SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 17

Markov 過程と Martin 境界

国 田 寛

数理解析研究所

1963

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

まえがき

このノートの目的は *Markov chain* や *Brown* 運動，多次元 *diffusion* の *Martin* 境界論を統一的に取り扱うことである。その一般化の目やすとしては上記のものの他に，*Hunt* の仮定(F)をみたす *process* ([12] III, [39])，かなり一般な *space-time process*, *regular step process* （又は時間系数が離散的な *Markov* 過程）を含むことを目標としている。

Markov 過程の *Martin* 境界論は大別すれば，比較的解析的な方法（*Martin* [29], *T. Watanabe* [44] 等）と確率論的方法（*Hunt* [12]）がある。このノートでは確率論的方法を主にし，上記 *Hunt* の方法に *Ray* [36] の理論を援用してのべた．

1章～3章は準備の章である．1章では優調和変換等 *Markov* 過程の変換の問題を論ずる．2章では *excessive function*, *superharmonic function*, *potential* 等の相互関係を調べる。3章では *resolvent kernel* の *density* の正則化の問題と *dual* な *resolvent* についてのべる。

4章では *Green* 函数による *potential* の *Riez* 型の表現の問題を考える。5章では *Martin* 境界を定義し，*excessive function* (*superharmonic function*) の *extreme* なものによる表現の問題の外に，*path* の *terminal distribution* の分布や境界点の分類（*exit* 境界と *pasive* 境界）にもふれる。6章は *Martin* 境界上の *Dirichlet* 問題で，*Perron-Wiener* 型の解の存在の問題と，*Naïm* [32], *Doob* [7] の解の境界での収束の問題を論ずる。

7章は5章で扱い得なかった別の型の *Markov* 過程の *Martin* 境界論である。その他 *dual* 境界や，それに関連して *Naïm* の Θ-*kernel* についてもふれる予定であったが時間の関係で省略した。又解析学の他分野における表現の問題との関連もここでは一切ふれなかった。これらに関しては文献 [10, 13, 25, 38, 43, 48, 50] を参照されたい。

このノートは，かつて渡辺毅氏と九州大学での確率論セミナーで行なった報告及び，その後同氏との相互通信で得た知識をもとにして著者がまとめたものであ

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

る。又4，5章における *reversed process* の構成の問題では，長沢，佐藤氏の研究を参照させていただいた。校正にあたっては九州大学の確率論セミナーの諸氏の援助をいただいた。ここに深く感謝の意を表わしたい。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

目　　次

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

MARKOV過程とMARTIN境界

第1章 Standard process の multiplicative functional による変換

優調和変換（§2.3）は Markov 過程の Potential 論的な側面，特に Martin 境界論において有効な役割を果たすことが知られているが（例えば Doob [7]，Hunt [18] 等），その際，優調和変換された process の path の regularity が当然問題になる。Doob は [7] で Brown 運動の優調和変換はやはり連続な path をもつことを示している。

この章の目的は，standard process の場合に類似の結果を得ることであるが；その方法は優調和変換だけでなく一般の multiplicative functional による変換でも全く同じなので，multiplicative functional による変換の問題として取扱う。

Multiplicative functional は優調和変換の他に，killing やいわゆる drift の変換等を含み，process の変換を統一的に取り扱うために Dynkin [12, 14] によって導入された。そこでは path の regularity（あるいは path の構成）の問題がここで述べるのと全く違った方法で論じられている。

§0. 記 号

S を局所 compact な第二可算公理をみたす Hausdorff の空間とし，$S^* = S \cup \Delta$ は S に一点 Δ を孤立点としてつけ加えた空間である。$\mathbb{B}_S$，$\mathbb{B}_{S^*}$ は S，S^* の位相的 Borel 集合体とし $M^+(S)$，$M^+(S^*)$ を $\mathbb{B}_S$，$\mathbb{B}_{S^*}$ 上の（非負）有界測度の全体とする。$\mathbb{B}_S^\mu$（$\mathbb{B}_{S^*}^\mu$）を $\mathbb{B}_S$（$\mathbb{B}_{S^*}$）の μ による完備化とし，

$$(1.1)\qquad \overline{\mathbb{B}}_S = \bigcap_{\mu\in M^+(S)} \mathbb{B}_S^\mu, \qquad \overline{\mathbb{B}}_{S^*} = \bigcap_{\mu\in M^*(S^*)} \mathbb{B}_{S^*}^\mu$$

とおく。

S 上の種々の函数族を次の記号で表わす。

$\mathbb{B}(S)$ ： 有界な $\mathbb{B}_S$-可測函数の全体，

$\overline{\mathbb{B}}(S)$ ： 有界な $\overline{\mathbb{B}}_S$-可測函数の全体，

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$\mathbb{C}(S)$: 有界な連続函数の全体

$\mathbb{C}_0(S)$: compact な carrier をもつ連続函数の全体

$\mathbb{B}_0(S)$: $f\in\mathbb{B}(S)$ で $\overline{\{x: f(x)\neq 0\}}$ が compact なものの全体

上の各函数の族の内非負の値をとるものの全体を $\mathbb{B}^+(S)$, $\mathbb{B}^+(S)$, …, $\mathbb{B}_0^+(S)$ 等と表わす。更に

$\mathbb{A}^+(S)$: 非負な $\mathbb{B}_S$-可測函数の全体

$\bar{\mathbb{A}}^+(S)$: 非負な $\bar{\mathbb{B}}_S$-可測函数の全体

T を半直線 $[0,\infty)$, T^* を T に ∞ をつけ加えて compact 化した区間 $[0,+\infty]$ とし，その位相的 Borel 集合体を $\mathbb{B}_T$, $\mathbb{B}_{T^*}$ で表わす。

T^* から S^* への写像を ω で表わし，その $t\in T^*$ での値を $x_t(\omega)$ 又は x_t, $x(t,\omega)$ 等と書く。$x_\infty(\omega)=\Delta$ をみたす写像の全体を Ω_{S^*} で表わす。$\omega\in\Omega_{S^*}$ に対し stopped path ω_t^-, shifted path ω_t^+ を

(1.2)
$$x_s(\omega_t^-)=x_{s\wedge t}(\omega) \qquad s<\infty$$
$$=\Delta \qquad s=\infty .$$
$$x_s(\omega_t^+)=x_{s+t}(\omega)$$

によって定義する。次の $(\Omega.1)$, $(\Omega.2)$ をみたす Ω を path space という：

$(\Omega.1)$ $\Omega\subset\Omega_{S^*}$

$(\Omega.2)$ $\omega\in\Omega \Rightarrow \omega_t^-,\ \omega_t^+\in\Omega$

更に次の $(\Omega.3)$ をみたすとき I-M 型（Ito-McKean 型）な path space といい，ζ を terminal time という。

$(\Omega.3)$ Ω 上の非負函数 $\zeta(\omega)$ が存在して

(1.3)
$$x_t(\omega)\in S \qquad t<\zeta(\omega)$$
$$x_t(\omega)=\Delta \qquad t>\zeta(\omega)$$

$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_t$ $(t\in T)$ は次の条件をみたす Ω 上の σ-algebra の系とする。

$(\mathfrak{F}.1)$ $\mathfrak{F}\supset\mathfrak{F}_t$ $(\forall t\in T)$

$(\mathfrak{F}.2)$ $\mathfrak{F}_t$ は $\{\omega: x_r(\omega)\in E\}$ $(\forall r\leq t,\ \forall E\in\mathbb{B}_{S^*})$ を含む。

$(\mathfrak{F}.3)$ $s>t \Rightarrow \mathfrak{F}_s\supset\mathfrak{F}_t$

Ω 上に定義された非負函数 σ が $\{\sigma<t\}\in\mathfrak{F}_t$ $(\forall t\in T)$ をみたすとき，

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$(\mathfrak{F})$-Markov time という。$\mathfrak{F}$ の要素 A で $A \cap \{\sigma < t\} \in \mathfrak{F}_t$ をみたすものの全体を $\mathfrak{F}_{\sigma+}$ で表わす。$\mathfrak{F}_{\sigma+}$ は $\mathfrak{F}$ に含まれる σ-algebra。なお特に $(\mathfrak{F}.1) \sim (\mathfrak{F}.3)$ をみたす最小の σ-algebra を $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_t$ で表わし，それに応じて $(\mathcal{L})$-Markov time, $\mathcal{L}_{\sigma+}$ 等の記号を使う。

§1. Markov 過程

この§は§3のための準備であって，Markov 過程の path space の制限に関する Dynkin の結果 [12] をのべる。つまりある path space Ω 上の Markov 過程があったとき，それと同値な Markov 過程で，Ω の部分集合 L を path space に持つ様な Markov 過程が存在するための一つの十分条件をのべる。

$(\Omega, \mathfrak{F})$ 上の確率測度の系 $\{P_x : x \in S^*\}$ が次の $(X.1) \sim (X.3)$ をみたすとき $X = (\Omega, \mathfrak{F}, P_x : x \in S^*)$ を $(S^*, \mathcal{B}_{S^*})$ 上の（又は $(S^*, \overline{\mathcal{B}}_{S^*})$ 上の）Markov 過程という。

$(X.1)$ $P_x(A)$ は $A \in \mathfrak{F}$ を固定すると $\mathcal{B}_{S^*}$-可測（又は $\overline{\mathcal{B}}_{S^*}$-可測）

$(X.2)$ $P_x(x_0(\omega) \in S - x) = 0$ かつ $P_\Delta(x_t = \Delta) = 1$ $(\forall t \geq 0)$

$(X.3)$ (Markov 性) 任意の $t \in T$, $A \in \mathfrak{F}_t$, $B \in \mathcal{L}$ に対し

$$P_x(\omega_t^+ \in B, A) = E_x(P_{x_t}(B) : A) \tag{1.4}$$

ここに E_x は P_x による積分を表わす。

L を Ω の部分 path space で各 $x \in S^*$ に対し L の P_x-外測度が 1 とする。r を L から Ω の中への自然な写像とし $\mathcal{G} = r^{-1}(\mathfrak{F})$, $\mathcal{G}_t = r^{-1}(\mathfrak{F}_t)$ とおき $A \in \mathfrak{F}$ に対して

$$\overline{P}_x(r^{-1}(A)) = P_x(A)$$

とおけば $\{\overline{P}_x : x \in S^*\}$ は $(L, \mathcal{G})$ 上に制限された確率測度となり

$$\overline{P}_x(x_{t_1} \in E_1, \cdots, x_{t_n} \in E_n) = P_x(x_{t_1} \in E_1, \cdots, x_{t_n} \in E_n) \tag{1.5}$$

$$(0 < t_1 < \cdots < t_n,\ E_i \in \mathcal{B}_{S^*})$$

をみたす。このことから $\overline{X} = (L, \mathcal{G}, \overline{P}_x : x \in S^*)$ も Markov 過程になることが容易にわかる。この $\overline{X}$ を，X の path space を L に制限した Markov 過程と呼ぶことにする。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

Lemma 1.1. (Dynkin [12, Theorem 2.8]). $X=(\Omega, \mathcal{B}, P_x : x\in S^*)$ を Markov 過程，LをΩの部分 path space とする．次の様なqが存在したとする。$q(t_1, x_1, \cdots, t_n, x_n, \cdots)$ $(0\leq t_1, t_2, \cdots t_n, \cdots<\infty$, $x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots \in S^t)$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の函数として $\mathbb{B}_{S^*}^{\infty}$[1]-可測な非負函数で，$T$で dense な任意の $\{t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots\}$ に対して

(q.1) $q(t_1, x_1, \cdots t_n, x_n \cdots)=0$ ならば $\omega\in L$ が存在して $x_{t_n}(\omega)=x_n$

(q.2) $E_x(q(t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots))=0$

そうすればXの path space をLに制限出来る。

証明。 $A\in\mathcal{B}$ かつ $A\supset L$ ならば $P_x(A)=1$ を言えばよい。$\mathcal{B}$は$\{x_t\in E\}$ $(t\in T,\ E\in\mathbb{B}_{S^*})$ を含む最小の σ-algebra であることから $\mathbb{B}_{S^*}^{\infty}$-可測函数 $f(x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ が存在してAの特性函数 χ_A は

$$\chi_A(\omega)=f(x_{t_1}(\omega), \cdots, x_{t_n}(\omega), \cdots)$$

と書ける．$\{t_1, t_2, \cdots\}$ はTで dense としてよい。$\omega_0\notin A$ ならば $q(t_1, x_{t_1}(\omega_0), \cdots, t_n, x_{t_n}(\omega_0), \cdots)\neq 0$ である。実際 $=0$ ならば (q.1)より $\omega_1\in L$が存在して $x_{t_k}(\omega_1)=x_{t_k}(\omega_0)$ $(\forall k)$.
ゆえに $\chi_A(\omega_0)=\chi_A(\omega_1)=1$． 即ち $\omega_0\in L$ となり矛盾である．

$$P_x(A)\geqq P_x(q(t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots)=0)=1 .$$

Proposition 1.1. $X=(\Omega, \mathcal{B}, P_x : x\in S^*)$ を Markov 過程とする。

(1.6) $\hat{\Omega}=\{\omega\in\Omega$; ある $t\geqq 0$ で $x_t(\omega)=\Delta$ なら $\forall s\geqq t$ で $x_s(\omega)=\Delta\}$

とおけばXの path space は $\hat{\Omega}$ に制限出来る。

証明

$$q(t_1, x_1, \cdots, t_n, x_n, \cdots)=\sum_{t_i>t_j}\chi_S(x_i)\ \chi_\Delta(x_j)$$

とおけばqは非負 $\mathbb{B}_{S^*}^{\infty}$-可測函数であり (q.1)をみたすことは明らか ($L=\hat{\Omega}$ とみて)．

---

1) $(S^*, \mathbb{B}_{S^*})$の可算無限直積空間の σ-algebra.

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$E_x(q(t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots)) = \sum_{t_i > t_j} P_x(x_{t_i} \in S,\ x_{t_j} = \Delta)$$

$$= \sum_{t_i > t_j} E_x(P_{x_{t_j}}(x_{t_i - t_j} \in S);\ x_{t_j} = \Delta) = 0$$

だから q は (q.2) をもみたす．したがって Lemma 1.1. により X の path space は $\hat{\Omega}$ に制限出来る。

Proposition 1.1. は一般の Markov 過程は，それと同値な I-M 型 path space をもつ Markov 過程に変形出来ることを示している。今後 I-M 型 path space をもつ Markov 過程を I-M 型 Markov 過程と呼ぶことにする。

<u>Lemma 1.2.</u> (Dynkin [12, Theorem 6.1]). $X = (\Omega, \mathcal{B}, P_x : x \in S^*)$ を I-M 型 Markov 過程とし，L を Ω に含まれるある path space とする。$q(X; t_1, x_1, \cdots, t_n, x_n, \cdots)$ ($\lambda \in T^*$, $t_1, \cdots, t_n, \cdots \in T$, $x_1, \cdots, x_n, \cdots \in S$) は $\lambda, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ の函数とみて $\mathcal{B}_T \times \mathcal{B}_{S^*}^{\infty}$-可測な非負函数で，任意の T で dense な $\{t_1, t_2, \cdots\}$ に対して次の (q'.1)〜(q'.3) をみたすとする。

(q'.1) $t_i < \lambda$ なるすべての i で $x_i = x_i'$ ならば

$$q(\lambda; t_1, x_1, \cdots, t_n, x_n, \cdots) = q(\lambda; t_1, x_1', \cdots, t_n, x_n', \cdots)$$

(q'.2) $q(\lambda, t_1, x_1, \cdots, t_n, x_n, \cdots) = 0$ ならば $x_{t_i}(\omega) = x_i$ ($t_i < \lambda$), $= \Delta$ ($t_i > \lambda$) をみたす $\omega \in L$ が存在する．

このとき X の path space を L に制限出来る．

証明． 点列 $\{x_n\}$ ($x_n \in S^*$) に対し

$$\lambda(\{x_n\}) = \inf\{t_n;\ x_n = \Delta\}$$

$$\Phi_i(t_1, x_1, \cdots, t_n, x_n, \cdots) = \begin{cases} 1 & t_i > \lambda(\{x_n\}) \text{ かつ } x_i \in S \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

$$\tilde{q}(t_1, x_1, \cdots, t_n, x_n, \cdots) = q(\lambda(\{x_n\});\ t_1, x_1, \cdots, t_n, x_n, \cdots) + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(t_1, x_1, \cdots, t_n, x_n, \cdots)$$

とおけば $\tilde{q}$ は $x_1', x_2', \cdots$, に対して $\mathcal{B}_{S^*}^{\infty}$-可測な非負函数である．$\tilde{q}$ が Lemma 1.1. の (q.1)〜(q.2) をみたすことを言えばよい。もし $\tilde{q}(t_1, x_1, \cdots, t_n, x_n, \cdots) = 0$ ならば $q(\lambda\{x_n\}; t_1, x_1, \cdots) = 0$ かつすべての

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$t_i > \lambda(\{x_n\})$ で $x_i = \Delta$．したがって（$q'.2$）より $\omega \in L$ が存在して $x_{t_i}(\omega) = x_i$ $(t_i < \lambda(\{x_n\}))$，$= \Delta$ $(t_i > \lambda(\{x_n\}))$ と出来る。$\omega \in \Omega$ のとき

$$\lambda\{(x_{t_n}(\omega))\} = \zeta(\omega), \qquad \Phi_i(t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots) = 0$$

だから

$$\tilde{q}(t_1, x_{t_1}(\omega), \cdots, t_n, x_{t_n}(\omega), \cdots) = q(\zeta(\omega), t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots)$$

ゆえに（$q.3$）より

$$E(\tilde{q}(t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots)) = 0$$

これで $\tilde{q}$ が（$q.1$）～（$q.2$）をみたすことがわかった。

Markov 過程の推移確率を

$$(1.7) \qquad H_t(x, E) = P_x(x_t \in E) \qquad x \in S, \quad E \in \mathbb{B}_S$$

で定義する．$H_t(x, E)$ は次の性質をもつ．

（$H.1$） $H_t(x, E)$ は x に関して $\mathbb{B}_S$-可測かつ $H_t(x, S) \leq 1$，

（$H.2$） （*Chapman-Kolmogorov* の方程式）

$$\int_S H_t(x, dy) H_s(y, E) = H_{t+s}(x, E).$$

一般に（$H.1$）～（$H.2$）をみたす $H_t(x, E)$ があった場合それを推移確率と呼ぶ。

Proposition 1.2. 推移確率 $H_t(x, E)$（$S \times \mathbb{B}_S$）が与えられたとき（1.7）をみたす I-M 型 *Markov* 過程が存在する．（証略）

§2. *Standard process*.

次の（$W.1$）～（$W.2$）をみたす $\omega \in \Omega_{S^\times}$ から成る I-M 型 *path space* を W で表わす．

（$W.1$） W 上に定義された非負函数（$+\infty$ も許す）$\zeta(\omega)$ が存在して

$$x_t(\omega) \in S \quad (t < \zeta(\omega)), \qquad x_t = \Delta \quad (t \geqq \zeta(\omega))$$

（$W.2$） $x_t(\omega)$ は $t \in [0, \zeta(\omega))$ で右連続かつ左極限をもつ。

$X = (W, \mathfrak{F}, P_x : x \in S^*)$ が（$X.1$）の他に次の（$X.2'$），（$X.4$），（$X.5$）

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

をみたすとき，Xを$(S, \mathbb{B}_{S^*})$上の（又は$(S, \overline{\mathbb{B}}_{S^*})$上の）$(\mathfrak{F})$-standard process という。

(X. 2′) $P_x(x_0 = x) = 1$

(X. 4) （強 Markov 性）．任意の$(\mathfrak{F})$-Markov time τ, $A \in \mathfrak{F}_{\tau+}$, $B \in \mathcal{L}$ に対して

$$(1.8) \qquad P_x(\omega_\tau^+ \in B, A) = E_x(P_{x_\tau}(B) : A)$$

(X.5) （Quasi-左連続性）．$\{\tau_n\}$を単調増大する$(\mathfrak{F})$-Markov time の列で $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$ とすれば

$$(1.9) \qquad P_x(x_{\tau_n} \to x_\tau,\ \tau < \zeta) = P_x(\tau < \zeta).$$

$\mu \in M^+(S^*)$ に対して $P_\mu(\cdot) = \int \mu(dx) P_x(\cdot)$ と書き $\mathfrak{F}$ の P_μ-completion を$\mathfrak{F}^\mu$と書く。同様に$\mathfrak{F}_t$ の P_μ-completion を $\mathfrak{F}_t^\mu$ と書く。

$$\overline{\mathfrak{F}} = \bigcap_{\mu \in M^+(S^*)} \mathfrak{F}^\mu, \qquad \overline{\mathfrak{F}}_t = \bigcap_{\mu \in M^+(S)} \mathfrak{F}_t^\mu$$

とおく。$(\overline{\mathfrak{F}})$-Markov time τ に対する $\overline{\mathfrak{F}}_{\tau+}$ の定義は §0 と同じである．P_x は当然 $\overline{\mathfrak{F}}$ 上に拡張される。

$(\overline{\mathfrak{F}})$-standard process に関しては種々重要な結果が知られている（例えば analytic set への hitting time が$(\overline{\mathfrak{F}})$-Markov time になることなど），したがって$(\mathfrak{F})$-standard process があった場合，それが$(\overline{\mathfrak{F}})$-standard process に変形することは重要である。

定理 1.1 （T. Watanabe [47]）． $X = (W, \mathfrak{F}, P_x : x \in S^*)$ が $(S^*, \mathbb{B}_{S^*})$（あるいは$(S^*, \overline{\mathbb{B}}_{S^*})$）上の$(\mathfrak{F})$-standard processならば $\overline{X} = (W, \overline{\mathfrak{F}}, P_x : x \in S^*)$ は$(S^*, \overline{\mathbb{B}}_{S^*})$ 上の$(\overline{\mathfrak{F}})$-standard processである。

証明． (X.1)，(X.2′) は明らか。$x \in S^*$を固定して考える。

1°． τが$(\overline{\mathfrak{F}})$-Markov time なら$(\mathfrak{F})$-Markov time $\tilde{\tau}$ を適当にとって $P_x(\tau = \tilde{\tau}) = 1$ と出来る。実際 $E_n^{(k)} = \{\omega ; \frac{k}{\alpha^n} \le \tau < \frac{k+1}{\alpha^n}\}$ とおけば $E_n^{(k)} \in \overline{\mathfrak{F}}_{\frac{k}{\alpha^n}}$ だから $P_x(\tilde{E}_n^{(k)} \ominus E_n^{(k)}) = 0$ をみたす $\tilde{E}_n^{(k)} \in \mathfrak{F}_{\frac{k}{\alpha^n}}$ をとり

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_n(\omega) &= \frac{k+1}{\alpha^n} \qquad \omega \in \tilde{E}_n^{(k)} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \\ &= \infty \qquad \text{その他のとき} \end{aligned}$$

とおくと $\tilde{\tau}_n$は$(\mathfrak{F})$-Markov time である．しかも $\tilde{E}_n^{(k)}$を適当に選べば

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$\tilde{\tau}_n \uparrow (n\uparrow)$ と出来る. $\tilde{\tau}_n \uparrow \tilde{\tau}$ とおくと $P_x(\tilde{\tau}=\tau)=1$ であり $\{\tilde{\tau}<t\} = \bigcup_n \{\tilde{\tau}_n < t\} \in \mathfrak{F}_t$ だからこの $\tilde{\tau}$ が求めるものである.

2°. $\forall A \in \bar{\mathfrak{F}}_{\tau+}$ に対し $P_x(A \ominus \tilde{A})=0$ をみたす $\tilde{A} \in \mathfrak{F}_{\tilde{\tau}+}$ が存在することを示す. $A_t = A \cap \{\tau < t\}$ とおくと, (イ) $\tilde{A}_t \in \mathfrak{F}_t$, (ロ) $P_x(A_t \ominus \tilde{A}_t)=0$, (ハ) $\tilde{A}_t (\tilde{A}_s (t<s))$, (ニ) $\tilde{A}_t \subset \{\tilde{\tau}<t\}$ をみたす $\tilde{A}_t$ が存在することに注意する. 有理数 t に対し

$$C_t = \tilde{A}_t - \bigcup_{r<t} (\{\tilde{\tau}<r\} - \tilde{A}_r) \qquad (r: \text{有理数})$$

とおけば C_t は ($t<s$ のとき) (イ) $C_t \in \mathfrak{F}_t$, (ロ) $P_x(A_t \ominus C_+)=0$, (ハ) $C_t \subset C_s$, (ニ) $C_t \subset \{\tilde{\tau}<t\}$, (ホ) $C_s \cap \{\tilde{\tau}<t\} = C_t$ をみたす (イ), (ニ) は明らか. (ロ)は $P_x(\tilde{A}_t \cap \{\tilde{\tau}<r\} \ominus \tilde{A}_r)=0$ に注意すればよい. 次に (ハ) $C_s = \tilde{A}_s \cap [\bigcap_{r<s} \{\tilde{\tau} \geqq r\} \cup \tilde{A}_r]$ と書けるから (ハ), (ニ) より

$$C_s \supset \tilde{A}_t \cap [\bigcap_{r<s} \{\tilde{\tau} \geqq r\} \cup \tilde{A}_r] = \tilde{A}_t \cap [\bigcap_{r<t} \{\tilde{\tau} \geqq r\} \cup \tilde{A}_r] = C_t$$

最後に (ホ). (ハ), (ニ)から $C_s \wedge \{\tilde{\tau}<t\} \supset C_t$ は明らかだから $\subset$ を示せばよいが, このことは次の計算からわかる.

$$C_s \wedge \{\tilde{\tau}<t\} = \tilde{A}_s \cap \{\tilde{\tau}<t\} \cap [\bigcap_{r<t} \{r<\tilde{\tau}<t\} \cup \tilde{A}_r] \cap [\bigcap_{s>r\geqq t} \tilde{A}_r \wedge \{\tilde{\tau}<t\}]$$

$$\leqq \tilde{A}_+ \wedge [\bigcap_{r<t} \{\tilde{\tau}>r\} \cup \tilde{A}_r] = C_t$$

さて $A_\infty = A \wedge \{\tau=\infty\}$ に対し $P_x(A_\infty \ominus C_\infty)=0$ かつ $C_\infty \subset \{\tilde{\tau}=\infty\}$ をみたす $C_\infty \in \mathfrak{F}$ を選び $\tilde{A} = \bigcup_r C_r \cup C_\infty$ (r: 有理数) とおけば

$$\tilde{A} \wedge \{\tilde{\tau}<t\} = \bigcup_{r<t} C_r \in \mathfrak{F}_t$$

かつ $P_x(A \ominus \tilde{A})=0$. したがってこの $\tilde{A}$ が求めるものである.

3°. (X.4) の証明. $A \in \bar{\mathfrak{F}}_{\tau+}$, $B \in \mathcal{L}$ とする. $\tilde{\tau}$, $\tilde{A}$ を1°, 2°で作ったものとすると, Xの強 Markov 性を使って

$$E_x(P_{x_\tau}(B); A) = E_x(P_{x_{\tilde{\tau}}}(B) : \tilde{A}) = P_x(\omega^+_{\tilde{\tau}} \in B, \tilde{A})$$

$$= P_x(\omega^+_\tau \in B, A)$$

---

1) $A \ominus B$は集合 A, Bの対称差を表わす.

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

なお最後の等式の所で $P_x(\{\omega_\tau^+ \in B\} \ominus \{\omega_{\tilde\tau}^+ \in B\}=0$ であることを使ったが，このことは $\chi_B(\omega)=f(x_{t_1}(\omega), \cdots, x_{t_n}(\omega), \cdots)$ (f: $\mathcal{B}_{S^*}^\infty$-可測）と書けることから明らかである．

4°. (X.5) の証明． $\{\tau_n\}$ を $(\tilde{\mathcal{F}})$-Markov time の列で $\tau_n \uparrow \tau$ とする． 1° より各 τ_n に対して $P_x(\tau_n=\tilde\tau_n)=1$ なる $(\mathcal{F})$-Markov time $\tilde\tau_n$ が存在する． $\hat\tau_n = max(\tilde\tau_1, \cdots, \tilde\tau_n)$ とおけば $\hat\tau_n$ は $(\mathcal{F})$-Markov time の単調増大列． $\hat\tau = \lim_{n\to\infty} \hat\tau_n$ とおくと $P_x(\hat\tau=\tau)=1$. したがって X の quasi-左連続性を使って

$$P_x(\lim_{n\to\infty} x_{\tau_n}=x_\tau;\ \tau<\zeta) = P_x(\lim_{n\to\infty} x_{\hat\tau_n}=x_{\hat\tau};\ \hat\tau<\zeta)$$

$$= P_x(\hat\tau<\zeta) = P_x(\tau<\zeta)$$

今後 $(S, \mathcal{B}_{S^*})$ 上の $(\mathcal{B})$-standard process に関して定理 1.1 で得られた $(\bar{\mathcal{B}})$-standard process のことを単に standard process という．又 $(\bar{\mathcal{B}})$-Markov time のことを単に Markov time ということがある．

S の部分集合 E への hitting time σ_E を

$$\sigma_E(\omega) = inf\{t>0;\ x_t(\omega)\in E\} \quad \text{その様な } t \text{ が存在するとき}$$

$$= \infty \qquad \text{その他のとき}$$

によって定義する．

<u>定理 1.2</u> E を S の analytic set[1] とする． $X=(W, \bar{\mathcal{B}}, P_x; x\in S^*)$ が standard process ならば

(i) σ_E は Markov time である．

(ii) E に含まれる compact set の列 $\{K_n\}$ が存在して $P_\mu(\sigma_{K_n}\downarrow\sigma_E)=1$ と出来る．($\mu(S)=1$)．

(iii) $\mu(E)=0$ とする． E を含む open set の列 $\{G_n\}$ が存在して $P_\mu(\sigma_{G_n}\uparrow\sigma_E)=1$ と出来る．($\mu(S)=1$)

証明は近藤 [24] にある．

注意． $E\subset S$ とする．適当な analytic (Borel) set E_1, E_2 が存在して

---

1) 定義は近藤 [24; p23] を参照。特に $E\in\mathcal{B}_S$ は analytic set．

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$E_1 \subset E \subset E_2$ かつ P_μ（すべての t で $x_t \in E_1$ と $x_t \in E_2$ は同値）$=1$ のとき E を nearly analytic (nearly Borel) set という。定理1.2は nearly analytic set にまで拡張される。

§3. Multiplicative functional による変換

$X=(W, \mathcal{B}, P_x : x \in S^*)$ を standard process とする。

<u>定義</u>　$\alpha_t(\omega)$ $(t \in T)$ が multiplicative functional とは

(α.1)　$\alpha_t(\omega)$ は非負 $\mathcal{B}_t$-可測.

(α.2)　$\alpha_t(\omega)$ は t に関して右連続かつ $\alpha_\zeta(\omega)=0$　(a.e. P_x).

(α.3)　$P_x(\alpha_t(\omega)\alpha_s(\omega_t^+)=\alpha_{t+s}(\omega)$ がすべての $s,t \geq 0$ で成立$)$ $=1$.

(α.4)　$E_x(\alpha_t)$ は x に関し nearly Borel measurable かつ $E_x(\alpha_t) \leq 1$　$(\forall t, \forall x)$.

注意　(α.3)から $t \geqq \zeta$ のとき $\alpha_t(\omega)=0$ (a.e. P_x).

$E \in \mathbb{B}_S$ に対し

$$H_t^\alpha(x, E) = E_x(\alpha_t \chi_E(x_t)) \tag{1.10}$$

とおけば $H_t^\alpha(x,E)$ は $(S, \mathbb{B}_S)$ 上の推移確率即ち (H.1)〜(H.2) をみたす。(H.1) は明らかだから (H.2) のみを示す。X の Markov 性より

$$H_{t+s}^\alpha(x,E)=E_x(\alpha_{t+s}\,\chi_E(x_{t+s}))=E_x(\alpha_t\alpha_s(\omega_t^+)\,\chi_E(x_s(\omega_t^+)))$$

$$=E_x(\alpha_t E_{x_t}(\alpha_s\,\chi_E(x_s)))=\int H_t^\alpha(x,dy)\,H_s^\alpha(y,E).$$

ただし χ_E は E の特性函数。この推移確率にしたがう I-M 型 Markov 過程を $X^\alpha=(\Omega, \mathcal{B}, P_x^\alpha : x \in S^*)$ で表わす。$\Omega \supset W$ として一般性を失わない。

<u>Proposition 1.3.</u>　$f(x_1, x_2, \cdots)$ を有界 $\mathbb{B}_S^\infty$-可測函数, $t_i \leq t$ とすると

$$E_x^\alpha(f(x_{t_1},\cdots,x_{t_n},\cdots);\ x_t \in S)=E_x(f(x_{t_1},\cdots,x_{t_n},\cdots)\alpha_t) \tag{1.11}$$

$$x \in S$$

証明.　有界 $\mathbb{B}_S$-可測函数 f_j $(j=1,\cdots,m)$,　$0<t_1<\cdots<t_m$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$E_x^\alpha\left(\prod_{j=1}^m f_j(x_{t_j})\right)=E_x\left(\prod_{j=1}^m f_j(x_{t_j})\alpha_{t_m}\right)$$

を示せばよい．これを帰納法で示す．$m=1$ のとき X^α の定義から明らか．$m-1$ のとき成立したとする．X^α の Markov 性から

$$E_x^\alpha\left(\prod_{j=1}^m f_j(x_{t_j})\right)=E_x^\alpha\left(E^\alpha_{x_{t_{m-1}}}(f_m(x_{t_m-t_{m-1}}))\prod_{j=1}^{m-1} f_j(x_{t_j})\right)$$

$$=E_x\left(E_{x_{t_{m-1}}}(f_m(x_{t_m-t_{m-1}})\alpha_{t_m-t_{m-1}})\prod_{j=1}^{m-1} f_j(x_{t_j})\alpha_{t_{m-1}}\right)$$

$$=E_x\left(\prod_{j=1}^m f_j(x_{t_j})\alpha_{t_m-t_{m-1}}(\omega^+_{t_{m-1}})\alpha_{t_{m-1}}\right)$$

$$=E_x\left(\prod_{j=1}^m f_j(x_{t_j})\alpha_{t_m}\right).$$

Proposition 1.4. X^α の path space を W に制限出来る。

証明．ρ を S の位相に compatible な完備な距離とする。$\Lambda=\{t_j;\ j=1,2,\cdots,n,\cdots\}$ を $[0,+\infty)$ で dense な集合とし，$\Lambda_i=\{t_k;\ t_k\geqq t_i\}$ とおく．$\{(t_j,x_j):\ t_j\in\Lambda,\ x_j\in S,\ j=1,2,\cdots\}$ に対し

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\substack{t_j>t_i\\|t_j-t_i|\le\frac1N}}\rho(x_i,x_j)=0$$

及び

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\substack{t_e,t_m>t_i,\,|t_i-t_e|\le\frac1N\\|t_e-t_m|\le\frac1N}}\rho(x_e,x_m)=0$$

が任意の $t_i<\lambda$ で成立するとき $q(\lambda;t_1,x_1,\cdots,t_n,x_n,\cdots)=0$ と定義し，そうでないとき $q(\lambda;t_1,x_1,\cdots,t_n,x_n,\cdots)=1$ と定義する。q は明らかに $\mathbb{B}_T\times\mathbb{B}_S$-可測である．$L=W$ とおいたときこの q が Lemma 1.2 の $(q'.1)\sim(q'.3)$ をみたすことを言えばこの proposition が証明されたことになる．$(q'.1)$ は明らか．今 $q(\lambda;t_1,x_1,\cdots,t_n,x_n,\cdots)=0$ とする．$\omega_0\in\Omega_{S^*}$ を

$$x_t(\omega_0)=x_i\qquad t\in\Lambda\cap[0,\lambda)$$
$$=\lim_{\substack{u\downarrow t\\u\in\Lambda}}x_t(\omega_0)\qquad t\in\Lambda^c\cap[0,\lambda)$$

$$= \Delta \qquad\qquad t \geqq \lambda$$

と定義すれば $x_t(\omega)$ は $[0, \lambda)$ で右連続かつ左極限をもつ. 即ち $\omega_0 \in W$ これで $(q'. 2)$ が言えた. 次に $(q'. 3)$. $\omega \in \Omega$ に対し

$$(1.12) \quad \zeta_m(\omega) = \begin{cases} 0 & \zeta(\omega) = 0 \\ \dfrac{k}{2^m} & \dfrac{k}{2^m} < \zeta(\omega) \leqq \dfrac{k+1}{2^m} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \\ \infty & \zeta = \infty \end{cases}$$

とおく. q は λ に関して左連続だから

$$E_x^\alpha(q(\zeta; t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots))$$

$$= \lim_{n \to \infty} E_x^\alpha(q(\zeta_m; t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots))$$

$$= \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} E_x^\alpha\left(q\left(\frac{k}{2^m}; t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots\right); \frac{k}{2^m} < \zeta \leqq \frac{k+1}{2^m}\right)$$

$$+ \lim_{m \to \infty} \lim_{k \to \infty} E_x^\alpha\left(q\left(\frac{k}{2^m}; t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots\right): \zeta > \frac{k}{2^m}\right)$$

したがって

$$E_x^\alpha\left(q\left(\frac{k}{2^m}; t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots\right): \zeta > \frac{k}{2^m}\right) = 0 \qquad (\forall m, \forall k)$$

を証明すればよい。*Proposition 1.3.* により

$$E_x^\alpha\left(q\left(\frac{k}{2^m}; t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots\right); \zeta > \frac{k}{2^m}\right)$$

$$= E_x\left(q\left(\frac{k}{2^m}; t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots\right) \alpha_{\frac{k}{2^m}}\right) = 0.$$

これで $(q'. 3)$ が証明された。

今後 X^α の *path space* をWに制限したものを $X^\alpha = (W, \mathcal{B}, P_x, x \in S^*)$ と書く。

<u>*Lemma 1.3.*</u> τを任意の $(\mathcal{B})$-*Markov time*, $A \in \mathcal{B}_{\tau+}$ とすれば

$$(1.13) \qquad P_x^\alpha(A, \tau < \zeta) = E_x(\alpha_\tau; A).$$

この *lemma* の証明の前に *super-martingale* に関する結果を準備する。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

一般に $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間, Jを順序集合とする。$Y_t(\omega)$ $(t \in J)$ が実数値確率変数で $E(Y_t) < \infty$ かつ $s \leq t$ のとき $E(Y_t | \mathfrak{F}_s) \leq Y_s$ をみたすとき Y_t を($\mathfrak{F}_t$ に関する) *super-martingale* という。ただし $\mathfrak{F}_t$ は $\{Y_r : r \leq t\}$ を可測にする $\mathfrak{F}$ の *sub* σ-*algebra* で $(\mathfrak{F}.3)$ をみたすもの. *super-martingale* に関して次の事実が知られている。

a) Y_t $(t \in T = [0, \infty))$ を非負右連続な *super-martingale*, $\{\tau_n ;\ n = -1, -2, \cdots, -\infty\}$ は $(\mathfrak{F})$-*Markov time*[1] の列で $i < j$ ならば $\tau_i < \tau_j$ かつ $\tau_{-\infty} = \lim_{n \to \infty} \tau_n$ をみたすとする。そのとき $\{Y_{\tau_n} ;\ n = -1, -2, \cdots, -\infty\}$ は $\mathfrak{F}_{\tau_{n+}}$ に関して *super-martingale*. (証明は Meyer [4, Theorem 4.2])。

b) $\{Y_n ;\ n = -1, -2, \cdots, -\infty\}$ が *super-martingale* ならば $\{Y_n\}$ は一様可積分 (Meyer [4, Theorem 1.5]).

a), b) からただちに

c) Y_t $(t \in T)$ を非負右連続な *super-martingale*, $\{\tau_n\}$ を Markov time の単調減小列で $\tau_n \downarrow \tau_\infty$ とする。そのとき $\{Y_{\tau_n} ;\ n = 1, 2, \cdots\}$ は一様可積分.[2]

Lemma 1.3 の証明.

$$\tau_n = \frac{k}{2^n} \qquad \frac{k-1}{2^n} \leq \tau < \frac{k}{2^n} \qquad k = 1, 2, \cdots$$

$$= \infty \qquad \text{その他のとき}$$

とおくと $A \wedge \{\tau_n = \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{L}_{\frac{k}{2^n}}$. *Proposition* 1.3 を用いて

$$(1.14) \qquad P_x^\alpha(A,\ \tau_n < \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} P_x^\alpha(A,\ \tau_n = \frac{k}{2^n} < \zeta)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E_x(\alpha_{\frac{k}{2^n}} :\quad A \cap \{\tau_n = \frac{k}{2^n} < \zeta\})$$

$$= E_x(\alpha_{\tau_n} ;\ A,\ \tau_n < \zeta).$$

---

1) $(\mathfrak{F})$-*Markov time*, $\mathfrak{F}_{\tau_{n+}}$ 等は §0 と同じに定義する。

2) $\{Y_n\}$ が一様可積分とは, $M \to \infty$ のとき $E(|Y_n| ; |Y_n| > M)$ が n に無関係に 0 に収束すること. $\{Y_n\}$ が一様可積分かつ $Y_n \to Y$ なら任意の $\mathfrak{F} \ni A$ に対し $\lim_{n \to \infty} E(Y_n : A) = E(Y : A)$ が成立する.

