(x) - q_n^-(x))\int\pi_n(x,d\underline{y})\widetilde{u\cdot\lambda}(\underline{y},\underline{0},0)$$

(5.31) $$K(x,dt,d(y,k)) = P_{(x,0,0)}[\tau\in dt,\ z_{\tau-}\in d(y,k,0)]$$

(5.32) $$u(t,x) = U_t\widetilde{f\cdot\lambda}(x,0,0)$$

そのとき, 強マルコフ性により

$$u(t,x) = E_{(x,0,0)}[\widetilde{f\cdot\lambda}(z_t) : t<\tau] + E_{(x,0,0)}[U_{t-s}\widetilde{f\cdot\lambda}(z_\tau)]$$

右辺の第二項を書き換えて, Lemma 5.9により

$$E_{(x,0,0)}[\tau\in ds,\ z_{\tau-}\in dz;\ \int\pi(z,d\underline{z}')\,U_{t-s}\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{z}')]$$
$$= \int K(x,ds,d(y,k))\{\sum_{n=0}^{\infty}q_n^+(y)\int\pi_n(y,d\underline{x}')\,U_{t-s}\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x}',\underline{k},1)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}q_n^-(y)\int\pi_n(y,d\underline{x}')\,U_{t-s}\widetilde{f\cdot\lambda}(\underline{x}',\underline{k},2)\},\ 但し\ |\underline{k}|=k,$$

Lemma 5.3, (5.22)式及び Theorem 5.2, (5.16)式 (Branching property) により

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$=\int K(x,ds,d(y,k))\lambda^k\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}(q_n^+(y)-q_n^-(y))\int\pi_n(y,d\underline{y})\,(\widetilde{\overline{U_{t-s}}\,\widetilde{f\cdot\lambda})_D\cdot\lambda}(\underline{y},\underline{0},0)\Big\}$$

$$=\int K(x,ds,d(y,k))\,\lambda^k F[y;\,u(t-s,\cdot)]\quad .$$

となる。従って

Theorem 5.10　符号をもった年令附 Branching Markov process の semi-group を $\overline{U}_t$ とし，$u(t,x)$ を (5.32) で定義する。そのとき $u(t,x)$ が存在する範囲で

(5.33)　$u(t,x)=\overline{U}_t^{\circ}\,\widetilde{f\cdot\lambda}(x,0,0)+\int_0^t\int_S K(x,ds,d(y,k))\,\lambda^k F[y;\,u(t-s,\cdot)]$

を満たす。

(5.33) を（拡張された）Skorohod 方程式（又は s-equation）と呼ぶことにしよう。さて，(5.33) に現われた $\overline{U}_t^{\circ}$，K は process の構成を始める際に最初に採用した基礎の process，すなわち，D 上の conservative strong Markov process の semi-group T_t を用いて書き換えることが出来る。すなわち，Lemma 4.4 により，$\lambda=2$ とすると，

(5.34)
$$\begin{cases}\displaystyle\int_{D\times N}K(x,ds,d(y,k))\,2^k f(y)=T_s(C\cdot f)(x)\,ds\ , \\ \overline{U}_t^{\circ}\ \widetilde{f\cdot 2}\,(x,0,0)=T_t f(x)\ ,\end{cases}$$

である．従って

Theorem 5.10′　記号は Theorem 5.10 と同じとして，T_t を基礎の process の semi-group とすると，$u(t,x)=\overline{U}_t\widetilde{f\cdot 2}\,(x,0,0)$ は存在する範囲で，

(5.33′)　$u(t,x)=T_t f(x)+\int_0^t T_s(C\cdot F[\cdot,u(t-s)])(x)\,ds$

をみたす。

よく取扱われる例では

$$\pi_n(x,d\underline{y})=\underbrace{\delta_{(x,\cdots,x)}}_{n}(d\underline{y})$$

とする場合が多い．そのときには

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$F[x,u]=\sum_{n=0}^{\infty}(q_n^+(x)-q_n^-(x))\,u^n(x)$$

となる。従って，そのときには (5.33′) は

(5.35) $$u(t,x)=T_t f(x)+\int_0^t T_s\Big(C\cdot\sum_{n=0}^{\infty}q_n(\cdot)\,u(t-s,\cdot)^n\Big)(x)\,ds$$

となる。ここで $q_n(x)=q_n^+(x)-q_n^-(x)$, $\sum_{n=0}^{\infty}|q_n|(x)=1$ である。

注意. §4 で注意したが，(5.33′) 又は (5.35)を *semi-linear parabolic equation* の形に書き換えるには多少の解析的条件が必要である。詳しいことは省略するが，T_t が $C(D)$ 上の強連続半群であって，$u_t=u(t,\cdot)$ が *generator* の *domain* に入れば，(5.35) から u_t は

$$\frac{\partial u_t}{\partial t}=\mathcal{G}u_t+C\cdot\sum_{n=0}^{\infty}q_n\cdot u_t^n$$

を満たすことがわかる。ここで $\mathcal{G}$ は T_t の *generator* である。

§6. 半線型方程式の解の爆発

この節では次のような問題を考えよう。R^d を d-次元 *Euclid space* とし

(6.1) $$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta u+u^{\beta}$$

の解はどんなとき有限時間で爆発し，又そうでないか？ この問題は藤田 [2] で *critical case* を除いて，完全に解かれている。ここでは前節までで議論した方法の応用として，この問題を解いてみよう。注) その際，気がつくことであるが，我々の方法は *Markov process* の議論に基礎を置いているため，強マルコフ性を使えるという利点がある。しかし，一方では β が正整数以外には使えないという制限をうける。

さて，(6.1) で β を大きくして行くと，常識で考えて，解 u は爆発しやすくなるのではないかと考えられる。しかし事実は逆であって，初期函数 f が 1 より少であるかぎり，β を大きくすると爆発しにくくなる。この辺の事情を調べる為に，まず簡単な例から考えてみよう。

注) [16] に従っている。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

§4で与えた年令附 *Branching Markov process* を考えよう。ただし，ここでは基礎の *process* として，半直線上の *uniform motion* を採用する。さらに年令の *weight* $\lambda=2$ とし，β 個に分裂するとしよう。そのとき，(4.20)式は

(6.2) $$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}+cu^{\beta}\ ,\quad \lim_{t\downarrow 0}u(t,x)=f(x)$$

となる．ここで $\beta\geqq 2$ の整数，$t\in[0,T)$，$(T\in(0,\infty))$，$x\in[0,\infty)$ である。(6.2) 式は初等的な方法で解けて，解は

(6.3) $$u(t,x)=\frac{1}{\left(-c\alpha t+\frac{1}{f(t+x)^{\alpha}}\right)^{1/\alpha}}\ ,\quad (\alpha=\beta-1)$$

である．従って，初期函数 f が，任意の t に対し

(6.4) $$f(t+x)<\frac{1}{(\alpha ct)^{1/\alpha}}$$

を満たすならば，有限時間内では解 $u(t,x)$ は爆発（発散）しない。ところが，$f=a$ (const) とすると，$t_0=(\alpha c a^{\alpha})^{-1}$ で爆発が起こることはすぐにわかる。後の詳しい議論によってわかることであるが，このようなことが起こるのは基礎の *process* が *non-recurrent* であるからである。

以下では基礎の *process* は一般にD上の *conservative process* とし，その *semi-group* を T_t で表わす．更に β 個に分裂する年令附 *Branching Markov process* を $\{\Omega,\ N_t,\ Y_t,\ P_{(x,k)}\}$ としよう。そのとき，§4の結果から，

(6.5) $$\begin{cases}\displaystyle\int_{D\times N}K((x,0),\,ds,\,d(y,p))\,2^{p}f(y)=T_s(c\cdot f)(x)\,ds\\ U_t^{0}\ \widehat{f\cdot 2}(x,0)=T_tf(x)\\ F[\xi]=\xi^{\beta}\end{cases}$$

である。(*Lemma* 4.4) 更に *S-equation*

(6.6) $$u(t,x)=T_tf(x)+\int_0^t T_s(c\cdot u(t-s,\cdot)^{\beta})(x)\,ds$$

の解は

(6.7) $$u(t,x)=E_{(x,0)}[\widehat{f\cdot 2}(Y_t)]$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

で与えられる。そこで $u(t,x)$ を

$$(6.8)\qquad \begin{cases} u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) \\ u_n(t,x)=E_{(x,0)}[\widehat{f\cdot 2}(Y_t);\ \tau_n\le t<\tau_{n+1}] \end{cases}$$

と分解し，$u_n(t,x)$ を評価してみよう。

<u>*Theorem 6.1*</u>　$\{\Omega, N_t, Y_t, P_{(\underline{x},k)}\}$ を (6.5) をみたす年令附 *Branching Markov process* とし，$f\geq 0$，$f\in \mathbb{B}(D)$ として，

$$(6.9)\qquad \begin{aligned} u_k(t,\underline{x}) &= E_{(\underline{x},\underline{0})}[\widehat{f\cdot 2}(Y_t);\ \tau_n\le t<\tau_{n+1}] \\ h(t,x) &= T_t f(x) \end{aligned}$$

とおく。そのとき，$\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対して

$$(6.10)\qquad u_k(t,x)\le \|C\|^k \frac{\prod_{i=0}^{k-1}\{n+i(\beta-1)\}}{k!}\left\{\int_0^t \sup_{y\in D} h(t-s,y)^{\beta-1} ds\right\}^k\cdot \prod_{j=1}^{n} h(t,x_j),$$

