Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 23 - II

分枝マルコフ過程の基礎

池田 信行・長澤 正雄・渡辺 信三

1966

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

目　　次

[23-I]

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

[23-II]

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

第6章 branching Markov process の構成

§6.1 はじめに

第2章でS上の branching Markov process が存在すれば，それからS上の Markov process X_0 と分裂法則 $\{q_n(x), \pi_n(x, dy)\}$ が定まることをのべた。逆にこれから branching Markov process を構成することは，ごく自然に考えられる理論上の問題の1つである。また，branching Markov process を模型とする現実問題でも，われわれが指定出来るものは，S上の Markov process X_0 の特性量と分裂法則であると理解するのが自然である。あくまでS上の branching Markov process X は数学的な実在で，現実的な実在ではない。そのような意味から，Xがいくつかの特性量より真に構成出来ることを示すことは，理論上も応用上も重要なことである。

ところが，この問題をある random time で吸収される Markov process の系列が与えられたとき，それらを順次つないで行って1つの Markov process を構成することと理解すれば，多くの部分は，branching Markov process 固有のことでなく，Markov process の理論でしばしば当面することに帰着される。そのような問題を正面から取上げているものとしては，例えば Volkonsky [1] の結果である。また，Dynkin [1] の意味の jump type の process の構成で滞在時間の系列と harmonic measure より定めて行くのもその例になっている。その最も簡単なものは可算空間の第一種不連続で右連続な path を持つ Markov process の構成である。Moyal [1] はその立場で branching Markov process をふくむある種のクラスの半群を構成している。

このノートでは，第6章で Volkonsky [1] にならって，measure P_x を直接構成することを考える。§6.2 はそのための一般論で，§6.3 はその branching Markov process の場合への応用である。続いてつぎの第7章で，基本的には Moyal [1] に従って，その半群を構成し，それから branching Markov process を定めることを考える。*1)

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

§6.2 構成の一般論

まず，Markov processの構成でしばしば有用である1つの結果を準備しよう。

Ionescu Tulcea の定理 *2) (i) $\{(E_j, \mathcal{F}_j)\}_{j=0}^{\infty}$ を可測空间の列とする。さらに

$$P_{n+1}^{0,\cdots,n}(x_0, x_1, \cdots, x_n \,;\, dx_{n+1})$$

は直積空间 $(\prod_0^n E_j, \bigotimes_0^n \mathcal{F}_j)$ から $(E_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$ への写像で，$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ に関して可測，dx_{n+1} に関して確率測度であるとする。

そのとき，直積可測空间 $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L}) = \prod_{n=0}^{\infty}(E_n, \mathcal{F}_n)$ 上に確率測度 P_{x_0}，$(x_0 \in E_0)$，が存在して，任意の cylinder set $\prod_{n=0}^{\infty} F_n$ （ただし，あるNに対し $\forall n \geq N$ で $F_n = E_n$）に対し，

$$(6.1) \qquad P_{x_0}\Big[\prod_{n=0}^{\infty} F_n\Big] = \chi_{F_0}(x_0)\int_{x_1 \in F_1} P_1^0(x_0\,; dx_1)\int_{x_2 \in F_2} P_2^{0,1}(x_0, x_1\,; dx_2)\cdots\int_{x_N \in F_N} P_N^{0,\cdots,N-1}(x_0, \cdots, x_N\,; dx_{N+1})$$

をみたす。

(ii) また，任意の $(\Omega, \mathcal{O}\!\mathcal{L})$ 上の非負確率変数 $Y(\omega)$ に対し，

$$\int_{\Omega} Y(\omega)\, P_{x_0}(d\omega)$$

は x_0 の $\mathcal{F}_0$-可測関数である。*3)

この定理で各 $(E_j, \mathcal{F}_j)$ は単に可測空间であればよく，Kolmogoroff の拡張定理の場合のように topological な条件がない点が応用する時に便利になることが多い。

[Proof] ここでは上の定理の概略を与える。まず，有限なNを固定する。そのとき，$(\Omega_N, \mathcal{O}\!\mathcal{L}_N) = \prod_{j=0}^{N}(E_j, \mathcal{F}_j)$ 上に確率測度 $P_{x_0, \cdots, x_n}$，$0 \leq n \leq N$，を次式で逐次定義する：

---

*1) branching Markov process の構成に Moyal の方法を利用する点については，野本久夫氏の助言に負うところが多い。

*2) Ionescu Tulcea [1]，Neveu [1] 参照。

*3) ここで $\prod_0^n E_j$ は直積空间，$\bigotimes_0^n \mathcal{F}_j$ は $\mathcal{F}_j$ の積から生成される σ-field． また $\prod_{n=0}^{\infty}(E_n, \mathcal{F}_n)$ は可測空间としての積空间を表わす。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$P^{(N)}_{x_0,\cdots,x_N}[A] = \chi_A(x_0,\cdots,x_N),$$

$$P^{(N)}_{x_0,\cdots,x_n}[A] = \int_{E_{n+1}} P^{0,\cdots,n}_{n+1}(x_0,\cdots,x_n;dx_{n+1}) P^{(N)}_{x_0,\cdots,x_n,x_{n+1}}[A] \text{ 。}$$

この定義の仕方から，$\prod_0^N(E_j,\mathcal{F}_j)$ 上の任意の非負確率変数 $Y(\omega)$ に対し，

$$\int_{\Omega_N} P^{(N)}_{x_0,\cdots,x_n}[d\omega]Y(\omega) = \int_{E_{n+1}} P^{0,\cdots,n}_{n+1}(x_0,\cdots,x_n;dx_{n+1})\cdots\int_{E_N} P^{0,\cdots,N-1}_N(x_0,\cdots,x_{N-1};dx_N)Y(x_0,\cdots,x_N)$$

が成り立つことは明らかである。上式に注意すれば，有限な固定されたNに対し，定理を $N+1$ 個の直積空間についてのことと理解すると，主張が成立っていることが言える。

任意の $N\geq 0$ に対し，$\bigotimes_0^N\mathcal{F}_j$ 上に定義した $P^{(N)}_{x_0,\cdots,x_n}$，$0\leq n\leq N$，を用いて，$\mathcal{B}=\bigcup_N(\bigotimes_0^N\mathcal{F}_j)$ 上に集合関数 $P_{x_0,\cdots,x_n}$ を

$$P_{x_0,\cdots,x_n}[A] = P^{(N)}_{x_0,\cdots,x_n}[A] \quad , \qquad A\in\bigotimes_0^N\mathcal{F}_j ,$$

と定義する。しかも$\mathcal{B}$上では加法的になるようにしておく。こうした時，左辺がNによらないように定義されることはすぐにわかる。上の定義の仕方から，

(a) $P_{x_0,\cdots,x_n}$ の $\bigotimes_0^N\mathcal{F}_j$ 上への制限は $P^{(N)}_{x_0,\cdots,x_n}$ と一致し，確率測度である。

(b) $P_{x_0,\cdots,x_n}$ は$\mathcal{B}$上で有限加法的である。

(c) $\mathcal{B}$は$\mathcal{O}\!\mathcal{L}$を生成する。

この (a), (b), (c) より，$P_{x_0,\cdots,x_n}$ が$\mathcal{B}$上で考えた時，連続なことを注意すれば，測度論のよく知られた結果より，それは$\mathcal{O}\!\mathcal{L}$上の確率測度に拡張出来る。従って，つぎにその連続性を示そう。

さて，$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ は$\mathcal{B}$の単調減少列で $\bigcap_n B_n=\phi$ とする。いま，$m\geq 0$，および $x_0^*,\cdots,x_m^*$ が存在して，

$$\lim_n P_{x_0^*,\cdots,x_m^*}[B_n] > 0$$

が成り立つとすれば矛盾であることを言えばよい。

単調性によって，

$$\begin{aligned} 0 &< \lim_n P_{x_0^*,\cdots,x_m^*}[B_n] \\ &= \int_{E_{m+1}} P^{0,\cdots,m}_{m+1}(x_0^*,\cdots,x_m^*;dx_{m+1}) \lim_n P_{x_0^*,\cdots,x_m^*\,x_{m+1}}[B_n] \text{ .} \end{aligned}$$

従って，x^*_{m+1} が存在して，

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$\lim_n P_{x_0^*, \cdots, x_m^*, x_{m+1}^*}[B_n] > 0$$

となる。これを繰り返して，つぎのことが成り立つような

$$\omega^* = \{x_0^*, x_1^*, x_2^*, \cdots\}$$

を得る： 任意の $k \geqq m$ に対して

(6.2) $$\lim_n P_{x_0^*, \cdots, x_k^*}[B_n] > 0 .$$

一方，nを固定すれば，kを十分大きくとる時，

$$B_n \in \bigotimes_0^k \mathcal{F}_j$$

となるので，定義より

$$P_{x_0, \cdots, x_k}[B_n] = \chi_{B_n}(x_0, \cdots, x_k)$$

である。従って，(6.2)より，任意のnに対して，

$$\omega^* \in B_n$$

である。これは $\omega^* \in \bigcap_n B_n$ を意味し，$\bigcap_n B_n = \phi$ に矛盾する。

最後に，$B \in \mathcal{B}$ に対して，$P_{x_0, \cdots, x_n}[B]$ は $(x_0, \cdots, x_n)$ の可測関数であるから，$(\Omega, \mathfrak{A})$ 上の任意の非負確率変数に対し，

$$\int_\Omega P_{x_0, \cdots, x_n}(d\omega) Y(\omega)$$

は $(x_0, \cdots, x_n)$ の可測関数である。 *q.e.d.*

いま示した定理を用いると，つぎの結果が得られる。

<u>*Lemma* 6.1</u> $\{W, \mathcal{B}, P_x ; x \in S\}$ を$\mathcal{B}$上の確率測度の系とし，$\mu_n(w, dy)$ は $W \times S$ 上で定義され，wについては，$\mathcal{B}$-可測，dy についてはS上の確率測度とする。$\Omega = W \times S$ とし，その元を $\omega = (w, x)$ と書き，$\widetilde{\Omega} = \prod_{j=0}^\infty \Omega_j$ とする。但し，$\Omega_0 = S$， $\Omega_j = \Omega$， $j \geqq 1$ とする。また $\widetilde{\Omega}$ の元を $\widetilde{\omega} = (\omega^0, \omega^1, \cdots)$ と書き，

$$Q_x^n(d\omega) = P_x[dw]\,\mu_n(w, dy) \quad , \quad \omega = (w, y)$$

とおく。このとき，$\widetilde{\Omega}$上に確率測度 $\widetilde{P}_x$ ，$x \in S$ ，が存在して，

$$\widetilde{P}_x[d\omega^0 d\omega^1 \cdots d\omega^n] = \chi_{d\omega^0}(x) Q_x^1(d\omega^1) Q_{x_1}^2(d\omega^2) \cdots Q_{x_{n-1}}^n(d\omega^n)$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

をみたす。ただし，$\omega^j=(w_j, x_j)$ である．また $\widetilde{P}_x$ は $\prod_{j=1}^{\infty}\Omega_j$ 上の測度と考えることも出来て，そのときは

$$\widetilde{P}_x[d\omega^1 d\omega^2\cdots d\omega^n] = Q_x^1(d\omega^1)\,Q_{x_1}^2(d\omega^2)\cdots\ Q_{x_{n-1}}^n(d\omega^n)$$

である．

[Proof]　$P_1^0(x, d\omega^1)=Q_x^1(d\omega^1)$, $P_2^1(\omega^1, d\omega^2)=Q_{x_1}^2(d\omega^2)$, $\cdots$, $P_n^{n-1}(\omega^{n-1}; d\omega^n)=Q_{x_{n-1}}^n(d\omega^n)$, $\cdots$ として，上の Ionescu-Tulcea の定理を適用すればよい。　q.e.d.

上の結果をわれわれの問題に応用する前に，1つの概念を準備しよう。

いま，$\bar{S}=S\cup\{\Delta\}$ 上に1つの死点 Δ をもつ（強）Markov process $\{W, x_t, \mathcal{B}, P_x, x\in\bar{S}\}$ があるとする。いつものように，$\zeta(w)=\inf\{t;\ x_t(w)=\Delta\}$ とする。このとき，つぎの条件をみたすように $W\times\bar{S}$ 上で定義された $\mu(w, dy)$ を instantaneous distribution と呼ぶ：

a) $\mu(w, dy)$ は w については $\mathcal{B}$-可測で dy については $\bar{S}$ 上の確率測度である。

b) $\zeta(w)=0$ なる w に対しては $\mu(w, dy)=\delta_{\{\Delta\}}(dy)$ である。

c) 任意の Markov time $T(w)\geq 0$ に対して，

$$P_x\{\mu(w, dy)=\mu(\theta_{T(w)}w, dy),\ T(w)<\zeta(w)\}=P_x\{T(w)<\zeta(w)\}. \tag{6.3}$$

これから当分の間，$\bar{S}$ 上に(強) Markov process $\{W, x_t, \mathcal{B}, P_x, x\in\bar{S}\}$ で，$P_x\{0<\zeta\}=1$, $x\in S$ をみたすものと，instantaneous distribution $\mu(w, dy)$ を考える。いま，$\Omega=W\times\bar{S}$ とおき，Lemma 6.1 の μ_n として，μ をとれば，$\widetilde{\Omega}=\prod_{j=1}^{\infty}\Omega_j$ 上に Lemma 6.1 の方法で確率測度 $\widetilde{P}_x$, $(x\in\bar{S})$，が存在する。

今，$\Omega_j=\omega=(w, y)$，　$j\geq 1$ に対し

$$\hat{x}_t(\omega)=\begin{cases} x_t(w), & t<\zeta(w), \quad \zeta(w)>0, \\ y, & t\geq\zeta(w), \quad \zeta(w)>0, \\ \Delta, & \zeta(w)=0 \end{cases} \tag{6.4}$$

とおき，$\widetilde{\Omega}\ni\widetilde{\omega}=(\omega^1, \cdots)$ に対し，

$$N(\widetilde{\omega})=\min\{j;\ \zeta(w^j)=0\} \tag{6.5}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

とおく。但し，{ }＝φ の時は ∞ とおく。さらに任意の $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$ に対し，
$X_t(\tilde{\omega})$ をつぎの形で定義する。

$$
(6.6)\quad \begin{cases}
\dot{x}_t(\omega^1), & 0\le t\le \zeta(w^1),\\
\dot{x}_{t-\zeta(w^1)}(\omega^2), & \zeta(w^1)<t\le \zeta(w^1)+\zeta(w^2),\\
\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots & \\
\dot{x}_{t-(\zeta(w^1)+\cdots+\zeta(w^n))}(\omega^{n+1}), & \zeta(w^1)+\cdots+\zeta(w^n)<t\le \zeta(w^1)+\cdots+\zeta(w^{n+1}),\\
\cdots\cdots & \\
\Delta, & t\ge \sum_{k=1}^{N(\tilde{\omega})}\zeta(w^k)\ .
\end{cases}
$$

今後

$$
(6.7)\quad \begin{aligned}
&\tau_0(\tilde{\omega})=0\ ,\ \ \tau(\tilde{\omega})=\tau_1(\tilde{\omega})=\zeta(w^1),\cdots,\ \ \tau_n(\tilde{\omega})=\sum_{k=1}^{n}\zeta(w^k),\cdots\\
&\tilde{\zeta}(\tilde{\omega})=\sum_{k=1}^{N(\tilde{\omega})}\zeta(w^k)\ ,
\end{aligned}
$$

と書くことにする。つぎに $\tilde{\omega}=(\omega^0,\omega^1,\cdots,)$ に対し，*shift operator* を

$$
(6.8)\qquad \theta_t\tilde{\omega}=(\theta_{t-\tau_k(\tilde{\omega})}w^{k+1},\ \omega^{k+2},\ \omega^{k+3},\cdots),\quad if\ \ \tau_k(\tilde{\omega})\le t<\tau_{k+1}(\tilde{\omega}),
$$

で定義する。

つぎに *projection* φ_k

$$
\varphi_k:\ \tilde{\Omega}\longrightarrow \prod_{j=1}^{k}\Omega_j\ ,\qquad \Omega_j=\Omega\ .
$$

を考え，

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}=\varphi_k^{-1}\Big(\bigotimes_{j=1}^{k}\mathcal{F}\Big)\qquad \text{但し}\quad \mathcal{F}=\mathcal{B}\times\mathcal{B}(\bar{S})\ ,\\
&\tilde{\mathcal{B}}=\bigvee_{k=1}^{\infty}\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}=\bigotimes_{j=1}^{\infty}\mathcal{F}\ ,\\
&\tilde{\mathcal{N}}_t=\mathcal{B}\{X_s\ ;\ s\le t\}
\end{aligned}
$$

とする。これだけでは，充分でないので，更につぎのような σ-*field* を考える。
$\tilde{\omega},\tilde{\omega}'\in\tilde{\Omega}$ がつぎの条件をみたすとき，

$$
\tilde{\omega}\sim\tilde{\omega}'\ (R_t)
$$

と書く：

(a) $X_s(\tilde{\omega})=X_s(\tilde{\omega}')$, $s\le t$,

(b) $\tau_k(\tilde{\omega})\le t<\tau_{k+1}(\tilde{\omega})$ ならば $\tau_k(\tilde{\omega}')\le t<\tau_{k+1}(\tilde{\omega}')$ であって，

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

任意の $j \leq k$ に対して

$$\tau_j(\tilde{\omega}) = \tau_j(\tilde{\omega}')$$

である。

いま，

(6.9) $\qquad \tilde{\mathcal{B}}_t=\{A;\ A\in\tilde{\mathcal{B}},\ \tilde{\omega}\in A$ で $\tilde{\omega}\sim\tilde{\omega}'(R_t)$ ならば $\tilde{\omega}'\in A\}$

とおけば，この $\tilde{\mathcal{B}}_t$ は σ-field である。しかも

$$\tilde{\mathcal{B}}_t \subset \tilde{\mathcal{B}}_s \quad , \quad \text{if } t \leq s \qquad ; \qquad \tilde{\mathcal{N}}_t \subset \tilde{\mathcal{B}}_t$$

である。

[Remark 6.1] 上の定義より，つぎの事実が容易に示される。

(i) $\tau_k(\tilde{\omega})$ は一般には $\tilde{\mathcal{N}}_t$-Markov time ではないが，$\tilde{\mathcal{B}}_t$-Markov time である。

(ii) $\tilde{\mathcal{B}}_\infty = \overset{\infty}{\underset{t}{\vee}} \tilde{\mathcal{B}}_t$ とおくと，$\tilde{\mathcal{B}}_\infty = \tilde{\mathcal{B}}$ である。

(iii) $\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}=\{A;\ A\in\tilde{\mathcal{B}},\ \tilde{\omega}\in A$ で $\tilde{\omega}\sim\tilde{\omega}'(R_{\tau_k})$ ならば $\tilde{\omega}'\in A\}$ である。

Theorem 6.1 $\{W,\ x_t,\ \mathcal{B}_t,\ P_x;\ x\in\bar{S}\}$ は死点 Δ をもつ(強) Markov process で，$P_x\{0<\zeta\}=1$, $x\in S$，をみたすものとし，$\mu(w, dy)$ は instantaneous distribution とする。

このとき，上で定義した $X=\{\tilde{\Omega},\ X_t,\ \tilde{\mathcal{B}}_t,\ \theta_t,\ \tilde{P}_x;\ x\in\bar{S}\}$ は（時間的に一様な）(強) Markov process である。ただし，$x=\Delta$ のときは，$\tilde{P}_\Delta$ は

$$\tilde{P}_\Delta\{X_t=\Delta\ ,\ t\geqq 0\}=1$$

なる確率測度とする。

この証明は Markov 性だけの証明ならば，Markov time についての 2, 3 の Lemma が不用になることを除けば，本質は変らないので，強 Markov の場合を示す。そのために，先ずいくつかの Lemma を用意する。

まず，Galmurino[1] の Lemma から始める。ここではその Lemma が成立つように，σ-field $\tilde{\mathcal{B}}_t$ を用意して来た。

Lemma 6.2 任意の $t\geqq 0$ に対し，$T(\tilde{\omega})\geq 0$ が

$$\{\tilde{\omega};\ T(\tilde{\omega})<t\}\in\tilde{\mathcal{B}}_t \quad (\{\tilde{\omega};\ T(\tilde{\omega})\leq t\}\in\tilde{\mathcal{B}}_t)$$

をみたすための必要かつ十分な条件は，$T(\omega)$ が $\tilde{\mathcal{B}}$-可測で

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$T(\tilde{\omega})<t$（または $T(\tilde{\omega})\leq t$）で $\tilde{\omega}\sim\tilde{\omega}'(R_t)$ ならば $T(\tilde{\omega})=T(\tilde{\omega}')$ が成立つことである。

[Proof] 必要条件. $\tilde{\omega}\in\{\tilde{\omega};\ T(\tilde{\omega})<t\}$ で $\tilde{\omega}\sim\tilde{\omega}'(R_t)$ ならば，$\tilde{\omega}'\in\{\tilde{\omega};\ T(\tilde{\omega})<t\}$ である。いま，$T(\tilde{\omega})<s<T(\tilde{\omega}')<t$ とする。$\tilde{\omega}\in\{\tilde{\omega};\ T(\tilde{\omega})<s\}$ で $\tilde{\omega}\sim\tilde{\omega}'(R_s)$ となるから，$\tilde{\omega}'\in\{\tilde{\omega};\ T(\tilde{\omega})<s\}$ となって矛盾する。すなわち，$T(\tilde{\omega})=T(\tilde{\omega}')$ である。

充分条件。 $A=\{\tilde{\omega};\ T(\tilde{\omega})<t\}$ とおく。$\tilde{\omega}\in A$ で $\tilde{\omega}\sim\tilde{\omega}'(R_t)$ とすると，条件 $T(\tilde{\omega})=T(\tilde{\omega}')$ より $\tilde{\omega}'\in A$，すなわち

$$A\in\tilde{\mathcal{B}}_t\ .$$

q.e.d.

Lemma 6.3 $\tilde{\mathcal{B}}_\infty=\tilde{\mathcal{B}}_t\vee\theta_t^{-1}(\tilde{\mathcal{B}}_\infty)$

[Proof] $\tilde{\mathcal{B}}_\infty\supset\tilde{\mathcal{B}}_t\vee\theta_t^{-1}(\tilde{\mathcal{B}}_\infty)$ は明らか。逆を言うには，$\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}\subset\tilde{\mathcal{B}}_t\vee\theta_t^{-1}(\tilde{\mathcal{B}}_\infty)$ を言えばよい。ところが，

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}\ni A=\bigcap_{j=1}^{k}\{\tilde{\omega};\ \omega^j\in A_j\}\ ,\quad 但し\quad A_j\in\mathcal{F}\ ,$$

であり，又このような形の集合 A が $\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}$ を生成することより $\{\tilde{\omega};\ \omega^j\in A_j\}\in\tilde{\mathcal{B}}_t\vee\theta_t^{-1}(\tilde{\mathcal{B}}_\infty)$ を言えばよい。そこで，

$$A_1=\{\tilde{\omega};\ \omega^j\in A_j,\ \tau_j(\tilde{\omega})>t\}\ ,$$

$$A_2=\{\tilde{\omega};\ \omega^j\in A_j,\ \tau_j(\tilde{\omega})\leq t<\tau_{j+1}(\tilde{\omega})\}\ ,$$

$$A_3=\{\tilde{\omega};\ \omega^j\in A_j,\ \tau_{j+1}(\tilde{\omega})\leq t\}\ ,$$

とおくと，

$$A_1=\bigcup_{i=1}^{j}[\{\tilde{\omega};\ (\theta_t\tilde{\omega})^{j-i}\in A_j\}\cap\{\tilde{\omega};\ \tau_{i-1}(\tilde{\omega})\leq t<\tau_i(\tilde{\omega})\}]\in\tilde{\mathcal{B}}_t\vee\theta_t^{-1}(\tilde{\mathcal{B}}_\infty),$$

$$A_2=(\{\tilde{\omega};\ \omega^j\in A_j\}\cap\{\tilde{\omega};\ \tau_j(\tilde{\omega})\leq t\})\cap\{\tilde{\omega};\ t<\tau_{j+1}(\tilde{\omega})\}\in\tilde{\mathcal{B}}_t\ ,$$

$$A_3\in\tilde{\mathcal{B}}_t\ ,$$

であるから，

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3\in\tilde{\mathcal{B}}_t\vee\theta_t(\tilde{\mathcal{B}}_\infty)$$

となる.

q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

つぎに，基本的には Courrège-Priouret [1] による結果を，τ_k, T が $\mathcal{N}_t$-Markov time でないことから来る 2, 3 の修正をほどこして示す。

<u>Lemma 6.4</u>　$T(\tilde{\omega})$ を $\tilde{\mathcal{B}}_t$-Markov time とする。そのとき，$\tau_k(\tilde{\omega})$ に対し，$\tilde{\Omega}\times\tilde{\Omega}$ 上に $T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ が存在して，

1) $T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ は $\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}\otimes\tilde{\mathcal{B}}$-measurable,

2) 固定した $\tilde{\omega}$ に対して，$T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ は $\tilde{\mathcal{B}}_t$-Markov time

3) $T(\tilde{\omega})\vee\tau_k(\tilde{\omega}) = \tau_k(\tilde{\omega}) + T_k(\tilde{\omega}, \theta_{\tau_k(\tilde{\omega})}\tilde{\omega})$

をみたす。

[<u>Proof</u>]　いま，$T_k'(\tilde{\omega}) = T(\tilde{\omega})\vee\tau_k(\tilde{\omega}) - \tau_k(\tilde{\omega})$ とおくと，上の Lemma 6.3 により，

$$T_k'(\tilde{\omega}) = T_k(\tilde{\omega}, \theta_{\tau_k(\tilde{\omega})}\tilde{\omega})$$

と書くことが出来る。$T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ は $\{(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}');\ X_{\tau_k(\tilde{\omega})}(\tilde{\omega}) = X_0(\tilde{\omega}')\}$ 上でのみ値が定まっているので，$\{(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}');\ X_{\tau_k(\tilde{\omega})}(\tilde{\omega}) \neq X_0(\tilde{\omega}')\}$ 上では

$$T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \infty$$

として拡張する。この定義から $T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ は $\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}\otimes\tilde{\mathcal{B}}$-measurable．故に 1) は示された。

つぎに 2) を示そう。ここで Galmarino の Lemma，すなわち Lemma 6.2 によって，もし，$T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_1) < t$ で $\tilde{\omega}_1 \sim \tilde{\omega}_2\ (R_t)$ ならば $T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_1) = T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_2)$ を示せば充分である．

$\tilde{\omega}$ は固定されているので，簡単のため，$\tau_k(\tilde{\omega}) = S$ とおこう。

$$\tilde{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \cdots),\quad \tilde{\omega}_1 = (\omega_1^1, \omega_1^2, \cdots),\quad \tilde{\omega}_2 = (\omega_2^1, \omega_2^2, \cdots),$$

とあらわし，かつ　$\tilde{\omega}_1 \sim \tilde{\omega}_2\ (R_t)$　とする。

そのとき，$T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_1) < t$ より

$$X_{\tau_k(\tilde{\omega})}(\tilde{\omega}) = X_0(\tilde{\omega}_1),\qquad X_{\tau_k(\tilde{\omega})}(\tilde{\omega}) = X_0(\tilde{\omega}_2)$$

が言える。そこで

$$\tilde{\omega}_1' = (\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^k, \omega_1^1, \omega_1^2, \cdots)$$
$$\tilde{\omega}_2' = (\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^k, \omega_2^1, \omega_2^2, \cdots)$$

とおく。

定義の仕方から，

$$\tilde{\omega} \sim \tilde{\omega}_1' \sim \tilde{\omega}_2'\ (R_{\tau_k(\tilde{\omega})})$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

で，かつ $T_k(\cdot,\tilde{\omega}')$ は $\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_k(\tilde{\omega})}$-measurable であるから，

$$T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}')=T_k(\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}')=T_k(\tilde{\omega}_2,\tilde{\omega}')$$

が成立つ。また，容易に

$$\tau_k(\tilde{\omega}_1')=\tau_k(\tilde{\omega}_2')=\tau_k(\tilde{\omega})=s\ ,$$

$$\theta_{\tau_k(\tilde{\omega}_1')}\tilde{\omega}_1'=\tilde{\omega}_1\ ,\qquad \theta_{\tau_k(\tilde{\omega}_2')}(\tilde{\omega}_2')=\tilde{\omega}_2\ ,$$

がわかる。従って $i=1,2$ に対し，

$$\begin{aligned}T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}_i)&=T_k(\tilde{\omega}_i',\theta_{\tau_k(\tilde{\omega}_i')}\omega_i')=\tau_k(\tilde{\omega}_i')\vee T(\tilde{\omega}_i')-\tau_k(\tilde{\omega}_i')\\&=\tau_k(\tilde{\omega}_i')\vee T(\tilde{\omega}_i')-s\end{aligned}\tag{6.10}$$

となる。

同様に，定義の仕方から，

$$\tilde{\omega}_1'\sim\tilde{\omega}_2'\ (R_{s+t})$$

であり，一方では，$T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}_1)<t$ より

$$\tau_k(\tilde{\omega}_1')\vee T(\tilde{\omega}_1')=\tau_k(\tilde{\omega}_1')+T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}_1)<s+t$$

であるから，*Lemma* 6.2 を $\tau_k\vee T$ に適用して，

$$\tau_k(\tilde{\omega}_1')\vee T(\tilde{\omega}_1')=\tau_k(\tilde{\omega}_2')\vee T(\tilde{\omega}_2')\tag{6.11}$$

となる。(6.10) と (6.11) を併せると，

$$T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}_1)=T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}_2)$$

となる。

3) は上の $T(\tilde{\omega},\tilde{\omega}')$ の定義より明らかであるので，これで *Lemma* の証明は完成する　　　　*q.e.d.*

つぎに，特別な時間に関する *Markov* 性の証明をしよう。

<u>*Lemma* 6.5</u>　　つぎの３つのことが言える。

1) 任意の $B\in\tilde{\mathcal{B}}$, $A\in\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}$ に対し，

$$\tilde{P}_x\{A,\ \theta_{\tau_k}\omega\in B\}=\tilde{E}_x\{\tilde{P}_{X_{\tau_k}}(B);\ A\}\tag{6.12}$$

が成立つ。

2) $g(\tilde{\omega},t)$ は $\tilde{\Omega}\times[0,\infty]$ ~~上で有界可測関数と~~する。$\sigma(\tilde{\omega})$ が $\tilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}$-measu-

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

rable ならば，任意の $A\in\widetilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}$ に対し，

(6.13) $$\widetilde{E}_x\{g(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega},\sigma(\widetilde{\omega}));A\}=\widetilde{E}_x\{\widetilde{E}_{X_{\tau_k}}[g(\widetilde{\omega},s)]|_{s=\sigma(\widetilde{\omega})};A\}$$

が成立つ。

3）$g(\widetilde{\omega},\widetilde{\omega}')$ は有界で $\widetilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}\otimes\widetilde{\mathcal{B}}$-measurable とする。そのとき，任意の $A\in\widetilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}$ に対し，

(6.14) $$\widetilde{E}_x\{g(\widetilde{\omega},\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega});A\}=\widetilde{E}_x\{\widetilde{E}_{X_{\tau_k}}[g(u,\widetilde{\omega}')]|_{u=\widetilde{\omega}};A\}$$

が成立つ。

[Proof]　1）の Proof．　$\widetilde{P}_x$ の定義より $A_k\subset\widetilde{\Omega}$, $k=1,2,\cdots,n$ に対し，

(6.15) $$\begin{aligned}&\widetilde{P}_x[\{\widetilde{\omega};\ \omega^1\in A_1,\cdots,\omega^n\in A_n\}]\\&=\int_{A_1}\cdots\int_{A_k}Q_x(d\omega^1)\cdots Q_{X_{\tau_{k-1}}}(d\omega^k)\int_{A_{k+1}}\cdots\int_{A_n}Q_{X_{\tau_k}}(d\omega^{k+1})\cdots Q_{X_{\tau_{n-1}}}(d\omega^n)\ .\end{aligned}$$

ただし，ここで Q_x は $\widetilde{P}_x$ を Lemma 6.1 を用いて定義するときの Q_x^m である．ところが，上の定義では，Lemma 6.1 の μ_m が m に無関係な場合を用いているので Q_x^m を Q_x と書く。さらに，

$$\begin{aligned}(6.15)&=\int_{A_1}\cdots\int_{A_k}Q_x(d\omega^1)\cdots Q_{X_{\tau_{k-1}}}(d\omega^k)\,\widetilde{P}_{X_{\tau_k}}[\{\widetilde{\omega};\omega^1\in A_{k+1},\cdots,\omega^{n-k}\in A_n\}]\\&=\widetilde{E}_x[\{\widetilde{\omega};\omega^1\in A_1,\cdots,\omega^k\in A_k\};\widetilde{P}_{X_{\tau_k}}[\{\widetilde{\omega};\omega^1\in A_{k+1},\cdots,\omega^{n-k}\in A_n\}]]\ .\end{aligned}$$

一方

$$\widetilde{P}_x[\{\widetilde{\omega};\omega^1\in A_1,\cdots,\omega^n\in A_n\}]=\widetilde{P}_x[\{\widetilde{\omega};\omega^1\in A_1,\cdots,\omega^k\in A_k,(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})^1\in A_{k+1},\cdots,(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})^{n-k}\in A_n\}]$$

である。従って $\widetilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}$, $\widetilde{\mathcal{B}}$ の定義と，測度論の一般的手法を用いれば，

$$\widetilde{P}_x\{A;\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega}\in B\}=\widetilde{E}_x\{\widetilde{P}_{X_{\tau_k}}(B);A\},\quad A\in\widetilde{\mathcal{B}}_{\tau_k},\quad B\in\widetilde{\mathcal{B}}\ ,$$

を示すことが出来る。

2）の Proof。　(6.13) の g に関する線型性に注意すれば，$g(\widetilde{\omega},t)=g_1(\widetilde{\omega})g_2(t)$ の形の関数について証明すれば充分である。ところが，そのような関数に対しては，1）の (6.12) 式より

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$\widetilde{E}_x[g_1(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})g_2(\sigma(\widetilde{\omega}));A] = \widetilde{E}_x[g_2(\sigma)\widetilde{E}_{X_{\tau_k}}[g];A]$$
$$= \widetilde{E}_x[\widetilde{E}_{X_{\tau_k}}[g_1(\widetilde{\omega})g_2(s)]|_{s=\sigma};A]$$

が示されるので，2）の証明が出来る。

3）の *Proof*。　2）の場合と同様に，有界 $\widetilde{\mathcal{B}}_{\tau_k}$-*measurable* な $g_1(\widetilde{\omega})$ と，有界 $\widetilde{\mathcal{B}}$-*measurable* な $g_2(\widetilde{\omega})$ によって，

$$g(\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}') = g_1(\widetilde{\omega})g_2(\widetilde{\omega}')$$

と書ける g について示せば充分である。ところが，その時は 1）より

$$\widetilde{E}_x[g_1(\widetilde{\omega})g_2(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega});A] = \widetilde{E}_x[g_1(\widetilde{\omega})\widetilde{E}_{X_{\tau_k}}[g_2];A]$$
$$= \widetilde{E}_x[\widetilde{E}_{X_{\tau_k}}[g_1(u)g_2(\widetilde{\omega}')]|_{u=\widetilde{\omega}}]$$

が示せるので結論を得る。　　　　　　　　　　*q.e.d.*

[<u>Remark</u>]　この証明より $\{W, x_t, \mathcal{B}_t, P_x; x\in \overline{S}\}$ が強 *Markov process* であることは上の *Lemma* に必要ないことが解る。

<u>*Lemma 6.6*</u>　$T(\widetilde{\omega})$ を $\widetilde{\mathcal{B}}_t$-*Markov time* とする。そのとき，$W$ 上に定義された $\mathcal{B}_t$-*Markov time* $T(w)$ が存在し，$\widetilde{\omega} = ((w,y),\omega^2,\omega^3,\cdots)$ に対し，

$$T(\widetilde{\omega}) = T(w) \quad , \quad \widetilde{\omega}\in\{\widetilde{\omega};\ T(\widetilde{\omega}) < \tau(\widetilde{\omega})\} \ ,$$

となる。

[<u>Proof</u>]　$\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}'\in\{\widetilde{\omega}; T(\widetilde{\omega})<\tau(\widetilde{\omega})\}$ で $w(s) = w'(s)$, $s\le t$ ならば，

$$\widetilde{\omega}\sim\widetilde{\omega}'(R_t)$$

であることに注意すれば，$\widetilde{\omega}\in\{\widetilde{\omega}; T(\widetilde{\omega})<\tau(\widetilde{\omega})\}$ に対し

$$\tau(\widetilde{\omega}') > t,\ w(s) = w'(s),\ {}^\forall s\le t \Longleftrightarrow \widetilde{\omega}'\in\{\widetilde{\omega};\ T(\widetilde{\omega})<t<\tau(\widetilde{\omega})\}$$

が成立つ。従って，

$$T(w) = \begin{cases} T(\widetilde{\omega}) & , \quad \text{if } \widetilde{\omega}\in\{\widetilde{\omega};\ T(\widetilde{\omega})<\tau(\widetilde{\omega})\}\ , \\ \infty & , \quad \text{otherwise}\ , \end{cases}$$

とおくことが出来る。そのとき，$T(w)<t$ で，$w(s) = w'(s)$, $s\le t$ ならば，$T(w) = T(w')$ となるので *Lemma* 6.2 により，$T(w)$ は $\mathcal{B}_t$-*Markov time* である。

q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

Lemma 6.7　$f(x)$, $g(x,t)$ はそれぞれ $\bar{S}$, $\bar{S}\times[0,\infty]$ 上の有界可測関数とする。任意の $\widetilde{\mathcal{B}}_t$-Markov time $T(\omega)$ に対し,

$$(6.16)\qquad \widetilde{E}_x[f(X_T)g(X_\tau,\tau-T)\,;\,T<\tau]=\widetilde{E}_x[f(X_T)\widetilde{E}_{X_T}[g(X_\tau,\tau)]\,;\,T<\tau]$$

となる。

[Proof]　(6.16) の両辺は g に関し linear であるので, $g(x,t)=g_1(x)\,g_2(t)$ の形の関数について示せば充分である。上の Lemma 6.6 を用いて,

$$\widetilde{E}_x[f(X_T)\,g_1(X_\tau)\,g_2(\tau-T) : T<\tau]$$

$$(6.17)\qquad =\widetilde{E}_x[f(X_T)\,\chi(T(w)<\zeta(w))\,g_1(X_\tau)\,g_2(\zeta(\theta_{T(w)}w))]\ ^{*1)}$$

$$=\int_\Omega P_x[dw]\,\mu(w,dy)\,f(x_{T(w)}(w))\,\chi(T(w)<\zeta(w))\,g_2(\zeta(\theta_{T(w)}w))\,g_1(y)$$

ここで μ が instantaneous distribution であることを用いると,

$$(6.17)=\int_W P_x[dw]f(x_{T(w)}(w))\,\chi(T(w)<\zeta(w))\,g_2(\zeta(\theta_{T(w)}w))\int_{\bar{S}}\mu(\theta_{T(w)}w,dy)\,g_1(y)$$

更に, $x_t(w)$ の強 Markov 性を用いると,

$$=E_x[f(x_{T(w)}(w))\,\chi(T(w)<\zeta(w))\,E_{x_{T(w)}(w)}[g_2(\zeta)\int_{\bar{S}}\mu(w,dy)\,g_1(y)]]$$

$$=E_x[f(x_{T(w)}(w))\,\chi(T(w)<\zeta(w))\,\widetilde{E}_{x_{T(w)}(w)}[g_1(X_\tau)\,g_2(\tau)]]$$

$$=\widetilde{E}_x[f(X_T)\,\chi(T<\tau)\,\widetilde{E}_{X_T}[g_1(X_\tau)\,g_2(\tau)]]\quad .$$

故に Lemma の結論が得られる。　q. e. d.