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$B\in\mathcal{B}_s$ とすれば, $E(\alpha_t)\leq 1$ だから

$$E_x(\alpha_{t+s};B)=E_x(\alpha_s E_{x_s}(\alpha_t);B)\leq E_x(\alpha_s;B)$$

即ち $E_x(\alpha_{t+s}|\mathcal{B}_s)\leq\alpha_s$ だから α_t は非負 *super-martingale*. したがって $\{\alpha_{\tau_n};n=1,2,\cdots\}$ は一様可積分. (1.14) において $n\to\infty$ とすると, α_t が t に関して右連続であることを注意すると (1.13) が得られる.

<u>*Proposition 1.5*</u>　X^α は強 *Markov* 性をもつ。

証明. 任意の $(\mathcal{B})$-*Markov time* τ, $A\in\mathcal{B}_{\tau+}$, S 上の有界可測函数 f_j ($j=1,\cdots,m$) に対して

$$E_x^\alpha\left(\prod_{j=1}^m f_j(x_{\tau+t_j}):A\right)=E_x\left(E_{x_\tau}\left(\prod_{j=1}^m f_j(x_{t_j})\right);A\right)$$

を証明すればよい. $f_j(x_{\tau+t_j})$ が $\mathcal{B}_{\tau+t_n+}$-可測函数であることに注意し, *Lemma 1.3* と強 *Markov* 性を使うと

$$E_x^\alpha\left(\prod_{j=1}^m f_j(x_{\tau+t_j}):A\right)=E_x\left(\prod_{j=1}^m f_j(x_{\tau+t_j})\alpha_{\tau+t_n};A\right)$$

$$=E_x\left(E_{x_\tau}\left(\prod_{j=1}^m f_j(x_{t_j})\alpha_{t_n}\right)\alpha_\tau;A\right)=E_x^\alpha\left(E_{x_\tau}^\alpha\left(\prod_{j=1}^m f_j(x_{t_j})\right);A\right)$$

<u>*Proposition 1.6*</u>　X^α は *quasi*-左連続性をもつ.

証明. $\{\tau_n\}$ を $(\mathcal{B})$-*Markov time* の増加列で $\tau_n\uparrow\tau$ とする. $\{\omega;\ x_{\tau_n}\to x_\tau\}\in\mathcal{B}_{\tau+}$ だから *Lemma 1.3* により

$$P_x^\alpha(x_{\tau_n}\to x_\tau;\tau<\zeta)=E_x(\alpha_\tau;x_{\tau_n}\to x_\tau,\ \tau<\zeta)$$

$$=E_x(\alpha_\tau;\ \tau<\zeta)=P_x^\alpha(\tau<\zeta).$$

したがって X^α は *quasi*-左連続性をもつ.

$\overline{\mathcal{B}}^\alpha=\bigcap_{\mu\in M^+(S)}\{\mathcal{B}$ の P_μ^α-*completion*$\}$, $\overline{\mathcal{B}}_t^\alpha=\bigcap_{\mu\in M^+(S)}\{\mathcal{B}_t$ の P_μ^α-*completion*$\}$ とおく. 定理1.1により $\overline{X}^\alpha=(W,\overline{\mathcal{B}}^\alpha,P_x^\alpha:x\in S^*)$ はやはり $(\overline{\mathcal{B}}^\alpha)$-*Markov time* に関して強 *Markov* 性及び *quasi*-左連続性をもつ. しかし $P_x^\alpha(x_0=x)=1$ は一般には成立しない.

(α.3) により $\alpha_0(\omega)=\alpha_0(\omega)^2$ だから $\alpha_0(\omega)$ は 0 又は 1 の値をとる。一方 α_0 は $\mathcal{B}_0$-可測だから α_0 は定数 (*a.e.* P_x). したがって $E_x(\alpha_0)$ は 0 又

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

は1の値をとる。$S^\alpha = \{x ; E_x(\alpha_0)=1\}$ とおく。S^α は nearly Borel measurable set.

Proposition 1.7

(1.15) $\quad P_x^\alpha(x_t \in S^\alpha \quad {}^\forall t \in [0, \zeta)) = 1 \qquad x \in S^\alpha$

(1.16) $\quad P_x^\alpha(x_t = \Delta \quad {}^\forall t \geqq 0) = 1 \qquad x \notin S^\alpha$

証明. $x \notin S^\alpha$ のとき

$$H_t^\alpha(x, S) = E_x(\alpha_t) = E_x(\alpha_0 E_{x_0}(\alpha_t)) = 0$$

だから path の右連続性より (1.16) が成立する．τ を $S-S^\alpha$ への hitting time とする。$S-S^\alpha$ は nearly Borel set だから τ は $(\bar{\mathcal{B}})$-Markov time であると共に $(\bar{\mathcal{B}}^\alpha)$-Markov time でもある。$\bar{A}_n^{(k)} = \{\omega ; \frac{k}{2^n} \leqq \tau < \frac{k+1}{2^n}\}$ とおけば $\bar{A}_n^{(k)} \in \bar{\mathcal{B}}_{\frac{k+1}{2^n}}$ かつ $\bar{A}_n^{(k)} \in \bar{\mathcal{B}}_{\frac{k+1}{2^n}}$ だから $P_x(\bar{A}_n^{(k)} \ominus A_n^{(k)}) = 0$ かつ $P_x^\alpha(\bar{A}_n^{(k)} \ominus A_n^{(k)}) = 0$ をみたす $A_n^{(k)} \in \mathcal{B}_{\frac{k+1}{2^n}}$ が存在する。

$$\tilde{\tau}_n(\omega) = \frac{k+1}{2^n} \qquad \omega \in A_n^{(k)} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$= \infty \qquad \text{その他のとき}$$

とおけば $\tilde{\tau}_n$ は $(\mathcal{B})$-Markov time. したがって $\tilde{\tau} = \lim_{n\to\infty} \tilde{\tau}_n$ も $(\mathcal{B})$-Markov time であり $P_x(\tau = \tilde{\tau}) = P_x^\alpha(\tau = \tilde{\tau}) = 1$ をみたす。したがって Lemma 1.3 により $P_x^\alpha(\tau < \zeta) = E_x(\alpha_\tau ; \tau < \zeta)$ が成立する。

$\{k_n : n = 1, 2, \cdots\}$ を $S-S^\alpha$ に含まれる compact set の列で k_n への hitting time τ_n が τ に収束するものとする。(a.e. P_x). $x_{\tau_n} \in k_n$ だから

$$E_x(\alpha_\tau) = \lim_{n\to\infty} E_x(\alpha_{\tau_n}) = \lim_{n\to\infty} E_x(\alpha_{\tau_n} E_{x_{\tau_n}}(\alpha_0)) = 0$$

したがって $P_x^\alpha(\tau < \zeta) = 0 \quad (x \in S^\alpha)$. これで (1.15) が証明された。

Proposition 1.7 により X^α の path space は

$$W^\alpha = \{\omega \in W ; \quad {}^\forall t \in [0, \zeta) \text{ で } x \in S^\alpha\}$$

に制限出来る。$x \in S^\alpha$ では

$$P_x^\alpha(x_0 = x) = E_x(\alpha_0 ; x_0 = x) = E_x(\alpha_0) = 1$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

だから $\mathcal{B}^\alpha$ の W^α への制限を同じ記号 $\mathcal{B}^\alpha$ で表わすことにすれば

定理 1.2 $X^\alpha = (W^\alpha, \mathcal{B}^\alpha, P_x^\alpha ; x \in S^\alpha \cup \Delta)$ は standard process である;[1]

を得る。

注意. X の連続な path をもつ standard process のとき X^α も連続な path をもつ standard process に出来る。

$$L = \{\omega \in W \text{ で } x_t(\omega) \text{ は } t \in [0, \zeta) \text{ で連続}\}$$

とおく。Proposition 1.4 の証明と同じ記号の下で

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\substack{|t_i - t_j| \le \frac{1}{N} \\ t_i, t_j \in \Lambda \cap [0, \lambda - \varepsilon)}} \rho(x_i, x_j) = 0 \qquad {}^\forall \varepsilon > 0$$

のとき $q = 0$ とおき，その他のとき $q = 1$ とおく。この q が Lemma 1.2 の條件 $(q'.1) \sim (q'.3)$ をみたすことが Proposition 1.4 と同様に証明出来る。

---

1) S^α は必ずしも locally compact にはならないが，(X.1)，(X.2′)，(X.4)，(X.5) をみたすので standard process と呼ぶことにする。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

第2章 Excessive function と superharmonic function

この章では，excessive function，(super) harmonic function potential 等の定義を与え，それらの持つ性質及び相互関係についてのべる．又 Riesz 分解にもふれる．最後に（§3）優調和変換を定義する．

§1. Excessive function

$X=(W, \mathcal{B}, P_x : x \in S^*)$ を standard process とする．$\mathcal{B}$-可測な非負函数 τ と $E \in \overline{\mathbb{B}}_S$ に対し

$$(2.1) \qquad H_\tau(x, E) = P_x(x_\tau \in E)$$

とおく．特に τ が analytic set E への hitting time σ_E のとき $H_E(x,\cdot) = H_{\sigma_E}(x,\cdot)$ と書く．$\tau = t$（定数）のとき H_t を semigroup kernel という．

$$(2.2) \qquad G_\alpha(x, E) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t(x, E)\, dt$$

を Resolvent kernel という．$\overline{\mathbb{B}}_S$-可測函数 f の kernel H_τ，H_E，G_α による積分が定義可能のとき $H_\tau f$，$H_E f$，$G_\alpha f$ で表わす．

定義．$u \in \overline{\mathbb{A}}^+(S)$ が $e^{-\alpha t} H_\tau u \le u$ かつ $\lim_{t \downarrow 0} e^{-\alpha t} H_t u = u$ をみたすとき u を α-excessive という．特に $\alpha = 0$ のとき単に excessive ともいう．又 process を強調するときには (X,α)-excessive 等という．

定義．$u \in \overline{\mathbb{A}}^+(S)$ が $\alpha \ge 0$ に対し $\beta G_{\alpha+\beta} u \le u$ $(\forall \beta > 0)$ をみたすとき u を α-quasi-excessive という．特に $\beta = 0$ のとき単に excessive という。

Excessive function 及び quasi-excessive function の持つ性質をあげておく．

(e.1) u が α-excessive なら $f_n \in \mathbb{B}(S)$ が存在して $G_\alpha f_n \uparrow u$．

(e.2) u，v が α-(quasi-) excessive なら $u \wedge v$ も α-(quasi-) excessive．

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

(e.3) u_n が α-(quasi-)excessive かつ $u_n \uparrow u$ なら u も α-(quasi-) excessive.

(e.4) u_n が α-quasi-excessive なら $\varliminf_{n\to\infty} u_n$ も α-quasi-excessive.

(e.5) u が $\forall \beta > \alpha$ に対して β-(quasi-) excessive ならば u は α-(quasi-) excessive.

(e.6) u が α-excessive $\Longleftrightarrow$ $\beta G_{\alpha+\beta} u \leq u$ かつ $\beta G_{\alpha+\beta} u \uparrow u$ $(\beta \to \infty)$.

証明. $\Longrightarrow$ は明らか。$\Longleftarrow$, $u_n = u \wedge n$ に対して言えれば (e.3) により u について言える. したがって u は有界のとき証明すれば十分。resolvent equation より

$$\beta G_{\alpha+\beta} u = \beta G_{\alpha+\gamma} u + \beta(\gamma-\beta) G_{\alpha+\gamma} G_{\alpha+\beta} u = G_{\alpha+\gamma}[\beta u + \beta(\gamma-\beta) G_{\alpha+\beta} u].$$

$\gamma > \beta$ のとき $\beta u + (\gamma-\beta) G_{\alpha+\beta} u \geqq 0$ だから (e.1) より $\beta G_{\alpha+\beta} u$ は $\alpha+\gamma$-excessive $(\forall \gamma > \beta)$. したがって (e.5) より $\beta G_{\alpha+\beta} u$ は $\alpha+\beta$-excessive. $\beta G_{\alpha+\beta} u \uparrow u$ だから u も $\alpha+\beta$-excessive. β は任意だから u は α-excessive.

u が α-quasi-excessive ならば $\beta G_{\alpha+\beta} u \uparrow (\beta \uparrow)$ だから $\hat{u} = \lim_{\beta\to\infty} \beta G_{\alpha+\beta} u$ が存在する. $\hat{u}$ を u の regularization という.

(e.7) u を α-quasi-excessive とする. u の regularization $\hat{u}$ は excessive で $\forall \gamma > 0$ で $G_\gamma u = G_\gamma \hat{u}$.

証明. Resolvent equation を使って

$$G_\gamma \hat{u} \geqq \lim_{\beta\to\infty} \beta G_\gamma G_{\alpha+\beta}(u \wedge n) = \lim_{\beta\to\infty} \frac{\beta}{\alpha+\beta-\gamma}[-G_{\alpha+\beta}(u\wedge n) + G_\gamma(u \wedge n)]$$

$$= G_\gamma(u \wedge n) \xrightarrow[n\to\infty]{} G_\gamma u$$

一方 $\hat{u} \geqq u$ だから $G_\gamma \hat{u} = G_\gamma u$. ゆえに $\beta G_{\alpha+\beta} \hat{u} \leq \hat{u}$ かつ $\lim_{\beta\to\infty} \beta G_{\alpha+\beta} \hat{u} = \hat{u}$. したがって (e.6) より $\hat{u}$ は α-excessive.

(e.8) u を excessive とする. E を analytic set とすると $H_E u \leq u$ かつ $H_E u$ は excessive.

(e.9) u が excessive ならば u は nearly Borel measurable かつ $\mu(S)=1$ なる $\mu \in M^+(S)$ に対し.

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$P_\mu(u(x_t) \text{ は } t\in[0,\zeta) \text{で右連続}) = 1$$

$E_\mu(u(x_0))<\infty$ のとき

$$P_\mu(u(x_t) \text{ は } t\in[0,\zeta) \text{で左極限をもつ}) = 1$$

以上 (e.8)～(e.9) の証明は近藤 [24, p.60].

(e.10) u を excessive, σ, τ を Markov time で $\sigma\leq\tau$ とすると $H_\sigma u \geq H_\tau u$.

(e.11) u を excessive, $\{\tau_n\}$ を Markov time の列で $\tau_n\downarrow\tau$ とすると $H_{\tau_n}u \uparrow H_\tau u$.

以上 (e.10)～(e.11) の証明は本尾 [34, p.8].

<u>定義.</u> E を nearly analytic set とする. E の任意の点 x で $P_x(\sigma_{E^c}>0)=1$ をみたすとき E を fine open set という. fine open set を open set とする位相を fine topology (細位相) という.

(e.12) excessive function は fine topology で連続.

証明は近藤 [24, p.71].

<u>定義</u> E を含む analytic set A が存在して $P_x(\sigma_A=\infty)=1$ ($^\forall x\in S$) のとき E を極集合 (negligible set, polar set) という。

注意. E を極集合とすれば E^c は fine topology で dense.

<u>定義.</u> $u\in\overline{A}^+(S)$ が $H_t u = u$ ($^\forall t>0$) をみたすとき u は H_t-invariant という.

<u>定義.</u> u を excessive とする. u より小さい H_t-invariant function は 0 しか無いとき u を H_t-potential という.

<u>Lemma 2.1</u> u を極集合を除いて有限値をとる excessive function とする。$w=\lim_{t\uparrow\infty} H_t u$ は quasi-excessive であり, ω の regularization $\hat{\omega}$ は H_t-invariant. 更に $u(x)<\infty$ なる x では $w(x)=\hat{w}(x)$.

証明.

$$(2.3) \qquad H_t w = H_t(\lim_{s\uparrow\infty} H_s w) \leq \lim_{s\uparrow\infty} H_{t+s} u = w$$

だから w は quasi-excessive. $u(x)<\infty$ なる x では (2.3) において等式が成立する. 即ち $H_t w(x)=w(x)$. ($^\forall t>0$). $G_\alpha\hat{w}=G_\alpha w$ だから $\alpha\to\infty$ として, $\hat{w}(x)=w(x)$ ($u(x)<\infty$ のとき). $\{x;\hat{w}(x)\neq w(x)\}$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

は極集合だから $H_t\hat{w}(x)=H_t w(x)=\hat{w}(x)$ が極集合を除いて成立[1]. $H_t\hat{w}$ 及び $\hat{w}$ は fine topology で連続だからすべての x で $H_t\hat{w}(x)=\hat{w}(x)$ が成立する。

Proposition 2.1　u を極集合を除いて有限値をとる excessive function とする. u が H_t-potential であるための條件は $u(x)<\infty$ なる x で

$$(2.4)\qquad \lim_{t\uparrow\infty} H_t u = 0$$

をみたすことである。

証明.　u を H_t-potential とする. $w=\lim_{t\uparrow\infty} H_t u$ の regularization を $\hat{w}$ とすれば $\hat{w}$ は H_t-invariant だから $\hat{w}=0$. $u(x)<\infty$ なる x では $w(x)=\hat{w}(x)$ だから (2.4) が必要条件であることがわかった. 次に十分: v を H_t-invariant で $u\geqq v$ とすると $\lim_{t\uparrow\infty} H_t u\geqq v$. 仮定により $\lim_{t\uparrow\infty} H_t u$ は極集合を除いて 0 だから v も極集合を除いて 0. v は fine continuous だからすべての x で $v(x)=0$.

定理 2.1　(H_t-Riesz-分解).　極集合を除いて有限値をとる excessive function は H_t-invariant function と H_t-potential の和に一意に分解される。

証明.　$w=\lim_{t\uparrow\infty} H_t u$ とおき w の regularization を $\hat{w}$ とする。$v(x)=u(x)-\hat{w}(x)$ ($u(x)<\infty$ のとき), $=\infty$ ($u(x)=\infty$ のとき) とおくと v は quasi-excessive. v の regularization を $\hat{v}$ とすると $u=\hat{v}+\hat{w}$. $u(x)<\infty$ のとき

$$w(x)=\lim_{t\uparrow\infty} H_t u(x)=\lim_{t\uparrow\infty} H_t\hat{v}(x)+w(x)$$

だから $\lim_{t\to\infty} H_t\hat{v}(x)=0$. Prop. 2.1 により $\hat{v}$ は H_t-potential. 即ち $u=\hat{v}+\hat{w}$ が求める分解になっている.

一意性. u が H_t-inv. な w' と H_t-potential v' との和に書けているとする. $u(x)<\infty$ なる x では $\lim_{t\uparrow\infty} H_t u(x)=w'(x)=\hat{w}(x)$. w', $\hat{w}$ 共に excessive だからすべての点で $w'(x)=\hat{w}(x)$. 同様に $v'(x)=\hat{v}(x)$ ($\forall x\in S$) が言える。

---

[1] E を極集合とすると $H_t(x,E)=0$ ($\forall t>0$, $x\in S$).

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

§2. Superharmonic function, harmonic function, potential.

定義 (i) S上の$\overline{\mathcal{B}}_S$-可測函数uが任意のcompact closureをもつopen set Gに対して

$$(2.5)\qquad -\infty < H_{G^c}u(x) \leq u(x) \leqq +\infty$$

をみたすときuはxでsuperharmonicという。uがすべての$x \in S$でsuperharmonicのとき単にsuperharmonicという。

(ii) S上の$\overline{\mathcal{B}}_S$-可測函数uが任意のcompact closureをもつopen set Gに対し

$$(2.6)\qquad -\infty \leqq H_{G^c}u(x) = u(x) \leqq +\infty$$

をみたすときuをxでharmonicという。uがすべての$x \in S$でharmonicのとき単にharmonicという。

(iii) uを非負superharmonic functionとする。uより小さい非負harmonic functionがすべて0のときuをpotentialという。

注意. n ($n \geqq 2$) 次元空间のある領域Dにおける吸収壁のBrown運動の場合，superharmonic functionの定義には上にのべた条件の他に，下半連続性を仮定している。後に述べる様に（Proposition 2.2）非負，下半連続なsuperharmonic functionはexcessiveになる（Brown運動の場合はその逆も成立する）。したがって一般のsuperharmonic functionの場合でも何らかの正則条件をつけ加えることが望ましい。例えば「xを含むopen setの単調減小列$\{G_n\}$が存在して$H_{G_n^c}u(x) \uparrow u(x)$」が一つの正則条件であるが，excessive functionでは必ずしもこの条件をみたさない（例えば第7章にのべるregular step process）。Harmonic measureあるいは位相的な正則条件で，excessive functionと非負superharmonic functionが同値になる様なものをみつけることが望ましい。

定理 2.2 (Dynkin [11], Blumenthal-Getoor-McKean [1]). uを非負$\overline{\mathcal{B}}_S$-可測函数とする。uが任意のcompact set Kに対して$H_K u \leq u$をみたすときuはquasi-excessiveである。

証明. $v = \alpha G_{\alpha+\beta}u - u$とおくとResolvent equationから

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$G_{\alpha+\beta}u = G_\gamma[(\gamma-\beta)G_{\alpha+\beta}u - v]$. Dynkin の公式

$$G_\gamma f(x) = E_x\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t} f(x_t)\,dt\right) + E_x\left(e^{-\gamma\tau} G_\gamma f(x_\tau)\right)$$

(τ: Markov time)

に $f=(\gamma-\beta)G_{\alpha+\beta}u - v$ を代入すると

$$G_{\alpha+\beta}u(x) = E_x\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t}[(\gamma-\beta)G_{\alpha+\beta}u - v](x_t)\,dt\right) + E_x\left(e^{-\gamma\tau} G_{\alpha+\beta}u(x_\tau)\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t}[(\gamma-\beta)G_{\alpha+\beta}u - v](x_t)\,dt\right) + \frac{1}{\alpha}E_x\left(e^{-\gamma\tau}[v+u](x_\tau)\right).$$

x を固定する $E=\{x : v(x)\leq 0\}$ への hitting time を τ, $\{K_n\}$ を E に含まれる compact set の列で $\tau_n = \sigma_{K_n} \uparrow \tau$ (a.e. P_x) をみたすものとする. $\gamma \leqq \beta$ のとき $t<\tau_n$ では $[(\gamma-\beta)G_{\alpha+\beta}u - v](x_\tau) \leqq 0$, $v(x_{\tau_n}) \leq 0$ だから

$$G_{\alpha+\beta}u(x) = E_x\left(\int_0^{\tau_n} e^{-\gamma t}[(\gamma-\beta)G_{\alpha+\beta}u - v](x_t)\,dt\right) + \frac{1}{\alpha}E_x\left(e^{-\gamma\tau_n}[v+u](x_{\tau_n})\right)$$

$$\leqq \frac{1}{\alpha}E_x\left(e^{-\gamma\tau_n}u(x_{\tau_n})\right).$$

$\gamma\downarrow 0$ とすると $\alpha G_{\alpha+\beta}u(x) \leq E_x(u(x_{\tau_n}))$ を得る. 仮定により $E_x(u(x_{\tau_n})) \leqq u(x)$ だから $\alpha G_{\alpha+\beta}u(x) \leq u(x)$. $\beta\downarrow 0$ とすれば $\alpha G_\alpha u(x) \leq u(x)$. x は任意だから u は quasi-excessive.

<u>Proposition 2.2</u> u が非負 superharmonic function なら, quasi-excessive である。

証明. $\{G_n\}$ を compact closure をもつ open set の列で $\overline{G}_n \subset G_{n+1}$ をみたすとする。この様な $\{G_n\}$ を exhaustion という. u は superharmonic だから

$$u(x) \geqq H_{K\cup G_n^c}\,u(x) \geqq E_x(u(x_{\sigma_K}) : \sigma_K \leqq \sigma_{G_n^c}).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{G_n^c} \geqq \zeta$ だから $n\to\infty$ とすると

$$u(x) \geqq E_x(u(x_{\sigma_K}) : \tau \leq \zeta) = H_K u(x).$$

したがって定理2.2より u は quasi-excessive.

<u>定義</u> u を superharmonic function とする. $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha u$ が存

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

在して u に等しいとき，uを regular な superharmonic function という。regular な potential も同様に定義する．

注意． (i) uが excessive $\Longleftrightarrow$ uは非負 regular superharmonic

(ii) uが下半連続かつ非負な superharmonic function なら uは regular．

証明． (i) は (e.b) から明らか。 (ii) uは下半連続だから連続函数の列 $\{f_n\}$ が存在して $f_n \uparrow u$ ($u \uparrow \infty$)。 したがって

$$\varliminf_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha u \geq \varlimsup_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha f_n = f_n \ .$$

f_n は任意だから $\varliminf_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha u \geq u$． $\leq$は明らかだから $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha u = u$．

<u>Proposition 2.3</u> uが極集合以外で harmonic な非負 superharmonic function とする．uの regularization を $\hat{u}$ とすれば uが harmonic な点では u と $\hat{u}$ が一致し，更に $\hat{u}$ は harmonic となる。

証明． Gを compact closure をもつ open set とすれば，極集合を除いて $u(x) = H_{G^c} u(x)$． したがって

$$H_t u(x) = H_t H_{G^c} u(x) = E_x(u(x_{\sigma_{G^c,t}}))\ . \qquad {}^\forall x \in S,\ {}^\forall t > 0\ .$$

ただし $\sigma_{G^c,t}(\omega) = \sigma_G(\omega_t^+) + t$． $x \in G$ では $\sigma_{G^c} > 0$ $(a.e.\ P_x)$ だから

$$P_x(\omega;\ \sigma_{G^c,t} \neq \sigma_{G^c}) \xrightarrow[t\downarrow 0]{} 0 \qquad x \in G$$

したがって $u(x)$ が harmonic な $x \in G$ では

$$\varliminf_{t\downarrow 0} H_t u(x) \geq E_x(\varliminf_{t\downarrow 0} u(x_{\sigma_{G^c,t}})) = E_x(u(x_{\sigma_{G^c}})) = u(x)\ .$$

Gは任意だから u が harmonic なすべての x で $\varliminf_{t\downarrow 0} H_t u(x) \geq u(x)$．
ゆえに

$$\varliminf_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha u(x) = \varliminf_{\alpha\to\infty} \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_{\frac{t}{\alpha}} u(x) dt = \int_0^\infty e^{-t} \varliminf_{t\downarrow 0} H_{\frac{t}{\alpha}} u(x) dt \geq u(x)\ .$$

即ち $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha u(x) = u(x)$． $G_\alpha \hat{u} = G_\alpha u$ だから uが harmonic な x で $\hat{u}(x) = u(x)$． $\{x : \hat{u}(x) \neq u(x)\}$ は極集合だから

$$\hat{u}(x) = u(x) = H_{G^c} u(x) = H_{G^c} \hat{u}(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

が極集合を除いて成立する. $\hat{u}$, $H_{G^c}\hat{u}$ は共に excessive だから fine continuous. したがってすべての $x \in S$ で $\hat{u}(x) = H_{G^c}\hat{u}(x)$ が成立する。

系　u が非負 harmonic ならば excessive.

Proposition 2.4　u は superharmonic function で u^- はその negative part とする。$\lim_{n\to\infty} H_{G_n^c} u^- > -\infty$[1] ならば u は非負 superharmonic function u_1 と, 非負かつ有限値 harmonic function u_2 の差に書ける。

証明.　u^- は superharmonic である。$G_n \subset G_{n+1}$ のとき $u^- \geqq H_{G_{n+1}^c} u^-$ だから $H_{G_n^c} u^- \geq H_{G_n^c} H_{G_{n+1}^c} u^- = H_{G_{n+1}^c} u^-$. 即ち $H_{G_n^c} u^-$ は n に関して単調減小.

$$u_2 = -\lim_{n\to\infty} H_{G_n^c} u^-$$

とおく. 仮定により u_2 は有限値函数. G を compact closure をもつ open set とすると

$$H_{G^c} u_2 = H_{G^c}(-\lim_{n\to\infty} H_{G_n^c} u^-) = -\lim_{n\to\infty} H_{G^c} H_{G_n^c} u^-$$

$$= -\lim_{n\to\infty} H_{G_n^c} u^- = u_2 \ .$$

したがって u_2 は有限値 harmonic function. $u_1 = u + u_2$ とおくと u_1 は superharmonic function. $-u^- \leqq u_2$ だから $u_1 \geq 0$. したがつて $u = u_1 - u_2$ が求める分解になっている。

系.　Proposition 2.4 と同じ条件の下で, もし u が regular な superharmonic function ならば u_1, u_2 も regular になる.

証明.　u_2 は harmonic だから明らか。$u_1 = u + u_2$ において u, u_2 は regular だから u_1 も regular .

Proposition 2.5　u を極集合を除いて有限値をとる非負 superharmonic function とする. u が potential であるための条件は

---

1) $\{G_n\}$ は exhaustion をあらわす。この条件は exhaustion $\{G_n\}$ の取り方に関係しない。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$u(x)<\infty$ なる x で

$$(2.7) \qquad \lim_{n\to\infty} H_{G_n^c}\, u(x) = 0$$

をみたすことである。

証明. 1° $\lim_{n\to\infty} H_{G_n^c}\, u$ の存在は Prop. 2.4 の証明でみた。その値を w とおくと $u \geq w$. $u(x)<\infty$ なる x では compact closure をもつ任意の open set に対し

$$H_{G^c}\, u(x) = H_{G^c}(\lim_{n\to\infty} H_{G_n^c}\, u)(x) = \lim_{n\to\infty} H_{G^c} H_{G_n^c}\, u(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} H_{G_n^c}\, u(x) = w(x).$$

したがって w は極集合を除いて harmonic. したがってその regularization $\hat{w}$ は Proposition 2.3 により全体で harmonic.

2°. u を potential とすれば $\hat{w}=0$. 即ち $\lim_{n\to\infty} H_{G_n} u(x) = 0$ が $u(x)<\infty$ なる x で成立. 逆に u が (2.7) をみたすとする。w' が u をこえない非負 harmonic function とすれば

$$H_{G_n^c}\, u \geq H_{G_n^c}\, w' = w'.$$

$n\to\infty$ とすると $w \geq w'$. したがって w' は極集合を除いて 0. w' は excessive だから全体で 0.

<u>定理 2.3</u> (Riesz 分解) u を極集合を除いて有限値をとる super-harmonic function で u の negative part u^- が $\lim_{n\to\infty} H_{G_n^c}\, u^- > -\infty$ をみたすとする。そのとき u は極集合を除いて有限値をとる potential と u をこえない最大の harmonic function の和に分解される。

特に u が regular ならば, v, ω として regular なものをとることが出来て, しかもその分解は一意である。

証明. 1° $u = u_1 - u_2$ を Proposition 2.4 の分解とする。$w_1 = \lim_{n\to\infty} H_{G_n^c}\, u_1$ とおき, w_1 の regularization を $\hat{w}_1$ と書くと, $\hat{w}_1$ は harmonic (Proposition 2.5 の証明 1°).

$$v(x) = u_2(x) - \hat{w}_1(x) \qquad u_1(x) < \infty$$
$$= \infty \qquad u_1(x) = \infty$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

とおくと v は superharmonic. $v(x)<\infty$ なる x では

$$\lim_{n\to\infty} H_{G_n^c} v(x) = \lim_{n\to\infty} H_{G_n^c} u_1(x) - \hat{w}_1(x) = 0$$

だから v は potential である。$w=\hat{w}_1 - u_2$ とおくと $u=v+w$ が求める分解である。

2° 次に u が regular とする。v は非負 superharmonic だから，v の regularization $\hat{v}$ が存在し $\hat{v}\leq v$。したがって $\hat{v}$ も又 potential である。$\hat{w}_1$, u_2 は共に excessive であり，u_2 は有限値だから $w=\hat{w}_1-u_2$ は regular. $w>-\infty$ に注意すれば $\alpha G_\alpha u = \alpha G_\alpha v + \alpha G_\alpha w$. $\alpha\to\infty$ とすると $u=\hat{v}+w$。これが求める分解である。

一意性： $u=v'+w'$ なる分解があったとする。$w'>-\infty$ は明らか。したがって

$$\lim_{n\to\infty} H_{G_n^c} u = \lim_{n\to\infty} H_{G_n^c} v' = w'$$

$$= \lim_{n\to\infty} H_{G_n^c} \hat{v} + w,$$

したがって $w'=w$ が極集合を除いて成立する。w', w は fine continuous だからすべての点で $w'=w$. 同様に $\hat{v}=v'$ が言える。

注意. 定理 2.1 及び 2.3 において，excessive function のやゝ違った Riesz 分解を与えたが，それらの相互関係は一般にはわかっていない。しかし process に適当な正則条件を仮定すると，H_t-invariant function は harmonic function になる。(逆は必ずしも成立しない。又 potential は H_t-potential になる。この逆も必ずしも成立しない)。このことは第5章でふれる。

§3. 優調和変換

u を excessive function とし，$S^u=\{x: 0<u(x)<\infty\}$ とおく。

(2.7) $$H_t^u(x,E) = \frac{1}{u(x)} E_x(u(x_t);\ x_t\in E) \qquad x\in S^u$$

$$= 0 \qquad\qquad x\notin S^u$$

とおくと H_t^u は推移確率になる。この H_t^u を推移確率にもつ Markov 過程を，X を u によって優調和変換した Markov 過程，あるいは X の u-path pro-

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

cess という。

(2.8) $$\alpha_t(\omega)=\frac{u(x_t(\omega))}{u(x_0(\omega))}\ \chi_{[0,\zeta)}(t) \qquad 0<u(x;\omega)<\infty \text{ のとき}$$

$$= 0 \qquad \text{その他のとき}$$

とおくと α_t は multiplicative functional になっている．実際(α.1) は明らか。(α.2)は (e.9) からわかる。更に

$$E_x(\alpha_t)=\frac{H_t u(x)}{u(x)} \leq 1$$

かつ u, $H_t u$ は nearly Borel measurable だから α_t は (α.4) をみたす。したがって残っているのは (α.3) であるが，これは次の Lemma からわかる。

Lemma 2.2

(2.9) $$P_x\left(\text{すべての } t\in[0,\zeta) \text{ で } x_t\notin S_\infty^u\right)=1 \qquad x\notin S_\infty^u$$

(2.10) $$P_x\begin{pmatrix}\text{ある } s\geq 0 \text{ で } x_s\in S_0^u \text{ ならば } 0\leq t<\zeta \text{ なる}\\ \text{すべての } t \text{ で } x_t\in S_0^u\end{pmatrix}=1$$

ここに $S_0^u=\{x:\ u(x)=0\}$, $S_\infty^u=\{x:\ u(x)=\infty\}$.