がなりたつ。$(k=1,2,\cdots)$．

(*Proof*)　証明は *induction* による。まず *Property* B.Ⅲ の (i) により

$$(6.11)\qquad \begin{aligned} u_0(t,\underline{x}) &= \prod_{j=1}^{n} E_{(x_j,0)}[\widehat{f\cdot 2}(Y_t);\ 0\le t<\tau] \\ &= \prod_{j=1}^{n} h(t,x_j) \end{aligned}$$

である。強マルコフ性により

$$(6.12)\qquad \begin{aligned} u_k(t,\underline{x}) &= E_{(\underline{x},\underline{0})}[E_{Y_\tau}[\widehat{f\cdot 2}(Y_{t-s});\ \tau_{k-1}\le t-s<\tau_k]|_{s=\tau}] \\ &= \int_0^t\int_{\bar{S}} \Psi((\underline{x},0),ds,d(\underline{y},\underline{\ell}))\, 2^{|\underline{\ell}|} u_{k-1}(t-s,\underline{y}) \end{aligned}$$

ここで *Lemma* 5.3 を使っている．注)

$k=1$ とし，*Branching law*（又は *Property* B.Ⅲ の (ii)）により，Ψ を変型すると，β 個に分裂するから $\pi_\beta(x,d\underline{y})=\delta_{\underbrace{(x,x,\cdots,x)}_{\beta}}(d\underline{y})$ であることに注意し

注) ただし，変数 j が無い場合である．

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

て,

$$(6.13)\quad u_1(t,\underline{x}) \leqq \|C\| \int_0^t \sum_{i=1}^n ds \int_{D^n} \left\{ \prod_{j=1}^n P(s,x_j,dy_j) \right\} \cdot h(t-s,y_i)^\beta \prod_{m\neq i} h(t-s,y_m)$$

となる。ここで $\prod_{j=1}^n P(s,x_j,dy_j)$ は *product measure* を表わし,

$$T_t f(x) = \int P(t,x,dy) f(y)$$

と書いている。(6.13) の右辺は書き換えると,

$$\begin{aligned}
&\leqq \|C\| \int_0^t \sum_{i=1}^n ds \left(\sup_{y\in D} h(t-s,y)^{\beta-1} \right) \prod_{j=1}^n \left\{ \int_D P(s,x_j,dy_j) h(t-s,y_j) \right\} \\
&= \|C\| \int_0^t \sum_{i=1}^n ds \left(\sup_{y\in D} h(t-s,y)^{\beta-1} \right) \cdot \prod_{j=1}^n h(t,x_j) \\
&= n\cdot \|C\| \int_0^t ds \left(\sup_{y\in D} h(t-s,y)^{\beta-1} \right) \cdot \prod_{j=1}^n h(t,x_j)
\end{aligned}$$

となる. すなわち, $k=1$ でなりたつ。

k で (6.10) が成立するとしよう。(6.12) より

$$\begin{aligned}
u_{k+1}(t,\underline{x}) &= \int_0^t \int_S \Psi((\underline{x},\underline{0}),ds,d(\underline{y},\underline{\ell}))\, 2^{|\ell|} u_k(t-s,\underline{y}) \\
&\leqq \|C\|^k \int_0^t \int_S \Psi((\underline{x},0),ds,d(\underline{y},\underline{\ell}))\, 2^{|\ell|} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \{n+\beta-1+j(\beta-1)\}}{k!} \\
&\quad \times \left\{ \int_0^{t-s} dr \sup_{y\in D} h(t-s-r,y)^{\beta-1} \right\}^k \cdot \prod_{m=1}^{n+\beta-1} h(t-s,y_m)
\end{aligned}$$

u_1 を計算したときと同様に, β 個に分裂するという事実により Ψ を書きかえると

$$\begin{aligned}
&= \|C\|^{k+1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \{n+\beta-1+j(\beta-1)\}}{k!} \int_0^t ds \left\{ \int_0^{t-s} dr \sup_{y\in D} h(t-s-r,y)^{\beta-1} \right\}^k \\
&\quad \times \sum_{i=1}^n \int_{D^n} \left\{ \prod_{j=1}^n P(s,x_j,dy_j) \right\} \cdot h(t-s,y_i)^\beta \cdot \prod_{m\neq i} h(t-s,y_m)
\end{aligned}$$

ここで, $h(t-s,y_i)^\beta \leqq \left\{ \sup_{y\in D} h(t-s,y)^{\beta-1} \right\} \cdot h(t-s,y_i)$ と書きかえ,

D^n 上の積分を実行すれば, $\int_D P(s,x_j,dy_j) h(t-s,y_j) = h(t,x_j)$ であるから

$$\begin{aligned}
&\leqq \|C\|^{k+1} n \cdot \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \{n+\beta-1+j(\beta-1)\}}{k!} \int_0^t ds \left\{ \sup_{y\in D} h(t-s,y)^{\beta-1} \right\} \left\{ \int_0^{t-s} \left(\sup_{y\in D} h(t-s-r,y) \right)^{\beta-1} dr \right\}^k \cdot \prod_{j=1}^n h(t,x_j) \\
&= \|C\|^{k+1} \frac{\prod_{j=0}^{k} \{n+j(\beta-1)\}}{(k+1)!} \left\{ \int_0^t ds \left(\sup_{y\in D} h(t-s,y)^{\beta-1} \right) \right\}^{k+1} \cdot \prod_{j=1}^n h(t,x_j) \quad \text{注)}
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

となり，証明された．

このLemmaにより，先に述べたβの働き方がただちにわかる。まず

Corollary 6.2　記号は前のTheoremと同じとして，

$$(6.14)\qquad v_k(t,x)=\frac{\prod_{j=0}^{k-1}\{1+j(\beta-1)\}}{k!}\left(\|C\|\int_0^t \sup_{y\in D} h(t-s,y)^{\beta-1}ds\right)^k,\quad k=1,2,\cdots$$

と置くことにしよう。そのとき

$$(6.15)\qquad u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t,x)\le h(t,x)\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t,x)\right\}$$

がなりたつ。

注意.　以下で詳しく調べるが，次のことをまず注意しておこう。初期値を $\|f\|\le 1$ と取れば，$h(t,y)\le 1$ である．そのことと $v_k(t,x)$ の形に注意すれば，βが大きい程 $\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t,x)$ は収束し易くなることがただちにわかる．すなわち，一回の分裂で多くの個数に分裂すればする程，解 $u(t,x)$ は爆発しにくくなる。

Theorem 6.3　$f\ge 0$，$f\in\mathbb{B}(D)$ とする．S-equation (6.6) の global solution が存在する（i.e.有限時間で爆発しない）ための十分条件は $T_tf(x)=h(t,x)$ として，

$$(6.16)\qquad (\beta-1)\|C\|\int_0^{\infty}\sup_{y\in D}h(s,y)^{\beta-1}ds<1$$

である．その時，解 $u(t,x)$ は，ある定数 $M>0$ が存在して

$$(6.17)\qquad u(t,x)\le Mh(t,x),$$

をみたしている。

(Proof)　Cor. 6.2. より任意の $t>0$ に対し，十分大きな k で

$$\frac{v_{k+1}(t,x)}{v_k(t,x)}=\frac{1+k(\beta-1)}{k+1}\ \|C\|\int_0^t\sup_{y\in D}h(t-s,y)^{\beta-1}ds<1$$

注) $F(0)=0$ ならば，$\int_0^t dF(s)\frac{1}{k!}F(t-s)^k=\frac{1}{(k+1)!}F(t)^{k+1}$ に注意．

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

となればよい。(6.16)はその十分条件である。(6.17)は(6.15)から明らかである。

この定理から導かれるいくつかの結論を述べよう。

Corollary 6.4　基礎の process が次の意味で「non-recurrent」であるとしよう。すなわち，任意の open set U に対し(with compact closure $\Subset D$)

(6.18)
$$\int_0^\infty \sup_x T_t(I_U)(x)\,dt < \infty$$

がなりたつとしよう。そのとき，初期値 $f = \delta I_U$，$(0 \lneqq \delta \leq 1)$ に対し，δ を十分小さくとれば，(6.6) の global solution が存在して (6.17) をみたす。

(Proof)

$$\int_0^\infty \sup_x h(s,x)^{\beta-1} ds \leq \delta^{\beta-1} \int_0^\infty \sup_x T_s(I_U)(x)\,ds$$

であるから明らかである。

Corollary 6.5.[注1)]　基礎の process を d-次元 Brown motion とする。[注2)] そのとき，$\frac{\beta-1}{2} d > 1$ ならば，任意の $\gamma > 0$ と十分小なる $\delta > 0$ に対し，

(6.19)
$$0 \leq f(x) \leq \delta \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}}\right)^d \exp\left(\frac{-|x|^2}{2\gamma}\right)$$

をみたす初期値 $f(x)$ をとると，S-equation (6.6) の global solution $u(t, x)$ が存在する。更に解 $u(t,x)$ は $M > 0$ が存在して

(6.20)
$$0 \leq u(t,x) \leq M\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(t+\gamma)}}\right)^d \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(t+\gamma)}\right)$$

を満たしている。

(Proof)　(6.19) から

(6.21)
$$h(t,x) \leq \delta\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(t+\gamma)}}\right)^d \exp\left(\frac{-|x|^2}{2(t+\gamma)}\right)$$

