Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 16

佐藤健一，長沢正雄，福島正俊

マルコフ過程の変換と境界問題

1963

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

佐藤健一, 長沢正雄, 福島正俊

マルコフ過程の変換と境界問題

目 次

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

まえがき

マルコフ過程の境界問題とわれわれが呼んでいるのは，一次元拡散過程に関するFellerの一連の重要な研究に当るものを，多次元拡散過程，Markov chain，ないし一般のマルコフ過程に対して問題とするものである．（Seminar on Probability vol. 5 のまえがきの解説を見られたい．）上野による境界上のprocessの導入，渡辺，Doobによる Martin境界の導入はこの問題における大きな進歩であったが，最近の additive functional の理論の発展はこの問題を攻撃するための重要な道具を提供した．また，変換論的に reversed process も大事な役割を果すことが分って来た．このノートは，これに関連したいくつかの topics を扱う。

変換論についていえば，マルコフ過程の変換――すなわち あるマルコフ過程に何らかの操作を施して新しいマルコフ過程をつくること――の方法はいろいろ知られている。time change，killing，time reversion のほかに優調和変換，ディンキン・本尾の変換，状態空間の位相的変換があり，また 確率微分方程式もこの中に入れることができる．これらはマルコフ過程の種々の研究に現れて来た。Feller の研究に関連して regular な一次元拡散過程はブラウン運動から time change，killing と区間の位相的変換ですべて求められることを示した伊藤・McKean の研究，方程式 $(\Delta - k)u = f$ の解をブラウン運動で表現した Kac の研究などは，その著しい例である．更に比較的最近になってディンキン，ヴォルコンスキ等は，具体的な process をはなれて変換そのものを研究対象としはじめた。このノートは変換論自体の topic をも扱っている。

各章は独立した話題を扱う．内容は各章の序文を見ていただきたい．定義や記号は各章毎に違っているが，無理に統一して使い易い形から離れるのを避けた。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

校正その他で藤井光昭氏はじめ東京セミナーの皆さんにお世話になったことを感謝したい。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

第1章 マルコフ過程の time change と killing I.

マルコフ過程にある操作を施して別のマルコフ過程を作る方法はいろいろ知られているが，そのうち，time change すなわち random な時間変更と，killing すなわち粒子をある random な時刻に消滅させることは，最も簡単な二つの方法である。その一般論は [1]（killing のみ），[4]，[7] に述べられているが，以下ではそれをもっと完全に述べ，更に，time change と killing の両方を施こす際その順序が交換可能なことを述べる。この内容は [6] の前半に述べられていることに証明をつけたものであるが，[6] の間違いを正してある。マルコフ過程に関する定義と用語は，些細な変更を除いてディンキン [1] のを採用する。なお，この原稿の準備中に日本にはいって来た [2] の結果（Lemma 1.8 および 1.9 として §1 で述べる）を用いて §4 の条件をゆるめることができた。しかし，[2] を全面的に比較参照することは時日の関係でできなかった。

§1 準備

まず [1] に従い，時間的一様なマルコフ過程の定義を述べる。
次のものが与えられたとする。

(1.1) 集合 E，その上の Borel field $\mathcal{B}$ ただし，一点だけから成る集合はすべて $\mathcal{B}$ に属するとする。（$(E, \mathcal{B})$ を状態空間とよぶ。）

(1.2) ある集合 Ω. Ω の元を ω で表わす。

(1.3) Ω の上で定義され $[0, +\infty]$ の値をとる函数 $\zeta(\omega)$.

(1.4) $\omega \in \Omega$, $t \in [0, \zeta(\omega)]$ に対して定義され E の値をとる函数 $x(t, \omega) = x_t(\omega)$.

(1.5) すべての $t \in [0, +\infty)$ に対し，$\Omega_t = \{\omega : \zeta(\omega) > t\}$ 1) の上の Borel field $\mathfrak{M}_t$.

1) 以下，$\{\omega : \zeta(\omega) > t\} = \{\zeta(\omega) > t\} = \{\zeta > t\}$ のような書き方をする。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(1.6) すべての $\mathcal{M}_t$ を含むような，Ω の上の Borel field $\mathcal{M}$.

(1.7) すべての $a \in E$ に対し，$\mathcal{M}$ の上の集合函数 $P_a(A)$.

(1.8) $t \in [0, +\infty)$, $A \in \mathcal{N}^*$ に対して定義され Ω の部分集合の値をとる写像 $\theta_t A$. ただし，$\mathcal{N}^*$ は，$\Omega_0 = \{\zeta > 0\}$ の部分集合の族で次のような性質をもつもののうち最小のもの．

$(1.8)_1$ $\{x_t \in \Gamma\} \in \mathcal{N}^*$ $\qquad (t \geq 0,\ \Gamma \in \mathcal{B})$,

$(1.8)_2$ $A_\alpha \in \mathcal{N}^* \Longrightarrow \bigcap_\alpha A_\alpha,\ \bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{N}^*$ (index α の濃度は任意),

$(1.8)_3$ $A \in \mathcal{N}^* \Longrightarrow \Omega_0 \setminus A \in \mathcal{N}^*$.[2)]

以上のような要素が与えられ，それらが，次の (1.9) — (1.16) を満たすとき，<u>マルコフ過程</u> $X = (x_t,\ \zeta,\ \mathcal{M}_t, P_a, \theta_t)$ と呼ぶ。[3)]

(1.9) $t \leq u$ かつ $A \in \mathcal{M}_t \Rightarrow \{A,\ \zeta > u\} \in \mathcal{M}_u$

(1.10) $\{x_t \in \Gamma\} \in \mathcal{M}_t$ $\qquad (t \geq 0,\ \Gamma \in \mathcal{B})$,

(1.11) P_a は $\mathcal{M}$ の上の確率測度.

(1.12) 任意の $t \geq 0$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ に対し，函数 $P(t, a, \Gamma) = P_a(x_t \in \Gamma)$ は a に関し $\mathcal{B}$ 可測,

(1.13) $P(0, a, S \setminus a) = 0$ $\qquad (a \in E)$,

(1.14) 任意 $t, s \geq 0$, $a \in E$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ に対し．

$P_a(x_{t+s} \in \Gamma \mid \mathcal{M}_t) = P(s, x_t, \Gamma)$ (a, s, Ω_t, P_a) [4)]

(1.15) $\theta_t \Omega_0 = \Omega_t$, $\theta_t(A \setminus B) = \theta_t A \setminus \theta_t B$

$\theta_t(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha \theta_t A_\alpha$, $\theta_t(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha \theta_t A_\alpha$,

(α の濃度は任意)

(1.16) $\theta_t\{x_s \in \Gamma\} = \{x_{t+s} \in \Gamma\}$ $(t \geq 0,\ s \geq 0,\ \Gamma \in \mathcal{B})$.[5)]

マルコフ過程 $X = (x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, P_a, \theta_t)$ の性質をいくつか広

---

2) 記号 $B \setminus A$ は $\{\omega : \omega \in B$ かつ $\omega \notin A\}$ を表わす．

3) "時間的一様なマルコフ過程"と呼ぶべきであるが，今後，時間的一様でない場合は扱わないので，単に"マルコフ過程"と呼ぶことにした．

4) Ω_t の上で P_a - almost everywhere に成り立つという意．

5) θ_t には自由性がなく，(1.15), (1.16) の要請により $\mathcal{N}^*$ の上で一意的に定まる．

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

べよう。$A \in \mathcal{N}^*$の上で定義された$\mathcal{N}^*$可測函数$\xi(\omega)$に対し，$\theta_t A$の上で定義された次のような函数を$\theta_t \xi(\omega)$とおく：

(1.17) $\quad \theta_t \xi(\omega) = b \quad$ if $\quad \omega \in \theta_t\{\xi = b\} \cap \theta_t A$ 更に，E上のBorel field $\overline{\mathcal{B}}$，Ω_t上のBorel field $\mathcal{N}_t$，$\overline{\mathcal{N}}_t$，$\mathcal{N}_{t+0}$，$\overline{\mathcal{N}}_{t+0}$，$\overline{\mathcal{M}}_t$，$\mathcal{M}_{t+0}$，$\mathcal{R}_t$，$\Omega_0$上のBorel field $\mathcal{N}$，$\mathcal{R}$を次のように定義する。まず$\overline{\mathcal{B}}$は次のようなΓの全体である。$\mathcal{B}$上の任意の有界測度μに対し，Γ_1，$\Gamma_2 \in \mathcal{B}$が存在して，$\Gamma_1 \subset \Gamma \subset \Gamma_2$[6] かつ $\mu(\Gamma_1) = \mu(\Gamma_2)$。すなわち$\overline{\mathcal{B}}$は，有界測度による$\mathcal{B}$の完備化のすべての共通部分である。

次に$\mathcal{N}_t$は$\{x_u \in \Gamma, \zeta > t\}$ $(0 \leq u < t, \Gamma \in \mathcal{B})$によって生成されるBorel fieldである。$\overline{\mathcal{N}}_t$は次のようなAの全体である：$\mathcal{B}$上の任意の有界測度$\mu$に対し，$A_1$，$A_2 \in \mathcal{N}_t$が存在して，$A_1 \subset A \subset A_2$かつ$P_\mu(A_1) = P_\mu(A_2)$.[7] $\mathcal{N}_{t+0}$は，任意の$u > t$に対し$\{A, \zeta > u\} \in \mathcal{N}_u$となるような$A \subset \Omega_t$の全体である。$\overline{\mathcal{M}}_t$は，$\mathcal{N}_t$から$\overline{\mathcal{N}}_t$を得たと同様にして$\mathcal{M}_t$から得たものであり，[8] $\overline{\mathcal{N}}_{t+0}$，$\mathcal{M}_{t+0}$は，それぞれ$\overline{\mathcal{N}}_t$，$\mathcal{M}_t$から，$\mathcal{N}_t$から$\mathcal{N}_{t+0}$を得たと同様にして得たものである。$\overline{\mathcal{N}}_{t+0} \cap \mathcal{N}^*$を$\mathcal{R}_t$とおく。[9] $\mathcal{N}$はΩ_0の上のBorel fieldで$\{x_u \in \Gamma\}$ $(u \geq 0, \Gamma \in \mathcal{B})$から生成されたもの，$\mathcal{R}$は次のようなAの全体：$A \in \mathcal{N}^*$かつ，$\mathcal{B}$上の任意の有界測度$\mu$に対し$A_1$，$A_2 \in \mathcal{N}$が存在して，$A_1 \subset A \subset A_2$かつ$P_\mu(A_1) = P_\mu(A_2)$が成り立つ。[10]

(1.14)の性質から，もしξが$\mathcal{R}$可測で$\theta_t \xi$がP_a可積分ならば，

---

6) 記号$E \subset F$は$x \in E \Rightarrow x \in F$の意で用いる。$E \subsetneqq F$の意ではない。

7) $P_\mu(A) = \int_E P_a(A) \mu(da)$

8) $\overline{\mathcal{M}}_t$の定義は[1]と異る。[1]では任意の$a \in E$に対しA_1，$A_2 \in \mathcal{M}_t$が存在して$A_1 \subset A \subset A_2$かつ$P_a(A_1) = P_a(A_2)$で定義している。この定義を採用しても以下の議論は同じである。

9) $\mathcal{R}_t$の定義も[1]と異る（[1] 3.21.の脚注を参照）。

10) [1]では$\mathcal{R}$を$\overline{\mathcal{N}}$と記している。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(1.18) $E_a(\theta_t\xi|\mathcal{M}_t)=E_{x_t}(\xi)$ (a.s. Ω_t, P_a) である。ただし，P_a による積分を E_a と記す。11)

$I_t=[0,t]$ と記し，I_tの上の区間から生成された Borel field を $\mathcal{B}_t$ と記す。マルコフ過程Xが可測であるとは，任意のtに対し，$x_u(\omega)$ が $(\Omega_t\times I_t,\ \mathcal{M}_t\times\mathcal{B}_t)$ から $(E,\mathcal{B})$ への写像として可測であることとする。Xが可測ならば，その遷移確率 $P(t,a,\Gamma)$ は $\Gamma\in\mathcal{B}$ を固定したとき (t,a) について可測である。これは [1] Lemma 1.7 によって分る。Ω上で定義され $[0,+\infty]$ の値をとる函数τが，$\tau(\omega)\leq\zeta(\omega)$，かつすべてのtに対し $\{\tau\leq t<\zeta\}\in\mathcal{M}_t$ なるとき，マルコフ時と呼ぶ。12)
τがマルコフ時である時，$\Omega_\tau=\{\tau<\zeta\}$ とおき，Ω_τ の上の Borel field $\mathcal{M}_\tau$ を次のように定義する。すなわち $A\in\mathcal{M}_\tau$ とは，$A\subset\Omega_\tau$，かつ任意のtに対し $\{A;\tau\leq t<\zeta\}\in\mathcal{M}_t$ とする。マルコフ過程Xが強マルコフ性をもつとは，第一に可測であって，第二に，任意のマルコフ時τ，任意の非負，$\mathcal{M}_\tau$ 可測な $\delta(\omega)$ $(\omega\in\Omega_\tau)$，任意の $\Gamma\in\mathcal{B}$ に対して

(1.19) $P_a(x_{\tau+\delta}\in\Gamma|\mathcal{M}_\tau)=P(\delta,x_\tau,\Gamma)$ (a.s. Ω_τ, P_a) が成り立つこととする。マルコフ時τと $A\in\mathcal{N}^*$ に対し $\theta_\tau A\in\Omega_\tau$ を次のように定義する：

(1.20) $$\theta_\tau A=\bigcup_{t\geq0}\{\theta_t A,\ \tau(\omega)=t\}.$$

更に，$A\in\mathcal{N}^*$ 上で定義された $\mathcal{N}^*$ 可測函数 $\xi(\omega)$ に対し

(1.21) $$\theta_\tau\xi(\omega)=\theta_t\xi(\omega)\quad \text{if } \omega\in\theta_t A,\ \tau(\omega)=t$$

とおく。マルコフ過程Xが右連続であるとは，すべてのωに対し $x_t(\omega)$ が $t\in[0,\zeta(\omega))$ の函数として右連続であることとする。Xが擬左連続であるとは，$\tau_1,\tau_2,\cdots$ がマルコフ時の列でAの上で $\tau_n(\omega)\uparrow\tau(\omega)<\zeta(\omega)$ ならばすべての a に対し $x_{\tau_n}\to x_\tau$ (a.s. A, P_a) が成り立つということとする。

---

11) [1]の記号では状態空間の点 a を x，積分 E_a を M_x.