Lemma 6.8　$g(x,t)$ は $\bar{S}\times[0,\infty]$ 上の有界可測関数, $T(\omega)$ を $\widetilde{\mathcal{B}}_t$-Markov time, $A\in\widetilde{\mathcal{B}}_T$ とする。そのとき,

$$(6.18)\qquad \widetilde{E}_x[g(X_{\tau(\theta_T\tilde{\omega})}(\theta_T\tilde{\omega}),\ \tau(\theta_T\tilde{\omega}))\,;\,A]=\widetilde{E}_x[\widetilde{E}_{X_T}[g(X_\tau,\tau)]\,;\,A]$$

が成り立つ。

[Proof]　これまでの Lemma 4, 5, 7 を用いて示す。

---

*1)
$$\chi(T(w)<\zeta(w))=\chi_{(T(w)<\zeta(w))}(w)=\begin{cases}1, & T(w)<\zeta(w),\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$\widetilde{E}_x[\chi(\tau_k \leq T < \tau_{k+1})\widetilde{E}_{X_T}[g(X_\tau,\tau)];A]$$

$$=\widetilde{E}_x[\chi(\tau_k \leq T)\chi(0<T-\tau_k<\tau(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega}))\widetilde{E}_{X_{T-\tau_k(\widetilde{\omega})}(\theta_{\tau_k(\widetilde{\omega})}\widetilde{\omega})}[g(X_\tau,\tau)];A]$$

Lemma 4により

$$=\widetilde{E}_x[\chi(\tau_k \leq T)\chi(0\leq T_k(\widetilde{\omega},\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})<\tau(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega}))\widetilde{E}_{X_{T_k(\widetilde{\omega},\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})}(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})}[g(X_\tau,\tau)];A]$$

Lemma 5, 2)により

$$=\widetilde{E}_x[\chi(\tau_k \leq T)\widetilde{E}_{X_{\tau_k}}[\widetilde{E}_{X_{T_k(u,\cdot)}}[g(X_\tau,\tau)];\ 0\leq T_k(u,\cdot)<\tau]|_{u=\widetilde{\omega}};A]$$

Lemma 7 を $T_k(u,\cdot)$ に対して使うと

$$=\widetilde{E}_x[\chi(\tau_k \leq T)\widetilde{E}_{X_{\tau_k}}[g(X_\tau,\tau-T_k(u,\cdot)):\ 0\leq T_k(u,\cdot)<\tau]|_{u=\widetilde{\omega}};A]$$

再び *Lemma* 5, 2)により

$$=\widetilde{E}_x[\chi(\tau_k \leq T)g(X_{\tau(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})}(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega}),\ \tau(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})-T_k(\widetilde{\omega},\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega}));$$

$$0\leq T_k(\widetilde{\omega},\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})<\tau(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega});A]$$

$$=\widetilde{E}_x[\chi(\tau_k \leq T)g(X_{\tau_{k+1}},\ \tau_{k+1}-T);\ 0\leq T-\tau_k<\tau_{k+1};A]$$

$\{\widetilde{\omega};\tau_k(\widetilde{\omega})\leq T(\widetilde{\omega})<\tau_{k+1}(\widetilde{\omega})\}$ 上では $\tau_{k+1}(\widetilde{\omega})=\tau(\theta_{T(\widetilde{\omega})}\widetilde{\omega})+T(\widetilde{\omega})$ であることに注意すると,

$$=\widetilde{E}_x[\chi(\tau_k \leq T<\tau_{k+1})g(X_{\tau(\theta_T\widetilde{\omega})}(\theta_T\widetilde{\omega}),\ \tau(\theta_T\widetilde{\omega}));A].$$

故に,

$$\widetilde{E}_x[\chi(\tau_k \leq T<\tau_{k+1})\widetilde{E}_{X_T}[g(X_\tau,\tau)];A]$$

$$=\widetilde{E}_x[\chi(\tau_k \leq T<\tau_{k+1})g(X_{\tau(\theta_T\widetilde{\omega})}(\theta_\tau\widetilde{\omega}),\ \tau(\theta_\tau\widetilde{\omega}));A]$$

従って, k について加えると,

$$\widetilde{E}_x[\widetilde{E}_{X_T}[g(X_\tau,\tau)];A]=\widetilde{E}_x[g(X_{\tau(\theta_\tau\widetilde{\omega})}(\theta_\tau\widetilde{\omega}),\ \tau(\theta_\tau\widetilde{\omega}));A]$$

が成立する。 *q.e.d.*

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

Theorem 6.1 の Proof. 以上の準備を基礎に，Theorem 6.1，すなわち，つぎの事実を証明しよう。

$f(x)$ は $\tilde{S}$ 上の有界可測関数で $f(\Delta)=0$ とし，$T(\tilde{\omega})$ を $\tilde{\mathcal{B}}_t$-Markov time，$A\in\tilde{\mathcal{B}}_T$ とすると，任意の $t\geq 0$ に対し，

$$(6.19)\qquad \tilde{E}_x[f(X_{T+t});\ A]=\tilde{E}_x[\tilde{E}_{X_T}[f(X_t)];\ A]$$

が成立つ．

まず

$$\tilde{E}_x[f(X_{T+t});A]=\tilde{E}_x[f(X_{T+t});A\cap\{\tilde{\omega};\ ^{\exists}\tau_k(\tilde{\omega}),\ T<\tau_k\leq T+t\}]$$

$$+\tilde{E}_x[f(X_{T+t});A\cap\{\tilde{\omega};{}^{\exists}\tau_k(\tilde{\omega}),\tau_{k+1}(\tilde{\omega}),\tau_k(\tilde{\omega})\leq T,\ T+t<\tau_{k+1}(\tilde{\omega})\}]$$

に注意し，右辺の第1項をⅠ，第2項をⅡとする。

ところが，

$$\tilde{E}_x[f(X_{T+t});\ \tau_k\leq T,\ T+t<\tau_{k+1};\ A]$$

$$=\tilde{E}_x[f(X_{T-\tau_k+t}(\theta_{\tau_k}\tilde{\omega});\ 0\leq T-\tau_k<\tau(\theta_{\tau_k}\tilde{\omega}),\ 0\leq T-\tau_k+t<\tau(\theta_{\tau_k}\tilde{\omega});\ A]$$

Lemma 6.4 により，

$$=\tilde{E}_x[f(X_{T_k(\tilde{\omega},\theta_{\tau_k}\tilde{\omega})+t}(\theta_{\tau_k}\tilde{\omega});\ 0\leq T_k(\tilde{\omega},\ \theta_{\tau_k}\tilde{\omega})<\tau(\theta_{\tau_k}\tilde{\omega}),$$

$$0\leq T_k(\tilde{\omega},\ \theta_{\tau_k}\tilde{\omega})+t<\tau(\theta_{\tau_k}\tilde{\omega});\ A]$$

更に Lemma 6.5, 3) により

$$=\tilde{E}_x[\chi(\tau_k\leq T)\tilde{E}_{X_{\tau_k}}[f(X_{T_k(u,\cdot)+t});0\leq T_k(u,\cdot)<\tau,\ 0\leq T_k(u,\cdot)+t<\tau]|_{u=\tilde{\omega}};\ A]$$

$T_k(u,\cdot)$ に対し，$\{T_k(u,\cdot)<\tau\}$ 上で Lemma 6.6 を適用すると，$T_k(u,\cdot)$ は W 上の $\mathcal{B}_t$-Markov time とみてよい。そこで x_t についての強Markov 性を用いると，

$$=\tilde{E}_x[\chi(\tau_k\leq T)\tilde{E}_{X_{\tau_k}}[E_{X_{T_k(u,\cdot)}}[f(x_t);0\leq t<\tau];0\leq T_k(u,\cdot)<\tau]|_{u=\tilde{\omega}};\ A]$$

ここで再び Lemma 6.5, 2) により，

$$=\tilde{E}_x[\chi(\tau_k\leq T)\tilde{E}_{X_{T_k(\tilde{\omega},\theta_{\tau_k}\tilde{\omega})}(\theta_{\tau_k}\tilde{\omega})}[f(X_t);0\leq t<\tau];0\leq T_k(\tilde{\omega},\theta_{\tau_k}\tilde{\omega})<\tau(\theta_{\tau_k}\tilde{\omega});A]$$

$$=\tilde{E}_x[\chi(\tau_k\leq T<\tau_{k+1})\tilde{E}_{X_T}[f(X_t);\ 0\leq t<\tau];\ A]$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

従って,

$$\mathrm{II} = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{E}_x[f(X_{T+t});\ \tau_k \leq T,\quad T+t < \tau_{k+1};\ A]$$

$$= \widetilde{E}_x[\widetilde{E}_{X_T}[f(X_t);\ 0 \leq t < \tau];\ A]$$

となるから,

$$\widetilde{E}_x[\widetilde{E}_{X_T}[f(X_t)];\ A] - \mathrm{II} = \widetilde{E}_x[\widetilde{E}_{X_T}[f(X_t);\ \tau \leq t];\ A]$$

を得る。そこで

$$\mathrm{I} = \widetilde{E}_x[\widetilde{E}_{X_T}[f(X_t);\ \tau \leq t];\ A]$$

を示せば充分である。

$$\widetilde{E}_x[\widetilde{E}_{X_T}[f(X_t);\ \tau \leq t];\ A]$$

$$= \widetilde{E}_x[\widetilde{E}_{X_T}[f(X_{t-\tau}(\theta_\tau \widetilde{\omega}));\ \tau \leq t];\ A]$$

Lemma 6.5 により,

$$= \widetilde{E}_x[\widetilde{E}_{X_T}[\widetilde{E}_{X_\tau}[f(X_{t-u});\ t-u \geqq 0]|_{u=\tau};\ \tau \leq t];\ A]$$

ここで *Lemma* 6.8 を用いれば

$$= \widetilde{E}_x[\widetilde{E}_{X_{\tau(\theta_T\widetilde{\omega})}(\theta_T\widetilde{\omega})}[f(X_{t-u});\ t-u \geqq 0]|_{u=\tau(\theta_T\widetilde{\omega})};\ \tau(\theta_T\widetilde{\omega}) \leq t;\ A]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{E}_x[\chi(\tau_k \leq T < \tau_{k+1})\widetilde{E}_{X_{\tau_{k+1}}}[f(X_{t-u});\ t-u \geqq 0]|_{u=\tau_{k+1}-T};\ \tau_{k+1}-T \leq t;\ A]$$

ここで, $\{\widetilde{\omega};\ T(\widetilde{\omega}) < \tau_{k+1}(\widetilde{\omega})\}$ 上では $\tau_{k+1}(\widetilde{\omega}) - T(\widetilde{\omega})$ が $\widetilde{\mathcal{B}}_{\tau_{k+1}(\widetilde{\omega})}$-*measurable* であることに注意して再び *Lemma* 6.5 を用いると,

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{E}_x[\chi(\tau_k \leq T < \tau_{k+1}) f(X_{t+T-\tau_{k+1}}(\theta_{\tau_{k+1}}\widetilde{\omega}));\ \tau_{k+1} - T \leq t;\ A]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{E}_x[\chi(\tau_k \leq T < \tau_{k+1} \leq T+t)\, f(X_{T+t});\ A]$$

$$= \widetilde{E}_x[f(X_{T+t});\ \{\widetilde{\omega};\ \exists \tau_k(\widetilde{\omega}),\ T < \tau_k(\omega) \leq T+t\} \cap A]$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$= \mathrm{I}$.

よって，(6.19) が証明された。 q.e.d.

[Remark] Markov process の理論でしばしば用いられる induction の方法により，(6.19) より更に，つぎの式を示すのは容易である。

任意固定した $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$, f_j, $j=1,\cdots,n$,（有界可測）に対し，

$$\widetilde{E}_x\Big[\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{T+t_j});\ A\Big]=\widehat{E}_x\Big[\widetilde{E}_{X_T}\Big[\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{t_j})\Big];\ A\Big] \tag{6.20}$$

が成立つ。

Theorem 6.1 は σ-field $\mathcal{B}_t$ を完備化して，つぎのように一般化することが出来る。

μ を $\bar{S}$ 上の測度とし，

$$\widetilde{P}_\mu[A]=\int_{\bar{S}}\mu(dx)\widetilde{P}_x[A]$$

とおく。$\widetilde{\mathcal{B}}_t$ の $\widetilde{P}_\mu$ による完備化を $\widetilde{\mathcal{B}}_t(\widetilde{P}_\mu)$ とし，

$$\widetilde{\mathcal{F}}_t=\bigcap_\mu \widetilde{\mathcal{B}}_t(\widetilde{P}_\mu)$$

とする。

Theorem 6.1′ 記号は Theorem 6.1 と同じにし，$\{W, x_t, \mathcal{B}_t, P_x, x\in\bar{S}\}$ は強 Markov process とする。そのとき，

$$X=\{\widetilde{\Omega},\ X_t,\ \widetilde{\mathcal{F}}_t,\ \theta_t,\ \widetilde{P}_x;\ x\in\bar{S}\}$$

は強 Markov process である。

[Proof] この証明は Markov 過程論でしばしば用いられる方法を用いればよいので，ここでは省略する。例えば T. Watanabe [1] を参照。

Proposition 6.1 $\{W,\ x_t,\ \mathcal{B}_t,\ P_x;\ x\in\bar{S}\}$ が

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$P_x[x_t \text{ は } t \geq 0 \text{ で右連続，} (0,\zeta] \text{ で左極限をもつ}] = 1$$

なる性質を持つならば，$\{\widetilde{\Omega}, X_t, \widetilde{\mathcal{F}}_t, \theta_t, \widetilde{P}_x ; x \in \widetilde{S}\}$ は

$$\widetilde{P}_x[X_t \text{ は } t \geq 0 \text{ で右連続，} (0,\widetilde{\zeta}) \text{ で左極限をもつ}] = 1$$

をみたす。

[Proof]　この証明のために，$\widetilde{\Omega}$ をつぎのようにわける，

$$\widetilde{P}_x[X_t \text{ は } t \geq 0 \text{ で右連続，} (0,\widetilde{\zeta}) \text{ で左極限をもつ}]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_x[X_t \text{ は } t \text{ で右連続，左極限をもつ；} \tau_k < t < \tau_{k+1}]$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_x[X_t \text{ は } t \text{ で右連続，左極限をもつ；} \tau_k = t]$$

$$+ \widetilde{P}_x[X_t \text{ は } t \text{ で右連続；} t \geq \widetilde{\zeta}]$$

上式の最後の式の各項をその順に I，II，III とする．

$$\mathrm{I} = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{E}_x[\widetilde{P}_{X_{\tau_k}}[X_{t-s} \text{ は } t-s \text{ で右連続，左極限をもつ；}$$

$$0 < t-s < \tau]|_{s=\tau_k} ; \tau_k < t]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{E}_x[\widetilde{P}_{X_{\tau_k}}[0 < t-s < \tau]|_{s=\tau_k} ; \tau_k < t]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_x[\tau_k < t < \tau_{k+1}]$$

同様にして，

$$\mathrm{II} = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{E}_x[\widetilde{P}_{X_{\tau_k}}[X_t \text{ は } t=0 \text{ で右連続}]; t = \tau_k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_x[t = \tau_k]$$

従って

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_x[\tau_k \leq t < \tau_{k+1}] + \widetilde{P}_x[t \geq \widetilde{\zeta}] = 1 \text{ .}$$

q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

[Remark] いま

(6.21) $$\sup_{x\in S} P_x[\tau<\infty]=\alpha<1$$

を仮定しよう。そのときは

$$\widetilde{P}_x[\tau_n<\infty,\ N(\widetilde{\omega})=\infty]=\widetilde{E}_x[\tau_{n-1}<\infty,\ N(\widetilde{\omega})=\infty,\ \widetilde{P}_{X_{\tau_{n-1}}}[\tau<\infty,\ N(\widetilde{\omega})=\infty]]$$

$$\leq \widetilde{P}_x[\tau_{n-1}<\infty,\ N(\widetilde{\omega})=\infty]\alpha\ .$$

故に同様なことを繰返せば

$$\widetilde{P}_x[\tau_n<\infty,\ N(\widetilde{\omega})=\infty]\leq\alpha^n$$

がわかる。従って

$$\widetilde{P}_x[\tau_\infty<\infty,\ N(\widetilde{\omega})=\infty]=\lim_{n\to\infty}\widetilde{P}_x[\tau_n<\infty,\ N(\widetilde{\omega})=\infty]=0\ .$$

すなわち，(6.21) が成立つならば，

$$\widetilde{P}_x[\tau_\infty=\infty\ \text{ or }\ N(\widetilde{\omega})<\infty]=1\ .$$

このことを用いると，つぎのことがわかる。

Proposition 6.1′ もし Proposition の仮定がみたされ，さらに，

(6.22) $$\sup_{x\in S} P_x[\tau<\infty]=\alpha<1$$

ならば，つぎのことが成立つ：

(6.23) $$\widetilde{P}[X_t\text{ は }t\geqq 0\text{ で右連続で左極限をもつ}]=1\ 。$$

Proposition 6.2 $\{W,\ x_t,\ \mathcal{B}_t,\ P_x;\ x\in\bar{S}\}$ が quasi-left-continuous で，ζ が non-accessible*1) とする．いま T_n，T は $\widetilde{\mathcal{B}}_t$-Markov time で $T_n\uparrow T$ とすると，

$$\widetilde{P}_x[\lim_{n\to\infty}X_{T_n}=X_T;\ T<\widetilde{\zeta}]=\widetilde{P}_x[T<\widetilde{\zeta}],$$

*1) 第 1 章参照。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

(160)

がなりたつ。

[Proof]

$$\widetilde{P}_x[\lim_{n\to\infty} X_{T_n}=X_T\ ;\ T<\widetilde{\zeta}]=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{P}_x[\lim_{n\to\infty} X_{T_n}=X_T\ ;\ \tau_k<T\leqq\tau_{k+1}]\ .$$

ところで，Lemma 6.4 を T_n, T に対して適用すると，

$$\widetilde{P}_x[\lim_{n\to\infty} X_{T_n}=X_T\ ;\ \tau_k<T\leqq\tau_{k+1}]$$

(6.24)

$$=\widetilde{P}_x[\lim_{n\to\infty} X_{T_n^k(\widetilde{\omega},\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})}(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})=X_{T^k(\widetilde{\omega},\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})}(\tau_k\widetilde{\omega})\ ;\ 0<T^k(\widetilde{\omega},\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})\leqq\tau(\theta_{\tau_k}\widetilde{\omega})\ ;\ \tau_k<T]$$

$$=\widetilde{E}_x[\widetilde{P}_{X_{\tau_k}}[\lim_{n\to\infty} X_{T_n^k(v,\cdot)}=X_{T^k(v,\cdot)}\ ;\ 0<T^k(v,\cdot)\leqq\tau]_{|v=\widetilde{\omega}}\ ;\ \tau_k<T]$$

いま，ζ が non-accessible で，x_t が quasi-left-continuous であることを用いると，つぎの等式が成り立つ。

$$\widetilde{P}_x[\lim_{n\to\infty} X_{T_n^k(v,\cdot)}=X_{T^k(v,\cdot)}\ ;\ 0<T^k(v,\cdot)\leqq\tau]$$

(6.25)

$$=P_x[\lim_{n\to\infty} x_{T_n^k(v,\cdot)}=x_{T^k(v,\cdot)}\ ;\ 0<T^k(v,\cdot)\leqq\zeta]$$

$$=P_x[0<T^k(v,\cdot)\leqq\zeta]$$

$$=\widetilde{P}_x[0<T^k(v,\cdot)\leqq\tau]\ .$$

故に (6.24) と (6.25) を併せると，

$$\widetilde{P}_x[\lim_{n\to\infty} X_{T_n^k(v,\cdot)}=X_{T^k(v,\cdot)}\ ;\ 0<T^k(v,\cdot)\leqq\tau]$$

$$=\widetilde{E}_x[\widetilde{P}_{X_{\tau_k}}[0<T^k(v,\cdot)\leqq\tau]\ ;\ \tau_k<T]$$

$$=\widetilde{P}_x[\tau_k<T\leqq\tau_{k+1}]\ .$$

従って，

$$\widetilde{P}_x[\lim_{n\to\infty} X_{T_n}=X_T\ ;\ T<\widetilde{\zeta}]=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{P}_x[\tau_k<T\leqq\tau_{k+1}]=\widetilde{P}_x[T<\widetilde{\zeta}]$$

を得る。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

Theorem 6.1′, Proposition 6.1, 6.2 を用いると，つぎの事実が出て来る.

<u>Theorem 6.2</u>　$\{W, x_t, \mathcal{B}_t, P_x\ ;\ x \in \bar{S}\}$ は死点 Δ をもつ Hunt 過程とし,*1) ζ は non-accessible とする。さらに，

$$(6.26)\qquad \tilde{P}_x[\tilde{\zeta} < \infty] = 0$$

とする。そのとき，$\{\tilde{\Omega}, X_t, \tilde{\mathcal{F}}_t, \theta_t, \tilde{P}_x\ ;\ x \in \tilde{S}\}$ はまた Hunt 過程である.

[<u>Remark</u>]　Proposition 6.2 は T_n, T を $\tilde{\mathcal{F}}_t$-Markov time としても成り立つ. このことをみるには，Lemma 6.4, 6.6 が $\tilde{\mathcal{F}}_t$-Markov-time に対しても成り立つことに注意すればよい。Theorem 6.2 の証明にはこの事実が重要であった。

つぎに，構成された Markov process X_t が conservative になるための1つの充分条件を与えよう。

<u>Proposition 6.3</u>　instantaneous distribution $\mu(w, dy)$ が $\zeta(w) > 0$ なる w に対し，S 上の確率測度であるとする。さらに Markov process x_t がつぎの (i) または (ii) をみたす。

(i)　$$\sup_{x \in S} P_x[\tau < \infty] = \alpha < 1,$$

または

(ii)　$\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ が存在して

$$\inf_{x \in S} P_x[\tau > \varepsilon] > \delta .$$

このとき，X_t は conservative，すなわち

$$\tilde{P}_x[\tilde{\zeta} = \infty] = 1, \quad x \in S,$$

である.

[<u>Proof</u>]　まず (i) をみたすとしよう。そのとき，条件から $x \in S$ に対し

$$\tilde{P}_x[X_{\tau_n} \in S] = 1$$

---

*1) 第1章参照。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

となる。従って

$$\widetilde{P}_x[\tau_n < \infty] \leq \alpha^n ,$$

これから,

$$\widetilde{P}_x[\tau_\infty < \infty] = 0 ,$$

すなわち,

$$\widetilde{P}_x[\tau_\infty = \infty] = 1 \qquad (x \in S)$$

を得る。

つぎに (ii) をみたすとしよう。まず

$$(6.27) \qquad \{\tilde{\zeta}(\omega) < \infty\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n+1}^{\infty} \{\zeta(w^k) < \varepsilon\}$$

に注意しよう。ところが,

$$\widetilde{P}_x[\bigcap_{k=n+1}^{\infty}\{\zeta(w^k) < \varepsilon\}] = \widetilde{P}_x[\widetilde{P}_{X_{\tau_n}}[\bigcap_{k=1}^{\infty}\{\zeta(w^k) < \varepsilon\}]] ,$$

$$\widetilde{P}_x[\bigcap_{k=1}^{\infty}\{\zeta(w^k) < \varepsilon\}] = \widetilde{E}_x[\zeta(w^1) < \varepsilon, \widetilde{P}_{X_\tau}[\bigcap_{k=1}^{\infty}\{\zeta(w^k) < \varepsilon\}]$$

$$\leq \sup_{y \in S} \widetilde{P}_y[\bigcap_{k=1}^{\infty}\{\zeta(w^k) < \varepsilon\}]\ \widetilde{P}_x[\zeta(w^1) < \varepsilon]$$

従って,

$$\sup_{x \in S} \widetilde{P}_x[\bigcap_{k=1}^{\infty}\{\zeta(w^k) < \varepsilon\}] \leq (1-\delta) \sup_{y \in S} \widetilde{P}_y[\bigcap_{k=1}^{\infty}\{\zeta(w^k) < \varepsilon\}]$$

故に

$$\sup_{x \in S} \widetilde{P}_x[\bigcap_{k=1}^{\infty}\{\zeta(w^k) < \varepsilon\}] = 0 .$$

従って

$$\widetilde{P}_x[\bigcap_{k=n+1}^{\infty}\{\zeta(w^k) < \varepsilon\}] = 0$$

そこで上の式と(6.27)を用いると,

$$\widetilde{P}_x[\tilde{\zeta}(\tilde{\omega}) < \infty] = 0, \qquad x \in S$$

となる。 q.e.d.

この§の終りに,2つの *Theorem* 6.1 の *Example* を与えよう。

<u>*Example* 6.1</u>　　Markov process $\{W, x_t, \mathcal{B}_t, P_x;\ x \in \bar{S}\}$ と考え,

$$P_x[\exists x_{\zeta-} \in S] = 1 , \qquad x \in S$$

とする。$\tilde{\mu}(x, dy)$, $x \in S$, $dy \subset S$ を x について,可測,dy について

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

は確率測度になっているとする。いま

(6.28) $$\mu(w, dy) = \tilde{\mu}(x_{\zeta-}(w), dy)$$

とおき，$\mu(\Delta, dy) = \delta_{\{\Delta\}}(dy)$ として μ を $\bar{S}$ 上に拡張しておく。

このとき，μ は *instantaneous distribution* の条件 a), b), c) をみたすことは容易にわかる。とくに

$$\tilde{\mu}(x, dy) = \delta_{\{x\}}(dy)$$

とおけば *Theorem* 6.1 は *Volkonsky* [1] で考えた場合を取扱っていることになる。なお，われわれの場合と違って，*Volkonsky* [1] は強 *Markov* 性までは示していない。なお，この *Volkonsky* の方法によってえられる *process* は *m.f.* による変換（第1章参照）としても得られることが *Ito-Watanabe* [1] で示されている。

直観的に言えば，*Theorem* 6.1 は *Markov process* x_t が ζ という時間に吸収されるとき，(6.28) のように μ をとれば，$x_{\zeta-}$ に関連したある *Probability measure* によって与えられる S 内のある点から新たな *Markov process* が出発するという仕方でつぎつぎに *Markov process* をつないで行くことの可能性を示している。特に *Volkonsky* [1] の場合は，吸収される直前の位置から，つぎの *Markov process* が出発することを意味している。

Example 6.2　S のある意味での境界 ∂S があり，$x \in S \cup \partial S$, $dy \subset S$ に対し $\tilde{\mu}(x, dy)$ が与えられているとする。このとき，

$$\mu(w, dy) = \tilde{\mu}(x_{\zeta-}, dy)$$

の形にとると，いわゆる境界から *instantaneous retern* する *Markov process* が作られる。このノートはそのような問題を直接取扱うのが目的でないので，これ以上詳しく論ずることはやめるが，上の意味で *Theorem* 6.1 は *Feller* [1]，*Kunita* [1] の取扱った問題の一部に対しては応用出来る。

§6.3 *Branching Markov process* の構成

ここでは，§6.2 の結果を応用して，*Branching Markov process* の一つの構成法を与える。

これから，$\{W, x_t, \mathcal{B}_t, P_x, x \in S\}$ は S（S は *compact*）上の強 *Mark-*

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

ov 過程であって, *conservative* とする:

[*Remark*] $\mathcal{S}$ が死点 ∂ を含んでいる場合には ∂ への *hitting time* を ζ*1) として

(i) $P_x[0<\zeta]=1$, $x\in\mathcal{S}-\{\partial\}$

(ii) P_∂[任意の $t\geqq 0$ に対し $x_t(w)=\partial]=1$.

つぎに *quasi-hitting time* *2) $\sigma(w)$ でつぎの条件をみたすものを1つ固定しよう:

(a) $P_x[0<\sigma]=1$, $x\in\mathcal{S}$, (死点を含むときは $P_\partial[\sigma=0]=1$)

(b) $P_x[\sigma<\infty]>0$, $x\in\mathcal{S}$,

(c) $P_x[\sigma=t]=0$, $t\geqq 0$, $x\in\mathcal{S}$.

また, $\mathcal{S}^{(n)}$, $\mathcal{S}^n$, S, $W^{(n)}$ については第2章と同じ意味に用いる。γ は $\mathcal{S}^{(n)}$ から $\mathcal{S}^n$ の写像であるが, それもまた第2章の意味で定義されているとする。

$$W'=\bigcup_{n=1}^{\infty}W^{(n)}$$

とおき, $W'\ni w'$ が $W^{(n)}\ni w'$ ならば記号として

$$w'=(w^1,\cdots,w^n)$$

を用いる。そのとき,

$$x'_t(w')=(x_t(w^1),\cdots,x_t(w^n))\in\mathcal{S}^{(n)}$$

として定義する。$w'\in W^{(n)}\subset W'$ に対しては,

$$\bar{\zeta}(w')=\min_{1\leq k\leq n}\{\sigma(w^k)\} \tag{6.29}$$

と定義し, それを用いて $\bar{x}_t(w')$ をつぎのように定義する。

---

*1) $\zeta(w)$ は

$$\zeta(w)=\inf\{t;\ x_t(w)=\partial\}$$

として定義する。但し $\{\ \}=\phi$ のときは ∞ とする。

*2) *quasi-hitting time* の定義については第1章をみよ。更にここでは $\sigma(w)\leqq t\Rightarrow\sigma(\theta_t w)=0$, を仮定する。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

(6.30) $$\bar{x}_t(w') = \begin{cases} \gamma[x'_t(w')] & , \quad t < \bar{\zeta}(w') \\ \Delta & \quad t \geqq \bar{\zeta}(w') \end{cases}$$

Shift operator θ_t は W の *shift operator* θ_t を用いて,

(6.31) $$\theta_t w' = (\theta_t w^1, \cdots, \theta_t w^n)$$

として定義する。

つぎに, $\overset{n}{\otimes}\mathcal{B}_t$ は前の §6.2 と同じ意味に用いるとすれば, 上のように定義すると, まず, つぎのことが結論出来る。

<u>Lemma 6.9</u>　$\bar{x}_t(w')$ は $(W^{(n)}, \overset{n}{\otimes}\mathcal{B}_\infty)$ 上で定義され, $S^n \cup \{\Delta\}$ に値をとる確率変数である。*1)

[<u>Proof</u>]　$S^n \cup \{\Delta\}$ に値をとることは, (6.30) の定義より明らか。いま $A \in \mathcal{B}(S^n)$ *2) に対し,

$$\{w'; \bar{x}_t(w') \in A\} = \{w'; x'_t(w') \in \gamma^{-1}(A)\} \in \overset{n}{\otimes}\mathcal{B}_t \ .$$

また,

$$\{w'; \bar{x}_t(w') = \Delta\} = \{w'; \bar{\zeta}(w') \leq t\}$$

$$= \{w'; \exists k ; 1 \leq k \leq n, \text{で } 0 < \sigma(w^k) \leq t\} \in \overset{n}{\otimes}\mathcal{B}_t$$

以上の事実を併せると結論が得られる。　　q. e. d.