証明． (e.8) より $H_{S_\infty^u}u\leq u$ である．K_n を S_∞^u に含まれる compact set の列で $\sigma_{K_n}\downarrow\sigma_{S_\infty^u}$ (a.e. P_x) をみたすものとする．$x_{\sigma_{K_n}}\in K_n\cup\Delta$ に注目すれば

$$\infty>u(x)>H_{S_\infty^u}u(x)\geqq H_{K_n}u(x)=\infty\cdot P_x(\sigma_{K_n}<\infty) \qquad x\notin S_\infty^u$$

したがって $P_x(\sigma_{K_n}<\infty)=0$． 即ち $P_x(\sigma_{S_\infty^u}<\infty)=0$ ($x\notin S_\infty^u$)．
これで (2.9) がわかった。

次に (2.10) を示す．$x\in S_0^u$ のときは (2.9) と同様の議論で証明される。
一般の $x\in S$ のとき

(2.11) $$P_x(\text{ある } s\geq 0 \text{ で } x_s\in S_0^u \text{ ならばすべての } s\leq t<\zeta \text{ で } x_t\in S_0^u)$$

$$=E_x(P_{x_{\sigma_{S_0^u}}}(\text{すべての } 0\leq t<\zeta \text{ で } x_t\in S_0^u))+P_x(\sigma_{S_0^u}=\infty)$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

S_0^u は fine topology で closed set だから S_0^u の regular point は S_0^u に含まれる[1]. したがって $P_x(x_{\sigma_{S_0^u}} \in S_0^u) = P_x(\sigma_{S_0^u} < \infty)$ である. ゆえに (2.11) の右辺は 1 に等しい.

さて standard process $X = (W, \bar{\mathcal{B}}, P_x : x \in S^*)$ を multiplicative functional (2.8) で変換して出来た standard process の推移確率は (2.7) になるから, 結局優調和変換した process は standard process と考えて差支えない。今後 standard な u-path process を $X^u = (W^u, \bar{\mathcal{B}}^u, P_x^u, x \in S^u \cup \Delta)$ で表わす. 又 X^u に関する諸量 H_τ, H_E, H_t, G_α 等を H_τ^u, H_E^u, H_t^u, G_α^u 等と表わす.

<u>Proposition 2.6</u> v を $S - S^u$ では 0 の非負函数とする. v の S^u への制限が X^u-excessive であるための必要十分条件は uv が X-excessive なことである。

証明. v の X^u への制限が X^u-excessive とすると

$$(2.12) \qquad v(x) \leq H_t^u v(x) = \frac{1}{u(x)} H_t(uv)(x) \qquad x \in S^u .$$

したがって $x \in S^u$ では $v(x)u(x) \leq H_t(uv)(x)$. $x \notin S^u$ のとき $v(x)u(x) = 0$ だから $uv \leq H_t uv$ がすべての S の点で成立する。又 (2.12) において $t \downarrow 0$ とすると $x \in S^u$ のとき

$$(2.13) \qquad \lim_{t \downarrow 0} H_t(uv)(x) = u(x)v(x)$$

が成立する. $x \notin S^u$ のとき (2.10) によって $H_t(uv)(x) = 0$. したがって (2.13) はすべての $x \in S$ で成立する. 逆も同様.

注意. Proposition 2.6 と類似の関係が, superharmonic function, harmonic function に対しても成りたつ.

<u>定義</u> excessive function u が extreme であるとは, 次の条件をみたすことである: u が二つの excessive function u_1, u_2 の和に書けたとすれば, u_i は u の定数倍になる.

---

1) x が E の regular point とは $P_x(\sigma_E = 0) = 1$ をみたすことである. E の regular point の全体を E^{reg} と書くと $^\forall x \in S$ で $P_x(x_{\sigma_E} \in E \cup E^{reg} ; \sigma_E < \infty) = P_x(\sigma_E < \infty)$. (近藤 [24, p.29]).

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

Proposition 2.7　v を $S-S^u$ で 0 なる函数とする．v が extreme X^u-excessive function であるための条件は，uv が extreme X-excessive function となることである。

証明．v を extreme X^u-excessive とする．uv は X-excessive $uv=w_1+w_2$ と二つの X-excessive function の和に書けたとする．$v_1=\frac{w_1}{u}$，$v_2=\frac{w_2}{u}$ は X^u-excessive だから v_i はひの定数倍．したがって w_i は uv の定数倍となる。即ち uv は extreme X-excessive．逆も同様に証明出来る．

Proposition 2.8　u を極集合を除いて有限値をとる excessive function とし，$u=v+w$ を u の H_t-Riesz 分解で，v は H_t-potential，w は H_t-invariant とする．

(i)　X^v は　$P_x^v(\zeta<\infty)=1$　$\forall x\in S^v$ をみたす．

(ii)　X^w は　$P_x^w(\zeta=\infty)=1$　$\forall x\in S^w$ をみたす．

証明．(i) $x\in S^v$ では $\lim_{t\uparrow\infty} H_t v(x)=0$ だから

$$P_x^v(\zeta>t)=\frac{H_t v(x)}{v(x)}\xrightarrow[t\to\infty]{}0 \qquad x\in S^v$$

したがって (i) が成立する．(ii) $H_t w(x)=w(x)$ だから

$$P_x^w(\zeta>t)=\frac{H_t w(x)}{w(x)}=1. \quad \forall t>0 \quad x\in S^w.$$

したがって $P_x^w(\zeta=\infty)=1$．

系　u が extreme ならば $P_x^u(\zeta<\infty)\equiv 0$ 又は $\equiv 1$．

証明．u が extreme ならば u は H_t-potential か，H_t-invariant であるか，どちらかである．Proposition 2.8 によりこの系が得られる．

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

第3章 Dual resolvent

ある領域Sにおける Brown 運動の Green kernel は Green 函数 $G(x,y)$ 及び Lebesque measure dy を用いて $G(x,dy)=G(x,y)dy$ と書けることが知られている。$G(x,y)$ は ① $S\times S$ 上で連続($+\infty$ も含めて)，② $x\neq y$ なる x で harmonic である。これと類似に，一般の standard process の Green kernel がある σ-有限な測度に関して絶対連続の場合に，その density として Green 函数の様な性質をもつものがとれることが望ましい。しかし process に位相的な条件を仮定しないかぎり①，②をみたすものが存在しない。ここでは，$\mathbb{B}_S\times\mathbb{B}_S$-可測かつ x に関して excessive な density $G(x,y)$ を求めることが目的である。

§1. Resolvent kernel.

$\alpha>0$，$x\in S$，$E\in\overline{\mathbb{B}}_S$ に対して定義された $R_\alpha(x,E)$ が次の条件をみたすとき $\mathbb{R}=(R_\alpha:\alpha>0)$ を resolvent kernel という。

(R.1) 各$\alpha>0$，$x\in S$に対し $R_\alpha(x,\cdot)$ は $\overline{\mathbb{B}}_S$ 上の有界測度

(R.2) $f\in\mathbb{B}(S)$ ならば

$$R_\alpha f(x)=\int_S R_\alpha(x,dy)f(y)\in\mathbb{B}(S).$$

(R.3) $R_\alpha f-R_\beta f+(\alpha-\beta)R_\alpha R_\beta f=0$

(R.4) 各x，$f\in\mathbb{B}(S)$ に対し $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}R_\alpha f(x)=0$.

$\mathbb{R}$の定義から次の事はただちにわかる。

(r.1) $R_\alpha R_\beta f=R_\beta R_\alpha f$.

(r.2) $f\geqq 0$ なら $R_\alpha f\uparrow$ $(\alpha\downarrow)$.

(r.3) $R_\alpha f$ はαに関して連続。したがって $R_\alpha f(x)$ は (α,x)-可測。

(r.4) $R_\alpha f=\lim\limits_{\beta\to\infty}R_\alpha(\beta R_\beta f)$.

(r.5) R_α による $\mathbb{B}(S)$ の値域はαに無関係。

(r.2) より

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$R(x,E)=\lim_{\alpha\downarrow 0}R_\alpha(x,E).$$

が存在して $\overline{\mathbb{B}}_S$ 上の測度を定義する。R を R_0 と書くこともある。

定義. $u\in\overline{\mathbb{A}}^+(S)$ がすべての $\beta>0$ で $\beta R_{\alpha+\beta}u\leq u$ をみたすとき u を $(\mathbb{R};\alpha)$-*quasi-excessive* という。u が $(\mathbb{R},\alpha)$-*quasi-excessive* かつ $\lim_{\beta\to\infty}\beta R_{\alpha+\beta}u=u$ をみたすとき u を $(\mathbb{R},\alpha)$-*excessive* という. 特に $\alpha=0$ のとき単に $\mathbb{R}$-*quasi-excessive* あるいは $\mathbb{R}$-*excessive* 等という。

$(\mathbb{R},\alpha)$-(*quasi-*) *excessive function* に対しても第二章でのべた (*quasi-*) *excessive function* と類似の結果が成りたつ。

(r.6) $u\in\overline{\mathbb{A}}^+(S)$ が $(\mathbb{R},\alpha_0)$-*excessive* (あるいは *quasi-excessive*) であるための条件は, u がすべての $\alpha>\alpha_0$ に対し $(\mathbb{R},\alpha)$-*excessive* (あるいは *quasi-excessive*) となることである。

(r.7) $f\in\overline{\mathbb{B}}^+(S)$ のとき $u=R_\alpha f$ は $(\mathbb{R},\alpha)$-*excessive* である。

(r.8) u 及び v が $(\mathbb{R},\alpha)$-*quasi-excessive* ならば $u\wedge v$ も $(\mathbb{R},\alpha)$-*quasi-excessive* である.

(r.9) $\{u_n\}$ を $(\mathbb{R},\alpha)$-*quasi-excessive function* の列で $u=\underline{\lim}_{n\to\infty}u_n$ とすれば u も $(\mathbb{R},\alpha)$-*quasi-excessive* である. 特に $\{u_n\}$ が $(\mathbb{R},\alpha)$-*excessive* な単調増加列のとき u は $(\mathbb{R},\alpha)$-*excessive* である.

(r.10) $u\in\overline{\mathbb{A}}^+(S)$ とする $\beta R_{\alpha+\beta}u\uparrow(\beta\uparrow)$ のとき $v=\lim_{\beta\to\infty}\beta R_{\alpha+\beta}u$ は $(\mathbb{R},\alpha)$-*excessive* かつすべての $\beta>0$ で $R_{\alpha+\beta}u=R_{\alpha+\beta}v$ をみたす.

証明　先ず始めに $\gamma>\beta$ のとき

(3.1) $$R_{\alpha+\beta}u\geqq\beta R_{\alpha+\beta}R_{\alpha+\gamma}u$$

が成立することを示す. *Resolvent equation* (R.3) から $u\in\overline{\mathbb{A}}^+(S)$, $\gamma>\beta$ のとき

(3.2) $$R_{\alpha+\beta}u=R_{\alpha+\gamma}u+(\gamma-\beta)R_{\alpha+\beta}R_{\alpha+\gamma}u$$

$R_{\alpha+\gamma}u(x)=\infty$ のとき (3.1) は明らか。したがって $R_{\alpha+\gamma}u(x)<\infty$ の

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

ときのみ考える。仮定により $\beta R_{\alpha+\beta}u \leqq \gamma R_{\alpha+\gamma}u$. したがって (3.2) より

$$\gamma R_{\alpha+\gamma}u \geqq \beta R_{\alpha+\beta}u = \beta R_{\alpha+\gamma}u + \beta(\gamma-\beta)R_{\alpha+\beta}R_{\alpha+\gamma}u$$

即ち

$$(\gamma-\beta)R_{\alpha+\gamma}u \geqq \beta(\gamma-\beta)R_{\alpha+\beta}R_{\alpha+\gamma}u$$

両辺を $\gamma-\beta>0$ で割れば (3.1) が得られる。次に $R_{\alpha+\beta}u \geqq R_{\alpha+\beta}v$ を示す。$R_{\alpha+\beta}u(x)<\infty$ としてよい。$^\forall\gamma \geqq \beta$ で $R_{\alpha+\gamma}u(x)<\infty$ だから (3.1) と (3.2) より

$$(3.3) \qquad R_{\alpha+\beta}u \geqq \gamma R_{\alpha+\beta}R_{\alpha+\gamma}u.$$

$\gamma\to\infty$ とすれば $R_{\alpha+\beta}u \geqq R_{\alpha+\beta}v$.

一方 $u_n = u\wedge n$ とおくと

$$R_{\alpha+\beta}u_n = \lim_{\gamma\to\infty} R_{\alpha+\beta}(\gamma R_{\alpha+\gamma}u_n) \leqq \lim_{\gamma\to\infty} R_{\alpha+\beta}(\gamma R_{\alpha+\gamma}u) = R_{\alpha+\beta}v.$$

$n\to\infty$ とすると $R_{\alpha+\beta}u \leqq R_{\alpha+\beta}v$. かくして $R_{\alpha+\beta}u = R_{\alpha+\beta}v$ がわかった。v が (R,α)-*excessive* であることは

$$v = \lim_{\beta\to\infty}\beta R_{\alpha+\beta}u = \lim_{\beta\to\infty}\beta R_{\alpha+\beta}v$$

からわかる。

<u>定義</u> (γ.10) によって得られた v を u の (R,α)-*regularization* と呼ぶ。

注意. 上の証明から $\beta R_{\alpha+\beta}u$ ($u\in\overline{A}^+(S)$) が β と共に増加するための条件は (3.1) 又は (3.3) がみたされることである。したがって特に u が (R,α)-*quasi-excessive* ならば $\beta R_{\alpha+\beta}u$ は β と共に増加する。

<u>定義</u> (i) ξ を S 上の σ-有限な測度とする. $^\forall\alpha>0$, $^\forall x\in S$ で $R_\alpha(x,\cdot)$ が ξ に関して絶対連続のとき, R は ξ によって *dominate* されているという。

(ii) $^\forall\alpha>0$, $^\forall x\in S$ で $\alpha R_\alpha(x,S)\leqq 1$ のとき R を *substochastic* という。

(iii) $^\forall f\in\mathbb{C}(S)$ に対し $\lim_{\alpha\to\infty}\alpha R_\alpha f = f$ (有界各点収束) のとき R を *regular* という.

(iv) $^\forall f\in\mathbb{B}_0(S)$ に対して $R_0 f\in\mathbb{R}_0(S)$ のとき R を *integrable* という.

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

(r.11) Rが integrable のとき $f\in \mathbb{B}_0(S)$ に対して

$$(3.4)\qquad Rf - R_\alpha f - \alpha R R_\alpha f = 0$$

$$(3.5)\qquad Rf - R_\alpha f - \alpha R_\alpha R f = 0 \ .$$

(r.12) Rがξによって dominate されているとする。$u\in\overline{\mathbb{A}}^+(S)$ が各 $\beta>0$ で $\beta R_{\alpha+\beta}u\le u$ (a.e. ξ[1]) をみたすならば $\beta R_{\alpha+\beta}u$ はβと共に増加する。uの regularization をvとすれば $R_\gamma v = R_\gamma u$.

証明　仮定より $\beta R_{\alpha+\gamma}R_{\alpha+\beta}u \le R_{\alpha+\gamma}u$. したがって (r.10) の下の注意によって $\beta R_{\alpha+\beta}u$ はβと共に増加する. 後半は (r.10) から明らか。

(r.13) Rがξによって dominate されているとする。二つの(R,α)-excessive function u_1, u_2 が a.e.ξ で一致すればすべての点で一致する.

証明　$\beta R_{\alpha+\beta}u_1 = \beta R_{\alpha+\beta}u_2$ がすべての点で成立するから $\beta\to\infty$ とすれば $u_1 = u_2$ がすべての点で成立する。

<u>定義.</u>　γをS上の σ-有限な測度とする.

$$u(\gamma) \equiv \int u(x)\ \gamma(dx) = 0$$

をみたすすべての(R,α)-excessive function は恒等的に0に等しいとき, γを reference 測度という。

(r.14)　σ-有限な reference 測度が存在すれば有界な reference 測度が存在する.

証明　γを σ-有限な reference 測度, fは $f>0$ かつ $\int\gamma(dx)f(x)<\infty$ なる函数とする. $\gamma'=\gamma f$ とおく. uを(R,α)-excessive function で $u(\gamma')=0$ とすると $u=0$ (a.e. γ'). したがって $u(\gamma)=0$. 即ち $u\equiv 0$.

(r.15)　Rが integrable かつ有界な reference 測度γが存在すれば R は $\xi(\cdot)=\int\gamma(dx)R(x,\cdot)$ によって dominate される.

証明.　ξは σ-有限な測度であることは明らか。Eをξ-測度0の任意の集合とすれば $\int\gamma(dx)R_\alpha(x,E)\le\int\gamma(dx)R(x,E)=0$. $R_\alpha(x,E)$ は(R,α)-

---

1) ξ-測度0を除いた点で成立することを意味する.

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

excessive だから $R_\alpha(x,E)\equiv 0$. したがって $\mathbb{R}$ は ξ によって dominate されている.

<u>Lemma 3.1</u> $\mathbb{R}$ が ξ によって dominate されておれば次の様な $R_\alpha(x,y)$ $(\alpha>0,\ x,y\in S)$ が存在する。

(i) $R_\alpha(x,y)$ は $\mathbb{B}_S\times\mathbb{B}_S$-可測かつ x に関して $(\mathbb{R},\alpha)$-excessive.

(ii) $R_\alpha(x,E)=\int_E R_\alpha(x,y)\xi(dy)$.

証明. 1° ξ は全測度 1 と仮定して一般性を失わない. 実際 ξ が有界でないとき $f>0$ かつ $\int\xi(dx)f(x)=1$ なる f をとり(事実存在する) $\xi'=\xi f$ とおく. ξ' に関してこの Lemma をみたす $R_\alpha(x,y)$ が存在したとすれば, $R'_\alpha(x,y)=R_\alpha(x,y)f(y)^{-1}$ が求めるものになっている。

2° $\{D_n\}$ を S の $\mathbb{B}_S$-可測な可算分割[1] の列で D_{n+1} は D_n の細分になっており, $\mathbb{B}_n=\mathbb{B}(D_n)$ を D_n の元から生成される σ-algebra としたとき $\bigcup_n\mathbb{B}_n=\mathbb{B}_S$ をみたすものとする。この様な分割の列 $\{D_n\}$ が存在することは, S が第二可算公理をみたす空間であり, $\mathbb{B}_S$ が open set から生成される σ-algebra であることからわかる。ξ による函数 f の積分を $E(f)$ で表わすことにする.

$$R^n_\alpha(x,y)=\frac{R_\alpha(x,M_j)}{\xi(M_j)}\qquad M_j\in D_n\ \text{かつ}\ \xi(M_j)>0\ \text{のとき}$$

$$=0\qquad\qquad M_j\in D_n\ \text{かつ}\ \xi(M_j)=0\ \text{のとき}$$

とおけば $R^n_\alpha(x,y)$ は $\mathbb{B}_S\times\mathbb{B}_S$-可測かつ x に関して $(\mathbb{R},\alpha)$-excessive.

$$\underline{R}_\alpha(x,y)=\varliminf_{n\to\infty}R^n_\alpha(x,y)$$

とおくと, $R_\alpha(x,y)$ は $\mathbb{B}_S\times\mathbb{B}_S$-可測かつ x に関して quasi-excessive.

一方, $R_\alpha(x,\cdot)$ の ξ による density を $\widetilde{R}_\alpha(x,y)$ とすれば

$$R^n_\alpha(x,y)=E(\widetilde{R}_\alpha(x,\cdot)\mid\mathbb{B}_n)$$

と書ける。ただし $E(\cdot\mid\mathbb{B}_n)$ は $\mathbb{B}_n$ による条件附平均値. したがって Martin-

---

1) D が S の $\mathbb{B}_S$-可測な可算分割とは, D が可算個の $\mathbb{B}_S$-可測な S の集合 $\{A_1,A_2,\cdots\}$ から成っており, (i) $A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j)$, (ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=S$ をみたすことである.

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

gale theory (Doob [6, p. 344]) により各固定した x に対し $\lim_{n\to\infty} R_\alpha^n(x, y)$ は ξ-測度 0 を除いた y に対して存在し，それは $\tilde{R}_\alpha(x,y)$ に ξ-測度 0 を除いて一致する。したがって

$$R_\alpha(x,E) = \int_E \tilde{R}_\alpha(x,y)\xi(dy) = \int_E \underline{R}_\alpha(x,y)\xi(dy).$$

$\underline{R}_\alpha(x,y)$ の x に関する regularization を $R_\alpha(x,y)$ とおくと $R_\alpha(x, y)$ は $\mathcal{B}_S\times\mathcal{B}_S$-可測かつ x に関して (R,α)-excessive. regularization の定義より

$$\beta R_{\alpha+\beta}[\underline{R}_\alpha](x,y)\left(\equiv\beta\int R_{\alpha+\beta}(x,dz)\underline{R}_\alpha(z,y)\right) \uparrow R_\alpha(x,y) \quad (\beta\uparrow\infty)$$

だから

$$\int_E R_\alpha(x,y)\xi(dy) = \lim_{\beta\to\infty}\int\beta R_{\alpha+\beta}[\underline{R}_\alpha](x,y)\xi(dy)$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\beta R_{\alpha+\beta}R_\alpha(x,E) = R_\alpha(x,E) \quad (\because (r.4).)$$

注意　$n(\geq 2)$ 次元 Brown 運動の場合 resolvent $G_\alpha(x,dy)$ は Lebesgue measure dy に関して density $G_\alpha(x,y)$ をもち $G_\alpha(x,y)$ を Green 函数にとれる。即ち $G_\alpha(x,dy) = G_\alpha(x,y)dy$ である。このとき，Lemma 3.1 の方法で作った $R_\alpha(x,y)$ は $G_\alpha(x,y)$ と一致する。一般に ξ が空でない open set G に対し $\xi(G)>0$ かつ $\hat{R}_\alpha(x,y)$ が y に関して連続 ($+\infty$ も許す) で $R_\alpha(x,dy) = \hat{R}_\alpha(x,y)\xi(dy)$ と書けているとすれば Lemma 3.1 の方法で作った $R_\alpha(x,y)$ は $\hat{R}_\alpha(x,y)$ と一致する。

<u>Lemma 3.2</u>　R が integrable かつ ξ によって dominate されておれば $\mathcal{B}_S\times\mathcal{B}_S$-可測かつ x に関して R-excessive な $R(x,y)$ が存在し，Lemma 3.1 の (i), (ii) の他に

(3.6)　$R(x,E) = \int_E R_\alpha(x,y)\xi(dy)$

(3.7)　$R_\alpha(x,y) - R_\beta(x,y) + (\alpha-\beta)\int R_\alpha(x,z)R_\beta(z,y)\xi(dz) = 0,\quad R(x,y)<\infty.$

(3.8)　$R_\alpha(x,y) - R(x,y) + \alpha\int R_\alpha(x,z)R(z,y)\xi(dz) = 0,\quad R(x,y)<\infty.$

(3.9)　$R_\alpha(x,y) - R(x,y) + \alpha\int R(x,z)R_\alpha(z,y)\xi(dz) \leqq 0,\quad R(x,y)<\infty.$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

をみたす様に出来る。

証明. 1° Lemma 3.1 と同様にして $\mathbb{B}_S\times\mathbb{B}_S$-可測かつ x に関して $\mathbb{R}$-excessive かつ (3.6) をみたす $R(x,y)$ が存在することがわかる。

$$(3.10)\qquad \bar{R}_\alpha(x,y)=R(x,y)-\alpha R_\alpha[R](x,y)\qquad R(x,y)<\infty$$

$$=\infty\qquad\qquad R(x,y)=\infty$$

とおくと $\bar{R}_\alpha(x,y)$ は $\mathbb{B}_S\times\mathbb{B}_S$-可測. Eが compact のとき

$$\int_E\bar{R}_\alpha(x,y)\xi(dy)=\int_E R(x,y)\xi(dy)-\alpha\int_E\int_S R_\alpha(x,dz)R(z,y)\xi(dy)$$

$$=R(x,E)-\alpha R_\alpha R(x,E)=R_\alpha(x,E)\ .$$

だから $\bar{R}_\alpha(x,y)$ は $R_\alpha(x,y)$ の density になっている。$R(x,y)<\infty$ のとき

$$\bar{R}_\alpha(x,y)-\bar{R}_\beta(x,y)+(\alpha-\beta)\int\bar{R}_\alpha(x,z)\bar{R}_\beta(z,y)\xi(dz)$$

の各項は有限だから，この式に (3.10) を代入すると

$$R(x,y)-\alpha R_\alpha[R](x,y)-(R(x,y)-\beta R_\beta[R](x,y))$$
$$+(\alpha-\beta)R_\alpha[R-\beta R_\beta[R]]\ (x,y)$$
$$=\beta R_\beta[R](x,y)-\alpha R_\alpha[R](x,y)+(\alpha-\beta)R_\alpha[R](x,y)$$
$$-\beta(\alpha-\beta)R_\alpha R_\beta[R](x,y)$$
$$=\beta R_\beta[R](x,y)-\beta R_\alpha[R](x,y)+\beta(R_\alpha-R_\beta)[R](x,y)$$
$$=0$$

即ち $\bar{R}_\alpha(x,y)$ は (3.8) をみたす。

2° 特に $\beta>\alpha$ のとき

$$\bar{R}_\alpha(x,y)\geq(\beta-\alpha)\int\bar{R}_\beta(x,z)\bar{R}_\alpha(z,y)\xi(dz)=(\beta-\alpha)R_\beta[\bar{R}_\alpha](x,y),$$
$$R(x,y)<\infty$$

だから $\bar{R}_\alpha(x,y)$ は $(\mathbb{R},\alpha)$-quasi-excessive. $\bar{R}_\alpha(x,y)$ の regularization を $R_\alpha(x,y)$ とおくと $R_\alpha(x,y)$ が Lemma 3.1 の (ii)

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

をみたすことは Lemma 3.1 の証明と同様にして示される. (3.10) より

$$\beta R_{\alpha+\beta}[\bar{R}_\alpha](x,y)=\beta R_{\alpha+\beta}[R](x,y)-\alpha\beta\int R_{\alpha+\beta}R_\alpha(x,dz)R(z,y)$$

$$=\beta R_{\alpha+\beta}[R](x,y)-\alpha\beta R_{\alpha+\beta}[R_\alpha[R]](x,y)$$

$R_\alpha[R](x,y)$ は (R,α)-excessive だから $\beta\to\infty$ とすると

$$R_\alpha(x,y)=R(x,y)-\alpha R_\alpha[R](x,y)$$

$$=R(x,y)-\alpha\int R_\alpha(x,z)R(z,y)\xi(dz).$$

3°. (3.8) は R_α に関して 1° の後半の議論をくり返すことによって得られる. 最後に (3.9), $R(x,y)\geqq R_\alpha(x,y)$ だから

(3.11) $$R(x,y)\geq R_\beta(x,y)+(\beta-\alpha)\int R_\alpha(x,z)R_\beta(z,y)\xi(dz).$$

$R_\alpha(x,z)\uparrow R(x,z)$ (a.e. ξ-z) だから (3.11) より $R(x,y)<\infty$ のとき

$$R(x,y)\geq R_\beta(x,y)+\beta\int R(x,z)R_\beta(z,y)\xi(dz)$$

今後

(3.12) $$R(\nu,y)=\int\gamma(dx)R(x,y),\quad S^\nu=\{y;\,0<R(\nu,y)<\infty\}$$

と書くことにする.

<u>定理 3.1</u>

(3.13) $$R_\alpha^{*,\nu}f(y)=\frac{1}{R(\nu,y)}\int\xi(dz)R(\nu,z)f(z)R_\alpha(z,y)\qquad y\in S^\nu$$

$$=0\qquad\qquad y\notin S^\nu$$

とおけば $R_\alpha^{*,\nu}f$ は $(S,\mathbb{B}_S)$ 上の substochastic な resolvent である.

証明. (3.9) より

(3.14) $$R(x,y)\geqq\alpha\int\xi(dz)R(x,z)R_\alpha(z,y)$$

したがって $y\in S^\nu$ のとき

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$\alpha R_\alpha^{*,\nu} 1(y) = \frac{1}{R(\nu,y)} \int \xi(dz) R(\nu,z) R_\alpha(z,y) \le \frac{R(\nu,y)}{R(\nu,y)} = 1$$

即ち $R_\alpha^{*,\nu}$ は substochastic である。このことから (R.1), (R.2), (R.4) は明らか。次に (R.3) を示す。

$$(3.15) \qquad S_0^\nu = \{y; R(\nu,y) = 0\}, \quad S_\infty^\nu = \{y; R(\nu,y) = \infty\}$$

とおく。(3.14) より

$$(3.16) \qquad \int \xi(dx) R(\nu,x) R_\beta(x,z) = 0 \qquad z \in S_0^\nu$$

$$\int_{S_\infty} \xi(dz) R_\alpha(z,y) = 0 \qquad y \in S^\nu$$

である。したがって $y \in S^\nu$ のとき

$$R_\alpha^{*,\nu} R_\beta^{*,\nu} f(y) = \frac{1}{R(\nu,y)} \int_{S^\nu} \xi(dz) R(\nu,z) R_\alpha(z,y) \left[\frac{1}{R(\nu,z)} \int_S \xi(dx) R(\nu,x) f(x) R_\beta(x,z) \right]$$

$$= \frac{1}{R(\nu,y)} \int_S \xi(dx) R(\nu,x) f(x) \int R_\beta(x,z) R_\alpha(z,y) \xi(dz)$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)} \frac{1}{R(\nu,y)} \int_S \xi(dx) R(\nu,x) f(x) [R_\beta(x,y) - R_\alpha(x,y)]$$

$$= R_\beta^{*,\nu} f(y) - R_\alpha^{*,\nu} f(y).$$

$y \notin S^\nu$ のときは明らか。

§2. Dual resolvent

前節では, resolvent が σ-有限な測度で dominate されているとき, 適当な正則条件をみたす density が存在し, その density を用いて dual な resolvent が定義出来ることをのべたが, density は一意には定まらない。そのため dual resolvent も一意には定まらない。そこでこの節ではやゝ見方を変えて dual resolvent が初めに与えられている場合を考えることにする。

<u>定義</u> S 上の resolvent $\mathbb{R}^* = (R_\alpha^* : \alpha > 0)$ が $\mathbb{R}$ 及び ξ に関して dual であるとは

(i) $\mathbb{R}$ 及び $\mathbb{R}^*$ は ξ によって dominate されている。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

(ii) $^\forall f, g \in \mathbb{B}_0(S)$ に対し

$$\int R_\alpha f(x) g(x) \xi(dx) = \int f(x) R^*_\alpha g(x) \xi(dx) \tag{3.17}$$

をみたすことである。

<u>*Lemma* 3.3</u> $\mathbb{R}^*$ が $(\mathbb{R}, \xi)$ に関して *dual resolvent* とする。そのとき次の条件をみたす $R_\alpha(x, y)$ が存在し一意に定まる。

(i) $R_\alpha(x, y)$ は $\mathbb{B}_S \times \mathbb{B}_S$ - 可測かつ x に関して $(\mathbb{R}, \alpha)$-*excessive*, y に関して $(\mathbb{R}^*, \alpha)$-*excessive*.

(ii) $R_\alpha(x, E) = \int_E R_\alpha(x, y) \xi(dy)$

$$R^*_\alpha(y, E) = \int_E \xi(dx) R_\alpha(x, y)$$

(iii) $R_\alpha(x,y) - R_\beta(x,y) + (\alpha-\beta) \int R_\alpha(x,z) R_\alpha(z,y) \xi(dz) = 0 \quad (^\forall x, {}^\forall y)$.