12) [1]の用語では random variable independent of the future.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

ここで定義したマルコフXの種々の正則性に対し，以下のように番号をつけておく。

M_1. Eは開集合の可算基をもつ局所 compact な Hausdorff 空間で，$\mathcal{B}$は開集合の全体によって生成された Borel field.

M_2. $P_a(\zeta>0)=1$ $(a\in E)$.

M_3. Xが右連続.

M_4. Xが強マルコフ性をもつ.

M_5. Xが擬左連続.

M_6. $\mathcal{M}_{t+0}=\mathcal{M}_t$ $(t\geqq 0)$.

M_7. $\overline{\mathcal{M}}_t=\mathcal{M}_t$ $(t\geqq 0)$.

後で使うためにいくつかのことを証明しておこう.

Lemma 1.1. マルコフ過程Xが可測で，任意の，マルコフ時τ，$t\geqq 0$，$\Gamma\in\mathcal{B}$に対し

(1.22) $P_a(x_{\tau+t}\in\Gamma\mid\mathcal{M}_\tau)=P(t,x_\tau,\Gamma)$ $(a.e.\ \Omega_\tau, P_a)$

とする。この時，$\Omega_0\times\Omega_\tau$で定義され $\mathcal{N}\times\mathcal{M}_\tau$ 可測かつ有界な任意の函数 $\xi(\omega,\omega')$ に対し $\theta_\tau\xi(\omega,\omega)$ は$\mathcal{M}$可測で

(1.23) $E_a(\theta_\tau\xi(\omega,\omega))=\int_{\Omega_\tau}P_a(d\omega)\int_{\Omega_0}\xi(\omega',\omega)P_{x_{\tau(\omega)}(\omega)}(d\omega')$

が成り立つ。ただし $\theta_\tau\xi(\cdot,\omega')$ はω'を固定し $\xi(\cdot,\omega')$ にθ_τを施したものである。 q.e.d.

証明 ξ_1が$\mathcal{N}$可測，ξ_2が$\mathcal{M}_\tau$可測の時
$\xi(\omega,\omega')=\xi_1(\omega)\xi_2(\omega')$ に対して証明すれば，上のような一般のξに対して拡張される（たとえば [1] Lemma 1,2による).
$\theta_\tau\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)$ が$\mathcal{M}$可測なことは明らかで，(1.21)により

$$E_a(\theta_\tau\xi_1(\omega)\xi_2(\omega))=E_a(\xi_2(\omega)E_{x_{\tau(\omega)}(\omega)}(\xi_1))$$
$$=\int_{\Omega_\tau}P_a(d\omega)\int_{\Omega_0}\xi_1(\omega')\xi_2(\omega)P_{x_{\tau(\omega)}(\omega)}(d\omega')$$

である.

Lemma 1.2. マルコフ過程Xがあり，任意のtに対し$x_u(\omega)$が$(\Omega_t\times I_t,\ \mathcal{N}_t\times\mathcal{B}_t)$から$(E,\mathcal{B})$への写像として可測で，更に，Lemma 1.1.の仮定をみたすとすれば，Xは強マルコフ

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

性をもつ。

証明　任意の $A\in\mathcal{M}_\tau$ に対し，

$\xi(\omega,\omega')=\chi_\Gamma(x_{\tau(\omega)+\sigma(\omega')}(\omega))\chi_A(\omega')$ とおくと Lemma 1.1. が適用でき，

$$P_a(A,\ x_{\tau+\sigma}\in\Gamma)=E_a(\chi_A P(\sigma,x_\tau,\Gamma))$$

を得る。　q.e.d.

Lemma 1.3.　$A\in\mathbb{R}$ ならば $P_a(A)$ は a について $\overline{\mathcal{B}}$ 可測である。

証明　任意の有界測度 μ に対し $A_1,A_2\in N$ を $A_1\subset A\subset A_2$ かつ $P_\mu(A_1)=P_\mu(A_2)$ にとれる。$P_a(A_1)\leq P_a(A)\leq P_a(A_2)$ かつ μ-a.e. で等号が成立つ。しかも $P_a(A_1)$, $P_a(A_2)$ は (1.12) から $\mathcal{B}$ 可測である。従って $P_a(A)$ は a について $\overline{\mathcal{B}}$ 可測．q.e.d.

Lemma 1.4.　$\overline{N}_{t+0}$ は次のような A の全体と一致する：$\mathcal{B}$ 上の任意の有界測度 μ に対し $A_1,A_2\in N_{t+0}$ が存在して $A_1\subset A\subset A_2$ かつ $P_\mu(A_1)=P_\mu(A_2)$.

証明　A が上に述べた条件をみたすとしよう．すると任意の $u>t$ に対し，$A_1\Omega_u$, $A_2\Omega_u\in N_u$, $A_1\Omega_u\subset A\Omega_u\subset A_2\Omega_u$, $P_\mu(A_1\Omega_u)=P_\mu(A_2\Omega_u)$ であるから $A\Omega_u\in\overline{N}_u$ である。故に $A\in\overline{N}_{t+0}$ である．逆に $A\in\overline{N}_{t+0}$ としよう．与えられた μ に対し，A_1^n, $A_2^n\in N_{t+\frac{1}{n}}$ が存在して $A_1^n\subset A\Omega_{t+\frac{1}{n}}\subset A_2^n$, $P_\mu(A_1^n)=P_\mu(A_2^n)$ である．$A_1=\varlimsup_{n\to\infty}A_1^n$, $A_2=\varliminf_{n\to\infty}A_2^n$ とおく．$A_1\subset A\subset\Omega_t$ は明らか．$A=A\Omega_t=\varliminf_{n\to\infty}A\Omega_{t+\frac{1}{n}}\subset A_2\subset\varliminf_{n\to\infty}\Omega_{t+\frac{1}{n}}=\Omega_t$ である．$A_1\Omega_{t+\frac{1}{k}}=\varlimsup_{n\to\infty}A_1^n\Omega_{t+\frac{1}{k}}=\varlimsup_{n\geq k,\,n\to\infty}A_1^n\Omega_{t+\frac{1}{k}}\in N_{t+\frac{1}{k}}$

だから $A_1\in N_{t+0}$ であり，同様に $A_2\in N_{t+0}$ である。また $P_\mu(A_2\setminus A_1)\leq P_\mu(\bigcup_n(A_2^n\setminus A_1^n))=0$ であるから Lemma がいえた。

Lemma 1.5.　τ, τ_n をマルコフ時とし，$\tau_n\downarrow\tau$ とする．M_6 が成り立てば，$A\in\mathcal{M}_\tau$ は次の二条件が同時に成り立つことと同

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

値である．

(1.24) $\quad A \in \mathcal{M}_\tau$

(1.25) $\quad \forall n$ に対し $\quad A\Omega_{\tau_n} \in \mathcal{M}_{\tau_n}$.

<u>証明</u>. $A \in \mathcal{M}_\tau$ とすると，(1.24) は明らか．(1.25) は
$(A\Omega_{\tau_n}, \tau_n \le t < \zeta) = (A, \tau \le t < \zeta) \cap (\tau_n \le t < \zeta) \in \mathcal{M}_t$ で分る。
逆に A が (1.24), (1.25) をみたす時，次のことが順にいえる．

$(A, \tau_n < t < \zeta) = \lim\limits_{m\to\infty} (A\Omega_{\tau_n}, \tau_n \le t - \frac{1}{m} < \zeta) \cap (t < \zeta) \in \mathcal{M}_t$,

$(A, \tau < t < \zeta) = \lim\limits_{n\to\infty} (A, \tau_n < t < \zeta) \in \mathcal{M}_t$,

$\forall u > t$, $(A, \tau \le t < \zeta, u < \zeta) = \lim\limits_{m\to\infty} (A, \tau < t - \frac{1}{m} < \zeta, u < \zeta) \in \mathcal{M}_u$,

従って $(A, \tau \le t < \zeta) \in \mathcal{M}_{t+0} = \mathcal{M}_t$. $\qquad$ q.e.d.

ついでに（後で使いはしないが），次の事実を述べておく．

<u>*Lemma* 1.6.</u> $\mathcal{M}_t$ から $\overline{\mathcal{M}}_t$ を定義したと同様にして $\mathcal{M}_\tau$ から $\overline{\mathcal{M}}_\tau$ を定義する（τ はマルコフ時）．M_7 が成り立てば，$\overline{\mathcal{M}}_\tau = \mathcal{M}_\tau$ である。

<u>証明</u> $A \in \overline{\mathcal{M}}_\tau$ とすると，任意の μ に対し $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_\tau$ が存在して $A_1 \subset A \subset A_2$ かつ $P_\mu(A_1) = P_\mu(A_2)$ である．
$\{A_i, \tau \le t < \zeta\} \in \mathcal{M}_t$ $(i=1,2)$, $\{A_1, \tau \le t < \zeta\} \subset \{A, \tau \le t < \zeta\} \subset \{A_2, \tau \le t < \zeta\}$ であるから $\{A, \tau \le t < \zeta\} \in \overline{\mathcal{M}}_t = \mathcal{M}_t$
故に $A \in \mathcal{M}_\tau$ となった． $\qquad$ q.e.d.

次に [2] から三つの *Lemma* をあげておく．

Lemma 1.7. ([2] 3.6.) $\overline{X} = (x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, P_a, \theta_t)$ とおくと，$(E, \mathcal{B})$ を状態空間とするマルコフ過程になる．13)

Lemma 1.8. ([2] 3.21.) M_6 が成り立つとする．
X が強マルコフ性をもてば，$\overline{X}$ も強マルコフ性をもつ．

Lemma 1.9. ([2] 3.22.) M_6 が成り立つとする．X が擬左連続ならば，$\overline{X}$ も擬左連続である．

これらの *Lemma* により，M_6 があれば M_7 は重要でない

---

13) $\mathcal{M}$ も $\overline{\mathcal{M}}_t$ と同様に拡張しておき，P_a をこの上に拡張しておく．

ということが分る。すなわち，もし M_7 がみたされていなければ，$\mathcal{M}_t$ を $\overline{\mathcal{M}}_t$ にまで拡張してやればよい。この時 Lemma 1.4 により，M_6 も保たれる。

次の事実も [2] 3.5 を見れば分る。

Lemma 1.10. Ω の部分集合 Ω° が次の二つの条件をみたすとする。

(1.26) $\qquad P_a(\Omega^\circ)=1 \qquad\qquad (a\in E)$，

(1.27) $\qquad \omega\in\Omega^\circ$，$\zeta(\omega)>t$ ならば，$\zeta(\omega')=\zeta(\omega)-t$，$x_u(\omega')=x_{t+u}(\omega)$ $(0\leq u<\zeta(\omega'))$ なる $\omega'\in\Omega^\circ$ が存在する。

この時，$\mathcal{M}^\circ$，$\mathcal{M}^\circ_t$，ζ°，x°_t，P°_x をそれぞれ $\mathcal{M}$，$\mathcal{M}_t$，ζ，x_t，P_x の Ω° への制限で定義すると，θ°_t が定義可能で，$(\Omega^\circ,\mathcal{M}^\circ)$ の上の $X^\circ=(x^\circ_t,\zeta^\circ,\mathcal{M}^\circ_t,P^\circ_x,\theta^\circ_t)$ はやはり，$(E,\mathcal{B})$ を状態空間とするマルコフ過程となる。

(1.27) は，θ°_t の定義可能とする条件である。このLemmaで X から X° をつくる際，明かに，M_1，M_2，M_3，M_7 は X から X° へ直伝する性質である。更に，X が M_7 をみたす時には，M_4，M_5，M_6 も X から X° へ直伝する性質である。

マルコフ過程 $\dot{X}=(\dot{x}_t,\dot{\zeta},\dot{\mathcal{M}}_t,\dot{P}_a,\dot{\theta}_t)$ が $X=(x_t,\zeta,\mathcal{M}_t,P_a,\theta_t)$ の標準 subprocess であるというのは，次の性質 (1.28)―(1.34) をもつことである：

(1.28) $\qquad \dot{\Omega}=\Omega\times I$ ただし $I=[0,+\infty]$，写像 $\gamma:\ \dot{\Omega}\to\Omega$ を $\gamma(\dot{\omega})=\gamma(\omega,\lambda)=\omega$ とおく。

(1.29) $\qquad \dot{\zeta}(\omega,\lambda)=\zeta(\omega)\wedge\lambda$，[14]

(1.30) $\qquad \dot{x}_t(\omega,\lambda)=x_t(\omega) \qquad \text{for} \quad 0\leq t<\dot{\zeta}(\omega,\lambda)$，

(1.31) $\qquad \dot{\mathcal{M}}_t=\{A\times(t,\infty]:\ A\in\mathcal{M}_t\}$

(1.32) $\qquad \dot{\mathcal{M}}$ は $\dot{\Omega}$ の上の Borel field で $(A,\zeta>t)\times(t,\infty]$ $(A\in\mathcal{M},\ t\geq 0)$ および $A\times I\ (A\in\mathcal{M})$ から生成されたもの，

---

14) $a\wedge b=\min(a,b)$.