そこで $\{\bar{x}_s(w'), s \leq t\}$ より生成される $W^{(n)}$ の σ-*field* を $\bar{N}_t^{(n)}$ とし,

$$\bar{N}_\infty^{(n)} = \bigvee_{t=0}^{\infty} \bar{N}_t^{(n)}$$

としよう。このとき,

$$\bar{N}_t^{(n)} \subset \overset{n}{\otimes}\mathcal{B}_\infty$$

は明らかである。いま任意の n に対して $x \in S^n$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ のとき, $\bar{N}_\infty^{(n)}$ の集合関数 $\bar{P}_{(x_1, \cdots, x_n)}$ をつぎの式で定義する。

---

*1)　すなわち $\bar{x}_t(w')$ は $\overset{n}{\otimes}\mathcal{B}_\infty$-可測である。

*2)　$\mathcal{B}(S^n)$ の定義も第2章をみよ。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

(6.32) $$\bar{P}_{(x_1,\cdots,x_n)}[A] = P_{x_1}\times\cdots\times P_{x_n}[A]\ .^{*1)}$$

第２章で行なったと全く同じ考えに従ってつぎの $Lemma$ が示される。

<u>Lemma 6.10</u>　任意の $A\in\bar{N}_\infty^{(n)}$ に対して，

(6.33) $$\bar{P}_{(x_1,\cdots,x_n)}[A] = \bar{P}_{(\pi x_1,\cdots,\pi x_n)}[A]\ .^{*2)}$$

[<u>Remark</u>]　(6.33) によって，$S^n\ni\bar{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ に対して，

(6.34) $$\bar{P}_{\bar{x}}[A] = \bar{P}_{(x_1,\cdots,x_n)}[A],\qquad A\in\bar{N}_\infty^{(n)}\ ,$$

と定義することが出来る。

上の $Lemma$ の証明は実質的には，既に第２章で行なわれたことになっているが，ここでは念のためにもう１回のべておこう。

[<u>Proof of Lemma 6.10</u>]　S 上の関数 $f_j(x)$ に対して，S 上の関数 $\hat{f}_j$ をこれまでしばしば用いた方法で対応させる。

任意に　$0\le t_1<t_2<\cdots<t_m$ をえらぶと，

$$\bar{E}_{(x_1,\cdots,x_n)}[\prod_{j=1}^{m}\hat{f}_j(\bar{x}_{t_j})] = \bar{E}_{(x_1,\cdots,x_n)}[\prod_{j=1}^{m}\hat{f}_j(x'_{t_j});\ t_m<\bar{\zeta}]$$

$$=\prod_{j=1}^{n}E_{x_j}[\prod_{k=1}^{m}f_k(x_{t_k});\ t_m<\sigma]$$

となる。上の最後の式は $(x_1,\cdots,x_n)$ に $permutation$ π を作用させても不変である。そこで第２章の $Lemma$ 2.2 を用いると，S^n 上の有界可測関数 $f_j(\bar{x})$ に対して，

$$\bar{E}_{(x_1,\cdots,x_n)}[\prod_{j=1}^{m}f_j(\bar{x}_{t_j})]$$

は $(x_1,\cdots,x_n)$ に $permutation$ を作用させても不変であることがわかる.

q.e.d.

---

*1)　$P_{x_1}\times\cdots\times P_{x_n}$ は直積測度を表わす。

*2)　ここで $(\pi x_1,\cdots,\pi x_n)$ は $(x_1,\cdots,x_n)$ に $permutation$ π を作用させた時の座標。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

いま各n毎に論じて来たが，それを全体に広げることを考える。

W' に extra point $\{w_\Delta\}$ をつけ加えて

$$\overline{W} = W' \cup \{w_\Delta\} \tag{6.35}$$

とおく。$\overline{W}$ 上で $\overline{x}_t$ をつぎのように定義する。

$$\overline{x}_t(\overline{w}) = \begin{cases} \overline{x}_t(w'), & \overline{w} = w',\ w' \in W^{(n)}, \quad n = 1, 2, \cdots \\ \Delta, & \overline{w} = w_\Delta . \end{cases} \tag{6.36}$$

$\{\overline{x}_s(\overline{w}),\ s \leq t\}$ から生成される $\overline{W}$ の σ-field を $\overline{N}_t$ とする。

$$\overline{N}_\infty = \bigvee_{t=0}^{\infty} \overline{N}_t$$

とおけば，

$$\overline{N}_t|_{W^{(n)}} = \overline{N}_t^{(n)} \quad , \quad \overline{N}_\infty|_{W^{(n)}} = \overline{N}_\infty^{(n)} \quad {}^{*1}$$

が成立つ。そこで任意の $\overline{x} \in \overline{S} = S \cup \{\Delta\}$ に対し，$\overline{P}_{\overline{x}}[A]$，$A \in \overline{N}_\infty$，をつぎの方法で定義する：

i) $\overline{x} \in S^n \subset \overline{S}$ のとき，

$$(6.37)\quad \begin{aligned} &\overline{P}_{\overline{x}}[A] = \begin{cases} \overline{P}_{\overline{x}}[A], & A \in \overline{N}_\infty^{(n)} \text{ のとき}, \\ 0, & A \in \overline{N}_\infty^{(m)},\ n \neq m \text{ のとき}, \end{cases} \\ &\overline{P}_\Delta[A] = \begin{cases} 1, & w_\Delta \in A \text{ のとき}, \\ 0, & w_\Delta \notin A \quad 〃 \quad . \end{cases} \end{aligned}$$

[<u>Remark</u>]　T_t^0 が $\mathbb{C}(S)$ 上の強連続 semi-group のときには，$\mathbb{C}_0(S)$ 上の強連続 semi-group $\mathbb{T}_t^0$ を作って考えることが出来て簡単になる。

以上によって定まった $\{\overline{W},\ \overline{x}_t,\ \overline{N}_t,\ \theta_t,\ \overline{\zeta},\ \overline{P}_{\overline{x}},\ \overline{x} \in S\}$ を考えると，それが S 上の強 Markov 過程であることを示すのが当面の目的である。まず

<u>Lemma 6.11</u>　任意に S^n 上の有界可測関数 f_j，$j = 1, 2, \cdots, m$，と $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ をとる。ただし $f_j(\Delta) = 0$，$j = 1, 2, \cdots, m$ とする。

そのとき，任意の $x \in S^n$，$n \geqq 1$，に対して，

---

*1) $\overline{N}_t|_{W^{(n)}} = \{B;\ B \in W^{(n)} \cap \overline{N}_t\}$，$\overline{N}_\infty|_{W^{(n)}}$ も同様。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$(6.38) \qquad \bar{E}_{\bar{x}}[\prod_{j=1}^{m} f_j(\bar{x}_{t_j})] = \bar{E}_{\bar{x}}[\prod_{j=1}^{m-1} f_j(\bar{x}_{t_j})\bar{E}_{\bar{x}_{t_{m-1}}}[f_m(\bar{x}_{t_m-t_{m-1}})]]$$

が成りたつ。

[Proof] 第2章 Lemm 2.2 により，f_j を $\mathcal{S}$ 上の有界可測関数で，$\|f_j\| \leq 1$ により，$\hat{f}_j$ の形の関数に対して，(6.38) を証明すれば充分である。ところが，いま $\hat{f}_j(\Delta)=0$ として拡張しておけば，

$$\bar{E}_{\bar{x}}[\prod_{j=1}^{m} \hat{f}_j(\bar{x}_{t_j})] = \bar{E}_{\bar{x}}[\prod_{j=1}^{m} \hat{f}_j(x'_{t_j})]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}[\prod_{k=1}^{m} f_k(x_{t_k});\ t_m < \sigma] \qquad ((6.32), (6.37) により)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}[\prod_{k=1}^{m-1} f_k(x_{t_k}) E_{x_{t_{m-1}}}[f_m(x_{t_m-t_{m-1}});\ t_m - t_{m-1} < \sigma];\ t_{m-1} < \sigma]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}[\prod_{k=1}^{m-1} f_k(x_{t_k}) \bar{E}_{\bar{x}_{t_{m-1}}}[\hat{f}_m(\bar{x}_{t_m-t_{m-1}})];\ t_{m-1} < \sigma]$$

$$= \bar{E}_{\bar{x}}[\prod_{k=1}^{m-1} \hat{f}_k(\bar{x}_{t_k}) \bar{E}_{\bar{x}_{t_{m-1}}}[\hat{f}_m(\bar{x}_{t_m-t_{m-1}})]]$$

となり，Lemma が成立つ。 q.e.d.

この Lemma を用いると，つぎの結論が得られる。

Theorem 6.3 $\{\bar{W}, \bar{x}_t, \bar{N}_t, \bar{\zeta}, \theta_t, \bar{P}_{\bar{x}};\ \bar{x} \in S\}$ は S 上の Markov process である。$\{W, x_t, \mathcal{B}_t, P_x;\ x \in \mathcal{S}\}$ が右連続，左極限を持てば，$\bar{x}_t$ も同様である、

[Proof] 任意の $\bar{x} \in S$, $A \in \bar{N}_t$, $B \in \bar{N}_\infty$ をとったとき，

$$P_{\bar{x}}[A,\ \theta_t \bar{w} \in B] = \bar{E}_{\bar{x}}[A;\ \bar{P}_{\bar{x}}[B]]$$

が成立つことを言えば充分である。ところが，$\bar{x} \in \mathcal{S}^n$ のときは，上式は Lemma 6.11 より直ちに結論される。$\bar{x} = \partial$ または Δ のときは，定義より，それらの点は trap になっているので，明らかである。右連続性，左極限をもつことも，(6.30)，(6.36) 等の定義より明らかである。 q.e.d.

これで Markov 性は示されたが，強 Markov 性を言うために，先ず可測性に関する事実を示す。

Lemma 6.12 (i) $A \in \bar{N}_t$, $A \subset W^{(n)}$ を考える。A の j-section A_j，すなわち，$w^1, \cdots, w^{j-1}, w^{j+1}, \cdots, w^n$ を固定したとき，

$$A_j = \{w^j;\ (w^1, \cdots, w^n) \in A\}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

とするとき, $A_j \in \mathcal{B}_t$ 。

(ii) $T(\bar{w})$ を $\bar{N}_t$-Markov time とする。$W^{(n)}$ 上で考えて, $\bar{w}=(w^1, w^2, \cdots, w^n)$, で $w^1, \cdots, w^{j-1}, w^{j+1}, \cdots, w^n$ を固定して,

$$T^j(w^j) = T(\bar{w})$$

とすると, $T^j(w)$ は $\mathcal{B}_t$-Markov time である。

(iii) (i), (ii) の A_j, $T(\bar{w})$, $T^j(w)$ を考えよう。そのとき, $A \in \bar{N}_T$, $A \subset W^{(n)}$, とすれば,

$$A_j \in \mathcal{B}_{T^j}$$

である。*1)

[Proof] (i), $n=1$ のときは明らかであるので $n \geqq 2$ とする。

$$\mathbb{B} = \{A ; A \in \bar{N}_t, \ A \subset W^{(n)}, \ A_j \in \mathcal{B}_t\}$$

とおく。$\mathbb{B}$ は $W^{(n)}$ の σ-field である。一方 $\Gamma \subset S^n$ に対しては,

$$\begin{aligned}\{\bar{x}_t \in \Gamma\} &= \{x'_t \in \gamma^{-1}(\Gamma), \ t < \bar{\zeta}\} \\ &= \{\bar{w} ; x_t(w^j) \in \gamma^{-1}(\Gamma)|_S, \ t < \sigma(w^j), \ j=1,2,\cdots,n\}\end{aligned}$$

であるから,

$\{\bar{x}_t \in \Gamma\}_j = \{w ; x_t(w) \in \gamma^{-1}(\Gamma)|_S, \ t < \sigma(w)\}$ 又は空集合となり $\mathcal{B}_t$ に属する。

また,

$$\begin{aligned}\{\bar{x}_t = \partial\} &= \{\bar{\zeta} \le t\} \\ &= \{\bar{w} ; \exists k : \sigma(w^k) \le t\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} \{\bar{w} ; \sigma(w^k) \le t\}\end{aligned}$$

であることに注意すれば,

$$\begin{aligned}\{\bar{x}_t = \Delta\}_j &= \{\bigcup_{k=1}^{n} \{\bar{w} ; \sigma(w^k) \le t\}\}_j \\ &= \begin{cases} W ; \ \exists k = 1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n : \ \sigma(w^k) \le t, \ \zeta(w^k) > 0 \text{ のとき}, \\ \{\sigma(w) \le t\} ; \quad \text{それ以外のとき}, \end{cases}\end{aligned}$$

---

*1) $\bar{N}_T$, $\mathcal{B}_{T^j}$ の定義は Markov 過程論の通常の方法による。また第1章参照。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

となり,

$$\{\bar{x}_t = \partial\}_j \in \mathcal{B}_t$$

がわかる。すなわち,

$$\{\bar{x}_t \in \Gamma\} \in \mathcal{B}, \quad \Gamma \subset S^n \cup \{\Delta\},$$

従って $\mathcal{B} \supset \bar{N}_t$ となり, (i) が示される。

(ii) の Proof.

$$\{w;\ T^j(w) < t\} = \{\bar{w};\ T(w) < t\}_j,$$

および $\{T < t\} \in \bar{N}_t$ であることに注意すれば, (i) より

$$\{w;\ T^j(w) < t\} \in \mathcal{B}_t,$$

従って T^j は $\mathcal{B}_t$-Markov time である。

(iii) の Proof.

$$A_j \cap \{T^j < t\} = \{A \cap \{T < t\}\}_j \in \mathcal{B}_t$$

であるから,

$$A_j \in \mathcal{B}_{T^j}$$

である。 q.e.d.

<u>Theorem 6.4</u> $\{W, x_t, \mathcal{B}_t, P_x;\ x \in S\}$ が強Markov process ならば, $\{\bar{W}, \bar{x}_t, \bar{N}_t, \zeta, \theta_t, \bar{P}_{\bar{x}};\ \bar{x} \in \mathbb{S}\}$ はまた強Markov process である。

[<u>Proof</u>] Tを$\bar{N}_t$-Markov time, $A \in \bar{N}_T$ とし, fはS上の有界可測関数で, $\|f\| \le 1$ とする。そのとき,

$$(6.39) \quad \bar{E}_{\bar{x}}[\hat{f}(\bar{x}_{T+t});A] = \bar{E}_{\bar{x}}[\bar{E}_{\bar{x}_T}[\hat{f}(x_t)];A], \quad t \ge 0, \quad \bar{x} \in S^n,$$

を示す。まず, 関数 $\hat{f}(\bar{x}_{T+t})$ の n-section $\hat{f}(\bar{x}_{T+t})|_n$ はつぎの形になる:[*1)]
T^n をTの n-section とするとき,

$$\hat{f}(\bar{x}_{T+t})|_n = \prod_{j=1}^{n-1} f(x_{T^n+t}(w^j))\, f(x_{T^n+t}(w^n))$$
$$= \prod_{j=1}^{n-1} f(x_{T^n+t}(w^j))\, f(x_t(\theta_{T^n} w^n)) .$$

また, $\prod_{j=1}^{n-1} f(x_{T^n+t}(w^j))$ は $\mathcal{B}_{T^n}$-measurableである。

---

*1) $g(\bar{w})$ の n-section $g(\bar{w})|_n$ とは, n座標以外を固定して, n座標のみの関数と考えたもの。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

そこで

$$\bar{x} \ni (x^1, \cdots, x^n), \qquad \bar{x}' \ni (x^1, \cdots, x^{n-1})$$

として，Fubini の定理により，A の section を A_n とすれば，

$$\bar{E}_{\bar{x}}[\hat{f}(\bar{x}_{T+t}); A] = \bar{E}_{\bar{x}'}\big[\bar{E}_{x_n}[\prod_{j=1}^{n-1} f(x_{T^n+t}(w^j)) f(x_t(\theta_{T^n} w)); A_n]\big] \text{ 。}$$

ここで x_t の強Markov 性を使って，

$$= \bar{E}_{\bar{x}'}\big[E_{x_n}[\prod_{j=1}^{n-1} f(x_{T^n+t}(w^j))\, E_{x_{T^n}}[f(x_t)]; A_n]\big]$$

$$= \bar{E}_{\bar{x}}\big[\prod_{j=1}^{n-1} f(\bar{x}_{T+t})\, E_{x_{T(w^n)}}[f(x_t)]; A\big]$$

ここで再び Fubini の定理を用いている.

以上のことを繰返して，

$$\bar{E}_{\bar{x}}[\hat{f}(\bar{x}_{T+t}); A] = \bar{E}_{\bar{x}}\big[\prod_{j=1}^{n} E_{x_{T(w^j)}}[f(x_t); t<\sigma]; A\big]$$

$$= \bar{E}_{\bar{x}}[\bar{E}_{\bar{x}_T}[\hat{f}(\bar{x}_t)]; A]$$

を得る。従って，第２章の Lemma 2.2 を用いると，$\bar{S}$上の任意の有界可測関数 f で $f(\Delta) = f(\partial) = 0$ なるものに対し，(6.39) が成立つ。　　q.e.d.

<u>Proposition 6.4</u>　$\{W, x_t, \mathcal{B}_t, P_x, x \in S\}$ が σ 以前で quasi-left continuous とする。すなわち $\mathcal{B}_t$-Markov time の列 $T_m \uparrow T$ に対し，

$$P_x[\lim_{m\to\infty} x_{T_m} = x_T;\ T<\sigma] = P_x[T<\sigma]$$

が成りたつとする．そのとき，$\{\bar{W}, \bar{x}_t, \bar{N}_t, \theta_t, \bar{P}_{\bar{x}}; \bar{x} \in \bar{S}\}$ は ζ 以前で quasi-left continuous，すなわち，$\bar{N}_t$-Markov time の列 $T_m \uparrow T$ に対して，

(6.40) $$\bar{P}_{\bar{x}}[\lim_{m\to\infty} \bar{x}_{T_m} = \bar{x}_T;\ T<\zeta] = \bar{P}_{\bar{x}}[T<\zeta]$$

が成りたつ。

<u>[Proof]</u>　$W^{(n)}$上で考えよう。そのとき，

$$\{\lim_{m\to\infty} \bar{x}_{T_m} = \bar{x}_T,\ T<\zeta\} = \bigcap_{j=1}^{n} \{\bar{w};\ \lim_{m\to\infty} x_{T_m(\bar{w})}(w^j) = x_{T(\bar{w})}(w^j),\ T(\bar{w}) < \zeta(\bar{w})\}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

が言える。そこで $\{\cdot\}$, T_m, T の n-section をそれぞれ $\{\cdot\}_{|n}$, T_m^n, T^n とすれば, $\bar{x}\ni(x^1,\cdots,x^n)$, $\bar{x}'=(x^1,\cdots,x^{n-1})$ に対してつぎのことが成りたつ。

$$\bar{P}_{\bar{x}}[\{\lim_{m\to\infty}\bar{x}_{T_m}=\bar{x}_T\ ,\ T<\bar{\zeta}\}]$$

$$=\bar{P}_{\bar{x}'}[P_{x^n}[\bigcap_{j=1}^{n-1}\{\lim_{m\to\infty}x_{T_m(\bar{w})}(w^j)=x_{T(\bar{w})}(w^j),\ T<\bar{\zeta}\}_{|n}\cap\{w;\lim_{m\to\infty}x_{T_m^n}(w)=x_{T^n}(w);T^n<\sigma\}]]$$

$$=\bar{P}_{\bar{x}'}[P_{x_n}[\bigcap_{j=1}^{n-1}\{\lim_{m\to\infty}x_{T_m(\bar{w})}(w^j)=x_{T(\bar{w})}(w^j),\ T<\bar{\zeta}\}_{|n}\cap\{T^n<\sigma\}]]$$

$$=\bar{P}_{\bar{x}}[\bigcap_{j=1}^{n-1}\{\lim_{m\to\infty}x_{T_m(\bar{w})}(w^j)=x_{T(\bar{w})}(w^j),\ T<\bar{\zeta}\}_{|n}\cap\{T<\bar{\zeta}\}]$$

これを繰返して

$$\bar{P}_{\bar{x}}[\{\lim_{m\to\infty}\bar{x}_{T_m}=\bar{x}_T\ ;\ T<\bar{\zeta}\}]=\bar{P}_{\bar{x}}[\{T<\bar{\zeta}\}]$$

を得る。 *q.e.d.*

<u>*Proposition* 6.5</u> $\{W,x_t,\mathcal{B}_t,P_x,x\in\mathcal{S}\}$ が *Hunt* 過程で *quasi-hitting time* σ が *non-accessible*[*1] ならば, $\{\bar{W},\bar{x}_t,\bar{N}_t,\bar{\zeta},\theta_t,\bar{P}_{\bar{x}}:\bar{x}\in\bar{S}\}$ は *Hunt* 過程である。

[<u>*Proof*</u>] *Proposition* 6.4 の証明と同じ記号を用いよう。$W^{(n)}$ で考えよう。

$$\{\lim_{m\to\infty}\bar{x}_{T_m}=\bar{x}_T\ ;\ T<\infty\}$$

$$=\bigcap_{j=1}^{n}\{\bar{w};\ \lim_{m\to\infty}x_{T_m\wedge\sigma(\bar{w})}(w^j)=x_{T\wedge\sigma(\bar{w})}(w^j);\ T(\bar{w})<\infty\}$$

となる。$\bar{x}\ni(x^1,\cdots,x^n)$, $\bar{x}'\ni(x^1,\cdots,x^{n-1})$ に対し

$$\bar{P}_{\bar{x}}[\{\lim_{m\to\infty}\bar{x}_{T_m}=x_T\ ;\ T<\infty\}]$$

$$=\bar{P}_{\bar{x}'}[P_{x^n}[\bigcap_{j=1}^{n-1}\{\lim_{m\to\infty}x_{T_m\wedge\sigma(\bar{w})}(w^j)=x_{T\wedge\sigma(\bar{w})}(w^j);\ T(\bar{w})<\infty\}_{|n}\cap\{w;\ \lim_{m\to\infty}x_{T_m^n\wedge\sigma(w)}(w)=x_{T^n\wedge\sigma}(w);\ T^n<\infty\}]]$$

---

*1) 第1章参照。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$= \bar{P}_{\bar{x}'}[P_{x^n}[\bigcap_{j=1}^{n-1}\{\lim_{m\to\infty} x_{T_m\wedge\sigma}(w^j) = x_{T\wedge\sigma}(w^j),\ T<\infty\}|_n \cap \{T^n<\infty\}]]$$

上の変形でσが non-accessible なことを用いた。Fubini の定理を使ってもとにもどすと，

$$\bar{P}_{\bar{x}}[\{\lim_{m\to\infty}\bar{x}_{T_m}=\bar{x}_T,\ T<\infty\}] = \bar{P}_{\bar{x}}[\bigcap_{j=1}^{n-1}\{\lim_{m\to\infty} x_{T_m\wedge\sigma}(w^j)=x_{T\wedge\sigma}(w^j), T<\infty\}\cap\{T<\infty\}].$$

同じ手法を繰返すことにより，

$$\bar{P}_{\bar{x}}[\{\lim_{m\to\infty}\bar{x}_{T_m}=\bar{x}_T;\ T<\infty\}] = \bar{P}_{\bar{x}}[\{T<\infty\}],$$

を得る。また strong Markov 性は Theorem 6.4 で既に示したので，証明を終る。 q. e. d.

以上のことから，$\mathcal{S}\cup\{\partial\}$ 上の 1 つの strong Markov process が与えられた時，それを基礎に S 上に一定の性質をみたし，しかも目的の branching Markov process が持つことを期待される性質をそなえた Markov process が構成されたことになる。

そこで，つぎの目標は，分裂法則 $\{q_n(x), \pi_n(x, dy)\}$ から，instantaneous distribution を構成し，§ 6.2 の方法で branching Markov process を構成することである。

ここで分裂法則とは第 2 章で branching Markov process を存在したとするとき，導かれた分裂法則のもつ性質をみたすもの，すなわち，つぎの性質をみたす：

[A]　$q_n(x)$,　$x\in\mathcal{S}$,　$n = 0, 2, 3, \cdots$ は non-negative で，x について $\mathcal{B}(\mathcal{S})$-measurable で，しかも

$$\sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty} q_n(x) = 1 , \qquad x\in\mathcal{S}.$$

[B]　$\pi_n(x, dy)$,　$x\in\mathcal{S}$,　$dy\subset\mathcal{S}^n$,　$n = 2, 3, \cdots$ は x について，$\mathcal{B}(\mathcal{S})$-measurable，dy について $\mathcal{S}^n$ 上の probability measure。

$\pi_0(x, dy) = \delta_{\{\partial\}}(dy)$。

そこで　$\pi(x, d\bar{x})$　をつぎのように定義する。

(1)　$x\in\mathcal{S}$,　$d\bar{x}\subset S$　に対し，

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$\Pi(x, d\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)\Pi_n(x, d\bar{x})$$

(2) $\Pi(\partial, d\bar{x}) = \delta_{\{\partial\}}(d\bar{x})$ 。

このとき，$\Pi(x, d\bar{x})$ が x について $\mathcal{B}(\mathcal{S})$-measurable で，$d\bar{x}$ について S 上の Probability measure になることは，上の[A],[B]より明らか。

つぎに，$\bar{w} \in W^{(n)}$, $n \geqq 1$, $d\bar{x}_1, \cdots, d\bar{x}_n \subset S$ とし，

(a) $+\infty > \bar{\zeta}(\bar{w}) > 0$ のとき，

$$\mu'(\bar{w}; d\bar{x}_1, \cdots, d\bar{x}_n) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{\{\bar{\zeta}(\bar{w})=\sigma(w^k)\}}(\bar{w})\Pi(x_{\sigma(w^k)-}(w^k), d\bar{x}_k) \times \prod_{j\neq k} \delta_{\{x_{\bar{\zeta}(\bar{w})-}(w^j)\}}(d\bar{x}_j)$$

$$\mu'(\bar{w}, \Delta) = 0$$

(b) $\bar{\zeta}(\bar{w}) = 0$ のとき，

$$\mu'(\bar{w}, d\bar{x}) = \delta_{\{\partial\}}(d\bar{x})$$

とおく.

以上のことから，T が Markov time とすれば

(6.41) $\mu'(\theta_T\bar{w}; d\bar{x}_1, \cdots, d\bar{x}_n) = \mu(\bar{w}; d\bar{x}_1, \cdots, d\bar{x}_n)$, on $\{T < \bar{\zeta}\}$

が成立つ。このことは $T(\bar{w}) < \bar{\zeta}(\bar{w})$ より $T(\bar{w}) < \sigma(w^k)$ がなりたち，そのことによって

$$\bar{\zeta}(\theta_T\bar{w}) + T = \bar{\zeta}(\bar{w})$$

$$\sigma(\theta_T w^k) + T = \sigma(w^k)$$

$$x_{\sigma(\theta_T w^k)-}(\theta_T w^k) = x_{\sigma(w^k)-}(w^k)$$

となるので言える。

mapping γ を第2章と同様に

$$\underbrace{S \times \cdots \times S}_{n} \xrightarrow{\gamma} S$$

として拡張しておく。この γ により $\mu'(\bar{w}, dx^1, \cdots, dx^n)$ から induce される S 上の measure を

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$\mu(\overline{w},\ d\overline{x})$

と書くことにしよう。すなわち，

(6.42) $\mu(\overline{w};\ d\overline{x}) = \mu'(\overline{w};\ \gamma^{-1}(d\overline{x}))$

とする。更に $\{w_\Delta\}$ に対して

$\mu(w_\Delta;\ d\overline{x}) = \delta_{\{\Delta\}}(d\overline{x})$

とおく。

Proposition 6.6 $\mu(\overline{w},\ d\overline{x})$, $\overline{w}\in\overline{W}$, $d\overline{x}\subset S$, は *instantaneous distribution* である。

[Proof] 上の定義，および (6.41) 等より明らか。 q.e.d.

そこで先に構成した $\{\overline{W},\ \overline{x}_t,\ \overline{N}_t,\ \overline{\zeta},\ \theta_t,\ \overline{P}_{\overline{x}};\ \overline{x}\in\overline{S}\}$ と $\mu(\overline{w},d\overline{x})$, $\overline{w}\in\overline{W}$, $d\overline{x}\subset\overline{S}$ より §6.2 の *Theorem* 6.1 [*1)] を用いて，1つの強 *Markov process*

(6.43) $\{\widetilde{\Omega},\ X_t,\ \widetilde{\mathcal{B}}_t,\ \theta_t,\ \widetilde{P}_{\overline{x}};\ \overline{x}\in\overline{S}\}$

が構成される。

これまでのことをまとめると，つぎのような結論が得られる。

Theorem 6.5 $\{W,\ x_t,\ \mathcal{B}_t,\ P_x;\ x\in S\}$ は S 上の強 *Markov process* で条件：

(i) $\partial\in S$ のときは $P_x[0<\zeta]=1$, $x\in S-\{\partial\}$, (ii) ∂ は *trap*

をみたす。

σ は *quasi-hitting time* [*2)] で条件：

(i) $P_x[0<\sigma\leqq\zeta]=1$, $x\in S$, ($\partial\in S$ のときは，$P_\partial[\sigma=0]=1$)

---

*1) *Th.* 6.1 での S は今の場合 $\bigcup_{n=0}^{\infty}S^n$ である。又，我々は

$X_t(\widetilde{\omega})=\Delta \quad t\geqq\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\zeta}(\overline{w}'_k)$ とおく。すなわち無限回 *instantaneous distribution* でつないだ後は Δ にいるようにする。

*2) $\sigma(w)\leqq t \Rightarrow \sigma(\theta_t w)=0$, をみたすとする。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

(ii) $P_x[\sigma < \infty] > 0$, $\quad x \in \mathcal{S}$,

(iii) $P_x[\sigma = t] = 0$, $\quad t \geqq 0$, $x \in \mathcal{S}$,

(iv) $P_x[\exists x_{\sigma-}] = 1$, $\quad x \in \mathcal{S}$,

をみたす。

分裂法則 $\{q_n(x),\ \pi_n(x, dy)\}$, すなわちつぎの条件をみたす系が与えられている。

(i) $q_n(x) \geqq 0$, $x \in \mathcal{S}$, $n = 0, 2, 3, \cdots$ はxについて $\mathcal{B}(\mathcal{S})$-measurable.

(ii)
$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} q_n(x) = 1, \qquad x \in \mathcal{S}$$

(iii) $\pi_n(x, d\bar{y})$, $n = 2, 3, \cdots$ はxについて $\mathcal{B}(\mathcal{S})$-measurable, $d\bar{y}$ について $\mathcal{S}^n$上の probability measure.

(iv) $\pi_0(x, d\bar{y}) = \delta_{\{\partial\}}(d\bar{y})$.

そのとき，S上の強Markov process で branching Markov process である

$$\{\tilde{\Omega},\ X_t,\ \tilde{\mathcal{B}}_t,\ \theta_t,\ \tilde{P}_{\bar{x}};\quad \bar{x} \in \bar{S}\}$$

が存在し，

(6.43) $\qquad \tilde{P}_y[X_\tau \in \mathcal{S}^n / x_{\tau-}] = q_n(x_{\tau-}), \qquad y \in \mathcal{S}$,

(6.44) $\qquad \tilde{P}_y[X_\tau \in d\bar{y} / X_{\tau-},\ X_\tau \in \mathcal{S}^n] = \pi_n(x_{\tau-}; d\bar{y}), \quad y \in \mathcal{S},\ d\bar{y} \subset \mathcal{S}^n$,

(6.45) $\qquad T_t^\circ f(x) = E_x[f(x_t);\ t < \sigma]$, $\qquad x \in \mathcal{S}$

である。ただし，ここで $\tau(\tilde{\omega})$ は X の first branching time で，

$$T_t^\circ f(\bar{x}) = \tilde{E}_{\bar{x}}[f(X_t);\quad t < \tau]$$

とおく。

さらに，x_tが右連続，左極限を持てば，X_t は $t < \tilde{\zeta}$ で右連続，左極限をもつ。x_tが quasi-left continuous で σ が non-accessible ならば，X_t は $t < \tilde{\zeta}$ で quasi-left continuous である。

[Proof] この証明で strong Markov process が存在するところまでは既に済んでいる。

X_t が branching Markov process であることを示そう。定義の仕方から ∂ および Δ は trap になっている。また

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$\widetilde{P}_{\bar{x}}[\lim_n \tau_n = e_\Delta,\ \lim_n \tau_n < \infty] = \widetilde{P}_{\bar{x}}[\lim_n \tau_n < \infty]$$

がみたされていることもよい。ここで

$$e_\Delta(\widetilde{\omega}) = \inf\{t;\ X_t(\widetilde{\omega}) = \Delta\}^{*1)}$$

X_t が第2章にのべた Property B.Ⅲ をもつことを示す。

$\bar{x} \in S^n$, $(x_1, \cdots, x_n) \in \bar{x}$ としよう。f を S 上の有界可測関数で $\|f\| \le 1$ とする。

i) $\widetilde{E}_{\bar{x}}[\hat{f}(X_t);\ t < \tau]$

$$= \bar{E}_{\bar{x}}[\hat{f}(\bar{x}_t)] = \prod_{j=1}^{n} \bar{E}_{x_j}[\hat{f}(\bar{x}_t)]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \widetilde{E}_{x_j}[\hat{f}(x_t);\ t < \tau] \ .$$

特に $\bar{x} \in S$ ならば

$$\widetilde{E}_{\bar{x}}[\hat{f}(X_t);\ t < \tau] = E_{\bar{x}}[f(x_t);\ t < \sigma]$$

である。これより (6.45) が示された。

(ii) $\widetilde{E}_{\bar{x}}[\hat{f}(X_\tau);\ \tau \in dt]$

$$= \bar{E}_{\bar{x}}[\zeta(\bar{w}) \in dt,\ \int \mu(\bar{w}, d\bar{y})\hat{f}(\bar{y})]$$

$$= \bar{E}_{\bar{x}}[\zeta(\bar{w}) \in dt,\ \int \sum_{k=1}^{n} \chi_{\{\zeta(\bar{w}) = \sigma(w^k)\}}(\bar{w})\, \nu(x_{\sigma(w^k)-}(w^k), d\bar{x}_k)$$

$$\times \prod_{j \ne k} \delta_{\{x_{\zeta(\bar{w})}(w^j)\}}(d\bar{x}_j) \prod_{j=1}^{n} \hat{f}(x_j)]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \bar{E}_{x_k}[\sigma \in dt,\ \int \nu(\bar{x}_{\sigma-}, d\bar{x}_k)\hat{f}(\bar{x}_k)] \prod_{j \ne k} \bar{E}_{x_j}[\hat{f}(x_t);\ t < \sigma]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \widetilde{E}_{x_k}[\hat{f}(X_\tau);\ \tau \in dt] \prod_{j \ne k} \widetilde{E}_{x_j}[f(X_t);\ t < \tau] \ .$$

この (i), (ii) より Property B.Ⅲ が得られる。従って第2章 Theorem 2.1 により X_t は Branching Markov process である。

S^n 上の有界可測関数 g, S 上の有界可測関数 f を考え，それぞれ，S^n, S 以外では 0 として $\bar{S}$ 上に拡張する。

---

*1) $\{\ \} = \phi$ の時は $e_\Delta(\widetilde{\omega}) = \infty$ とする。これは第2章の記号と同じ。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$y \in \mathcal{S}$ として

$$\widetilde{E}_y[g(X_\tau)f(X_{\tau-})] = \bar{E}_y[f(\bar{x}_{\bar{\zeta}-})\int_{\mathcal{S}^n}\mu(\bar{w}, d\bar{x})g(\bar{x})]$$

$$= \bar{E}_y[f(\bar{x}_{\bar{\zeta}-})\int_{\mathcal{S}^n}\nu(\bar{x}_{\bar{\zeta}-}, d\bar{x})g(\bar{x})]$$

$$= \bar{E}_y[f(\bar{x}_{\bar{\zeta}-})q_n(\bar{x}_{\bar{\zeta}-})\int_{\mathcal{S}^n}\pi_n(\bar{x}_{\bar{\zeta}-}, d\bar{x})g(\bar{x})]$$

$$= \bar{E}_y[q_n(X_{\tau-})\int_{\mathcal{S}^n}\pi_n(X_{\tau-}, d\bar{x})g(\bar{x})f(X_{\tau-})]$$

となるので，(6.43)，(6.44) が示される.