となる。従って $(\beta-1)d/2 > 1$ ならば，

注1)　この結果は藤田 [2] による、[2] によれば β は整数である必要はない。

注2)　Brownian motion である必要はない。$A = a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ で a^{ij}, b^i はなめらかで，$a^{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geq M \sum \lambda_i^2$，$(\forall x)$ なら，基本解は $p(t,x,y) \leq K t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{\alpha|y-x|^2}{t}}$ を満たすことに注意すればよい。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$\int_0^\infty \sup_x h(t,x)^{\beta-1} dt \leq \delta^{\beta-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{d(\beta-1)}{2}} \cdot \int_0^\infty (t+\gamma)^{-\frac{d(\beta-1)}{2}} dt$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{d(\beta-1)}{2}} \cdot \frac{\gamma^{1-\frac{d(\beta-1)}{2}}}{\frac{\beta-1}{2}d-1} \cdot \delta^{\beta-1}$$

である。

従ってδを十分小さくとれば(6.16)がなりたち，global solution が存在することがわかる。(6.20)は(6.21)と(6.17)から明らかである。

上の結果はただちに symmetric stable process の場合に拡張出来る．すなわち

<u>Corollary 6.6.</u>[注1] 基礎の process をd-次元α-次 symmetric stable process とする($0<\alpha\leqq 2$)．すなわち

$$T_t f(x) = \int_{R^d} p(t, x-y) f(y)\, dy,$$

(6.22)

$$e^{-|z|^\alpha t} = \int_{R^d} e^{i(z,x)} p(t,x)\, dx,$$ [注2]

であるとしよう．更に

$$\frac{d}{\alpha}(\beta-1) > 1$$

をみたしているとしよう。そのとき任意の$\gamma>0$と十分小なる$\delta>0$に対し

(6.23) $$0 \leq f(x) \leq \delta p(\gamma, x)$$

をみたす初期値fをとると，s-equation(6.6)の global solution $u(t,x)$が存在する。更に，解$u(t,x)$は$M>0$が存在して

(6.24) $$0 \leq u(t,x) \leq M p(t+\gamma, x)$$

を満たしている。

注1) この事実は池田信行氏から注意された。

注2) $|z|$は norm，(z,x)は内積である．

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

(Proof)　(6.23)より

(6.25)　$h(t,x) \leq \delta p(t+\gamma, x)$

である．さて，$p(t,x)$は時空変換により

$$p(t,x) = p(ct, c^{\frac{1}{\alpha}} x) c^{\frac{d}{\alpha}} \quad , \qquad c>0$$

をみたしていることに注意しよう。注1)　従って，

$$h(t,x) \leq \delta (t+\gamma)^{-\frac{d}{\alpha}} p(1, (t+\gamma)^{-\frac{1}{\alpha}} x)$$

である。ところが

$$p(1, (t+\gamma)^{-\frac{1}{\alpha}} x) \leq p(1,0) \;, \quad \text{注2)}$$

であるから，

$$\int_0^\infty \sup_x h(t,x)^{\beta-1} dt \leq \delta^{\beta-1} p(1,0)^{\beta-1} \int_0^\infty (t+\gamma)^{-\frac{d}{\alpha}(\beta-1)} dt$$

$$= p(1,0)^{\beta-1} \frac{\gamma^{1-\frac{d}{\alpha}(\beta-1)}}{\frac{d}{\alpha}(\beta-1)-1} \delta^{\beta-1}$$

である．従ってδを十分小さくとれば，(6.16) がなりたち，global solution が存在することがわかる。(6.24) は (6.25) と (6.17) より明らかである。

以上では s-equation (6.6)の global solution が存在するための条件を求めた。以下では逆に存在しない場合について調べよう。

<u>Theorem 6.7.</u>　記号は Theorem 6.1 と同様とする．さらに $\inf_{x\in D} c(x) = c > 0$

注1)　$$\int_{R^d} e^{i(z,x)} p(t,x) dx = e^{-|z|^\alpha t} = e^{-|c^{-\frac{1}{\alpha}} z|^\alpha c \cdot t} = \int_{R^d} e^{i(c^{-\frac{1}{\alpha}} z, x)} p(ct,x) dx$$

$$= \int_{R^d} e^{i(z,x)} p(ct, c^{\frac{1}{\alpha}} x) c^{\frac{d}{\alpha}} dx .$$

注2)　$p(t,x)$ は $\frac{\alpha}{2}$次 one-sided stable process を (θ_t, P)として

$$p(t,x) = \int_0^t P[\theta_t \in ds] \left(\frac{1}{2\pi s}\right)^{\frac{d}{2}} exp\left(-\frac{|x|^2}{2s}\right)$$

と表わされる．(cf [9])．従って $p(t,x) \leq p(t,0)$ である．

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

としよう。そのとき，$\underline{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$に対して

$$(6.26)\qquad u_k(t,\underline{x}) \geq C^k\Big\{\sum_{\Sigma k_i=k} a_{k_1,k_2,\cdots,k_n} h(t,x_1)^{k_1(\beta-1)} \cdots h(t,x_n)^{k_n(\beta-1)}\Big\}$$

$$\times\prod_{j=1}^{n} h(t,x_j)\frac{t^k}{k!},\quad k=1,2,\cdots$$

がなりたつ．ここで $a_{k_1k_2\cdots k_n}$ は

$$(6.27)\qquad \sum_{\Sigma k_i=k} a_{k_1k_2\cdots k_n} = n(n+\beta-1)\cdots(n+(k-1)(\beta-1))$$

をみたすある定数である．又$\sum_{\Sigma k_i=k}$ は $\Sigma k_i=k$ を満たす重複をゆるす順列$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ の全てについての和を表わしている。

（Proof） 証明は induction による。まず最初に，Jensen の不等式により

$$(6.28)\qquad \int_D P(s,x,dy)\,h(t-s,y)^\beta \geqq \Big\{\int_D P(s,x,dy)\,h(t-s,y)\Big\}^\beta$$

$$= h(t,x)^\beta$$

がなりたつことを注意しよう。

(6.12) から (6.13) を導いたと同様にして

$$u_1(t,\underline{x}) \geqq C\int_0^t ds\sum_{i=1}^{n}\int_{D^n}\Big\{\prod_{j=1}^{n}P(s,x_j,dy_j)\Big\}\cdot h(t-s,y_i)^\beta\prod_{m\neq i}h(t-s,y_m)$$

$$\geqq C\int_0^t ds\Big\{\sum_{i=1}^{n}h(t,x_i)^\beta\Big\}\prod_{m\neq i}h(t-s,y_m)$$

ここで (6.28) を使った。従って (6.26) は $k=1$ で成り立っている．

次に k でなりたつとしよう。(6.12) により

$$u_{k+1}(t,\underline{x}) = \int_0^t\int_S \Psi((\underline{x},\underline{0}),ds,d(\underline{y},\underline{\ell}))\,2^{|\underline{\ell}|}u_k(t-s,\underline{y})$$

Ψ が $S^{n+\beta-1}$ にのみ mass を持っていることに注意し，induction の仮定を使うと

$$\geqq C^k\int_0^t\int_S \Psi((\underline{x},\underline{0}),ds,d(\underline{y},\underline{\ell}))\,2^{|\underline{\ell}|}\sum_{\Sigma k_i=k} a_{k_1k_2\cdots k_{n+\beta-1}}$$

$$\times h(t-s,y_1)^{k_1(\beta-1)}h(t-s,y_2)^{k_2(\beta-1)}\cdots h(t-s,y_{n+\beta-1})^{k_{n+\beta-1}\cdot(\beta-1)}$$

$$\times\prod_{m=1}^{n+\beta-1}h(t-s,y_m)\frac{(t-s)^k}{k!}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

ここで Lemma 5.7 を適用する。注) $F(\xi)=\xi^\beta$ であることと，(5.34) に注意すれば

$$\geq C^{k+1}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t ds \sum_{\Sigma k_i=k} a_{k_1 k_2\cdots k_{n+\beta-1}}\int P(x_i,s,dy_i)\{h(t-s,y_i)^{k_{i_1}(\beta-1)+1}h(t-s,y_i)^{k_{i_2}(\beta-1)+1}$$

$$\times\cdots\times h(t-s,y_i)^{k_{i_\beta}(\beta-1)+1}\}\times\prod_{m\neq i}\int P(x_m,s,dy_m)h(t-s,y_m)^{k_m(\beta-1)+1}\cdot\frac{(t-s)^k}{k!}$$

各積分に (6.28) を適用し s についての積分を実行すれば

$$\geq C^{k+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\Sigma k_i=k} a_{k_1 k_2\cdots k_{n+\beta-1}}\{h(t,x_i)^{(k_{i_1}+k_{i_2}+\cdots+k_{i_\beta})(\beta-1)}h(t,x_i)^\beta\}$$

$$\times\prod_{m\neq i}h(t,x_m)^{k_m(\beta-1)+1}\ \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\quad .$$

ここで

$$k_{i_1}+\cdots+k_{i_\beta}=k_i$$

と書き換え，

(6.29) $$n\cdot\sum_{k_{i_1}+\cdots+k_{i_\beta}=k_i} a_{k_1\cdots k_{n+\beta-1}}=a'_{k_1 k_2\cdots k_n}$$