証明. 1° *Lemma* 3.1 によって (i) 及び (ii) の前半をみたす $\hat{R}_\alpha(x, y)$ が存在する。($R_\alpha = \hat{R}_\alpha$ とみなして),

$$\int f(z) R^*_\beta g(z) \xi(dz) = \iint \hat{R}_\beta(z, y) f(y) g(z) \xi(dz) \xi(dy)$$

時に $\beta > \alpha$, $g(z) = \hat{R}_\alpha(x, z)$ (x を固定), $f \geqq 0$ のとき

$$\int f(z) R^*_\beta [\hat{R}_\alpha](x, z) \xi(dz) = \iint R_\beta(z, y) R_\alpha(x, z) f(y) \xi(dz) \xi(dy) \tag{3.18}$$

$$= R_\alpha R_\beta f(x) \leq \frac{1}{\beta - \alpha} R_\alpha f(x).$$

ここに

$$R^*_\beta [\hat{R}_\alpha](x, y) = \int R^*_\beta(y, dz) \hat{R}_\alpha(x, z). \tag{3.19}$$

したがって任意に固定した x に対し $a.e. \xi - y$ で

$$(\beta - \alpha) R^*_\beta [\hat{R}_\alpha](x, y) \leq \hat{R}_\alpha(x, y).$$

(r. 12) を $\mathbb{R}^*$ に適用することにより, $\hat{R}_\alpha(x, y)$ の y に関する $\mathbb{R}^*$-*regularization* $R_\alpha(x, y)$ が存在する。この $R_\alpha(x, y)$ が求めるものであることを示す。

2°. $(\beta - \alpha) R^*_\beta [\hat{R}_\alpha](x, y)$ は x に関し $(\mathbb{R}, \alpha)$-*excessive*[1] かつ (r. 12) により $(\beta - \alpha) R^*_\beta [\hat{R}_\alpha](x, y)$ は β と共に増加するから $R_\alpha(x, y)$ は

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

x に関して $(\mathbb{R},\alpha)$-excessive でもある．$R_\alpha(x,y)$ の $\mathbb{B}_S\times\mathbb{B}_S$-可測性[1]も明らか。したがって (i) が言えた．

次に (ii) の前半，(3.18) より

$$\int_E R_\alpha(x,y)\xi(dy) = \lim_{\beta\to\infty}\int_E(\beta-\alpha)R^*_\beta[\hat{R}_\alpha](x,y)\xi(dy)$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}(\beta-\alpha)R_\beta R_\alpha(x,E) = R_\alpha(x,E).$$

(ii) の後半：(3.17) より

$$\int R^*_\alpha g(x)f(x)\xi(dx) = \iint R_\alpha(x,y)f(y)g(x)\xi(dx)\xi(dy)$$

だから a.e. ξ-y で

$$(3.20)\qquad R^*_\alpha g(y) = \int\xi(dx)g(x)R_\alpha(x,y)$$

ところが両辺は共に $(\mathbb{R}^*,\alpha)$-excessive だから (r.13) よりすべての y で (3.20) が成立する。したがって (ii) の後半が成立する。

3° (iii)を示す。$\forall x$ を固定すれば，a.e.ξ-y で (ii) が成りたつ (Resolvent equation より)．ところが $\beta>\alpha$ のとき (iii) の各項は $(\mathbb{R}^*,\beta)$-excessive だから (r,13) によりすべての y で (iii) が成りたつ。

4° 最後に一意性．(i), (ii) をみたす $\bar{R}_\alpha(x,y)$ が存在したとする。x を固定すれば a.e. ξ-y で $R_\alpha(x,y)=\bar{R}_\alpha(x,y)$．したがってすべての y で $R_\alpha(x,y)=\bar{R}_\alpha(x,y)$ である．

(iii) により $R_\alpha(x,y)\uparrow(\alpha\downarrow)$ である．

$$(3.21)\qquad R(x,y) = \lim_{\alpha\downarrow 0}R_\alpha(x,y)$$

とおくと

<u>Lemma 3.4</u>　$\mathbb{R}$及び $\mathbb{R}^*$ が integrableとすると

(i)　$R(x,y)$ は $\mathbb{B}_S\times\mathbb{B}_S$- 可測かつ x に関して $\mathbb{R}$-excessive，y に関して $\mathbb{R}^*$-excessive．

---

1) 一般に $u_\alpha(x,y)$ が x に関して $(\mathbb{R},\alpha)$-excessive かつ $\mathbb{B}_S\times\mathbb{B}_S$-可測のとき $u_\alpha(x,\mu)=\int u_\alpha(x,y)\mu(dy)$ (μ：正測度) は $(\mathbb{R},\alpha)$-excessive になる．

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

(ii) $$R(x,E) = \int_E R(x,y)\,\xi(dy)$$

$$R^*(y,E) = \int_E R(x,y)\,\xi(dx).$$

(iii) $$R(x,y) - R_\alpha(x,y) + \alpha\int R_\alpha(x,z)\,R(z,y)\,\xi(dz) = 0$$

$$R(x,y) - R_\alpha(x,y) + \alpha\int R(x,z)\,R_\alpha(z,y)\,\xi(dz) = 0.$$

証明　(i), (ii) は明らか。(iii) は Lemma 3.3 の証明 3° と同じ。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

第4章 Potentialの表現

この章では，Brown運動やMarkov chainのときと類似に，potentialの $\int G(x,y)\mu(dy)$ なる形の表現の問題を考える。ここに $G(x,y)$ は前章で作った一般のGreen函数である。この問題はHunt[17]にいわゆる仮定(F)の下に論じられている（近藤[24]）。このノートでもdual resolventにいくつかの仮定をおいて議論するが，方法は上記[17]よりもむしろ[18]の考えにしたがってのべる。

§1では，この章で考えるprocessに関する仮定と，それから導かれるいくつかの結果をのべる。§2では，potentialの表現のための準備としてreversed processについて議論する。$X=(\Omega,\mathcal{B},P_x;\ x\in S^*)$ をMarkov過程，$\mathcal{B}_t^+$ を $\{x_s: s>t\}$ を可測にする最小の σ-algebra，$\mathcal{B}_{x_t}$ は x_t を可測にする最小の σ-algebraとする。そのときMarkov性は

$$P_\mu(A,B\mid\mathcal{B}_{x_t})=P_\mu(A\mid\mathcal{B}_{x_t})P_\mu(B\mid\mathcal{B}_{x_t}),\qquad A\in\mathcal{B}_t,\ B\in\mathcal{B}_t^+$$

と書き直すことが出来る（例えばMeyer[4]）。このことから時間を逆にしたprocess $x_{\zeta-t}$（reversed process）もやはりMarkov性をもつことが期待される。又もし $x_{\zeta-t}$ がMarkov性をもつならば，その初期分布及び推移確率が何であるかが問題になる。§2ではこれらの問題を，§1の仮定の下に，論ずる[1)]。§3では，potentialの表現は，potentialによって優調和変換したprocessのreversed processの初期分布を求めることによって得られることを示す。

§1. 仮　定

$X=(W,\mathcal{B},P_x:\ x\in S^*)$ をstandard process，そのresolventを $G=(G_\alpha:\ \alpha>0)$ とする。この章では，次の(X.6)～(X.7)をみたすものを考える。

1) 一般にstandard processのreversed processがMarkov性をもつかどうかは未解決である。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

(X.6) $\mathbb{G}$は integrable かつ，ある局所有限な測度ξによって dominate されている。

(X.7) $(\mathbb{G}, \xi)$に関して dual な resolvent $\mathbb{G}^* = (G_\alpha^* : \alpha > 0)$ で次の条件をみたすものが存在する。

(i) G^* は regular

(ii) $\mathbb{G}^*$ は integrable

(iii) G_α^* は $\mathbb{B}(S)$ を $\mathbb{C}(S)$ に移す。

(X.6) 及び，(X.7) の (ii) の仮定によって Lemma 3.3 及び 3.4 をみたす $R_\alpha(x,y)$, $R(x,y)$ が存在する。ここではそれらを $G_\alpha(x,y)$, $G(x,y)$ で表わす。

注意． (X.6) の条件 (iii) は

(iii′) G_α^* は $\mathbb{C}(S)$ を $\mathbb{C}(S)$ に移し，かつ $G_\alpha(x,y)$ は y に関して下半連続

と同値である。

証明． (iii) → (iii′) を示すには，一般に $(\mathbb{G}^*, \alpha)$-excessive function が下半連続であることを示せば十分。u が $(\mathbb{G}^*, \alpha)$-excessive とする。

$u_n = u \wedge n$ とおくと，仮定によって $G_\alpha^* u_n$ は連続．$G_\alpha^* u_n \uparrow G_\alpha^* u$ だから $G_\alpha^* u$ は下半連続．更に $\beta G_{\alpha+\beta}^* u \uparrow u$ $(\beta \uparrow \infty)$ だから u も下半連続になる。

(iii′) → (iii)． $f \in \mathbb{B}^+(S)$ とする。

$$G_\alpha^* f(y) = \int_S \xi(dx) f(x) G_\alpha(x,y)$$

で $G_\alpha(x,y)$ は y に関して下半連続だから Fatou の Lemma によって $G_\alpha^* f$ も下半連続． $a > \sup_{x \in S} |f(x)|$ なる a をとると $a - f \geqq 0$．したがって $G_\alpha^*(a-f)$ も下半連続である。仮定によって $G_\alpha^* a$ は連続だから $G_\alpha^* f$ は上半連続である．ゆえに $G_\alpha^* f \in \mathbb{C}(S)$．

<u>Proposition 4.1</u> uを excessive function とする．次の三条件は同値

(i) uは極集合を除いて有限値

(ii) uはξに関して局所可積分

(iii) uは ξ-測度 0 の点を除いて有限値

証明． (ii) → (iii) は明らか．(iii) → (ii)．任意の固定した点 $y_0 \in S$ の近傍

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

で可積分であることを示せばよい．$\alpha G_\alpha^* f(y_0) \to f(y_0)$ $(f \in \mathbb{C}(S))$ だから，ξ-測度正の x で $G_\alpha(x, y_0) > 0$．x_0 を $u(x_0) < \infty$，$G_\alpha(x_0, y_0) > 0$ をみたす点とする．十分小さな $\varepsilon > 0$ をとると

$$G = \{ y : G_\alpha(x_0, y) > \varepsilon \}$$

は y_0 を含む open set．したがって

$$+\infty > u(x_0) \geqq \alpha G_\alpha u(x_0) \geqq \alpha \int_G G_\alpha(x_0, y) u(y) \xi(dy) \geq \alpha \varepsilon \int_G u(y) \xi(dy).$$

即ち u は G で可積分である．

(i) → (ii)　$E = \{x : u(x) = \infty\}$ とおく．E に含まれる任意の compact set K に対し $\xi(K) = 0$ を言えばよい。$P_x(\sigma_K < \infty) = 0$ $(\forall x \in S)$ だから $G_\alpha(x, K) = 0$ $(\forall x \in S,\ \forall \alpha > 0)$．$f$ を K 上で 1 なる 0 と 1 の間の値をとる連続函数とする。

$$\xi(K) = \int_K f(y) \xi(dy) = \lim_{\alpha \to \infty} \int_K \alpha G_\alpha^* f(y) \xi(dy)$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \alpha \int_S \xi(dx) f(x) G_\alpha(x, K) = 0 .$$

(iii) → (i)．$E = \{x : u(x) = \infty\}$ とおくと仮定により $\xi(E) = 0$．一方 $w(x) = P_x(\sigma_E < \infty)$ とおくと $w(x)$ は excessive かつ $x \notin E$ では $w(x) = 0$ (Lemma 2.2)。したがって $\alpha G_\alpha w(x) = 0$．$\alpha \uparrow \infty$ とすると $w(x) \equiv 0$ が得られる。

今後極集合を除いて有限値の excessive function のみをあつかう．Proposition 4.1 により，すべての y に対し $G_\alpha(x, y)$ は極集合を除いて有限値の excessive function になっている．

<u>Lemma 4.1</u>　次の条件をみたす $\varphi \in \mathbb{C}(S)$ が存在する：(a) $\varphi > 0$，(b) $G^* \varphi > 0$ かつ $\mathbb{C}(S)$ に属する．

証明．$\{G_n\}$ を exhaustion とする。φ_n を $\overline{G}_n$ で 1，G_{n+1}^c で 0 の値をとり，全体で 0 と 1 の間の値をとる連続函数とすると，$\int u(x) \varphi_n(x) \xi(dx) < \infty$，$G^* \varphi_n \in \mathbb{C}(S)$ である．

$\alpha_n = \sup_{y \in S} G^* \varphi_n(y)$，$\beta_n = \max(\alpha_n, 1)$ とおき

$$\psi_N = \sum_0^N \frac{\varphi_n}{\beta_n 2^n} , \qquad \varphi = \lim_{N \to \infty} \psi_N$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

とおくとこの φ が求めるものである。実際 $\varphi \in \mathbb{C}(S)$ 及び $\varphi > 0$ は明らか。

$$G^* \psi_N = \sum_0^N \frac{1}{\beta^n 2^n} G^* \varphi_n.$$

だから

$$\| G^* \psi_N - G^* \psi_M \| \leqq \sum_N^M \frac{1}{2^n} \xrightarrow[N, M \to \infty]{} 0$$

したがって $G^* \psi_N$ は $G^* \varphi$ に一様収束する。故に $G^* \varphi \in \mathbb{C}(S)$。次に $\alpha G_\alpha^* \varphi \to \varphi$ だから十分大きな α をとれば $G_\alpha^* \varphi(y) > 0$。したがって

$$G^* \varphi(y) \geqq G_\alpha^* \varphi(y) > 0.$$

注意． u を任意の恒等的に 0 でない極集合を除いて有限値をとる excessive function とする。上の Lemma の条件 (a), (b) の他に
(c) $0 < \int u(x) \varphi(x) \xi(dx) < \infty$ をみたす様な φ がとれる。実際，上記証明中，$\beta_n = max(\alpha_n, 1, \int u(x) \varphi_n(x) \xi(dx))$ とおきかえて議論すれば，φ が (a), (b) をみたす。(c) は

$$\int u(x) \varphi(x) \xi(dx) = \lim_{N \to \infty} \int u(x) \psi_N(x) \xi(dx) \leqq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} < \infty,$$

からわかる。したがって u は $\varphi(x)\xi(dx)$-可積分であると仮定して一般性を失わない。

以後この章であつかう excessive function はすべて $\varphi(x)\xi(dx)$ 可積分とする。

<u>Proposition 4.2</u> Potential は H_t-potential である。

証明． Lemma 1.3 より

$$P_x^u (\zeta > t) = \frac{H_t u(x)}{u(x)}$$

だから $P_x^u(\zeta > t) \to 0 \ (t \to \infty)$ を証明すればよい。

1°. G を S の compact closure をもつ open set とする。

$$E_x^u (\sigma_{G^c \cup \Delta}) \leq G^u(x, G)$$

だから

(4.1) $\qquad \nu_0(dx) = \varphi(x) \xi(dx)$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

とおくと

$$E^u_{\nu_0 u}(\sigma_{G^c\cup\Delta}) \leq \int \xi(dx)u(x)\varphi(x)G^u(\nu, G) = \int_G G^*\varphi(y)u(y)\xi(dy)$$

が成りたつ．uは局所可積分であり，$G^*\varphi \in \mathcal{C}(S)$ だから上式の右辺の値は有限。したがって $P^u_{\nu_0 u}(\sigma_{G^c\cup\Delta} = \infty) = 0$ である。

2°. $\{G_n\}$ を exhaustion とし，nを固定する。1°より

$$(4.2) \qquad \lim_{t\uparrow\infty} P^u_{\nu_0 u}(\zeta > t) = \lim_{t\uparrow\infty} P^u_{\nu_0 u}(\sigma_{G_n^c\cup\Delta} < t < \zeta) + \lim_{t\uparrow\infty} P^u_{\nu_0 u}(t \leqq \sigma_{G_n^c\cup\Delta}, t<\zeta)$$

$$= \lim_{t\uparrow\infty} P^u_{\nu_0 u}(\sigma_{G_n^c\cup\Delta} < t < \zeta)$$

$$= P^u_{\nu_0 u}(\sigma_{G_n^c\cup\Delta} < \infty, \quad \zeta = \infty)$$

$$\leq P^u_{\nu_0 u}(\sigma_{G_n^c} < \zeta)$$

ところが u は potential だから $x \in S_u$ で $\lim_{n\to\infty} H_{G_n^c} u(x) = 0$。したがって

$$P^u_x(\sigma_{G_n^c} < \zeta) = \frac{H_{G_n^c} u(x)}{u(x)} \xrightarrow[n-\infty]{} 0 \qquad x \in S^u$$

$\int u(x)\nu_0(dx) < \infty$ だから $P^u_{u\nu_0}(\sigma_{G_n^c} < \zeta) \to 0$ $(n \to \infty)$. ゆえに(4.2)から

$$\lim_{t\to\infty} P^u_{u\nu_0}(\zeta > t) = P^u_{u\nu_0}(\zeta = \infty) = 0$$

が得られる．

3°. $\nu(x) = P^u_x(\zeta = \infty)$ とおくと明らかに ν は X^u-excessive (H^u_t-invariant) である。2°によって

$$\int \xi(dx)u(x)\varphi(x)P^u_x(\zeta = \infty) = 0$$

だから $\nu(x)$ は a.e.ξ で 0である。したがって ν は恒等的に0になる。

<u>系</u>. $P^u_x(\zeta = \infty) = 0 \qquad (^\forall x \in S^u)$.

$\nu \in M^+(S)$ によ 積分 $\int_S \nu(dx)G_\alpha(x,y)$ を $G_\alpha(\nu, y)$ であらわす．特に $\alpha = 0$ のとき $G(\nu,y) = \int_S \nu(dx)G(x,y)$ である．又 $S^\nu = \{y: 0 < G(\nu, y) < \infty\}$ で表わす。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$(4.2)\qquad G_\alpha^{*,\nu}f(y)=\frac{1}{G(\nu,y)}\int_S \xi(dz)G(\nu,z)f(z)G_\alpha(z,y)\qquad y\in S^\nu$$
$$=0\qquad\qquad y\notin S^\nu$$

とおくと $\mathcal{G}^{*,\nu}=(G_\alpha^{*,\nu};\ \alpha>0)$ は定理3.1により substochastic な resolvent であるが，Lemma 4.1 の条件(a),(b)をみたすφをとり $\nu_0=\varphi\xi(\cdot)$ とおくと

<u>Proposition 4.3</u>　$\mathcal{G}^{*,\nu_0}$ は regular かつ $G_\alpha^{*,\nu_0}:\mathbb{B}(S)\to\mathbb{C}(S)$ をみたす。

証明.　$G(\nu_0,y)\in\mathbb{C}(S)$ だから $G_\alpha^{*,\nu_0}:\mathbb{B}(S)\to\mathbb{C}(S)$ は明らか。次に $f\in\mathbb{C}(S)$ のとき $f(z)G(\nu_0,z)\in\mathbb{C}(S)$ だから，(X.6) (i) によって

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha^{*,\nu_0}f(y)=\frac{G(\nu_0,y)f(y)}{G(\nu_0,y)}=f(y).$$

ゆえに $\mathcal{G}^{*,\nu_0}$ は regular である。

§2. Reversed process.

Path function $\omega\in W$ に対し reversed path $x^t(\omega)$ を

$$(4.3)\qquad x_t^*(\omega)=\begin{cases}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}x_{\zeta-t-\varepsilon}(\omega) & 0<t<\zeta(\omega)<\infty\\ \Delta & \zeta\leqq t\ \text{又は}\ \zeta(\omega)=\infty\\ a\ \text{(任意に固定した点)} & \text{その他のとき}\end{cases}$$

によって定義する。$W^*=\{x^*(\omega):\ \omega\in W\}$ とおくと W^* は次の条件をみたす $\omega\in\Omega_{S^*}$ の全体である。

(W*.1) $W^*\ni\omega$ に対して非負函数 $\zeta(\omega)$ が定義されており

$$x_t(\omega)\ \begin{cases}=a & t=0\ \text{かつ}\ \zeta(\omega)>0\\ \in S & 0<t<\zeta(\omega)\\ =\Delta & t\geqq\zeta(\omega)\end{cases}$$

(W*.2) $x_t(\omega)$ は $0<t\leq\zeta(\omega)$ で右連続かつ左極限をもつ。

W^* 上の σ-algebra で §1.0 の $(\mathfrak{F}.1)\sim(\mathfrak{F}.2)$ をみたす最小のものを $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{B}_t^*$ で表わす。

uを excessive function, νをS上の測度とする。$\nu u(\cdot)=\nu(\cdot)u(\cdot)$, $u(\nu)=\int u(x)\nu(dx)$ と書く。$(W^*,\mathcal{B}^*)$ 上に測度 $P_u^{*,\nu}$ を

$$(4.4)\qquad P_u^{*,\nu}(A)=\frac{1}{u(\nu)}P_{\nu u}^{*,\nu}(x^*\in A)\qquad 0<u(\nu)<\infty$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$= P_\Delta(x^* \in A) \qquad\qquad u(\nu)=0 \quad \text{又は} \quad =\infty$$

によって定義する。

定義　$(W^*, \mathcal{B}^*, P_u^{*,\nu})$ を，初期分布を νu にとった X^u の reversed process という。

注意．　一般には $P_x^u(\zeta<\infty)=1$ ではないから $P_u^{*,\nu}(\zeta>0)=1$ とはかぎらないが，H_t-potential のときは $P_u^{*,\nu}(\zeta>0)=1$ である。

時に $u=G(\cdot,y)$ のとき，$P_y^{*,\nu}$ で表わす．なお便宜上

$$P_\Delta^{*,\nu}(A) = P_\Delta(x^* \in A) \tag{4.5}$$

によって定義する。Markov 過程のときと類似に

$$H_t^{*,\nu}(u,E) = P_u^{*,\nu}(x_t \in E) \tag{4.6}$$

と書き，f の (4.6) による積分を $H_t^{*,\nu}f(u)$ で表わす。なお，$u=G(\cdot,y)$ のとき $H_t^{*,\nu}f(u)$ で表わす．更に

$$G_\alpha^{*,\nu}f(u) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t^{*,\nu}f(u)\,dt \tag{4.7}$$

と書く。

Lemma 4.2 (Nagasawa-Sato [31]).　任意の $0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\infty$ と $f_j \in \mathbb{C}(S)$ $(j=1,\cdots,n)$ に対して

$$\int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\beta t_n}\,dt_n\, E_x\left(e^{-\alpha\zeta}\prod_{j=1}^n f_j(x_{t_j}^*):\ t_n<\zeta\right) \tag{4.8}$$

$$= E_x\left(\int_\nu^\zeta e^{-\alpha\zeta} f_n(x_s)\, E_{x_s}\left(e^{-(\alpha+\beta)\zeta}\prod_{j=1}^{n-1} f_j(x_{t_j}^*);\ t_{n-1}<\zeta\right)\right).$$

証明．

$$\int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\beta t_n}\,dt_n\, E_x\left(e^{-\alpha\zeta}\prod_{j=1}^n f_j(x_{t_j}^*);\ t_n<\zeta\right) \tag{4.9}$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\beta t_n}\,dt_n\, E_x\left(e^{-\alpha\zeta} f_n(x_{\zeta-t_n-\varepsilon})\prod_{j=1}^{n-1} f_j(x_{t_j}^*):\ t_n+\varepsilon<\zeta\right)$$

$\zeta-\varepsilon-t_n=s$ とおくと (4.9) は

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E_x\left(\int_0^\infty e^{-\beta(\zeta-\varepsilon-s)} e^{-\alpha\zeta} f_n(x_s)\prod_{j=1}^{n-1} f_j(x_{t_j}^*)\,dS;\ t_{n-1}+\varepsilon<\zeta\right) \tag{4.10}$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

となる．$s<\zeta$ では $\zeta(\omega)=s+\zeta(\omega_s^+)$ 更に

$$x_{t_j}^*(\omega)=\lim_{\varepsilon'\downarrow 0} x_{\zeta-\varepsilon'-t_j}(\omega)=\lim_{\varepsilon'\downarrow 0} x_{\zeta(\omega_s^+)-\varepsilon'-t_j}(\omega_s^+)$$

$$=x_{t_j}^*(\omega_s^+) .$$

したがって（4.10）は

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E_x\Big(\int_0^\zeta e^{-\beta(\zeta(\omega_s^+)-\varepsilon)} e^{-\alpha(s+\zeta(\omega_s^+))} f_n(x_s)\prod_{j=1}^{n-1} f_j(x_{t_j}^*(\omega_s^+))\,dS\,;\ \zeta(\omega_s^+)>t_{n-1}+\varepsilon\Big)$$

$$=E_x\Big(\int_0^\zeta e^{-\alpha s} f_n(x_s)E_{x_s}(e^{-(\alpha+\beta)\zeta}\prod_{j=1}^{n-1} f_j(x_{t_j}^*)\,;\ t_{n-1}<\zeta\Big)$$

<u>Lemma 4.3</u>

$$(4.11)\qquad \int_0^\infty e^{-\alpha_1 t_1}dt_1\cdots\int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\alpha_n t_n}dt_n\, E_n(e^{-\alpha\zeta}\prod_{j=1}^{n} f_j(x_{t_j}^*))$$

$$=G_\alpha f_n G_{\alpha+\alpha_n} f_{n-1}\cdots G_{\alpha+\alpha_n+\cdots+\alpha_1} f_1 h_{\alpha+\alpha_n+\cdots+\alpha_1}(x)$$

ここに $h_\alpha(x)=E_x(e^{-\alpha\zeta})$．

証明．帰納法で示す。$n=0$ のとき明らか．$n-1$ のとき成立したとする。Lemma 4.2 により（4.11）の左辺は

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_1 t_1}dt_1\cdots\int_{t_{n-2}}^\infty e^{-\alpha_{n-1}t_{n-1}}dt_{n-1}\, E_x\Big(\int_0^\zeta e^{-\alpha s}f_n(x_s)E_{x_s}(e^{-(\alpha+\alpha_n)\zeta}\prod_{j=1}^{n-1} f_j(x_{t_j}^*);\, t_{n-1}<\zeta\Big)$$

$$=E_x\Big(\int_0^\zeta e^{-\alpha s} f_n(x_s) G_{\alpha+\alpha_n} f_{n-1}\cdots G_{\alpha+\alpha_n+\cdots+\alpha_1} f_1 h_{\alpha+\alpha_n+\cdots+\alpha_1}(x_s)\,dS\Big)$$

$$=G_\alpha f_n G_{\alpha+\alpha_n} f_{n-1}\cdots G_{\alpha+\alpha_n+\cdots+\alpha_1} f_1 h_{\alpha+\alpha_n+\cdots+\alpha_1}(x) .$$

<u>Proposition 4.4</u>　$h_\alpha^u(x)=E_x^u(e^{-\alpha\zeta})$ とおくと

$$(4.12)\qquad G_\alpha^{*,\nu}f(u)=\frac{1}{u(\nu)}\int_S \xi(dz)G(\nu,z)f(z)u(z)h_\alpha^u(z)\qquad 0<u(\nu)<\infty$$

$$=0 \qquad\qquad u(\nu)=0 \text{ 又は } \infty$$

特に $u=G(\cdot,y)$ のとき $G_\alpha^{*,\nu}f(y)$ は（4.1）と一致する。

証明．$0<u(\nu)<\infty$ のとき Lemma 4.3 により

$$G_\alpha^{*,\nu}f(u)=\frac{1}{u(\nu)}\int_S \nu(dx)u(x)E_x^u\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(x_t^*)\,dt\Big)$$

$$=\frac{1}{u(\nu)}\int_S \nu(dx)u(x)G^u f h_\alpha^u(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$= \frac{1}{u(\nu)} \int_S \nu(dx) \int_S \xi(dz) G(x,z) f(z) u(z) h_\alpha^u(z)$$

$$= \frac{1}{u(\nu)} \int_S \xi(dz) G(\nu,z) f(z) u(z)\ h_\alpha^u(z) .$$

これで (4.12) が示された。なお $u(\nu)=0$ 又は ∞ のときは明らか。次に $u=G(\cdot, y)$ のとき (4.1)を示すには

$$(4.13) \qquad h_\alpha^y(x) = \frac{G_\alpha(x,y)}{G(x,y)}$$

を証明すればよい．それは次の計算からわかる．

$$h_\alpha^u(x) = E_x^y(e^{-\alpha\zeta}) = 1 - \alpha G_\alpha^y(x, S)$$

$$= \frac{1}{G(x,y)} [G(x,y) - \alpha \int_S G_\alpha(x,z) G(z,y) \xi(dz)]$$

$$= \frac{G_\alpha(x,y)}{G(x,y)} .$$

<u>Lemma 4.4</u> $f_j\ (j=1, \cdots, n)$ は $C(S)$ に属するとすると

$$(4.14) \qquad \int_0^\infty e^{-\alpha_1 t_1} dt_1 \cdots \int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\alpha_n t_n} dt_n\ E_u^{*,\nu}(\prod_{j=1}^n f_j(x_{t_j}))$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha_1 t_1} dt_1 \cdots \int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\alpha_n t_n} dt_n\ H_{t_1}^{*,\nu} f_1 H_{t_2-t_1}^{*,\nu} f_2 \cdots H_{t_n-t_{n-1}}^{*,\nu} f_n(u)^{1)}$$

$$= G_{\alpha_n+\cdots+\alpha_1}^{*,\nu} f_1 G_{\alpha_n+\cdots+\alpha_2}^{*,\nu} f_2 \cdots G_{\alpha_n}^{*,\nu} f_n(u) .$$

証明． $0 < u(\nu) < \infty$ のときを考える．Lemma 4.3 により (4.14) の左辺は

$$\frac{1}{u(\nu)} \int \nu(dx) u(x) G^u f_n G_{\alpha_n}^u f_{n-1} \cdots G_{\alpha_n+\cdots+\alpha_2}^u f_1 h_{\alpha_n+\cdots+\alpha_1}^u(x)$$

$$= \frac{1}{u(\nu)} \int \cdots \int G(\nu, y_n) f_n(y_n) G_{\alpha_n}(y_n, y_{n-1}) f_{n-1}(y_{n-1})$$

---

1) $H_{t_1}^{*,\nu} f_1 H_{t_2-t_1}^{*,\nu} f_2 \cdots H_{t_n-t_{n-1}}^{*,\nu} f_n(u) = \int \cdots \int H_{t_1}^{*,\nu}(u, dy_1) f_1(y_1) H_{t_2-t_1}^{*,\nu}(y_1, dy_2) f_2(y_2)$

$\cdots\cdots H_{t_n-t_{n-1}}^{*,\nu}(y_{n-1}, dy_n) f_n(y_u) .$

最後の式も同様の意味をもつ．

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$\cdots\ G_{\alpha_n+\cdots+\alpha_2}(y_2, y_1) f_1(y_1) u(y_1) h^{u}_{\alpha_n+\cdots+\alpha_1}(y_1)\xi(dy_1)\cdots\xi(dy_n)$$

$$= \frac{1}{u(\nu)}\int\cdots\int\Big[G(\nu, y_n) f_n(y_n) G_{\alpha_n}(y_n, y_{n-1})\frac{1}{G(\nu, y_{n-1})}\Big]\times$$

$$\times\Big[G(\nu, y_{n-1}) f_{n-1}(y_{n-1}) G_{\alpha_n+\alpha_{n-1}}(y_{n-1}, y_{n-2})\frac{1}{G(\nu, y_{n-2})}\Big]$$

$$\cdots\Big[G(\nu, y_1) f_1(y_1) u(y_1) h^{u}_{\alpha_n+\cdots+\alpha_1}(y_1)\Big]\xi(dy_1)\cdots\ \xi(dy_n)$$

Proposition 4.4 より

$$= \int\cdots\int G^{*,\nu}_{\alpha_n+\cdots+\alpha_1}(u, dy_1) f_1(y_1) G^{*,\nu}_{\alpha_n+\cdots+\alpha_2}(y_1, dy_2) f_2(y_2)\cdots\ G^{*,\nu}_{\alpha_n}(y_{n-1}, dy_n) f_n(y_n)$$

最後に (4.14) の中央の項の終りの項とが一致することを帰納法で示す。$n=1$ のときは明らか。$n-1$ のとき成立したとする。

$$\int_{t_{n-1}}^{\infty} e^{-\alpha_n t_n} dt_n\, H^{*,\nu}_{t_1} f_1\cdots\ H^{*,\nu}_{t_{n-1} t_{n-2}} f_{n-1} H^{*,\nu}_{t_n - t_{n-1}} f_n(u)$$

$$= e^{-\alpha_n t_{n-1}} H^{*,\nu}_{t_1} f_1\cdots\qquad H^{*,\nu}_{t_{n-1}-t_{n-2}} f_{n-2} G^{*,\nu}_{\alpha_n} f_n(u)$$

だから帰納法の仮定により

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 t_1} dt_1\cdots\ \int_{t_{n-1}}^{\infty} e^{-\alpha_n t_n} dt_n H^{*,\nu}_{t_1} f_1\cdots\ H^{*,\nu}_{t_n - t_{n-1}} f_n(u)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 t_1} dt_1\cdots\ \int_{t_{n-2}}^{\infty} e^{-(\alpha_n+\alpha_{n-1})t_{n-1}} dt_{n-1}\ H^{*,\nu}_{t_1} f_1\cdots H^{*,\nu}_{t_{n-1}-t_{n-2}} f_{n-1} G^{*,\nu}_{\alpha_n} f_n(u)$$

$$= G^{*,\nu}_{\alpha_n+\cdots+\alpha_1} f_1\, G^{*,\nu}_{\alpha_n+\cdots+\alpha_n} f_2\cdots\ G^{*,\nu}_{\alpha_n} f_n(u).$$

(4.14) の被積分函数は，$f_i\in\mathbb{C}(S)$ のとき，$0<t_1<\cdots<t_n$ に関して右連続である．したがって，もし (4.14) の右辺の被積分函数も $0<t_1<\cdots<t_n$ で右連続であることが言えれば Laplace 変換の一意性によって

$$(4.15)\qquad E^{*,\nu}_{u}\Big(\prod_{j=1}^{n} f_j(x_{t_j})\Big) = H^{*,\nu}_{t_1} f_1 H^{*,\nu}_{t_2-t_1} f_2\cdots\ H^{*,\nu}_{t_n-t_{n-1}} f_n(u)$$

が証明されたことになる。しかし (4.15) の右辺の t_j に関する右連続性はただちにはわからない（一般には $H^{*,\nu}_t : \mathbb{C}(S)\to\mathbb{C}(S)$ でないため）．われわれはまず特別な初期分布 γ を取ったとき (4.15) が成りたつことを示す。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

Proposition 4.5　初期分布νとして特に(4.1)に与えたν_0をとれば(4.15)が成立する。

証明．1° f_j $(j=1,\cdots,n)\in C(S)$として帰納法で示す。$n=1$のとき$E_u^{*,\nu_0}(f_1(x_t))$及び$H_{t_1}^{*,\nu_0}f_1(u)$はtに関して右連続($t>0$で)だから，Laplace変換の一意性より明らか。一般に$n-1$のとき(4.15)が成立したとすると，

$$(4.16)\qquad E_u^{*,\nu_0}\Big(\prod_{j=1}^{n-1} f_j(x_{t_j})\, G_{\alpha_n}^{*,\nu_0} f_n(x_{t_{n-1}})\Big)=H_{t_1}^{*,\nu}f_1\cdots H_{t_n-t_{n-1}}^{*,\nu}f_{n-1}G_{\alpha_n}^{*,\nu}f_n(u)$$

が成りたつ．もし

$$(4.17)\qquad e^{-\alpha_n t_{n-1}}E_u^{*,\nu}\Big(\prod_{j=1}^{n-1} f_j(x_{t_j})\, G_{\alpha_n}^{*,\nu_0} f_n(x_{t_{n-1}})\Big)=\int_{t_{n-1}}^{\infty} e^{-\alpha_n t_n}dt_n\, E_u^{*,\nu}\Big(\prod_{j=1}^{n} f_j(x_{t_j})\Big)$$

が証明出来れば，ほとんどすべての(Lebesque measure 0を除いた)$t_n>t_{n-1}$で(4.17)が成立することになる。ところが(4.17)の両辺は$0<t_1<\cdots<t_{n-1}$を固定したとき$t_n>t_{n-1}$でt_nに関して右連続だからすべての$t_n>t_{n-1}$で(4.17)が成りたち，このPropositionが証明されたことになる．

2°．(4.17)の証明のために，その各辺の

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_1 t_1}dt_1\cdots\int_{t_{n-2}}^\infty e^{-\alpha_{n-1}t_{n-1}}dt_{n-1}$$

によって積分すれば，Lemma 4.4により両者は一致する。ところが(4.17)の両辺は各$0<t_1<\cdots<t_{n-1}$に関して右連続だからLaplace変換の一意性から，すべての$0<t_1<\cdots<t_{n-1}$で(4.17)が成りたつ。

系．Reversed processの系$X^{*,\nu_0}=(W^*,\mathcal{B}^*,P_y^{*,\nu_0};\ y\in S^*)$は$H_t^{*,\nu_0}(y,E)$を推移確率にもつI-M型Markov過程で，そのresolventは(4.1)で与えられる。

注意．優調和変換してもreversed processの推移確率は変らない。優調和変換はreversed processの初期分布に影響を与えるだけである。Reversed processの推移確率は，元のprocessの初期分布に関係する。

一般にはreversed processのpath x_tの$t\downarrow 0$でのlimitの存在はわからないが，

Lemma 4.5　uがpotentialならばa.e. P_u^{*,ν_0}で$x_0=\lim_{t\downarrow 0}x_t$が存在し，$P_u^{*,\nu_0}(x_0\in S)=1$である。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

証明. 1° 先ず $x_t(t\downarrow 0)$ が S にのみ limit point をもつことを示す。$\{G_n\}$ を S の exhaustion とすれば, Proposition 2.5 によって $u(x)<\infty$ なる x では $H_{G_n^c}u(x)\longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$。したがって Lemma 1.3 より

$$P_x^u(\sigma_{G_n^c}<\zeta)=\frac{H_{G_n^c}u(x)}{u(x)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 .$$

即ち

$$P_x^u(x_t(t\uparrow\zeta)\ \text{は無限遠点}^{1)}\ \text{に limit point をもつ})=0$$

ゆえに

$$(4.18)\qquad P_x^u(x_t\ (t\uparrow\zeta)\ \text{は}\ S\ \text{にのみ limit point をもつ})=1.$$

Proposition 4.2 の系により $P_x^u(\zeta<\infty)=1$ だから $P_u^{*,\nu_0}(\zeta>0)=1$ である。このことと (4.18) から

$$P_u^{*,\nu_0}(x_t(t\downarrow 0)\ \text{は}\ S\ \text{にのみ limit point をもつ})=1.$$

2°, $f\in C_0^+(S)$ のとき

$$Y_t(\omega)=e^{-\alpha t}G_\alpha^{*,\nu_0}f(x_t)$$

は $(W^*,\mathcal{B}^*,P_u^{*,\nu_0})$ に関して super-martingale である。実際

$$Y_t(\omega)=e^{-\alpha t}\int_0^\infty e^{-\alpha s}E_{x_t}^{*,\nu_0}(f(x_s))\,ds$$

$$=e^{-\alpha t}\int_0^\infty e^{-\alpha s}E_u^{*,\nu_0}(f(x_{s+t})\mid\mathcal{B}_t^*)\,ds$$

$$=\int_t^\infty e^{-\alpha s}E_u^{*,\nu_0}(f(x_s)\mid\mathcal{B}_t^*)\,ds$$

だから

$$E_u^{*,\nu_0}(Y(t+u)\mid\mathcal{B}_t^*)=\int_{t+u}^\infty e^{-\alpha s}E_u^{*,\nu_0}(E_u^{*,\nu_0}(f(x_s)\mid\mathcal{B}_{t+u}^*)\mid\mathcal{B}_t^*)\,ds$$

$$=\int_{t+u}^\infty e^{-\alpha s}E_u^{*,\nu_0}(f(x_s)\mid\mathcal{B}_t^*)\,ds .$$

---

1) S に一点 compact 化によってつけ加えられた点。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$\leq \int_t^\infty e^{-\alpha s} E_u^{*,\nu_0}(f(x_s)\mid \mathcal{B}_t^*)\,ds = Y_t(\omega).$$

さて，$Y_t(\omega)$ は super-martingale だから $\lim_{t\downarrow 0} Y_t(\omega)$ が存在する。[1] 今，$x_{t_n}(\omega)$ $(t_n \downarrow 0)$ の limit point の一つを $x_0^*(\omega)$ とおく。$G_\alpha^{*,\nu_0} f(x) \in \mathbb{C}(S)$ だから

$$\lim_{t\downarrow 0} Y_t(\omega) = \lim_{t\downarrow 0} G_\alpha^{*,\nu_0} f(x_t) = G_\alpha^{*,\nu_0} f(x_0^*(\omega)).$$

$\mathbb{D}_0^+(S)$ を $\mathbb{C}_0^+(S)$ で dense な可算個の函数族とすると $\{G_\alpha^{*,\nu_0} f : f \in \mathbb{D}_0^+(S)\}$ は S の二点を分離する（$\because \lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha^{*,\nu_0} f \to f$）。したがって $x_0^*(\omega)$ は部分列 $\{t_n\}$ の取り方に関係しない。これで $\lim_{t\downarrow 0} x_t(\omega)$ の存在がわかった。

系．$S_p = \{y :\ G(\cdot, y)$ は potential$\}$ とおけば $y \in S_p$ のとき $x_0 = \lim_{t\downarrow 0} x_t$ が a.e. P_y^{*,ν_0} で存在し $P_y^{*,\nu_0}(x_0 = y) = 1$.