残りの部分については，*Proposition* 6.1, 6.2 および *Theorem* 6.3, *Proposition* 6.4 から言える。 *q.e.d.*

<u>*Theorem 6.6*</u> *Theorem* 6.5 の仮定の他に，さらにつぎの条件：

$$\sup_{x \in \mathcal{S}} P_x[\tau < \infty] = \alpha < 1$$

がみたされるとする。そのとき

$$\widetilde{P}_{\bar{x}}[X_{\tau_\infty} = \Delta, \ {}^\forall m \text{ に対して } \tau_m < \infty] = \widetilde{P}_{\bar{x}}[{}^\forall m \text{ に対して } \tau_m < \infty] \qquad \bar{x} \in S,$$

が成りたつ。

<u>[Proof]</u> *branching measure* が Δ に分布していないから，

$$\widetilde{P}_{\bar{x}}[X_{\tau_N} \neq \Delta, \ N(\tilde{\omega}) < \infty] = 0, \qquad \bar{x} \in S$$

となっていることにまず注意する。

$\bar{x} \in \mathcal{S}^n$ に対して

$$\widetilde{P}_{\bar{x}}[\tau < \infty] \leqq 1-(1-\alpha)^n \equiv \alpha_n < 1$$

である. 従って

$$\sup_{\bar{x} \in \mathcal{S}^n} \widetilde{P}_{\bar{x}}[\tau < \infty] = \alpha_n < 1$$

つぎに $S_n = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{S}^k$ とおき，

$$\left.\begin{aligned} T(\tilde{\omega}) &= \inf\{t > 0, \ X_t(\tilde{\omega}) \notin S_n\} \\ S(\tilde{\omega}) &= \inf\{t > 0, \ X_t(\tilde{\omega}) \in S_n\} \end{aligned}\right\}, \quad \text{但し } \inf \phi = \infty,$$

とおく。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$T_1 = T_1,\ S_1 = T_1 + S(\theta_T \tilde{\omega}),\quad T_2 = S_1 + T(\theta_{S_1}\tilde{\omega}),\ S_2 = T_2 + S(\theta_{T_2}\tilde{\omega}), \cdots$$

とおく。

$\bar{x} \in S_n$ としよう。定義の仕方から

$$\tilde{P}_{\bar{x}}[S_1 < \infty,\ \forall m,\ \tau_m < \infty] \leq \tilde{P}_{\bar{x}}[T_1 < \infty,\ \forall m,\ \tau_m < \infty]$$
$$\leq \tilde{P}_{\bar{x}}[\tau < \infty]$$

がなりたつ。従って

$$\sup_{\bar{x} \in \mathcal{S}^n} \tilde{P}_{\bar{x}}[S_1 < \infty,\ \forall m,\ \tau_m < \infty] \leq \alpha_n < 1$$

である。

$$\tilde{P}_{\bar{x}}[S_N < \infty,\ \forall m,\ \tau_m < \infty]$$

$$= \tilde{P}_{\bar{x}}[S_{N-1} < \infty,\ S_1(\theta_{S_{N-1}}\tilde{\omega}) < \infty,\ \forall m,\ \tau_m < \infty]$$

$$= \tilde{E}_{\bar{x}}[S_{N-1} < \infty,\ \forall m,\ \tau_m < \infty;\ P_{X_{S_{N-1}}}[S_1 < \infty,\ \forall m,\ \tau_m < \infty]]$$

$$\leq \alpha_n^N$$

従って

$$\tilde{P}_{\bar{x}}[\bigcap_N \{S_N < \infty,\ \forall m,\ \tau_m < \infty\}] = 0$$

従って

$$\tilde{P}_{\bar{x}}[X_t \text{ は } S_n \text{ を有限回のみ hit する};\ \forall m,\ \tau_m < \infty]$$

$$= \tilde{P}_{\bar{x}}[\forall m,\ \tau_m < \infty].$$

同様に

$$\tilde{P}_{\bar{x}}[X_t \text{ は } \mathcal{S}^k \text{ を有限回のみ hit する};\ \forall m,\ \tau_m < \infty]$$

$$= \tilde{P}_{\bar{x}}[\forall m,\ \tau_m < \infty]$$

故に

$$\tilde{P}_{\bar{x}}[X_{\tau_\infty} = \Delta,\ \forall m,\ \tau_m < \infty]$$

$$= \tilde{P}_{\bar{x}}[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} [X_t \text{ は } S_k \text{ および } \mathcal{S}^j,\ j = 1, 2, \cdots, k \text{ を有限回のみ hit する}];$$
$$\forall m,\ \tau_m < \infty] = \tilde{P}_{\bar{x}}[\forall m,\ \tau_m < \infty].$$

q. e. d.

<u>Theorem 6.7</u>　　Theorem 6.5 の仮定に加えて，条件：$\varepsilon > 0$，$\delta > 0$ が存在して

(6.60)　　$\inf_{x \in \mathcal{S}} P_x[\sigma > \varepsilon] > \delta$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

(180)

をみたすとする。

そのとき

$$\tilde{P}_{\bar{x}}[X_{\tau_\infty}=\Delta;\ \tau_\infty<\infty]=\tilde{P}_{\bar{x}}[\tau_\infty<\infty],\quad (\bar{x}\in S)$$

がなりたつ。

[Proof] $\sup_{x\in\mathcal{S}} P_x[\tau<t]=a(t)$ とおく。$\sup_{x\in\mathcal{S}}\tilde{P}_x[\tau<\varepsilon]\leq 1-\delta$ であるから，$\bar{x}\in\mathcal{S}^n$ に対し

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{\bar{x}}[\tau\leq\varepsilon]&=\int_0^\varepsilon\sum_{k=1}^m\tilde{P}_{x_k}[\tau\in dt]\prod_{j\neq k}\tilde{P}_{x_j}[t<\tau]\\&\leq n\int_0^\varepsilon da(t)\,(1-a(t))^{n-1}\\&=1-(1-a(\varepsilon))^n\\&\leq 1-\delta^n\end{aligned}$$

即ち，$\inf_{\bar{x}\in\mathcal{S}^n}\tilde{P}_{\bar{x}}[\tau>\varepsilon]>\delta^n>0$ がなりたつ。

$S_n=\bigcup_{k=0}^n\mathcal{S}^k$ とし，前定理の証明と同様に $T_1, S_1, T_2, S_2, \cdots$ を定義する。

$$\tilde{P}_{\bar{x}}[\bigcap_{k=n+1}^\infty(S_k-S_{k-1}<\varepsilon)]=\tilde{E}_{\bar{x}}[\tilde{P}_{X_{S_n}}[\bigcap_{k=1}^\infty(S_k-S_{k-1}<\varepsilon)]]\tag{6.61}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{\bar{y}}[\bigcap_{k=1}^\infty(S_k-S_{k-1}<\varepsilon)]&=\tilde{E}_{\bar{y}}[S_1<\varepsilon,\ \tilde{P}_{X_{S_1}}[\bigcap_{k=1}^\infty(S_k-S_{k-1}<\varepsilon)]]\\&\leq\sup_{\bar{y}\in\mathcal{S}_n}\tilde{P}_{\bar{y}}[\bigcap_{k=1}^\infty(S_k-S_{k-1}<\varepsilon)]\,\tilde{P}_{\bar{x}}[S_1<\varepsilon]\\&\leq(1-\delta^n)\sup_{\bar{y}\in S_n}\tilde{P}_{\bar{y}}[\bigcap_{k=1}^\infty(S_k-S_{k-1}<\varepsilon)]\end{aligned}$$

従って $\sup_{\bar{x}\in S_n}\tilde{P}_{\bar{x}}[\bigcap_{k=1}^\infty(S_k-S_{k-1}<\varepsilon)]=0$

(6.61) から

$$\tilde{P}_{\bar{x}}[\bigcap_{k=n+1}^\infty(S_k-S_{k-1}<\varepsilon)]=0$$

故に

$$\tilde{P}_{\bar{x}}[\bigcup_{n=1}^\infty\bigcap_{k=n+1}^\infty(S_k-S_{k-1}<\varepsilon)]=0$$

$$\{\lim_{N\to\infty}S_N<\infty\}\subset\bigcup_{n=1}^\infty\bigcap_{k=n+1}^\infty\{S_k-S_{k-1}<\varepsilon\}$$

だから，

$$\tilde{P}_{\bar{x}}[\lim_{N\to\infty}S_N<\infty]=0$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

又

$$\bigcap_N \{S_N < \infty\} \cap \{\tau_\infty < \infty\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n+1}^{\infty} \{S_k - S_{k-1} < \varepsilon\}$$

従って

$$\widetilde{P}_{\bar{x}}[\bigcap_N \{S_N < \infty\} \cap \{\tau_\infty < \infty\}] = 0$$

$$\widetilde{P}_{\bar{x}}[X_t \text{ は } \mathcal{S}_n \text{ を有限回のみ } hit \text{ する}, \ \tau_\infty < \infty] = \widetilde{P}_{\bar{x}}[\tau_\infty < \infty]$$

同様に

$$\widetilde{P}_{\bar{x}}[X_t \text{ は } \mathcal{S}^k \text{ を有限回のみ } hit \text{ する}, \ \tau_\infty < \infty] = \widetilde{P}_{\bar{x}}[\tau_\infty < \infty]$$

故に

$$\widetilde{P}_{\bar{x}}[X_{\tau_\infty} = \Delta, \ \tau_\infty < \infty] = \widetilde{P}_{\bar{x}}[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{X_t \text{ は } \mathcal{S}_k \text{ 及び } \mathcal{S}^j, (j = 1, 2, \cdots, k) \text{ を有限回のみ } hit \text{ する}\} ; \ \tau_\infty < \infty]$$

$$= \widetilde{P}_{\bar{x}}[\tau_\infty < \infty] \qquad q.e.d.$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

第7章 Branching Semi-group

§7.1 Branching semi-group

第6章の§6.1ですでにのべたように，この章ではsemi-groupを構成する立場からbranching Markov processの構成を考える。

第6章では，Markov processについての結果，例えば条件付確率に関連すること等を用いたので，登場する種々の量が"positive"であることを仮定した。この章のようにsemi-groupを構成する立場からは，その"positivity"は有用ではあるが，理論の性格としてはそれは必要なことではない場合も多い。それを仮定しないことで，形式上は多少複雑になる面もあるが，定性的理解はかえって本質に近づく点もあるので，ここでは，しばしば"positivity"を仮定しない形でのべる。

まず，第0章でのべたBranching semi-groupの概念を，必ずしもpositiveでないcontraction semi-groupまでひろげておこう。

Definition 7.1　$\mathbb{C}(S)$上で定義されたcontraction[*1] linear operator T_tのsemi-group $\{T_t\}$を考える。そのとき，条件

$$T_t \hat{f}(\bar{x}) = \widehat{T_t f}(\bar{x}), \qquad \bar{x} \in S, \qquad f \in \overline{\mathbb{C}^*(S)} \tag{7.1}$$

ならば，$\{T_t\}$はBranching semi-group (B-semi-group)という。[*2]

[Remark]　Definition 7.1の仮定の下で，T_tは積分kernelをもつので，$\mathbb{B}_0(S)$（または$\mathbb{B}(S)$）上に拡張出来る。そこでBranching semi-groupの用語は$\mathbb{B}_0(S)$上のsemi-groupの時も(7.1)の関係をみたすものとして用いる。

この定義によればBranching Markov processのsemi-groupはpo-

---

*1) すなわち $\|T_t\| \leq 1$.

*2) (7.1)のことをしばしばbranching propertyという。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

sitive Branching semi-group である。

[Remark] この章では, $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, $\mathcal{C}(\mathcal{S}^n)$, $\mathcal{C}_0(S)$上の作用素で特定の関係にあるものを取扱う。いま一つの Banach space B と, そのn個の(symmetric) direct product $B^n = \underbrace{B\otimes\cdots\otimes B}_{n}$, その直和

$$\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n \quad , \quad B^0 = \{const\}$$

を考え, それらの上の作用素で $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, $\mathcal{C}(\mathcal{S}^n)$, $\mathcal{C}(S)$ の場合と類似の関係をみたすものを考えると, 形式的にはそのまま成りたつことも多い。また Hilbert space の時は Hilbert space の direct product を考えるとよい。[*1] しかし, このノートでは branching Markov process に伴う直観性を出来るだけ失わず, 簡単な形で事情を説明するために, その種類の一般化にはふれないことにする。

まず, つぎに第3章の Skorohod equation, Moyal equation の概念を一般化しておく。

<u>Definition 7.2</u>　$\{T_t^0,\ K(t),\ \mu_n\}$ をつぎの条件をみたすように定める。

[P.1]: T_t^0 はつぎのような signed measure になっている kernel で表現される $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ 上の強連続な linear な contraction semi-group とする:

$$T_t^0 f(x) = \int_{\mathcal{S}} T^0(t, x, dy)\, f(y) \quad , \quad x\in\mathcal{S}, \quad f\in\mathcal{C}(\mathcal{S}) , \tag{7.2}$$

[P.2]: $K(t)$ はつぎのような signed measure になっている kernel で表現される $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ 上の bounded linear operator であって, t について強連続で, つぎの (7.4) の条件をみたす:

$$K(t) f(x) = \int_0^t \int_{\mathcal{S}} K(x, dr\,dy)\, f(y) \quad , \quad x\in\mathcal{S} , \quad f\in\mathcal{C}(\mathcal{S}) . \tag{7.3}$$

$$T_t^0 K(s) f(x) = K(s+t) f(x) \quad , \quad x\in\mathcal{S} . \tag{7.4}$$

---

*1) direct product については Schatten [1], Murrey-von Neuman [1] 参照。例えば, T_t を $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} i\Delta u$ からきまる semi-group (実は unitary group) とし, $T_t^0 = e^{-kt} T_t$, $(k>0)$, $K(t)f = \int_0^t k T e^{-ks} ds$ とすると, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} i\Delta u + k\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n - u\right)$ の解を我々の formulation で取扱うことが出来る。

Sem. on Probab.
Vol.23-II　1966年
P141-247

[P.3]　$T^{0}(t, x, dy)$, $K(x, drdy)$ は bounded variation で，その variation より定まる measure $|T^{0}|(t, x, dy)$, $|K|(x, drdy)$ はつぎの関係をみたす。

(7.5)　$$\|T^{0}(t, x, o)\| - \|T^{0}(s, x, o)\| + \int_{s}^{t}\|K\|(x, dr, \cdot) \leq 0 ,$$

ここで $\|T^{0}\|$ は $T^{0}(t, x, dy)$ の total variation。

さらに，$\|K(x, t; \cdot)\| = \int_{\mathcal{S}}\int_{0}^{t}|K|(x, dr\, dy)$ とおけば

(7.6)　$$\lim_{t\downarrow 0}\ \sup_{x\in\mathcal{S}} \|K(x, t, \cdot)\| = 0$$

である。

[P.4]：μ_n はつぎのような signed measure になっている kernel で表現される $\mathbb{C}(\mathcal{S}^{n})$ から $\mathbb{C}(\mathcal{S})$ への bounded linear operator である：

(7.7)　$$\mu_n(f)(x) = \int_{\mathcal{S}^{n}}\mu_n(x, d\bar{y})f(\bar{y}) ,\qquad f\in\mathbb{C}(\mathcal{S}^{n}),\quad x\in\mathcal{S} .$$

さらにつぎの条件がみたされるとする：

(7.8)　$$\sum_{n=0}^{\infty}\|\mu_n(x, \cdot)\| \leq 1 ,$$　且つ一様収束。

ここで，$\|\mu_n(x, \cdot)\|$ は $\mu_n(x, \cdot)$ の total variation。

[Remark]　上の Difinition 7.2 で kernel は signed measure としたが，それは真に signed になっているという意味でなく，実は non-negative measure になっているという時もふくんでいることは言うまでもない。

まず，Definition 7.2 で与えられた $\{K(t), \mu_n\}$ に対して，つぎのような $\mathbb{C}(S)$ から $\mathbb{C}(\mathcal{S})$ への作用素 $\Psi(t)$ を定義しよう。

(7.9)　$$\Psi(t)f(x) = \int_{0}^{t}\int_{S}K(x, drdy)\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n(y; d\bar{z})f(\bar{z}) ,\quad f\in C_0(S),\ x\in\mathcal{S}.$$

このとき，$\Psi(t)$ が $C_0(S)$ より $\mathbb{C}(\mathcal{S})$ への bounded linear operator になっていることは明らか。実際，[P.3] により

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_S \mu_n(x, d\bar{z}) f(\bar{z}) , \quad x\in \mathcal{S}, \quad f\in \mathbb{C}_0(S) ,$$

はxの関数として連続で，bounded な作用素を与えている。後は [P. 2], [P. 3] に注意すればよい。

(7.9) により $\Psi(t)$ を定義すれば，それが

$$\Psi(t) f(x) = \int_S \Psi(t, x, d\bar{y}) f(\bar{y}) , \quad x\in \mathcal{S} ,$$

の形の積分 kernel (signed measure) $\Psi(t, x, d\bar{y})$ によって表現されることは明らかであろう。

以下の議論で，T_t^o, $\Psi(t)$ をつぎのように拡張したものが基本的な役割をもつ。

<u>Lemma 7.1</u> Definition 7.2 で与えられた T_t^o があるとする。そのとき，

1°) つぎの条件 (7.9) をみたす $\mathbb{C}(\mathcal{S}^n)$, $n\geq 0$, 上の強連続な contraction semi-group T_t^o が一意的に存在する：

$$\left\{\begin{array}{ll} T_t^o \hat{f}(\bar{x}) = T_t^o \hat{f}(\bar{x}) , & \bar{x}\in \mathcal{S}^n , \quad n\geqq 1 , \\ T_t^o f(\partial) = f(\partial) , & f\in \mathbb{C}(\mathcal{S}^o) . \end{array}\right. \tag{7.10}$$

2°) 1°) の T_t^o は signed measure $T^o(t, \bar{x}, d\bar{y})$ によって

$$T_t^o f(\bar{x}) = \int_{\mathcal{S}^n} T^o(t, \bar{x}, d\bar{y}) f(\bar{y}) , \quad f\in \mathbb{C}(\mathcal{S}^n) , \quad x\in \mathcal{S}^n$$

の形で表現され，$T^o(t, \bar{x}, d\bar{y})$ の $d\bar{y}$ についての total variation $\|T^o(t, \bar{x}, \cdot)\|$ は

$$\|T^o(t, \bar{x}, \cdot)\| \leq 1 , \quad \bar{x}\in \mathcal{S}^n , \tag{7.11}$$

をみたす。

<u>[Proof]</u> この証明は第３章の Lemma 3.1 による。実際，Lemma 3.1 によれば (7.10) より $n\geqq 1$ に対して

$$\widehat{T_t^o \hat{f}}(\bar{x}) = \int_{\mathcal{S}^n} T^o(t, \bar{x}, d\bar{y}) \hat{f}(\bar{y}) , \quad \bar{x}\in \mathcal{S}^n , \tag{7.12}$$

なる signed measure $T^o(t, \bar{x}, d\bar{y})$ が一意的に定まる。しかも，その Lemma によれば $\|T^o(t, x, \circ)\| \leq 1$, $x\in \mathcal{S}$ により

$$\|T^o(t, \bar{x}, \cdot)\| \leq 1 , \quad \bar{x}\in \mathcal{S}^n , \tag{7.13}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

となる。

そこでそのkernelにより

$$T_t^0 f(\bar{x}) = \int_{\mathcal{S}^n} T^0(t, \bar{x}, d\bar{y}) f(\bar{y}) , \quad \bar{x} \in \mathcal{S}^n, \quad f \in \mathbb{C}(\mathcal{S}^n) ,$$

と定義すれば(7.9)が成立ち，しかもそれが強連続になることは明らか。しかも(7.13)によりcontractionになる。更に(7.10)より$T_t^0 f(\cdot) \in \mathbb{C}(\mathcal{S}^n)$である。そこで後は$n=0$の時は(7.10)よりtrivialに定義されるのでLemmaの内容はすべて証明された。

<u>Lemma 7.2</u>　Definition 7.2で与えられた$\{T_t^0, K(t), \mu_n\}$があるとする。そのとき，

(1°) つぎの条件(7.14)をみたす$\mathbb{C}_0(S)$上から$\mathbb{C}(\mathcal{S}^n)$へのbounded linear operator $\Psi(t)$が一意的に存在する：

$$(7.14) \qquad \Psi(t)\hat{f}(\bar{x}) = \int_0^t \langle T_r^0 \hat{f}|_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} K(\cdot, dr dy) \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathcal{S}^n} \mu_n(y, d\bar{z}) \hat{f}(\bar{z}) \rangle (\bar{x}) ,$$

$$\bar{x} \in S, \quad f \in \mathbb{C}^*(\mathcal{S}) .$$

(2°) 1°)の$\Psi(t)$はsigned measure $\Psi(t, \bar{x}, d\bar{y})$によってつぎの形に積分表現される：

$$(7.15) \qquad \Psi(t) f(\bar{x}) = \int_S \Psi(t, \bar{x}, d\bar{y}) f(\bar{y}) , \quad f \in \mathbb{C}_0(S), \quad \bar{x} \in \mathcal{S}^n .$$

<u>[Proof]</u>　この証明は基本的にLemma 7.1と同じ。実際，$n \geqq 1$のときは第3章のLemma 3.1により

$$(7.16) \qquad \int_S \Psi(t, \bar{x}, d\bar{y}) \hat{f}(\bar{y}) = \int_0^t \langle T_r^0 \hat{f}|_{\mathcal{S}} \Big| \int_{\mathcal{S}} K(\cdot, dr dy) \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathcal{S}^n} \mu_n(y, d\bar{z}) \hat{f}(\bar{z}) \rangle (\bar{x})$$

なるsigned measure $\Psi(t, \bar{x}, d\bar{y})$がuniqueに定まる。boundedなことはつぎに示すLemmaの証明で詳しく論ずるが，それも第3章のLemmaより言える。$\mathbb{C}_0(S)$から$\mathbb{C}_0(\mathcal{S}^n)$への作用素になっていることはつぎのことから言える。[P.4]によれば，

$$\int_{\mathcal{S}^n} \mu_n(\cdot, d\bar{z}) \hat{f}(\bar{z}) \in \mathbb{C}(\mathcal{S})$$

で，さらに，(7.5)，(7.7)により

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$\int_0^t\int_S K(\cdot, drdy)\sum_{n=0}^{\infty}\int_{S^n}\mu_n(y, d\bar{z})\hat{f}(\bar{z}) \in \mathbb{C}(S)$$

$$\int_0^t \langle T_r^0 \hat{f}|_S \,|\, \int_S K(\cdot, drdy)\sum_{n=0}^{\infty}\int_{S^n}\mu_n(y, d\bar{z})\hat{f}(\bar{z})\rangle(\cdot) \in \mathbb{C}(S^n)$$

が言える。$\bar{x} = \partial, \Delta$ に対しては (7.14) より 0-measure として定義すればよい。 q.e.d.

<u>Lemma 7.3</u>　Definition 7.2 の $\{T_t^0, K(t), \mu_n\}$ が与えられているとする。そのとき，Lemma 7.2 の $\Psi(t)$ はつぎの性質をもつ：

(1°) $\Psi(t, \bar{x}, d\bar{y})$ の total variation $\|\Psi(t, \bar{x}, \cdot)\|$ は t に関して bounded variation で

(7.17)　$\|\Psi(t, \bar{x}, \circ)\| \leq 1 - \|T^0(t, \bar{x}, \circ)\|$,　$\bar{x} \in S$ 。

(2°)

(7.18)　$\lim_{t\downarrow 0} \sup_{\bar{x}\in S^n} \|\Psi(t, \bar{x}, \circ)\| = 0$,　$n \geqq 0$,

(3°) 任意の $t \geqq s$ に対して，

(7.19)　$\Psi(t)f(\bar{x}) = \Psi(s)f(\bar{x}) + T_s^0\Psi(t-s)f(\bar{x})$,　$\bar{x}\in S$, $f \in \mathbb{C}_0(S)$

である。

<u>[Proof]</u>　定義と第３章の Lemma 3.1 によれば，

$$\|\Psi(t, \bar{x}, \circ)\| \leq \int_0^t \langle \|T^0(r, *, \cdot)\| \,|\, \int_S |K|(*; drdy)\sum_{n=0}^{\infty}\|\mu_n(y, \cdot)\|\rangle(\bar{x})$$

である．ここで上式の右辺の $\langle\ 1\ \rangle$ は $*$ について考える．[P.4] に注意すれば，

$$\|\Psi(t, \bar{x}, \cdot)\| \leq \int_0^t \langle \|T^0(r, *, \cdot)\| \,|\, d_r\|K(*, r; \cdot)\|\rangle(\bar{x})$$

になる．[P.3] の (7.5) によれば

$$d_r\|K(*, r, \circ)\| \leq -d_r\|T^0(r, *, \cdot)\|$$

であるので，

$$\|\Psi(t, \bar{x}, \circ)\| \leq -\int_0^t \langle \|T^0(r, *, \circ)\| \,|\, d_r\|T^0(r, *, \cdot)\|\rangle(\bar{x})$$

$$= -\int_0^t d_r(\widehat{\|T^0(r, *, \circ)\|}(\bar{x}))$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

ここで $\widehat{\ }$ は$*$に関して考えている。故に

$$\|\Phi(t,\bar{x},\cdot)\| \leq 1-\widehat{\|T^{\circ}(t,*,\circ)\|}(\bar{x})$$

である。ところが (7.10) と，第3章の *Lemma* 3.1 によれば

$$\|T^{\circ}(t,\bar{x},\cdot)\| = \widehat{\|T^{\circ}(t,*,\cdot)\|}(\bar{x}), \qquad \bar{x}\in \mathcal{S}^{n}, \quad (n \geqq 1)$$

であるので，

$$\|\Phi(t,\bar{x},\cdot)\| \leq 1-\|T^{\circ}(t,\bar{x},\cdot)\|$$

である。$\bar{x}=\partial,\ \Delta$ の時は (7.17) は明らか。故に(1°) が言えた。

つぎに (7.14) の定義から上の計算と同じ考えで

$$\sup_{\bar{x}\in\mathcal{S}^{n}}\|\Phi(t,\bar{x},\circ)\| \leq \sup_{x\in\mathcal{S}}\int_{0}^{t}|K|(x,dr\times\mathcal{S}) = \sup_{x\in\mathcal{S}}\|K(x,t,\cdot)\|$$

となるので，(7.6) より (7.18) が出る。

つぎに 3°) を示そう。

$f\in \mathbb{C}^{*}(\mathcal{S})$ に対して

$$\Phi(t)\hat{f}(\bar{x})-\Phi(s)\hat{f}(\bar{x}) = \int_{s}^{t}\langle T_{r}^{\circ}\hat{f}|_{\mathcal{S}}|\int_{\mathcal{S}}K(\cdot\,;drdy)\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathcal{S}^{n}}\mu_{n}(y,dz)\hat{f}(z)\rangle(\bar{x})$$

$$=\int_{0}^{t-s}\langle T_{r+s}^{\circ}\hat{f}|_{\mathcal{S}}|\int_{\mathcal{S}}K(\cdot,\,d_{r}(r+s)dy)\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathcal{S}^{n}}\mu_{n}(y,dz)\hat{f}(z)\rangle(\bar{x})$$

ところが，[P.2] の (7.4) が成立しているので，

$$=\int_{0}^{t-s}\langle T_{r+s}^{\circ}\hat{f}|_{\mathcal{S}}|\int_{\mathcal{S}}T_{s}^{\circ}[K(*,drdy)\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathcal{S}^{n}}\mu_{n}(y,dz)\hat{f}(z)](\cdot)\rangle(\bar{x})$$

ここで第2章の *Lemma* 2.1 と (7.10) に注意すれば

$$=T_{s}^{\circ}[\int_{0}^{t-s}\langle T_{r}^{\circ}\hat{f}|_{\mathcal{S}}|\int_{\mathcal{S}}K(\circ,drdy)\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathcal{S}^{n}}\mu_{n}(y,dz)\hat{f}(z)\rangle](\bar{x})$$

$$=T_{s}^{\circ}(\Phi(t-s)\hat{f})(\bar{x})$$

である。すなわち

$$\Phi(t)\hat{f}(\bar{x})-\Phi(s)\hat{f}(\bar{x}) = T_{s}^{\circ}(\Phi(t-s)\hat{f})(\bar{x})$$

となる。ここで *Lemma* 2.1 に注意すれば，任意の $f\in\mathbb{C}_{0}(S)$ に対して，(7.19) が成りたつ。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

この $\Psi(t)$ は (7.9) の $\Psi(t)$ の拡張である。 q.e.d.

[Remark] Definition 7.2 の T_t°, $K(t)$, μ_n が連続関数に作用させたとき，それが再び連続関数になっていなくても，Definition 7.2 のように，$T^\circ(t, x, dy)$, $K(x, drdy)$, $\mu_n(x, d\bar{y})$ なる signed measure で定義されており，それらが Definition 7.2 の条件をみたせば，作用させた時 bounded function になると考えて，上の議論は適当な修正の上，成りたつ。そのように理解すれば，branching system が存在する branching Markov process X_t に対応する Def. 3.1 の system $\{T_t^\circ, K(t), q_n, \pi_n\}$ に対して

$$\mu_n(x, d\bar{y}) = q_n(x)\pi_n(x, d\bar{y})$$

とおけば，$\{T_t^\circ, K(t), \mu_n\}$ に対して上のような議論が出来ることは明らかである。

さらに branching Markov process に適当な条件をつければ，$\{T_t^\circ, K(t), \mu_n\}$ が Definition 7.2 のすべての条件をみたすように出来ることは，第5章の Examples にのべたことからも明らかである。

Definition 7.3 Definition 7.2 に与えられた $\{T_t^\circ, K(t), \mu_n\}$ があるとする。そのとき，$f \in \overline{B^*(S)}$ に対して，方程式

$$u_t(x) = T_t^\circ f(x) + \int_0^t\int_S K(x, drdy)\, F[u_{t-r}](y), \quad x \in S, \tag{7.20}$$

を Skorohod equation と呼ぶ。ここで

$$F[f](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n[\hat{f}](x), \quad x \in S, \quad f \in \overline{B^*(S)}, \tag{7.21}$$

とおく。[*1)]

$f \in \overline{C^*(S)}$ に対して，$u_t(x)$ が (7.20) をみたし，

$$\lim_{t \downarrow 0} u_t(x) = f(x) \tag{7.22}$$

の時，$u_t(x)$ は初期値 f の Skorohod equation の解とよぶ。

Definition 7.4 Definition 7.2 に与えられた $\{T_t^\circ, K(t), \mu_n\}$ が

---

*1) 第3章では $F[x; f]$ とかいていた。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

あるとする。T_t°, $\Phi(t)$ を Lemma 7.1, 7.2 で定義する。

そのとき，$f \in B_0(S)$ に対して，方程式，

$$u_t(\bar{x}) = T_t^\circ f(\bar{x}) + \int_0^t \int_S \Phi(dr, \bar{x}, d\bar{y})\, u_{t-r}(\bar{y}), \qquad \bar{x} \in S, \tag{7.23}$$

を <u>Moyal equation</u> と呼ぶ。$f \in \mathbb{C}_0(S)$ に対して，$u_t(\bar{x})$ が (7.23) をみたし，

$$\lim_{t \downarrow 0} u_t(\bar{x}) = f(\bar{x}) \tag{7.24}$$

の時，$u_t(\bar{x})$ は<u>初期値 f の Moyal equation の解</u>と呼ぶ。*1)

この章では，branching semi-group と Moyal equation と，Skorohod equation の相互関係を論ずる。

直ちにわかることは

<u>Proposition 7.1</u>　$\mathbb{C}_0(S)$ 上の branching semi-group T_t が存在し，任意の $f \in \mathbb{C}^*(\mathcal{S})$ に対して，$u_t(\bar{x}) = T_t \hat{f}(\bar{x})$ が Moyal equation (7.32) をみたすとする。そのとき，

$$u_t(x) = T_t \hat{f}|_{\mathcal{S}}(x)$$

は，Skorohod equation (7.20) をみたす。

[<u>Proof</u>]　仮定より，$x \in \mathcal{S}$ に対して，

$$\begin{aligned} T_t \hat{f}(x) &= T_t^\circ \hat{f}(x) + \int_0^t \int_{\mathcal{S}} \Phi(dr, x, dy)\, T_{t-r} \hat{f}(y) \\ &= T_t^\circ \hat{f}(x) + \int_0^t \int_{\mathcal{S}} K(x, dr dy) \sum_{n=0}^{\infty} \int_S \mu_n(y, d\bar{z})\, \widehat{T_{t-r}\hat{f}}(\bar{z}) \\ &= T_t^\circ \hat{f}(x) + \int_0^t \int_{\mathcal{S}} K(x, dr dy)\, F[T_{t-r} \hat{f}](y) \end{aligned}$$

となる。すなわち Skorohod equation をみたす。　　　q. e. d.