(1.33) $\dot{P}_a(\gamma^{-1}A) = P_a(A) \qquad (a \in E,\ A \in \mathcal{M})$

(1.34) ある $\mathcal{R}_t$ 可測函数 $\alpha_t(\omega)$ が存在して

$$\dot{P}_x(\zeta > t \mid \gamma^{-1}\mathcal{M}) = \alpha_t(\gamma(\dot{\omega})) \qquad (\text{a.e. } \gamma^{-1}\Omega_t \cdot \dot{P}_x).$$

なお，$\dot{X}$ が (1.28)—(1.33) をみたし，更に，(1.34) で $\mathcal{R}_t$ 可測を $\mathcal{M}_t \cap \mathcal{N}^*$ 可測としたものをみたす時，X の広義の標準 subprocess であるということにする。

最後に，$\varphi_t(\omega)$ $(0 \leq t < \infty,\ \omega \in \Omega_t)$ が次の5つの条件をみたす時，X の非負連続 [又は右連続] additive functional と呼ぶ：

A_1. $\varphi_s(\omega) + \theta_s \varphi_t(\omega) = \varphi_{s+t}(\omega) \qquad (s, t \geq 0,\ \omega \in \Omega_{s+t})$

A_2. φ_t は $\mathcal{R}_t$ 可測，

A_3. $0 \leq \varphi_t(\omega) \leq \infty$，

A_4. $P_a(\varphi_0 = 0) = 1 \qquad (a \in E)$.

A_5. $\varphi_t(\omega)$ は t について連続 [右連続]．

$\varphi_t(\omega)$ が A_1, A_3, A_4, A_5 をみたし，A_2 のかわりに

A_2'. φ_t は $\mathcal{M}_t \cap \mathcal{N}^*$ 可測

をみたす時には，X の広義の非負連続 [又は右連続] additive functional と呼ぶことにする。

$\alpha_t(\omega)$ が X の非負連続 [又は右連続] additive functional $\varphi_t(\omega)$ によって $\alpha_t(\omega) = e^{-\varphi_t(\omega)}$ と表わされる時，X の1を越えない連続 [又は右連続] multiplicative functional と呼ぶ。$\varphi_t(\omega)$ が広義の非負連続 [右連続] additive functional の時，$\alpha_t(\omega)$ を広義の1を越えない連続 [右連続] multiplicative functional と呼ぶ。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

§2. Time change

M_1 — M_7 をみたす，状態空間 $(E, \mathcal{B})$ の上のマルコフ過程 $X = (x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, P_a, \theta_t)$ があったとし，更に X の非負連続 additive functional $\varphi_t(\omega)$ があったとする．X と $\varphi_t(\omega)$ とは今後，オ1章の終りまで固定しておく。$\varphi_t(\omega)$ を時間の測り方にすることによって，新しい process を作ろう。まず $\varphi_t(\omega)$ の逆函数を

(2.1) $\tau_t(\omega) = \sup\{s : \varphi_s(\omega) \leq t \text{ かつ } s < \zeta(\omega)\}$

によって定義する。定義から直ちに，

Lemma 2.1.

(2.2) $u < \zeta(\omega)$ ならば

$$\tau_t(\omega) < u \iff \varphi_u(\omega) > t.$$

(2.3) $\tau_t(\omega) < \zeta(\omega) \iff t < \varphi_{\zeta(\omega)-0}(\omega)$

(2.4) $\tau_t(\omega) < \zeta(\omega) \implies \varphi_{\tau_t(\omega)}(\omega) = t$

(2.5) $t < u,\ \tau_u(\omega) < \zeta(\omega) \implies \tau_t(\omega) < \tau_u(\omega)$.

(2.6) $\tau_t(\omega)$ は t について右連続.

更に，次の2つの性質がある。

Lemma 2.2. τ_t は $\mathcal{R}$ 可測なマルコフ時

証明 $u < v$ に対し

$\{\tau_t \leq u,\ v < \zeta\} = \bigcap_n \{\varphi_{u+\frac{1}{n}} > t,\ v < \zeta\} \in \overline{N}_v$

故に $\{\tau_t \leq u < \zeta\} \in \overline{N}_{u+0}$．ところが，仮定 M_6, M_7 により $\overline{N}_{u+0} \subset \mathcal{M}_u$ であるから τ_t はマルコフ時である。$\mathcal{R}$ 可測であることは $\{\tau_t \leq u\} = \{\tau_t \leq u < \zeta\} \cup \{\tau_t < \zeta \leq u\} \cup \{\tau_t = \zeta \leq u\}$,
$\{\tau_t = \zeta\} = \{t \geq \varphi_{\zeta-0}\} \in \mathcal{R}$ から明かである。

Lemma 2.3. $\{\tau_t < \zeta\}$ の上で

(2.7) $\tau_t(\omega) + \theta_{\tau_t}\tau_h(\omega) = \tau_{t+h}(\omega)$.

証明 任意の $0 \leq u < \infty$ に対し，

$\{\tau_t < \zeta,\ \tau_t + \theta_{\tau_t}\tau_h \leq u\} = \bigcup_{0 \leq s \leq u} \{\tau_t = s < \zeta,\ \theta_s \tau_h \leq u - s\} = *$

とおく．

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$\{\theta_s \tau_h \leq u-s\} = \theta_s\{\tau_h \leq u-s,\ \zeta > 0\}$

$= \theta_s(\{u-s \geq \zeta > 0\} \cup \varliminf_{n\to\infty}\{u-s+\frac{1}{n} < \zeta,\ \varphi_{u-s+\frac{1}{n}} > h\})$

$= \{u \geq \zeta > s\} \cup \varliminf_{n\to\infty}\{u+\frac{1}{n} < \zeta,\ \theta_s\varphi_{u-s+\frac{1}{n}} > h\}$

ここで 2 と $\theta_s\{\xi \in \Gamma\} = \{\theta_s \xi \in \Gamma\}$, $\theta_s \zeta = \zeta - s$ を用いた．故に $* = \bigcup_{0\leq s\leq u}(\{u \geq \zeta > s = \tau_t\} \cup \varliminf_{n\to\infty}\{\tau_t = s, u+\frac{1}{n} < \zeta, \theta_s\varphi_{u-s+\frac{1}{n}} > h\})$

A_1 と 4 を使うと，

$= \bigcup_{0\leq s\leq u}(\{u \geq \zeta > s = \tau_t\} \cup \varliminf_{n\to\infty}\{\tau_t = s, u+\frac{1}{n} < \zeta, \varphi_{u+\frac{1}{n}} > h+t\})$

$= \{\tau_t \leq u\}(\{u \geq \zeta > \tau_t\} \cup \varliminf_{n\to\infty}\{u+\frac{1}{n} < \zeta, \varphi_{u+\frac{1}{n}} > t+h\})$

$= \{\tau_t < \zeta,\ \tau_{t+h} \leq u\}$

故に (2.7) が証明された． q.e.d.

$\{\tau_0 > 0\} \in \mathcal{M}_0$ であるから，

(2.8) $\qquad P_a(\tau_0 > 0) = 0 \text{ or } 1$

である．

(2.9) $\qquad F = \{a : P_a(\tau_0 > 0) = 0\}$

で F を定義しよう．

<u>Lemma 2.4.</u> ([5]) F は nearly Borel で

(2.10) $\qquad P_a(0 \leq \forall t < \varphi_{\zeta-0},\ x_{\tau_t} \in F) = 1$

<u>証明</u>: $u_\alpha(x) = E_a(e^{-\alpha\tau_0})$ とおくと，これは α-excessive である．なぜなら，$e^{-\alpha t}E_a(u_\alpha(x_t)) = E_a(e^{-\alpha(t+\theta_t\tau_0)} : t < \zeta)$ しかも $t+\theta_t\tau_0 \downarrow \tau_0$ であるから．u_α によって $F = \{a : u_\alpha(a) = 1\}$ と表されるから，Hunt [3] の定理により F は nearly Borel である．$P_a(\tau_t < \zeta,\ x_{\tau_t} \notin F) = E_a(P_{x_{\tau_t}}(\tau_0 > 0))$ $= P_a(\tau_t < \zeta,\ \theta_{\tau_t}\tau_0 > 0)$，これは (2.7) により 0 であるから

$P_a(u_\alpha(x_{\tau_r}) = 1 \text{ for } \forall \text{ rational } r \in [0, \varphi_{\zeta-0})) = 1$

である．一方，Hunt [3] の定理により

$P_a(u^\alpha(x_t)$ が t について右連続$) = 1$

であるから，(2.10) が証明された． q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(2.11) $\Omega^\circ = \{\omega : x_{\tau_t(\omega)}(\omega) \in F,\ \forall t \in [0, \varphi_{\zeta(\omega)-0}(\omega))\}$

とおくと Lemma 1.10 の条件をみたす。((1.27) をいうには，φ_t が N^* 可測なることと，[2] 3.5 の θ_t, N^* の表現を使えばよい.) 従って，Ω° への X の制限 $X^\circ = (x^\circ_t, \zeta^\circ, \mathcal{M}^\circ_t, P^\circ_a, \theta^\circ_t)$ がまた $M_1 - M_7$ をみたすマルコフ過程となる。φ_t の Ω° への制限はやはり X° の非負連続 additive functional である。

次のように定義し，下の定理を説明しよう.

(2.12) $\tilde{\zeta}(\omega) = \varphi_{\zeta^\circ(\omega)-0}(\omega) \qquad (\omega \in \Omega^\circ)$,

(2.13) $\tilde{x}_t(\omega) = x^\circ_{\tau_t(\omega)}(\omega) \qquad (0 \leq t < \tilde{\zeta}(\omega),\ \omega \in \Omega^\circ)$,

(2.14) $\tilde{\mathcal{M}}_t = \mathcal{M}^\circ_{\tau_t},\quad \tilde{P}_a = P^\circ_a,\quad \tilde{\theta}_t = \theta^\circ_{\tau_t}$,

(2.15) $\tilde{\mathcal{B}}$ は $\overline{\mathcal{B}}$ の F への制限とする.

定理 2.1 $\tilde{X} = (\tilde{x}_t, \tilde{\zeta}, \tilde{\mathcal{M}}_t, \tilde{P}_a, \tilde{\theta}_t)$ は $(F, \tilde{\mathcal{B}})$ を状態空間とするマルコフ過程である。$\tilde{X}$ は M_2, M_3, M_4, M_6 をみたし，その resolvent 作用素を $\tilde{G}_\alpha$ とおくと

(2.16) $\tilde{G}_\alpha f(a) = E_a\left(\int_0^\zeta e^{-\alpha\varphi_t} f(x_t)\, d\varphi_t\right)$ [1]

である。

証明 では以下，便宜上，$\Omega^\circ, x^\circ_t, \zeta^\circ, \mathcal{M}^\circ_t, P^\circ_a, \theta^\circ_t$ 等を $\Omega, x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, P_a, \theta_t$ 等と記す。まず (1.9) に当るもの！

(2.17) $t \leq u$ かつ $A \in \tilde{\mathcal{M}}_t \Rightarrow A \cap \{\tilde{\zeta} > u\} \in \tilde{\mathcal{M}}_u$

を示そう.

$$\begin{aligned}
& A \in \tilde{\mathcal{M}}_t \Rightarrow \forall s,\ A \cap \{\tau_t \leq s < \zeta\} \in \mathcal{M}_s \\
& \Rightarrow \forall s,\ \{A, \tau_u < \zeta\} \cap \{\tau_u \leq s < \zeta\} = \{A, \tau_t \leq s < \zeta\} \cap \\
& \qquad \{\tau_u \leq s < \zeta\} \in \mathcal{M}_s \\
& \Rightarrow \{A, \tau_u < \zeta\} \in \mathcal{M}_{\tau_u}.
\end{aligned}$$

次に (1.10) に当るもの！

(2.18) $\{\tilde{x}_t \in \Gamma\} \in \tilde{\mathcal{M}}_t$

をいうには，$\forall u,\ \{x_{\tau_t} \in \Gamma,\ \tau_t \leq u < \zeta\} \in \mathcal{M}_u$ をいえばよいが，これは [1] Lemma 5.2 で分る。(1.11) に当るものは Lemma 2.4 によって分り，(1.12) に当るものは Lemma 1.3

---

1) 右辺の値も，f を F 上でだけ与えれば定まる。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

によって分る。(1.13) に当るものと M_2 は F の定義 (2.9) から直ちに分る。(1.14) は後にまわして、(1.15) に当るものは $\tilde{\theta}_t = \theta_{\tau_t}$ に注意すれば一般にマルコフ時に対して [1] §.10 でいえていることである。次に (1.16) に当るものをいうには、

$$\theta_s(x_{\tau_h}\in\Gamma) = \theta_s\left[\bigcup_t (x_t\in\Gamma,\ \tau_h = t)\right]$$
$$= \bigcup_t (x_{t+s}\in\Gamma,\ \theta_s\tau_h = t) = (x_{\theta_s\tau_h+s}\in\Gamma)$$

であるから、Lemma 2.3 を用いて、

$$\theta_{\tau_t}(x_{\tau_h}\in\Gamma) = \bigcup_s\left[\theta_s(x_{\tau_h}\in\Gamma),\ \tau_t = s\right]$$
$$= \bigcup_s (x_{\theta_s\tau_h+s}\in\Gamma,\ \tau_t = s) = (x_{\theta_{\tau_t}\tau_h+\tau_t}\in\Gamma)$$
$$= (x_{\tau_{t+h}}\in\Gamma)$$

M_3 は (2.6) から明らかであり、M_6 は Lemma 1.5 でいえる。

さて、あと残ったマルコフ性 (1.14) と強マルコフ性 M_4 の証明を同時に行おう。まず次のことを証明する。

<u>Lemma 2.5</u>

σ を $\Omega \to [0,\infty]$ の函数とし、A を、

(2.19) $\{A,\ \sigma \le t < \tilde{\zeta}\} \in \tilde{\mathcal{M}}_t \qquad (\forall t \geq 0)$

となる集合とする。この時

(2.20) $\{A,\ \tau_\sigma \le t < \zeta\} \in \mathcal{M}_t \qquad (\forall t \geq 0)$

が成り立つ。

<u>証明</u>:

$$\{A,\tau_\sigma \le t<\zeta\} = \lim_{n\to\infty}\{A,\tau_\sigma < t+\tfrac{1}{n} < \zeta\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\{A.\ \sigma < \varphi_{t+\frac{1}{n}},\ t+\tfrac{1}{n}<\zeta\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\bigcup_r\{A.\ \sigma\le r<\varphi_{t+\frac{1}{n}},\ t+\tfrac{1}{n}<\zeta\}$$

r は有理数を動く。

$$= \lim_{n\to\infty}\bigcup_r\{A.\ \sigma\le r<\tilde{\zeta},\ \tau_r<t+\tfrac{1}{n}<\zeta\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\bigcup_r\bigcup_m\left[A,\sigma\le r<\tilde{\zeta},\ \tau_r\le t+\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{m}<\zeta\}\cap\{t+\tfrac{1}{n}<\zeta\}\right].$$