証明．$x_0 = \lim_{t\downarrow 0} x_t$ の存在は Lemma 4.2 に含まれている。$f \in \mathbb{C}(S)$ のとき

$$f(y) = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha^{*,\nu_0} f(y) = \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_y^{*,\nu_0}(f(x_{\frac{t}{\alpha}})) = E_y^{*,\nu_0}(f(x_0))$$

だから $P_y^{*,\nu_0}(x_0 = y) = 1$ である。

注意．$\xi(S - S_p) = 0$ である。なぜなら K を S の任意の compact set とすれば

$$H_{G_n^c}[G(\cdot, K)](x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

したがって K に含まれる $S - S_p$ の ξ-測度 は 0 となるからである．

$\mathcal{B}^{*,\mu}$ を $\mathcal{B}^*$ の P_μ^{*,ν_0} による完備化とし

$$\bar{\mathcal{B}}^* = \bigcap_{\mu \in M^+(S_p)} \mathcal{B}^{*,\mu}$$

とおく．ここに $M^+(S_p)$ は $\mu \in M^+(S)$ の内，S_p に support をもつものの全体である．$y \in S_p$ のとき $x_t(\omega)$ は $0 \leq t < \zeta(\omega)$ で右連続かつ左極限をもち（a.e. P_y^{*,ν_0}），$G_\alpha^{*,\nu_0} : \mathbb{C}(S) \to \mathbb{C}(S)$, $\alpha G_\alpha^{*,\nu_0} f \to f\ (f \in \mathbb{C}(S))$ を

---

1) x_t は $0 < t \leq \zeta$ で右連続であり，$G_\alpha^{*,\nu_0} f \in \mathbb{C}(S)$ だから $Y_t(\omega) = e^{-\alpha t} G_\alpha^{*,\nu_0} f(x_t)$ は可分な super-martingale. Doob [6, Theorem 11.5] によって $\lim_{t\downarrow 0} Y_t$ が存在する。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

みたすから，$(W^*, \mathcal{B}^*, P_y^{*,\nu_0}: y\in S_p)$ はやはり強 Markov 性及び quasi-左連続性をもつ．そのことから，analytic set E への hitting time σ_E は $(\mathcal{B}^*)$-Markov time である．σ_E に対して，E に含まれる compact set の列 $\{K_n\}$ が存在して $P_y^{*,\nu_0}(\sigma_{K_n}\downarrow\sigma_E)=1$ $(y\in S_p)$ と出来る．

<u>Lemma 4.6</u> P_y^{*,ν_0}（ある $0\le t<\zeta$ で $x_t\in S-S_p$）$=0$．

証明．1° $q(\lambda;\ t_1, x_1, \cdots, t_n, x_n\cdots)$ を Proposition 1.4 の証明の中で定義した函数とすると，

$$(4.19)\qquad E_y^{*,\nu_0}(q(\zeta:\ t_1, x_{t_1}, \cdots, t_n, x_{t_n}, \cdots))=0 \qquad y\in S_p$$

$$\qquad\qquad >0 \qquad y\notin S_p$$

が成立する。実際 $y\in S_p$ では path は $0\le t<\zeta$ で右連続かつ左極限をもつから明らかである。一方 $y\notin S_p$ のとき

$$(4.20)\qquad P_y^{*,\nu_0}(x_t(\omega)\ (t\downarrow 0)\ \text{は}\ S\ \text{の点に収束しない})>0$$

である。なぜなら $y\in S-S_p$ では $\lim\limits_{n\to\infty} H_{G_n^c}G(x,y)>0$ だから

$$P_{\nu_y}^{*,\nu_0}(\forall n\ \text{で}\ \sigma_{G_n^c}<\zeta)=\lim_{n\to\infty}\frac{H_{G_n^c}G(\nu_0,y)}{G(\nu_0,y)}>0$$

となり Lemma 4.5 の証明と同様にして (4.20) が成立することがわかる。(4.20) の（ ）内の条件をみたす ω に対しては $q(\zeta(\omega);\ t_1, x_{t_1}(\omega), \cdots, t_n, x_{t_n}(\omega), \cdots)=1$ だから結局 (4.19) が成立する。

2° σ を $S-S_p$ への hitting time とし，$\{K_n\}$ を $S-S_p$ に含まれる compact set の列で，$P_y^{*,\nu_0}(\sigma_{K_n}\downarrow\sigma_E)=1$ をみたすものとする $(y\in S_p)$．この Lemma の証明のためには，$P_y^{*,\nu_0}(\sigma_{K_n}=\infty)=1$ $(\forall n)$ を証明すればよい．$y\in S_p$ のとき，P_y^{*,ν_0} の強 Markov 性を使って

$$E_y^{*,\nu_0}(E_{x_{\sigma_{K_n}}}^{*,\nu_0}(q(\zeta;\ t_1, x_{t_1}, \cdots, t_m, x_{t_m}\cdots):\ \sigma_{K_n}<\infty;)$$

$$=E_y^{*,\nu_0}(q(\zeta(\omega_{\sigma_{K_n}}^+);\ t_1, x_{t_1}(\omega_{\sigma_{K_n}}^+), \cdots, t_m, x_{t_m}(\omega_{\sigma_{K_n}}^+), \cdots))=0$$

したがって (4.19) に注意すると $P_y^{*,\nu_0}(\sigma_{K_n}<\infty)=0$ である。

この lemma によって $y\in S_p$ のとき path space は次のものに制限出来る。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$W_p^* = \left\{ \begin{array}{l} \omega \in W^*;\ x_t(\omega) \text{ は } 0 \leq t \leq \zeta \text{ で右連続かつ左極限} \\ \text{をもちすべての } t \text{ で } x_t(\omega) \in S_p \cup \Delta \end{array} \right\}$$

以上まとめると

<u>定理 4.1</u> $X^{*,\nu_0} = (W_p^*, \mathcal{B}^*, P_y^{*,\nu_0};\ y \in S_p \cup \Delta)$ は standard process である.

<u>定理 4.2</u> u を potential とする。$(W^*, \mathcal{B}^*, P_u^{*,\nu_0})$ の path space は W_p^* に制限出来,

$$(4.20) \qquad H_0^{*,\nu_0}(u, E) = P_u^{*,\nu_0}(x_0 \in E) \qquad E \in \mathbb{B}_S$$

とおくと

$$(4.21) \qquad P_u^{*,\nu_0}(\cdot) = \int_{S_p} H_0^{*,\nu_0}(u, dy)\, P_y^{*,\nu_0}(\cdot).$$

証明。 Proposition 4.5 より

$$E_u^{*,\nu_0}(f(x_{t+\varepsilon})) = H_\varepsilon^{*,\nu_0} H_t^{*,\nu_0} f$$

したがって

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt\, E_u^{*,\nu_0}(f(x_{t+\varepsilon})) = H_\varepsilon^{*,\nu_0} G_\alpha^{*,\nu_0} f$$

$G_\alpha^{*,\nu_0} f \in \mathbb{C}(S)$ ($f \in \mathbb{C}(S)$ のとき) に注意して $\varepsilon \downarrow 0$ とすると

$$G_\alpha^{*,\nu_0} f(u) = \int H_0^{*,\nu_0}(u, dy)\, G_\alpha^{*,\nu_0} f(y)$$

Laplace 変換の一意性より

$$H_t^{*,\nu_0} f(u) = \int_{S_p} H_0^{*,\nu_0}(u, dy)\, H_t^{*,\nu_0} f(y)$$

したがって

$$P_u^{*,\nu_0}(\cdot) = \int_{S_p} H_0^{*,\nu_0}(u, dy)\, P_y^{*,\nu_0}(\cdot).$$

$y \in S_p$ のとき

$$P_y^{*,\nu_0}(x_t (t \downarrow 0) \text{ は無限遠点に limit point をもつ}) > 0 .$$

一方 a.e. P_u^{*,ν_0} で $\lim_{t \downarrow 0} x_t$ は S に収束するから $H_0^{*,\nu_0}(u, S - S_p) = 0$
これで (4.21) が証明出来た。path space が W_p^* に制限出来ることは (4.

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

21) より明らか。

§3. Potential の表現

定理4.1及び4.2で，初期分布 ν を適当にとれば（$\nu=\nu_0$），それを初期分布とする process の reversed process は standard process になることをのべた。この§では，先ず始めに一般の初期分布に対しても同じ結果が成りたつことを示す。なおこの節で考える u はすべて potential である。

<u>定理4.1′</u>　ν を任意の初期分布とする。Reversed process の系 $X^{*,\nu}=(W^*,\mathcal{B}^*,P_y^{*,\nu}: y\in S_p\cup\Delta)$ と同値な standard process が存在する。

証明．1° $v(y)=G(\nu,y)/G(\nu_0,y)$ とおくと，v は X^{*,ν_0}-excessive である．実際（4.1）より

$$\alpha G_\alpha^{*,\nu_0}v(y)=\frac{\alpha}{G(\nu_0,y)}\int\xi(dz)G(\nu,z)G_\alpha(z,y)\leqq\frac{G(\nu,y)}{G(\nu_0,y)}=v(y).$$

更に $\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha^{*,\nu_0}v(y)=v(y)$ である．X^{*,ν_0} を v で優調和変換した process を $X^{*,\nu_0,v}=(W_p^*,\mathcal{B}^*,P_y^{*,\nu_0,v}: y\in S_p\cup\Delta)$ とすると $X^{*,\nu_0,v}$ は standard process．$X^{*,\nu_0,v}$ の resolvent は

$$G_\alpha^{*,\nu_0,v}f(y)=\frac{1}{G(\nu,y)}\int\xi(dz)G(\nu,z)f(z)G_\alpha(z,y)$$

$$=G_\alpha^{*,\nu}f(y)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}H_t^{*,\nu}f(y)\,dt.$$

2°．証明すべきことは $X^{*,\nu}$ と $X^{*,\nu_0,v}$ が同値であることであるが，そのためには

$$(4.22)\qquad E_y^{*,\nu}\Big(\prod_{j=1}^n f_j(x_{t_j})\Big)=E_y^{*,\nu_0,v}\Big(\prod_{j=1}^n f_j(x_{t_j})\Big)$$

がすべての $0<t_1<\cdots<t_n$ と $f_j\in\mathbb{C}(S)$ $(j=1,\cdots,n)$ に対して成りたつことを言えばよい。1° により $G_\alpha^{*,\nu}=G_\alpha^{*,\nu_0,v}$ だから，(4.22) の各辺を n 重 Laplace 変換すると一致する (Lemma 4.4)．一方 (4.22)の各辺は $0<t_1<\cdots<t_n$ で不連続だから，Laplace 変換の一意性より，すべての $0<t_1<\cdots<t_n$ で（4.22）が成りたつ。

この定理によって reversed process $X^{*,\nu}$ の path space を W_p^* に制限出来て，$X^{*,\nu}=(W_p^*,\overline{\mathcal{B}}^{*,\nu},P_y^{*,\nu}: y\in S_p\cup\Delta)$ が standard process になる。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

次に $(W^*, \mathcal{B}^*, P_u^{*,\nu})$ が $X^{*,\nu}$ を適当な初期分布で積分したものになっていることを示すのであるが，その前に

Lemma 4.7

(4.23) $$E_x^u(e^{-\alpha\zeta}) = \frac{u(\nu_0)}{u(x)}\int_{S_p} H_0^{*,\nu_0}(u,dy)\,\frac{G_\alpha(x,y)}{G(\nu_0,y)}\,.$$

証明． 定理4.2により

(4.24) $$G_\alpha^{*,\nu_0} f(u) = \int_{S_p} H_0^{*,\nu_0}(u,dy)\,G_\alpha^{*,\nu_0} f(y)$$

即ち

$$\frac{1}{u(\nu_0)}\int \xi(dz)\,G(\nu_0,z)\,f(z)\,u(z)\,h_\alpha^u(z)$$

$$=\int H_0^{*,\nu_0}(u,dy)\,\frac{1}{G(\nu_0,y)}\int \xi(dz)\,G(\nu_0,z)\,f(z)\,G_\alpha(z,y)$$

ここに $h_\alpha^u(z) = E_z^u(e^{-\alpha\zeta})$ である。したがって (4.23) が a.e. ξ-x で成立する。ところが (4.23) の両辺は x に関して (X^u, α)-excessive．したがって (4.23) はすべての x で成立する。

定理 4.2′ $P_u^{*,\nu}$ の path space は $(W_p^*, \mathcal{B}^*)$ に制限出来て

(4.25) $$P_u^{*,\nu}(\Lambda) = \int_{S_p} H_0^{*,\nu}(u,dy)\,P_y^{*,\nu}(\Lambda) \qquad \Lambda \in \mathcal{B}^*.$$

ここに $H_0^{*,\nu}$ は

(4.26) $$H_0^{*,\nu}(u,E) = u(\nu_0)\int_{S_p} H_0^{*,\nu_0}(u,dy)\,\frac{G(\nu,y)}{G(\nu_0,y)}$$

で与えられる．

証明． (4.25) を示すには[1)]

(4.27) $$E_u^{*,\nu}\Big(\prod_{j=1}^{n} f_j(x_{t_j})\Big) = \int H_0^{*,\nu}(u,dy)\,E_y^{*,\nu}\Big(\prod_{j=1}^{n} f_j(x_{t_j})\Big)$$

が任意の $0<t_1<\cdots<t_n$ と $f_j \in \mathbb{C}(S)$ $(j=1,\cdots,n)$ に対して成りたつことを言えばよい．(4.23) 及び (4.26) から

(4.28) $$G_\alpha^{*,\nu} f(u) = \frac{1}{u(\nu)}\int_S \xi(dz)\,f(z)\,u(z)\,h_\alpha^u(z)$$

---

1) 正確には $(W^*, \mathcal{B}^*)$ 空間における $\Lambda \in \mathcal{B}^*$ に対して．

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$= u(\nu_0)\int_{S_p} H_0^{*,\nu_0}(u,dy)\frac{1}{G(\nu_0,y)}\int_S \xi(dz)G(\nu,z)f(z)G_\alpha(z,y)$$

$$= \int_{S_p} H_0^{*,\nu}(u,dy)\, G_\alpha^{*,\nu} f(y)$$

したがって（4.27）の Laplace 変換は等しくなる（Lemma 4.5）。(4.27)の各辺は $0<t_1<\cdots<t_n$ に関し右連続だから，すべての $0<t_1<\cdots<t_n$ で (4.27) が成立する。最後に $P_u^{*,\nu}$ の path space が W_p^* に制限出来ることは明らか。

注意　Potential u が $u(x)=\int_{S_p} G(x,y)\mu(dy)$ と書けている場合は（4.25）の代りに

$$(4.29)\qquad P_u^{*,\nu}(\Lambda) = \int_{S_p} G(\nu,y)\, P_y^{*,\nu}(\Lambda)\,\mu(dy)$$

が成りたつ。実際（4.13）を示したときと同じ計算で

$$E_x^u(e^{-\alpha\zeta}) = \frac{G_\alpha(x,\mu)}{G(x,\mu)}$$

となる。このことから (4.28) と同様にして

$$G_\alpha^{*,\nu} f(u) = \int_{S_p} G(\nu,y)\, G_\alpha^{*,\nu} f(y)\,\mu(dy)$$

となる。したがって（4.29）が得られる.

<u>定理 4.3</u>　$x_{\zeta-}(\omega) = \lim_{t\uparrow\zeta} x_t(\omega)$ が a.e. P_x^u で存在し

$$(4.30)\qquad P_x^u(x_{\zeta-}\in B) = \frac{u(\nu_0)}{u(x)}\int_{B\cap S_p} H_0^{*,\nu_0}(u,dy)\frac{G(x,y)}{G(\nu_0,y)}\ .$$

証明.　定理 4.2 により $\lim_{t\downarrow 0} x_t$ が a.e. $P_u^{*,x}$ で存在する. Reversed process の定義から $\lim_{t\downarrow 0} x_t^*(\omega)$ が a.e. P_x^u で存在するが，$P_x^u(\zeta<\infty) = 1$ だから

$$\lim_{t\downarrow 0} x_t^*(\omega) = \lim_{t\uparrow\zeta} x_t(\omega) = x_{\zeta-}(\omega)$$

である。これで前半が言えた．後半は

$$P_x^u(x_{\zeta-}\in B) = P_u^{*,x}(\lim_{t\downarrow 0} x_t\in B) = \int_{S_p} H_0^{*,x}(u,dy)\, P_y^{*,x}(\lim_{t\downarrow 0} x_t\in B)$$

$$= \int_{B\cap S_p} H_0^{*,x}(u,dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$= \frac{u(\nu_0)}{u(x)} \int_{B\cap S_p} H_0^{*,\nu_0}(u, dy) \frac{G(x,y)}{G(\nu_0, y)} .$$

<u>定理4.4</u>　u を potential とすれば，S_p 上の測度 μ が一意に定まり

$$(4.31) \qquad u(x) = \int_{S_p} G(x,y)\,\mu(dy) .$$

と表現出来る．

証明．　定理4.3において　$B = S$　とすれば

$$1 = P_x^u(x_{\zeta-}\in S) = u(\nu_0)\int_{S_p} H_0^{*,\nu_0}(u, dy) \frac{G(\nu, y)}{G(\nu_0, y)}$$

したがって

$$\mu(E) = u(\nu_0)\int_E H_0^{*,\nu_0}(u, dy) \frac{1}{G(\nu_0, y)}$$

とおけば，$x\in S^u$　では

$$u(x) = \int_{S_p} G(x,y)\,\mu(dy)$$

$x\in S_0^u$　では　$H_t(x, S-S_0^u) = 0$　だから

$$0 = H_t u(x) = \int_{S_p} H_t[G](x,y)\,\mu(dy)$$

$t\downarrow 0$　とすると

$$0 = \int_{S_p} G(x,y)\,\mu(dy)$$

したがって　$x\in S_0^u$ でも (4.31) が成立。又 $\xi(S_\infty^u) = 0$ だから (4.31) は a.e. ξ で成立．(4.31) の両辺は excessive だからすべての x で成立する。

次に一意性：

$$u(x) = \int G(x,y)\,\mu'(dy)$$

と書けたとする。定理4.2 の後の注意により

$$P_u^{*,x}(\Lambda) = \int G(x,y)\,P_y^{*,x}(\Lambda)\,\mu'(dy)$$

$$= \int G(x,y)\,P_y^{*,x}(\Lambda)\,\mu(dy) .$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

したがって $\mu=\mu'$ でなければならない。

注意. $y\in S_p$ ならば $G(\cdot,y)$ は extreme である。

証明. $G(\cdot,y)=u_1+u_2$ と二つの excessive function の和に書けたとする。$u_i\leq G(\cdot,y)$ だから u_i は potential である。したがって u_i は一意な表現

$$u_i(x)=\int_{S_p}G(x,y)\mu_i(dy)$$

をもつ。したがって $\mu_1+\mu_2=\delta(y,\cdot)$. これより μ_i は $\delta(y,\cdot)$ の定数倍でなければならない。ゆえに u_i は $G(\cdot,y)$ の定数倍である。

§4. Reduced function の表現

§2. 定理4.1 において $X^{*,\nu_0}=(W_p^*,\ \bar{\mathcal{B}}^*,\ P_x^{*,\nu_0};\ x\in S_p\cup\Delta)$ は standard process になることをのべた。したがって E を S の analytic set とすれば E への hitting time σ_E は $(\bar{\mathcal{B}}^*)$-Markov time にもなっている。$H_E^{*,\nu_0}(y,\cdot)=P_y^{*,\nu_0}(x_{\sigma_E}\in\cdot)$ と書く。

<u>Lemma 4.8</u>

$$(4.32)\qquad \int_{S\cap E}H_E(x,dz)G(z,y)=G(\nu_0,y)\int_{S_p\cap E}H_E^{*,\nu_0}(y,dz)\frac{G(x,z)}{G(\nu_0,z)}\ .$$

証明. $X^{*,\nu_0}=(W_p^*,\ \bar{\mathcal{B}}^*,\ P_x^{*,\nu_0};\ x\in S_p\cup\Delta)$ を $G(x,y)/G(\nu_0,y)$ で優調和変換した process を $X^{*,\nu_0,x}=(W_p^*,\ \mathcal{B}^*,\ P_y^{*,\nu_0,x};\ y\in S_p\cup\Delta)$ とすると、定理4.2の証明と同じ議論で $X^{*,\nu_0,x}$ と $X^{*,x}=(W_p^*,\ \mathcal{B}^*,\ P_y^{*,x};\ y\in S_p\cup\Delta)$ と同値になる。

G を S の open set とする。$(W_p^*,\ \mathcal{B}^*,\ P_y^{*,x})$ は $(W,\ \mathcal{B},\ P_x^y)$ の reversed process だから

$$(4.33)\qquad P_x^y(\sigma_G<\zeta)=P_y^{*,x}(\sigma_G<\zeta)=P_y^{*,\nu_0,x}(\sigma_G<\zeta)\ ,$$

$$0<G(x,y)<\infty\ .$$

が成りたつ。E^{reg} を E の X の regular point の全体, E^{reg*} を E X^{*,ν_0} の regular point の全体とする。$x\in E-E^{reg}$, $y\in E-E^{reg*}$ のとき, E を含む open set の列 $\{G_n\}$ が存在して $P_x^y(\sigma_{G_n}\downarrow\sigma_E)=1$, $P_y^{*,\nu_0,x}(\sigma_{G_n}\downarrow\sigma_E)=1$ と出来る。このことから (4.33) は

$$P_x^y(\sigma_E<\zeta)=P_y^{*,\nu_0,x}(\sigma_E<\zeta),\quad 0<G(x,y)<\infty$$

かつ $x\in E-E^{reg}$, $y\in E-E^{reg*}$ で成立する. Lemma 1.3 より

$$P_x^y(\sigma_E<\zeta)=\frac{1}{G(x,y)}\int H_E(x,dz)\,G(z,y)$$

$$P_y^{*,\nu_0,x}(\sigma_E<\zeta)=\frac{G(\nu_0,y)}{G(x,y)}\int H_E^{*,\nu_0}(y,dz)\,\frac{G(x,z)}{G(\nu_0,z)}$$

したがって (4.32) は $0<G(x,y)<\infty$ かつ $x\in E-E^{reg}$, $y\in E-E^{reg*}$ のときに成りたつ. $G(x,y)=0$ なる x,y に対しては (4.32) の両辺は 0 だから成りたつ。更に $\xi(E-E^{reg})=0$, $\xi(E-E^{reg*})$[1] $=0$ だから, (4.32) は a.e. ξ-x,y に対して成立することになる。両辺は x に関し X-excessive, y に関し X^{*,ν_0}-excessive だから結局すべての x,y で成立する。

定理 4.5　u が potential ならば, analytic set E への reduced function H_Eu は

$$H_Eu(x)=\int_{\bar{E}\cap S_p}G(x,y)\,\mu(dy)$$

と表現出来る。

証明. u の表現を (4.31) とすると, Lemma 4.8 を適用することにより

$$H_Eu(x)=\int_{S_p}H_E[G](x,y)\,\mu(dy)$$

$$=\int_{\bar{E}\cap S_p}G(x,y)\,\mu_1(dy)$$

ここに

$$\mu_1(B)=\int_{S_p}\mu(dy)\,G(\nu_0,y)\int_{B\cap S_p\cap\bar{E}}H_E^{*,\nu_0}(y,dz)\,\frac{1}{G(\nu_0,z)}$$

である。

1) 近藤 [24], p.97 参照。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

第5章 Martin境界

Brown 運動や Markov chain の場合は，K-函数 $K(x,y)=G(x,y)/G(\gamma,y)$ を用いて Martin 位相を

$$\rho(y_1,y_2)=\int\frac{|K(x,y_1)-K(x,y_2)|}{1+|K(x,y_1)-K(x,y_2)|}\,\xi(dx)$$

で定義する（[29]，[42] 等）．しかし前章であつかった process では一般には，ρ は元の位相と関係がないし，又 ρ による完備化が必ずしも compact にならない。

このため，§1 ではやゝ違った形で Martin 位相を導入し，Martin 空間及び Martin 境界を定義する。又 K-函数は境界まで一意に拡張されることをのべる。

§2では，Martin 空間上に，K-函数を Green 函数とする dual な process が，reversed process を作ることによって得られることをのべる。なお，その dual な process の resolvent は一般には regular ではなく，Ray [36] の意味の branching point を含んでいる。

§3以降で，excessive function，superharmonic function 等の表現の問題を考えるが，前章の potential の場合と類似の方法でのべる。

§1. Martin 境界の定義

$X=(W,\mathcal{B},P_x;\ x\in S^*)$ を (X.6) 及び (X.7) をみたす standard process とする。$G(x,y)$ 等の記号は前章と同じである。

定義　γ を S 上の σ-有限な測度とする。$G(\gamma,y)$ が (1) S 上いたる所 >0，(2) 極集合を除いて有限値，(3) $+\infty$ も含めて連続，をみたすとき γ を regular な reference 測度という。

注意1．Regular な reference 測度 γ は，reference 測度である．即ち $u(\gamma)=0$ なる excessive function u は恒等的に 0 になる。

証明．Gf_n $(f_n\geqq 0)$ を u に下から近づく excessive function の列とする（存在は，例えば [26, p.　]）．$Gf_n(\gamma)=\int_S G(\gamma,y)f_n(y)\xi(dy)$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$=0$ だから

$$Gf_n(x)=\int_S G(x,y)f_n(y)\xi(dy)=\int_S K(x,y)f_n(y)G(\gamma,y)\xi(dy)=0$$

ゆえに $u\equiv 0$ である。

注意 2.（Reference 測度の存在）. 任意の極集合を除いて有限値をとる excessive function u に対し $u(\gamma)<\infty$ をみたす regular な reference 測度が存在する。実際，Lemma 4.1 の後の注意でのべた $\nu_a=\varphi\xi$ が求める性質をもっている。

今後一つの regular な reference 測度を固定して議論する。

$$(5.1)\qquad K(x,y)=\frac{G(x,y)}{G(\gamma,y)}\qquad G(\gamma,y)<\infty \text{ のとき}$$

$$\qquad\qquad =0\qquad\qquad G(\gamma,y)=0 \text{ のとき}$$

と定義し，$K(x,y)$ を K-函数という。$f\in\mathcal{B}_0(S)$ に対し

$$(5.2)\qquad \langle f,K\rangle(y)=\int\xi(dx)f(x)K(x,y)$$

とおけば $\langle f,K\rangle\in\mathbb{C}(S)$ である。実際，$\langle f,K\rangle(y)=\frac{G^*f(y)}{G(\gamma,y)}$ だから，$\langle f,K\rangle$ の連続性は明らか。したがって有界であることを示せばよい。$Car(f)=K$ とし，Uを K を含む compact closure をもつ open set とすれば，$y\in S_p$ のとき

$$(5.2)\qquad H_U[G](x,y)=\int_{\bar{U}}G(x,z)\mu_y(dz)$$

と書ける（Lemma 4.8）。したがって $G(\gamma,y)<\infty$ のとき

$$\frac{1}{G(\gamma,y)}\int_{\bar{U}}G(\gamma,z)\mu_y(dz)\leqq 1$$

である。このことに注意すれば $y\in S_p$ かつ $G(\gamma,y)<\infty$ のとき

$$H_U[K](x,y)=\frac{1}{G(\gamma,y)}\int_{\bar{U}}G(x,z)\mu_y(dz)$$

$$=\frac{1}{G(\gamma,y)}\int_{\bar{U}}K(x,z)G(\gamma,z)\mu_y(dz)$$

ゆえに $y\in S_p$ かつ $G(\gamma,y)<\infty$ のとき

$$\langle f,K\rangle(y)=\langle f,H_{\bar{U}}K\rangle(y)$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$= \frac{1}{G(\gamma,y)} \int_{\overline{U}} \langle f, K\rangle(z) G(\gamma,z) \mu_y(dz)$$

$$\leq \frac{1}{G(\gamma,y)} \sup_{z\in \overline{U}} |\langle f, K\rangle(z)| \int_{\overline{U}} G(\gamma,z)\mu_y(dz)$$

$$\leq \sup_{z\in\overline{U}} |\langle f, K\rangle(z)|$$

したがって $\langle f, K\rangle(y)$ は $y\in S_p \cap \{y: G(\gamma,y)<\infty\}$ で有界。ところが $\xi([S_p\cap\{y: G(\gamma,y)<\infty\}]^c)=0$ だから $S_p\cap\{y: G(\gamma,y)<\infty\}$ は S で dense である[1]. ゆえに $\langle f, K\rangle(y)$ は S 上で有界である.

$\mathbb{D}_0^+(K)$ を $\mathbb{C}_0^+(K)$ (= carrier が K に含まれる正値連続函数の全体) で dense な可算個の函数族とする。G_n を S の exhaustion とし,

$$\mathbb{D}_0^+(S) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{D}_0^+(\overline{G}_n)$$

とする. ρ_1 を S の一点 compact 化の距離とし,

$$(5.3)\qquad \rho_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle f_n, K\rangle(x)-\langle f_n, K\rangle(y)|}{1+|\langle f_n, K\rangle(x)-\langle f_n, K\rangle(y)|}, \qquad \{f_n\}=\mathbb{D}_0^+(S)$$

とおく. $\rho=\rho_1+\rho_2$ による S の完備化を M と書き, X の Martin 空間という。$\partial M = M-S$ を Martin 境界という。

__定理 5.1__ (i) M 及び ∂S は才二可算公理をみたす compact Hausdorff space,

(ii) S の相対位相は元の位相と一致する。

証明は明らか。

$f\in\mathbb{D}_0^+(S)$ のとき, (M,ρ) の定義から $\langle f, K\rangle(y)$ は M 上への一意的な連続拡大函数 $\widetilde{\langle f, K\rangle}(\eta)$ $(\eta\in M)$ をもつ。更に任意の $f\in\mathbb{C}_0(S)$ に対しても $\langle f, K\rangle$ は M 上への一意的な連続拡大函数をもつ. $f\in\mathbb{C}_0^+(S)$ のときに示せば十分である。$car(f)\subset\overline{G}_n$ をみたす G_n をとれば $f_m\in\mathbb{D}_0(\overline{G}_n)$ で $\|f_m-f\|\to 0$ $(m\to\infty)$ と出来る. その f_m に対して

$$|\langle f, K\rangle(y)-\langle f_m, K\rangle(y)| \leq \|f-f_m\| \int_{\overline{G}_n} \xi(dy) K(x,y)$$
$$\leq C\cdot\|f-f_m\| \longrightarrow 0$$

ここに $C=\|\int_{\overline{G}_n}\xi(dx)K(x,\cdot)\|$ である.

---

1) この章では任意の空でない open set G に対し $\xi(G)>0$ を仮定する。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$\langle \widetilde{f, K} \rangle (\eta)$ は $\mathbb{C}_0(S)$ 上に定義された正値線型作用素だから $\mathbb{B}_S$ 上の測度 $K(\cdot, \eta)$ が存在して

$$(5.4) \qquad \langle \widetilde{f, K} \rangle (\eta) = \int_S K(dx, \eta) f(x)$$

と書ける。

<u>Lemma 5.1</u>　次の条件をみたす $K(x, \eta)$ が一意に定まる。

(i) $K(x, \eta)$ は $\mathbb{B}_S \times \mathbb{B}_M$- 可測かつ各変数に関して下半連続.

(ii) $K(x, \eta)$ は x に関して X-excessive.

(iii) $\langle \widetilde{f, K} \rangle (\eta) = \int f(x) \xi(dx) K(x, \eta)$.

証明.　$\alpha G_\alpha K(x, \eta) = \int G_\alpha(x, z) K(dz, \eta)$ とおく.

$$(5.7) \qquad K(x, \eta) = \sup_{\alpha : rat} \alpha G_\alpha K(x, \eta)$$

が求めるものであることを示す。

1° 先ず $\eta \in S$ のとき (5.7) で定義した $K(x, \eta)$ は元の $K(x, \eta)$ と一致する。実際 $G(\gamma, y) < \infty$ のとき

$$\alpha G_\alpha K(x, \eta) = \alpha \int G_\alpha(x, z) \frac{G(z, \eta)}{G(\gamma, \eta)} \xi(dz)$$

$$= \frac{1}{G(\gamma, y)} \alpha \int G_\alpha(x, z) G(z, \eta) \xi(dz)$$

$$\xrightarrow[\alpha \to \infty]{} \frac{G(x, y)}{G(\gamma, y)} = K(x, y)$$

である。$G(\gamma, y) = 0$ のとき $K(x, y) = 0$ $({}^\forall x)$ だから明らか.

2° 一般に $\eta \in M$ のとき $G_\alpha(x, z)$ は z に関して下半連続だから $\alpha G_\alpha K(x, \eta)$ は η に関して下半連続. したがって $K(x, \eta)$ も η に関して下半連続である。$K(x, \eta)$ の $\mathbb{B}_S \times \mathbb{B}_M$- 可測性も明らか。

3° 次に (iii) を示す. $f \in \mathbb{C}_0^+(S)$ のとき $\eta \in M$ で

$$(5.5) \qquad \langle \widetilde{f, K} \rangle (\eta) = \langle f, K \rangle (\eta) \left(= \int \xi(dx) f(x) K(x, \eta) \right)$$

が成立することを言えばよい。$K(x, \eta)$ は η に関して下半連続だから $\langle f, K \rangle (\eta)$ は M で下半連続. したがって

$$\langle \widetilde{f, K} \rangle (\eta) \geqq \langle f, K \rangle (\eta)$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

が成りたつ．一方 $K(x,\eta)$ の定義によって，任意の有理数αと $f\in C_0^+(S)$ に対し

$$\langle f,K\rangle(\eta)\geq\int f(x)\alpha G_\alpha K(x,\eta)\xi(dx)=\int\alpha G_\alpha^* f(y)K(dy,\eta)$$

ゆえに

$$\langle f,K\rangle(\eta)\geq\varliminf_{\substack{\alpha:\,rat\\ \to\infty}}\alpha\int G_\alpha^* f(y)K(dy,\eta)\geq\int f(y)K(dy,\eta)$$
$$=\langle \widetilde{f,K}\rangle(\eta)$$

これで（5.5）が言えた．

4° 次に（ii）．$K(x,\eta)$ の定義から

$$K(x,\eta)\geq\alpha G_\alpha K(x,\eta)=\int\alpha G_\alpha(x,dz)K(z,\eta)$$

が有理数αに対して成立するが，右辺はαに関して下半連続だからすべてのαで成りたつ。ゆえに $K(x,\eta)$ は *quasi-excessive*． このことから $\alpha G_\alpha K(x,\eta)$ はαと共に増加する．したがって

$$K(x,\eta)=\lim_{\alpha:\,rat}\alpha G_\alpha K(x,\eta)=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha K(x,\eta)$$

である．

5° 最後に一意性： (i), (ii), (iii) をみたす $\overline{K}(x,\eta)$ が存在したとすれば，$\overline{K}(x,\eta)$ と $K(x,\eta)$ は a.e.ξ-x で等しい。ゆえにすべての x で $\overline{K}$ と K は一致する．

注意． uをγ-可積分な *excessive function* とすれば u は極集合を除いて有限値である。

証明 $E=\{x;\ u(x)=\infty\}$ とおくと $\gamma(E)=0$． $w(x)=P_x(\sigma_E<\infty)$ は $x\notin E$ で 0 だから（*Lemma* 2.2），$\omega(\gamma)=0$． したがって $\omega\equiv 0$．
$K(x,\eta)$ はηに関して下半連続だから $K(\gamma,\eta)=\int\gamma(dx)K(x,\eta)$ もηに関して下半連続である． $\eta\in S$ かつ $G(\gamma,y)<\infty$ のときは $K(\gamma,\eta)=1$ であり，$G(\gamma,\eta)<\infty$ なるηは M で *dense* たから

$$K(\gamma,\eta)\leq 1\qquad \forall\eta\in M\tag{5.6}$$

が成立する．したがって $K(x,\eta)$ は極集合を除いて有限値をとる *excessi-*

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

ve function になっている。

$\{G_n\}$ を exhaustion, φ_n を $\bar{G}_n$ 上で 1, G_{n+1}^c 上で 0 をとり全体では 0 と 1 の間の値をとる連続函数とする。

$$\beta_n = max\{\|\langle\varphi_n, K\rangle\|, 1\}$$

とおき, Lemma 4.1 の証明と同じに ψ_N, ρ を定義する。$\hat{\xi}(\cdot)=\varphi(\cdot)\xi(\cdot)$ とおく。

Lemma 5.2

$$(5.7) \qquad G^*f(\eta) = \int \hat{\xi}(dx) f(x) K(x,\eta)$$

とおけば G^* は $\mathbb{C}(S)$ を $C(M)$ に移す。ここに $C(M)$ は M 上の連続函数の全体である。

証明

$$G^*f(\eta) = \lim_{N\to\infty}\int \xi(dx)\psi_N(x)f(x)K(x,\eta) = \lim_{N\to\infty}\langle\psi_N f, K\rangle(\eta)$$

であり, $\langle\psi_N f, K\rangle \in \mathbb{C}(M)$ だから $\langle\psi_N f, K\rangle$ が G^*f に一様収束することを言えばよい。$N > M$ のとき

$$\|\langle\psi_M f, K\rangle - \langle\psi_N f, K\rangle\| \leq \sum_{n=M}^{N} \frac{1}{2^n\beta^n}\|\langle\psi_n f, K\rangle\|$$

$$\leq \|f\|\sum_{n=M}^{N}\frac{1}{2^n\beta^n}\|\langle\psi_n, K\rangle\| \leq \|f\|\sum_{n=M}^{N}\frac{1}{2^n} \xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0$$

だから, $\langle\psi_N f, K\rangle$ は G^*f に一様収束する。

$$\psi_t(\omega) = \int_0^t \frac{\varphi(x_s)}{G(v, x_s)}\,ds$$

とおくと, ψ_t は strict に増加する連続な additive functional である。

$$\tau_t(\omega) = sup\{s;\ \psi_s \leq t\}$$

とおいて X を τ_t で time change した process を $\hat{X}=(W, \mathcal{B}, \hat{P}_x, x\in S^*)$ と書く。Volkonsky [40] によれば $\hat{X}$ は standard process である。$\hat{X}$ の resolvent を $\hat{G}$ で表わす。$f\in\mathbb{B}_0(S)$ のとき

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$\hat{G}f(x)=\hat{E}_x\Big(\int_0^\infty f(x_t)\,dt\Big)=E_x\Big(\int_0^\infty f(x_{\tau_t})\,dt\Big)=E_x\Big(\int_0^\infty f(x_t)\,\frac{\varphi(x_t)}{G(\gamma,x_t)}\,dt\Big)$$

$$=\int G(x,y)\,f(y)\,\frac{\varphi(y)}{G(\gamma,y)}\,\xi(dy)=\int K(x,y)\,f(y)\,\rho(y)\,\xi(dy)$$

即ち

$$(5.8)\qquad \hat{G}f(x)=\int K(x,y)\,f(y)\,\hat{\xi}(dy)$$

と書ける。

<u>Lemma 5.3</u>　u が X-excessive ならば $\hat{X}$-excessive である。

証明.

$$\{\omega:\ \tau_t<s\}=\{\omega:\ \psi_s\geqq t\}\in\mathcal{B}_s$$

だから τ_t は Markov time. したがって (e.10) によって

$$\hat{H}_t u = H_{\tau_t}u \leq u.$$

更に $t\downarrow 0$ とすれば $\tau_t\downarrow 0$ だから (e.11) によって $\hat{H}_t u = H_{\tau_t}u\uparrow u$. したがって u は $\hat{X}$-excessive である.