等々と書くと最終的に

$$u_{k+1}(t,\underline{x})\geq C^{k+1}\sum_{\Sigma k_i=k+1} a'_{k_1 k_2\cdots k_n}h(t,x_1)^{k_1(\beta-1)}\cdots h(t,x_n)^{k_n(\beta-1)}\cdot\prod_{m=1}^{n}h(t,x_m)\ \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$$

となる。induction の仮定により，

$$\sum_{\Sigma k_i=k} a_{k_1\cdots k_{n+\beta-1}}=\{n+(\beta-1)\}\{n+2(\beta-1)\}\cdots\{n+k(\beta-1)\}$$

であったから，(6.29) に注意すれば，

$$\sum_{\Sigma k_i=k+1} a'_{k_1\cdots k_n}=n\{n+(\beta-1)\}\{n+2(\beta-1)\}\cdots\{n+k(\beta-1)\}$$

である。従って induction は完結した。

<u>Corollary 6.8</u>　記号は前の Lemma と同じとして

(6.30) $$v_k(t,x)=\frac{\prod_{i=0}^{k-1}\{1+i(\beta-1)\}}{k!}\cdot(c+h(t,x)^{\beta-1})^k$$

注) 今の場合，変数 j は無い。$h(t-s,y_i)^{k_i(\beta-1)+1}$ を f_i^s と思い $\frac{1}{(n+\beta-1)!}\sum_{\pi}$ をつけ加えて考えればよい。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

とおくと，

(6.31) $$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t,x) \geq h(t,x)\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t,x)\right\}$$

がなりたつ。

これからただちに次の定理を得る。

Theorem 6.9　$f \geqq 0$, $f \in \mathbb{B}(D)$ とする．更に $\inf_x C(x)=c>0$ を満たすとしよう。そのとき，S-equation (6.6) の解が有限時間で爆発するための十分条件は $T_t f(x)=h(t,x)$ として，$x_0 \in D$, $t_0>0$ が存在して

(6.32) $$(\beta-1)\, c\, t_0 h(t_0,x_0)^{\beta-1} > 1$$

となることである。

(Proof)　global solution が存在するとしよう．ところが Cor. 6.8 により，十分大きな k で

$$\frac{v_{k+1}(t_0,x_0)}{v_k(t_0,x_0)} = \frac{1+k(\beta-1)}{k+1}\; c\, t_0 h(t_0,x_0)^{\beta-1} > 1$$

となる．ところが (6.31) がなりたつから，これは矛盾である。

これから簡単に導かれるいくつかの結論を述べよう．

Corollary 6.10　D を R^d の有界領域とし，基礎の process は D の一点 compact 化 $\overline{D}$ 上の吸収壁 A-diffusion とする．注1) 初期値 $f \geqq 0$ がある開集合上で十分大きな値をとれば，S-equation (6.6) の解 $u(t,x)$ は有限時間で爆発する。注2)

注意.　この Cor. では，$\overline{D}=D\cup(\delta)$ （一点 compact 化）であって，δ は trap となっている．$f \in \mathbb{B}(D)$ は $\mathbb{B}(\overline{D})$ 上の函数と考えるときは常に $f(\delta)=0$

注1)　A は二階 elliptic operator である i.e. $A=\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{a(x)}\,a^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+b^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ で a^{ij}, b^i はなめらかで有界，かつ $a^{ij}\lambda_i\lambda_j \geqq M\sum\lambda_i^2$, $(\forall x)$ をみたすとする。

注2)　S. Ito [11] 参照.

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

としている。そのとき上の process は $\overline{D}$ 上の conservative process と考えられる。(そのとき ζ は ∞ と考えておく。) さらに $\inf_{x\in D} c(x) = c > 0$ として定理を適用すればよい。

上の Cor. は最も発散しにくいと思われる場合について述べたものである。従って, R^d 上の Brownian motion (又は A-diffusion) に対しては同様の結論がなりたつ。

Corollary 6.11. 注) 基礎の process は d-次元 α 次 symmetric stable process とする。ここで $0<\alpha\leqq 2$ である。さらに

$$0 < \frac{d}{\alpha}(\beta-1) < 1 \tag{6.33}$$

をみたしているとしよう。そのとき, ある開集合上で zero にならない任意の初期値 $f\geqq 0$, $f\in \mathbb{B}(R^d)$ に対し, S-equation (6.6) の global solution は存在しない。i.e. 解 $u(t,x)$ は有限時間で爆発する。

(Proof) d-次元 α 次 symmetric stable process の transition probability $p(t,x,y)dy$ は subordination を使って

$$p(t,x,y)dy = \int_0^\infty P[\theta_1\in ds]\,\frac{1}{(2\pi t^{\frac{2}{\alpha}} s)^{\frac{d}{2}}}\,exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{2t^{\frac{2}{\alpha}}s}\Big)\,dy \tag{6.34}$$

と表わされる。ここで $\{\theta_t, P\}$ は $\frac{\alpha}{2}$ 次 one-sided stable process である。(cf. e.g. [9])

今 $t\geqq 1$ で解 $u(t,x)$ が存在するとしよう。そのとき,

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \int_{R^d} P(t,x,y)\,f(y)\,dy \\ &\geqq t^{-\frac{d}{\alpha}}\int_{R^d}\int_0^\infty P(\theta_1\in ds)\,\frac{1}{(2\pi s)^{d/2}}\,exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{2s}\Big)f(y)\,dy \\ &= t^{-\frac{d}{\alpha}}\,h(1,x) \end{aligned}$$

注) この結果は Brown motion (i.e. $\alpha=2$) のとき藤田 [2] により最初に証明された。[2] では β は整数である必要はない。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

仮定から $0<h(1,x_0)\leq 1$ となる x_0 がある。今 x_0 を固定しよう。そのとき $0<\frac{d}{\alpha}(\beta-1)<1$ ならば，十分大きな $t\geq 1$ で

$$(\beta-1)cth(t,x_0)^{\beta-1}$$

$$=(\beta-1)ct^{1-\frac{d}{\alpha}(\beta-1)}h(1,x_0)^{\beta-1}>1$$

となる。*Theorem* 6.9 によりこれは解が爆発することを意味し，矛盾である。

§7. Kolmogorov-Petrovsky-Piscounoff の方程式の確率論的一解釈

この節では Kolmogorov-Petrovsky-Piscounoff [13] で扱われた

(7.1) $$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta u+F(x,u), \qquad x\in R^d, \quad t\geq 0$$

を符号をもった年令附分枝マルコフ過程を使って解釈することを試みる。ただし F は次の条件を満たすものとする。

(F.1) $$|F(x_1,u_1)-F(x_2,u_2)|\leq K\{|x_1-x_2|+|u_1-u_2|\}, \quad K<\infty,$$

(F.2) $$F(x,0)=F(x,1)=0, \quad 0\leq F(x,u), \quad 0<u<1 .$$

以下では Z_t を，基礎の process を R^d の Brownian motion として §5 で作られた符号をもった年令附分枝マルコフ過程で特に断らなくても，π_n は

(7.2) $$\pi_n(x,d\underline{y})=\delta_{\underbrace{(x,x,\cdots,x)}_{n}}(d\underline{y})$$

であるとする。この場合 q_n^+, q_n^-, c の与え方により，一般に異なった process になっているが，その条件は場合に応じて断ることにする。

我々の方針は (7.1) で $F(x,u)$ が，$R^d\times[0,1]$ 上で u に関する多項式

$$F_M(x,u)=\frac{1}{c(x)}\sum_{n=1}^{M}\{q_n^+(x)-q_n^-(x)\}u^n,$$

(7.3) $$\sum_{n=1}^{M}\{q_n^+(x)+q_n^-(x)\}=c(x), \ \|c\|<\infty, \ q_n^+(x), q_n^-(x)\geq 0,$$

$$q_n^+(x)\,q_n^-(x)=0 \quad , \quad 1\leq n\leq M$$

によって一様近似出来る場合に，F_M に対応する Z_t を通じて (7.1) を解釈しよ

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

うとするものである．この為には必ずしも（7.1）の右辺の微分作用素がΔである必要はないが，積分方程式の解と微分方程式の解の関係や解の性質を利用する際に一々条件をcheck するのは面倒であるので，このノートではΔの場合のみを考えることにする。

最初に $F(x,u)$ として，(7.3)で与えられる形のFを考える。nを1からとしたのは，（F.2）で $F(x,0)=0$ があるので，uの0次の項を0とみなしたためである。

<u>Theorem 7.1.</u>　Z_tを（7.3）のc, q_n^+, q_n^-に対応する符号をもった年令附分枝マルコフ過程，U_tをその semi-group とする。このとき，$\delta_0(>0)$を十分小さくとれば，任意の$\|f\|\leqq 1$なるfと$0\leqq t<\delta_0$に対し$U_t\widehat{f\cdot 2}(\underline{x},\underline{k},j)$は存在する。

証明．　R^dで恒等的に1である函数$\mathbb{1}(x)$に対し，$U_t|\widehat{\mathbb{1}\cdot 2}|(\underline{x},\underline{k},j)$が$0\leqq t<\delta_0$で常に有限な値をもつことを示せば十分である．

基礎の process X_t（R^d上の Brownian motion）による平均をE_xで表わすと，Lem. 4.4 により

$$U_t^0|\widehat{\mathbb{1}\cdot 2}|(x,0,0)=E_x(\mathbb{1}(X_t))=1\ ,\qquad x\in R^d\ ,$$