(2.19) より $\{A,\sigma\le r<\tilde{\zeta},\ \tau_r\le t'<\zeta\}\in\mathcal{M}_{t'}$ であるから、上の変形により、任意の n_0 に対し、$\{A.\tau_\sigma\le t<\zeta,\ t+\frac{1}{n_0}<\zeta\}\in\mathcal{M}_{t+\frac{1}{n_0}}$ となる。故に M_6 により (2.20) がいえる。 q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

このLemmaの系として，

Lemma 2.6 σが$\widetilde{X}$に関しマルコフ時ならば，τ_σがXに関しマルコフ時で，$\widetilde{\mathcal{M}}_\sigma \subset \mathcal{M}_{\tau_\sigma}$である．

$\widetilde{X}$のマルコフ性，強マルコフ性の証明．Lemma 1.2により，強マルコフ性をいうには(1.22)に当るものをいえばよい．
($\widetilde{x}_t(\omega)$の可測性に関する條件は右連続性から直ちに分る．)
σを$\widetilde{X}$のマルコフ時としよう．まず，既に示した

(2.21) $$\theta_{\tau_t}(x_{\tau_h} \in \Gamma) = (x_{\tau_{t+h}} \in \Gamma)$$

により，

$$\theta_{\tau_\sigma}(x_{\tau_t} \in \Gamma) = \bigcup_s [\theta_s(x_{\tau_t} \in \Gamma), \tau_\sigma = s]$$
$$= \bigcup_{s,u} [\theta_s(x_{\tau_t} \in \Gamma), \tau_u = s, \sigma = u] = \bigcup_u [\theta_{\tau_u}(x_{\tau_t} \in \Gamma), \sigma = u]$$
$$= \bigcup_u [x_{\tau_{u+t}} \in \Gamma, \sigma = u] = (x_{\tau_{\sigma+t}} \in \Gamma)$$

となることに注意する．故にLemma 2.6を使うと，Xの強マルコフ性により

$$\widetilde{P}_a(\widetilde{x}_{\sigma+t} \in \Gamma \mid \widetilde{\mathcal{M}}_\sigma) = E_a[P_a(x_{\tau_{\sigma+t}} \in \Gamma \mid \mathcal{M}_{\tau_\sigma}) \mid \widetilde{\mathcal{M}}_\sigma]$$
$$= E_a[P_{x_{\tau_\sigma}}(x_{\tau_t} \in \Gamma) \mid \widetilde{\mathcal{M}}_\sigma] = \widetilde{P}_{\widetilde{x}_\sigma}(\widetilde{x}_t \in \Gamma)$$

故に，強マルコフ性がいえた。故にもちろんマルコフ性も持っている。

$\widetilde{X}$のresolventは次のLemmaにより

$$\widetilde{E}_a[\int_0^{\widetilde{\zeta}} e^{-\alpha t} f(\widetilde{x}_t)dt] = E_a[\int_0^{\varphi_{\zeta-0}} e^{-\alpha t} f(x_{\tau_t})\,dt]$$
$$= E_a[\int_0^{\zeta} e^{-\alpha \varphi_t} f(x_t)\,d\varphi_t]$$

となり，定理2.1の証明を終る。

Lemma 2.7 $\rho(t)$を連続非減少な$[0,t_0]$上の函数とし，$\rho(0)=0$，$\rho(t_0)=\rho_0$とする(t_0，ρ_0は∞でもよい)．

$$c(t) = \sup\{s;\ s < t_0,\ \rho(s) \le t\}$$
$$c_0 = \sup\{s;\ s < \infty,\ \rho(s) < \infty\}$$

とおくと，

(2.22) $$\int_{[0,c_0)} f(t, \rho(t))\,d\rho(t) = \int_{[0,\rho_0)} f(c(t), t)\,dt$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

が任意の可測函数 $f(t,s) \geqq 0$ に対して成立する。

証明 (2.22) を $f(t,s) = \chi_{[0,a)}(t)\,\chi_{[0,b]}(s)$ $(0 < a < c_0,\ 0 < b < \rho_0)$ の形の函数に対して証明すれば十分である。まず

$$t_1 = a \wedge \sup\{t;\ \rho(t) \leqq b\} = a \wedge c(b),$$
$$t_2 = b \wedge \sup\{t : c(t) < a\}$$

とおくと。

$$\int_{[0,c_0)} \chi_{[0,a)}(t)\,\chi_{[0,b]}(\rho(t))\,d\rho(t) = \rho(t_1)$$
$$\int_{[0,\rho_0)} \chi_{[0,a)}(c(t))\,\chi_{[0,b]}(t)\,dt = t_2$$

となることはすぐに分る。又、$0 \leqq t < t_0$ なる t に対しては、$\rho(t) \leqq s$ と $t \leqq c(s)$ とは同等である。従って $t_2 = b \wedge \sup\{t;\ t < \rho(a)\} = b \wedge \rho(a)$ である。もし $c(b) < a$ ならば、$b < \rho(a)$ で且つ $\rho(t_1) = \rho(c(b))$ $= t_2$。
又、$c(b) \geqq a$ ならば、$b \geqq \rho(a)$ で且つ $\rho(t_1) = \rho(a) = t_2$。これは (2.22) が成立していることを示している。$0 \leqq t < \rho_0$ ならば $\rho(c(t))$ となることを使った。 q.e.d.

§3. Time change した process の killing

前の§と同じ X と φ_t のほか、更に、X の非負右連続 additive functional $\psi_t(w)$ が与えられたとする。φ_t による time change をして前§で得た process $\tilde{X}$ に対し ψ_t による killing を施すために、まず ψ_t が $\tilde{X}$ からどう見えるかを考えよう。

定理3.1. $\tilde{\psi}_t(w) = \psi_{\tau_t(w)}(w)$ とおくと、$\tilde{\psi}_t$ は $\tilde{X}$ の広義の非負右連続 additive functional である。

証明 A_3, A_4, A_5 に当るものは明か。A_1 は

(3.1) $\psi_{\tau_s} + \theta_{\tau_s}\psi_{\tau_t} = \psi_{\tau_{s+t}}$ ($\Omega_{\tau_{s+t}}$ 上で)

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

をいえばよい。まず，$A \in N^*$ 上で定義され $[0,\infty]$ の値をとる任意の N^* 可測函数 τ に対し，

(3.2) $\qquad \Psi_t + \theta_t \Psi_\tau = \Psi_{t+\theta_t \tau} \qquad (\{t+\theta_t \tau < \zeta\}$ 上で)

をいおう。s, u, v 等を $[0,\infty]$ を動くとし，

$$\{\theta_t \Psi_\tau = s\} = \theta_t\{\Psi_\tau = s\} = \bigcup_u \theta_t\{\tau = u, \Psi_u = s\}$$
$$= \bigcup_u \{\theta_t \tau = u, \ \theta_t \Psi_u = s\}$$

故に

$$\{\Psi_t + \theta_t \Psi_\tau = v\} = \bigcup_s \{\theta_t \Psi_\tau = s, \ \Psi_t + s = v\}$$
$$= \bigcup_{s,u} \{\theta_t \Psi_u = s, \ \theta_t \tau = u, \ \Psi_t + s = v\}$$
$$= \bigcup_u \{\theta_t \tau = u, \ \Psi_t + \theta_t \Psi_u = v\} = \bigcup_u \{\theta_t \tau = u, \ \Psi_{t+u} = v\}$$
$$= \{\Psi_{t+\theta_t \tau} = v\}$$

であるから，(3.2)がいえた。これを使って，

$$\{\Psi_{\tau_s} + \theta_{\tau_s} \Psi_{\tau_t} = u\} = \bigcup_v \{\tau_s = v, \ \Psi_v + \theta_v \Psi_{\tau_t} = u\}$$
$$= \bigcup_v \{\tau_s = v, \ \Psi_{v+\theta_v \tau_t} = u\} = \{\Psi_{\tau_s + \theta_{\tau_s} \tau_t} = u\}$$
$$= \{\Psi_{\tau_{s+t}} = u\}$$

最後は Lemma 2.3 による。これで (3.1) がいえた。

次に A_2' を示そう。$\widetilde{\Psi}_t$ の $\widetilde{N}^*$ 可測性は明らかであるから，$\widetilde{\mathcal{M}}_t$ 可測性をいえばよい。それには Ψ_{τ_t} を $\{\tau_t \leq s < \zeta\}$ に制限したものが $\mathcal{M}_s$ 可測なることをいえばよい。ところがこれは $\Psi_u(\omega)$ $(u \in I_s, \ \omega \in \Omega_s)$ が $\mathcal{B}_s \times \mathcal{R}_s$ 可測であることと $\tau_t(\omega)$ $(\omega \in \{\tau_t \leq s < \zeta\})$ が $\mathcal{M}_s$ 可測であること (Lemma 2.2) から明かである。

q.e.d.

$\widetilde{\Psi}_t$ によって $\widetilde{X}$ に Killing を施こすことができる。それが次の定理である。

定理 3.2 $\quad \widetilde{X}$ の広義の 1 を越えない右連続 multiplicative functional $e^{-\widetilde{\Psi}_t}$ に対応する広義の標準 subprocess が存在する。これを $Y''' = (y_t''', \zeta''', \mathcal{M}_t''', P_a''', \theta_t''')$ とおく，Y''' は M_2, M_3, M_4, M_6 をみたし，その resolvent G_α''' は

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(3.3) $G_\alpha^{(\prime)} f(a) = E_a\left[\int_0^{\zeta} e^{-\alpha\varphi_t - \psi_t} f(x_t)\, d\varphi_t\right]$

である。

証明 $e^{-\widetilde{\Psi}_t}$ に対応する広義の標準 subprocess を構成するには，次の２つの事実に注意しさえすれば，普通の１を超えない右連続 multiplicative functional に対応する標準 subprocess の構成（[1]定理3.11）と同様にできる．

(3.4) $\widetilde{E}_a(e^{-\widetilde{\Psi}_t}\chi_\Gamma(\widetilde{x}_t))$ は a について $\widetilde{\mathcal{B}}$ 可測．

(3.5) $\widetilde{E}_a[e^{-\widetilde{\theta}_s\widetilde{\Psi}_t}\chi_\Gamma(\widetilde{x}_{s+t}) \mid \widetilde{\mathcal{M}}_s] = \widetilde{E}_{\widetilde{x}_s}[e^{-\widetilde{\Psi}_t}\chi_\Gamma(\widetilde{x}_t)]$．

ただし，$\Gamma \in \widetilde{\mathcal{B}}$ とする。ところが $\widetilde{E}_a(e^{-\widetilde{\Psi}_t}\chi_\Gamma(\widetilde{x}_t)) = E_a(e^{-\Psi_{\tau_t}}\chi_\Gamma(x_{\tau_t}))$ であるから，(3.4) は Lemma 1.3 からいえる．また (3.5) は $(\widetilde{x}_{s+t} \in \Gamma) = \widetilde{\theta}_s(\widetilde{x}_t \in \Gamma)$ により，X の強マルコフ性に帰着して証明される。

$Y^{(\prime)}$ に対し，M_2, M_3 は自明．M_4（強マルコフ性）を示すには [1] 定理5.8′の証明と同じことをすればよいが，定理5.8′は証明を省いてあるから，大筋を述べよう．まず，$Y^{(\prime)}$ の任意のマルコフ時 $\sigma^{(\prime)}$ に対し，次のような $\widetilde{X}$ のマルコフ時 $\widetilde{\sigma}$ が存在する：

(3.6) $\sigma^{(\prime)} = \widetilde{\sigma} \wedge \zeta^{(\prime)}$，

(3.7) 任意の $A^{(\prime)} \in \mathcal{M}^{(\prime)}_{\sigma^{(\prime)}}$ に対し $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\widetilde{\sigma}}$ が存在して

$$A^{(\prime)} = \widetilde{A} \cap \{\zeta^{(\prime)} > \widetilde{\sigma}\},$$

(3.8) $P_a^{(\prime)}(\zeta^{(\prime)} > \widetilde{\sigma} \mid \widetilde{\mathcal{M}}) = e^{-\widetilde{\Psi}_{\widetilde{\sigma}}}$．

これを使うと任意の $A^{(\prime)} \in \mathcal{M}^{(\prime)}_{\sigma^{(\prime)}}$ に対し

$$\begin{aligned}
P_a^{(\prime)}(y^{(\prime)}_{\sigma^{(\prime)}+t} \in \Gamma, A^{(\prime)}) &= P_a^{(\prime)}(y^{(\prime)}_{\sigma^{(\prime)}+t} \in \Gamma, \widetilde{A}, \zeta^{(\prime)} > \widetilde{\sigma}) \\
&= P_a^{(\prime)}(\widetilde{x}_{\widetilde{\sigma}+t} \in \Gamma, \widetilde{A}, \zeta^{(\prime)} > \widetilde{\sigma}+t) = \widetilde{E}_a(e^{-\widetilde{\Psi}_{\widetilde{\sigma}+t}};\, \widetilde{x}_{\widetilde{\sigma}+t} \in \Gamma, \widetilde{A}) \\
&= \widetilde{E}_a[e^{-\widetilde{\Psi}_{\widetilde{\sigma}}}\widetilde{E}_{\widetilde{x}_{\widetilde{\sigma}}}(e^{-\widetilde{\Psi}_t};\, \widetilde{x}_t \in \Gamma);\, \widetilde{A}] \\
&= E_a^{(\prime)}[E^{(\prime)}_{\widetilde{x}_{\widetilde{\sigma}}}(y^{(\prime)}_t \in \Gamma);\, \widetilde{A}, \zeta^{(\prime)} > \widetilde{\sigma}] \\
&= E_a^{(\prime)}[E^{(\prime)}_{y^{(\prime)}_{\sigma^{(\prime)}}}(y^{(\prime)}_t \in \Gamma);\, A].
\end{aligned}$$

Lemma 1.2 を考えれば，M_4 がいえたことになる。

次に M_6 を示そう．$A \in \mathcal{M}^{(\prime)}_{t+0}$ とする．

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$\mathcal{M}_t^{(')} = \{B \times (t,\infty]\ ;\ B \in \widetilde{\mathcal{M}}_t\}$ であるから，$\forall u > t$ に対し，
$\exists B_u \in \widetilde{\mathcal{M}}_u$ が存在して $(A, \zeta^{(')} > u) = B_u \times (u,\infty]$ である．
$t < u_1 < u_2$ なら $(A, \zeta^{(')} > u_1) \supset (A, \zeta^{(')} > u_2)$ であるから $B_{u_1} \supset B_{u_2}$
である．従って，$\bigcup_{u>t} B_u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{t+0} = \widetilde{\mathcal{M}}_t$．故に，

$$A = \bigcup_{u>t} (A, \zeta^{(')} > u) = \bigcup_{u>t} (B_u \times (u,\infty])$$

$$= \Big(\bigcup_{u>t} B_u\Big) \times (t,\infty] \in \mathcal{M}_t^{(')}$$

で，M_6 が示された．

$$G_\alpha^{(')} f(a) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_a^{(')}(f(y_t^{(')}))\,dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \widetilde{E}_a(e^{-\widetilde{\psi}_t} f(\widetilde{x}_t))\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_a(e^{-\psi_{\tau_t}} f(x_{\tau_t}))\,dt = E_a\Big(\int_0^{\varphi_{\zeta-0}} e^{-\alpha t - \psi_{\tau_t}} f(x_{\tau_t})\,dt\Big)$$

$$= E_x\Big(\int_0^{\zeta} e^{-\alpha\varphi_t - \psi_t} f(x_t)\,d\varphi_t\Big)$$

である．Lemma 2.7 を用いた． q.e.d.