注意 1.　$\hat{X}^u$ は, X を u で優調和変換し, その後に τ_t で time change した process と同値である。

証明.　$\hat{H}_t(x,E)=P_x(x_{\tau_t}\in E)$ だから

$$\hat{H}_t^u(x,E)=\frac{1}{u(x)}\int_E \hat{H}_t(x,dy)\,u(y)=\frac{1}{u(x)}\,E_x(u(x_{\tau_t}):x_{\tau_t}\in E).$$

一方 X^u を τ_t で time change した process の推移確率は $P_x^u(x_{\tau_t}\in E)$ であるが, Lemma 1.3 により

$$P_x^u(x_{\tau_t}\in E)=\frac{1}{u(x)}\,E_x(u(x_{\tau_t}):\ x_{\tau_t}\in E).$$

注意 2.　γ-可積分な excessive function は $\hat{H}_t$-potential である。

証明.　$\hat{X}$ を u で優調和変換した process を $\hat{X}^u$ で表わす. $\hat{P}_x^u(\zeta<\infty)=1$ ($x\in S^u$) を示せばよい. $\hat{G}f_n$ ($f_n\geqq 0$) を u に下から近づく excessive function の列とすると

$$u(\gamma)\geqq\hat{G}f_n(\gamma)=\int f_n(y)\,\hat{\xi}(dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

である．ゆえに ${}^{\forall}f \in \mathbb{C}_0^+(S)$ に対し

$$\int \xi(dx)\,u(x)\,\hat{G}^u(x,S) = \int \langle f, K\rangle(z)\,u(z)\,\hat{\xi}(dz)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \|\langle f, K\rangle\| \int \hat{G} f_n(z)\,\hat{\xi}(dz)$$

$$= \|\langle f, K\rangle\| \lim_{n\to\infty} \int G^* 1(y)\, f_n(y)\,\hat{\xi}(dy)$$

$$\leq \|\langle f, K\rangle\|\, \|\hat{G}^* 1\|\, u(\gamma) < \infty .$$

したがって $\hat{G}^u(x,S)$ は a.e. ξ-x で有限値． $w(x) = \hat{P}_x^u(\zeta < \infty)$ は a.e. ξ-x で 0 であり，しかも $\hat{X}^u$-excessive だから $w \equiv 0$ となる。

§2. K-函数に対応する dual Ray process.

$\hat{G}$ は integrable であり，かつ $\hat{\xi}$ によって dominate されているから，$\mathbb{R} = \hat{G} = (\hat{G}_\alpha : \alpha > 0)$ とみれば Lemma 3.2 の条件をみたす $R_\alpha(x, \eta)$ $(x \in S,\ \eta \in M)$ が存在する。ここではそれを $\hat{R}_\alpha(x, \eta)$ で表わす[1]. ν を任意の S 上の初期分布とし，$K(x, \eta)$ の ν による積分を $K(\nu, \eta)$ で表わす。定理3.1によって

$$(5.9) \qquad G_\alpha^* f(\eta) = \frac{1}{K(\nu,\eta)} \int \hat{\xi}(dz)\,K(\nu, z)\,f(z)\,\hat{R}_\alpha(z,\eta) \qquad 0 < G(\nu,\eta) < \infty$$

$$= 0 \qquad\qquad G(\nu,\eta) = 0 \text{ 又は } \infty$$

は substochastic な resolvent になっている．

$\nu u = \nu(\cdot)\,u(\cdot)$ を初期分布にもつ $\hat{X}^u$ の reversed process を $(W^*, \mathcal{B}^*, \hat{P}_u^{*,\nu})$ で表わす。なお $u = K(\cdot, \eta)$ のとき $K(\cdot,\eta)$ で優調和変換した process を $\hat{X}^\eta$ ， reversed process を $(W^*, \mathcal{B}^*, \hat{P}_\eta^{*,\nu})$ で表わす。

<u>定義</u>． Reversed process の系 $\hat{X}^{*,\nu} = (W^*, \mathcal{B}^*, \hat{P}_\eta^* : \eta \in M)$ を K-函数に対応する dual Ray process という。

---

[1] Lemma 3.2 では $\eta \in S$ のときのみあつかっているが $\eta \in M$ の場合も全く同じである．実際 (3.10) の代りに

$$\bar{R}_\alpha(x,\eta) = K(x,\eta) - \alpha \hat{G}_\alpha [K](x,\eta)$$

とおけばよい．

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$\hat{X}^{*,\nu}$ が Markov 過程になること，及び $(W^*, \mathcal{B}^*, \hat{P}_u^{*\nu})$ が $\hat{X}^{*,\nu}$ を適当な初期分布で積分したものになっていることを示すのがこの§の目的である。

$$(5.10)\qquad \hat{H}_t^*(u,E)=\hat{P}_u^{*,\nu}(x_t\in E),\quad \hat{H}_t^{*,\nu}(\eta,E)=\hat{P}_\eta^*(x_t\in E)$$

と書く．又それらによる f の積分を $\hat{H}_t^{*,\nu}f(u)$，$\hat{H}_t^{*,\nu}f(\eta)$ で表わす。Proposition 4.4 により

$$(5.11)\qquad \hat{G}_\alpha^{*,\nu}f(u)\equiv\int_0^\infty e^{-\alpha t}\hat{H}_t^{*,\nu}f(u)dt=\frac{1}{u(\nu)}\int\hat{\xi}(dz)K(\nu,z)u(z)\hat{h}_\alpha^u(z)\qquad 0<u(\nu)<\infty$$

$$=0\qquad u(\nu)=0 \text{ 又は } \infty$$

ここに $\hat{h}_\alpha^u(z)=\hat{E}_x^u(e^{-\alpha\zeta})$ である。Proposition 4.4 の証明の後半と同じ議論によって $\hat{h}_\alpha^\eta(z)=\hat{R}_\alpha(z,\eta)/K(z,\eta)$ となる．ゆえに $u=K(\cdot,\eta)$ のとき (5.11) は (5.9) と一致する．

<u>Proposition 5.1</u>　$(W^*, \mathcal{B}^*, P_u^{*,\gamma})$ は Markov 性をもつ．即ち

$$(5.12)\qquad \hat{E}_u^{*,\gamma}\Big(\prod_{j=1}^n f_j(x_{t_j})\Big)=\hat{H}_{t_1}^{*,\gamma}f_1\hat{H}_{t_2-\tau_1}^{*\gamma}f_2\cdots\hat{H}_{t_n-\tau_{n-1}}^{*,\gamma}f_n(u)$$

が任意の $f_j\in C(S)$，$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ に対して成りたつ。ここに γ は regular な reference 測度である。

証明．　1° 先ず

$$(5.13)\qquad G_\alpha^*f(\eta)\equiv\int\hat{\xi}(dz)f(z)\hat{K}_\alpha(z,\eta)\qquad \alpha\geqq 0$$

は $\mathbb{C}(S)$ を $\mathbb{C}(M)$ に移す substochastic な resolvent で $K(\gamma,\eta)=1$ なる η 及び $\eta\in S$ では $G_\alpha^*=G_\alpha^{*\gamma}$ であることを示す。$K(\gamma,z)=1$ (a.e. ξ) だから $K(x,\eta)=1$ なる点では $G_\alpha^*=G_\alpha^{*,\gamma}$ になることは明らかである。$\eta\in S$ のとき $K(\gamma,\eta)=1$ 又は 0 であるが，後者の場合，$K(\cdot,\eta)\equiv 0$ だから $G^*f(\eta)=0$ $({}^\forall f)$。したがって $G_\alpha^*=0=G_\alpha^{*,\gamma}$．これで $\eta\in S$ のとき $G_\alpha^*=G_\alpha^{*,\gamma}$ がわかった。

$\hat{G}^*$ は $\mathbb{C}(S)$ を $\mathbb{C}(M)$ に移すから，$0<\|\hat{G}^*\|<\infty$ である。$\frac{1}{\alpha}>\|\hat{G}^*\|$ のとき

$$\hat{G}_\alpha^*f=\hat{G}^*f-\alpha\hat{G}^*\hat{G}_\alpha^*f=\hat{G}^*f-\alpha\hat{G}^*\hat{G}^*f+\alpha^2\hat{G}^*\hat{G}^*\hat{G}_\alpha^*=\cdots$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$= \sum_{n=0}^{N} (-\alpha)^n [\hat{G}^*]^{n+1} f + (-\alpha)^{n+1} [\hat{G}^*]^{n+1} \hat{G}^*_\alpha f$$

$$\alpha^{n+1} \|\hat{G}^*\|^{n+1} \|\hat{G}^*_\alpha\| \|f\| \longrightarrow 0$$

即ち $\sum_{n=0}^{N} (-\alpha)^n [\hat{G}^*]^{n+1} f$ は $\hat{G}^*_\alpha f$ に一様収束する．したがって $f \in \mathbb{C}(S)$ ならば $\hat{G}^*_\alpha f \in \mathbb{C}(M)$ である．同種の議論で $2/\alpha > \|\hat{G}^*\|$ なるαについてもいえる。このことを順次くり返すことによりすべての $\alpha \geq 0$ に対し，$\hat{G}^*_\alpha$ は $\mathbb{C}(S)$ を $\mathbb{C}(M)$ に移すことがわかる。$\eta \in S$ では $G^*_\alpha = G^{*,\gamma}_\alpha$ は substochastic だから G^*_α はM上で substochastic である．

$2°$ 以上の準備の下で，Markov 性の証明は Proposition 4.5 と全く同様に出来る。つまり（5.12）のn重 Laplace 変換が等しいこと及び $G^{*,\gamma}_{\alpha_n} f$ がS上で連続なことに注意して同じ議論をくり返せばよい。

Martin 位相ρには一点 compact 化の ρ_1 を含んでいるため $\{\langle f, \widetilde{K}\rangle(\eta);\ f \in \mathbb{D}_0^+(S)\}$ は必ずしも M の二点を分離しない．そのため G^*_α の $\mathbb{C}(S)$ の値域も必ずしも M の二点を分離しない。今

$$\bar{y} = \{ y' ;\ \hat{G}^* f(y) = \hat{G}^* f(y') :\ {}^\forall f \in \mathbb{C}(S) \}$$

とおき各$\bar{y}$上で同じ値をとる，M上の連続函数の全体を $\mathbb{C}_1(M)$ とする．

注意1. $\eta,\ \eta' \in \bar{\eta} \Leftrightarrow K(x,\eta) = K(x,\eta')$ $({}^\forall x)$.

注意2. $\bar{y}$は高々2点より成る．実際，$\hat{G}^*$はSの二点を分離するから $\bar{y} \cap S$ は一点である．同様に $\hat{G}^*$ はρの定義から ∂S の二点を分離する．したがって $\bar{y} \cap \partial S$ は一点となる。

<u>Lemma 5.4</u> $f \in \mathbb{C}_1(M)$ のとき $\lim_{t\downarrow 0} f(x_t)$ が a.e. $\hat{P}^{*,\gamma}$ で存在する.

証明. $f \geq 0$ かつ $\in \mathbb{C}(S)$ のとき $\hat{G}^* f(x_t)$ は $P^{*,\gamma}_u$ に関して super-martin gale だから（証明は Lemma 4.5 の証明中の$2°$と同様），a.e. $P^{*,\gamma}_u$ で $\lim_{t\downarrow 0} \hat{G}^* f(x_t)$ が存在する．

$$\mathbb{C}_1^u(M) = \{ f \in \mathbb{C}_1(M) ;\ \exists \lim_{t\downarrow 0} f(x_t) \ \text{a.e.}\ \hat{P}^{*,\gamma}_u \}$$

は明らかに線型空間で lattice になっている．即ち $f \in \mathbb{C}_1^u(M)$ ならば $|f| \in \mathbb{C}_1^u(M)$。しかも $\hat{G}^* f \in \mathbb{C}^u(M)$ ($f \in \mathbb{C}(S)$ のとき) だから $\mathbb{C}_1^u(M) = \mathbb{C}_1(M)$ である。

(5.14) $\hat{H}^{*,\gamma}_0 f(u) = \lim_{t\downarrow 0} \hat{H}^{*,\gamma}_t f(u)$ $f \in \mathbb{C}_1(M)$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

は $\mathbb{C}_1(M)$ 上に定義された非負線型作用素だから $\mathbb{B}_M$ 上の測度 $H_0^{*,\gamma}(u,E)$ が存在して

$$(5.15)\qquad \hat{H}_0^{*,\gamma}f(u)=\int_M \hat{H}_0^{*,\gamma}(u,d\eta)f(\eta)$$

と書ける。$H_0^{*,\gamma}(u,\cdot)$ は $\mathbb{C}_1(M)$ を可測にする最小の σ-algebra $\mathbb{B}_M^1$ 上で一意に定まる.

定義　$\hat{H}_0^{*,\gamma}(\eta,\bar{\eta}^c)>0$ のとき η を branching point（分岐点）という。

Lemma 5.5　Branching point の全体は $\mathbb{B}_M^1$（したがって $\mathbb{B}_M$）可測集合で $\hat{H}_0^{*,\gamma}(\eta,M_b)=0$ である。

証明は [26, p.8〜9] とほとんど同じなので省略する。

Proposition 5.2　$\hat{H}_0^{*,\gamma}(u,\cdot)$ は $M_b \cup M$ 上に mass を持たない。ここに $M_0=\{\eta: K(\gamma,\eta)<1\}$ である。更に

$$(5.16)\qquad \hat{P}_u^{*,\gamma}(\cdot)=\int_{M-M_b\cup M_0} H_0^{*,\gamma}(u,d\eta)\,P_\eta^{*,\gamma}(\cdot).$$

証明．$f\in\mathbb{C}_1(M)$ のとき

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt\,\hat{E}_u^{*,\gamma}(f(x_{t+\varepsilon}))=H_\varepsilon^{*,\gamma}G_\alpha^{*,\gamma}f(u)=H_\varepsilon^{*,\gamma}G_\alpha^{*}f(u).$$

$\varepsilon\downarrow 0$ とすると

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt\,\hat{E}_u^{*,\gamma}f(x_t)=H_0^{*,\gamma}G_\alpha^{*}f(u)=H_0^{*,\gamma}[K(\gamma,\cdot)G_\alpha^{*,\gamma}f](u)$$

Laplace 変換の一意性から

$$(5.17)\qquad \hat{H}_t^{*,\gamma}f(u)=\hat{H}_0^{*,\gamma}[K(\gamma,\cdot)\hat{H}_t^{*,\gamma}f](u).$$

$t\downarrow 0$ とすると

$$(5.18)\qquad \hat{H}_0^{*,\gamma}f(u)=\int \hat{H}_0^{*,\gamma}(u,d\eta)K(\gamma,\eta)\hat{H}_0^{*,\gamma}f(\eta)$$

$$=\int_M \hat{H}_0^{*,\gamma}(u,d\eta)K(\gamma,\eta)\int_{M-M_b}\hat{H}_0^{*,\gamma}(\eta,dy)f(y)$$

$H_0^{*,\gamma}$ の $\mathbb{B}_M^1$ 上での一意性から $\hat{H}_0^{*,\gamma}(u,\cdot)$ は M_b 上に mass をもたない。ゆえに (5.18) は

$$\hat{H}_0^{*,\gamma}f(u)=\int_{M-M_b}\hat{H}_0^{*,\gamma}(u,dy)K(\gamma,y)f(y)$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

ふたたび $\hat{H}_0^{*,\gamma}(u,\cdot)$ の一意性から $\hat{H}_0^{*,\gamma}(u,\cdot)$ は M_0 上にも mass をもたない。(5.16) は (5.17) から明らか。

系

$$(5.19)\qquad \hat{P}_\eta^{*,\gamma}(\cdot)=\int_{M-M_b\cup M_0}\hat{H}_0^{*,\gamma}(\eta,dy)\,\hat{P}_y^{*,\gamma}(\cdot)$$

注意 1. $\mathbb{D}_1(M)$ を $\mathbb{C}_1(M)$ で dense な可算個の函数族とする。

$$\rho'(\eta,\eta')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|f_n(\eta)-f_n(\eta')|}{1+|f_n(\eta)-f_n(\eta')|}\qquad \{f_n\}=\mathbb{D}_1(M)$$

とおく。$\mathbb{D}_1(M)$ は M の二点を分離しないため ρ' は一般には距離にならないが，M に ρ より粗い位相を導びく。$\omega: T\to M$ なる写像の全体を Ω_M とし

$$W'=\{\omega\in\Omega_M;\ x_t(\omega)\text{ は }\rho'\text{-位相で }t\text{ に関して右連続かつ左極限をもつ}\}$$

とおけば $(W^*,\mathcal{B}^*,\hat{P}_u^{*,\gamma})$ の path space は $W_1^*=W^*\cap W'$ 上に制限出来る。

注意 2. $\eta\in M-M_b\cup M_0$ のとき

$$\hat{P}_\eta^{*,\gamma}(x_t\,(t\downarrow 0)\text{ が }\bar{\eta}\text{ にのみ limit point をもつ})=1$$

である。あるいは，$\hat{P}_\eta^{*,\gamma}(\lim_{t\downarrow 0}x_t$ が ρ'-位相で存在する$)=1$ といってもよい。

注意 3. $\eta\in S_p$ のとき $\lim_{t\uparrow\zeta}x_t=\eta$ a.e. P_x^η だから $\lim_{\substack{\tau_t<\zeta\\ t\uparrow\infty}}x_{\tau_t}=\eta$. a.e. P_x^η. したがって $\hat{P}_\eta^{*,\gamma}(\exists\lim_{t\downarrow 0}x_t=\eta)=1$ である。即ち，$\eta\in S_p$ は branching point でない。一方 $\eta\in S-S_p$ のとき $x_t(t\downarrow 0)$ が ∂S に limit point をもつ ω の P_x^η- 測度が正だから，$\hat{P}_x^\eta$- 測度も正になる。ゆえに

$$\hat{P}_\eta^{*,\gamma}(x_t\,(t\downarrow 0)\text{ は }\partial S\text{ に limit point をもつ})>0$$

である。このことから $\eta\in M-M_b\cup M_0$ ならば $\bar{\eta}\cap\partial S\neq\phi$ である。

§3. Excessive function の表現

先ず始めに，Proposition 5.1 及び 5.2 は一般の初期分布 ν の場合に拡張できることを示す。即ち

定理 5.1 (i) Reversed process の系 $X^{*,\nu}=(W^*,\mathcal{B}^*,\hat{P}_\eta^{*,\nu};\eta\in M)$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

は Markov 過程である：

(ii) $f \in \mathbb{C}_1(M)$ のとき $\lim_{t \downarrow 0} f(x_t)$ が a.e. $\hat{P}_u^{*,\nu}$ で存在し，

$$(5.20) \qquad P_u^{*,\nu}(\cdot) = \int_{M-M_b \cup M_0} H_0^{*,\nu}(u, d\eta)\, \hat{P}_\eta^{*,\nu}(\cdot)$$

更に

$$(5.21) \qquad H_0^{*,\nu}(u, E) = \frac{u(\gamma)}{u(\nu)} \int_{M-M_b \cup M_0} H_0^{*,\gamma}(u, d\eta)\, K(\nu, \eta)$$

で与えられる。

証明は定理 4.1′, 4.2′ 及び Lemma 4.7 と大体同じなので概略をのべる。

1° $\nu(\eta) = K(\nu, \eta)/K(\gamma, \eta) \qquad 0 < K(\gamma, \eta) < \infty$

$\qquad = 0 \qquad\qquad K(\gamma, \eta) = 0$ 又は ∞

とおくと $\nu(\eta)$ は $X^{*,\gamma}$-excessive となる。$\nu(\eta)$ で $X^{*,\gamma}$ を優調和変換した process を $X^{*,\gamma,\nu}$ とする。$X^{*,\nu}$ が一般には standard process ではないので，§1.3 及び §2.3 でのべた議論は少し変更しなければならない。Proposition 1.4 に対応して，「$X^{*,\gamma,\nu}$ の path space は W_1^* に制限出来る」という形で成立する。このことは，Proposition 1.4 の証明中，S を M におきかえ，ρ を ρ' でおきかえれば全く同じである。以上に注意すれば定理 4.1′ と同じ議論で $X^{*,\gamma,\nu}$ と $X^{*,\nu}$ は同値になることがわかる。

2° Lemma 4.7 と同じ議論で

$$(5.22) \qquad \hat{E}_x^u(e^{-\alpha\zeta}) = \frac{u(\gamma)}{u(x)} \int_{M-M_b \cup M_0} H_0^{*,\gamma}(u, d\eta)\, \hat{K}_\alpha(x, \eta)$$

が得られる。このことに注意して定理 4.2′ と同じ議論をくり返すことによって (ii) が得られる。

Excessive function の表現を得る前に，$(M, \mathcal{B}_M')$ 上の測度の変形についてのべる。ψ を次の条件をみたす，M から M の中への mapping とする。

(i) $\bar{\eta}$ が一点なら $\psi(\eta) = \eta$

(ii) $\bar{\eta} = \{\eta_1, \eta_2\}$ で $\eta_1 \in \partial S$ ならば $\psi(\eta_1) = \psi(\eta_2) = \eta_1$.

この ψ による M の像を M' とする．つまり M' は M の点の内，$\hat{G}^* f$ によって分離される点はそのまゝ含み，分離されない場合は，境界の方の点を集めたものである．M' は一般には $\mathcal{B}_M'$ - 可測でないが，M' を含む $\mathcal{B}_M'$ - 可測集合は M と一致する．ゆえに，μ を $(M, \mathcal{B}_M')$ 上の測度とすれば，$M - M'$ の内測度は 0 。$\bar{\mathcal{B}}_M$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

を M' と $\mathbb{B}_M^1$ から生成される γ-algebra とすれば ① $\bar{\mu}(M-M')=0$, ② $\bar{\mu}(E)=\mu(E)$ ($E\in\mathbb{B}_M^1$ のとき) をみたす様な $\overline{\mathbb{B}}_M$ 上の測度 $\bar{\mu}$ が存在し, 一意に定まる。

$\hat{H}_0^{*,\gamma}(u,\cdot)$ を $\overline{\mathbb{B}}_M$ 上に拡張したものを $\mu(u,\cdot)$ で表わすことにする。(5.16), (5.20), (5.21) は $\hat{H}_0^{*,\gamma}(u,\cdot)$ を $\mu(u,\cdot)$ でおきかえてもそのまゝ成立する。

注意. $\overline{\mathbb{B}}_M$ は M' と $\mathbb{B}_M$ から生成される γ-algebra と一致する。

定義. $K(x,\eta)$ が x に関して harmonic となる $\eta\in(\partial S)-M_b\cup M_0$ の全体を $(\partial S)_1$ と書き, (∂S) の本質的部分という。又 $(\partial S)_1\cup(\partial S)_p=M_1$ を M の本質的部分という。

定義. S 上の函数 u が, $(M_1,\ \mathbb{B}_M(M_1))$ 上の有限な測度 (一般に signed measure) μ を用いて

$$(5.23)\qquad u(x)=\int_{M_1}K(x,\eta)\,\mu(d\eta)$$

と書き表わされたとき, u は標準表現をもつといい, μ を u の標準測度という。

定理 5.2 u を γ-可積分な excessive function ならば, u は標準表現をもち, しかしその標準測度は正で, u から一意に定まる。

証明. 1° u の Riesz 分解を $u=v+w$ とする. ここに v は potential, w は harmonic function である. 定理 4.4 により v は

$$v(x)=\int_{S_p}G(x,y)\,\mu_1'(dy)$$

と一意に表現される. $v(\gamma)=\int_{S_p}G(\gamma,y)\,\mu(dy)<\infty$ だから $\mu'(y:G(\gamma,y)=\infty)=0$. したがって

$$v(x)=\int_{S_p}K(x,y)G(\gamma,y)\,\mu_1'(dy)=\int_{S_p}K(x,y)\,\mu_1(dy)$$

である.

2° 一方定理 5.1 より

$$1=\frac{\omega(\gamma)}{\omega(x)}\int_{M'-M_b\cup M_0}\mu(\omega,d\eta)\,K(x,\eta)\qquad 0<\omega(x)<\infty$$

即ち $0<\omega(x)<\infty$ のとき

$$(5.24)\qquad \omega(x)=\omega(\gamma)\int_{M'-M_b\cup M_0}(\omega,d\eta)\,K(x,\eta)$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

と書ける。このことから任意の x で(5.24)が成立することは定理4.4と同じである。w は harmonic だから $\mu^w(\cdot)=\omega(\gamma)\mu(w,\cdot)$ は S_p 上に mass を持たない。又 M' は $S-S_p$ を含まないから(§5.2の最後の注意による)，結局 μ^w は (∂S_1) 上の measure である。μ^w は $\overline{B}_M$ 上の測度であるが $M_1 \supset (\partial S)_1$ だから μ^w は B_M 上に制限出来る。これを μ_2 で表せば結局

$$w(x)=\int_{(\partial S)_1} K(x,\eta)\mu_2(d\eta)$$

が言えたことになる。$\mu=\mu_1+\mu_2$ とおくと(5.23)が成立する。

3° 一意性. $u(x)=\int_{M_1} K(x,y)\mu'(dy)$ と表現出来たとする。その potential part $\int_{S_p} K(x,y)\mu'(dy)$ は，Riesz 分解の一意性からひと一致する。したがって potential の表現の一意性によって μ' の S_p への制限は μ の S_p への制限と一致する。このことから $w(x)=\int_{(\partial S)_1} K(x,\eta)\mu'(d\eta)$ である。定理4.2の後の注意と同じ論法で

$$\hat{P}^{*,\nu}_{w}(\cdot)=\int_{(\partial S)_1} K(x,\eta)\,\hat{P}^{*,\nu}_{\eta}(\cdot)\,\mu'(d\eta)$$

となることがわかる。ゆえに任意の $f\in\mathbb{C}_1(M)$ に対して

$$\int_{(\partial S)_1} K(x,\eta)\hat{H}^{*,\nu}_t f(\eta)\mu(d\eta)=\int_{(\partial S)_1} K(x,\eta)\hat{H}^{*,\nu}_t f(\eta)\mu'(d\eta)$$

$t\downarrow 0$ とすると

$$\int_{(\partial S)_1} K(x,\eta)f(\eta)\mu(d\eta)=\int_{(\partial S)_1} K(x,\eta)f(\eta)\mu'(d\eta)$$

$f\in\mathbb{C}_1(M)$ のとき $f\in\mathbb{C}_1(M)$ の ∂S への制限は，∂S 上の連続函数の全体と一致するから[1] $\mu=\mu'$ でなければならない。

注意. 逆に excessive function の標準表現が(5.23)であることを念頭において $\hat{X}^u$ の reversed process と考えると

$$\hat{P}^{*,\nu}_{u}(\cdot)=\int_{M_1} K(x,\eta)\,\hat{P}^{*,\nu}_{\eta}(\cdot)\,\mu(d\eta) \qquad (5.25)$$

---

1) $f\in\mathbb{C}_1(M)$ を ∂S 上に制限した函数の全体を $\mathbb{C}_1(\partial S)$ とすると，$\mathbb{C}_1(\partial S)$ は，∂S の二点を分離し，linear かつ lattice になっている。したがって Stone-Weierstraß の定理によって $\mathbb{C}_1(\partial S)$ は ∂S 上の連続函数の全体と一致する。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

が得られる。又測度μの一意性から $\mu = u(\gamma)\mu(u,\cdot)$ となっている。

定理5.2の系 uが, (A) γ-可積分, (B) uのnegative partをu^-とすると, $w = -\lim_{n\to\infty} H_{G_n^c} u^-$ は有限値かつγ-可積分 : をみたすregularなsuperharmonic functionとすれば, uは標準表現をもち, 標準測度は一意に定まる。

証明. Proposition 2.4 及び定理2.3により w は非負harmonicであり, uはexcessive function v を用いて $u = v - w$ と書ける。w 及び u は γ-可積分だから v も γ-可積分。ゆえに v 及び w は正則度μ_v 及び μ_wを用いた標準表現をもつ $\mu = \mu_v - \mu_w$ による(5.23)の積分が求める標準表現である. 次に表現の一意性であるが, そのためには $\int K(x,\eta)\mu(d\eta) = 0$ のとき $\mu = 0$ を言えばよい。μのJordan分解を $\mu = \nu_1 - \nu_2$ ($\nu_i \geqq 0$) とすると $\int K(x,\eta)\nu_1(d\eta) = \int K(x,\eta)\nu_2(d\eta)$. ゆえに, $\nu_1 = \nu_2$. 即ち $\mu = 0$である。

§4. Reduced functionの表現

uをexcessive function, GをMのopen setとする. uのGへのreduced function $H_G u(x)$を

$$(5.26) \qquad H_G u(x) = H_{[G]} u(x)$$

で定義する。ここに $[G] = G \wedge S$ である. DがMのclosed setのとき

$$(5.27) \qquad H_D u(x) = \inf_{\substack{G\supset D\\ open}} H_G u$$

によって定義する。$\{G_n\}$をDに含まれるopen setの列で $G_n \supset G_{n+1} \supset \cdots \downarrow D$ をみたすものとすると,

$$(5.28) \qquad H_D u(x) = \lim_{n\to\infty} H_{G_n} u(x)$$

となる。$\lim_{n\to\infty} H_{G_n} u \geqq H_D u$ は明らか. 逆に任意の x を固定し $^\forall\varepsilon > 0$ に対して $H_G u(x) - \varepsilon \leqq H_D u(x)$ をみたすGをとる. 十分大きなnをとれば $G_n \subset G$ だから

$$\lim_{n\to\infty} H_{G_n} u(x) \leqq H_{G_n} u(x) \leqq H_G u(x) \leqq H_D u(x) + \varepsilon$$

したがって (5.28)が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

<u>Lemma 5.5</u>　(i) $D_1 \supset D_2 \Rightarrow H_{D_1}u \geqq H_{D_2}u$.

(ii) $H_{D_1 \cup D_2}u + H_{D_1 \cap D_2}u \leqq H_{D_1}u + H_{D_2}u$.

(iii) $D_n \downarrow D \Rightarrow H_{D_n}u \downarrow H_D u$.

証明.　(i) は明らか. (ii) G_1, G_2 が M の open set のとき

$$H_{G_1 \cup G_2}u + H_{G_1 \cap G_2}u \leqq H_{G_1}u + H_{G_2}u.$$

(証明は [25, I, p.18] と同じ). 各 D_i に対し (5.28) をみたす $\{G_i^{(n)}\}$ をとれば

$$H_{D_1 \cup D_2}u + H_{D_1 \cap D_2}u \leqq \lim_{n\to\infty} H_{G_1^{(n)} \cup G_2^{(n)}}u + \lim_{n\to\infty} H_{G_1^{(n)} \cap G_2^{(n)}}u$$

$$\leqq \lim_{n\to\infty} H_{G_1^{(n)}}u + \lim_{n\to\infty} H_{G_2^{(n)}}u = H_{D_1}u + H_{D_2}u.$$

次に (iii). $\lim_{n\to\infty} H_{D_n}u \geqq H_D u$ は明らか。 G を $H_G u(x) - \varepsilon \leqq H_D u(x)$ (x: fix) をみたす $D \subset G$ なる open set とする。十分大きな n をとれば $D_n \subset G$。 したがって

$$H_D u(x) - \varepsilon \geqq H_G u(x) \geqq H_{D_n} u(x).$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} H_{D_n}u \leqq H_D u$.

この Lemma から $H_D u$ は Choquet の意味で M のすべての閉集合の上の2位の交代容量 (capacity) になっている。したがって choquet の capacity theorem によって (Dynkin [12, Addendum]), $H_D u$ は $\mathbb{B}_M$ 上に拡張出来, $^\forall B \in \mathbb{B}_M$ に対し

$$(5.29)\qquad \sup_{D\subset B} H_D u(x) = H_B u(x) = \inf_{G\supset B} H_G u(x) \qquad (D\text{: closed}, G\text{: open})$$

であり, Lemma 5.5 の (i), (ii) は任意の $B_1, B_2 \in \mathbb{B}_M$ に対しても成立する。

<u>定義</u>　$H_B u$ を u の集合 B への reduced function という。

<u>Lemma 5.6</u>　$H_B u(x)$ は quasi-excessive である。

証明.　1° 先ず $H_B u$ の可測性を示す。φ を S 上いたる所 >0, かつ $\int \xi(dx)\varphi(x)u(x) < \infty$ をみたす函数とする。 $\nu = \eta\xi$ とおく. $H_D u(\nu)$ は capacity だから $B \in \mathbb{B}_M$ に対して $H_B u(\nu)$ が定義出来て,

$$\sup H_D u(\nu) \leqq H_B u(\nu) \leqq \inf H_G u(\nu).$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

と出来る．$\{G_n\}$ をBを含む open set の減小列で $H_{G_n}u(\nu)\downarrow H_B u(\nu)$ をみたすものとする。同様に $\{D_n\}$ はBに含まれる closed set の増加列で $H_{D_n}u(\nu)\uparrow H_B u(\nu)$ をみたすものとする．$\lim_{n\to\infty}[H_{G_n}u(\nu)-H_{D_n}u(\nu)]=0$ だから $\lim_{n\to\infty} H_{G_n}u-\lim_{n\to\infty} H_{D_n}$ は a.e.ξ で 0 である。

$$\lim_{n\to\infty} H_{D_n}u \le H_B u \le \lim_{n\to\infty} H_{G_n}u$$

だから，$H_B u$ は $\mathcal{B}_S$ のξによる完備化に関して可測で，a.e.ξ で $\lim_{n\to\infty} H_{D_n}u$ 及び $\lim_{n\to\infty} H_{G_n}u$ と一致する。

2° $H_B u$ が quasi-excessive であることは $\lim_{n\to\infty} H_{D_n}u$ が quasi-excessive であることから明らか。

Proposition 5.3 $B\subset\partial S$ のとき reduced function $H_B u$ の regularization $\hat{H}_B u$ は harmonic であり，Bに含まれる closed set の増大列 $\{D_n\}$ が存在して

$$(5.31)\qquad \hat{H}_B u=\lim_{n\to\infty}\hat{H}_{D_n}u$$

と出来る.