となり，[Property B.III] の (i) により

$$U_t^0|\widehat{\mathbb{1}\cdot 2}|(\underline{x},\underline{0},0)=\prod_{j=1}^{n}E_{x_j}(\mathbb{1}(X_t))=1\ ,\qquad \underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{7.4}$$

を得る．従って，first branching time をτとすると，Lem. 5.3 により

$$\begin{aligned}U_t^{(1)}|\widetilde{\mathbb{1}\cdot 2}|(\underline{x},\underline{0},0)&=E_{(\underline{x},\underline{0},0)}(U_{t-v}^0|\widetilde{\mathbb{1}\cdot 2}|(Z_\tau)|_{v=\tau}\,;\ \tau\leqq t)\\&=\sum_{|\underline{k}|=0}^{\infty}2^{|\underline{k}|}\int_0^t P_{(\underline{x},\underline{0},0)}(K_\tau=\underline{k},\ \tau\in ds)\end{aligned} \tag{7.5}$$

が成り立つ。この右辺を評価し，さらに$U_t^{(r)}|\widehat{\mathbb{1}\cdot 2}|(\underline{x},\underline{0},0)$を同様にして評価し，その和が$0\leqq t<\delta_0$のときに収束することを云えばよいわけである。さて，[Property B.III]の (ii) から

$$\begin{aligned}&P_{(\underline{x},\underline{0},0)}[K_\tau=\underline{k},\ \tau\in ds]\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sum_{\ell\neq i}k_\ell+|k_i|=|\underline{k}|}\ \sum_{m=1}^{M+n-1}\ \sum_{j=0}^{3}\Psi((x_i,0,0);ds,(R^d)^m,\underline{k}_i,j))\end{aligned} \tag{7.6}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$\times \prod_{\ell \neq i} P_{(x_\ell, 0, 0)}[K_S = k_\ell,\ S < \tau]$$ 注)

が成り立つ．上式の右辺に現われる項に対しては，*Lem.* 3.1 と Z_t の構成法から

(7.7)
$$\sum_{m=1}^{M+n-1} \sum_{j=0}^{3} \Psi((x_i, 0, 0);\, ds,\, (R^d)^m,\, \underline{k}_i,\, j))$$
$$= E_{x_i}\left[e^{-2\int_0^s C(X_v)dv} \frac{(\int_0^s C(X_v)dv)^{|\underline{k}_i|}}{|\underline{k}_i|!} C(X_s)\, ds\right]$$

および

(7.8)
$$P_{(x_\ell,0,0)}[K_S = k_\ell,\ S < \tau] = E_{x_\ell}\left[e^{-2\int_0^s C(X_v)dv} \frac{(\int_0^s C(X_v)dv)^{k_\ell}}{k_\ell !}\right]$$

が成り立つ。そこで，いま $X_t^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を互いに独立で，かつ X_t と *stochastically equivalent* な *process* とし，$W_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \cdots, X_t^{(n)})$ による平均を $E_{(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$ で表わすと，(7.6)−(7.8) により

(7.9)
$$P_{(\underline{x},\underline{0},0)}[K_\tau = \underline{k},\ \tau \in ds]$$
$$= E_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\Big[e^{-2\int_0^s \check{C}(X_v^{(1)}, X_v^{(2)}, \cdots, X_v^{(n)})dv}$$
$$\times \sum_{\sum k_i = |\underline{k}|} \prod_{i=1}^{n} \frac{(\int_0^s C(X_v^{(i)})dv)^{k_i}}{k_i !} \cdot \check{C}(X_s^{(1)}, X_s^{(2)}, \cdots, X_s^{(n)})\, ds\Big]$$
$$= E_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\Big[e^{-2\int_0^s \check{C}(X_v^{(1)}, \cdots, X_v^{(n)})dv} \frac{1}{|\underline{k}|!}\Big(\int_0^s \check{C}(X_v^{(1)}, \cdots, X_v^{(n)})dv\Big)^{|\underline{k}|}$$
$$\times \check{C}(X_s^{(1)}, X_s^{(2)}, \cdots, X_s^{(n)})\, ds\Big],$$

ただし　$\check{C}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} C(x_i)$,

を得る．この式を (7.5) に代入すると，

(7.10)
$$U_t^{(1)}|\widetilde{\mathrm{I\!I}\cdot 2}|(\underline{x},\underline{0},0) = \int_0^t E_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\Big[e^{-2\int_0^s \check{C}(X_v^{(1)}, \cdots, X_v^{(n)})dv}$$

注) $\bar{R}^d = R^d \cup \{\delta\}$ が R^d の一点 *compact* 化 のとき $C(\delta) = 0$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\int_0^s \check{c}(X_v^{(1)}, \cdots, X_v^{(n)})\,dv)^k}{k!} \cdot \check{c}(X_s^{(1)}, \cdots, X_s^{(n)})\,ds]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^t E_{x_i}(c(X_s))\,ds$$

$$\leqq n \|c\| t$$

なる評価式を得る。

$$(7.11) \qquad U_t^{(r)} |\widetilde{1\cdot 2}|(\underline{x}, \underline{0}, 0) \leqq n(n+M)\cdots(n+(r-1)M)\frac{(\|c\|t)^r}{r!}$$

が成り立つことを，帰納法により証明しよう．$r=1$ のときは上式は(7.10)により保証されているから，r までは (7.11) が成り立つと仮定しよう。このとき強マルコフ性と (5.19) から

$$U_t^{(r+1)} |\widetilde{1\cdot 2}|(\underline{x}, 0, 0) = E_{(\underline{x}, \underline{0}, 0)}[U_{t-s}^{(r)} |\widetilde{1\cdot 2}|(Z_s)|_{s=\tau}\,;\ \tau \leqq t]$$

$$= \int_0^t \int_{S_1} \Psi((\underline{x}, \underline{0}, 0); ds, (d\underline{y}, \underline{k}, j))\, U_{t-s}^{(r)} |\widetilde{1\cdot 2}|(\underline{y}, \underline{k}, j)$$

この右辺に Lem. 5.3 の第一式を適用すると

$$U_t^{(r+1)} |\widetilde{1\cdot 2}|(\underline{x}, \underline{0}, 0) = \int_0^t \int_{S_1} \Psi((\underline{x}, \underline{0}, 0); ds, (d\underline{y}, \underline{k}, j))\, 2^{|\underline{k}|} U_{t-s}^{(r)} |\widetilde{1\cdot 2}|(\underline{y}, \underline{0}, 0)$$

さらに帰納法の仮定と (7.9) により

$$\leqq \int_0^t E_{(x_1, x_2, \cdots, x_n)}(\check{c}(X_s^{(1)}, \cdots, X_s^{(n)}))(n+M)(n+2M)\cdots(n+rM) \times \frac{(\|c\|(t-s))^r}{r!}\,ds)$$

$$\leqq n(n+M)\cdots(n+rM)\frac{\|c\|^{r+1}}{r!}\int_0^t (t-s)^r ds$$

$$= n(n+M)\cdots(n+rM)\frac{(\|c\|t)^{r+1}}{(r+1)!}$$

となり，$r+1$ に対しても (7.11)式が成立する。よって (7.11) がすべての r に対し成り立つことがわかる。

さて，$U_t |\widetilde{1\cdot 2}|(x, 0, 0) = \sum_{r=0}^{\infty} U_t^{(r)} |\widetilde{1\cdot 2}|(x, 0, 0)$ なることに注意すれば (7.11) より

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$U_t|\widetilde{1\cdot 2}|(x,0,0) \leqq 1+\sum_{r=1}^{\infty}(1+M)\cdots(1+(r-1)M)\frac{(\|c\|t)^r}{r!}$$

$$\leqq 1+\sum_{r=1}^{\infty}(M\|c\|t)^r \quad , \quad x\in R^d ,$$

となり，

$$\delta_0=\frac{1}{M\|c\|}$$

とおけば $0\leqq t<\delta_0$ のとき $U_t|\widetilde{1\cdot 2}|(x,0,0)$ は有限になる。さらに，Lem. 5.4 によれば $\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ のとき

$$U_t^{(r)}|\widetilde{1\cdot 2}|(\underline{x},\underline{0},0)\leqq \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_n=r}\prod_{i=1}^{n} U_t^{(r_i)}|\widetilde{1\cdot 2}|(x_i,0,0)$$

であるから，これに (7.11) を適用すると

$$U_t^{(r)}|\widetilde{1\cdot 2}|(\underline{x},\underline{0},0)\leqq \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_n=r}\prod_{i=1}^{n}(M\|c\|t)^{r_i}$$

となり，結局

$$U_t|\widetilde{1\cdot 2}|(\underline{x},\underline{0},0)\leqq \sum_{r=0}\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_n=r}\prod_{i=1}^{n}(M\|c\|t)^{r_i}$$

$$=\left[\sum_{r=0}^{\infty}(M\|c\|t)^r\right]^n$$

を得るから，$0\leqq t<\delta_0$ なら $U_t|\widetilde{1\cdot 2}|(\underline{x},\underline{0},0)$ は有限な値をもつ．そこで再び Lem. 5.3 の第一式 (5.21) を使えば結局 $U_t|\widetilde{1\cdot 2}|(\underline{x},\underline{k},j)=2^{|\underline{k}|}U_t|\widetilde{1\cdot 2}|(\underline{x},\underline{0},0)$ の有限なることがわかる． q.e.d.