<u>§7.2 Moyal equation の最小解</u>

ここでは，Moyal equation (7.24) の初期値 f の解を 1 つ構成する方法を，

---

*1) Skorohod equation は $\mathcal{S}$ 上の方程式 Moyal equation は S 上の方程式であることを十分注意してほしい。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

Moyal [1] の方法を用いて示す。しかもその解を $T_t f(\bar{x})$ と書けば，$\{T_t\}$ は $B_0(S)$ 上の semi-group で，しかも Branching semi-group であること す。

$B_0(S)$ 上に作用素の系列 $\{\Psi^{(n)}(t)\}$ をつぎの形で定義する：

i) $\Psi^{(0)}(t) \equiv I$, $\Psi^{(1)}(t) = \Psi(t)$,

ii) $n \geqq 1$ に対しては，

$$\Psi^{(n)}(t) f(\bar{x}) = \int_0^t \Psi^{(n-1)}(dr)\, \Psi(t-r) f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in S,\ f \in B_0(S),\ t \tag{7.25}$$

同様に，$B_0(S)$ 上に作用素の系列 $\{T_t^{(n)}\}$ もつぎの形で定義する：
$n \geqq 1$ に対し，$T_t^{(0)} = T_t^{(0)}$ として

$$T_t^{(n)} f(\bar{x}) = \int_0^t \Psi^{(n)}(dr)\, T_{t-r}^{(0)} f(\bar{x}), \quad t \geqq 0,\ f \in B_0(S),\ \bar{x} \in S \tag{7.26}$$

このとき，つぎの結果が成りたつ。

<u>Lemma 7.4</u> $T_t^{(n)}$，$\Psi^{(n)}(t)$ はつぎの関係をみたす。$f \in B_0(S)$ とす

$$\begin{cases} \Psi^{(n)}(t) f(\bar{x}) = \int_0^t \Psi^{(n-k)}(dr)\, \Psi^{(k)}(t-r) f(\bar{x}), & k = 0, 1, 2, \cdots, n, \quad \bar{x} \in S \\ T_t^{(n)} f(\bar{x}) = \int_0^t \Psi^{(n-k)}(dr)\, T_{t-r}^{(k)} f(\bar{x}), & k = 0, 1, 2, \cdots, n, \quad \bar{x} \in S \\ T_r^{(0)} T_{t-r}^{(n)} f(\bar{x}) = \int_r^t \Psi(ds)\, T_{t-s}^{(n-1)} f(\bar{x}), & \bar{x} \in S, \\ \Psi^{(n)}(t) f(\bar{x}) = \Psi^{(n)}(s) f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{n} T_s^{(n-j)} \Psi^{(j)}(t-s) f(\bar{x}), & \bar{x} \in S \end{cases} \tag{7.27}$$

[<u>Proof</u>]

$$\begin{aligned} \Psi^{(n)}(t) f(\bar{x}) &= \int_0^t \Psi^{(n-1)}(dr)\, \Psi(t-r) f(\bar{x}) \\ &= \int_0^t d_r \left\{ \int_0^r \Psi^{(n-2)}(dv)\, \Psi(r-v) \right\} \Psi(t-r) f(\bar{x}) \\ &= \int_0^t \Psi^{(n-2)}(dv) \int_v^t d_r \Psi(r-v)\, \Psi(t-r) f(\bar{x}) \\ &= \int_0^t \Psi^{(n-2)}(dv) \int_0^{t-v} \Psi(dr)\, \Psi(t-v-r) f(\bar{x}) \\ &= \int_0^t \Psi^{(n-2)}(dv)\, \Psi^{(2)}(t-v) f(\bar{x}) \end{aligned}$$

---

*1) $d\Psi(t) f(\bar{x})$ を記号上の便宜上 $\Psi(dt) f(\bar{x})$ と書く。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

これを繰返して，(7.27) の第一式を得る。つぎに，

$$T_t^{(n)} f(\bar{x}) = \int_0^t \Phi^{(n)}(dr)\, T_{t-r}^{(0)} f(\bar{x})$$

$$= \int_0^t d_r \left(\int_0^r \Phi^{(n-k)}(dv)\, \Phi^{(k)}(r-v) \right) T_{t-r}^{(0)} f(\bar{x})$$

$$= \int_0^t \Phi^{(n-k)}(dv) \int_v^t d_r \left(\Phi^{(k)}(r-v) \right) T_{t-r}^{(0)} f(\bar{x})$$

$$= \int_0^t \Phi^{(n-k)}(dv) \int_0^{t-v} \Phi^{(k)}(dr)\, T_{t-r-v}^{(0)} f(\bar{x})$$

$$= \int_0^t \Phi^{(n-k)}(dv)\, T_{t-v}^{(k)} f(\bar{x})$$

となり，(7.27) の第二式を得る。

つぎに，(7.27) の第三式を示そう。(7.27) の第二式により

$$T_v^{(0)} T_{t-v}^{(n)} f(\bar{x}) = T_v^{(0)} \left\{ \int_0^{t-v} \Phi(dr)\, T_{t-v-r}^{(n-1)} f(\circ) \right\} (\bar{x})$$

$$= \int_0^{t-v} T_v^{(0)} \Phi(dr)\, T_{t-r-v}^{(n-1)} f(\bar{x})$$

$$= \int_0^{t-v} d_r \Phi((r+v))\, T_{t-r-v}^{(n-1)} f(\bar{x}) \quad , \qquad (\text{Lemma } 7.3,\ (3^\circ) \text{ により}),$$

$$= \int_v^t \Phi(dr)\, T_{t-r}^{(n-1)} f(\bar{x})$$

となる。最後に，(7.27) の終りの式を示そう。$n=1$ の時は Lemma 7.3 (3°) である。$n \geqq 1$ の時成りたつとして induction を用いよう。

$$\Phi^{(n+1)}(t) f(\bar{x}) = \int_0^t \Phi(dr)\, \Phi^{(n)}(t-r) f(\bar{x}) \qquad ((7.27) \text{ の第 } 1 \text{ 項})$$

$$= \int_0^s \Phi(dr)\, \Phi^{(n)}(t-r) f(\bar{x}) + \int_s^t \Phi(dr)\, \Phi^{(n)}(t-r) f(\bar{x})$$

ここで induction の仮定を用いると，

$$= \int_0^s \Phi(dr) \left\{ \Phi^{(n)}(s-r) + \sum_{j=1}^{n} T_{s-r}^{(n-j)} \Phi^{(j)}(t-s) \right\} f(\bar{x}) + \int_s^t \Phi(dr)\, \Phi^{(n)}(t-r) f(\bar{x}),$$

$$= \Phi^{(n+1)}(s) f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^s \Phi(dr)\, T_{s-r}^{(n-j)} \Phi^{(j)}(t-s) f(\bar{x}) + \int_s^t \Phi(dr)\, \Phi^{(n)}(t-r) f(\bar{x}),$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} \quad \text{とおく.}$$

(7.27) の第２式により

$$\mathrm{II} = \sum_{j=1}^{n} T_s^{(n-j+1)}\, \Phi^{(j)}(t-s) f(\bar{x})$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II　1966年
P141-247

$$\mathrm{III} = \int_0^{t-s} d_r(\Phi(r+s))\,\Phi^{(n)}(t-s-r)\,f(\bar{x})$$
$$= \int_0^{t-s} T_s^{(0)}\Phi(dr)\,\Phi^{(n)}(t-s-r)f(\bar{x}) \qquad (Lemma\ 7.3\ \text{の}\ (3^\circ)\ \text{により})$$
$$= T_s^{(0)}\Big[\int_0^{t-s}\Phi(dr)\,\Phi^{(n)}(t-s-r)\,f\Big](\bar{x})$$
$$= T_s^{(0)}\Phi^{(n+1)}(t-s)f(\bar{x}) \qquad ((7.25)\ \text{により})$$

故に

$$\mathrm{II} + \mathrm{III} = \sum_{j=1}^{n+1} T_s^{(n-j+1)}\,\Phi^{(j)}(t-s)\,f(\bar{x})$$

故に(7.27)の最後の式が $n+1$ に対して成りたつ。　　　　q.e.d.

<u>*Lemma* 7.5</u>　任意の $f \in \mathcal{B}_0(S)$ に対して,

$\sum_{n=1}^{N} T_t^{(n)} f(\bar{x})$ は $N \to \infty$ のとき絶対収束する。

[<u>*Proof*</u>]

$$|T_t^{(1)}f(\bar{x})| = \Big|\int_0^t \Phi(dv)\,T_{t-v}^{(0)}\,f(\bar{x})\Big|$$
$$\leq \int_0^t\int_S\int_S |\Phi(dv,\bar{x},d\bar{y})\,T^{(0)}(t-v,\bar{y},d\bar{z})\,f(\bar{z})|$$
$$= \int_0^t\int_S |\Phi|(dv,\bar{x},d\bar{y})\,\|T^{(0)}(t-v,\bar{y},\cdot)\|\ \|f\| \qquad {}^{*1)}$$
$$\leq \int_0^t\int_S |\Phi|(dv,\bar{x},d\bar{y})\,(1-\|\Phi(t-v,\bar{y},\cdot)\|)\,\|f\|,$$
$$\leq \Big[\|\Phi(t,\bar{x},\cdot)\| - \int_0^t\int_S |\Phi|(dv,\bar{x},d\bar{y})\,\|\Phi(t-v,\bar{y},\cdot)\|\Big]\,\|f\|$$

故に $\|f\| \leq 1$ としておけば

$$|T_t^{(1)}f(\bar{x})| \leq \Big[\|\Phi(t,\bar{x},\cdot)\| - \int_0^t\int_S |\Phi|(dv,\bar{x},d\bar{y})\,\|\Phi(t-v,\bar{y},\cdot)\|\Big]$$

つぎに

$$|T_t^{(2)}f(\bar{x})| = \Big|\int_0^t \Phi(dv)\,T_{t-v}^{(1)}\,f(\bar{x})\Big|, \qquad ((7.27)\ \text{により})$$

---

*1)　$|\Phi|(dv,\bar{x},d\bar{y})$ は Φ の $d\bar{y}$ による *variation* より *induce* された *measure* を与える。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$\leq \int_0^t \int_S |\Psi|(dv,\ \bar{x},\ d\bar{y})\ |T_{t-v}^{(1)} f(\bar{y})|$$

$$\leq \int_0^t \int_S |\Psi|(dv,\ \bar{x},\ d\bar{y}) \Big[\|\Psi(t-v,\ \bar{y},\ \cdot)\| - \int_0^{t-v}\int_S |\Psi|(dv_1, \bar{y}, d\bar{y}_1) \|\Psi(t-v-v_1, \bar{y}_1, \cdot)\| \Big]$$

$$= \int_0^t \int_S |\Psi|(dv,\ \bar{x},\ d\bar{y}) \|\Psi(t-v,\ \bar{y},\ \cdot)\| - \int_0^t\int_S |\Psi|(dv, \bar{x}, d\bar{y}) \int_0^{t-v}\int_S |\Psi|(dv_1, \bar{y}, d\bar{y}_1)\cdot \|\Psi(t-v-v_1, \bar{y}_1, \cdot)\|$$

以下順次 *induction* を用いて $|T_t^{(n)} f(\bar{x})|$ を計算し加えれば,

$$\sum_{n=0}^{N} |T_t^{(n)} f(\bar{x})| \leq \|T^{(0)}(t, \bar{x}, \cdot)\| + \|\Psi(t, \bar{x}, \cdot)\| - \int_0^t \int_S^{t-v_1} \cdots \int_0^{t-v_1-\cdots-v_{N-1}} \int_S \cdots \int_S |\Psi|(dv_1, \bar{x}, d\bar{y}) \cdots |\Psi|(dv_{N-1}, \bar{y}_{N-1}, d\bar{y}_N) \times \|\Psi(t-v_1-\cdots-v_N,\ \bar{y}_N,\ \cdot)\|$$

$$\leq \|T^{(0)}(t, \bar{x}, \cdot)\| + \|\Psi(t, \bar{x}, \cdot)\| \leq 1 \qquad (\text{Lemma 7.3, } (3^\circ) \text{ により})$$

従って

$$\sum_{n=0}^{N} T_t^{(n)} f(\bar{x})$$

は絶対収束する。 $\left|\sum_{n=0}^{\infty} T_t^{(n)} f(x)\right| \leq 1$. q.e.d.

定義より,

$$\Psi^{(n)}(t) f(\bar{x}) = \int_S \Psi^{(n)}(t, \bar{x}, d\bar{y}) f(\bar{y}), \quad T_t^{(n)} f(\bar{x}) = \int_S T^{(n)}(t, \bar{x}, d\bar{y}) f(\bar{y}),$$

の形の積分表現が出来る．更に上の *Lemma* により $f \in \mathbb{C}_0(S)$ に対して,

(7.28) $$T_t f(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} T_t^{(n)} f(\bar{x}), \qquad \bar{x} \in S,$$

とおくことが出来，しかもつぎの形の積分表現が出来る：

(7.29) $$T_t f(\bar{x}) = \int_S T(t, \bar{x}, d\bar{y}) f(\bar{y}) .$$

[<u>*Remark*</u>] これまでの議論では，$f \in \mathbb{B}_0(S)$ に対して，$T_t f \in \mathbb{B}_0(S)$ は言えているが，$f \in \mathbb{C}_0(S)$ としても $T_t f \in \mathbb{C}_0(S)$ は示されていない。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

Lemma 7.6 (7.28) で定義した $T_t f(\bar{x}) = u_t(\bar{x})$ は *Moyal equation* の解である。

[*Proof*] これは証明というより，みたすように T_t を定義したと言うべきことで，つぎのようにして示される。

$$\int_0^t \Phi(dr) T_{t-r} f(\bar{x}) = \int_0^t \Phi(dr) \sum_{n=0}^{\infty} T_{t-r}^{(n)} f(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \Phi(dr) T_{t-r}^{(n)} f(\bar{x})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} T_t^{(n+1)} f(\bar{x}) = T_t f(\bar{x}) - T_t^{(0)} f(\bar{x})$$

故に
$$T_t f(\bar{x}) = T_t^{(0)} f(\bar{x}) + \int_0^t \Phi(dr) T_{t-r} f(\bar{x})$$

となり $u_t(\bar{x})$ が *Moyal equation* の初期条件 f に対する解であることがわかる。 *q. e. d.*

Lemma 7.7 (7.29) で定義した $T(t, \bar{x}, d\bar{y})$ は *Chapman-Kolmogorov* の方程式をみたし，$\|T(t, \bar{x}, \cdot)\| \leq 1$ である。

[*Proof*] *total variation* が 1 を越えないことは，*Lemma* 7.5 の証明の途中のことと，定義より明らか。 $f \in \mathbb{B}_0(S)$ に対して，

$$T_t^{(n)} f(\bar{x}) = \int_0^t \Phi^{(n)}(dr) T_{t-r}^{(0)} f(\bar{x})$$

$$= \int_0^s \Phi^{(n)}(dr) T_{t-r}^{(0)} f(\bar{x}) + \int_s^t \Phi^{(n)}(dr) T_{t-r}^{(0)} f(\bar{x})$$

上式の右辺の第1項をⅠ，第2項をⅡとする。

Lemma 7.4 の (7.27) の最後の式より

$$\mathrm{II} = \int_s^t \sum_{j=1}^{n} T_s^{(n-j)} \Phi^{j} (d_r(r-s)) T_{t-r}^{(0)} f(\bar{x})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} T_s^{(n-j)} \int_0^{t-s} \Phi^{(j)}(dr) T_{t-s-r}^{(0)} f(\bar{x})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} T_s^{(n-j)} T_{t-s}^{(j)} f(\bar{x})$$

一方

$$\mathrm{I} = \int_0^s \Phi^{(n)}(dr) T_{s-r}^{(0)} T_{t-s}^{(0)} f(\bar{x}) = T_s^{(n)} T_{t-s}^{(0)} f(\bar{x})$$

従って

Sem. on Probab.
Vol.23-II　1966年
P141-247

(7.26)

$$T_t^{(n)} f(\bar{x}) = \sum_{j=0}^{n} T_s^{(n-j)} T_{t-s}^{(j)} f(\bar{x})$$

である。故に,

$$T_t T_s f(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_t^{(n)} T_s^{(m)} f(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} T_t^{(k)} T_s^{(m)} f(\bar{x})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} T_t^{(k)} T_s^{(n-k)} f(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{t+s}^{(n)} f(\bar{x}) = T_{t+s} f(\bar{x})$$

q.e.d.

Lemma 7.8　(7.28) で定義した T_t は Branching semi-group である。

[Proof]　$T_t^{(n)}$, $\Psi^{(n)}$ の定義は (2.38), (2.39), (2.40) と全く同様であり, 第2章と全く同様の性質をもっている。したがって Lemma 2.8 がなりたつ。すなわち　$f \in C^*(S)$ に対し

$$T_t^{(r)} \hat{f}(\bar{x}) = \sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r)} \prod_{j=1}^{n} T_t^{(r_j)} \hat{f}(x_j), \quad (x_1, \cdots, x_n) \in \bar{x}, \quad \bar{x} \in S^n,$$

従って

$$T_t \hat{f}(\bar{x}) = \sum_{r=0}^{\infty} T_t^{(r)} \hat{f}(\bar{x}) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{(r_1,\cdots,r_n)}^{(r)} \prod_{j=1}^{n} T_t^{(r_j)} \hat{f}(x_j)$$

$$= \sum_{r_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=0}^{\infty} \prod_{j=1} T_t^{(r_j)} \hat{f}(x_j) = \prod_{j=1}^{n} T_t \hat{f}(x_j) \ .$$

$n \geqq 1$ に対して

$$T_t^{(n)} \hat{f}(\partial) = 0,$$

であることと, $T_t^{(0)} \hat{f}(\partial) = 1$ に注意すれば,

$$T_t \hat{f}(\partial) = 1 \quad .$$

また　$T_t^{(n)} \hat{f}(\Delta) = 0$,　$n = 0, 1, 2, \cdots$ である。故に $T_t \hat{f}(\Delta) = 0$.
故に

$$T_t \hat{f}(\bar{x}) = \widehat{T_t \hat{f}_{|S}}(\bar{x})$$

である。　　q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

Lemma 7.9　$f \in \mathbb{C}_0(S)$ に対し，T_t は強連続である。すなわち

(7.30)　$$\lim_{t \downarrow 0} \| T_t f - f \| = 0 \quad ,$$

がなりたつ。

[Proof]　まず $f, g \in C^*(s)$ としよう。そのとき，Lemma 3.2 によって

$$\| \hat{f} - \hat{g} \|_S \leq c \| f - g \|_s$$

となる。

従って $f \in C^*(s)$ に対し，

$$\| T_t \hat{f} - \hat{f} \| = \| \widehat{T_t \hat{f}|_s} - \hat{f} \| \leq c \| T_t \hat{f}|_s - f \|$$

$T_t \hat{f}$ は Proposition 7.1 により Skorohod equation の解であるから，

$$\| T_t \hat{f}|_s - f \| \leq \| T_t^0 f - f \| + \sup_x \| K(t, x, \cdot) \|$$

仮定より，$\| T_t^0 f - f \|$，$\sup_x \| K(t, x, \cdot) \|$ は $t \downarrow 0$ の時 0 に収束する。故に

$$\| T_t \hat{f} - \hat{f} \| \to 0 \qquad (t \downarrow 0)$$

である。後は Lemma 2.1，(iii) より結論を得る。

以上を綜合してつぎのことが言える。

Theorem 7.1　system $\{T_t^0, K(t), \mu_n\}$ は Definition 7.2 で与えられたものとする。そのとき，(7.28)，(7.29) で定義される T_t，$T(t, \bar{x}, d\bar{y})$ が存在し，つぎの条件をみたす。

(i) $T(t, \bar{x}, d\bar{y})$ は固定した $(t, \bar{x})$ に対して，$d\bar{y}$ について total variation $\| T(t, \bar{x}, \cdot) \|$ が $\| T(t, \bar{x}, \cdot) \| \leq 1$ をみたす signed measure である。

(ii) $\{T_t\}$ は Branching semi-group である。

(iii) $\{T_t\}$ は $\mathbb{C}_0(S)$ 上で強連続である。

(iv) $f \in \mathbb{C}_0(S)$ に対して，$u_t(\bar{x}) = T_t f(\bar{x})$ は初期条件 f の Moyal equation の解である。

(v) 特に T_t^0，$K(t)$，μ_n が positive な作用素ならば，T_t もまた positive である。

(vi) もし任意の有界な両可測関数 $v(t, x)$ に対し，

(7.31)　$$\int_0^t \int_s K(\cdot, dr d\bar{y}) v(t-r, y) \in \mathbb{C}(s)$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

ならば，T_t は $C_0(S)$ 上の semi-group である。すなわち，$T_t f(\cdot) \in C_0(S)$，$f \in C_0(S)$ である。

[Proof] (i), (ii), (iii), (iv) は既に Lemma の形で示した。(v) は定義より明らか。(vi) は $T_t f(\bar{x}) = u_t(\bar{x})$ が Moyal equation の解であること，$T_t^0 f \in C_0(S)$，$F[u_t(\cdot)](x)$ は有界であることに注意すればよい。

[Remark] Theorem 2.1 の仮定の下で，branching Markov process の存在が言えるが，更に (7.31) がみたされておればそれは Hunt process になるようにとれる。system $\{T_t^0, K(t), \mu_n\}$ が第３章の仮定 (3.2) をみたすときも T_t は $C_0(S)$ 上の強連続な semi-group になり，したがって Hunt 過程が対応する（第３章）。

つぎに，Moyal equation の解が unique になるための１つの充分条件を与えておこう。

Proposition 7.2　任意の $T>0$ に対し

(7.32) $$\sup_{t\le T}\ \sup_{\bar{x}\in S^n} \|\Phi(t,\bar{x},\cdot)\| < 1, \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

をみたすならば，有界でかつ，条件

(7.33) $$\lim_{\bar{x}\to\Delta}\ \sup_{t\le T} |u(t,\bar{x})| = 0 \quad {}^{*1)}$$

をみたす Moyal equation の解は unique である。

[Proof] φ_t が有界で

$$\lim_{\bar{x}\to\Delta}\ \sup_{t\le T} |\varphi_t(\bar{x})| = 0$$

をみたし，

$$\varphi_t(\bar{x}) = \int_0^t \Phi(dr)\,\varphi_{t-r}(\bar{x})$$

ならば $\varphi_t(\bar{x}) \equiv 0$ なることを言えば充分である。

$$\sup_{\bar{x}\in S^n} |\varphi_t(\bar{x})| \le \sup_{\bar{x}\in S^n} \int_0^t \|\Phi(dr,\bar{x},\cdot)\| \sup_{\bar{x}\in S} |\varphi_{t-r}(\bar{x})|$$

であるから，

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$\sup_{t\le T}\sup_{\bar{x}\in S^n}|\varphi_t(\bar{x})|\le \sup_{t\le T}\sup_{\bar{x}\in S^n}\|\Phi(t,\bar{x},\cdot)\|\sup_{t\le T}\sup_{\bar{x}\in S}|\varphi_{t-r}(\bar{x})|$$

$$<\sup_{t\le T}\sup_{\bar{x}\in S}|\varphi_{t-r}(\bar{x})|$$

これは任意のnに対してS^nでは$\sup_{t\le T}\sup_{\bar{x}\in S}|\varphi_{t-r}(\bar{x})|$を*attain*しないことを意味し，もし$\varphi_t(\bar{x})>0$の点があれば（7.33）に矛盾する。従って$|\varphi_t(\bar{x})|\equiv 0$である。　　q.e.d.

[Remark]　$\inf_{t=T}\inf_{x\in S}\|T^\circ(t,x,\cdot)\|>0$ ならば（7.32）がみたされる。そのことについては*Lemma* 7.3 に注意すればよい。

また*Theorem* 7.1 で存在が示された*Branching semi-group* T_t に対しては，$f\in C^*(S)$に対し，任意の$0<T<\infty$に対し，$\sup_{t\le T}\sup_{x\in S}|T_t\hat{f}(x)|<1$ならば

$$u(t,\bar{x})=T_t\hat{f}$$

は上の*Proposition*の条件（7.33）をみたしている。というのは，

$$\sup_{\bar{x}\in S^n}|u(t,\bar{x})|=\sup_{\bar{x}\in S^n}|\prod_{j=1}^{n}T_t\hat{f}(x_j)|\le\|T_t\hat{f}|_S\|^n\to 0,\quad(n\to\infty),$$

である。

<u>Corollary</u>　条件（7.32）がみたされたとする。*Branching semi-group*が存在し，初期値fの*Moyal equation*の解で$f\in C^*(S)$に対して$\sup_{t\le T}\sup_{x\in S}|T_t\hat{f}(x)|<1$，$0<{}^{\forall}T<\infty$，をみたすならば，それは*Theorem* 7.1 で構成された*Branching semi-group*と一致する。

[<u>Proof</u>]　上の*Remark*に注意すれば明らか。　　q.e.d.

[<u>Remark</u>]　次の§の最後の*Corollary*を参照。

なお，表題にのべた"最小"の意味は，$\{T_t, K(t), \mu_n\}$が*positive*ならば，T_tも*positive*になって，任意の$f\in B_0(S)$，$0\le f$に対して，それを初期値とする*Moyal equation*の任意の解$u(t,\bar{x})$をとって来ると

---

*1)　Sが*compact*であるので，$\bar{x}\to\Delta$とは$\bar{x}$が任意のnに対し集合$\bigcup_{k=0}^{n}S^k$から出て行くことである。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

(200)

$$T_t f(\bar{x}) \leq u(t, \bar{x}) \qquad \bar{x} \in S$$

となることを意味する。

§7.3 Skorohod equation の解

§7.1 で Moyal equation の解 $T_t f$ があって，T_t が Branching semi-group ならば，$T_t\hat{f}(\bar{x})$ は Skorohod equation の解であることを注意した。この節では，逆に Skorohod equation の解から Moyal equation の解を構成することを考える。

Lemma 7.10　$u_t(x)$ が f に対する Skorohod equation の解ならば，

(7.34)
$$\widehat{T_s^\circ u_{t-s}}(\bar{x}) = \widehat{T_t^\circ f}(x)$$

$$+\int_s^t \langle T_r^\circ u_{t-r} | \int_{\mathcal{S}} K(\cdot\, ; dr dy) F[u_{t-r}](y) \rangle (\bar{x}), \quad \bar{x} \in S,$$

をみたす。

[Proof]　$\bar{x} = \partial, \Delta$ の時は明らかである。induction によって示そう。$n=1$ の時は，Skorohod equation の解であることから，

$$u_{t-s} = T_{t-s}^\circ f + \int_0^{t-s}\int_{\mathcal{S}} K(\cdot\, ; dr dy) F[u_{t-s-r}](y)$$

である．故に　$x \in \mathcal{S}$ ならば

$$T_s^\circ u_{t-s}(x) = T_t^\circ f(x) + \int_0^{t-s} T_s^\circ K(dr) \cdot F[u_{t-s-r}](x) \qquad {}^{*1)}$$

$$= T_t^\circ f(x) + \int_s^t K(dr)\, F[u_{t-s}](x)$$

となり，(7.34) が成りたつ。$n \geqq 2$ で，いま (7.34) が $n-1$ の時，すなわち $\bar{x} \in \mathcal{S}^{n-1}$ に対して成りたつとする．$\bar{x} \in \mathcal{S}^n$, $\bar{x} \ni (x_1, \cdots, x_n)$ に対して

$$\widehat{T_s^\circ u_{t-s}}(\bar{x}) = (T_t^\circ f(x_1) + \int_s^t K(dr) F[u_{t-s}](x_1)) \prod_{j=2}^{n} (T_s^\circ u_{t-s})(x_j)$$

$$= (T_t^\circ f(x_1) + \int_s^t K(dr) F[u_{t-s}](x_1))(\widehat{T_t^\circ f}(\bar{x}') + \int_0^t \langle T_r^\circ u_{t-r} | K(dr) \cdot F[u_{t-r}] \rangle (\bar{x}'))$$

---

*1)　以下記号の簡単化のため $d_r K(r) f(x) = K(dr) f(x)$ なる記号を用いる。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

但し　$\bar{x}' \ni (x_2, \cdots, x_n)$ とおく。

$$= T_t^\circ f(\bar{x}) + T_t^\circ f(x_1)\int_s^t \langle T_r^\circ u_{t-r} | K(dr)\cdot F[u_{t-r}]\rangle(\bar{x}')$$

$$+\int_s^t K(dr)\, F[u_{t-s}](x_1)\, T_t^\circ f(\bar{x}')$$

$$+\int_s^t K(dr) F[u_{t-s}](x_1)\int_s^t \langle T_r^\circ u_{t-r} | K(dr)\cdot F[u_{t-r}]\rangle(\bar{x}')$$

上の最後の式の各項を順にⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳとおく。

$$\mathrm{II} = \sum_{k=2}^{n}\int_s^t K(dr)\cdot F[u_{t-r}](x_k)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(T_r^\circ u_{t-r})(x_j)$$

$$-\sum_{k=2}^{n}\int_s^t K(dr) F[u_{t-r}](x_k)\int_r^t K(dv) F[u_{t-v}](x_1)\prod_{\substack{j=2\\ j\neq k}}^{n}(T_r^\circ u_{t-r})(x_j)$$

$$= \mathrm{II}_1 - \mathrm{II}_2 \quad \text{とする。}$$

induction の仮定を用いると，

$$\mathrm{III} = \int_0^t K(dr)\, F[u_{t-r}](x_1)\prod_{j=2}^{n}(T_r^\circ u_{t-r})(x_j)$$

$$-\int_0^t K(dr)\, F[u_{t-r}](x_1)\left\{\sum_{k=2}^{n}\int_r^t K(dv) F[u_{t-v}](x_k)\prod_{\substack{j=2\\ j\neq k}}^{n}(T_v^\circ u_{t-v})(x_j)\right\}$$

$$\equiv \mathrm{III}_1 - \mathrm{III}_2$$

とする.

$$\mathrm{II}_1 + \mathrm{III}_1 = \int_s^t \langle T_r^\circ u_{t-r} | K(dr)\cdot F[u_{t-r}]\rangle(\bar{x})$$

一方 $-\mathrm{II}_2$ の積分の順序を交換して，$-\mathrm{III}_2$，Ⅳ と加えると

$$-\mathrm{II}_2 - \mathrm{III}_2 + \mathrm{IV} = 0$$

<u>Theorem 7.2</u>　　$u_t(x)$ が初期値 $f(\in \mathbb{C}^*(S))$ の Skorohod equation の解ならば，$\widehat{u_t}(\bar{x})$ は初期値 $\hat{f}$ の Moyal equation の解である。

[<u>Proof</u>]　Lemma 7.10 より (7.34) が成立つ。そこで $s=0$ とおけば

$$\widehat{u_t}(\bar{x}) = \widehat{T_t^\circ f}(\bar{x}) + \int_0^t \langle T_r^\circ u_{t-r} | K(dr)\, F[u_{t-r}]\rangle(\bar{x})$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$= \widehat{T_t^\circ f}(\bar{x}) + \int_0^t \Psi(dr)\widehat{u_{t-r}}(\bar{x}), \qquad ((7.14)\text{ による})$$

よって結論が得られる。 q.e.d.

<u>Corollary</u> $\inf_{t\le T}\inf_{x\in S}\|T^\circ(t,x,\cdot)\|>0$, $0<T<\infty$ がみたされているとする。そのとき $f\in\mathbb{B}^*(S)$, $\|f\|<1$ なる f に対する Skorohod equation の解 $u(t,x)$ で $\sup_{0\le t\le T}\|u(t,\cdot)\|<1$ なるものは唯1つである。

[<u>Proof</u>] もし2つあったとするとTh.2.7.より作ったMoyal equation の解は異なる2つの解になるが，それは，Proposition 7.2 とその後の注意に矛盾する。 q.e.d.

なお，我々はすでに第3章で Skorohod equation が初期待 f, $\|f\|<1$ に対して unique な解をもつ条件をあたえた。それをふりかえってみると，T_t° がある S 上の正の contraction semi-group $U_t=\exp t,\mathcal{O}\!\mathcal{J}$ より $T_t^\circ=\exp\{t(\mathcal{O}\!\mathcal{J}-k.)\}$ として得られ *1) さらに k が有界であればよかった。上の Corollary はこれの一般化になっている。

[<u>Remark</u>] 上の事実は age-dependent process に対しては Harris [1], Chap. VI, Th. 9.4 で証明されている。

前節の結果を用いると Skorohod equation があたえられたとき，それに対応する branching semi-group の存在がわかる。

いま，任意の $f\in\mathbb{C}^*(S)$ に対し初期値 f の Skorohod equation の unique な解 $u(t;f)$ が存在したとする。定理7.1で構成された T_t に対し $u(t,x)=T_t\hat{f}|_S(x)$, $f\in\mathbb{C}^*(S)$ は Skorohod equation の解であるから，$u(t,x)\equiv u(t;f)(x)$ となる。T_t の semi-group property より

$$(7.35) \qquad u(t+s\,;f)=u(t\,;u(s\,;f))$$

がなりたつ。もし $u(t;f)\in\mathbb{C}^*(S)$ ならば

---

*1) 確率論的にいえば "T_t° に対応する Markov process は U_t に対応する Markov 過程の $e^{-\int_0^t k(X_s)ds}$-subprocess である" こと。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$T_t \hat{f}(\bar{x}) = \widehat{u(t;f)}(\bar{x}) \in \mathbb{C}_0(S')$$

となる。

以上まとめて

Theorem 7.3　任意の $f \in \mathbb{C}^*(\mathcal{S})$ に対し Skorohod equation (7.20) が $u(t;f) \in \mathbb{C}^*(\mathcal{S})$ なる unique な解をもつとする。そのとき $\mathbb{C}_0(S')$ 上の強連続な半群 T_t で

$$(7.36) \qquad T_t f(\bar{x}) = \widehat{u(t;f)}(\bar{x})$$

となるものが唯1つ存在する。T_t は実は定理7.1で構成された半群と一致する。したがってもし system (T_t°, K, μ_n) が positive ならば T_t も positive で T_t に対応する branching Markov process は Hunt process である。

以上の議論は前節の結果を用い Moyal equation を介在さして考えてきたわけであるが，Skorohod equation から直接 branching semi-group を構成することも出来る．以下でそれを論じよう。

Lemma 7.11　Skorohod equation が任意の $f \in \mathbb{C}^*(\mathcal{S})$ に対して unique な解 $u_t(\cdot) \in \mathbb{C}^*(\mathcal{S})$ をもち，任意の $T>0$ に対し $\sup_{0 \le t \le T} \|u_t(\cdot)\| < 1$ ならば (7.35) がなりたつ。

[Proof]　初期値 f の Skorohod equation の解を $u(t;f)(x)$ と書く。

$$u(t+s;f)(x) = T_{t+s}^\circ f(x) + \int_0^{t+s} K(dr)\, F[u(t+s-r;f)](x)$$

こゝで

$$\int_t^{t+s} K(dr) F[u(t+s-r;f)](x) = \int_0^s (d_r K(r+t)) \cdot F[u(s-r;f)](x)$$

$$= \int_0^s T_t^\circ K(dr)\, F[u(s-r;f)](x)$$

であることに注意すると，

$$u(t+s,f)(x) = T_t^\circ \left\{ T_s^\circ f + \int_0^s K(dr) F[u(s-r;f)] \right\}(x)$$

$$+ \int_0^t K(dr) F[u(t+s-r;f)](x)$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$= T_t^\circ[u(s;f)](x) + \int_0^t K(dr)\, F[u(t+s-r;f)](x)$$

となる。仮定の解の uniqueness より

$$u(t+s;f)(x) = u(t;u(s,f))(x)$$

が成りたつ。 q. e. d.