証明 1° 先ずDが ∂S の閉集合の場合に考える。$\{G_n\}$ をDに上から近づく open set の列とする。任意の compact closure をもつ open set Gに対し十分大きな G_n をとれば $G^c\supset G_n$． したがって $H_{G^c}H_{G_n}u=H_{G_n}u$. $n\to\infty$ とすると $H_D u<\infty$ なる x では $H_{G^c}H_D u(x)=H_D u(x)$． 即ち $H_D u$ は極集合を除いて harmonic だから，$H_D u$ の regularization $\hat{H}_D u$ は harmonic になる（Proposition 2.3）。

2° D_n をBに含まれる closed set の増加列で $H_B u=\lim_{n\to\infty} H_{D_n}u$ が a.e.ξ で成り立つ様なものとする。$\hat{H}_{D_n}u$（regularization）と $H_{D_n}u$ は a.e.ξ で一致するから $\lim_{n\to\infty}\hat{H}_{D_n}u$ と $H_B u$ は a.e.ξ で一致する。ところが $\{\hat{H}_{D_n}u\}$は harmonic function の増加列だから $\lim_{n\to\infty}\hat{H}_{D_n}u$ も harmonic となる。ゆえに $H_B u$ の regularization は harmonic で $\lim_{n\to\infty}\hat{H}_{D_n}u$ と一致する。

<u>Lemma 5.7</u> $\eta\in(\partial S)_1$ とする．Dが ∂S の closed set ならば

$$(5.31)\qquad \hat{H}_D[K](x,\eta)=K(x,\eta)\qquad \eta\in D$$

証明 G_n をDに上から近づく open set の列とする． $K(x,\eta)$ は har-

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

monic だから

(5.32) $\quad P_x^\eta(x_t(t\uparrow\zeta)$ は ∂S に limit point をもつ$)=1$

一方

$$\hat{P}_\eta^{*,x}(x_t(t\downarrow 0)\text{は}\ \eta\ \text{にのみ収束する})=1$$

即ち

(5.33) $\quad P_x^\eta(x_t(t\uparrow\zeta)$ は η にのみ収束する$)=1$

(5.32) 及び (5.33) より $K(x,\eta)<\infty$ なる x で

$$\frac{1}{K(x,\eta)}\lim_{n\to\infty} H_{G_n}[K](x,\eta) = P_x^\eta(\sigma_{G_n}<\zeta)=1 \qquad \eta\in D$$
$$=0 \qquad \eta\notin D$$

即ち $H_D[K](x,\eta)=K(x,\eta)\ (\eta\in D)=0\ (\eta\notin D)$ が $K(x,\eta)<\infty$ のとき成立する．したがって，regularization をとれば (5.31) が成りたつ。

<u>定理 5.4</u> u を γ-可積分な excessive function，μ をその標準測度とすると，

(5.34) $\quad \hat{A}_B u(x)=\int_B K(x,\eta)\,\mu(d\eta)$

と表現される。

証明． 1° D が ∂S の closed のとき G_n を D に上から近づく open set の列とする．

$$H_{G_n}u(x)=\int_{(\partial S)_1} H_{G_n}[K](x,\eta)\,\mu(d\eta)$$

だから $n\uparrow\infty$ とすると

$$H_D u(x)=\int_{(\partial S)_1} H_D[K](x,\eta)\,\mu(d\eta).$$

ゆえに

(5.35) $\quad \hat{A}_D u(x)=\int_{(\partial S)_1}\hat{A}_D[K](x,\eta)\,\mu(d\eta)=\int_D K(x,\eta)\,\mu(d\eta).$

2° B が ∂S の Borel set のとき，$\{D_n\}$ を B に含まれる closed set の列で $\hat{A}_{D_n}u\uparrow\hat{A}_B u$ をみたすものとする．(5.34) において $D=D_n$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

を代入し，$n\uparrow\infty$ とすれば（5.34）が得られる。

§5. Terminal distribution の分布

Dual Ray process $X^{*,\nu}=(W^*, \mathcal{B}^*, P^{*,\nu}_{\eta}: \eta\in M)$ は G^*f $(f\in \mathbb{C}(S))$ が M の二点を必ずしも分離しないため，一般には $x_0=\lim_{t\downarrow 0} x_t$ の存在はわからない。この§では K-函数に仮定をおいて議論する。

$\{G_n\}$ を S の exhaustion, D を S の compact set とする。$\hat{G}_n$ への hitting time を σ_n とし

$$\tau_n(\omega)=\sigma_n(\omega)+\sigma_D(\omega^+_{\sigma_n})$$

とおく。K-函数に次の仮定をおく。

(X.8) $\eta\in(\partial S)_1$ かつ $\bar{\eta}$ が二点のとき $K(x,\eta)<\infty$ なる x で

$$(5.36)\qquad \lim_{n\to\infty} H_{\tau_n}[K](x,\eta)=0$$

が任意の compact な D に対して成りたつ。

<u>Lemma 5.8.</u> $\eta\in M_1$ のとき $x_0=\lim_{t\downarrow 0} x_t$ が a.e. $P^{*,x}_{\eta}$ で存在し，$P^{*,x}_{\eta}(x_0=\eta)=1$.

証明． $\eta\in S_P$ のとき §5.2 の最後の注意3でのべた。$\eta\in(\partial S)_1$ のとき，仮定により $\lim_{n\to\infty} \hat{P}^{\eta}_x(\tau_n<\zeta)=0$ だから

$$\hat{P}^{\eta}_x(x_t(t\uparrow\zeta) \text{ は } D \text{ と } \partial S \text{ に limit point をもつ})=0 .$$

すなわち

$$\hat{P}^{\eta}_x(x_t(t\uparrow\zeta) \text{ は } S \text{ と } \partial S \text{ に limit point をもつ})=0 .$$

ゆえに

$$(5.37)\qquad \hat{P}^{*,x}_{\eta}(x_t(t\downarrow 0) \text{ は } S \text{ と } \partial S \text{ に limit point をもつ})=0 .$$

一方 $K(x,\eta)$ は harmonic だから同様の議論で

$$(5.38)\qquad \hat{P}^{*,x}_{\eta}(x_t(t\downarrow 0) \text{ は } \partial S \text{ に limit point をもつ})=1 .$$

一方 §5.2 の注意2と優調和変換の結果より

$$(5.39)\qquad \hat{P}^{*,x}_{\eta}(x_t(t\downarrow 0) \text{ は } \bar{\eta} \text{ にのみ limit point をもつ})=1 .$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

だから，(5.37)，(5.38)，(5.39) より $^{\exists}\lim_{t\downarrow 0} x_t = \eta$ a.e. $\hat{P}^{*,x}_{\eta}$ がわかる。

定理 5.5 (Terminal distribution の分布). u を γ-可積分な excessive function とする。$x_{\zeta-} = \lim_{t\uparrow\zeta} x_t$ が a.e. P^u_x で存在し，$x_{\zeta-}$ は M_1 上の確率変数で

$$(5.40)\qquad P^u_x(x_{\zeta-}\in B) = \frac{1}{u(x)}\int_B K(x,y)\,\mu(dy) \qquad B\in \mathbb{B}_M$$

ここに μ は u の標準測度である。

証明.

$$\hat{P}^{*,x}_u(\cdot) = \frac{1}{u(x)}\int_{M_1}\mu(d\eta)\,K(x,\eta)\,\hat{P}^{*,x}_{\eta}(\cdot)$$

だから $x_0 = \lim_{t\downarrow 0} x_t$ が a.e. $\hat{P}^{*,x}_u$ で存在し (Lemma 5.8),

$$\hat{P}^{*,x}_u(x_0\in B) = \frac{1}{u(x)}\int_B K(x,\eta)\,\mu(d\eta).$$

Reversed process の定義から $x_{\zeta-} = \lim_{t\uparrow\infty} x_t = \lim_{\substack{t\uparrow-\infty\\ \tau_t<\zeta}} x_{\tau_t}$ が a.e. P^u_x で存在し，(5.40) が成立する。

系 1　Regular な reference 測度 γ が有限ならば，$x_{\zeta-} = \lim_{t\uparrow\zeta} x_t$ が a.e. P_x で存在し

$$(5.41)\qquad P_x(x_{\zeta-}\in B) = \int_{M_1} K(x,\eta)\,\mu_0(d\eta).$$

ここに μ_0 は 1 の標準測度である。

系 2　μ を u の標準測度とすると，

$$(5.42)\qquad P^u_x(A, x_{\zeta-}\in B) = \frac{1}{u(x)}\int_B P^{\eta}_x(A)\,K(x,\eta)\,\mu(d\eta) \qquad A\in\mathcal{L}_0.$$

証明. 任意の $0<t_1<\cdots<t_n$ と $f_j\ (j=1,\cdots,n)$ に対して

$$E^u_x\Big(\prod_{j=1}^n f_j(x_{t_j});\ x_{\zeta-}\in B\Big) = \frac{1}{u(x)}\int_B E^{\eta}_x\Big(\prod_{j=1}^n f_j(x_{t_j})\Big)K(x,\eta)\,\mu(d\eta)$$

を示せばよい。

$$E^{\eta}_x\Big(\prod_{j=1}^n f_j(x_{t_j})\Big) = \frac{1}{K(x,\eta)}E_x\Big(\prod_{j=1}^n f_j(x_{t_j})\,K(x_{t_n},\eta)\Big)$$

$$= \frac{1}{K(x,\eta)}E^u_x\Big(\prod_{j=1}^n f_j(x_{t_j})\,\frac{K(x_{t_n},\eta)}{u(x_{t_n})}\Big)$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

だから

$$\frac{1}{u(x)}\int_B E_x^u\Bigl(\prod_{j=1}^{n} f_j(x_{t_j})\Bigr) K(x,\eta)\mu(d\eta)=\int_B E_x^u\Bigl(\prod_{j=1}^{n} f_j(x_{t_j})\frac{K(x_{t_n},\eta)}{u(x_{t_n})}\Bigr)\mu(d\eta)$$

$$=E_x^u\Bigl(\prod_{j=1}^{n} f_j(x_{t_j})P^u_{x_{t_n}}(x_{\zeta-}\in B)\Bigr)=E_x^u\Bigl(\prod_{j=1}^{n} f_j(x_{t_j}) : x_{\zeta-}(\omega^+_{t_n})\in B\Bigr)$$

$$=E_x^u\Bigl(\prod_{j=1}^{n} f_j(x_{t_j}) : x_{\zeta-}\in B\Bigr).$$

注意1. Bは ∂S の Borel set のとき

$$(5.45)\qquad P_x^u(x_{\zeta-}\in B)=\frac{\hat{H}_B u(x)}{u(x)}$$

である．特に $u=1$ のとき

$$(5.46)\qquad P_x(x_{\zeta-}\in B)=\hat{H}_B 1(x)$$

$\hat{H}_B 1(x)$ を境界Bへの harmonic measure といい，$h(x,B)$ で表わす．

注意2. (X.8) の仮定の下では $u(x)<\infty$ なる x で $H_B u(x)=\hat{H}_B u(x)$ である．($B\subset(\partial S)$)．実際，$B=D$ が ∂S の closed set のとき Proposition 5.3 の証明1° でのべた様に $H_D u(x)$ は $u(x)<\infty$ なる x で harmonic だから $\hat{H}_D u(x)=H_D u(x)$ ($u(x)<\infty$ のとき)．ゆえに

$$(5.47)\qquad P_x^u(x_{\zeta-}\in B)=\sup_{D\subset B} P_x^u(x_{\zeta-}\in D)=\sup_{D\subset B}\frac{H_D u(x)}{u(x)}=\frac{H_B u(x)}{u(x)}$$

である．(5.45) と (5.47) から $H_B u=\hat{H}_B u$ が得られる．

§6. Exit 境界と passive 境界

定理5.5によって $\eta\in M_1$ ならば

$$(5.48)\qquad x_{\zeta-}=\eta \qquad a.e.\ P_x^\eta$$

であるが，

<u>定義.</u> $\eta\in(\partial S)_1$ が $P^\eta_{\gamma_\eta}(\zeta<\infty)>0$ のとき η を exit 境界点，$=0$ のとき，η を passive 境界点という．exit 境界点の全体を $(\partial S)_{ex}$，passive 境界点の全体を $(\partial S)_p$ で表わす．

$\eta\in(\partial S)_1$ のとき $K(x,\eta)$ は extreme だから Proposition 2.8 により $P^\eta_\cdot(\zeta<\infty)$ は0又は1である．したがって $\eta\in(\partial S)_{ex}$ ならば

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$P_{\cdot}^{\eta}(\zeta<\infty)=1$, $\eta\in(\partial S)_p$ ならば $P_{\cdot}^{\eta}(\zeta=\infty)=1$ である．言いかえれば，$\eta\in(\partial S)_{ex}$ ならば $K(x,\eta)$ は H_t-potential であり，$\eta\in(\partial S)_p$ ならば $K(x,\eta)$ は H_t-invariant である。

又，$\eta\in S_p$ のときすでに §4 でのべた様に $K(x,\eta)$ は H_t-potential である。このことからただちに

<u>定理5.6</u> u を γ-可積分な excessive function，μ をその標準測度とする。v を，u の H_t-Riesz 分解における H_t-potential part，w をその H_t-invariant part とすれば，

(5.49) $$v(x)=\int_{S_p\cup(\partial S)_{ex}}K(x,\eta)\,\mu(d\eta)$$

(5.50) $$w(x)=\int_{(\partial S)_p}K(x,\eta)\,\mu(d\eta)$$

である．

Exit 境界と passive 境界の確率論的意味として，

Proposition

(5.51) $$P_x^{\eta}(\zeta<\infty\mid x_{\zeta-}\in(\partial S)_{ex})=1$$

(5.52) $$P_x^{\eta}(\zeta=\infty\mid x_{\zeta-}\in(\partial S)_p)=1$$

証明． 定理5.5の系２において $A=\{\zeta<\infty\}$, $B=(\partial S)_{ex}$ とおくと

$$P_x(\zeta<\infty;\ x_{\zeta-}\in(\partial S)_{ex})=\int_{(\partial S)_{ex}}P_x^{\eta}(\zeta<\infty)K(x,\eta)\mu(d\eta)$$
$$=\int_{(\partial S)_{ex}}K(x,\eta)\mu(d\eta)=P_x(x_{\zeta-}\in(\partial S)_{ex}).$$

これで (5.51) が示された．(5.52) は $A=\{\zeta=\infty\}$, $B=(\partial S)_p$ とおけばよい。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

第6章 Dirichlet 問題

この章では，*Martin* 境界上に函数が与えられた場合，それを境界値としてもつ *Dirichlet* 問題を考える。

§1では境界函数の可解性及び *Perron-Wiener-Brelot-Doob* 式の解（以後PWBD解と呼ぶ）を定義し，境界函数が可解であるための必要十分条件を求める。なお，方法はほゞ *Hunt* [18]に従ってのべる。

§2では *harmonic function* がある境界函数のPWBD解になるための条件を求める。その後，境界における *fine topology* を定義し，PWBD解の境界における *Naim* [32]，*Doob* [7]型の収束の問題をとりあつかう。

§1. PWBD解

この章では *standard process* X は今までのすべての仮定をみたすとする。更に *regular* な *reference* 測度 γ は有限であるとする。一般性を失わずに $\gamma(S)=1$ としてよい。定数1の標準測度を μ_0 で表わし，以後これを固定する。又 μ_0 の $(\partial S)_1$ 上への制限を $\overline{\mu}_0$ と書くことにする。

一般に S 上の函数 u に対して *Martin* 境界 ∂S 上の境界函数 u^* 及び u_* を次の式で定義する。

$$(6.1)\qquad u^*(\eta) = \overline{\lim_{x\to\eta(\rho)}}\, u(x)$$

$$u_*(\eta) = \underline{\lim_{x\to\eta(\rho)}}\, u(x)$$

今 f を ∂S 上に定義された境界函数とする。f の可測性は仮定しない。u が極集合を除いて有限かつ下に有界な *superharmonic function* で $u_*\geqq f$ をみたすとき，u は f の上級に属するという。f の上級に属する函数の全体を $\mathcal{U}(f)$ で表わす。$-v$ が $\mathcal{U}(-f)$ に属するとき，v は f の下級に属するといい，この様な v の全体を $\mathcal{L}(f)$ と書く。$\mathcal{U}(f)\neq\phi$ のとき

$$(6.2)\qquad \overline{u}_f = \inf_{u\in\mathcal{U}(f)} u$$

とおき，$\overline{u}_f$ を f の上級解という。$\mathcal{L}(f)\neq\phi$ のとき

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$\underline{u}_f = \sup_{u \in \mathcal{L}(f)} u$$

と書き，$\underline{u}_f$ を f の下級解という。

定義　境界函数 f が可解であるとは，$^\forall \varepsilon > 0$ に対し $u \in \mathcal{U}(f)$，$v \in \mathcal{L}(f)$ が存在し

$$(6.3) \qquad u(\gamma) - v(\gamma) = \int_S [u(x) - v(x)]\, \gamma(dx) < \varepsilon$$

をみたすことである。

注意 1.　u は下に有界であり，v は上に有界だから，(6.3) をみたす u 及び v は γ-可積分である。

Lemma 6.1　u を superharmonic function で $u_* \geqq 0$ とすれば $u \geqq 0$.

証明.　$u(x_0) < 0$ となる $x_0 \in S$ が存在したとする。$\{G_n\}$ を S の exhaustion とすれば $u(x_0) \geqq H_{G_n^c} u(x_0)$ だから G_n^c に $u(x_n) \leq u(x_0)$ をみたす x_n が存在する。$\{x_{n_k}\}$ を $\{x_n\}$ に含まれる部分列で $x_{n_k} \to \eta \in \partial S$ をみたすものとすると

$$u_*(\eta) \leqq \varliminf_{n\to\infty} u(x_{n_k}) \leq u(x_0) < 0$$

となり $u_* \geqq 0$ に反する

系.　$\overline{u}_f \geqq \underline{u}_f$.

証明.　$u \in \mathcal{U}(f)$，$v \in \mathcal{L}(f)$ をとると $(u-v)_* \geqq u_* - v^* \geqq 0$ だから $u - v \geqq 0$. したがって $\overline{u}_f \geqq \underline{u}_f$ である.

定義.　$\overline{u}_f = \underline{u}_f$ のときこれを u_f と書き，f の PWBD 解という。

この §の目的は f が可解であるための条件を求めること及び f が可解のとき PWBD 解をもつことを示すことである。なお $\overline{u}_f$，$\underline{u}_f$ の可測性も明らかでないが，これも合せて後に示す。

Lemma 6.2　$f = f_1 + f_2$ かつ $\overline{u}_{f_2}(x)$ 及び $\underline{u}_{f_2}(x)$ が有限ならば

$$(6.4) \qquad \underline{u}_{f_1}(x) + \underline{u}_{f_2}(x) \leqq \underline{u}_f(x) \leq \overline{u}_f(x) \leq \overline{u}_{f_1}(x) + \overline{u}_{f_2}(x)$$

証明.　$\overline{u}_f(x) \leqq \overline{u}_{f_1}(x) + \overline{u}_{f_2}(x)$ のみを示す。残りも同様である. $x \in S$ を任意に固定し $u_n^{(i)} \in \mathcal{U}(f_i)$ $(i = 1, 2)$ を $\overline{u}_{f_i}(x)$ に上から近づく

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

函数列とする。$u_n = u_n^{(1)} + u_n^{(2)}$ は極集合を除いて有限値かつ下に有界な superharmonic function である．しかも

$$(u_n)_* \geqq (u_n^{(1)})_* + (u_n^{(2)})_* \geqq f_1 + f_2 = f$$

だから $u_n \in \mathfrak{U}(f)$ である．ゆえに

$$\bar{u}_f(x) \leq \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \bar{u}_{f_1}(x) + \bar{u}_{f_2}(x) \ .$$

注意2. f_1, f_2 が可解ならば $f = f_1 + f_2$ も可解である．

Lemma 6.3 u を superharmonic function とすると

$$u(\gamma) \geqq \int_{(\partial S)_1} u_*(\eta)\, \mu_0(d\eta) \ .$$

証明. $u(\gamma) = \infty$ のときは明らか．$u(\gamma) < \infty$ とする。$\{G_n\}$ を exhaustion, σ_n を G_n^c への hitting time とすると $u(x_{\sigma_n})$ $(n=1, 2, \cdots)$ は $(\mathcal{B}_{\sigma_n}, P_\gamma)$ に関して super-martingale だから

$$\begin{aligned} u(\gamma) &\geqq E_\gamma(u(x_0)) \geqq \lim_{n\to\infty} E_\gamma(u(x_{\sigma_n})) \\ &\geqq E_\gamma(\lim_{n\to\infty} u(x_{\sigma_n})) \geqq E_\gamma(u_*(x_{\zeta-});\ x_{\zeta-} \in (\partial S)_1) \\ &= \int_{(\partial S)_1} u_*(\eta)\, \mu_0(d\eta) \ . \end{aligned}$$

Lemma 6.4 B を (∂S) 上の可測集合とすると，B の特性函数 $f = \chi_E$ は可解であり，かつ PWBD解 u_{χ_B} が存在して $h(x, B)$ に等しい．

証明. 1° G を B を含む M 上の open set で $H_G 1(\gamma) - h(\gamma, B) < \varepsilon$, をみたすものとする。この様な G が存在することは $H_G 1(\gamma)$ が G に関して capacity になっていることから保障される。同様に B^c を含む open set U で $H_U 1(\gamma) - h(\gamma, B) < \varepsilon$ をみたすものが存在する．$(H_{G,}1)_* \geqq \chi_B$ だから $H_G 1$ は γ_B の上級に属する函数であり，$[h(\cdot, (\partial S)_1) - H_U 1]^* \leq \chi_B$ だから $h(\cdot, (\partial S)_1) - H_U 1$ は γ_B の下級に属する函数である．

更に

$$\begin{aligned} &H_G 1(\gamma) - [h(\gamma, (\partial S)_1) - H_U 1(\gamma)] \\ &\leqq |H_{G_1} 1(\gamma) - h(\gamma, B)| + |H_{G_2} 1(\gamma) - h(\gamma, B^c)| \leqq 2\varepsilon \end{aligned}$$

が成立するから χ_B は可解である。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

2° 次に後半： $x\in S$ を固定する．Reduced function の定義と上(下)級解の定義によって

$$h(x,B)=\inf_{G\supset B} H_G 1(x) \geqq \bar{u}_{\chi_B}(x)$$

$$h(x,B)=h(x,(\partial S)_1)-h(x,B^c)=h(x,(\partial S)_1)-\inf_{U\supset B^c} H_U 1(x)$$

$$=\sup_{U\supset B^c}\{h(x,(\partial S)_1)-H_U 1(x)\}\leqq \bar{u}_{\chi_B}(x)$$

即ち $\bar{u}_{\chi_B}\leqq h(\cdot,B)\leqq \underline{u}_{\chi_B}$． 一方 $\underline{u}_{\chi_B}\leq\bar{u}_{\chi_B}$ だから $\bar{u}_{\chi_B}=\underline{u}_{\chi_B}=h(\cdot,B)$ である．

<u>定理 6.1</u>　境界函数 f が可解であるための必要十分条件は f が $\mathbb{B}_{(\partial S)}$ の μ_0-完備化に関して可測かつ可積分なことである．f が可解かつ $\underline{u}_{f^-}(x)>-\infty$ のとき，PWBD解 u_f が存在し

$$(6.5)\qquad u_f(x)=\int_{(\partial S)_1}K(x,\eta)f(\eta)\,\mu_0(d\eta)$$

となる。ここに $f^-=f\wedge 0$ である．

証明．　1° 先ず f が可解とする。$u\in\mathcal{U}(f)$，$v\in\mathcal{L}(f)$ が存在して $u(\gamma)-v(\gamma)<\varepsilon$．$u-v$ は superharmonic だから Lemma 6.3 によって

$$\int_{(\partial S)_1}u_*-v^*d\mu_0\leq\int_{(\partial S)_1}(u-v)_*d\mu_0\leq u(\gamma)-v(\gamma)<\varepsilon.$$

一方 $u_*\geqq f\geqq v^*$ だから f は $\mathbb{B}_{(\partial S)}$ の μ_0-完備化に関して可測である．f の可積分性は，u_* 及び v^* の可積分性から明らか．

2° 十分性：注意２によって $f\geqq 0$ としてよい．f が $B\in\mathbb{B}_{(\partial S)}$ の特性函数のとき Lemma 6.4 で示された．再び注意２によって，f が step function のときも可解である．一般に $f\geqq 0$ が μ_0-可積分とすれば $f=\sum_{k=1}^{\infty}f_k$ ($f_k=C_k\chi_{B_k}$: C_k；定数，$B_k\in\mathbb{B}_{(\partial S)}$) と書ける．$^\forall\varepsilon>0$ を固定し，各 f_k に対し $u_k\in\mathcal{U}(f_k)$，$v_k\in\mathcal{L}(f_k)$ で $u_k(\gamma)-v_k(\gamma)<\frac{\varepsilon}{2^k}$ をみたすものを選ぶ．f は可積分だから，十分大きな n をとれば

$$\int\sum_{k=n}^{\infty}f_k\,d\mu_0<\varepsilon$$

である．したがって

$$\sum_{k=n}^{\infty}v_k(\gamma)\leq\int\Big(\sum_{k=n}^{\infty}f_k\Big)d\mu_0<\varepsilon.$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

このnを固定し $v=\sum_{k=1}^{n} v_k$ とおくと $v \in \mathcal{L}(f)$. 一方 $u=\sum_{k=1}^{\infty} u_k \in \mathcal{U}(f)$ であり

$$u(\gamma)-v(\gamma) \leqq \sum_{k=1}^{\infty}[u_k(\gamma)-v_k(\gamma)]+\sum_{k=1}^{\infty} v_k(\gamma) < 2\varepsilon$$

したがって f は可解である。

3° 後半の証明: $h(x,B)=\int_B K(x,\eta)\,\mu_0(d\eta)$ に注意すれば Lemma 6.4 によって

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{u}_{f_k}(x)=\int K(x,\eta)\sum_{k=1}^{n} f_k(\eta)\,\mu(d\eta)=\sum_{k=1}^{n} \underline{u}_{f_n}(x)$$

$\forall x \in S$ を固定する。$\forall \varepsilon>0$ に対し $u_k \in \mathcal{U}(f_k)$ を $u_k(x)-\bar{u}_{f_k}(x)<\varepsilon/2^k$ をみたす様に選ぶ。$u=\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ とおけば

$$u_* \geqq \sum_{k=1}^{n}(u_k)_* \geqq \sum_{k=1}^{n} f_k \xrightarrow[n\to\infty]{} f$$

だから $u \in \mathcal{U}(f)$. $u(x)<\infty$ のとき

$$0<u(x)-\sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_{f_k}=u(x)-\int K(x,\eta)\,f(\eta)\,\mu(d\eta)<\varepsilon$$

$u(x)=\infty$ のとき $\sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_{f_k}(x)=\infty$ だから，いずれにしても

$$\bar{u}_f(x) \leqq \int K(x,\eta)\,f(\eta)\,\mu_0(d\eta).$$

同様の議論で

$$\underline{u}_f(x) \geqq \int K(x,\eta)\,f(\eta)\,\mu_0(d\eta).$$

したがって PWBD解が存在し（6.5）が成立する。

3° f が非負でないとき，仮定によって $\underline{u}_{f^-}(x)>-\infty$ だから $\bar{u}_{f^-}(x)>-\infty$. ゆえに $f^+=f \vee 0$ とおくと Lemma 6.2 によって

$$\underline{u}_{f^-}(x)+\underline{u}_{f^+}(x) \leqq \underline{u}_f(x) \leq \bar{u}_f(x) \leq \bar{u}_{f^-}(x)+\bar{u}_{f^+}(x)$$

ところが $\underline{u}_{f^-}(x)=\bar{u}_{f^-}(x)$, $\underline{u}_{f^+}(x)=\bar{u}_{f^+}(x)$ だから $\bar{u}_f(x)=\underline{u}_f(x)$ で（6.5）が成りたつ。

注意. 定理6.1には $u_f(x)$ の可測性が含まれている。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

§2. 境界の細位相. Fatou 型の limit theorem.

S の exhaustion $\{G_n\}$ に対し, G_n^c への hitting time を σ_n で表わし, $\sigma_\infty = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$ と書く. $\zeta \leq \sigma_\infty$ である. 以後この§でのべる結果は, 対応する境界函数 f の negative part f^- の下級解 $\underline{u}_{f^-}$ が有限値のときも成りたつが, 記述が若干複雑になるので, $f \geqq 0$ の場合のみとりあつかう.

定理 6.2 (i) u が $f \geqq 0$ の PWBD解ならば $u(x) < \infty$ なる x で

$$(6.6) \qquad \lim_{t \uparrow \sigma_\infty} u(x_t) = f(x_{\zeta-})$$

(ii) harmonic function $u \geqq 0$ がある境界函数 $f \geqq 0$ の PWBD 解であるための必要十分条件は, u が γ-可積分 かつ

$$(6.7) \qquad \lim_{n, m\to\infty} E_\gamma(|u(x_{\sigma_n}) - u(x_{\sigma_m})|) \longrightarrow 0$$

をみたすことである.

定理 6.3 (i) harmonic function $u \geqq 0$ が μ_0 に関して p 乗可積分であるための必要十分条件は $H_{G_n^c} u^p(\gamma)$ が n に関して有界なことである.

(ii) harmonic function u が有界な境界函数の PWBD 解であるための条件は u が有界であることである。

定理 6.4 u を γ-可積分な excessive function, μ をその標準測度とする. μ の $\bar{\mu}_0$ に関する Lebesgue 分解を $f\mu_0 + \mu_s$ とする. ここに μ_s は μ の特異部分である. このとき $u(x) < \infty$ なる x では a.e. P_x で (6.6) が成りたつ。

以上定理 6.2 ~ 6.4 の証明は [26, II, p. 83] とほとんど同じなので省略する。

Lemma 5.8 で dual Ray process $X^{*,\gamma} = (W^*, \mathcal{B}^*, \hat{P}_\eta^{*,\gamma} : \eta \in M)$ で特に $\eta \in M_1$ のとき $\lim_{t\downarrow 0} x_t$ が存在することをのべた. $\eta \in M_1^c$ のとき M_1 上の測度 $\mu(\eta, \cdot)$ が存在して $\hat{P}_\eta^{*,\gamma} = \int_{M_1} \mu(\eta, dz) \hat{P}_z^{*,\gamma}$ だから $\eta \in M_1^c$ でも $\lim_{t\downarrow 0} x_t$ が存在する. したがって $X^{*\gamma}$ の path は $0 \leq t < \zeta$ で右連続になっている. 更に $\eta \in M_1$ のとき $K(x, \eta) = 1$ である. 一方 $\eta \in M_1^c$ のとき $\mu(\eta, M_1) = 1$ だから

$$K(\gamma, \eta) = \int_{M_1} K(\gamma, z)\, \mu(\eta, dz) = 1.$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

ゆえにすべての $\eta \in M$ で $G_\alpha^{*,\gamma} f(\eta) = G_\alpha^* f(\eta)$. Proposition 5.1 の証明にのべた様に $G_\alpha^{*,\gamma}$ は $\mathbb{C}(M)$ を $\mathbb{C}(M)$ [1] に移す。このことから

定理 6.5 (Ray [36] 又は [ ]). $\hat{X}^{*,\gamma}$ は次の性質をもつ Markov 過程である。

(X*. 1) 「path x_t は $0 \le t \le \zeta(\omega)$ で右連続かつ左極限をもち，すべての t で $x_t \in M - M_1$」が a.e. $\hat{P}_\eta^{*,\gamma}$ で成立する ($\forall \eta \in M$).

(X*. 2)
$$\hat{P}_\eta^*(x_0 \in E) = \delta(\eta, E) \qquad \eta \in M_1$$
$$= \mu(\eta, E) \qquad \eta \in M - M_1$$

(X*. 3) $X^{*,\gamma}$ は強 Markov 性をもつ。

(X*. 4) $\{\tau_n\}$ を単調増加な Markov time の列で，$\tau_n \uparrow \tau$ とする。$x_{\tau-} = \lim_{n\to\infty} x_{\tau_n}$ とおくと
$$\hat{P}_\eta^{*,\gamma}(x_{\tau-} = x_\tau,\ x_{\tau-} \in M_1,\ \tau < \infty) = \hat{P}_\eta^{*,\gamma}(x_{\tau-} \in M_1,\ \tau < \infty).$$

この定理によって $\hat{X}^{*,\gamma}$ の state space は M_1 に制限出来る。それを $\hat{X}^* = (W^*, \bar{\mathcal{B}}^*, \hat{P}_\eta^* : \eta \in M_1)$ と書くことにする。ここに $\bar{\mathcal{B}}^*$ は $\mathcal{B}^*$ の $\hat{P}_\mu^*$-完備化である。Analytic set への hitting time は ($\mathcal{B}^*$)-Markov time になる ([24, p. 24]).

Standard process のときの fine topology と同様に，$\hat{X}^*$ に fine topology を定義する (§2.1). この位相を $\mathfrak{T}^*$ で表わす。X^*-excessive function は $\mathfrak{T}^*$ に関し連続となる。

定理 6.6 u を γ-可積分な excessive function とすれば

$$\mathfrak{T}^*\text{-}\lim_{x \to \eta \in (\partial S)} u(x) = f(\eta) \tag{6.6}$$

が a.e. $\bar{\mu}_0$ で成りたつ。ここに f は u の標準測度 μ の $\bar{\mu}_0$ に関する絶対連続部分の density である。

証明　定理 6.4 により，$\omega \in \{x_{\zeta-} \in (\partial S)_1\}$ に対しては $\lim_{t \uparrow \zeta} u(x_t) = f(x_{\zeta-})$ が a.e. $\hat{P}_\gamma$ で存在する。

(5.16) を $u = 1$ の場合に適用することによって
$$\hat{P}_1^*(\cdot) = \int \mu_0(d\eta)\, \hat{P}_\eta^*(\cdot)$$

---

1) $\mathbb{C}(M)$ は M 上の連続函数. $\mathbb{C}(M)$ の元の S への制限は $\mathbb{C}(S)$ に属する.

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

ゆえに $B \in \mathbb{B}_{(\partial S)}$ に対し

$$(6.7) \quad \mu_0(B) = \hat{P}_\gamma(x_{\zeta-} \in B) = \hat{P}_\gamma(\lim_{t \uparrow \zeta} u(x_t) = f(x_{\zeta-});\ x_{\zeta-} \in B)$$
$$= \int \mu_0(d\eta) \hat{P}^*_\eta(\lim_{t \downarrow 0} u(x_t^-) = f(x_0) :\ x_0 \in B)$$
$$= \int_B \mu_0(d\eta) \hat{P}^*_\eta(\lim_{t \downarrow 0} u(x_t^-) = f(x_0)) .$$

ここに $x_t^- = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} x_{t-\varepsilon}$ である. $\hat{P}^*_\eta(\lim_{t \downarrow 0} u(x_t^-) = f(x_0)) \leq 1$ だから, (6.7)により a.e. $\bar{\mu}_0$-η で

$$(6.8) \qquad \hat{P}^*_\eta(\lim_{t \downarrow 0} u(x_t^-) = f(x_0)) = 1$$

でなければならない. (6.8) をみたす η を固定する. ${}^\forall\varepsilon > 0$ に対し $A = \{y;\ |u(y) - f(\eta)| > \varepsilon\}$ とおくと A^c への *hitting time* σ_{A^c} は $(\mathcal{B}^*)$-*Markov time* で

$$\sigma_{A^c}(\omega) = inf\{t;\ |u(x_t^-) - f(x_0)| > \varepsilon\} \qquad a.e.\ \hat{P}^*_\eta$$

ゆえに $\hat{P}^*_\eta(\sigma_{A^c} > 0) = 1$ である。即ち A は $\mathfrak{F}^*$ 位相で x の近傍になっている. したがって $\mathfrak{F}^*\text{-}\lim_{y \to \eta} u(y) = f(\eta)$ が成りたつ。

<u>系</u> u が f の PWBD 解とすれば

$$\mathfrak{F}^*\text{-}\lim_{x \to \eta} u(x) = f(\eta)$$

が a.e. $\bar{\mu}_0$ で成りたつ。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

第7章 Regular step process の Martin境界

5章の Martin 境界の議論では，resolvent G がある σ-有限な測度 ξ によって dominate されていることが本質的であった。しかし一般の Markov 過程（state space が非可算個の点を含む場合）では必ずしもこの条件をみたさない。その典型的なものとして，regular step process あるいは時間系数が離散的な Markov 過程がある。実際それらの resolvent $G_\alpha(\cdot, E)$ は各点 x に正の mass をもつため σ-有限な測度で dominate されない。

この章は，これらの process の Martin 表現定理を得ることが目的であるが，5章の様に reversed process を構成する方法ではなく，ほゞ Martin [29]，T. Watanabe [44] に従ってのべる。なおここでのべるのとほゞ同じ方法が，5章にあつかった process の場合にも適用出来る（くわしくは（[27] を参照）．

§1. Regular step process

$X = (W, \mathcal{B}, P_x : x \in S^*)$ を standard process とし，X の jumping time の列 $\{\sigma_n : n = 1, \cdots, \infty\}$ を次の様に定義する。

$$\sigma_1(\omega) = \inf\{t > 0;\ x_t(\omega) \neq x_0(\omega)\} \quad \text{その様な } t \text{ が存在するとき}$$
$$= \infty \quad \text{その他のとき}$$

$$\vdots$$

(7.1)
$$\sigma_n(\omega) = \sigma_{n-1}(\omega) + \sigma_1(\omega^+_{\sigma_{n-1}})$$

$$\vdots$$

$$\sigma_\infty(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

各 σ_n は Markov time になることは容易にわかる。$0 < E_x(\sigma_1) < \infty$ のとき x を jump 点という。

定義　すべての $x \in S$ が jump 点かつ $\sigma_\infty(\omega) \geqq \zeta(\omega)$ をみたすとき，X を regular step process という。

時に state space S が可算集合のとき，X は minimal な Markov chain（[25]）になっている。S が一般の空間（局所 compact かつ第二可算公理

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

をみたす Hausdorff 空間）の場合でも，regular step process は Markov chain と多くの類似な性質をもっている。以下それらを列記する。（証明の多くは Markov chain の場合と同じなので省略する。[46, 25, 46] を参照されたい）。

(s.1)

(7.2) $$q(x)^{-1} = E_x(\sigma_1)$$

$$\pi(x, E) = P_x(x_{\sigma_1} \in E) \qquad E \in \mathcal{B}_S$$

とおけば q 及び π は x に関し可測である．更に $\pi(x, E)$ は E に関して $\mathcal{B}_S$ 上の測度で $\pi(x, S) \leq 1$，$\pi(x, x) = 0$ をみたす。

(s.2)

(7.3) $$G_\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{(\alpha+q)^{-1} q\pi\}^n (\alpha+q)^{-1} f(x)$$

$$Gf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n q^{-1} f(x)$$

定義　X の Dynkin generator を

(7.4) $$\mathfrak{G}_D(x, E) = q(x)\{\pi(x, E) - \delta(x, E)\}$$

によって定義する。

定義　(i) S 上の $\mathcal{B}_S$-可測函数 u がすべての $x \in S$ で

(7.5) $$-\infty < u(x) \leq \infty$$

(7.6) $$\mathfrak{G}_D u(x) \leqq 0$$

をみたすとき，π-superharmonic であるという。

(ii) π-superharmonic function u が $\mathfrak{G}_D u(x) = 0$ のとき x で π-harmonic という。すべての $x \in S$ で π-harmonic のとき単に π-harmonic という。

(iii) u を非負 π-superharmonic とする。u をこえない π-harmonic function が 0 のみのとき，u を π-potential という。

なお単に superharmonic あるいは harmonic という場合，それは第2章での意味である。

今後我々のあつかう π-(super)harmonic function, superharmonic function 等はすべて非負とする。

(s.3)　u が π-superharmonic であるための必要十分条件は，$\dot{u}$ が

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

excessive であることである（[44, p.73]）.