次に $F(x,u)$ が条件 (F.2) を満たすとき，$0\leqq f\leqq 1$ なる任意の連続函数 f と，任意の $t\geqq 0$ に対し $\hat{U}_t\widetilde{f\cdot 2}(\underline{x},\underline{k},j)$ が存在するように U_t の拡張 $\hat{U}_t$ を考えよう。

<u>Theorem 7.2</u> Z_t を Th.7.1 で考えた process とする．このとき $\sum_{n=1}^{M}\{q_n^+(x)-q_n^-(x)\}u^n$ が (F.1)，(F.2) を満たせば，次の条件を満たす U_t の拡張 $\hat{U}_t$ が存在する。

(i) $0\leqq f\leqq 1$，$f\in C(R^d)$ ならば $\hat{U}_t\widetilde{f\cdot 2}(\underline{x},\underline{k},j)$ はすべての $t\geqq 0$ で有限確定

(ii) $0\leqq f\leqq 1$，$f\in C(R^d)$ のとき，$u(t,x)=\hat{U}_t\widetilde{f\cdot 2}(x,0,0)$ は積分方程式

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

(7.12) $$u(t,x)=T_t f(x)+\int_0^t T_s(C(\cdot)F(\cdot,u(t-s,\cdot))(x)ds$$

の初期値fなる唯一の解である．ただしT_tはX_tの semi-group である。

証明． 最初に$\|C\|<\infty$であるから

$$\lim_{t\downarrow 0} P_{(x,k,j)}(\tau<t)=0 \quad , \quad (x,k)\in R^d\times N, \quad j\in J,$$

が成り立つことと，$U_t^0 \widetilde{f\cdot 2}(x,k,j)=(-1)^{[\frac{j}{2}]}2^k T_t f(x)$ に注意すれば，$u(t,x)=U_t\widetilde{f\cdot 2}(x,0,0)$ は右辺が有限確定になる範囲内で(t,x)の連続函数であることがわかる．

また，(7.12)の Cauchy 問題の解の一意性はよく知られていることである。

さて，$\hat{U}_t$を次のように定義しよう。まず，$\|f\|\leqq 1$，$f\in C(R^d)$と$0\leqq t<\delta_0$（$\delta_0>0$ は Th.7.1 で考えたもの）に対し

(7.13) $$\hat{U}_t\widetilde{f\cdot 2}(\underline{x},\underline{k},j)=U_t\widetilde{f\cdot 2}(\underline{x},\underline{k},j) \quad , \quad (\underline{x},\underline{k},j)\in S_1,$$

とおく。このとき Th.5.2 により

(7.14) $$\hat{U}_t\widetilde{f\cdot 2}(\underline{x},\underline{k},j)=\widetilde{\hat{U}_t\widetilde{f\cdot 2}|_{R^d}\cdot 2}(\underline{x},\underline{k};j) \quad , \quad 0\leqq t<\delta_0$$

が成り立つ。

一方，Th.5.10′によれば，$u(t,x)=\hat{U}_t\widetilde{f\cdot 2}(x,0,0)$は$0\leqq t<\delta_0$で(7.12)の解で

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to x_0}} u(t,x)=f(x_0) \quad , \quad x_0\in R^d$$

を満たすことは明らかである。従って，微分方程式でよく知られた結果：$0\leqq f\leqq 1$，$f\in C(R^d)$ のとき (7.12)の解を $u(t,x;f)$ とすると

(7.15) $$0\leqq u(t,x;f)\leqq 1 \quad , \quad x\in R^d \quad , \quad t\geqq 0,$$

を使うと $\hat{U}_t\widetilde{f\cdot 2}$ は

(7.16) $$0\leqq \hat{U}_t\widetilde{f\cdot 2}(x,0,0)\leqq 1 \quad , \quad x\in R^d, \ 0\leqq t<\delta_0,$$

を満たす。即ち $g=\hat{U}_t\widetilde{f\cdot 2}|_{R^d}$ はR^d上の函数として $0\leqq g\leqq 1$，$g\in C(R^d)$ である．従って再び Th.7.1 と(7.13)，(7.14)により $0\leqq s,t<\delta_0$ のとき $\hat{U}_t(\hat{U}_s\widetilde{f\cdot 2})(x,0,0)$ が存在するが，これは(t,x)の函数として見ると，初期値を $\hat{U}_s\widetilde{f\cdot 2}(x,0,0)$ とする (7.12) の解である。よって (7.12) の解の一

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

意性を使うと

$$\hat{U}_t(\hat{U}_s \widetilde{f\cdot 2})(x,0,0) = u(s+t,\, x; f) \quad , \quad 0 \leqq s,\, t < \delta_0$$

が成り立ち，上式の左辺はxを固定すれば $t+s$ のみの函数になることがわかる。そこで $\hat{U}_{t+s}$ を

$$\hat{U}_{t+s}\widetilde{f\cdot 2}(x,0,0) = \hat{U}_t(\hat{U}_s \widetilde{f\cdot 2})(x,0,0), \quad 0 \leqq s, t < \delta_0 ,$$

および

$$(7.16) \qquad \hat{U}_{t+s}\widetilde{f\cdot 2}(\underline{x},\underline{k},j) = \widetilde{\hat{U}_{t+s}\widetilde{f\cdot 2}|_{R^d}\cdot 2}(\underline{x},\underline{k},j) \quad , \quad 0 \leqq s, t < \delta_0$$

で定義することができる。ここで再び (7.15) を使うと

$$0 \leqq \hat{U}_{t+s}\widetilde{f\cdot 2}(x,0,0) \leqq 1$$

となるから，今と同様の議論で

$$\hat{U}_{t+s+u}\widetilde{f\cdot 2}(x,0,0) = \hat{U}_u(\hat{U}_{t+s}\widetilde{f\cdot 2})(x,0,0) \quad , \quad 0 \leqq t+s+u < 3\delta_0 ,$$

が，さらに一般に

$$\hat{U}_{t_1+t_2+\cdots+t_k}\widetilde{f\cdot 2}(x,0,0) = \hat{U}_{t_k}(\hat{U}_{t_{k-1}}(\cdots(\hat{U}_{t_1}\widetilde{f\cdot 2})\cdots))(x,0,0) \quad ,$$

が $\sum_{i=1}^{k} t_i < k\delta_0$ に対して定義される．このことから $\hat{U}_{t_1+t_2+\cdots+t_n}\widetilde{f\cdot 2}(\underline{x},\underline{k},j)$ も定義できる．このように定義すると $u(t,x) = \hat{U}_t\widetilde{f\cdot 2}(x,0,0)$ が定理の (i), (ii) を満たすことは明らかである。

さて，$h(\underline{x},\underline{k},j)$ を S_1 上の可測函数とする．このとき適当な正数δ（hに関係してもよい）が存在して，任意のnと任意の $0 \leqq t_1, t_2, \cdots, t_n < \delta$ に対し $U_{t_n}(U_{t_{n-1}}(\cdots(U_{t_1}h))\cdots)(\underline{x},\underline{k},j)$ が存在し，かつhと$(\underline{x},\underline{k},j)$を固定すると $t_1+t_2+\cdots+t_n$ のみの函数になるときは

$$(7.17) \qquad \hat{U}_t h(\underline{x},\underline{k},j) = U_{t_n}(U_{t_{n-1}}(\cdots(U_{t_1}h))\cdots)(\underline{x},\underline{k},j),$$

$$\text{ただし} \quad t = \sum_{i=1}^{n} t_i \ , \quad 0 \leqq t_i < \delta ,$$

で $\hat{U}_t h$ を定義できるが，U_t が semi-group であることから $\hat{U}_t$ は明らかに U_t の拡張である。また特に $h = \widetilde{f\cdot 2}$ のときは既述の $\hat{U}_t$ の定義と全く同様であるから，(7.17)で定義される $\hat{U}_t$ を考えれば，定理が証明されたことになる。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

q.e.d.