さらに上の Lemma の unique な解 $u(t:f)$ が

(7.37) $$u(t:f)(x) = \int T(t,x,d\bar{y})\hat{f}(y), \qquad x \in \mathcal{S}, \quad f \in \mathcal{C}^*(\mathcal{S})$$

（但し T は $\|T\|(t,x,\cdot) \le 1$ なる $S-\{\Delta\}$ 上の signed measure）

とあらわされとしよう。このとき Lemma 3.1 によって

$$\widehat{u(t;f)}(\bar{x}) = \int T(t,\bar{x},d\bar{y})\hat{f}(\bar{y}) \qquad \bar{x} \in S-\{\Delta\}$$

となるような $S-\{\Delta\}$ 上の signed measure（$\|T\|(t,\bar{x},\cdot) \le 1$）が唯1つ存在する。そこで $f \in \mathcal{C}_0(S)$ に対し

$$\boldsymbol{T}_t f(\bar{x}) = \int_{S-\{\Delta\}} T(t,\bar{x},d\bar{y})\, f(y)$$

とおく。Lemma 7.11 によって $f \in \mathcal{C}^*(\mathcal{S})$ に対しては

$$\boldsymbol{T}_t \hat{f}(\bar{x}) \in \mathcal{C}_0(S) \qquad かつ \qquad \boldsymbol{T}_{t+s}\hat{f} = \boldsymbol{T}_t \boldsymbol{T}_s \hat{f}$$

となる。又

$\|\boldsymbol{T}_t \hat{f} - \hat{f}\|_S \longrightarrow 0$ も前と同様にしてしめせる。（Lemma 7.9 の証明をみよ）。 すると Lemma 2.1, (iii) により $\boldsymbol{T}_t$ は $\mathcal{C}_0(S)$ 上の強連続な contraction semi-group で、定義のしかたから branching semi-group であることは明らかである。

この構成を次のような特別な場合に実行してみよう。第3章と記号をあわせるため

$$\Pi(x,d\bar{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(x,d\bar{y}) \qquad とおく。$$

[仮定] system (T_t°, K, Π) は第3章の仮定 [3.2] をみたす。すなわち，T_t°, K, Π はすべて positive な kernel であたえられ *1)

1°) $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ 上の正 かつ $U_t 1 = 1$ なる強連続な半群 $U_t = \exp\{t, \mathcal{G}\}$ が

---

*1) このことは必ずしも必要でないが事情を簡単にするためそう仮定した。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

存在し $T_t^0 = exp\{t,(\mathcal{G}-k\cdot)\}$

$$K(x; dsdy) = T_s^0(x,dy)k(y)ds$$

とあらわされる。ここで $k \in \mathbb{C}(\mathcal{S})^+$ である。

2°) $F[x;f] = \int \Pi(x,d\bar{y})\hat{f}(\bar{y})$, $f \in \mathbb{C}_1^*(\mathcal{S})$ とおいて

$$F[x;f] \in \mathbb{C}(\mathcal{S})$$

このとき すでに第3章でのべたように $f \in \mathbb{C}^*(\mathcal{S})$ に対し Skorohod equation (7.20)の unique な解 $u(t;f)$ が存在し $\sup_{0\le t<T}\|u(t;f)\| < 1$ であった。したがって上の構成ができるためには (7.37)の表現ができればよいが，それは，次のようにしてわかる。第3章§2，Prop. 3.7 の構成で各 $u_k(t;x)$ が

$$u_k(t;x) = \int T_k(t,x,d\bar{y})\hat{f}(y)$$

とあらわされることは Lemma 3.1 よりあきらかである。すると $T_k(t,x,\cdot)$ の Sでの weak limit $\tilde{T}(t,x,\cdot)$ の $S-\{\Delta\}$ への制限 $T(t,x,\cdot)$ に対し (7.37)がなりたつ。

したがって，Skorohod equationの解から出発して直接 branching semi-group が構成できた。*1)

[Remark] この構成は Moyal equation による構成 (Th. 7.1) よりも簡単でしかも branching property は定義自身である。しかし対応する process の構造はわかりにくい。実際 system (T_t^0, K, Π) が本当にこの process の non-branching part X_t^0 から定まる T_t^0, K, 及び branching system Π になっているということすら直接証明するのはそう易しいことではない。一方 Moyal equation による構成はややごたごたして面倒であり，特にその branching property の証明はむづかしいが，その構成法は第6章でのべた path space の構成を平均的な量でかいたことになっているので，その確率論的構造は (path spaceによる構成と対比することによって) よくわかる。この場合には system (T_t^0, K, Π) が構成された branching process に対応するものであることは容易にわかる。

---

*1) Th. 7.3 によってこの semi-group は Th. 7.1 で構成されたものと一致している。その証明の基礎は Th. 7.1 で構成された semi-group が branching property をもつこと (Lemma 7.8) したがって $\mathcal{S}$ への制限が Skorohod eq. をみたすことであった。§7.5 でこのことの別証明を行なう。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

§7.4 Backward equation と Forward equation

すでに第3章で branching process に対応する semi-group の Backward equation と Forward equation を求め，それより semi-linear な微分方程式及び関数汎数の微分方程式を導いた。この節では，その方程式の解の一意性（存在は前節まででのべた結果よりわかっている）を論じ branching semi-group がこれらの方程式で完全に決定されてしまうことを見る。この節では簡単のため system (T_t^0, K, π) は前節終りの［仮定］（第3章の仮定(3.2)と同じ）をみたしているとしよう。前節までの結果で，$\mathbb{C}_0(S)$ 上の正かつ強連続な branching semi-group $\boldsymbol{T}_t$ で $u(t;f)=\boldsymbol{T}_t\hat{f}|_S$, $f\in\mathbb{C}^*(S)$, が (T_t^0, K, π) で定まる Skorohod equation の解となるものが唯1つ存在する。第3章で我々は

$$f\in D(\mathcal{G}^0) \quad かつ \quad 0\le f<1 \quad ならば \quad \hat{f}\in D(\boldsymbol{\mathcal{G}})$$

かつ

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}\hat{f}(\boldsymbol{x})=\langle f\,|\,\mathcal{G}^0 f+k\cdot F[\cdot\,;f]\rangle(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S} \tag{7.38}$$

となることを示した。このことを基礎に我々は $u(t;f)$ $f\in D^0(\mathcal{G})$, $0\le f<1$ が $u(t;f)\in D(\mathcal{G}^0)$ かつ強微分の意味で

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t;f)}{\partial t} = \mathcal{G}^0 u(t;f)+k\cdot F[\cdot\,;u(t;f)] \\ \qquad\qquad = \mathcal{G}u(t;f)+k\{F[\cdot\,;u(t;f)]-u(t;f)\} \\ \|u(t;f)-f\| \longrightarrow 0 \end{cases} \tag{7.39}$$

及び

$$A_{\boldsymbol{x}}(t,f)\equiv \boldsymbol{T}_t\hat{f}(\boldsymbol{x}), \qquad f\in\mathcal{D}^+\cap D(\mathcal{G}^0), \quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}-\{\Delta\}\ ^{*1)}$$

が今

$$C(f)=\mathcal{G}^0 f+k\cdot F[\cdot\,;f] \qquad とおいて \tag{7.40}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_{\boldsymbol{x}}(t,f)}{\partial t} = D_{C(f)}A_{\boldsymbol{x}}(t,f) \\ A_{\boldsymbol{x}}(0^+,f)=\hat{f}(\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{7.41}$$

---

*1) $\mathcal{D}^+=\{f\in\mathbb{C}(S),\ 0<f<1\}$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

をみたすことを示した(§3.3, §3.4)。

そこで一般に

Definition 7.5 与えられた system $\{T_t^\circ, K, \Pi\}$ に対し

$$(7.42)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_t}{\partial t} = \mathcal{G}^\circ u_t + k\cdot F[\cdot\,; u_t] \\ \qquad = \mathcal{G} u_t + k\cdot\{F[\cdot\,; u_t] - u_t\} \\ \| u_t - f \| \to 0 \end{cases}$$

を $\{T_t^\circ, K, \Pi\}$ できまる f を初期値とする backward equation という。

Definition 7.6 与えられた system $\{T_t^\circ, K, \Pi\}$ に対し

$$(7.43)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A(t,f)}{\partial t} = D_{C(f)} A(t,f) \\ A(0+, f) = \alpha(f) \end{cases}$$

を初期値 $\alpha(f)$ の forward equation という。但し $A(t,f)$ は $t>0$, $f\in \mathcal{D}^+$ で定義された関数で (7.43) は $f\in\mathcal{D}^+\cap D(\mathcal{G}^\circ)$ で考える。

Proposition 7.4 backward equation の $0\leq u_t<1$ なる解は unique である。

Corollary $C_0(S)$ 上の positive contraction semi-group T_t' が存在して $T_t'\hat{f}|_S$, $f\in D(\mathcal{G}^\circ)$, が (7.42) の解であることがわかれば $T_t' = \boldsymbol{T}_t$ となる。すなわち backward equation (7.42) は $\boldsymbol{T}_t$ を完全に決定づける。

Proposition の証明 簡単のため $F[\cdot\,; f] = F[f]$ とかくことにする。この命題は semi-linear parabolic equation に関する一意性の特別な場合であるが証明をあたえておこう(例えば Friedman [1] 参照)。

今, $v_t = e^{-\lambda t} u_t$ とおいて書きかえると (7.42) は

$$(7.44)\quad \frac{\partial v_t}{\partial t} - \mathcal{G}^\circ v_t = e^{-\lambda t} k F[u_t] - \lambda v_t$$

となる。u_t^1, u_t^2 を (7.44) の解とし, $\bar{u}_t = u_t^1 - u_t^2$, $\bar{v}_t = e^{-\lambda t}\bar{u}_t$ と書くと

$$(7.45)\quad \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial t} - \mathcal{G}^\circ \bar{v}_t = e^{-\lambda t} k F[u_t^1] - \lambda v_t^1 - e^{-\lambda t} k F[u_t^2] + \lambda v_t^2$$

となる。(3.27) より const. M が存在して

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

(7.46) $\quad |F[u_t^1]-F[u_t^2]| \leq M|u_t^1-u_t^2|$

であることに注意して $\lambda > \|k\| M$ ととる。

さて，$\bar{v}_t$ が $(t_0, x_0) \in [0,T]\times S$ で positive maximum をとったとしよう。maximal principle により

$$\frac{\partial \bar{v}_{t_0}(x_0)}{\partial t} - \mathcal{G}^\circ \bar{v}_t(x_0) \geq 0$$

である。一方(7.45)の右辺は(7.46)により点 (t_0, x_0) で

$$(e^{-\lambda t}\|k\| M-\lambda)(v_{t_0}^1(x_0)-v_{t_0}^2(x_0)) < 0$$

をこえない。これは矛盾である。従って，$\bar{v}_t(x)\equiv 0$，故に $\bar{u}_t(x)\equiv 0$ となって uniqueであることがわかる。 q.e.d.

次に $T_t\hat{f}$ を Forward equation によって決定づけることを考えよう。

Definition 7.7 $\quad t>0$，$f\in\mathcal{D}^+$ で定義された関数 $A(t,f)$ が regular であるとは

(R.1) $\quad \forall r<1$，$\exists C_r>0$，$f,g\in\mathcal{D}^+$，$f,g\leq r$ に対し

$$\sup_t |A(t,f)-A(t,g)| \leq C_r\|f-g\|$$

(R.2) $\quad \forall f\in\mathcal{D}^+\cap D(\mathcal{G}^\circ)$ に対し $\dfrac{\partial A(t,f)}{\partial t}$ が存在し連続

(R.3) $\quad \forall r<1$，$\exists K_r$，$L_r>0$

$\forall f,g\in\mathcal{D}^+\cap D(\mathcal{G}^\circ)$，$f,g\leq r$ に対し

$$\sup_t |D_{c(f)}A(t,f)-D_{c(g)}A(t,g)| \leq K_r\|c(f)\|\|f-g\|+L_r\|c(f)-c(g)\|$$

Proposition 7.5 $\quad$ 各 $\boldsymbol{x}\in S-\{\Delta\}$ に対し

$$A_{\boldsymbol{x}}(t;f)=T_t\hat{f}(\boldsymbol{x}) \qquad f\in\mathcal{D}^+$$

は Def. 7.7 の意味で regular である。

[Proof] $\quad f\in\mathcal{D}^+\cap D(\mathcal{G}^\circ)$ のとき

$$\frac{\partial A_{\boldsymbol{x}}(t,f)}{\partial t} = D_{c(f)}A_{\boldsymbol{x}}(t,f) = T_t(\langle f|c(f)\rangle)(\boldsymbol{x})$$

に注意すると(R.2)はあきらか。(R.1)は第3章，Lemma 3.2から，(R.3)は次のLemmaから直ちにしたがう。

Lemma 7.12 $\quad r<1$ に対し K_r，L_r が存在し $f,g\in\mathcal{D}^+$，$f,g\leq r$，

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$u, v \in \mathbb{C}(\mathcal{S})$ に対し

(7.47) $\qquad \|\langle f|u\rangle - \langle g|v\rangle\|_S \leqq K_r \|u\| \|f-g\| + L_r \|u-v\|$

[Proof] $\quad \bar{x} \in \mathcal{S}^n$ のとき

$$\langle f|u\rangle(\bar{x}) - \langle g|v\rangle(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} \{u(x_k)\prod_{j\neq k} f(x_j) - v(x_k)\prod_{j\neq k} g(x_j)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (u(x_k)-v(x_k))\prod_{j\neq k} g(x_j) + \sum_{k=1}^{n} u(x_k)(\prod_{j\neq k} f(x_j) - \prod_{j\neq k} g(x_j))$$

ところで $\prod_{j\neq k} f(x_j) - \prod_{j\neq k} g(x_j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} g(x_1) \cdots g(x_{j-1})(f(x_j)-g(x_j))f(x_{j+1})\cdots f(x_n)$

(但し x_k はのぞいておく)

となるので

$$\sup_{\bar{x}\in S} |\langle f|u\rangle(\bar{x}) - \langle g|v\rangle(\bar{x})| \leq (\sup_n n r^{n-1})\|u-v\| + (\sup n(n-1)r^{n-2})\|u\|\|f-g\|$$

q. e. d.

Proposition 7.6 $\quad A(t,f),\ f\in\mathcal{D}^+$ は regular で $f\in\mathcal{D}^+\cap D(\mathcal{O}\!\!\mathcal{f}^0)$ で

(7.48)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial A(t,f)}{\partial t} = D_{c(f)}\, A(t,f) \\ A(0+,f) = 0 \end{cases}$$

をみたすなら $A(t,f)\equiv 0$ である.

これより次の2つの系がえられる。

Corollary 1 $\quad \{T_t^0, K, \Pi\}$ からきまる Forward equation (7.43) の regular な解は unique である。[*1] したがって特に

(7.49) $\qquad \alpha(f) = \hat{f}(\bar{x}), \qquad \bar{x}\in S-\{\Delta\}$

のとき, その解 $A_{\bar{x}}(t,f)$ は $T_t\hat{f}(\bar{x})$ と一致する。

このことは T_t が Forward equation から完全に決定づけられることを示している。このことは又次のようにいってもよい。

Corollary 2 $\quad$ 今 T_t' は $\mathbb{B}_0(S)$ 上の正の contraction semi-group で, $f\in \mathbb{C}_0(S)$ に対し強連続:

$$\|T_t' f - f\|_S \longrightarrow 0 \ , \quad (t\downarrow 0)\ {}^{\forall} f\in\mathbb{C}_0(S) \ .$$

---

*1) (7.43)が linear な方程式であることに注意せよ。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

さらに

$$(7.50) \qquad \frac{\partial T_t' \hat{f}}{\partial t} = T_t' \langle f | c(f) \rangle \qquad \forall f \in \mathscr{D}^+ \cap D(\mathfrak{G}^\circ)$$

をみたしたとする。このとき $T_t' \equiv \boldsymbol{T}_t$

なぜならば $A_{\bar{x}}(t,f) \equiv T_t' \hat{f}$, $f \in \mathscr{D}^+$ が (7.49) を初期条件にもつ (7.43)の *regular solution* であることは $\boldsymbol{T}_t \hat{f}(\bar{x})$ のときと全く同様にしめせるから。(§3.4 参照)。

<u>Prop. 7.6 の証明</u> $\mathscr{D}(\mathfrak{G}^\circ)$ は $C(S)$ で *dense* であるから，任意の $f \in \mathscr{D}^+ \cap \mathscr{D}(\mathfrak{G}^\circ)$ に対し $A(t,f) \equiv 0$ を云えばよい。$f \in \mathscr{D}^+ \cap \mathscr{D}(\mathfrak{G}^\circ)$ であるから，初期値 f の *Skorohod equation* の *unique solution* $u(t;f) \in \mathscr{D}^+ \cap \mathscr{D}(\mathfrak{G}^\circ)$ が存在して，

$$(7.51) \qquad \left\| \frac{u(t+h;f) - u(t;f)}{h} - c(u(t;f)) \right\| \to 0 \quad (h \downarrow 0)$$

がなりたつ。但し $c(u(t;f)) = \mathfrak{G}^\circ u(t;f) + kF[u(t;f)]$ である。

このとき

$$(7.52) \qquad \frac{d}{dt} A(t, u(\sigma - t; f)) = 0$$

を示そう。そうすると，(7.48) により $A(0^+, u(\sigma;f)) = 0$ であることとあわせると

$$A(t, u(\sigma - t; f)) = 0$$

であるから，特に $t = \sigma$ として，

$$A(\sigma, f) = 0$$

となり証明は終る。

(7.52) を示そう。

$$\frac{1}{h}\{A(t-h, u(\sigma-t+h;f)) - A(t, u(\sigma-t;f))\}$$

$$= \frac{1}{h}\{A(t-h, u(\sigma-t+h;f)) - A(t, u(\sigma-t+h;f))\}$$

$$+ \frac{1}{h}\{A(t, u(\sigma-t+h;f)) - A(t, u(\sigma-t;f))\}$$

$= \mathrm{I} + \mathrm{II}$ とおく。 $|\mathrm{I} + \mathrm{II}| \to 0$, $(h \to 0)$ を示す。

まず，

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$\left| I + \frac{\partial}{\partial t} A(t, u(\sigma-t; f)) \right| \leq \left| I + \frac{\partial A}{\partial t}(t-\theta h, u(\sigma-t; f)) \right|$$

$$+ \left| \frac{\partial A}{\partial t}(t-\theta h, u(\sigma-t; f)) - \frac{\partial A}{\partial t}(t; u(\sigma-t; f)) \right|$$

$$= I_1 + I_2$$

A が *regular* であることから([R.2]) $I_2 \to 0$ $(h \to 0)$ である. 一方

$$I = -\frac{\partial A}{\partial t}(t-\theta h; u(\sigma-t+h; f)) \quad , \quad (0 < \theta < 1)$$

であるから,

$$\left| I + \frac{\partial A}{\partial t}(t-\theta h, u(\sigma-t; f)) \right|$$

$$= \left| \frac{\partial}{\partial t} A(t-\theta h; u(\sigma-t+h; f)) - \frac{\partial}{\partial t} A(t-\theta h, u(\sigma-t; f)) \right|$$

$$= \left| D_{g_1} A(t-\theta h, u(\sigma-t+h; f)) - D_{g_2} A(t-\theta h, u(\sigma-t; f)) \right|$$

但し, ここで $g_1 = c(u(\sigma-t+h; f))$, $g_2 = c(u(\sigma-t; f))$, である。従って [R,3]により

$$(7.53) \quad \left| I + \frac{\partial A}{\partial t}(t-\theta h, u(\sigma-t; f)) \right|$$

$$\leq K_1^0 \| u(\sigma-t+h; f) - u(\sigma-t; f) \| + K_2^0 \| \mathcal{J}^0 u(\sigma-t+h; f) - \mathcal{J}^0 u(\sigma-t; f) \|$$

となる。ここで K_1, K_2 は h に *depend* しない *const.* である。
ところが

$$\| u(\sigma-t+h; f) - u(\sigma-t; f) \| \to 0 \qquad (h \to 0)$$

$$\| \mathcal{J}^0 u(\sigma-t+h; f) - \mathcal{J}^0 u(\sigma-t; f) \|$$

$$= \| \mathcal{J} T_{\sigma-t+h} \hat{f}|_s - \mathcal{J} T_{\sigma-t} \hat{f}|_s - k \{ F[u(\sigma-t+h; f)] - F[u(\sigma-t; f)] \} \|$$

$$= \| T_{\sigma-t}(T_h \mathcal{J} \hat{f}|_s - \mathcal{J} \hat{f}|_s) - k \{ F[u(\sigma-t+h; f)] - F[u(\sigma-t; f)] \} \|$$

$$\leq \| T_h \mathcal{J} \hat{f} - \mathcal{J} \hat{f} \| + K_3 \| k \| \, \| u(\sigma-t+h; f) - u(\sigma-t; f) \|$$

$$\to 0 \qquad (h \to 0)$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

従って，(7.53) から $\left|\mathrm{I}+\frac{\partial A}{\partial t}(t-\theta h,\ u(\sigma-t\,;f)\right|\to 0$，$(h\to 0)$，故に

$$\left|\mathrm{I}+\frac{\partial A}{\partial t}(t,u(\sigma-t\,;f))\right|\to 0 \quad (h\to 0)\ . \tag{7.54}$$

次に

$$\begin{aligned}\mathrm{II}&=\frac{1}{h}\{A(t,u(\sigma-t+h\,;f))-A(t,u(\sigma-t\,;f)+hg)\}\\&\quad+\frac{1}{h}\{A(t,u(\sigma-t\,;f)+hg)-A(t,u(\sigma-t\,;f))\}\\&=\mathrm{II}_1+\mathrm{II}_2\ ,\quad \text{但し　ここで}\quad g=c(u(\sigma-t\,;f))\end{aligned}$$

Functional derivative の定義から

$$|\mathrm{II}_2-D_g A(t,u(\sigma-t\,;f))|\to 0 \qquad (h\to 0)$$

一方［R.1］により，h に depend しない K_4 が存在して

$$|\mathrm{I}_3|\le\frac{K_4}{h}\|u(\sigma-t+h\,;f)-u(\sigma-t\,;f)-hC(u(\sigma-t\,;f))\|$$

(7.51) より　右辺は $h\to 0$ のとき　0 に収束する．従って

$$|\mathrm{II}-D_g A(t,u(\sigma-t\,;f))|\to 0 \quad (h\to 0) \tag{7.55}$$

(7.48) より　$\frac{\partial A}{\partial t}(t,u(\sigma-t\,;f))=-D_g A(t,u(\sigma-t\,;f))$，$g=c(u(\sigma-t\,;f))$
であるから，(7.54)，(7.55) により

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}+\mathrm{II}|&=\left|\mathrm{I}+\mathrm{II}+\frac{\partial}{\partial t}A(t,u(\sigma-t\,;f))-D_g A(t,u(\sigma-t\,;f))\right|\\&\le\left|\mathrm{I}+\frac{\partial}{\partial t}A(t,u(\sigma-t\,;f))\right|+|\mathrm{II}-D_g A(t,u(\sigma-t\,;f))|\\&\to 0\ ,\quad (h\to 0)\ .\end{aligned}$$

q.e.d.

§7.5　Moyal equation の最小解の branching property の別証明

Moyal equation の最小解についてはすでに §7.2 で構成を与え，それが Branching semi-group であることを示した。その証明には §2.3 の議論を用いた。この節では，前節と同じ条件の下で，Moyal equation の最小解の semi-group の性質を調べて，前節 Prop. 7.6， Cor. 2 の結果に注意すると，

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

その semi-group が Skorohod equation の解から構成した Branching semi-group と一致することがわかり，あわせて $C_0(S)$上の semi-groupであることがわかることになることを示す。結論自体はすでに §7.2 と §7.3 の議論から導かれるものであるが，この節で与える方法は特殊な場合について Harris[1] で行なわれている議論の一般化になっている。Harris [1] が取扱っているのは Sが一点の場合，すなわち $0 \le p_i \le 1$, $p_0 < 1$, $p_1 = 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ と $b > 0$ に対し，$q_i = ib$, $\pi_{ij} = p_{j-i+1}$ とおいたとき，(q_i, π_{ij})-minimal chain は branching process か という問題で，Harris によるその証明は Forward equationの解の一意性にもとづいている。

$\{T_t^0, k, \Pi\}$ は前節と同じである。

§7.2 で与えたように，Moyal equation の最小解を与える semi-group $\tilde{T}_t$ が存在し，（この節では前節の T_t と区別するため $\tilde{T}_t$ と書く）。

$$(7.56) \qquad \tilde{T}_t f(\bar{x}) = T_t^0 f(\bar{x}) + \int_0^t \Phi(dr)\, \tilde{T}_{t-r} f(\bar{x})$$

をみたす。T_t^0 及び $\Phi(dr)$ は §7.1 で定義された。又 $\tilde{T}_t$ は (7.10)，(7.26) の $T_t^{(0)}$, $T_t^{(n)}$ を用いて，

$$\tilde{T}_t f(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} T_t^{(n)} f(x)$$

として得られた。

$\Phi(t)\hat{f}(\bar{x})$ は $\bar{x} \in S - \{\Delta\}$ として

$$(7.57) \qquad \Phi(t)\, \hat{f}(\bar{x}) = \int_0^t ds\, \hat{T}_s^0 (\langle f \mid kF[f] \rangle)(\bar{x})$$

と書かれる．そこで $f \in C^*(S)$ に対し

$$(7.58) \qquad \mu[\hat{f}](\bar{x}) = \langle f \mid kF[f] \rangle (\bar{x})$$

とすれば，それは §7.1 にのべた方法で $C_0(S)$ 上に拡張される。

それを $\mu[f](\bar{x}) = \int \mu(\bar{x}, d\bar{y}) f(\bar{y})$, $f \in C_0(S)$ とする。

従って，kernel $\psi(t, \bar{x}, d\bar{y})$ を

$$(7.59) \qquad \psi(t, \bar{x}, d\bar{y}) = \int_S T^0(t, \bar{x}, d\bar{z})\, \mu(\bar{z}, d\bar{y})$$

で定義すれば，

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

(7.60) $$\Psi(dt)f(\bar{x}) = dt\int_S \psi(t, \bar{x}, d\bar{y})f(\bar{y})$$

である。

kernel $\psi(t, \bar{x}, d\bar{y})$ に *dual* な量として, *kernel* $\psi^*(t, \bar{x}, d\bar{y})$ を導入する。

Definition 7.8

(7.61) $$\psi^*(t, \bar{x}, d\bar{y}) = \int_S \mu(\bar{x}, d\bar{z})T^0(t, \bar{z}, d\bar{y})$$

定義の仕方から明らかに

(7.62) $$\int_S \psi(s, \bar{x}, d\bar{z})T^0(t-s, \bar{z}, d\bar{y}) = \int_S T^0(s, \bar{x}, d\bar{z})\psi^*(t-s, \bar{z}, d\bar{y})$$

がなりたつ。

Proposition 7.8 Moyal equation の minimal semi-group $\widetilde{T}_t$ は

(7.63) $$\widetilde{T}_t f(\bar{x}) = \widetilde{T}_t f(\bar{x}) + \int_0^t ds\, \widetilde{T}_s\left(\int_S \psi^*(t-s, \cdot, d\bar{y})f(\bar{y})\right)(\bar{x})$$

をみたす (dual Moyal equation)。

[Proof] (7.63) を近似するために

$$\widetilde{T}^{(0)}(t, \bar{x}, d\bar{y}) = \hat{T}^0(t, \bar{x}, d\bar{y})$$

$$\widetilde{T}^{(n)}(t, \bar{x}, d\bar{y}) = \int_0^t ds\, \widetilde{T}^{(n-1)}(s, \bar{x}, d\bar{z})\psi^*(t-s, \bar{z}, d\bar{y}) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおくと, (7.62) により

$$\int_S \widetilde{T}^{(n)}(t, \bar{x}, d\bar{y})f(\bar{y}) = T_t^{(n)}f(\bar{x})$$

となる。ここで $T_t^{(n)}$ は Moyal equation の近似列である。従って

$$\widetilde{T}_t f(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} T_t^{(n)}f(\bar{x})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_S \widetilde{T}^{(n)}(t, \bar{x}, d\bar{y})f(\bar{y})$$

であるから, $\widetilde{T}_t$ は (7.63) をみたすことがわかる。

Corollary 特に $f \in \mathbb{C}^*(S)$ に対し $\widetilde{T}_t\hat{f}$ は (dual Skorohod equation)

(7.64) $$\widetilde{T}_t\hat{f}(\bar{x}) = \widehat{T_t^0 f}(\bar{x}) + \int_0^t ds\, \widetilde{T}_s(\langle T_{t-s}^0 f \mid kF[T_{t-s}^0 f]\rangle)(\bar{x})$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

をみたす。

[Proof] (7.58), (7.61)より明らか。

Theorem 7.9 Moyal equation の minimal semi-group $\widetilde{T}_t$ は $f\in \mathcal{C}_0(\mathcal{S})$ に対し強連続で $f\in \mathcal{D}^+\cap\mathcal{D}(\mathcal{G}^0)$ に対し，強微分の意味で「Forward equation」:

$$\frac{\partial \widetilde{T}_t \hat{f}}{\partial t} = \widetilde{T}_t \langle f \mid c(f)\rangle \tag{7.65}$$

をみたす。

[Proof] まず(7.64)より $f\in\mathcal{D}^+$ に対し $\|\widetilde{T}_t\hat{f}-\hat{f}\|\to 0$ $(t\downarrow 0)$。従って，第2章，Lemma 2.1，(iii) により $\|\widetilde{T}_t f - f\|\to 0$ $(t\downarrow 0)$ が任意の $f\in \mathcal{C}_0(\mathcal{S})$ に対してなりたつ。

次に $f\in\mathcal{D}^+\cap\mathcal{D}(\mathcal{G}^0)$ としよう。定義から

$$\langle f\mid \mathcal{G}^0 f + kF[f]\rangle = \langle f\mid \mathcal{G}^0 f\rangle + \langle f\mid kF[f]\rangle$$

である。

従って，

$$\left\| \frac{\widetilde{T}_t\hat{f}-\hat{f}}{t} - \langle f\mid \mathcal{G}^0 f + kF[f]\rangle\right\|$$

$$\leqq \left\| \frac{\widehat{T_t^0 f - f}}{t} - \langle f\mid \mathcal{G}^0 f\rangle\right\| + \left\|\frac{1}{t}\int_0^t ds\left\{\widetilde{T}_s(\langle T_{t-s}^0 f\mid kF[T_{t-s}^0 f]\rangle - \langle f\mid kF[f]\rangle\right\}\right\|$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

Lemma 3.3により

$$\mathrm{I}\leqq c_1\left\|\frac{1}{t}(T_t^0 f - f) - \mathcal{G}^0 f\right\| + c_2\|\mathcal{G}^0 f\|\,\|T_t^0 f - f\| \to 0 \qquad (t\downarrow 0)$$

又，Lemma 7.12 より

$$\|\langle T_{t-s}^0 f\mid kF[T_{t-s}^0 f]\rangle - \langle f\mid kF[f]\rangle\|$$

$$\leqq c_1'\|kF[f]\|\cdot\|T_{t-s}^0 f - f\| + c_2'\|k(F[T_{t-s}^0 f] - F[f])\|$$

$$\leq K_1\|T_{t-s}^0 f - f\| + K_2\|T_{t-s}^0 f - f\|$$

$$= \delta(t-s) = o(t-s)$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

であるから

$$\mathrm{I\!I} \leqq \frac{1}{t}\int_0^t ds\,\delta(t-s) + \frac{1}{t}\int_0^t ds \,\|\widetilde{T}_s(\langle f|k[f]\rangle) - \langle f|k[F]\rangle\|$$

$$\to 0 \qquad (t\downarrow 0)$$

従って

$$\left\|\frac{\widetilde{T}_{t+h}\hat{f}-\widetilde{T}_t\hat{f}}{h} - \widetilde{T}_t\langle f|\mathcal{G}^0 f + kF[f]\rangle\right\|$$

$$\leq \left\|\frac{\widetilde{T}_h\hat{f}-\hat{f}}{h} - \langle f|\mathcal{G}^0 f + kF[f]\rangle\right\|$$

$$\to 0 \qquad (h\downarrow 0)$$

すなわち，(7.65) がなりたつ。

以上の議論では $\widetilde{T}_t$ が Branching semi-group になるということは使っていない。従って，前節の Prop. 7.6 , Cor. 2 により $\widetilde{T}_t$ が Branching semi-group になることの別証明が得られたことになる。すなわち，

Corollary　Moyal equation の minimal semi-group $\widetilde{T}_t$ は§7.3の後半で Skorohod equation の解から直接構成した Branching semi-group $\boldsymbol{T}_t$ と一致する。

§7.6 Moyal equation の一般解

$\{T_t^0, K(t), \Pi\}$ は Def. 3.1 の system とする。Moyal [1] に従って Moyal equation (7.23)

$$(7.66)\qquad u_t(\bar{x}) = T_t^0 f(\bar{x}) + \int_0^t \Psi(dr)\,u_{t-r}(\bar{x}) \qquad \bar{x}\in\mathcal{S}$$

の一般解に関連することを述べる。

Lemma 7.13　$f\in\mathbb{B}(\mathcal{S})$ に対し，(7.23) の一般解 $u(t,\bar{x})$ は

$$(7.67)\qquad u_t(\bar{x}) = T_t f(\bar{x}) + \alpha_t(\bar{x})$$

の形に書ける。ただし T_t は (7.23) の minimal semi-group で，$\alpha_t(\bar{x})$ は

$$(7.68)\qquad \alpha_t(\bar{x}) = \int_0^t \Psi(dr)\,\alpha_{t-r}(\bar{x})$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

をみたす。

[*Proof*] は(7.66)が *linear* な積分方程式であるから明らかである。

Theorem 7.9 (i) 任意の $f\in\mathbb{B}(S)$ $f\geqq 0$ に対し，$T_t f(\bar{x})$ は *Moyal equation* の *non-negative minimal solution* である。

(ii) $T_t f(\bar{x})$ が *Moyal equation* (7.23) の有界な *unique solution* であるための必要十分条件は

$$(7.69)\qquad \sigma_\infty(\infty\,;\bar{x})\equiv 0 \qquad \bar{x}\in S$$

である。ここで $\sigma_n(t,\bar{x})=\Psi^{(n)}(t,\bar{x},S)$, $\sigma_\infty(t,\bar{x})=\lim\limits_{n\to\infty}\Psi^{(n)}(t,\bar{x},S)$ であって $\Psi^{(n)}$ は(7.25)で定義された。