§4. Killing した process の time change

Killing 即ち subprocess の構成については，Dynkin の本 [1] にくわしく述べられているから，ここではただ killing の際 M_1–M_7 が保存されるための十分条件を述べ，更に，killing した process の time change について考える．$X = (x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, P_a, \theta_t)$，$\varphi_t(w)$，$\psi_t(w)$ は §3 に与えられたものと同じとするが，更に，次のことを仮定する：

(4.1) $\psi_t(w)$ は $\mathcal{N}_t$ 可測．

$e^{-\psi_t}$ は 1 を越えない右連続 multiplicative functional であるから，それに対応する X の標準 subprocess $X^c = (x_t^c, \zeta^c, \mathcal{M}_t^c, P_a^c, \theta_t^c)$ が構成できる．$\dot{\mathcal{M}}_t = \overline{\mathcal{M}}_t^c$ とおき，$\dot{x}_t$，$\dot{\zeta}$，$\dot{P}_a$，$\dot{\theta}_t$ は x_t^c，ζ^c，P_a^c，θ_t^c と同じにとって $\dot{X} = (\dot{x}_t, \dot{\zeta}, \dot{\mathcal{M}}_t, \dot{P}_a, \dot{\theta}_t)$ とすると，次の定理が証明される。

<u>定理 4.1</u> $\dot{X}$ は X の subprocess で (E, B) を状態空間とし，M_1–M_7 をみたす．その resolvent $\dot{G}_\alpha$ は

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(4.2) $\dot{G}_\alpha f(a) = E_a(\int_0^\zeta e^{-\alpha t - \varphi_t} f(x_t)dt)$

である。

<u>証明</u>　まず，X^cがM_1―M_6をみたすことを証明する．M_2, M_3, M_4, M_6は定理3.2の証明の中で述べたのと同じく示される．M_1は仮定(4.1)によって満たされる．M_5(擬左連続性)を示そう．

τ_n^cをX^cのマルコフ時の列としよう．定理3.2の証明中で述べたような，τ_n^cに対応するXのマルコフ時をτ_nとし，

$\lim_{n\to\infty} \tau_n^c = \tau^c$，$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$ とおく。

$P_a^c(x_{\tau_n^c} \not\to x_{\tau^c},\ \tau_n^c \uparrow \tau^c \leq t < \zeta^c)$

$= P_a^c(x_{\tau_n} \not\to x_\tau,\ \tau_n \uparrow \tau \leq t < \zeta,\ t < \zeta^c)$

$= E_a(e^{-\varphi_t};\ x_{\tau_n} \not\to x_\tau,\ \tau_n \uparrow \tau \leq t < \zeta)$

これはXの擬左連続性によって0であるから，X^cの擬左連続性が示された。このようなX^cからつくった$\dot{X}$がM_1―M_7を満たすことはLemma 1.7―1.9から分る．(4.2)も作り方から明らかである。

q.e.d.

次に$\dot{N}^{**}$を，$\dot{\Omega}_0 = \{\dot{\zeta} > 0\}$の部分集合から成り，$\dot{\Omega}_0$に関し余集合をとること，任意濃度の和又は交わりをとることに関して閉じている族で，$\dot{N}^*$および$\{\gamma^{-1}A,\ \dot{\zeta} > 0\}$ $(A \in N^*)$から生成されたものとする。[1)]

<u>Lemma 4.1</u>

$\dot{N}^{**}$の上で定義されΩの部分集合の値をとる写像$\dot{\theta}_t^{**}$を適当に定義して，次のようにできる．

(4.3)　$\dot{\theta}_t^{**}$は$\dot{N}^*$の上では$\dot{\theta}_t$と一致する。

(4.4)　$\dot{\theta}_t^{**}(A \setminus B) = \dot{\theta}_t^{**} A \setminus \dot{\theta}_t^{**} B$,

$\dot{\theta}_t^{**}(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha \dot{\theta}_t^{**} A_\alpha$,

$\dot{\theta}_t^{**}(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha \dot{\theta}_t^{**} A_\alpha$.　　($\alpha$の濃度は任意)

(4.5)　$A \in N^*$ ならば $\dot{\theta}_t^{**}(\gamma^{-1}A,\ \dot{\zeta} > 0) = (\gamma^{-1}\theta_t A,\ \dot{\zeta} > t)$.

<u>証明</u>　[2] 3.5 の結果を用いればよい．詳細は述べないが，そこの

---

1) $\dot{\omega} = (\omega, \lambda)$ に対し $\gamma(\dot{\omega}) = \omega$

記号を用いれば, $\dot{\omega}=(\omega,\lambda)$ とする時, $f(\nu\omega,\lambda)$に対し
$\dot{\theta}_t^{**} f(\nu\omega,\lambda)=f(c_t\nu\omega,\lambda-t)$ とおけばよい。
以下, $\dot{\theta}_t^{**}$ も単に $\dot{\theta}_t$ と記す。
$\dot{\varphi}_t(\omega)$ を,

$$(4.6)\qquad \dot{\varphi}_t(\dot{\omega})=\varphi_t(\gamma\dot{\omega}),\qquad \omega\in\dot{\Omega}_t=\{\dot{\zeta}>t\}$$

によって定義する。

<u>定理 4.2.</u> $\dot{\varphi}_t$ は $\dot{X}$ の非負連続 *additive functional* である。
ただし A_2 の代りに
A_2^*. $\dot{\varphi}_t$ は $\overline{\dot{N}}_{t+0}\cap\dot{N}^{**}$ 可測
をみたす。

<u>証明</u> A_3, A_4, A_5 は自明である. $\dot{\varphi}_t$が $\dot{N}^{**}$ 可測なことは
$$(\dot{\varphi}_t(\dot{\omega})\leq s)=(\varphi_t(\gamma\dot{\omega})\leq s,\ t<\dot{\zeta}(\dot{\omega}))=\gamma^{-1}A\wedge(t<\dot{\zeta}),$$
$A\in N^*$ であるから $\dot{N}^{**}$の定義によって分る. Lemma 4.1 の証明から分るように, $\dot{\omega}=(\omega,\lambda)$, $f(\dot{\omega})=f_1(\omega)f_2(\lambda)$
ならば $\dot{\theta}_t f(\dot{\omega})=\theta_t f_1(\omega)\cdot f_2(\lambda-t)$ であることに注意しよう.
$\dot{\omega}=(\omega,\lambda)$, $\omega\in\Omega_t$に対し $\rho_t(\dot{\omega})=\varphi_t(\omega)\chi_{(t,\infty]}(\lambda)$ とおくと
$\dot{\Omega}_t$ では $\rho_t(\dot{\omega})=\dot{\varphi}_t(\dot{\omega})$ であるから, $\dot{\Omega}_{s+t}$ では $\dot{\theta}_s\rho_t(\dot{\omega})=\theta_s\dot{\varphi}_t(\dot{\omega})$ である。故に $\dot{\omega}\in\dot{\Omega}_{s+t}$ では
$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_s(\dot{\omega})+\dot{\theta}_s\dot{\varphi}_t(\dot{\omega})&=\rho_s(\dot{\omega})+\dot{\theta}_s\rho_t(\dot{\omega})\\&=\varphi_s(\omega)\chi_{(s,\infty]}(\lambda)+\theta_s\varphi_t(\omega)\chi_{(t,\infty]}(\lambda-s)\\&=\varphi_s(\omega)+\theta_s\varphi_t(\omega)=\varphi_{s+t}(\omega)=\dot{\varphi}_{s+t}(\dot{\omega}).\end{aligned}$$
で, A_1 がいえた。$\dot{\varphi}_t$の $\overline{\dot{N}}_{t+0}$可測性は, 次のことを順次に示せば
$$(\dot{\varphi}_t(\dot{\omega})\leq s)=\gamma^{-1}A\times(t,\infty],\quad \exists A\in\overline{N}_{t+0}$$
から分る。
$$\begin{aligned}A\in N_t\ &\Longrightarrow\ A\times(t,\infty]\in\dot{N}_t,\\ A\in\overline{N}_t\ &\Longrightarrow\ A\times(t,\infty]\in\overline{\dot{N}}_t,\\ A\in\overline{N}_{t+0}\ &\Longrightarrow\ A\times(t,\infty]\in\overline{\dot{N}}_{t+0}.\end{aligned}$$
q.e.d.

§2 と同じ方法で次の定理の前半が証明される.

$$(4.7)\qquad \dot{\tau}_t(\dot{\omega})=\sup\{s:\dot{\varphi}_s(\dot{\omega})\leq t,\ s<\dot{\zeta}(\dot{\omega})\}$$ (このような S

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

かない時には $\dot{\zeta}(\dot{\omega})$）とおくとき，$y^{(2)}_t(\dot{\omega}) = \dot{x}_{\dot{\tau}_t(\dot{\omega})}(\dot{\omega})$ である．

定理 4.3　$\dot{X}$ に対し $\dot{\varphi}_t$ による time change を施すことができ，得られたマルコフ過程 $Y^{(2)} = (y^{(2)}_t, \zeta^{(2)}, \mathcal{M}^{(2)}_t, P^{(2)}_a, \theta^{(2)}_t)$ は M_1, M_3, M_4, M_6 を満たす．$Y^{(2)}$ は $Y^{(1)}$ と同じ状態空間 $(F, \widetilde{\mathcal{B}})$ をもち，その resolvent $G^{(2)}_\alpha$ は

$$(4.8)\qquad G^{(2)}_\alpha f(a) = E_a\left(\int_0^{\zeta} e^{-\alpha\varphi_t-\psi_t} f(x_t)\,dt\right)$$

である。

系　$Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$ は互いに同値なマルコフ過程である，すなわち，time change と Killing とは順序交換可能である．

定理 4.3 の後半の証明のために，次のことを準備する．

Lemma 4.2

$$(4.9)\qquad \dot{\tau}_t(\dot{\omega}) = \tau_t(\gamma\dot{\omega}) \wedge \dot{\zeta}(\dot{\omega})$$

である．ただし τ_t は (2.1) で定義している．

証明　$\dot{\zeta}(\dot{\omega}) \leq \zeta(\gamma\dot{\omega})$ であるから，$\dot{\tau}_t(\dot{\omega}) = \sup\{s : \varphi_s(\gamma\dot{\omega}) \leq t,\ s < \dot{\zeta}(\dot{\omega})\} \leq \tau_t(\gamma\dot{\omega})$ である．故に，$\dot{\tau}_t(\dot{\omega}) = \dot{\zeta}(\dot{\omega})$ の時には (4.9) がいえる．次に，$\dot{\tau}_t(\dot{\omega}) < \dot{\zeta}(\dot{\omega})$ とすると，$s_0 < \dot{\zeta}(\dot{\omega})$ かつ $\dot{\varphi}_{s_0}(\dot{\omega}) = \varphi_{s_0}(\gamma\dot{\omega}) > t$ なる s_0 が存在するから，

$$\dot{\tau}_t(\dot{\omega}) = \sup\{s : s \leq s_0,\ \dot{\varphi}_s(\dot{\omega}) \leq t\}$$
$$= \sup\{s : s \leq s_0,\ \varphi_s(\gamma\dot{\omega}) \leq t\} = \tau_t(\gamma\dot{\omega})$$

となり，(4.9) がいえた。　　　q.e.d.

定理 4.3 の後半の証明．　上の Lemma により，

$$(\dot{\tau}_0(\dot{\omega}) > 0) = (\tau_0(\gamma\dot{\omega}) > 0,\ \dot{\zeta}(\dot{\omega}) > 0)$$

であるから，

$$\dot{P}_a(\dot{\tau}_0 > 0) = \dot{P}_a(\gamma^{-1}\{\tau_0 > 0\}) = P_a(\tau_0 > 0)$$

従って $Y^{(2)}$ の状態空間 $\{a : \dot{P}_a(\dot{\tau}_0 > 0) = 0\}$ は，$\dot{X}$, $Y^{(1)}$ の状態空間 F と一致する。$Y^{(2)}$ の resolvent は

$$G^{(2)}_\alpha f(a) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} E^{(2)}_a(f(y^{(2)}_t))\,dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \dot{E}_a(f(\dot{x}_{\dot{\tau}_t}))\,dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_a(f(x_{\tau_t}(\gamma\dot{\omega})) ; \tau_t < \zeta)\,dt$$

(3.8) と同様なことが成り立つことを使うと

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_a(e^{-\psi_{\tau_t}} f(x_{\tau_t}))\,dt = E_a\left(\int_0^{\zeta} e^{-\alpha\varphi_t-\psi_t} f(x_t)\,d\varphi_t\right)$$

[illegible]．(4.8) がいえた。　　　q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

第1章文献

[1] Dynkin, E. B., Foundations of the theory of Markov processes, Moscow, 1959 (ロシヤ語, 英訳あり)

[2]. Dynkin, E. B., Markov processes, Moscow, 1963 (ロシヤ語).