この $\hat{U}_t$ は semi-group 性をもっているので，以後では $\hat{U}_t$ の代りに U_t と書くことにする。なお，念の為，次のよく知られた結果を Lem. として挙げておく。

Lemma 7.1　　$F(x,u)$ が Lipschitz 条件

(F.1)　　$$|F(x,u_1)-F(x,u_2)| \leqq K|u_1-u_2|$$

を満たすとき，$f \in C(R^d)$ に対し

$$u_0(t,x)=\int_{R^d}\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{\|y-x\|^2}{2t}}f(y)\,dy\ ,$$

$$u_{n+1}(t,x)=u_0(t,x)+\int_0^t ds\int_{R^d}\frac{1}{(2\pi s)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{\|y-x\|^2}{2s}}F(y,u_n(t-s,y))\,dy\ ,$$

$n \geqq 0$

とおくと，任意の $T>0$ に対し　$u_n(t,x)$ は $n\to\infty$ のとき $[0,T]\times R^d$ 上で一様収束する。さらにこの極限函数 $u(t,x)$ は

(7.18)　　$$u(t,x)=u_0(t,x)+\int_0^t ds\int_{R^d}\frac{1}{(2\pi s)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{\|y-x\|^2}{2s}}F(y,u(t-s,y))\,dy$$

の初期値 f の唯一の解であり，特に F が (F.1) を満たせば (7.1) の解になる。

証明は [13] にあるように，普通の方法で容易に得られる。

次に函数列

(7.18)　　$$F_i(x,u)=\frac{1}{C_i(x)}\sum_{n=1}^{M_i}\left\{q^+_{i,n}(x)-q^-_{i,n}(x)\right\}u^n,\quad i=1,2,3,\cdots$$

を考えよう。ここで $q^+_{i,n}$, $q^-_{i,n}$, C_i は (7.13) の場合と同じ関係を満たし，さらに u に関して一様に Lipschitz 条件

(7.19)　　$$|C_i(x)F_i(x,u_1)-C_i(x)F_i(x,u_2)|\leqq K|u_1-u_2|,\quad 0\leqq u_1,u_2\leqq 1,\ K<\infty,$$

を満たすものとする。この F_i に対応する符号をもった年令附分枝マルコフ過程を $Z^{(i)}_t$，その semi-group を $U_{i,t}$ とする．このとき次の定理が成り立つ。

Theorem 7.3　　函数列 $C_i(x)F_i(x,u)$ は (F.2) および (7.19) を満たすものとする。もし，$C_i(x)F_i(x,u)$ が $i\to\infty$ のとき $R^d\times[0,1]$ 上で $C(x)F(x,u)$ に一様に収束していれば，任意の $0\leqq f\leqq 1$，$f\in C(R^d)$ と $T>0$ に対し，

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$u^{(i)}(t,x)=U_{i,t}\widehat{f\cdot 2}(x,0,0)$ も $[0,T]\times R^d$ 上で一様収束し, $u(t,x)=\lim_{i\to\infty}u^{(i)}(t,x)$ は

(7.20) $$u(t,x)=T_tf(x)+\int_0^t T_s\,(C(\cdot)\,F(s,u(t-s,\cdot)))(x)\,ds$$

の初期値 f の唯一の解になっている。

証明. いま

(7.21) $$\begin{aligned} &u_0^{(i)}(t,x)=T_tf(x),\\ &u_{n+1}^{(i)}(t,x)=u_0^{(i)}(t,x)+\int_0^t T_s\,(C_i(\cdot)\,F_i(s,u_n^{(i)}(t-s,\cdot)))(x)\,ds, \end{aligned}$$

$$i=1,2,3,\cdots$$

とおくと, $Th.7.2$ および $Lem.7.1$ により

(7.22) $$u^{(i)}(t,x)=\lim_{n\to\infty}u_n^{(i)}(t,x)$$

が成り立つ. さらに仮定から任意の $\varepsilon>0$ に対し, $N_0>0$ が存在して, $i,j\geqq N_0$ ならば

(7.23) $$|C_i(x)F_i(x,u)-C_j(x)F_j(x,u)|<\varepsilon\quad,\quad x\in R^d,\ u\in[0,1],$$

となる。これらのことを利用して定理を証明しよう。

まず, $u_0^{(i)}(t,x)$ が i に無関係で $T_tf(x)$ に等しいことから, (7.23) を使うと

(7.24) $$\begin{aligned} &|u_1^{(i)}(t,x)-u_1^{(j)}(t,x)|\\ &\quad\leqq\int_0^t T_s|C_i(\cdot)F_i(\cdot,u_0^{(i)}(t-s,\cdot))-C_j(\cdot)F_j(\cdot,u_0^{(j)}(t-s,\cdot))|(x)\,ds\\ &\quad<\varepsilon t\quad,\qquad i,j\geqq N_0 \end{aligned}$$

を得る. 一般に

(7.25) $$|u_n^{(i)}(t,x)-u_n^{(j)}(t,x)|\leqq\varepsilon T\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{(Kt)^\ell}{\ell!},\quad 0\leqq t\leqq T,\ i,j\geqq N_0,$$

がすべての n で成り立つことを帰納法で証明しよう。$n=1$ のとき (7.25) が成り立つことは (7.24) で示されているから, n まで成り立つことを仮定しよう。このとき

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

(228)

$$
\begin{aligned}
&|u_{n+1}^{(i)}(t,x) - u_{n+1}^{(j)}(t,x)| \\
&\qquad \leqq \int_0^t T_s |C_i(\cdot)F_i(\cdot, u_n^{(i)}(t-s,\cdot)) - C_j(\cdot)F_j(\cdot, u_n^{(j)}(t-s,\cdot))|(x)\,ds \\
&\qquad \leqq \int_0^t T_s |C_i(\cdot)F_i(\cdot, u_n^{(i)}(t-s,\cdot)) - C_j(\cdot)F_j(\cdot, u_n^{(i)}(t-s,\cdot))|(x)\,ds \\
&\qquad\quad + \int_0^t T_s |C_j(\cdot)F_j(\cdot, u_n^{(i)}(t-s,\cdot)) - C_j(\cdot)F_j(\cdot, u_n^{(j)}(t-s,\cdot))|(x)\,ds
\end{aligned}
$$

で，(7.19)，(7.23) と帰納法の仮定により

$$
\begin{aligned}
&\leqq \varepsilon \int_0^t ds + K\int_0^t T_s |u_n^{(i)}(t-s,\cdot) - u_n^{(j)}(t-s,\cdot)|(x)\,ds \\
&\leqq \varepsilon T + K\varepsilon T \sum_{\ell=1}^{n} \frac{K^{\ell-1}t^\ell}{\ell!} \\
&= \varepsilon T \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(Kt)^\ell}{\ell!}, \qquad 0 \leqq t \leqq T, \quad i,j \geqq N_0,
\end{aligned}
$$

となり，(7.25) がすべての n に対し成り立つことがわかる．

さて，(7.22) と (7.25) より

$$
|u^{(i)}(t,x) - u^{(j)}(t,x)| \leqq \varepsilon T e^{KT}, \qquad i,j \geqq N_0
$$

を得るが，ε は任意ゆえ，$u^{(i)}(t,x)$ が $[0,T]\times R^d$ 上で一様収束することがわかる。さらに Th. 7.2 により

$$
u^{(i)}(t,x) = T_t f(x) + \int_0^t T_s(C_i(\cdot)F_i(\cdot, u^{(i)}(t-s,\cdot)))(x)\,ds
$$

が成り立つから，$i\to\infty$ のとき (7.20) が成り立つ。

解の一意性は Lem.7.1 より明らかである。 q.e.d.

<u>Corollary 7.1</u> Th. 7.3 で特に極限函数 $C(x)F(x,u)$ が (F.1) を満たせば，注) $u(t,x) = \lim_{i\to\infty} u^{(i)}(t,x)$ は

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + C(x)F(x,u) \tag{7.26}
$$

の初期値 f の唯一の解である。

注) u の変域は $[0,1]$ に限ってよい．それは C, F が (F.1)，(F.2) を満たすとき，次の (7.26) の解 $u(t,x)$ は常に $[0,1]$ 内の値をとるからである。

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

証明． この場合には (7.20) と (7.26) は equivalent になるから，Th. 7.3 から直ちに (7.26) が得られる． q.e.d.

さて，再び (7.1) に戻って考えてみよう．(7.1) で与えられる $F(x,u)$ が，Cor. 7.1 のように都合のよいものである場合の十分条件が与えられればよいのだが，我々はそれを知らない。ここでは非常に不満足であるが，$F(x,u)$ が u のみの函数である場合を考えてみる。

Corollary 7.2 $F(u)$ を連続微分可能な函数で特に，

$$(7.27) \qquad \begin{aligned} &F(0)=F(1)=0, \qquad 0<F(u), \qquad 0<u<1, \\ &F'(0)>0 \end{aligned}$$

を満たす函数とする。このとき，$\|f\|<1$ なる非負の連続函数 f に対し

$$(7.28) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta u+F(u)$$

の初期値 f の唯一の解は，符号のついた年令附分枝マルコフ過程 $Z_t^{(i)}$ による平均 $u^{(i)}(t,x)=U_{i,t}\widetilde{f\cdot Z}(x,0,0)$ の極限として表わされる。

証明． $F(u)$ は連続微分可能であるから，特に u の変域を $[0,1]$ に限れば (F.1) を満たしている。よって (7.19) と (F.2) を満たし，かつ (7.18) で与えられる type の函数列 $C_i F_i$ を適当に選べば $R^d\times[0,1]$ 上で $F(u)$ に一様収束することを示そう。そうすれば Cor. 7.1 により Cor. 7.2 が証明される。

$F'(u)$ は $[0,1]$ 上で連続であるから，Weierstrass の定理により u の多項式 $g_i(u)$ を適当に選べば，$[0,1]$ 上で $F'(u)$ に一様収束する。そこで

$$(7.29) \qquad G_i(u)=\int_0^u g_i(s)\,ds+a_i u, \qquad 0\leq u\leq 1,$$

とおく。そこで a_i は $G_i(1)=0$ となるように決める。このとき $F(1)=0$, g_i は $F'(u)$ に $[0,1]$ 上で一様収束であるから，i が十分大きいときには $|a_i|$ は 0 に近い値となり，さらに $F'(0)>0$ より $g_i(0)$ も正で，かつ

$$g_i(0)>\frac{1}{2}F'(0)>a_i$$

としてよい。即ち $G_i(u)$ は $\delta>0$ に対し

$$(7.30) \qquad G_i(0)=0, \qquad 0<G_i(u) \qquad 0<u<\delta$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

(230)