[*Remark*] *process* の言葉で云えば条件(7.69)は次のようである。すなわち，定義の仕方から $\sigma_n(t,\bar{x})=P_{\bar{x}}[0\leqq\tau_n<t]$ であるから，$\sigma_\infty(t,\bar{x})=P_{\bar{x}}[0\leqq\tau_\infty<t]$. 従って(7.69)は $P_{\bar{x}}[0\leqq\tau_\infty<\infty]\equiv 0$, $\bar{x}\in S$ となり，有限時間内に無限回の *branching* をおこす確率が *zero* と云うことであって，確率論的に云えば，無限回 *branching* をしたあとで再びそのうしろに *process* をつないで行く（第6章参照）ことが出来ないということである。実際もし(7.69)の条件がこわれれば，$\tau_\infty<\infty$ のところで再び *instantaneous distribution* を適当に与えて *process* をつないで行くことが出来る。*distributions* のとり方の多様性だけ解があらわれるわけである。そのときに出来る *process* は勿論 *branching Markov process* ではなく，*instantaneous return branching Markov process* とでも云うべきものである。そのときには *branching Markov process* X_t の *Martin boundary* みたいなものを考えた方がわかりやすい。

[*Theorem 7.9 の Proof*] まず(i)を示す。$u_t(\bar{x})$ を任意の *non-negative solution* としよう。そのとき(7.66)から

$$u_t(\bar{x})\geqq T_t^0 f(\bar{x})$$

である。$n\geqq 0$ として

$$u_t(\bar{x})\geqq\sum_{j=0}^{n}T_t^{(j)}f(\bar{x})$$

が成り立ったとすると，

$$\int_0^t\Psi(dr)\,u_{t-r}(\bar{x})\geqq\sum_{j=0}^{n}\int_0^t\Psi(dr)\,T_{t-r}^{(j)}f(\bar{x})$$

Lemma 7.4 により

$$=\sum_{j=0}^{n}T_t^{(j+1)}f(\bar{x})$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$=\sum_{j=0}^{n+1} T_t^{(j)} f(\bar{x}) - T_t^{0} f(\bar{x})$$

従って

$$u_t(\bar{x}) = T_t^{0} f(\bar{x}) + \int_0^t \Psi(dr)\, u_{t-r}(\bar{x})$$

$$\geqq \sum_{j=0}^{n+1} T_t^{(j)} f(\bar{x})$$

すなわち，*induction* は完結した。故に

$$u_t(\bar{x}) \geqq \sum_{j=0}^{\infty} T_t^{(j)} f(\bar{x}) = T_t f(\bar{x})$$

を得る。

次に(ii)を示そう。(7.69) より $\Psi^{(n)}(t, \bar{x}, S) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad t \geqq 0$ である。

いま $\sup_{0 \leq r \leq t} \|\alpha_r\| \leq N(t) < \infty$

とおくと，Lemma 7.4 と (7.68) とから

$$\alpha_t(\bar{x}) = \int_0^t \Psi^{(n)}(dr)\, \alpha_{t-r}(\bar{x})$$

であるから，

$$|\alpha_t(\bar{x})| \leq N(t)\, \sigma_n(t, \bar{x}) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad (\forall t \geqq 0)$$

を得る。すなわち 解は *unique* である。

逆に，解が *unique* としよう。Lemma 7.4 により

$$\sigma_n(t, \bar{x}) = \int_0^t \Psi(dr)\, \sigma_{n-1}(t-r, \cdot)(\bar{x})$$

であるから

$$\sigma_\infty(t, \bar{x}) = \int_0^t \Psi(dr)\, \sigma_\infty(t-r, \cdot)(\bar{x})$$

従って

$$\sigma_\infty(t, \bar{x}) = 0 \qquad \bar{x} \in S \quad , \quad t \geqq 0$$

でなくてはならない。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

補　　　足

補足 I. Combinatorial Lemma

$m\times m$-matrix $A=(a_{ij})$ に対し

$$per[A]=\sum_{\pi}\prod_{j=1}^{m}a_{\pi(j),j}$$

を A の permanent と云う。ここで π は $(1,\cdots,m)$ の全ての permutation $(\pi(1),\cdots,\pi(m))$ についての和を表わしている。(determinant と符号だけ異なる)。そのとき，

Lemma　$m\times m$-matrix $A=(a_{ij})$ の permanent に対し

$$(5.1)\qquad \sum_{\pi}\prod_{j=1}^{m}a_{\pi(j),j}=\prod_{j=1}^{m}\Bigl(\sum_{k=1}^{m}a_{kj}\Bigr)-\sum_{(k_1,\cdots,k_{m-1})}\prod_{j=1}^{m}\Bigl(\sum_{q=1}^{m-1}a_{k_q,j}\Bigr)$$

$$+\sum_{(k_1,\cdots,k_{m-2})}\prod_{j=1}^{m}\Bigl(\sum_{q=1}^{m-2}a_{k_q,j}\Bigr)-\cdots+(-1)^{m-1}\sum_{k}\prod_{j=1}^{m}a_{k,j}\ .$$

がなりたつ。ここで $\sum_{(k_1,\cdots,k_r)}$ は $(1,\cdots,m)$ から r 個の相異なる元 $(k_1,\cdots,k_r)$ を取り出す．取出し方全体についての和を表わしている。

[Proof]　(S.1)の両辺の元の係数を勘定すればよい。

行の suffix として，ある固定した $t(\geq 1)$ 個の番号を含まない元，例えば $a=a_{k_1 1}a_{k_2 2},\cdots,a_{k_m m}$ ($k_1,\cdots,k_m$ は t 個を番号を含まない) を考える。そのとき，(S. 1) 式の右辺の p 番号の項 ($p\leq t$ である) を考えると，t 個の番号から p 個を選んで除いて出来た取り方 $(k_1,\cdots,k_{m-p})$ が丁度 ${}_tC_p$ 個ある。その各々から一個ずつ a が現われるから，全体で右辺の a の係数は

$${}_tC_0-{}_tC_1+{}_tC_2-\cdots+(-1)^t\,{}_tC_t=0$$

となる。又，行の suffix に $(1,\cdots,m)$ の全てを含む元は右辺の第一項のみから一個ずつ出る。それは丁度左辺に等しい。従って証明された。

補足 II.1　infinite cross section

第5章，例 5.5 の electron-photon cascade においてはエネルギー a の

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

electron は時間 dt の間に $c_2 k_2(u)\,dt\,du$ の確率でエネルギーが $(au \quad au+adu)$ 内になる1個の photon を生み出し，そのエネルギーだけ electron のエネルギーは減じる。今，$k(u)=c_2 k_2(u)$ とおくと，第5章の場合では $\int_0^1 k(u)du < +\infty$ であるが，実際には $\int_0^1 k(u)\,du = +\infty$ となる場合（cross section が無限大の場合）が重要である．この場合の branching process は我々がこのノートで与えた formulation の中には入らない。この場合を含めた branching process の定義をあたえて一般論が展開できるかどうかは1つの問題点である。

cross section が無限大のときに対応する cascade process の構造は Harris [1] で加法過程の理論をもとにしてくわしく論じてある。加法過程，とくに Poisson 加法系（Ito [1] 参照）の構造がよくわかっているので，それを用いてこの branching process の数学的モデルを構成することができる。これらについては Harris の本に明快に論じてあるので，このノートでくりかえすことは止める（Harris [1], Chap. VII, 7）。

もしこのような場合を含めて branching process を Markov 過程の立場から formulate しようとしたらどのようにしたらよいであろうか。以下で1つの試みをあたえるが，それが稔りある結果をもたらすかどうかは疑問である。S をある locally compact Hausdorff で open set の可算 base をもつとし S は compact でないとする。S にある extra point δ をつけ加える：$\hat{S}=S\cup\{\delta\}$。$\hat{S}$ の可算積 $\hat{S}^N$ を考える。すなわち $\hat{S}^N$ の元は $\hat{S}$ の元よりなる数列 $x=(x_i,\ i=1,2,\cdots)$ である。$\hat{S}^N$ の部分集合 $\mathfrak{S}'$ を

$$\mathfrak{S}'=\{x=(x_i)\mid \text{任意の compact } K\subset S \text{ に対し } x_i\in K \text{ となる } i \text{ は有限}\}$$

とする。$x\in\mathfrak{S}'$ に対し各 compact $K\subset S$ に対し $x_K=(x_i,\ x_i\in K)$ とする。$x, y\in\mathfrak{S}'$ に対し　同値関係　$x\sim y$　を

$$x\sim y \iff {}^{\forall}\text{compact } K\subset S,\quad x_K \text{ と } y_K \text{ は順列をのぞいて一致する.}$$

によって定義する。$\mathfrak{S}'$ をこの同値律でわった空間を $\mathfrak{S}$ とする．$\mathfrak{S}$ は第2章で定義された $\bigcup_{n=0}^{\infty} S^n$ を含んでいると考えられる．実際

$$x=(x_1,\cdots,x_n,\delta,\delta,\cdots,\delta,\cdots)\quad \text{但し}\quad x_i\in S\quad i=1,2,\cdots,n$$

を含む同値クラスを $\tilde{x}\ni(x_1,\cdots,x_n)$ なる S^n の点 $\tilde{x}$ と同一視すればよい。特に ∂ は $(\delta,\delta,\cdots,\delta,\cdots)$ と同一視すればよい。

今，$f\in\mathbb{C}(S)$　$0\le f\le 1$　を　$f(\delta)=1$　として　$\hat{S}$ へ拡張し　$\mathfrak{S}$ 上の関数 $\hat{f}$ を

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$\hat{f}(x)=\prod_{i=1}^{\infty} f(x_i) \quad , \quad x=(x_i)$$

で定義する。

今 $\mathfrak{S}$ 上の Markov 過程 X_t が次の性質をもつとき branching process ということにする：

X_t の semi-group を T_t とするとき

$$T_t\hat{f}(x) = \widehat{T_t\hat{f}|_S}(x) \qquad (\forall f\in C(S),\ 0\leq f\leq 1)$$

（上で注意したように $\mathfrak{S}$ は $\bigcup_{i=0}^{\infty} S^n$ したがって特に S を canonical に含んでいる。$T_t\hat{f}|_S$ はその意味で考える）。

定義自身は第2章の定義のそのままの拡張であり，このようにしておけば infinite cross section の electron photon cascade process も含まれる。ただこのような formulation が有効であるためには $\mathfrak{S}$ に都合のよい topology が入って，さらに process X_t がその上の具合いのよい Markov 過程 (standard process とか Hunt process) にならなければならないであろう。（その点は始めにのべたように多くの点で疑問である。）又 Lévy measure が無限大になるような jump をもつ一般の Markov 過程の研究がもっと進む必要があるであろう。

補足II.2 Branching Markov process に関する固有値問題

Branching Markov process の構造が固有値問題ではどのような現象形態をとるかはまだ明瞭になっていないことは0章ですでにのべた。s が有限集合の時は Karlin-McGregor の両氏によってほぼ解決され，特に一点の時は充分満足すべき条件の下で Karlin-McGregor[ ]において詳しく論じられている。彼等は離散スペクトルの時のみならず，連続スペクトルの場合もふくめて，それらの特徴とスペクトルの決定の方法を明らかにしている。連続スペクトルの場合は事情が複雑なので，離散スペクトルの場合に，Karlin-McGregor [1]の結果より容易に推察されることについて2,3の注意をここでのべよう。

(1°) 取扱う問題の性格を明らかにするために，先ず1つの例を考えてみよう。

$s=[0,1]$ とし，$S=\bigcup_{n=0}^{\infty} s^n\cup\{\Delta\}$ 上の branching Markov process X

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

を考える。その non-branching part X^0 は $\mathcal{S}$ 上の反射壁の Brown 運動 B_t の $e^{-\varphi_t}$-subprocess と同等とする。ここで $\varphi_t=\int_0^t k(B_s)ds$, $0<k\in\mathbb{C}(\mathcal{S})$, とする。このとき，3章，7章の結果によりつぎのことが言える。

X, X^0, B_t の semi-group をそれぞれ T_t, T_t^0, U_t としよう。さらに T_t, T_t^0, U_t の generator およびその定義域をそれぞれ，$\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^0$, A, $\mathcal{D}(\mathcal{G})$, $\mathcal{D}(\mathcal{G}^0)$, $\mathcal{D}(A)$ とする。これらは T_t, T_t^0, U_t がそれぞれ $\mathbb{C}_0(S)$, $\mathbb{C}(\mathcal{S})$, $\mathbb{C}(\mathcal{S})$ をそれぞれ不変にすることに注意すれば Hille-Yosida の意味で定義出来る。良く知られているように $\mathcal{D}(\mathcal{G}^0)=\mathcal{D}(A)$ である。$\mathcal{S}^n$ 上の non-branching part についても $\mathcal{S}$ 上の non-branching part と同じ記号を用いる。また，これまでしばしば示したように，U_t は

$$U_t\hat{f}(\bar{x})=\widehat{U_t f}(\bar{x}), \qquad \bar{x}\in\mathcal{S}^n, \quad f\in\mathbb{C}^*(\mathcal{S}),$$

が成りたつように一意的に $\mathbb{C}(\mathcal{S}^n)$ 上に拡張出来る。いま

$$\pi^*(x,d\bar{y})=k(x)\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)\pi_n(x;dy\cap\mathcal{S}^n)$$

とし，それを

$$\int_{S-\mathcal{S}^n}\pi^*(\bar{x},d\bar{y})\hat{f}(\bar{y})=\langle f\,|\int_S\pi^*(\cdot\,;d\bar{y})\hat{f}(\bar{y})\rangle(\bar{x}),\ \bar{x}\in\mathcal{S}^n,\ f\in\mathbb{C}^*(\mathcal{S}),$$

が成りたつように一意的に拡張する。$\pi^*(\bar{x},\mathcal{S}^n)=0$ として，$\pi^*(\bar{x},\cdot)$ を S 上の measure と考える。これらの記号を用いると $u\in\mathcal{D}(\mathcal{G})$ に対して，

(1) $$\mathcal{G}u(\bar{x})=\mathcal{G}^0u(\bar{x})+\int_S\pi^*(\bar{x},d\bar{y})u(\bar{y}), \qquad \bar{x}\in\mathcal{S}^n,$$

である。われわれの問題は $\mathcal{G}$ に関する固有値問題である。

これを考えるために，これまでしばしば用いた

$$\hat{e}(\bar{x})=e(\bar{x})=P_{\bar{x}}[e_\Delta(\omega)=+\infty]$$

を考え，$(\hat{e})^{-1}\mathcal{G}\hat{e}$ なる作用素を用いる．以下話を大ざっぱにして，定義域に関する論議はここでは一応ふれないで筋をはっきりすることを中心にする。

問題の性格を最も良く表わす関係は，

(2) $$\begin{cases}\left[\frac{1}{\hat{e}}\mathcal{G}(\hat{e}\check{f})\right](\bar{x})=\left(\frac{1}{\hat{e}}\mathcal{G}(\hat{e}\check{f})\right)^{\vee}(\bar{x}), & \bar{x}\in S,\\[2ex] \left(\frac{1}{\hat{e}}\mathcal{G}(\hat{e}\check{f})\right)(x)=\left(\frac{1}{e}A(ef)+\frac{1}{e}(\pi^*(\check{f}\hat{e})-kf)\right)(x), & x\in\mathcal{S},\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

である。ここで $\pi^*(g)=\int_S g(\bar{y})\pi^*(\cdot\,;d\bar{y})$ とする。そこでいま

(3) $$Lf(x)=\left(\frac{1}{e}A(ef)\right)(x)+\left(\frac{1}{e}(\pi^*(\check{f}\hat{e})-kf)\right)(x),\quad x\in\mathcal{S},$$

なる $\mathcal{S}$ 上の linear な作用素を考え、それが（離散）固有値 $\{\lambda_m\}$，固有関数 $\{\varphi_m\}$ をもつことを仮定する。すなわち

$$L\varphi_m(x)=\lambda_m\varphi_m(x),\qquad x\in\mathcal{S},$$

を仮定しよう。そのとき (2) により

(4) $$\left[\frac{1}{e}\mathcal{G}(\hat{e}\check{\varphi}_m)\right](\bar{x})=\lambda_m\check{\varphi}_m(\bar{x}),\qquad \bar{x}\in S,$$

となる。すなわち $\{\lambda_m\}$ は $\left[\frac{1}{e}\mathcal{G}(\hat{e}\cdot)\right]$ の固有値でもあって，対応する固有関数は $\check{\varphi}_m$ であることを示している。（勿論 $\{\lambda_m\}$ が $\left(\frac{1}{e}\mathcal{G}\hat{e}\cdot\right)$ の固有値の全体ではない）。

いま簡単のため

$$\pi_n(x;d\bar{y})=\delta_{\underbrace{(x,\cdots,x)}_{n}}(d\bar{y}),\qquad x\in\mathcal{S},$$

の場合を考え，$\sum_{n=0}^{\infty}n\,q_n(x)(e(x))^n<\infty$ としよう。そのときは

$$Lf(x)=\frac{1}{e}A(ef)(x)+\left(\frac{k}{e}(G(\hat{e})-1)f\right)(x),\quad x\in\mathcal{S},$$

$$G(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}n\,q_n(x)(\xi(x))^n,\qquad \xi\in C^*(\mathcal{S}),$$

となる．このような場合には L の固有値問題は境界条件を適当に設ければ既に解かれている。$G(\hat{e})\le 1$ に注意すればしかも固有値が半直線上に出ることもわかっている。

より進んだ考察はもう少し一般に考えることとし，ここで (2) の証明の概略をのべておこう。定義より

$$\int_S\pi^*(\bar{x},d\bar{y})\hat{e}(\bar{y})(\widehat{\exp\lambda f}(\bar{y}))$$

$$=\langle e\exp(\lambda f)\,|\int_S\pi^*(\cdot\,;d\bar{y})\,\hat{e}(\bar{y})\,\widehat{\exp(\lambda f)}(\bar{y})\rangle(\bar{x})$$

となる．故に $\bar{x}\ni(x_1,\cdots,x_n)$ に対して，

$$\pi^*[\hat{e}\check{f}](\bar{x})=\sum_{m=1}^{n}\sum_{(k_1,\cdots,k_n)}^{(1)}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n}(f_j)^{k_j}(x_j)\,e(x_j)\int_S\pi^*(x_m,d\bar{y})(\check{f})^{k_m}(\bar{y})\hat{e}(\bar{y})$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

(224)

$$=\sum_{m=1}^{n}\Big[\sum_{\substack{p=1\\p\neq m}}^{n} f(x_p)\prod_{j\neq m} e(x_j)\Pi^*(\hat{e})(x_m)+\big(\prod_{j\neq m} e(x_j)\big)\Pi^*[\check{f}\hat{e}](x_m)\Big]$$

となり，

$$\Big(\frac{1}{\hat{e}}\Pi^*[\hat{e}\check{f}]\Big)(\bar{x})=\check{f}(\bar{x})\Big(\frac{1}{e}\Pi^*\hat{e}\Big)^{\vee}(\bar{x})-\Big(\frac{1}{e}(\Pi^*\hat{e})f\Big)^{\vee}(\bar{x})$$
$$+\Big(\frac{1}{e}\Pi^*(\check{f}\hat{e})\Big)^{\vee}(\bar{x})$$

が得られる。

いま
$$\Big(\frac{1}{e}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)^{\vee}(\bar{x})+\Big(\frac{1}{e}\Pi^* e\Big)^{\vee}(\bar{x})=0$$

と上式を併せると (1) より (2) が得られる。

(2°) これまで infinitesimal operatorに対する固有値問題として (1°) ではのべて来たのは，non-self-adjoint になる主たる要因が (1) の第２項にあることを示すためであった。しかしそのような形の定式化は今はあまり好ましいように思えない理由が別にある。それは本文で（例えば第２章，第３章）のべたように branching という特性は infinitesimal operator の形では非常に表現しにくく，semi-group それ自身，すなわち積分作用素の形でみた方が単純な現象形態をとる。すなわち第２章の (2.4) 式の形に現わせる。一方，われわれの主要な目標は branching の法則が固有値問題にどのように現象するかである．このような意味で問題を semi-group 自身で考えることが有益であろうことは容易に想像される。従って以下その立場で考えるが，ここでは離散スペクトルだけが問題になるような条件を Karlin-McGregor [1] の結果より類推して始めに仮定する。

[仮定] 1 $\quad 0<e(x)<1, \quad x\in\mathcal{S}.$

$\hat{e}(\bar{x})=e(\bar{x})$，$\bar{x}\in S$，であるので上の仮定より

$$0<\hat{e}(\bar{x})<1, \quad \bar{x}\in S,$$

が言える。

[仮定] 2 $\quad \mathcal{S}$ 上の measure $m(dx)$ があり，$\mu(dx)=e(x)m(dx)$ とおけば $\mu(\mathcal{S})<1$ がなりたっているとする。

いま m, μ をこれまでしばしば用いて来た方法で S 上の $\hat{m}$，$\hat{\mu}$ まで拡張する。すなわち
$$\int_{\mathcal{S}^n}\hat{f}(\bar{x})\hat{m}(d\bar{x})=\Big(\int_{\mathcal{S}} f(x)m(dx)\Big)^n, \quad n=1,2,\cdots \quad f\in C^*(\mathcal{S}),$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$\int_{s^n} \hat{f}(\bar{x})\hat{\mu}(d\bar{x}) = \Big(\int_{s} f(x)\mu(dx)\Big)^n, \quad n=1,2,\cdots \qquad f\in C^*(s),$$

$$\hat{m}(\{\partial\})=1, \quad \hat{\mu}(\{\partial\})=1, \quad \hat{m}(\{\Delta\})=0, \quad \hat{\mu}(\{\Delta\})=0 \ 。$$

このような拡張が一意的なことは第3章の *Lemma* 　による。

このとき,

<u>[仮定] 3</u> 　(1) $\quad T_t^* f = \dfrac{1}{\hat{e}} T_t \hat{e} f \quad , \quad f\in C(S)$,

は $L_2(S, d\hat{\mu})$ 上の作用素と考えられる。

(2) $\quad M_t^* f = T_t^* \check{f} \quad , \quad f\in L_2(s, d\mu)$

は $L_2(s, d\mu)$ で *completely continuous* かつ *self-adjoint* とする。

<u>[Remark]</u> 　Karlin-McGregor [1] では [仮定] 1 だけで本質的には離散スペクトルであることが示されている。その時は s は一点の集合 $\{a\}$ であるので [仮定] 2,3 は自動的にみたされていると理解することが出来る。

[仮定] 3 で *completely continuous* な仮定は (1°) の考察から自然であることは想像されるが, 実は *self-adjoint* の仮定は好ましくない。s が有限集合の場合や第5章の *Branching transport process* の場合にこの条件はこわれている。また事実これからの話は適当な修正をほどこせばそれはなくても成りたつことが多い。しかしここでは話を簡単にするために, そのことをも仮定しておく。

つぎに,

(5) $\qquad T_t^* \check{f}(\bar{x}) = \widecheck{T_t^* \check{f}|_s}(\bar{x}) , \qquad \bar{x}\in S$

が成りたっていることに注意する。実際, $\bar{x} \ni (x_1, \cdots, x_n)$ に対して,

(6) $\qquad T_t^*[(\check{f})^p](\bar{x}) = \sum_{(k_1,\cdots,k_n)}^{(p)} \dfrac{p!}{k_1!\cdots k_n!} \prod_{j=1}^{n} T_t^*[(\check{f})^{k_j}](x_j)$

が成りたつ。この証明は本文でしばしば用いた方法と第2章の (2.4) 式を用いるとよい。$T_t^* \hat{1}(\bar{x}) = \hat{1}(\bar{x})$ に注意して (6) で $p=1$ とすれば (5) を得る。

(5) と $T_t^* \check{1}(\bar{x}) = \check{1}(\bar{x})$ に注意すれば

(7) $\qquad M_t^* M_s^* = M_{t+s}^*$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

を得るので，［仮定］3 よりつぎのことが言える。

$L_2(s, d\mu)$ の C.O.N.S. $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ と $\{\lambda_m\}_{m=0}^{\infty}$ ， $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots$ ， $\varphi_0 =$ const. が存在して

$$(8) \qquad M_t^* f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda_m t} \varphi_m(x) < \varphi_m , f >_{(s)}$$

となる。ここで $< \; , \; >_{(s)}$ は $L_2(s, d\mu)$ の内積を表わす。

本論にはいる前に，$\hat{\mu}$ の定義より，

任意の $f, g \in L_2(s, d\hat{\mu})$ に対して

$$(9) \qquad \int_{s^n} \check{f}(\bar{x}) \check{g}(\bar{x}) \, d\hat{\mu}(\bar{x})$$

$$= \sum^{(1)}_{(k_1^{(1)}, \cdots, k_1^{(n)})} \; \sum^{(1)}_{(k_2^{(1)}, \cdots, k_2^{(n)})} \; \prod_{j=1}^{n} \int_s (f(x))^{k_1^{(j)}} (g(x))^{k_2^{(j)}} d\mu(x)$$

が言えることに注意する。

このことから，

$$(10) \qquad \check{\varphi}_m \in L_2(S, d\hat{\mu}), \qquad m = 0, 1, \cdots$$

で $m \neq n$ ならば $\check{\varphi}_m$ と $\check{\varphi}_n$ は $L_2(S, d\hat{\mu})$ で直交する。実際 (9) より

$$\int_{s^n} \check{\varphi}_{k_1}(\bar{x}) \check{\varphi}_{k_2}(\bar{x}) \, d\hat{\mu}(\bar{x}) = n \int_s \varphi_{k_1}(x) \varphi_{k_2}(x) \, d\mu(x) \; (\mu(s))^{n-1}$$

故に

$$\int_S \check{\varphi}_{k_1}(\bar{x}) \check{\varphi}_{k_2}(\bar{x}) \, d\hat{\mu}(\bar{x}) = \int_s \varphi_{k_1}(x) \varphi_{k_2}(x) \, d\mu(x) \; \frac{1}{(1-\mu(s))^2}$$

となるので (10) の結論が出る。

(5) と (10) を併せるとつぎの主張が得られる。

”［仮定］1〜3の下で $\{e^{-\lambda_m t}\}$，$\{\check{\varphi}_m\}$ は $L_2(S, d\hat{\mu})$ 上の作用素 T_t^* の固有値および固有関数系の一部分である．すなわち

$$T_t^* \check{\varphi}_m(\bar{x}) = e^{-\lambda_m} \check{\varphi}_m(\bar{x}) \quad , \qquad \bar{x} \in S , \qquad m = 0, 1, 2, \cdots$$

である。“

あと，問題は ”残りの固有値，固有関数系はどのような構造をしているか“ ということである．その中に $\{e^{-\lambda_m t}\}$，$\{\check{\varphi}_m\}$ より一定の法則により構成出来

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

るものがふくまれていることは容易に示せる。例えば，任意に m_1, m_2 をえらんだとき，

$$e^{-(\lambda_{m_1}+\lambda_{m_2})t} \tag{11}$$

は再び T_t^* の固有値で，それに対応する固有関数は，今もし，$\lambda_{m_1}+\lambda_{m_2}=\lambda_{m_3}$ なる m_3 が存在しないとすれば，

$$\check{\varphi}_{m_1}(\bar{x})\,\check{\varphi}_{m_2}(\bar{x})+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\check{\varphi}_k(\bar{x}) \tag{12}$$

なる形をしていることも言える。そのことは (6) およびそれを一般化したものを用いると容易に示される。

そこで最後に残る問題は"$\{e^{-\lambda_m t}\}$, $\{\check{\varphi}_m\}$ より (11), (12), さらにそれを一般化した固有値，固有関数を求める法則を具体的に定めること，およびその法則によって求まるもので全体が決まるか"ということになる。

(3°) (2°) の最後にのべた問題についての考察に役立つもう一つの注意をのべよう。(2°) では *right eigen-value* についてのべたが，今度は *left-eigen value* についてのべる。そのために (2°) の［仮定］1～3の他にもう1つつぎのことを仮定する。

<u>［仮定］4</u>　$L_2(S, d\hat{\mu})$ 上の作用素 T_t^* は completely continuous である。

このときは，$\exists\{\xi_m\}$，$\xi_m\in L_2(S, d\hat{\mu})$ で，

$$\int_S \xi_m(\bar{x})T_t^*\hat{f}(\bar{x})\,d\hat{\mu}(\bar{x})=e^{-\lambda_m t}\xi_m(\bar{x}),\quad \bar{x}\in S,\quad f\in\mathbb{C}^*(S),$$
$$m=0,1,2,\cdots$$

である。

このことから

"任意の $m_1,\cdots,m_q$ に対して $\xi_{m_1},\cdots,\xi_{m_q}$ より定まる $L_2(S,d\hat{\mu})$ の元 $\gamma(\xi_{m_1},\cdots,\xi_q)(\bar{x})$ が存在して

$$\int_S\gamma(\xi_{m_1},\cdots,\xi_q)(\bar{x})T_t^*\hat{f}(\bar{x})\,d\hat{\mu}(\bar{x})=e^{-(\lambda_{m_1}+\cdots+\lambda_m)t}\gamma(\xi_1,\cdots,\xi_q)(\bar{x})$$
$$\bar{x}\in S,\quad f\in\mathbb{C}^*(S)$$

である。"

このことの証明には，

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$\int_S \eta_1(\bar{x})\,\hat{g}(\bar{x})\,d\hat{\mu}(\bar{x})\int_S \eta_2(\bar{x})\hat{g}(\bar{x})\,d\hat{\mu}(\bar{x})$$

$$=\int_S \gamma(\eta_1,\eta_2)(\bar{x})\,\hat{g}(\bar{x})\,d\hat{\mu}(\bar{x}) \qquad\qquad {}^{\forall}g\in\mathbb{C}^*(\mathcal{S})$$

なる $\gamma(\eta_1,\eta_2)(\bar{x})$ が g に無関係に η_1, η_2 より定まることに注意すれば充分である。

上の主張より, T_t^* の *completely continuous* のための条件を求めることが非常に重要になる。*Karlin-McGregor* [1] の時は [仮定] 1 からそれが示してあるが, 一般には [仮定] 1～3の下で事情がどうなっているかを調べることが興味あるように思われる。

(4°) 以上のように基本的なことは大部分未解決であるが, *branching* の構造が固有値に対して非常に興味深く現象しそうであること, それが, 基礎の空間やその上の測度, 関数空間等の直積と密接な関連をもっているらしいことは容易に推論出来るだろう。

補足II.3 Kolmogoroff-Petrovsky-Piscounoff の論文[1]についての注意

第0章, 3章にのべたように, *Kolmogoroff-Petrovsky-Piscounoff* [1] は $\mathcal{S}=R^1$ の時について言えばつぎのような型の方程式を考えている。

$$(1)\qquad \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\bar{F}(v),$$

ここで F は充分なめらかで,

$$(2)\qquad \begin{cases} \bar{F}(0)=\bar{F}(1)=0, \\ \bar{F}(v)>0, \quad 0<v<1 \\ \bar{F}'(0)=\alpha>0,\ \bar{F}'(v)<\alpha, \quad \text{for } 0<\alpha\leqq 1 \end{cases}$$

をみたしている。第3章の *branching Markov process* に対応する場合と揃えるために, $u=1-v$, $\tilde{F}[u]=-\bar{F}[1-u]$ と変換する。そうすると, (1)

$$(1')\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\tilde{F}[u],$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

となり，$\widetilde{F}$は充分なめらかで

$$(2') \quad \begin{cases} \widetilde{F}(0) = \widetilde{F}(1) = 0, \\ \widetilde{F}(u) < 0, \quad 0 < u < 1 \\ \widetilde{F}'(1) = \alpha > 0, \quad \widetilde{F}'(u) < \alpha, \quad \text{for } 0 \le v < 1 \end{cases}$$

となる。既に第3章でのべたように，*non-branching part* として 一次元 *Brown*運動の e^{-t}-*subprocess* を考え，*branching system* が $\{q_n\}$，$\{\delta_{\underbrace{(x,\cdots,x)}_{n}}(d\bar{y})\}$ で与えられるときは，

$$(3) \qquad \widetilde{F}[u] = F[u] - u, \qquad F[u] = \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n ,$$

とおけば $\widetilde{F}$は (2′) の条件をみたし，そのような *branching Markov process* に対応する *semi-linear equation* は (3) の形の$\widetilde{F}$を持った (1′) の方程式である。

明らかに (2′) の中には (3) の形で出来ないものが存在する。たとえば

$$(4) \quad \begin{cases} \widetilde{F}[u] = u^3 - u^2 + u - u = F[u] - u, \\ \qquad\qquad F[u] = u^3 - u^2 + u \end{cases}$$

はそのような例になっている。ところがこのFはつぎのような性質をもっている。

”Fは充分なめらかで

$$(5) \quad \begin{aligned} &F[0] = 0, \quad F[1] = 1, \\ &F[u] \text{ は } 0 \le u \le 1 \text{ で単調増大} \end{aligned}$$“

そこでいま

$$(6) \quad \begin{aligned} &g(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} \\ &U_t f(x) = \int_S g(t,x,y) f(y) dy \end{aligned}$$

とおけば (2′) の下での (1′) の解を求めることは *Kolmogoroff-Petrovsky-Piscounoff* [1] の方法を少し修正し，*branching Markov process* の時の考えを取入れれば

$$(7) \qquad u(t,x) = e^{-t} U_t f(x) + \int_S \int_0^t e^{-s} g(s,x,y) F[u(t-s,y)] dy$$

なる積分方程式を解くことに帰着される。

そこでいま (5) の性質が保証されている~~とすれ~~ば，$0 \le f \le 1$，に対する (8) の解はつぎの方法で求まる。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$u_0(t,x)\equiv 0$$

$$(8)\qquad u_n(t,x)=e^{-t}U_t f(x)+\int_S\int_0^t e^{-s}g(s,x,y)F[u_{n-1}(t-s,y)]\,dy\,ds$$

とし，$0\leq u_n\uparrow$ で $u(t,x)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(t,x)$ が存在し，その $u(t,x)$ は初期条件 f の時の (7) 式の解である。

いま F を再び制限して (4) の場合に限ると (7), (8) より

$$u_n(t,x)=\int_S k_n(t,x,\bar{y})\hat{f}(\bar{y})\,d\bar{y}$$

と書けるような kernel $k_n(t,x,\bar{y})\,d\bar{y}$ が存在する。ここで特徴的なことは

"$0\leq f\leq 1$ に対して

$0\leq u_n(t,x)\leq 1$, $u_n\uparrow$ ではあるが

$k_n(t,x,\bar{y})$ は必ずしも正ではない"

このことは例えばつぎのことから示される．いま f に対する $u_n(t,x)$ を $u_n(t,x,f)$ と書くことにする。 $0\leq\lambda\leq 1$ をとって来て

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}u_2(t,x;\lambda f)\Big|_{\lambda=0}=2\int_{S^2}k_2(t,x,\bar{y})\hat{f}(\bar{y})\,d\bar{y}$$

一方 (4) と (5) より

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}u_2(t,x;\lambda f)\Big|_{\lambda=0}$$

$$=-2\iiiint_{SSS0}^{t}g(s,x,y)e^{-s}e^{-2(t-s)}g(t-s,y,z_1)g(t-s,y,z_2)f(z_1)f(z_2)\times$$

$$\times dz_1dz_2dsdy<0,$$

であるので $k_2(t,x,\bar{y})|_{S^2}$ は負になることが確かにある。

ここで第３章の Lemma と

$$|F[u]|\leq u^3+u^2+u\quad,\qquad 0\leq u\leq 1,$$

なることに注意すれば

$$\widehat{u_n(t,\cdot)}(\bar{x})=T_t^{(n)}\hat{f}(\bar{x})\quad,\qquad \bar{x}\in S$$