[3] Hunt, G. A., Markoff processes and potentials I, Ill. J. Math. I. (1957), 44.-93.

[4] Meyer, P.-A., Fonctionelles multiplicatives et additives de Markov, Ann. Inst. Fourier, 12 (1962), 125-230.

[5] Nagasawa, M., and K. Sato, Some theorems on time change and killing of Markov processes (Kōdai Math. Sem. Rep, 予定).

[6] Sato, K., Time change and killing for multi-dimensional reflecting diffusion, Proc, Japan Acad. 39 (1963), 69-73.

[7] Volkonskiĭ, V. A., Additive functionals of Markov processes, Trudy Mosk. Mat. Obš. 9 (1960), 143-189.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

第2章 マルコフ過程の time change と killing II.

Xの右連続な additive functional φ_t が σ- finite measure nによって

$$E_a[\int_0^{\zeta} e^{-\alpha t} d\varphi_t] = \int g_\alpha(a, b)\, n(db)$$

と定まるとき，Xをφ_tで time change して得た$\tilde{X}$，killing して得た$\dot{X}$の性質を研究する．特に次のようなことを調べる。

1. Resolvent 方程式の拡張．これは，time change と killing を施した process を調べる時基本になる．Kacの定理や，Hunt [3]，Meyer [7] の出したいくつかの等式がこれらの特別な場合になる。
2. $\tilde{X}$，$\dot{X}$，一般に time chang と killig を施した process の resolvent operator を，nと$g_\alpha(a, b)$を用いて表現すること。
3. $\tilde{X}$，$\dot{X}$の adjoint process を調べること。
4. nが，$\tilde{X}$または$\dot{X}$にとってどんな意味をもっているかということ．$g_\alpha(a, b)$がXのα- order の Green measure を invariant measure $m(db)$で割ったものである時には，nは必ず$\tilde{X}$の subinvariant measure になる．更に，多くの場合にnが$\tilde{X}$の invariant measure になる．adjoint process を用いれば invariant measure になる必要十分条件が分る．$\dot{X}$の方でこれに対応する性質は，nを初期分布にした時 terminal measure（死ぬ場所の分布）が同じくnになるということである。

§1. 定義

第1章につづいて記号その他は総て Dynkin の本 [1] を使う．この章全体を通じて，第1章で定義した M_1 ― M_7 を満足し$(E, \mathcal{B})$を state space とするマルコフ過程 $X = (x_t, \zeta, \mathcal{M}_t,$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

P_a, θ_t）が与えられたとする。更に，次の条件をM_8と名ずける。
（これを仮定する時はその都度ことわる。）

M_8 $\forall\omega\in\Omega$に対し，$x_t(\omega)$は t の函数として，$(0,\zeta)$で左極限をもつ。

いくつかの用語を定義しておく。

a) Aへの *first hitting time* を

$$\sigma_A(\omega)=\begin{cases}\inf\{t: 0\leq t<\zeta(\omega)\quad x_t(\omega)\in A\}\\ \inf\phi=\zeta(\omega)\end{cases}$$

b) $P_a[\zeta=\infty]=1$ $(\forall a\in E)$ のとき X は *conservative* という。

c) $P_a[\sigma_A<\zeta]=1$ $(\forall a\in E, \forall A: open)$ のとき X は *recurrent* という。

d) E上の σ-*finite measure* が

(1.1) $P_m[X_t\in A]\leq m(A)$ $(\forall A\in\mathcal{B}, \forall t\geq 0)$

を満たすとき，mはXの *sub-invariant measure* であるという。等号が成立つとき *invariant measure* であるという。

e) σ-*finite measure* nが：

(1.2) $E_m[\int_0^\zeta \chi_A(x_t)dt]=n(A)$ $(A\in\mathcal{B})$

を満すとき，(X, m)の *Green measure* と云う。

f) nが

(1.3) $P_m[\zeta<\infty, X_{\zeta-0}\in A]=n(A)$ $(A\in\mathcal{B})$

を満すとき，(X, m)の *terminal measure* であると云う。

g) $\varphi_t(\omega)$がXの非負連続 *additive functional* であるということは 第1章§1で定義したが，この章ではいつも

A_6. $\varphi_t(\omega)<\infty$ $(0\leq\forall_t<\infty, \forall\omega\in\Omega_t)$

を仮定する。また $\varphi_t(\omega)$が A_2--A_6をみたし，A_1の代りに，

A_1^α. $\varphi_s(\omega)+e^{-\alpha s}\theta_s\varphi_t(\omega)=\varphi_{s+t}(\omega)$ $(\omega\in\Omega_{s+t})$

をみたすとき，α-*order* の非負連続 *additive functional* と呼ぶ。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

h) 函数空間の記号

$B(E) = \{$有界 $\mathcal{B}$-可測函数$\}$.

$C(E) = \{$有界 連続函数$\}$

$B_0(E) = \{f \in B(E)$ 且つ compact support$\}$

$C_0(E) = C(E) \cap B_0(E)$

$B^+(E) = \{f \in B_0(E),\ f \geqq 0\}$

$C^+ = C \cap B^+,\ B_0^+ = B_0 \cap B^+,\ C_0^+ = C_0 \cap B^+$.

$\|f\| = \sup_{a \in E} |f(a)|$.

i) E, $\hat{E}$ はある集合の subset とし, X, $\hat{X}$ は state space E, $\hat{E}$ を持つとせよ.

(1.4) $$m(E \setminus \hat{E}) = m(\hat{E} \setminus E) = 0$$

(1.5) $$\int_{E \cap \hat{E}} E_a[f(x_t)]\, g(a)\, m(da) = \int_{E \cap \hat{E}} f(a)\, \hat{E}_a[g(\hat{x}_t)]\, m(da)$$

$$(\forall f \in B_0(E),\ \forall g \in B_0(\hat{E}),\ \forall t > 0)$$

が成立するとき, X と $\hat{X}$ は m に関し, 互に adjoint であると云う.

(1.5) は

(1.6) $$\int_{E \cap \hat{E}} G_\alpha^0 f(a)\, g(a)\, m(da) = \int_{E \cap \hat{E}} f(a)\, \hat{G}_\alpha^0\, g(a)\, m(da)$$

$$(\forall f \in B_0(E),\ \forall g \in B_0(\hat{E}),\ \forall \alpha > 0)$$

と同等である. [10]. ここで

(1.7) $$G_\alpha^0 f(a) = E_a\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha t} f(x_t)\, dt\right]$$

(1.8) $$\hat{G}_\alpha^0 f(a) = \hat{E}_a\left[\int_0^{\hat{\zeta}} e^{-\alpha t} g(\hat{x}_t)\, dt\right]$$

である.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

§2. Resolvent 方程式の一般化

φ_t, ψ_t をXの非負連続 additive functional とし, $\mathcal{B}$-可測函数 f に対し,

(2.1) $$U_\alpha^\lambda f(a) = E_a\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha\varphi_t-\lambda\psi_t} f(x_t)\,d\varphi_t\right]$$

(2.2) $$V_\alpha^\lambda f(a) = E_a\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha\psi_t-\lambda\varphi_t} f(x_t)\,d\psi_t\right]$$

$U_\alpha^\lambda f$, $V_\alpha^\lambda f$ は上式の右辺が定義可能な場合に右辺で定義されたものとする。$\alpha>0$, $\lambda\geqq 0$ なら, $f\in B(E)$ に対し $U_\alpha^\lambda f$, $V_\alpha^\lambda f$ は定義可能で有界である。

定理2.1

任意の $\alpha, \beta>0$, $\lambda, \mu\geqq 0$, $f\in B(S)$ に対し,

(2.3) $$U_\alpha^\lambda f - U_\beta^\mu f + (\alpha-\beta)U_\alpha^\lambda U_\beta^\mu f + (\lambda-\mu)V_\lambda^\alpha U_\beta^\mu f = 0$$

が成立する。

これは, resolvent 方程式の一般化である.

証明

(2.4) $$\tau_t(\omega) = \sup\{s;\ s<\zeta(\omega),\ \varphi_s(\omega)\leqq t\}$$

(2.5) $$\sigma_t(\omega) = \sup\{s;\ s<\zeta(\omega),\ \psi_s(\omega)\leqq t\}$$

とおくと共にマルコフ時である。第1章 Lemma 2.1 と強マルコフ性, Fubini の定理を用いて,

$$U_\alpha^\lambda U_\beta^\mu f(a) = E_a\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha\varphi_t-\lambda\psi_t} U_\beta^\mu f(x_t)\,d\varphi_t\right]$$

$$= E_a\left[\int_0^{\varphi_{\zeta-0}} e^{-\alpha t-\lambda\psi_{\tau_t}} U_\beta^\mu f(x_{\tau_t})\,dt\right]$$

$$= E_a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t-\lambda\psi_{\tau_t}} \chi_{\{t<\varphi_{\zeta-0}\}}\,dt\, E_{x_{\tau_t}}\left[\int_0^\zeta e^{-\beta\varphi_s-\mu\psi_s} f(x_s)\,d\varphi_s\right]\right]$$

$$= E_a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t-\lambda\psi_{\tau_t}} \chi_{\{\tau_t<\zeta\}}\,dt \int_0^{\zeta-\tau_t} e^{-\beta\theta_{\tau_t}\varphi_s-\mu\theta_{\tau_t}\psi_s} f(x_{\tau_t+s})\,d_s\theta_{\tau_t}\varphi_s\right]$$

$$= E_a\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha\varphi_t-\lambda\psi_t}\,d\varphi_t \int_0^{\zeta-t} e^{-\beta\theta_t\varphi_s-\mu\theta_t\psi_s} f(x_{t+s})\,d_s\theta_t\varphi_s\right]$$

$$= E_a\left[\int_0^\zeta e^{-\beta\varphi_s-\mu\psi_s} f(x_s)\,d\varphi_s \int_0^s e^{-(\alpha-\beta)\varphi_t-(\lambda-\mu)\psi_t}\,d\varphi_t\right]$$

$\lambda>0$ ならば 同様の計算で

$$V_\lambda^\alpha U_\beta^\mu f(a) = E_a\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha\varphi_t-\lambda\psi_t} U_\beta^\mu f(x_t)\,d\psi_t\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$= E_a[\int_0^s e^{-\beta\varphi_s-\mu\psi_s} f(x_s) \alpha\varphi_s \int_s^s e^{-(\alpha-\beta)\varphi_t-(\lambda-\mu)\psi_t} d\psi_t]$$

を得る，従って

$$(\alpha-\beta)U_\alpha^\lambda U_\beta^\mu f(a) + (\lambda-\mu) V_\lambda^\alpha U_\beta^\mu f(a)$$

$$= E_a[\int_0^s e^{-\beta\varphi_s-\mu\psi_s} f(x_s) d\varphi_s \int_0^s e^{-(\alpha-\beta)\varphi_t-(\lambda-\mu)\psi_t}\{(\alpha-\beta)d\varphi_t + (\lambda-\mu)d\psi_t\}]$$

$$= E_a[\int_0^s e^{-\beta\varphi_s-\mu\psi_s} f(x_s) d\varphi_s\{1-e^{-(\alpha-\beta)\varphi_s-(\lambda-\mu)\psi_s}\}]$$

$$= U_\beta^\mu f(a) - U_\alpha^\lambda f(a)$$

(2.3) が $\lambda>0$ に対して得られた．一般性を失うことなしに $f\geqq 0$ と仮定してよいから，$V_\lambda^\alpha U_\beta^\mu f \uparrow U_0^\alpha U_\beta^\mu f$, $(\lambda\downarrow 0)$

$U_\alpha^\lambda f - U_\beta^\mu f + (\alpha-\beta) U_\alpha^\lambda U_\beta^\mu f \to U_\alpha^0 f - U_\beta^\mu f + (\alpha-\beta) U_\alpha^0 U_\beta^\mu f$ $(\lambda\downarrow 0)$

従って，$\lambda=0$ の時も成立する。 q.e.d.

系

(2.6) $\quad U_\alpha^\lambda U_\beta^\lambda = U_\beta^\lambda U_\alpha^\lambda$

(2.7) $\quad V_\lambda^\alpha U_\alpha^\mu = V_\mu^\alpha U_\alpha^\lambda$

なる可換性がある．

定理 2.1. で $\alpha, \beta, \mu, \lambda$ に対する仮定を少しゆるめて次の定理を得る．

定理 2.2. ある $\alpha_0\geqq 0$ に対し，$U_0^{\alpha_0} 1(a)$ が有界であるとすると任意の $\alpha>0$ に対しても $U_0^\alpha f$ $(f\in B(E))$ は有界であって，(2.3) が任意の $f\in B(S)$ と，$\alpha, \beta, \lambda, \mu \geqq 0$ 且つ $\alpha+\lambda>0$，$\beta+\mu>0$，に対して成立する．

証明　定理 2.1. により $U_\beta^{\alpha_0} 1 - (\alpha-\alpha_0) V_\alpha^\beta U_\beta^{\alpha_0} 1$. $(\alpha\geqq 0, \beta>0)$. $U_0^{\alpha_0} 1$ は有界だから，$\beta\downarrow 0$ とすると

$$U_0^\alpha 1 = U_0^{\alpha_0} 1 - (\alpha-\alpha_0) V_\alpha^0 U_0^{\alpha_0} 1$$

この式の右辺は $\alpha>0$ に対し有界である．

次に $\alpha=0$, $\beta=0$ の場合に (2.3) を示すには，$\alpha>0$, $\beta>0$ としておいて，有界収束定理を使えばよい． q.e.d.