　(s.4)　u が Π-superharmonic であるための条件は，u が superharmonic であることである。

注意 1.　Regular step process では quasi-excessive function と excessive function は一致する。

　(s.5)　u が x で harmonic とすれば，その点で Π-harmonic である。

証明.　G は x を含み，closure が compact な open set とすると，$\sigma_1 \leq \sigma_{G^c}$ が a.e. P_x で成立するから

(7.7)　$$u(x) \geqq H_{\sigma_1} u(x) \equiv H_{G^c} u(x) = u(x).$$

したがって　$u(x) = H_{\sigma_1} u(x) = \Pi u(x)$.

注意 2.　Markov chain の場合は（s.5）の逆も成立するが（[25, p20]），一般にはどうかわからない。適当な条件の下に逆が成立することを Proposition 7.1 でのべる。

　(s.6)（Riesz 分解）　有限値 Π-superharmonic function u は Π-potential v と Π-harmonic function w との和に一意に表わされる。v 及び w は

(7.8)　$$v(x) = G(-\mathfrak{G}_D u)(x),$$

(7.9)　$$w(x) = \lim_{n\to\infty} \Pi^n u(x)$$

で与えられる（証明は [46, p.400]）.

これからただちに

　(s.7)　有限値 Π-potential u は $u = G(-\mathfrak{G}_D u)$ と表わされる。

　(s.8)　有限値 Π-superharmonic function u が potential であるための必要十分条件は

(7.10)　$$\lim_{n\to\infty} \Pi^n u = 0$$

をみたすことである。

§2. 仮　定

Martin 境界を定義する前に regular step process に次の（X.8）～（X.10）を仮定する.

　(X.8)　G は integrable で $q(x)$ は局所有界

注意 3.　この仮定の下では $\lim_{n\to\infty} x_{\sigma_n}$ は a.e. P_x で S の無限遠点と Δ 上に

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

分布している（[44, p.53] を参照）。

(X.9) 次の条件をみたす$(S, \mathcal{B}_S)$上の測度 m が存在する。

(i) mは局所有限かつ空でない任意の open set G に対し $m(G)>0$.

(ii) すべての $x\in S$ で $\Pi(x,\cdot)$ は m に関し絶対連続。

Martingale theory を使えば，Lemma 3.1 と同様に，非負 $\mathcal{B}_S\times\mathcal{B}_S$-可測函数 $\Pi(x,y)$ が存在して

$$\Pi(x,E)=\int_E \Pi(x,y)\,m(dy) \tag{7.11}$$

と書ける．更に

$$\Pi^n(x,y)=\int \Pi^n(x,dz)\,\Pi(z,y) \tag{7.12}$$

$$G(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Pi^n(x,y) \tag{7.13}$$

と書く。

(X.10) 次の条件をみたす$(S, \mathcal{B}_S)$上の σ-有限な測度 γ が存在する。

(i) $G(\gamma,y)=\int G(x,y)\,\gamma(dx)$ はすべての $x\in S$ で無限大も含めて連続かつ >0

(ii)

$$\langle f, K\rangle(y)=\int f(x)K(x,y)\,m(dx) \tag{7.14}$$

は $C_0(S)$ を $C(S)$ に移す．ここに

$$K(x,y)=\begin{cases}\dfrac{G(x,y)}{G(\gamma,y)} & 0<G(\gamma,y)<\infty \\ = 0 & \text{その他のとき}\end{cases} \tag{7.15}$$

注意3. (7.11) をみたす $\Pi(x,y)$ は一般には一意には定まらない．(X.10) は一応適当な version に対する仮定である．しかし $G(\gamma,y)$ 及び $\langle f, K\rangle(y)$ は version の取り方に関係しない．即ち別の version $\Pi'(x,y)$ 及びそれから定まる $G'(\gamma,y)$ 及び $\langle f, K'\rangle(y)$ が (X.10) をみたせば $G^*(\gamma,y)=G'(\gamma,y)$，$\langle f, K\rangle(y)=\langle f, K'\rangle(y)$ がすべての $y\in S$ で成立する．このことは，(a) $G'(\gamma,y)$ と $G(\gamma,y)$ が a.e. m で一致すること，(b) m測度 0の集合の補集合は S で dense であること，及び (c) $G'(\gamma,$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

y) と $G(\gamma, y)$ は共に連続なこと，よりわかる。$\langle f, K\rangle \equiv \langle f, K'\rangle$ も同様である。

注意4. γ-可積分な exsessive function は m に関して局所可積分である。

証明. Gf_n を u に下から近づく excessive function の列とする. $g \in C_0(S)$ に対し

$$\langle g, Gf_n\rangle = \int \langle g, K\rangle(y)\, G(\gamma, y)\, f_n(y)\, m(dy)$$

$$\leqq \|\langle g, K\rangle\|\, Gf_n(\gamma) \leqq \|\langle g, K\rangle\|\, u(\gamma) < \infty .$$

したがって $\langle g, u\rangle < \infty$ である.

<u>Proposition 7.1</u> u を γ-可積分な Π-harmonic function とすれば u は harmonic である。

証明. 1° G を S に compact closure をもつ open set とする。$u(x) < \infty$ なる x では $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi^n H_{G^c} u(x) = 0$ であることを示す。$u_k(x) = u \wedge k$ とおくと

$$(7.16)\qquad \Pi^n H_G u_k(x) \leqq k \cdot P_x(\sigma_n + \sigma_G(\omega^+_{\sigma_n}) < \zeta) .$$

注意3によって $x_{\sigma_n}(n \uparrow \infty)$ は S の無限遠点と Δ に収束するから $P_x(\sigma_n + \sigma_G(\omega^+_{\sigma_n}) < \zeta) \to 0 \ (n \to \infty)$. ゆえに $H_G u_k(x)$ は potential. したがって

$$(7.17)\qquad \Pi H_G u_k(x) = \Pi G\,[-\mathcal{G}_D H_G u_k](x)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \int \Pi^m(x, dy)\, q(y)^{-1} [-\mathcal{G}_D H_G u_k(y)]\, m(dy)$$

$$= \int_G K(x, y)\, \mu_k(dy)$$

ここに

$$\mu_k(dy) = G(\gamma, y)[H_G u_k(y) - \Pi H_G u_k(y)]\, m(dy) .$$

上式より

$$\langle f, \Pi H_G u_k\rangle = \int_G \langle f, K\rangle(y)\, \mu_k(dy), \quad \mu_k(G) = \Pi H_G u_k(\gamma) .$$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

一方 $u(\gamma)\geq \Pi H_G u_k(\gamma)=\mu_k(G)$ だから μ_k の w^*-limitをμとすれば

$$(7.18)\qquad \langle f,\Pi H_G u\rangle=\int_{\bar G}\langle f,K\rangle(y)\mu(dy),\quad \mu=(\bar G)=\Pi H_G u(\gamma).$$

これより、

$$\Pi^2 H_G u(x)=\int_{\bar G}\sum_{m=2}^{\infty}\Pi^m(x,y)G(\gamma,y)^{-1}\mu(dy)$$

したがって $u(x)<\infty$ なるxでは

$$\lim_{n\to\infty}\Pi^n H_G u(x)=\int_{\bar G}\lim\sum_{m=n}^{\infty}\Pi^m(x,y)G(\gamma,y)^{-1}\mu(dy)$$
$$=0$$

$2°$ $1°$と同じGに対して

$$u(x)\leqq H_G u(x)+H_{G^c}u(x)$$

両辺にΠ^nを作用させ $n\to\infty$ とすると，$u(x)<\infty$ なるxでは $u(x)\leqq\lim_{n\to\infty}\Pi^n H_{G^c}u(x)\leqq H_{G^c}u(x)$． 一方 $u\geqq H_{G^c}u$ だから $u(x)<\infty$ なる x では $u(x)=H_{G^c}u(x)$．又 $x\in G^c$ では $u(x)=H_{G^c}u(x)$ である。したがって $x\in G$ かつ $u(x)=\infty$ なる x で $u(x)=H_{G^c}u(x)$ を言えばよい。$E=\{x: u(x)\neq H_{G^c}u(x)\}$ とおくと $m(E)=0$ だから

$$u(x)=\Pi u(x)=\Pi H_{G^c}u(x)$$

ところが $x\in G$ では $\sigma_1\leq\sigma_{G^c}$ (a.e. P_x) だから $\Pi H_{G^c}u(x)=H_{G^c}u(x)$．ゆえにすべての $x\in G$ で $u(x)=H_{G^c}u(x)$。 (s.5) 及びこの proposition によって，γ-可積分な非負函数に対しては，Π-harmonic function と harmonic function は同値である．以後これらを区別しない。

§3. Martin 境界

ρ_1 をSの一点compact 化の距離，ρ_2 を $\langle f,K\rangle$ を用いて (5.3) によって定義したぎ距離とする．Sの $\rho=\rho_1+\rho_2$ による完備化をM，$\partial S=M-S$ と書く。∂Sを Martin 境界と呼ぶ．M 及び ∂S は compact かつ第二可算公理をみたす Hausdorff 空間である。§5.1と同じ議論で $f\in\mathcal{C}_0(S)$ のとき $\langle f,K\rangle$ は M への一意的な連続拡大函数 $\widetilde{\langle f,K\rangle}(\eta)$ をもつ．
更に

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$$(7.19)\qquad \widetilde{\langle f, K\rangle}(\eta)=\int f(x)\,K(dx,\eta)$$

と書ける。

$$(7.20)\qquad K(x,\eta)=\int_S \Pi(x,y)\,K(dy,\eta)\qquad \eta\in M$$

と書き，$K(x,\eta)$ を K-函数という。$K(\cdot,\eta)$ と f の m-測度による内積を $\langle f, K\rangle(\eta)$ で表わす。すべての $f\in\mathbb{C}_0(S)$ に対し $\langle f, K\rangle(\eta)=\widetilde{\langle f, K\rangle}(\eta)$ となる $\eta\in(\partial S)$ の全体を $(\partial S)'$ で表わす．$\mathbb{D}_0(S)$ を $\mathbb{C}_0(S)$ で dense な可算個の集合族とすれば

$$(\partial S)'=\bigcap_{f_i\in\mathbb{D}_0(S)}\{\eta\in\partial S;\ \langle f_i, K\rangle(\eta)=\widetilde{\langle f_i, K\rangle}(\eta)\}$$

だから $(\partial S)'$ は ∂S の Borel set である。$\eta\in(\partial S)'$ のとき $\Pi K(x,\eta)=K(x,\eta)$ だから $K(\cdot,\eta)$ は Π-harmonic である。

注意5. $\eta\in(\partial S)'$ のとき $K(x,\eta)$ は $K(dx,\eta)$ の $m(dx)$ に関する density になっている。したがって $K(x,\eta)$ は $\Pi(x,y)$ の version の取り方に関係しない。即ち別の $\Pi'(x,y)$ があって $\Pi(x,E)=\int_E\Pi'(x,y)m(dy)$ となっているとき，この Π' によって $K'(x,\eta)=\int\Pi'(x,y)K(dy,\eta)$ と定義しても K' と K は変らない。

M の Borel set B に対し§5.4と同様に reduced function H_Bu を定義する．u が γ-可積分のとき，m に関して局所可積分であることに注意すれば，Lemma 5.6 と同じ議論で H_Bu は $\mathbb{B}_S$ の m による完備化に関して可測であることがわかる．同様に H_Bu は $\mathbb{B}_S$ の γ-完備化に関しても可測である。

<u>定義</u>　$\hat{H}_Bu\equiv\Pi H_Bu$ を H_Bu の regularization という。

<u>Lemma 7.1</u>　Bが ∂S の Borel set のとき $\hat{H}_Bu$ は harmonic である。

証明．$1°$ Proposition 5.1 と同じ議論を行なうことにより，Dが閉集合のとき $H_Du(x)<\infty$ なる x で $H_Du(x)$ は harmonic. $\{x;\ \Pi H_Du(x)\neq H_Du(x)\}$ の m-測度は0だから $\Pi^2H_Du(x)=\Pi H_Du(x)$ がすべての $x\in S$ で成立する。ゆえに $\hat{H}_Du$ は Π-harmonic である。

$2°$ Bが ∂S の Borel set のときBに含まれる closed set の列 $\{D_n\}$ で $H_{D_n}u\uparrow H_Bu$ (a.e. m かつ a.e. γ) をみたすものが存在する。この

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

$\{D_n\}$に対して $\hat{H}_{D_n}u \uparrow \hat{H}_B u$．ゆえに $\hat{H}_B u$ は harmonic である。

注意 6. B_1 及び B_2 が ∂S の Borel set とすれば

(i) $\hat{H}_{B_1}u \leq \hat{H}_{B_2}u$ （$B_1 \subset B_2$ のとき）

(ii) $\hat{H}_{B_2}\hat{H}_{B_1}u = \hat{H}_{B_1}u$ （$B_1 \subset B_2$ のとき）

(iii) $\hat{H}_{B_1 \cup B_2}u + \hat{H}_{B_1 \cap B_2}u \leq \hat{H}_{B_1}u + \hat{H}_{B_2}u$.

証明． Capacity の一般論から (i), (iii) は「＾」を除いた形で成立するから，その式に Π を作用させると (i), (iii) が得られる．次に (ii)。 B_1, B_2 が M の開集合のとき (ii) は「＾」を除いた形で成立する。このことから B_2 開，B_1 閉のときも「＾」を除いた形で成立する。更に $\hat{H}_B u$ と $H_B u$ が a.e.m で一致することから $H_{B_1}H_{B_2}u = H_{B_2}\hat{H}_{B_1}u = H_{B_1}u$ B_2 が閉のときは，開集合で上から近づけることによって $H_{B_2}\hat{H}_{B_1}u = H_{B_1}u$． regularization をとれば $\hat{H}_{B_2}\hat{H}_{B_1}u = \hat{H}_{B_1}u$．

注意 7. $\hat{H}_B u(\gamma) = H_B u(\gamma)$。

証明． D が閉のとき，$H_B u$ と $\hat{H}_B u$ が一致しない点は $H_B u(x) = \infty$ のみだからその様な点の γ-測度は 0．B が一般の Borel set のとき $H_{D_n}u \uparrow H_B u$ (a.e. γ) $\hat{H}_{D_n}u \uparrow \hat{H}_B u$ (a.e. γ) と出来るから $\hat{H}_B u(\gamma) = H_B u(\gamma)$．

<u>Lemma 7.2</u> u を γ-可積分な excessive function，B を ∂S の Borel set とすれば，∂S 上の正測度 μ が存在して

$$(7.21) \qquad \hat{H}_B u(x) = \int_B K(x,\eta)\,\mu(d\eta) \qquad \mu(B) = \hat{H}_B u(\gamma)$$

と表現出来る。

証明． 1° G を M の open set，Gg_n を u に下から近づく potential の列とする。$v_n = H_G G g_n$ は potential だから $v_n = G[-\mathfrak{G}_D v_n]$ とかける．ゆえに

$$(7.22) \qquad \langle f, \Pi H_G u \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, \Pi H_G G g_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_S \widetilde{\langle f, K \rangle}(\eta)\,\mu_n(d\eta)$$

ここに

$$\mu_n(dy) = G(\gamma, y)[H_G G g_n(y) - \Pi H_G G g_n(y)]\, m(dy).$$

$$\mu_n(M) \leq \Pi H_G u(\gamma).$$

$y \in G^c$ では $H_G G g_n(y) = \Pi H_G G g_n(y)$ だから μ_n は $\bar{G}$ 上にのみ mass をもつ。μ_n の ω^*-limit を μ とすると

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

(7.23) $\quad \langle f, \pi H_G u \rangle = \int_{\bar{G}} \langle \widetilde{f, K} \rangle (\eta) \mu(d\eta) \quad , \quad \mu(\bar{G}) = \pi H_G u(\gamma).$

2°. DをMの closed set, $\{G_m\}$ をDに上から近づく open set の列とする。(7.23)において $G = G_m$ とおき，対応する測度 μ_m の w^*-limit をμとおけば，

(7.24) $\quad \langle f, \pi H_D u \rangle = \int_D \langle \widetilde{f, K} \rangle (\eta) \mu(d\eta) \quad , \quad \mu(D) = \pi H_D u(\gamma).$

3° $\{D_k\}$をBに含まれる closed set の列で $\hat{H}_{D_k} u \uparrow \hat{H}_B u$ をみたすものとする．$v_1 = \hat{H}_{D_1} u$,

$$v_k(x) = \hat{H}_{D_k} u(x) - \hat{H}_{D_{k-1}} u(x) \qquad \hat{H}_{D_k} u(x) < \infty \quad \text{のとき}$$

$$= \infty \qquad\qquad = \infty \quad \text{のとき}$$

とおく。v_k は excessive であり，$v_k(x) < \infty$ なるxで harmonic かつ

$$\hat{H}_{D_k} v_k(x) = \hat{H}_{D_k} \hat{H}_{D_k} u(x) - \hat{H}_{D_k} \hat{H}_{D_{k-1}} u(x) = \hat{H}_{D_k} u(x) - \hat{H}_{D_{k-1}} u(x) = v_k(x)$$

だから 2° により各 v_k は

(7.25) $\quad \langle f, v_k \rangle = \int_{D_k} \langle \widetilde{f, K} \rangle (\eta) \mu_k(d\eta).$

μ_k を $\mu_k(B - D_k) = 0$ とおいてB上の測度に拡張しておき，$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$ とおく。$\hat{H}_B u = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$ (a.e. m) だから

(7.26) $\quad \langle f, \hat{H}_B u \rangle = \int_B \langle \widetilde{f, K} \rangle (\eta) \mu(d\eta) \qquad \mu(B) = \hat{H}_B u(\gamma)$

したがって

$$\hat{H}_B u(x) = \pi \hat{H}_B u(x) = \int_B K(x, \eta) \mu(d\eta).$$

系. uをγ-可積分な excessive function とすると

$$\hat{H}_{\partial S - (\partial S)'} u = 0$$

証明. $\mathbb{D}_0^+(S)$ を $\mathbb{C}_0^+(S)$ で dense な可算個の函数族とする．
$B_i = \{\eta : \langle \widetilde{f_i, K} \rangle (\eta) > \langle f_i, K \rangle (\eta)\}$, $C_i = \{\eta : \langle \widetilde{f_i, K} \rangle (\eta) < \langle f_i, K \rangle (\eta)\}$
とおくと $\partial S - (\partial S)_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Capacity の一般論から各$B_i$及

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

び C_i に対し $\hat{H}_{B_i}u=0$, $\hat{H}_{C_i}u=0$ を言えばよい. (7.21) 及び (7.26) から

$$\langle f_i, \hat{H}_{B_i}u\rangle=\int_{B_i}\langle \widetilde{f_i, K}\rangle(\eta)\mu(d\eta)=\int_{B_i}\langle f_i, K\rangle(\eta)\mu(d\eta).$$

したがって $\mu(B_i)=0$ 即ち $\hat{H}_{B_i}u=0$ である。$\hat{H}_{C_i}u=0$ も同じ.

Lemma 7.3 $\eta\in(\partial S)'$ のとき $\hat{H}_{\{\eta\}}K(\gamma,\eta)$ は 0 又は 1 である。特に $\hat{H}_{\{\eta\}}K(\gamma,\eta)=1$ のとき $K(x,\eta)$ は extreme であり $K(\gamma,\eta)=1$ をみたす。

証明. (7.21) によって

$$(7.27)\qquad \hat{H}_{\{\eta\}}K(x,\eta)-\hat{H}_{\{\eta\}}K(\gamma,\eta)K(x,\eta)$$

両辺に $\hat{H}_{\{\eta\}}$ を作用させると

$$\hat{H}_{\{\eta\}}K(x,\eta)=\hat{H}_{\{\eta\}}\hat{H}_{\{\eta\}}K(x,\eta)=\hat{H}_{\{\eta\}}K(\gamma,\eta)\hat{H}_{\{\eta\}}K(x,\eta)$$

したがって $\hat{H}_{\{\eta\}}K(\gamma,\eta)=[\hat{H}_{\{\eta\}}K(\gamma,\eta)]^2$. したがって $\hat{H}_{\{\eta\}}K(\gamma,\eta)=0$ 又は 1. 特に $\hat{H}_{\{\eta\}}K(\gamma,\eta)=1$ のとき, $K(\cdot,\eta)$ が二つの excessive function u_1, u_2 の和に書けたとすれば (7.27) より

$$K(\cdot,\eta)=u_1+u_2\geqq\hat{H}_{\{\eta\}}u_1+\hat{H}_{\{\eta\}}u_2=\hat{H}_{\{\eta\}}K(\cdot,\eta)=K(\cdot,\eta)$$

したがって $u_i=\hat{H}_{\{\eta\}}u_i$. (7.21)によって

$$u_i=\hat{H}_{\{\eta\}}u_i=\hat{H}_{\{\eta\}}u_i(\gamma)\ K(\cdot,\eta)$$

即ち u_i は $K(\cdot,\eta)$ の定数倍になっている. 最後に $K(\gamma,\eta)=1$ は (7.27) の両辺を γ で積分すればよい.

定義 $\hat{H}_{\{\eta\}}K(\gamma,\eta)=1$ なる $\eta\in(\partial S)'$ の全体を $(\partial S)_1$ で表わす.

Lemma 7.4 u を γ-可積分な extreme harmonic function とする. u が $(\partial S)_1$ に含まれる Borel set B を用いて

$$(7.28)\qquad u(x)=\int_B K(x,\eta)\mu(d\eta)\qquad \mu(B)=u(\gamma)$$

と表現されているとすると $\eta_0\in B$ が存在して $u(x)=u(\gamma)K(x,\eta_0)$.

証明. $u(\gamma)>0$ のとき考えれば十分. D を B に含まれる閉集合で $\mu(D)>0$ をみたすものとする. D は compact だから, D の適当な点 η_0 があっ

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

て，それを含む任意の開集合Gに対し $\mu(G)>0$．今 $G_n \ni \eta_0$，$\bar{G}_n \downarrow \eta_0$ なる開集合列 $\{G_n\}$ を選ぶ．μを $\mu(M-B)=0$ とおいて M 上の測度に拡張しておき，(7.28) の右辺を G_n 上の積分と $M-G_n$ 上の積分に分ける．各項は excessive だから，u が extreme であることに注意すると

$$v_n=\int_{G_n}K(\cdot,\eta)\,\mu(d\eta)=k_n u$$

即ち

$$u=\int_{G_n\cap(\partial S)'}K(\cdot,\eta)\mu_n(d\eta)\ ,\qquad \mu_n=\frac{1}{k_n}\mu\ ,\quad \mu_n(\bar{G}_n)=u(\gamma)\ .$$

ゆえに

$$\langle f,u\rangle=\int_{G_n\cap(\partial S)'}\langle f,K\rangle(\eta)\,\mu_n(d\eta)=\int_{G_n\cap(\partial S)}\langle \widetilde{f,K}\rangle(\eta)\,\mu_n(d\eta)$$

$n\to\infty$ として $\langle f,u\rangle=\langle\widetilde{f,K}\rangle(\eta_0)\,u(\gamma)$．

uは harmonic だから $u=\Pi u=K(\cdot,\eta)\cdot u(\gamma)$．．

<u>Lemma 7.5</u> $\eta\in(\partial S)_1$，Bを$(\partial S)_1$ に含まれる Borel set のとき

$$(7.29)\qquad \hat{H}_B K(\cdot,\eta)=0 \qquad \forall\eta\in B^c\ .$$

証明．(7.21) より

$$K(\cdot,\eta)\geqq \hat{H}_B K(\cdot,\eta)=\int_B K(\cdot,\eta')\mu(d\eta')\ ,\qquad \mu(B)=\hat{H}_B K(\gamma,\eta)\ .$$

今 $\hat{H}_B K(\gamma,B)\neq 0$ とする．$K(\cdot,\eta)$ が extreme で $K(\gamma,\eta)=1$ なること，$\hat{H}_B K(\cdot,\eta)$ が Π-harmonic なこと及び Lemma 3.7 を合わせると $\eta_0\in B$ が存在して

$$K(\cdot,\eta)=\frac{1}{\hat{H}_B K(\gamma,\eta)}\hat{H}_B K(\cdot,\eta)=\frac{\hat{H}_B K(\gamma,\eta)}{\hat{H}_B K(\gamma,\eta)}K(\cdot,\eta_0)$$
$$=K(\cdot,\eta_0)$$

したがって $\forall f\in\mathcal{C}_0(S)$ で $\langle\widetilde{f,K}\rangle(\eta)=\langle\widetilde{f,K}\rangle(\eta_0)$．境界の定義より $\eta=\eta_0$，すなわち $\eta_0\in B$ である．

<u>Lemma 7.6</u> $(\partial S)'-(\partial S)_1$ は ∂S の Borel set である．したがって $(\partial S)_1$ は ∂S の Borel set である．

証明．Mの可算個の open base の元で直径 $(=\sup_{\eta,\eta'\in G}\rho(\eta,\eta'))$ が $1/n$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

をこえないとき $1/n$ 開集合と呼ぶことにする。

$$\Gamma_n=\{\eta\in(\partial S)' : \eta \text{ を含む任意の } 1/n \text{ 開集合}G\text{に対し } H_G K(\gamma,\eta)\leqq \tfrac{1}{2}\}$$

とおくと Γ_n は Borel set であることは明らか。したがって $\Gamma_n\uparrow$ で $\bigcup_n \Gamma_n=(\partial S)'-(\partial S)_1$ であることを示せばよい。ところが Γ_n の定義より $\Gamma_n\uparrow$ 及び $\Gamma_n\subset(\partial S)'-(\partial S)_1$ は明らかだから結局 $\forall\eta\in(\partial S)'-(\partial S)_1$ に対し $\eta\in\Gamma_n$ なる Γ_n が存在することを言えばよい。

$\eta\in(\partial S)'-(\partial S)_1$ のとき $\hat{H}_{\{\eta\}}K(\gamma,\eta)=0$ だから η を含む十分小さい開集合 G を選べば $H_G K(\gamma,\eta)\leqq\frac{1}{2}$. そこで $1/n$ が η と $M-G$ の距離より小さくなる様に n を選べば，η を含むすべての $\frac{1}{n}$ 開集合 G' は G に含まれるから

$$H_{G'}K(\gamma,\eta)\leq H_G K(\gamma,\eta)\leq\frac{1}{2}\ .$$

ゆえに $\eta\in\Gamma_n$ である。

<u>*Lemma* 7.7</u>　u を ∂-可積分な excessive function とすれば $\hat{H}_{(\partial S)'-(\partial S)_1}u=0$.

証明．$\hat{H}_{(\partial S)'-(\partial S)_1}u(\gamma)=0$ を言えばよい。そのために前の Lemma の証明で用いた Γ_n を考える。$\Gamma_n\uparrow(\partial S)'-(\partial S)_1$ だから $\hat{H}_{\Gamma_n}u(\gamma)=0$ を言えばよいが，そのためには Γ_n に含まれる任意の compact set D に対して $\hat{H}_D u(\gamma)=0$ を言えばよい。

$\forall\eta\in D$ に対して，η を含む $\frac{1}{n}$ 開集合をとれば

$$\hat{H}_D K(\gamma,\eta)\leq H_G(\gamma,\eta)\leq\frac{1}{2}\ .$$

(7.21) 式より

$$\hat{H}_D u=\int_D K(\cdot,\eta)\mu_D(d\xi)\qquad \hat{H}_D u(\gamma)=\mu_D(D)$$

ゆえに

$$\hat{H}_D u(\gamma)=\hat{H}_D\hat{H}_D u(\gamma)=\int_D\hat{H}_D K(\gamma,\eta)\,\mu_D(d\eta)$$

$$\leqq\frac{1}{2}\mu_D(D)=\frac{1}{2}\hat{H}_D u(\gamma)\ .$$

したがって $\hat{H}_D u(\gamma)=0$ である。

<u>定理 7.1</u>　u を γ-可積分な harmonic function とすれば，$(\partial S)_1$

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

上の有界な正測度μが一意に定まり

$$(7.30) \qquad u(x)=\int_{(\partial S)_1} K(x,\eta)\,\mu(d\eta)$$

と表現出来て，μは$\mu(B)=\hat{H}_B u(\gamma)$ （Bは$(\partial S)_1$のBorel set）によって特徴づけられる。

証明. 1°、先ず存在. uがharmonicであることと，capacityの劣加法性を用いて

$$u=\hat{H}_{(\partial S)}u \leqq \hat{H}_{(\partial S)_1}u+\hat{H}_{(\partial S)'-(\partial S)_1}u+\hat{H}_{(\partial S)-(\partial S)'}u.$$

Lemma 7.7 と Lemma 7.2 の系により，右辺の第二項及び第三項は0. したがって $u\leqq \hat{H}_{(\partial S)_1}u$. 一方 $u\geqq \hat{H}_{(\partial S)}u\geqq \hat{H}_{(\partial S)_1}u$ だから $u=\hat{H}_{(\partial S)_1}u$
Lemma 7.2 によって(7.30)が得られる。

2°、一意性. Lemma 7.5 によって

$$\hat{H}_B u(x)=\int_{(\partial S)_1}\hat{H}_B K(x,\eta)\,\mu(d\eta)=\int_B K(x,\eta)\,\mu(d\eta)$$

ゆえに $\hat{H}_B u(\gamma)=\mu(B)$.

注意8、 一般にγ-可積分なexcessive function uは必ずしもK-函数を用いて表現出来ないが，$\Pi u(x)$は

$$\Pi u(x)=\int_{(\partial S)_1\cup S} K(x,\eta)\,\mu(d\eta)$$

と表現出来て，μは一意に定まる。

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

文　献　表

[1] R.M. Blumenthal, R.K. Getoor, H.P. McKean, *Markov processes with identical hitting distributions*. Ill. J. Math, 6.

[2] F.F. Bonsall, *On the representation of points of a convex set*, Proc. London Math. Soc.

[3] M. Brelot, *Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin*, J. de Math., 35 (1956), 297-335.

[4] Brelot-Choquet-Deny, *Theorie du potentiel* 5 (1960-61)

[5] G. Choquet, *Existence et unicité des représentations integrales au moyen des points extremaux dans les cône convexes*, Sém. Bourbaki, 9 (1956-57), no. 139, 15 pp.

[6] J.L. Doob, *Stochastic processes*, New York, 1953.

[7] ———, *Conditional Brownian motion and boundary limits of harmonic functions*, Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), 431-458.

[8] ———, *A non-probabilitic proof of the relative Fatou theorem*, Ann. Inst. Fourier, 9 (1959), 293-300.

[9] ———, *Discrete potential theory and boundaries*, J. Math. and Mech., 8 (1959), 433-458.

[10] J.L. Doob, J.L. Snell, R.E. Williamson, *Application of boundary theory to sums of independent random variables*, Contribution to Prob. and Stat., Stanford Univ. Press, (1960), 182-197.

[11] E.B. Dynkin, *Natural topology and excessive functions connected to Markov process*, D.A.N., 127 (1959), 17-19.

[12] ———, *Theory of Markov processes*, London, 1960.

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

[13] E.B.Dynkin, *Non-negative eigen functions of the Laplace-Beltrami operator and Brownian motion in certain symmetric spaces*, D.A.N. 141, 288-291.

[14] ————, *Transformations of Markov processes connected with additive functionals*, 4th Berkley Symp., (1962), 117-142.

[15] W. Feller, *Boundaries induced by non-negative matrices*, Trans. Amer. Math. Soc., 83(1956), 19-54.

[16] ————, *On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations*, Ann. of Math., 65(1957), 527-570.

[17] G.A. Hunt, *Markoff processes and potentials, I, II, III*, Ill. J. Math., 1(1957), 44-93, 316-369, 2(1958), 151-213.

[18] ————, *Markoff chains and Martin boundaries*, Ill. J. Math., 4(1960), 313-340.

[19] 池田, 上野, 田中, 佐藤, 多次元拡散過程の境界問題, (上), (下), Sem. on Prob., (1960).

[20] 伊藤 清, 確率過程 II, 現代応用数学講座 (岩波)

[21] K. Ito, *On stochastic processes*, Tata Institute, (1963).

[22] 伊藤, 渡辺, 福島, 拡散過程, Sem. on Prob., vol. 3 (1960).

[23] 伊藤清三, 二階楕円型偏微分作用素に関する *Martin* 境界について, 数理科学シンポジウム講演集, (1962).

[24] 近藤亮司, *Markov* 過程と *Potential*, Sem. on Prob., vol. 11 (1962).

[25] 国田, 渡辺, *Markoff chain* と *Martin* 境界 I, II, 数学. 13(1961), 14(1962).

[26] 国田, 野本, *Markov* 過程に関する *compact* 化の方法とその応用, Sem. on Prob., vol 14 (1962).

[27] H. Kunita, T. Watanabe, *Notes on transformations of Markov processes connected with multiplicative functionals*, to appear.

[28] ————, ————, *Markov processes and Mar-*

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

tin boundaries, Ito appear.

[29] R.S. Martin, *Minimal positive harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 49 (1941), 137-172.

[30] M. Nagasawa, *On reversed process of approximate Markov process*, to appear.

[31] M. Nagasawa, K. Sato, *Reversed process of diffusions*, to appear.

[32] L. Naïm, *Sur le rôle de la frontiere de R.S. Martin dans la theorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, 7 (1957), 183-285.

[33] P.A. Meyer, *Fonctionelles multiplicatives et additive de Markov*, Ann. Inst. Fourier, 12 (1962), 125-230.

[34] 本尾 実, マルコフ過程の *additive functional*, Sem. on Prob., vol 15, (1963).

[35] 大津賀 信, 函数論特論, 現代数学講座（共立）.

[36] D. Ray, *Resolvent, transition functions and strongly Markovian processes*, Ann. of Math., 70 (1959), 43-78.

[37] M.G. Shur, *Martin's boundary for linear elliptic operators of second order*, D.A.N., 144 (1962), 290-292.

[38] J.L. Snell, R.E. Williamson, *A martingale representation theorem*, J. Math. and Mech., 9 (1960), 653-662.

[39] 竹内, 山田, 渡辺, 安定過程, Sem. on Prob., vol 13 (1962).

[40] V.A. Volkonsky, *Additive functionals of Markov processes*, Trudy Moscow 9 (1960), 143-189.

[41] H. Watanabe, *Some relations between Markov boundaries and Feller boundaries*, J. Math. Soc. Japan.

[42] 渡辺 毅, 可附番空間の上の *Markov* 過程から導びかれる *Martin* 境界, Sem. on Prob., vol 1 (1959).

[43] T. Watanabe, *A probabilitic method in Hausdorff moment problem and Laplace-Stieltjes transform*, J. Math. Soc. Japan, 12 (1960), 192-206.

[44] ——————, *On the theory of Martin boundaries in-*

duced by countable Markov processes, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. 33(1960), 39-108.

[45] T. Watanabe, *Some topics related to Martin boundaries induced by countable Markov processes*, The 32nd Session of I.S.I.

[46] ――――――, *On the equivalence of excessive functions and superharmonic functions in the theory of Markov processes, I, II*, Proc. Japan Acad., 38(1962), 397-401.

[47] ――――――, *A remark on the strong Markov property*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 17(1963).

[48] J. Lumperti and J. L. Snell, *Martin boundaries for certain Markov chains*, J. Math. Soc. Japan, 15(1963), 113-128.

[49] 佐藤, 長沢, 福島, マルコフ過程の変換と境界問題, Sem. on Prob., vol 16 (1963).

[50] H. Furstenberg, *A poisson formula for semi-simple Lie groups*, Ann. of Math., 77(1963), 335-386.

[51] 確率過程論特集号; 数学, 13巻1号(1961).

Sem. on Probab.
Vol.17 1963年
P1-114

1963.10.発行　確率論セミナー