が定まることが言える。しかも

$$T_t^{(n)}\hat{f}(\bar{x})=\int_S k_n(t,\bar{x},\bar{y})\hat{f}(\bar{y})\,d\bar{y}$$

と表現出来る kernel $k_n(t,\bar{x},\bar{y})\,d\bar{y}$ が signed measure として存在

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

することも言える。しかしその total variation は finite ではあるが 1 では必ずしもおさえられない。

そこで (4) の $\tilde{F}$ の時ですら，これから後 branching Markov process に対応する場合と類似のことがどれだけ言えるかという問題がおきる。更に一般に (5) をみたす $\tilde{F}$ ではどうかが問題になる。

これらの事情を参考に Kolmogoroff-Petrovsky-Piscounoff [1] や Gelfand [1] 等に出て来る場合を整理して行くことは興味あることと思うが現在のところ出来ていない。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

第４章追加 *1)

§4.3 multiplicative functional の構成

S 上の non-branching part X_t^o の multiplicative functional m_t が与えられたとき，S 上の Branching Markov process X_t に対する multiplicative functional M_t を構成しよう。もちろん，X_t の M_t-subprocess X_t^M の non-branching part $(X_t^M)^o$ が，X_t^o の m_t-sub-process $(X_t^o)^m$ に等しくなるように作るのである。

process の構成の立場（第６章，７章参照）からすれば，non-branching part が $(X_t^o)^m$ であるような Branching Markov process を構成するには，なんら特別な考察を必要としない。それから出発して，一般論に従って作ってゆけばよいのである。しかし，そのようにしたのでは，$(X_t^o)^m$ から作った Branching Markov process と，X_t^o から作ったものとの間の確率論的な関係は，すぐに明らか，というわけにはいかない。例えば，measure P_x の絶対連続性を示そうとすれば，process の構成の仕方（第６章）にまで立ち戻った考察が必要となってくる。

従って，m_t から M_t を直接に構成しておくことは，論理を直線的に結ぶためにも重要なことである。

この節でも引き続き，path space で考えることにして，次の記号を導入する。まず，W を出発点での粒子の個数で分類し

$$W = \bigcup_{n=0}^{\infty} W_n \quad , \quad W_n = \{w;\ w(0) \in S^n\} \tag{4.14}$$

とする。$\underbrace{W_1 \times \cdots \times W_1}_{n}$ から W_n への mapping φ を

$$[\varphi \tilde{w}](t) = \gamma[w^1(t), \cdots, w^n(t)] , \tag{4.15}$$

で定義する。ここで $\tilde{w} = (w^1, \cdots, w^n) \in W_1 \times \cdots \times W_1$ ，$(w^j \in W_1,\ j=1,$

---

*1) 数理研シンポジャムにまにあわせた方が有益であると考え，Vol.23 の前半の出版を急いだため，整理の遅れた §4.3, §4.4 を除外せざるを得なくなった。そのため順序が不同になってしまったが，最後に加えることにした。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$\cdots, n)$ である。

<u>Lemma 4.1</u> $F(w)$ を W_1 上の有界 $N_\infty|_{W_1}$-可測函数とする。そのとき，

$$(4.16) \qquad \tilde{F}[\varphi\tilde{w}] = \prod_{j=1}^{n} F(w^j) \quad , \quad \tilde{w} = (w^1, \cdots, w^n) ,$$

とおくと，$\tilde{F}$は W_n 上の有界 $N_\infty|_{W_n}$-可測函数として *well-defined* である。

<u>[Proof]</u> $\tilde{w}, \tilde{w}' \in W_1 \times \cdots \times W_1$ をとり，$\varphi\tilde{w} = \varphi\tilde{w}'$ ならば，

$$\prod_{j=1}^{n} F(w^j) = \prod_{j=1}^{n} F(w'^j)$$

であることを示せば十分である。ここで $\tilde{w} = (w^1, \cdots, w^n)$，$\tilde{w}' = (w'^1, \cdots, w'^n)$。

ところが，*Lemma* 2.1 に注意すれば，特に $F(w)$が

$$F(w) = \sum_{k=1}^{m} a_k \prod_{i=1}^{m_k} \sum_{l=1}^{l_{ik}} C_{lik} \hat{f}_{lik}(X_{t_i}(w)) \quad , \quad f_{lik} \in C^*(S)$$

のときに示せば十分である。しかしこのときには，$\prod_{j=1}^{n} F(w^j)$ を展開して考えると，$(w^1, \cdots, w^n)$ を含む各項は $\hat{f}_{lik}(X_{t_i}(w^j))$を含んだ対称な形になっているので，$\varphi\tilde{w} = \varphi\tilde{w}'$ ならば，同じ値を与えることは明らかである。 *q.e.d.*

さて，*Branching Markov process* X_t の，S上の *non-branching part* を $X_1^0 = \{W_1, N_t|_{W_1}, X_t, t < \tau, P_x, x \in S\}$ とし，X_1^0 の $N_t|_{W_1}$-*multiplicative functional**1) $m_t(w)$ を一つ固定する。m_t の *defining set* をW_1'としよう。*2)

$m_t(w)$ を W_n 上に次のように拡張する：

$$(4.16) \quad \begin{cases} \tilde{m}_t(\varphi\tilde{w}) = \prod_{j=1}^{n} m_t(w^j) \ , & t \le \tau(\varphi\tilde{w}) , \quad (n \ge 1 \text{のとき}) \\ \qquad\qquad = \tilde{m}_{\tau(\varphi\tilde{w})}(\varphi\tilde{w}) , & t \ge \tau(\varphi\tilde{w}) , \quad (n \ge 1 \text{のとき}) \\ \tilde{m}_t(\varphi\tilde{w}) \equiv 1 , & (n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

そのとき，$\tilde{m}_t$ は *Lemma* 4.1 によりW_n上で *well-defined* であって，$\tilde{m}_t$ の *defining set* は $W_n' = \varphi(W_1' \times \cdots \times W_1')$ である。（このとき，S^n

---

*1) 第1章定義 1.8 参照。

*2) 第1章定義 1.7 の Ω' を <u>*defining set*</u> と呼ぶ。

Sem. on Probab.
Vol.23-II　1966年
P141-247

上の non-branching part $X_n^\circ = \{W_n,\ N_{t|W_n},\ X_t,\ t<\tau,\ P_{\bar{x}},\ \bar{x}\in S^n\}$ で考えている。)

このようにして，$\widetilde{m}_t$ は $W=\bigcup_{n=0}^{\infty} W_n$ 上で定義される。定義の仕方から明らかなように，$\widetilde{m}_t$ の defining set は $W'=\bigcup_{n=0}^{\infty} W'_n$ である。

さて，$\widetilde{m}_t(w)$ を用いて，Branching Markov process X_t の multiplicative functional（になるべきもの）$M_t(w)$ を次のように定義する。

Definition 4.3　$A_j^t=\{w;\ \tau_j(w)\le t<\tau_{j+1}(w)\}$ とおく。

$$\theta_{\tau_j}\widetilde{m}_t(w) \equiv \widetilde{m}_{\tau(\theta_{\tau_j}w)}(\theta_{\tau_j}w)$$

として，

$$M_t(w)=\widetilde{m}_\tau(w)\cdot\theta_{\tau_1}\widetilde{m}_\tau(w)\cdot\theta_{\tau_2}\widetilde{m}_\tau(w)\cdots\cdot\theta_{\tau_{j-1}}\widetilde{m}_\tau(w)\cdot \cdot\widetilde{m}_{t-\tau_j(w)}(\theta_{\tau_j}w),\quad \text{on } A_j^t \tag{4.17}$$

とおく。$M_t(w)$ の defining set は W' である．

Lemma 4.2　　M_t は N_{t+}-可測である。

[Proof]

$$M_t(w)=M_{\tau_j}(w)\cdot\widetilde{m}_{t-\tau_j(w)}(\theta_{\tau_j}w)\ ,\quad \text{on}\ \ A_j^t \tag{4.18}$$

と書いておく。定義の仕方から明らかに，$M_{\tau_j}(w)$ は N_{τ_j}-可測である。

そのことと

$$M_{\tau_j}\cdot\chi_{A_j^t}=M_{\tau_j}\cdot\chi(\tau_j\le t)\,\chi(t<\tau_{j+1})$$

とに注意すると，$M_{\tau_j}\,\chi_{A_j^t}$ は N_{t^+} − 可測であることがわかる．

さて，まず $\widetilde{m}_s(\theta_{\tau_j}w)$ は N_{τ_j+s} − 可測であることに注意しておこう。次によくやるように，

$$\tau_j^{(n)}(w)=\frac{m-1}{2^n}\quad \text{on}\quad B_m=\left\{w;\ \frac{m-1}{2^n}<\tau_j(w)<\frac{m}{2^n}\right\}$$

とおけば　$\tau_j^{(n)}\uparrow\tau_j$ ，$(n\uparrow\infty)$ である。従って，$t-\tau_j^{(n)}\downarrow t-\tau_j$ $(n\uparrow\infty)$ であるから，

$$\widetilde{m}_{t-\tau_j^{(n)}}(\theta_{\tau_j}w)\,\chi_{B_m}=\widetilde{m}_{t-\frac{m-1}{2^n}}(\theta_{\tau_j}w)\,\chi\left(\frac{m-1}{2^n}\le\tau_j\le\frac{m}{2^n}\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$=\widetilde{m}_{t-\frac{m-1}{2^n}}(\theta_{\tau_j}w)\cdot\chi\left(t<\tau_j+t-\frac{m-1}{2^n}\le t+\frac{1}{2^n}\right)$$

第１項は $N_{\tau_j+t-\frac{m-1}{2^n}}$-可測であるから，第２項との積は $N_{t+\frac{1}{2^n}}$-可測である。$\widetilde{m}_t$ の右連続性から，

$$\widetilde{m}_{t-\tau_j}(\theta_{\tau_j}w)=\lim_{n\to\infty}\beta_{t-\tau_j^{(n)}}(\theta_{\tau_j}w)$$

となり，$\widetilde{m}_{t-\tau_j}(\theta_{\tau_j}w)$ は N_{t+}-可測，従って，(4.18)から，M_t は N_{t+}-可測である． q.e.d.

<u>Lemma 4.3</u>　$M_t(w)$ は multiplicative である。

<u>[Proof]</u>　簡単のため，Wをあらかじめ defining set W' に制限して考えよう。さて，

$$M_s(\theta_t w)=M_{\tau_j}(\theta_t w)\,\widetilde{m}_{s-\tau_j(\theta_t w)}(\theta_{\tau_j}\theta_t w),$$

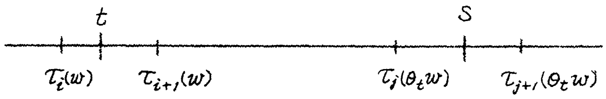
$$\text{on } \theta_t A_j^s=\{w;\ \theta_t w\in A_j^s\}$$

$$M_t(w)=M_{\tau_i}(w)\,\widetilde{m}_{t-\tau_i(w)}(\theta_{\tau_i}w),\qquad \text{on } A_i^t$$

であるから，　$w\in A_i^t\cap\theta_t A_j^s$ に対し

(4.18)
$$M_t(w)M_s(\theta_t w)=M_{\tau_i}\cdot\widetilde{m}_{t-\tau_i}(\theta_{\tau_i}w)\cdot m_{\tau(\theta_t w)}(\theta_t w)\cdot$$
$$\cdot\,\theta_{\tau_1(\theta_t w)}\widetilde{m}_{\tau(\theta_t w)}(\theta_t w)\cdots\widetilde{m}_{s-\tau_j(\theta_t w)}(\theta_{\tau_j}\theta_t w),$$

である．



ここで　$w\in A_i^t\cap\theta_t A_j^s$ に対しては，

(4.19)
$$\begin{cases}\tau(\theta_t w)=\tau_{i+1}(w)-t\\[1ex] \theta_t w=\theta_{t-\tau_i}\theta_{\tau_i}w\\[1ex] \xi_{\tau_0}(\theta_t w)=\xi_{\tau_i}(w)\end{cases}$$

であることに注意すると

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

(4.20) $$\widetilde{m}_{t-\tau_i}(\theta_{\tau_i}w)\cdot\widetilde{m}_{\tau(\theta_t w)}(\theta_t w)$$
$$=\widetilde{m}_{t-\tau_i}(\theta_{\tau_i}w)\cdot\widetilde{m}_{\tau_{i+1}-t}(\theta_{t-\tau_i}\theta_{\tau_i}w)$$
$$=\widetilde{m}_{\tau_{i+1}-\tau_i}(\theta_{\tau_i}w)$$
$$=\theta_{\tau_i}\widetilde{m}_{\tau}(w)$$

(4.21) $$\theta_{\tau_1(\theta_t w)}\widetilde{m}_{\tau(\theta_t w)}(\theta_t w)$$
$$=\widetilde{m}_{\tau(\theta_{\tau_1(\theta_t w)}\theta_t w)}(\theta_{\tau_1(\theta_t w)}\theta_t w)$$
$$=\widetilde{m}_{\tau(\theta_{\tau_{i+1}}w)}(\theta_{\tau_{i+1}}w)$$
$$=\theta_{\tau_{i+1}}\widetilde{m}_{\tau}(w)$$

e.t.c.

最後に， $w\in A_i^t\cap\theta_t A_j^s$ に対し

(4.22) $$\begin{cases} s-\tau_j(\theta_t w)=t+s-\tau_{i+j}(w) \\ \theta_{\tau_j}(\theta_t w)\theta_t w=\theta_{\tau_j(\theta_t w)+t}w=\theta_{\tau_{i+j}}w \end{cases}$$

であるから，

(4.23) $$\widetilde{m}_{s-\tau_j(\theta_t w)}(\theta_{\tau_j}\theta_t w)=\widetilde{m}_{t+s-\tau_{i+j}}(\theta_{\tau_{i+j}}w)$$

となる．(4.18)，(4.20)，(4.21)，(4.23)により

$$M_t(w)\,M_s(\theta_t w)=M_{t+s}(w)\quad,\qquad w\in A_i^t\cap\theta_t A_j^s$$

が成り立つ。 $\bigcup_{i,j}A_i^t\cap\theta_t A_j^s=W'$ であることに注意して

(4.25) $$M_t(w)\,M_s(\theta_t w)=M_{t+s}(w)\quad,\qquad w\in W'$$

が成り立つことがわかる。 q.e.d.

[Remark] $m_t(w)\le 1$ ならば，作り方から $\widetilde{m}_t\le 1$ 従って，$M_t\le 1$ である。

次に M_t の mean を評価するため，一般に multiplicativity をもつ r, v に対する次の Lemma を準備しよう。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

<u>Lemma 4.4</u> M_t は multiplicativety [*1] をもち $E_{\bar{x}}[M_{\tau_1}]=1$ をみたすとしよう。そのとき，任意の n に対し

$$E_{\bar{x}}[M_{t\wedge\tau_n}]=1 \tag{4.26}$$

がなりたつ。

<u>[Proof]</u> [*2] まず，任意の k に対し，$E_{\bar{x}}[M_{\tau_k}]=1$ を注意する．実際

$$\begin{aligned} E_{\bar{x}}[M_{\tau_{k+1}}] &= E_{\bar{x}}[M_{\tau_k+\tau_1(\theta_{\tau_k}w)}] = E_{\bar{x}}[M_{\tau_k}E_{X_{\tau_k}}[M_{\tau_1}]] \\ &= E_x[M_{\tau_k}] = \cdots \quad = 1 \end{aligned} \tag{4.27}$$

である．

さて，次に

$$M_{t\wedge\tau_n+\tau_1(\theta_{\tau_n\wedge t}w)} = \begin{cases} M_{\tau_{k+1}}, & \text{if } \tau_k \leq t < \tau_{k+1} \\ M_{\tau_{n+1}}, & \text{if } t \geqq \tau_n \end{cases} \tag{4.28}$$ [*3]

であることに注意しておこう。

すると，(4.27)，(4.28) を用いて，

$$\begin{aligned} &E_{\bar{x}}[M_{t\wedge\tau_n}] \\ &= E_{\bar{x}}[M_{t\wedge\tau_n}E_{X_{\tau_n\wedge t}}[M_{\tau_1}]] \\ &= E_{\bar{x}}[M_{t\wedge\tau_n}M_{\tau_1(\theta_{\tau_n\wedge t}w)}(\theta_{\tau_n\wedge t}w)] \\ &= E_{\bar{x}}[M_{t\wedge\tau_n+\tau_1(\theta_{\tau_n\wedge t}w)}] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} E_{\bar{x}}[M_{\tau_{k+1}};\ \tau_k \leq t < \tau_{k+1}] \\ &\qquad + E_{\bar{x}}[M_{\tau_{n+1}};\ t \geqq \tau_n] \end{aligned}$$

である。更に (4.27) を使うと，$k \leq n-1$ に対し，

$$E_{\bar{x}}[M_{\tau_{k+1}};\ \tau_k \leq t < \tau_{k+1}]$$

---

*1) ここで考える M_t は一般に N_t-可測で defining set が存在し右連続，左極限をもち，(4.25)をみたす random variable である。

*2) この証明は田中洋氏に示唆された。

*3) $t\wedge s = \min(s,t)$ である。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

$$= E_{\bar{x}}[M_{\tau_{k+1}} E_{X_{\tau_{k+1}}}[M_{\tau_{n-K}}] : \tau_k \leq \tau < \tau_{k+1}]$$

$$= E_{\bar{x}}[M_{\tau_{k+1}} M_{\tau_{n-k}} (\theta_{\tau_{k+1}} w) : \tau_k \leq t < \tau_{k+1}]$$

$$= E_{\bar{x}}[M_{\tau_{k+1} + \tau_{n-K}(\theta_{\tau_{k+1}} w)} : \tau_k \leq t < \tau_{k+1}]$$

$$= E_{\bar{x}}[M_{\tau_{n+1}} : \tau_k \leq t < \tau_{k+1}]$$

従って,

$$E_{\bar{x}}[M_{t\wedge\tau_n}] = \sum_{k=0}^{n-1} E_{\bar{x}}[M_{\tau_{n+1}} : \tau_k \leq t < \tau_{k+1}] + E_{\bar{x}}\{M_{\tau_{n+1}} ; t \geqq \tau_n]$$

$$= E_{\bar{x}}[\alpha_{\tau_{n+1}}] = 1$$

q.e.d.

<u>Corollary</u>　Lemma 4.4 の仮定の下で,

$$E_{\bar{x}}[M_t] \leq 1 \tag{4.29}$$

がなりたつ。特に $\{M_{t\wedge\tau_n} : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ が一様可積分ならば,

$$E_{\bar{x}}[M_t] = 1$$

がなりたつ。

以上の議論をまとめて,

<u>Theorem 4.3</u>　Branching Markov process X_t の $\mathcal{S}$ 上の non-branching part を $X_1^\circ = \{W_1, N_t|_{W_1}, X_t, t<\tau, P_x, x\in\mathcal{S}\}$ とする。m_t は X_t° の multiplicative functional であって,

i) $m_t \leq 1$ (contracting)

又は

ii) $E_x[m_\tau] = 1$ $(\forall x \in \mathcal{S})$

をみたしているとしよう。

そのとき, X_t の<u>弱い意味の Branching type</u> の N_{t+}-multiplicative functional M_t が存在して,

$$M_t(w) = m_t(w) \quad ; \quad w \in W_1, \quad t < \tau(w)$$

であって, i) 又は ii) に応じて,

i′) $M_t \leq 1$

又は

ii′) $E_{\bar{x}}[M_t] \leq 1$

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

をみたす。特に，$\{M_{t\wedge\tau_n};\ \tau_n=0,1,2,\cdots\}$ が一様可積分になるときには ii) のかわりに，

ii") $\quad E_{\overline{x}}[M_t]=1$

がなりたつ。

[Proof] M_t が弱い意味の Branching type になっていることは定義の仕方から明らかである．その他の主張は Lemma 4.2 〜 4.4 ですでに示した。

§4.4 Drift の変換

この節では branching process X_t の S 上の non-branching part $X_1^\circ=\{W_1,\ N_t|_{W_1},\ X_t,\ t<\tau,\ P_x,\ x\in S\}$ はある S 上の conservative Hunt process $\mathfrak{X}=(\tilde{X}_t,\ \tilde{\mathcal{B}}_t)$ の $e^{-\varphi_t}$-subprocess であると仮定しよう．ここで φ_t は $\mathfrak{X}$ の non-negative a.f. である。このことは §1.2 でのべたように十分一般の条件のもとでなりたつことである。又同じく $\mathfrak{X}$ と独立で指数分布 $e^{-s}ds$ にしたがう正値確率変数 Z を考えて *1)

$$T(\omega)=\inf\{t:\ \varphi_t\geq Z\}$$

とおき，

$$\begin{aligned}\dot{X}_t&=\tilde{X}_t &&t<T\\&=\delta &&t\geqq T\end{aligned}$$

と定めると $\dot{X}_t$ は $X_1^\cdot$ と equivalent な process になる。$\mathfrak{X}$ の a.f.（又は m.f.）ψ_t に対し $\dot{\psi}_t=\psi_{t\wedge T}$ とおくと，これは $\dot{X}_t$ の a.f.（resp. m.f.）と考えられることを注意しておく。

以後さらに議論を簡単にするため $\mathfrak{X}$ は条件(I)（§1.2 参照）をみたすとする．このとき次のことが知られている（Motoo [1] 又は Motoo-S. Watanabe [1] 参照）*2)

---

*1) 基本空間とその上の Borel field を適当に拡げて考えればこのような Z はいつでも存在し，又上で定義された T は Markov time となる。くわしくは Meyel [1] pp. 142-143 をみよ。

*2) 以下しばらくは (I) をみたす Hunt process $\mathfrak{X}=(\tilde{P}_x,\ \tilde{X}_t)$ の一般論である。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

1°) $\mathfrak{M}=\{B_t\,;\ B_t$ は a.f. $E_x[B_t^2]<\infty,\ E_x[B_t]=0,\quad \forall x,\ \forall t>0\}$

$\mathfrak{M}_c=\{B_t\,;\ B_t\in\mathfrak{M}$ 且つ continuous in $t\}$

としよう。そのとき 任意の $B,\ C\in\mathfrak{M}$ と任意の有界な Markov time σ に対し

$$E_x[\langle B, C\rangle_\sigma]=E_x[B(\sigma)\,C(\sigma)]$$

となるような有界変動かつ連続な a.f. $\langle B.C\rangle_t$ が (equivalence をのぞいて) 一意的に存在する。ここで，有界変動 a.f. とは二つの正の a.f. の差としてあらわされる a.f. のことである。特に $\langle B.B\rangle_t\equiv\langle B\rangle_t$ は正の a.f. である。

2°) $B\in\mathfrak{M}$ に対し

$$e^2(B)=\{f;\ f\in\overline{B}(\mathcal{S})\text{ で } E_x[\int_0^t|f(\widetilde{X}_s)|^2 d\langle B\rangle_t]<\infty\quad \forall x,t\}$$

とおく。このとき 任意の $B\in\mathfrak{M}$ と $f\in e^2(B)$ に対し (equivalence をのぞいて) unique な $Y\in\mathfrak{M}$ が存在して

$$\langle Y, C\rangle\approx f\cdot\langle B, C\rangle \quad {}^{*1)}$$

となる。この Y を $Y=f\cdot B$ と書き f の B による stochastic integral と呼ぶ。もし $B\in\mathfrak{M}_c$ ならば $f\cdot B\in\mathfrak{M}_c$ である。

今，$B^k\in\mathfrak{M}_c$ と $f_k\in e^2(B^k)$ に対し $k=1,2,\cdots,d$

$$m_t=exp\{\sum_{k=1}^d f_k\cdot B_t^k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^d|f_k|^2\cdot\langle B^k\rangle_t\}$$

とおく。class $\mathfrak{M}_c$ の a.f. に対して stochastic integral の公式を拡張し，Dynkin [1] (Vol. 1, pp 234〜236, Vol. 2, pp 114〜115) と同様の議論を行なうと，もし Markov time σ が $\sigma<+\infty$ a.s かつ

$$(*)\qquad \sup_{x\in\mathcal{S}}\widetilde{E}_x[\sum_{k=1}^d|f_k|^2\cdot\langle B^k\rangle_\sigma]<\infty$$

をみたすならば

$$\widetilde{E}_x[m_\sigma]=1$$

がなりたつ。

そこで再び branching process へ話をもどすと $\mathfrak{X}$ に対し上のようにして m.f. m_t を定義する。

---

*1) A が有界変動のとき $f\cdot A=\int_0^t f(\widetilde{X}_s)\,dA_s$ である。$\approx$ は equivalence をあらわす。i.e. $A\approx B\iff \forall t,\ \forall x,\ P_x[A_t=B_t]=1$.

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

そのとき $\dot{m}_t = m_{t\wedge T}$ は $\dot{X}_t$ の m.f. を定義する。

$\dot{m}_t$ と equivalent な X_1° の m.f. を m_t° とする。

ここで 仮定

$$E_x[m_t^\circ] = 1$$

をもうける。上の議論により

$$(**) \qquad \sup_{x\in S} \widetilde{E}_x\left(\sum_{k=1}^{d} |f_k|^2 \cdot \langle B^k \rangle_T\right) < \infty \quad \text{かつ} \quad T < \infty \quad a.s.$$

であれば，この仮定はみたされる。そこで m_t° から Theorem 4.3 により作った branching Markov process X_t の m.f. を M_t とする。

Definition 4.4 X_t の M_t による変換を branching Markov process の（一般化された）drift の変換と呼ぶ。

[Example 4.3] non-branching part X_t° が d-次元 Brown 運動 $\tilde{x}_t = (x_t^{(1)}, \cdots, x_t^{(d)})$ の $e^{-\int_0^t k(\tilde{x}_s)ds}$-subprocess となっている場合を考えよう。

$$B_t^k = x_t^{(k)} - x_t^{(k)} \qquad k = 1, 2, \cdots, d \qquad *1)$$

とし

$$b_k \in e^2(B_t^k) \qquad k = 1, 2, \cdots, d$$

をとり

$$m_t = \exp\left\{\sum_{k=1}^{d} b_k \cdot B_t^k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} |b_k(\tilde{x}_s)|^2 ds\right\}$$

とおく。もし $k(x) \geqq c > 0$ のときには $\sup_{x\in R^d} \widetilde{E}_x(T) < \infty$ であるのでもし 各 b_k が有界であれば 上の（**）はみたされしたがって仮定がみたされることになる。したがって X_t の drift の変換 X_t^M を考えることができる。さらに $k(x)$ $b_k(x)$ が適当な正則性の条件をみたせば，第3章の議論が適用できて X_t^M に対応する semi-linear parabolic equation は

$$(4.30) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + \sum_{k=1}^{d} b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + k(x)\left(F[x; u] - u\right)$$

となり，$T_t^M \hat{f} = u(t, x)$， $f \in C^*(S)$ は (4.30) の初期値 f の解である。

すなわち X_t の M_t による変換は semi-linear parabolic equation の

---

*1) このとき $\langle B_t^{(k)} \rangle = t$ $k = 1, 2, \cdots, d$ である。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

drift の変換を引きおこす。

変換の一般論から，X_t^M は X_t に絶対連続であるから，その意味で，(4.30)と X_t の semi-linear parabolic equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + k(x)(F[u]-u) \tag{4.31}$$

とは一つの class と考えるべきであることがわかる。これは普通の Brownian motion のときの事情が，Branching Markov process に対しても成立していることを示している。

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

文 献 表

Bartlett, M.S. [1] (1955) *An introduction to Stochastic Processes with special reference to methods and applications.* Cambridge University Press.

Bharucha-Reid, A.T. [1] (1960) *Elements of the theory of Markov processes and their applications.* Mcgraw-Hill.

Courrège, P. et P. Priouret, [1] (1964) *Temps d'arret d'une fonction aléatoire: propriétés de décomposition,* C.R. Acad. Sci. Paris, t.259, 3933-3935.

——— et ———, [2] (1964) *Temps d'arrt d'une fonction aléatoire: relations d'equivalence associées et propriétés de décomposition,* Séminaire de calcul des probabilités, 1-33.

Dynkin, E.B. [1] (1965) *Markov processes.* Springer.

Feller, W. [1] (1950) *An introduction to probability theory and its applications,* Vol. 1, Wiley.

——— [2] (1957) *On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations.* Ann. Math. 65. 527-570.

Fisher, R.A. [1] (1930) *The genetical theory of natural selection.* Oxford Univ. Press. Dover, 1958.

Friedman, A. [1] (1964) *Partial differential equations of parabolic type,* Prentice-Hall.

Galmarino, A.R. [1] (1963) *A test for Markov times,* Rev. Un. Mat., Argentina 21 173-178.

Gelfand, I.M. [1] (1963) *Some problems in the theory of quasi-linear equations,* Amer. Math. Soc. Translation Series 2 Vol. 29.

Harris, T.E. [1] (1963) *The theory of branching processes.* Springer.

Ikeda, N., M. Nagasawa and K. Sato, [1] (1964) *A time reversion of*

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

Markov processes with killing. Kodai Math. Sem. Rep. Vol. 16, 88-97.

Ikeda, N., M. Nagasawa and S. Watanabe, [1] (1965) *On branching Markov processes*. Proc. Japan Acad. Vol. 41, 816-821.

Ikeda, N. and S. Watanabe, [1] (1962) *On some relations between the harmonic measure and the Lévy measure for a certain class of Markov processes*. Jour. Math. Kyoto Univ. Vol. 2, 79-95.

Ionescu Tulcea, C. [1] (1949) *Mesures dans les espaces produits*, Atti Acad. Nar Lincei Rend., 7.

Ito, K. [1] (1961) *Lectures on stochastic processes*, Tata inst. Bombay.

Ito, K. and H. P. McKean, Jr. [1] (1965) *Diffusion processes and their sample paths*. Springer.

Ito, K. and Watanabe, S. [1] (1965) *Transformation of Markov processes by multiplicative functionals*. Ann. Inst. Fourier, Vol. 15, 13-30.

Karlin, S. and McGregor, J. [1] *Spectral representation of branching processes* I, II (*to appear*).

Kelley, J. L. [1] (1955) *General topology*. Van Norstrand.

Kendall, D. G. [1] (1949) *Stochastic processes and population growth*, J. Royal Stt Statist. Soc. B. Vol. 11, 230-264.

—————— [2] (1952) *Les processus stochastiques de croissance en biologie*, Ann. Inst. H. Pioncaré, Vol. 13, 45-108.

Kolmogoroff, A., I. Petrovsky, and N. Piscounoff, [1] (1937) *Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*. Bulletin de l'Université d'état à Moscou Vol. 1, Fasc. 6, 1-25.

Kolmogoroff, A. and N. A. Dmitriev, [1] (1947) *Branching stochastic processes*. Doklady Vol. 56, 5-8.

Kondo, R. [1] (1962) *Markov 過程と Potential*, Sem. on Prob. Vol. II.

Kunita, H. [1] (1962) *Applications of Martin boundaries to instantaneous return Markov processes over a denumerable space*.

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

Jour. Math. Soc. Japan Vol. 14, 66-100.

Kunita, H. and T. Watanabe, [1] (1963) *Notes on transformations of Markov processes connected with multiplicative functionals.* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A Math. Vol. 17, 181-191.

Loomis, L. H. [1] (1953) *An introduction to abstract harmonic analysis.* Van Norstrand.

McKean, H. P. [1] (1956) *Elementary solutions for certain parabolic partial differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc. 82, 519-548.

Meyer, P. A. [1] (1962) *Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov.* Ann. Inst. Fourier, Vol. 12, 125-230.

———— [2] (1960/61) *Séminaire de Théorie du Potentiel 5è année.*

Motoo, M. [1] (1963) マルコフ過程の *Additive functional.* Sem. on Prob. Vol. 15.

Motoo, M. and S. Watanabe [1] (1965) *On a class of additive functionals of Markov processes,* Jour. Math. Kyoto Univ. Vol. 4, 429-469.

Moyal, J. E. [1] (1957) *Discontinuous Markov processes.* Acta Math. Vol. 98, 221-264.

———— [2] (1962) *The general theory of stochastic population processes.* Acta Math. Vol. 108, 1-31.

Murray, F. J. and J. von Neumann, [1] (1936) *On rings of operators,* Ann. Math. Vol. 37, 116-229.

Murakami, H. [1] (1957) *On non-linear partial differential equations of parabolic types,* I, II, III, P Proc. Japan Acad. Vol. 33, 530-535, 616-621, 622-627.

Nagasawa, M. [1] (1961) *The adjoint process of diffusion with reflecting barrier,* Kodai Math. Sem. Rep. Vol. 13, 235-248.

Nagasawa, M. and K. Sato, [1] (1963) *Some theorems on time change and killing of Markov processes.* Kodai Math. Sem. Rep. Vol. 15, 195-219.

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

Neveu, J. [1] (1964) *Bases Mathématiques du calcul des probabilités*, Masson.

Nomoto, H. and N. Ikeda, [1] *A note on weak convergence of additive functionals concerning some discontinuous Markov processes.* (準備中)

Prohorov, Yu. V. [1] (1956) *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory*, Theory Prob. Appl. Vol. 1, 177-238.

Ryser, H. J. [1] (1963) *Combinatorial Mathematics*, Wiley.

Sato, K. and T. Ueno, [1] (1965) *Multi-dimensional diffusion and Markov process on the boundary*, Journal Math. Kyoto Univ. Vol. 4, 529-605.

Schatten, R. [1] (1943) *On the direct product of Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 53, 195-217.

Sevastyanov, B. A. [1] (1958) *Branching stochastic processes for particles diffusing in a restricted domain with absorbing boundaries*, Theory Prob. Appl. Vol. 3, 121-136.

Skorohod, A. V. [1] (1964) *Branching diffusion processes.* Theory Prob. Appl. Vol. 9, 492-497.

Volkonsky, V. A. [1] (1960) *Additive functionals of Markov processes*, Trudy Moskov. Mat. Obshc. Vol. 9, 143-189.

Watanabe, S. [1] (1964) *On discontinuous additive functionals and Lévy measure of a Markov process*, Japanese Jour. Math. Vol. 34, 53-70.

———— [2] (1965) *On the branching process for Brownian particles with an absorbing boundary*, Jour. Math. Kyoto Univ. Vol. 4, 385-398.

Watanabe, T. [1] (1963) *A remark on the strong Markov property*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, Math. Vol. 17, 176-180.

Watanabe, T. I. [1] (1966) 修士論文 (Nagoya Univ.)

Wing, G. M. [1] (1962) *An introduction to transport theory.* Wiley.

Yosida, K. [1] (1951) 位相解析 I, 岩波書店.

Sem. on Probab.
Vol.23-II 1966年
P141-247

Zorotarev, [1] (1957) *More exact statements of several theorems in the theory of branching processes.* Theory Prob. Appl. Vol. 2, 256-266.

Sem. on Probab.
Vol.23-Ⅱ 1966年
P141-247

1966年1月発行 確率論セミナー