後の節での必要上，K_α^λ，G_α^λ なる operator を導入する。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(2.8) $K_\alpha^\lambda f(a) = E_a[\int_0^\zeta e^{-\alpha\varphi_t - \lambda t} f(x_t)\, d\varphi_t]$

(2.9) $G_\alpha^\lambda f(a) = E_a[\int_0^\zeta e^{-\alpha t - \lambda\varphi_t} f(x_t)\, dt]$

これらは U_α^λ, V_α^λ の特別な場合だから，定理 2.1 により

(2.10) $K_\alpha^\lambda - K_\beta^\mu + (\alpha-\beta)K_\alpha^\lambda K_\beta^\mu + (\lambda-\mu)G_\lambda^\alpha K_\beta^\mu = 0$

(2.11) $G_\alpha^\lambda - G_\beta^\mu + (\alpha-\beta)G_\alpha^\lambda G_\beta^\mu + (\lambda-\mu)K_\lambda^\alpha G_\beta^\mu = 0$

が成立する，$\lambda=\mu$ の時には K_α^λ, G_α^λ の resolvent 方程式となる。

§3. Subinvariant measure, terminal measure.

非負連続 additive functional φ_t による time change と killing については，既に，オ1章で述べた．$\tilde{X}=(\tilde{x}_t, \tilde{\zeta}, \tilde{\mathcal{M}}_t, \tilde{P}_a, \tilde{\theta}_t)$ を，X を φ_t で time change した process とする．その state space は $(F, \bar{B})$，resolvent operator は K_α^0 である（オ1章定理 2.1）．(2.4) で定義した τ_t によって

(3.1) $F = \{a : P_a[\tau_0 > 0] = 0\}$

と表わされる．$\dot{X}=(\dot{x}_t, \dot{\zeta}, \dot{\mathcal{M}}_t, \dot{P}_a, \theta_t)$ を，X を φ_t で killing した process（X の $e^{-\varphi_t}$ による subprocess）とする．その state space は $(E, \bar{B})$，resolvent operator は G_α^1 である．（オ1章定理 4.1 参照．そこでは additive functional の $\mathcal{N}_t$ 可測を仮定しているが，この仮定がない今の場合でも，M_2 ― M_7 は保たれる．）

<u>Lemma 3.1.</u> σ-finite measure m が X の invariant measure である為の必要十分条件は，ある $\alpha_0>0$ が存在して

(3.2) $\alpha_0 \int_E G_{\alpha_0}^0 f(a)\, m(da) = \int_E f(a)\, m(da) \qquad (f \in C_0^+(E))$

が成立することである。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

証明　必要であることは明らか．十分であることを示す．

$\forall\alpha \geq \alpha_0$ に対して (3.2) が成立することは，resolvent equation

(3.3) $$G^0_{\alpha_0} f - G^0_\alpha f + (\alpha_0-\alpha) G^0_{\alpha_0} G^0_\alpha f = 0$$

からわかる．

$$\int_E G^0_\alpha f(a) m(da) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \int_E T_t f(a) m(da)$$

$$\frac{1}{\alpha} \int_E f(a) m(da) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \int_E f(a) m(da)$$

Laplace 変換の性質から Lebesgue 測度 0 の集合 S が存在して，$\forall t \notin S$ に対し

(3.4) $$\int_E T_t f(a) m(da) = \int_E f(a) m(da).$$

第二可算公理を使って，S は $\forall f \in B_0(E)$ に共通に取れる．

$t \in S$ とせよ．$t_0 \notin S$ をとって，$t_0 + t \notin S$ となるようにできる．

$$\int_E T_t f(a) m(da) = \int_E T_{t_0} T_t f(a) m(da) = \int T_{t_0+t} f(a) m(da) = \int_E f(a) m(da).$$

i.e. (3.4) が $\forall t \geq 0$ で成立した．　　q.e.d.

Lemma 3.2.　σ-finite measure m が X の subinvariant measure である為の必要十分条件は

(3.5) $$\alpha \int_E G^0_\alpha f(a) m(da) \leqq \int_E f(a) m(da) \qquad (\forall\alpha > 0,\ f \in C^+_0(E))$$

が成立することである．*

証明　必要性は明らかである，十分性を示す．まず

(3.6) $$\alpha e^{-\beta t} \int_E T_t G^0_{\alpha+\beta} f(a) m(da) \leqq \alpha \int_E G^0_{\alpha+\beta} f(a) m(da) \qquad (\alpha, \beta > 0,\ f \in C^+_0(E))$$

が成立することを示す，測度 m_0 を

$$\int_E h(a) m_0(da) = \int_E (h(a) - \alpha G^0_{\alpha+\beta} h(a)) m(da) \qquad (\forall h \in C_0(E))$$

で定義すると，

$$\int_E G^0_{\alpha+\beta} g(a) m(da) = \int_E G^0_\beta g(a) m_0(da) \qquad (g \in B^+(E))$$

であるから

$$\alpha e^{-\beta t} \int T_t G^0_{\alpha+\beta} f(a) m(da) = \alpha e^{-\beta t} \int G^0_{\alpha+\beta} T_t f(a) m(da)$$

$$= \alpha e^{-\beta t} \int G^0_\beta T_t f(a) m_0(da) \leqq \alpha \int G^0_\beta f(a) m_0(da) = \alpha \int G^0_{\alpha+\beta} f(a) m(da)$$

となって，(3.6) が得られる。

* [追記] Semi. on Prob. Vol.14 (国田．野本) P.48 に同じ結果がある．

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

となって (3.6) が得られる。

(3.6) で $\alpha\to\infty$ とすると，左辺は

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha e^{-\beta t}\int_E T_t G^0_{\alpha+\beta} f(a)m(da) = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha e^{-\beta t} E_m[G^0_{\alpha+\beta} f(x_t)]$$

$$\geqq e^{-\beta t} E_m[f(x_t)]$$

右辺は，(3.5) により

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha\int_E G^0_{\alpha+\beta} f(a)m(da) \leqq \int_E f(a)m(da)$$

従って，

$$\int_E T_t f(a)m(da) \leqq \int_E f(a)m(da) \qquad (\forall t>0)$$

q.e.d.

$\dot{X}$ の terminal measure が K^0_1 で表わされることを次に示す。

定理 3.1. X は conservative で M_g を満すとせよ。

$$(3.7) \qquad \dot{E}_a[f(\dot{x}_{\dot{\zeta}-0});\ \dot{\zeta}<\infty] = K^0_1 f(a) \qquad (a\in E,\ f\in B(E))$$

が成立する。

証明 $f\in C(E)$ として一般性を失わない。

$$K^0_1 f(a) = E_a\left[\int_0^\infty f(x_t)\,d(-e^{-\varphi_t})\right] = E_a\left[\int_0^\infty f(x_{t-0})\,d(-e^{-\varphi_t})\right]$$

$$= E_a\left[\lim_{h\downarrow 0}\sum_{i=0}^\infty f(x_{ih})(e^{-\varphi_{ih}} - e^{-\varphi_{(i+1)h}})\right]$$

$$= \lim_{h\downarrow 0}\sum_{i=0}^\infty \dot{E}_a[f(\dot{x}_{ih});\ ih<\dot{\zeta}\leqq(i+1)h]$$

$$= \dot{E}_a[f(\dot{x}_{\dot{\zeta}-0});\ 0<\dot{\zeta}<\infty] = \dot{E}_a[f(\dot{x}_{\dot{\zeta}-0});\ \dot{\zeta}<\infty]$$

上の変形で x_t を x_{t-0} にかえた所は $x_t(\omega)$ の不連続点が高々可附番であることを用いた。 q.e.d.

定理 3.1 は $\dot{X}$ の terminal measure は $\tilde{X}$ の Green measure に等しいことを示している。このことを使って，次の定理を得る。

定理 3.2. X は conservative で M_g を満すとせよ。σ-finite measure n に対し，次の命題は同等である。

(i) n は $(\dot{X}, n)$ の terminal measure である。

(ii) n は F 上の measure で，$\tilde{X}$ の invariant measure である。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

証明　n が (i) を満すとせよ. 定理3.1 により

(3.8) $$\int_E K_1^0 f(a)\, n(da) = \int_E f(a)\, n(da) \qquad (\forall f \in B_0(E)).$$

$n(E\setminus F)=0$ である。何故なら, $P_a[X_{\tau_t}\in F]=1$. であるから

$$\int_F f(a)n(da) = \int_E K_1^0(\chi_F f)(a)\, n(da) = E_n\Big[\int_0^\infty e^{-\varphi_t}\chi_F f(x_t)\, d\varphi_t\Big]$$

$$= E_n\Big[\int_0^{\tilde\zeta} e^{-t}\chi_F f(x_{\tau_t})dt\Big] = E_n\Big[\int_0^{\tilde\zeta} e^{-t} f(x_{\tau_t})dt\Big]$$

$$= \int_E K_1^0 f(a)\, n(da) = \int_E f(a)\, n(da). \qquad (\tilde\zeta = \varphi_{\zeta-0})$$

従って (3.8) は積分を F 上としてよく, Lemma 3.1 により, n が $\tilde X$ の invariant measure であることが分る.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) はほとんど明らかである.　　q.e.d.

§4. $G_\alpha^{\wedge}$, $K_\alpha^{\wedge}$ の表現

この節では, φ_t が measure n の potential に対応している場合, kernel を適当に作って, $G_\alpha^{\wedge}$, $K_\alpha^{\wedge}$ を, n での積分で表現する。

A.4.1. 1) σ-finite measure m と $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$-可測函数 $g_{\alpha_0}(a,b)\geq 0$ が存在して,

(4.1) $$G_{\alpha_0}^0 f(a) = \int_E g_{\alpha_0}(a,b)\, f(b)\, m(db). \qquad (\forall f \in B_0(E))$$

ここで α_0 は固定した non-negative な数で, (4.1) の両辺は有限とする.

2) $g_{\alpha_0}(a,b)$ は a の函数として; α_0-excessive 且つ $E\setminus b$ で α_0-harmonic である。[1)]

更に, X の非負連続 additive functional φ_t が一つ与えられたとし

---

1) $b\in U$ なる任意の開集合 U に対し, $E_a[e^{-\alpha\sigma_U} f(x_{\sigma_U})] = f(a)$ が成立する時, f は $E\setminus b$ で α-harmonic であるという.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

A.4.2. σ-finite measure n が存在して,

(4.2) $$E_a\left[\int_0^{\zeta} e^{-\alpha_0 t}\, d\varphi_t\right] = \int_E g_{\alpha_0}(a,b)\, n(db) < \infty \quad (\forall a \in E).$$
(≠)

この節では A.4.1. A.4.2 を仮定する.

定理4.1. 任意の $f \in B(E)$ に対し. $K_0^{\alpha_0} f$ は有限で,

(4.3) $$K_0^{\alpha_0} f(a) = \int_E g_{\alpha_0}(a,b) f(b)\, n(db) \qquad (a \in E).$$

これと似た定理は adjoint process の存在を仮定した上で, Meyerが[17]で証明を与えている。まず定理の基本になる lemma を証明する.([4]).

Lemma 4.1. n が開集合 U の外に mass を持たないならば

(4.4) $$P_a\left[\varphi_t = 0,\ \forall t \in [0, \sigma_U)\right] = 1 \qquad (a \in E)$$

証明

(4.5) $$\rho(a) = E_a\left[\int_0^{\zeta} e^{-\alpha_0 t}\, d\varphi_t\right] \quad \text{とおく}.$$

強マルコフ性と (4.2) を用いて.

$$E_a\left[\int_0^{\sigma_U} e^{-\alpha_0 t}\, d\varphi_t\right] = \rho(a) - E_a\left[e^{-\alpha_0 \sigma_U} \rho(x_{\sigma_U})\right]$$
$$= \int_E \left\{ g_{\alpha_0}(a,b) - E_a\left[e^{-\alpha_0 \sigma_U} g_{\alpha_0}(x_{\sigma_U}, b)\right]\right\} n(db) = 0$$

何故なら積分は U 上としてよく, A.4.1. 2) により $\forall b \in U$ に対し, 被積分函数は 0 である. q.e.d.

Lemma 4.2. 任意の $f \in B^+(E)$ に対し, 非負連続 additive functional φ_t^f が存在して,

(4.6) $$E_a\left[\int_0^{\zeta} e^{-\alpha_0 t}\, d\varphi_t^f\right] = \int_E g_{\alpha_0}(a,b) f(b)\, n(db)$$

が成立する。φ_t^f は P_a-measure 0 を除いて一意的である。

Lemma の証明にとって次の proposition が基本的である。

Proposition u を non-negative の有限値函数とする. 連続な α-additive functional φ_t^α が存在して

$$u(a) = E_a\left[\varphi_{\zeta-0}^\alpha\right]$$

と表わされるための必要十分条件は, i) u は α-excessive ii) 任意の Markov time の列 $\sigma_n \uparrow \sigma$ に対し,

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$\lim_{n\to\infty} E_a[e^{-\alpha\sigma_n} u(X_{\sigma_n})] = E_a[e^{-\alpha\sigma} u(X_\sigma)].$$

が成立することである。このとき，φ_t^α は P_a－測度０を除いて一意的である。証明は 例えば［９］を見よ。ii)の性質を regular であると云う。

Lemma 4.2. の証明　A.4.2. により $\int_E g_{\alpha_0}(a,b)\,n(db)$ は regular である。従って n-a.e. $b\in E$ に対して（左辺が単調減少極限であることに注意），

$$\lim_{n\to\infty} E_a[e^{-\alpha_0\sigma_n} g_{\alpha_0}(X_{\sigma_n}, b)] = E_a[e^{-\alpha_0\sigma} g_{\alpha_0}(X_\sigma, b)]$$

であることを使えば，

$$\lim_{n\to\infty} E_a[e^{-\alpha_0\sigma_n}\int n(db) f(b)\, g_{\alpha_0}(X_{\sigma_n}, b)]$$
$$= E_a[e^{-\alpha_0\sigma}\int n(db) f(b)\, g_{\alpha_0}(X_\sigma, b)]$$

故に $\varphi_t^{\alpha_0}$ が存在して，

$$E_a[\varphi_{\varsigma-0}^{\alpha_0}] = \int g_{\alpha_0}(a,b) f(b)\,\mu(db)$$

である。$\varphi_t^f = \int_0^{t\wedge\varsigma} e^{-\alpha_0 t}\, d\varphi_t^{\alpha_0}$ とおけばよい。　　q.e.d.