を満たす。さらに $(0,1)$ では $F(u)>0$ であるから

$$\xi_i = \inf\{u>0\,;\ G_i(u)=0\}$$

とおくと

(7.31) $$\lim_{i\to\infty} \xi_i = 1$$

を得る。

さて，$G_i(u)$ を

(7.32) $$G_i(u) = \sum_{n=1}^{M_i} (q^+_{i,n} - q^-_{i,n}) u^n \,, \qquad q^+_{i,n},\ q^-_{i,n} \geqq 0,\quad q^+_{i,n},\ q^-_{i,n} = 0$$

と書き，

(7.33) $$C_i = \sum_{n=1}^{M_i} (q^+_{i,n} + q^-_{i,n}) \,, \qquad F_i(u) = \frac{1}{C_i} G_i(u)$$

とおくと，$C_iF_i(u)$ も $[0,1]$ 上で $F(u)$ に一様収束し，さらに $F'(u)$ が $[0,1]$ での有界なることから

(7.34) $$|C_iF_i(u_1) - C_iF_i(u_2)| \leqq K|u_1-u_2|, \qquad 0\leqq u_1, u_2 \leqq 1,\ i=1,2,3,\cdots$$

となる K が存在することがわかる．即ち函数列 C_iF_i は (7.19)を満たす．よって Cor. 7.1 が適用できて，任意に i_0 を固定するとき $0\leqq f\leqq \xi_{i_0}$, $f\in C(R^d)$ ならば，f を初期値とする(7.28)の解 $u(t,x;f)$ は

(7.35) $$u(t,x;f) = \lim_{i\to\infty} U_{0,t}\widehat{f\cdot 2}(x,0,0)$$

と表わし得る。ここで i_0 が任意であることと (7.31) に注意すれば $0\leqq f$, $\|f\|<1$ なる連続函数に対し (7.35) が成り立つことがわかる． q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

文　　献

[1] Dynkin, E.B., *Markov processes*, (1965) (Springer)

[2] Fujita, H., *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$*. Journal of Faculty of Sience University of Tokyo Vol. 13, Part 1 (to appear)。

[3] Hunt, G. A., *Markov processes and potentials II*, Ill. J. Math. 2 (1958), p. 151-213.

[4] 池田信行，長澤正雄，渡辺信三，分枝マルコフ過程の基礎. Sem. on Prob. Vol. 23 (1966).

[5] Ikeda, N., M. Nagasawa and S. Watanabe, *A construction of Markov processes by piecing out*, Proc. Japan Academy 42 (1966), p. 370-375.

[6] ———, *A construction of Branching Markov Processes*, Proc. Japan Academy 42 (1966), p. 380-384.

[7] ———, *Fundamental equations of Branching Markov Processes*, Proc. Japan Academy 42 (1966), p. 252-257.

[8] Ito, K., *Lectures on stochastic processes*, Tata Inst. Bombay, (1961).

[9] 伊藤　清, Subordination について，数理科学研究報告.

[10] Ito, K. and H. P. McKean Jr., *Diffusion processes and their sample paths*. (1965), Springer.

[11] 伊藤清三, 半線型放物型偏微分方程式の解の爆発について，数学 Vol. 18, (1966), p. 44-47。

[12] Knight, F. B., *Brownian Random Chains*, (to appear).

[13] Kolmogoroff, A., I. Petrovsky and N. Piscounoff, *Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matiere et son application à un problème biologique*, Bulletin de l'Université d'état à Moscou, Vol. 1, Fasc. 6, p. 1-25.

[14] Nagasawa, M. and K. Sato, *Some theorems on time change and killing of Markov processes*, Kodai Math. Sem. Rep. 15 (1963),

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

p. 195-219.

[15] Nagasawa, M., *A note on construction of signed branching Markov process with age*, (to appear).

[16] Nagasawa, M., and T. Sirao, *A probabilistic treatment of the blowing up of solutions for* $u_t = T_t f + \int_0^t T_s(C \cdot F[u_{t-s}])\,ds$, (to appear).

[17] Sirao, T., *A probabilistic treatment of semi-linear parabolic equations*, (to appear in Proc. Japan Acad.).

[18] Sirao, T., *On signed branching Markov processes with age*, (to appear).

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

補　　　足

Seminar on Probability Vol. 23, I の Lemma 2.8 (pp. 61~62) の証明の訂正

この Lemma の証明には組合せの数の計算の仕方に間違いがあるので，つぎのように訂正する必要がある．記号その他は Vol. 23, I に従う．

証　明.　いま

$$\sum_{(n_1,\cdots,n_k)}^{(n)} F(n_1, n_2, \cdots, n_k) = \sum_{(n_1,\cdots,n_k)}^{(n)} \frac{1}{k!} \sum_{\pi} F(n_{\pi(1)}, \cdots, n_{\pi(k)})$$

に注意する．いま

$$T_t^{(r)} \hat{f}(\bar{x}) = \sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r)} \prod_{j=1}^{n} T_t^{(r_j)} \hat{f}(x_j)$$

を r に関する induction で示そう。$r=0$ の時は仮定の T_t° が (2.38) の(i)をみたすことであるから明らか。いま $r=0, 1, 2, \cdots, r$ で成りたつとしよう。

$$T_t^{(r+1)} \hat{f}(\bar{x}) = \int_0^t \int_S \Psi(\bar{x}; ds\, d\bar{y})\, T_{t-s}^{(r)} \hat{f}(\bar{y}),$$

ここで induction の仮定を用いて，

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t \int_{S^m} \Psi(\bar{x}; ds\, d\bar{y}) \Big[\sum_{(r_1,\cdots,r_m)}^{(r)} \prod_{j=1}^{m} T_{t-s}^{(r_j)} \hat{f}(y_j) \Big]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{(r_1,\cdots,r_m)}^{(r)} \int_0^t \int_{S^m} \Psi(\bar{x}; ds d\bar{y}) \Big[\frac{1}{m!} \sum_{\pi} \prod_{j=1}^{m} T_{t-s}^{(r_j)} \hat{f}(x_{\pi(j)}) \Big]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{(r_1,\cdots,r_m)}^{(r)} \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{{}_mC_{n-1}} \sum_{(q_1,\cdots,q_{m-n+1})} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\times \sum_{\hat{\pi}}^{(\hat{q})} \int_{S^{m-n+1}} \Psi(x_i; ds\, d\bar{y}) \Big\{ \frac{1}{(m-n+1)!} \sum_{\pi}^{(q)}$$

$$\times \prod_{h=1}^{m-n+1} T_{t-s}^{(r_{q_{\pi(h)}})} \hat{f}(y_h^{\circ}) \Big\} \prod_{j \neq i} T_s^{\circ} T_{t-s}^{(r_{\hat{q}_{\hat{\pi}(j)}})} (x_j)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{1}{{}_mC_{n-1}} \sum_{(q_1,\cdots,q_{m-n+1})} \sum_{(r_{\hat{q}_1},\cdots,r_{\hat{q}_{n-1}},\, r^*)}^{(r)}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

$$\times \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\hat{\pi}}^{(\hat{q})} \int_{S^{m-n+1}} \Psi(x_i ; ds\, d\bar{y})$$

$$\times \sum_{(r_{q_1},\cdots,r_{q_{m-n+1}})}^{(r^*)} \frac{1}{(m-n+1)!} \sum_{\pi}^{(q)} \prod_{h=1}^{m-n+1} T_{t-s}^{(r_{q_{\pi(h)}})} \hat{f}(y_h^{(0)}) \prod_{j \neq i} T_s^{(0)} T_{t-s}^{(r_{\hat{q}_{\hat{\pi}(j)}})} \hat{f}(x_j)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{1}{{}_mC_{n-1}} \sum_{(q_1,\cdots,q_{m-n+1})} \sum_{(r_{\hat{q}_1},\cdots,r_{\hat{q}_{n-1}},r^*)}^{(r)} \cdot \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\times \sum_{\hat{\pi}}^{(\hat{q})} \int_{S^{m-n+1}} \Psi(x_i ; ds\, d\bar{y}) \left\{ \sum_{(r_{q_1},\cdots,r_{q_{m-n+1}})}^{(r^*)} \prod_{h=1}^{m-n+1} T_{t-s}^{(r_{q_h})} \hat{f}(y_h^{0}) \right\}$$

$$\times \prod_{j \neq i} T_s^{0} T_{t-s}^{(r_{\hat{q}_{\hat{\pi}(j)}})} \hat{f}(x_j)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1} \int_0^t \frac{1}{{}_mC_{n-1}} \sum_{(q_1,\cdots,q_{m-n+1})} \sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r)} \int_{S^{m-n+1}} \Psi(x_i ; ds\, d\bar{y})$$

$$\times T_{t-s}^{(r_i)} \hat{f}(\bar{y}) \prod_{j \neq i} T_s^{(0)} T_{t-s}^{(r_j)} \hat{f}(x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r)} \int_0^t \int_S \Psi(x_i ; ds\, d\bar{y}) T_{t-s}^{(r_i)} \hat{f}(\bar{y}) \prod_{j \neq i} T_s^{(0)} T_{t-s}^{(r_j)} \hat{f}(x_j)$$

$$= \sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r+1)} \prod_{j=1}^{n} T_t^{(r_j)} \hat{f}(x_j)$$ (Lemma 2.7 による).

（終 り）

Sem. on Probab.
Vol.25-II 1967年
P105-234

1967. 3. 発行 確率論セミナー