定理4.1. の証明　開集合 V をとる。$f=\chi_V$ のとき φ_t^f を φ_t^V と書くことにする。$a\notin V$ に対して，$V\subset U_n$, $P_a[\sigma_{\bar U_n}\uparrow\sigma_V]=1$ となる開集合の列が存在する。$\int g_{\alpha_0}(a,b)\chi_V(b)\,n(db)$ に Lemma 4.1. を適用して，

$$P_a[\varphi_t^V=0,\ \forall t\in[0,\sigma_{U_n}),\ \forall n]=1. \quad (\forall a\in E)$$

従って

(4.7)　$P_a[\varphi_t^V=0,\ \forall t\in[0,\sigma_V)]=1.$ 　$(\forall a\notin V.)$

である。次に

(4.8)　$P_a[\varphi_t^V=\int_0^t \chi_V(X_s)\,d\varphi_s^V,\ \forall t\in[0,\varsigma)]=1.$ 　$(\forall a\in E)$

となることを示す。

$U=\{a\,;\,\rho(a,V)>\varepsilon\}$ とおく。ここで ρ は E の topology と同等な metric とする。

$\tau_1=\sigma_U$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$\tau_{2n}=\begin{cases}\tau_{2n-1}+\theta_{\tau_{2n-1}}\sigma_V & (\tau_{2n-1}<\zeta)\\ \zeta & (\tau_{2n-1}\geqq\zeta)\end{cases}$$

$$\tau_{2n+1}=\begin{cases}\tau_{2n}+\theta_{2n}\sigma_U & (\tau_{2n}<\zeta)\\ \zeta & (\tau_{2n}\geqq\zeta)\end{cases}$$

として，Markov time の列 $\{\tau_n\}$ を定義する．M_5 により $\lim_{n\to\infty}\tau_n=\zeta$ (P_a-a.e) である．従って，

$$E_a[\int_0^\zeta \chi_U(x_s)d\varphi_s^V]=E_a[\sum_{n=1}^\infty\int_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}}\chi_U(x_s)d\varphi_s^V]$$

$$\leq\sum_{n=1}^\infty E_a[\varphi^V_{\tau_{2n}-0}-\varphi^V_{\tau_{2n-1}}\ ;\ \tau_{2n-1}<\zeta]$$

$$=\sum_{n=1}^\infty E_a[E_{x_{\tau_{2n-1}}}[\varphi^V_{\sigma_V-0}]]=0.$$

最後で $x_{\tau_{2n-1}}\in\overline{U}$ と，(4.7) を使った。

$\varepsilon\downarrow0$ として，

$$E_a[\int_0^\zeta\chi_{E\setminus V}(x_s)d\varphi_s^V]=0,$$

従って $t'=t\wedge\zeta$ として，

(4.9) $$E_a[\varphi^V_{t'-0}]=E_a[\int_0^{t'}\chi_V(x_s)d\varphi_s^V].$$

(4.9) の両辺は

$$e^{+\alpha_0t}E_a[\int_0^{t'}e^{-\alpha_0s}d\varphi_s^V]\leqq e^{\alpha_0t}\int_V g_{\alpha_0}(a,b)\,n(db)<\infty$$

を越えないから有限である．(4.9) から (4.8) が出る．最後に

(4.10) $$E_a[\int_0^\zeta e^{-\alpha_0t}\chi_V(x_t)d\varphi_t]=\int_V g_{\alpha_0}(a,b)\,n(db)$$

を示そう．これから (4.3) を得るには例えば Dynkin [1] の Lemma 1.2. を適用すればよい．V の外に開集合 V_1 をとる．

$$\int_0^{t'}e^{-\alpha_0s}d\varphi_s^V=\int_0^{t'}e^{-\alpha_0s}\chi_V(x_s)d\varphi_s^V\leqq\int_0^{t'}e^{-\alpha_0s}\chi_V(x_s)d\varphi_s$$

であることに注意しよう．同様の式は V_1 に対しても成立つ．

従って

$$0\leqq E_a[\int_0^\zeta e^{-\alpha_0s}\chi_V(x_s)d\varphi_s-\int_0^\zeta e^{-\alpha_0s}d\varphi_s^V]$$

$$\leqq E_a[\int_0^\zeta e^{-\alpha_0s}d\varphi_s-\int_0^\zeta e^{-\alpha_0s}d\varphi_s^V-\int_0^\zeta e^{-\alpha_0s}d\varphi_s^{V_1}]$$

$$=\int_E g_{\alpha_0}(a,b)(1-\chi_V(b)-\chi_{V_1}(b))\,n(db)$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

ここで $V_i \uparrow E\setminus V$ として，

$$E_a[\int_0^\zeta e^{-\alpha_0 s}\chi_V(X_s)\,d\varphi_s] = E_a[\int_0^\zeta e^{-\alpha_0 s}\,d\varphi_s^V] = \int_V g_{\alpha_0}(a,b)\,n(db)$$

を得る。 q.e.d.

G_α^λ, K_α^λ の表現に適当な kernel として，

(4.11) $$g_{\alpha_0}^\lambda(a,b) = g_{\alpha_0}(a,b) - \lambda E_a[\int_0^\zeta e^{-\alpha_0 t-\lambda\varphi_t}\, g_{\alpha_0}(X_t,b)\,d\varphi_t]$$

とおく。（右辺が well-defined のとき）。

定理4.2. $a\in E$ と $\lambda\geq 0$ を固定すると，$(m+n)$-a.e. $b\in E$ に対し，$g_{\alpha_0}^\lambda(a,b)$ は well-defined であって，非負有限かつ $g_{\alpha_0}^\lambda(a,b) \leqq g_{\alpha_0}(a,b)$ であり，

(4.12) $$G_{\alpha_0}^\lambda f(a) = \int_E g_{\alpha_0}^\lambda(a,b) f(b)\, m(db) \qquad (f\in B_0(E)),$$

(4.13) $$K_\lambda^{\alpha_0} f(a) = \int_E g_{\alpha_0}^\lambda(a,b) f(b)\, m(db) \qquad (f\in B(E)).$$

である。

証明 一般性を失わずに $f\in B_0^+(E)$ としてよい。積分順序を交して，

$$\int_E E_a[\int_0^\zeta e^{-\alpha_0 t-\lambda\varphi_t}\, g_{\alpha_0}(X_t,b)\,d\varphi_t]\, f(b)\, m(db)$$
$$= E_a[\int_0^\zeta e^{-\alpha_0 t-\lambda\varphi_t}\, G_{\alpha_0}^0 f(X_t)\,d\varphi_t] = K_\lambda^{\alpha_0} G_{\alpha_0}^0 f(a).$$

一方 (2.11) から，

(4.14) $$G_{\alpha_0}^\lambda f - G_{\alpha_0}^0 f + \lambda K_\lambda^{\alpha_0} G_{\alpha_0}^0 f = 0 \qquad (\alpha_0 \geqq 0)$$

これから，各項は有限であることと，(4.12) が成立すること及び $g_{\alpha_0}^\lambda(a,b)$ が m-a.e. で well-defined，非負且つ $g_{\alpha_0}^\lambda(a,b) \leqq g_{\alpha_0}(a,b)$ であることがわかる。(4.13) と n-a.e. についてのことも定理4.1 と (2.10) を用いて同様に示される。

q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

§5. 測度nの性質 I

この節では、測度nは、$\hat{X}$, $\dot{X}$にとって、どんな性質を持った測度であるかを調べる。前節に引きつづき、A.4.1.とA.4.2.を仮定する外に更に

<u>A.5.1.</u> $\alpha_0>0$, 且つ $\forall b\in E$に対し、

$$\alpha_0\int_E m(da)\, g_{\alpha_0}(a,b)=1. \tag{5.1}$$

を仮定する。従って、Lemma 3.1により m はXの invariant measure であり、

$$\alpha\int_E G^0_\alpha f(a)\, m(da)=\int_E f(a)\, m(da) \qquad (\forall\alpha>0,\ f\in B_0(E)) \tag{5.2}$$

が成立する。

<u>Lemma 5.1.</u> nはF上に集中している。i.e. $n(E\setminus F)=0$

Fは(3.1)で定義した。

<u>証明</u> 定理4.1により

$$\int_{E\setminus F} g_{\alpha_0}(a,b)\, n(db)=E_a\Big[\int_0^\zeta e^{-\alpha_0 t}\chi_{E\setminus F}(x_t)\, d\varphi_t\Big]$$

$$=E_a\Big[\int_0^{\varphi_{\zeta-0}} e^{-\alpha_0\tau_t}\chi_{E\setminus F}(x_{\tau_t})\, dt\Big]=0$$

最後で$P_a[x_{\tau_t}\in F]=1$であることを用いた。$m(da)$で積分して(5.1)を使えば $n(E\setminus F)=0$ が出る。

<u>定理5.1.</u> $\forall\alpha>0$, $f\in B_0(E)$ に対し

$$\alpha\int_E K^\alpha_0 f(a)\, m(da)=\int_F f(a)\, n(da). \tag{5.3}$$

<u>証明</u> $f\in B_0^+(E)$に対して示せばよい。まず(2.10)から

$$K^\alpha_\beta f-K^{\alpha_0}_\beta f+(\alpha-\alpha_0)G^\beta_\alpha K^{\alpha_0}_\beta f=0 \tag{5.4}$$

m を積分して $\beta\downarrow 0$ とすると、第2項は

$$\lim_{\beta\downarrow 0}\int_E K^{\alpha_0}_\beta f(a)\, m(da)=\int_E K^{\alpha_0}_0 f(a)\, m(da)$$

$$=\frac{1}{\alpha_0}\iint_E m(da)\, g_{\alpha_0}(a,b)\, f(b)\, n(db)=\frac{1}{\alpha_0}\int_F f(b)\, n(db)$$

定理4.1, A.5.1, Lemma 5.1を使った。同様にして、第3項

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

は

$$\lim_{\beta\downarrow 0}(\alpha-\alpha_0)\int_E G_\alpha^\beta K_\beta^{\alpha_0} f(a)\,m(da) = \frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_0\alpha}\int_F f(a)\,n(da).$$

第1項は勿論

$$\lim_{\beta\downarrow 0}\int_E K_\beta^\alpha f(a)\,m(da) = \int_E K_0^\alpha f(a)\,m(da).$$

これらを合わせて (5.3) を得る。 q.e.d.

<u>定理 5.2.</u> $\forall\alpha,\beta>0$. $f\in B_0^+(E)$ に対し、

(5.5) $$\alpha\int_F K_\alpha^0 f(a)\,n(da) \leqq \int_F f(a)\,n(da),$$

(5.6) $$\alpha\int_F G_0^\alpha f(a)\,n(da) \leqq \int_E f(a)\,m(da),$$

(5.7) $$\beta\int_E G_\beta^\alpha f(a)\,m(da) \leqq \int_E f(a)\,m(da).$$

が成立つ。(5.5)、(5.7) は n, m が $\tilde{X}$, $\dot{X}$ の *subinvariant measure* であることを示している。

<u>証明</u> $K_0^\beta f - K_\alpha^\beta f - \alpha K_\alpha^\beta = 0$ を βm で積分し、定理 5.1 を使うと

(5.8) $$\int_F f(a)\,n(da) - \beta\int_E K_\alpha^\beta f(a)\,m(da) - \alpha\int_F K_\alpha^\beta f(a)\,n(da) = 0,$$

故に (5.5) を得る。(2.11) から

(5.9) $$G_\alpha^0 f - G_\beta^\alpha f + (\alpha-\beta)G_\alpha^0 G_\beta^\alpha f - \alpha K_0^\alpha G_\beta^\alpha f = 0$$

m で積分し、定理 5.1 と (5.2) を使って

(5.10) $$\int_E f(a)\,m(da) - \beta\int_E G_\beta^\alpha f(a)\,m(da) - \alpha\int_F G_\beta^\alpha f(a)\,n(da) = 0.$$

故に (5.7) である。$\beta\downarrow 0$ として (5.6) も得られる。 q.e.d.

多くの場合に (5.5) と (5.6) は等号で成り立つ。

(5.11) $$\alpha\int_F K_\alpha^0 f(a)\,n(da) = \int_F f(a)\,n(da) \qquad (\forall\alpha>0,\ \forall f\in B_0(E))$$

となる十分条件を一つだけ証明しよう。

<u>定理 5.3.</u> m が *finite measure* ならば、(5.11) が成立し、n は $\tilde{X}$ の *invariant measure* である。更に X が *conservative* かつ M_8 をみたすならば、$(\dot{X}, n)$ の *terminal measure* が n 自

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

列となる.

<u>証明</u>　$\|K_\alpha^0\| \le \frac{1}{\alpha}\|f\|$ であるから, m が finite の時は $\forall f \in B^+(E)$ に対し

(5.12)　$$\int_E K_\alpha^0 f(a)\, m(da) < \infty$$

となる. 従って

(5.13)　$$\lim_{\beta \downarrow 0} \beta \int_E K_\alpha^\beta f(a)\, m(da) = 0$$

となるから, (5.8) により (5.11) が成り立つ. Lemma 3.1 により, これは n が $\tilde{X}$ の invariant measure であることを意味する. 後半は定理 3.2 を用いればよい.　q.e.d.

次のような条件もそれぞれ (5.11) の十分条件であることがわかるが, 証明については論文 [11] の方を見ていただきたい.

(i)　n が finite で, $P_a[\varphi_{S-0} = \infty] = 1$　$(a \in F)$.

(ii)　X が conservative かつ recurrent で G_α^0 は $B(E)$ を $C(E)$ にうつす.

(iii)　定数 $k > 0$ が存在して $k\, m(A) \le n(A)$　$(\forall A \in \mathcal{B})$.

(iv)　ある $\alpha > 0$ に対し, 任意の $f \in C_0^+(E)$ で (5.12) が成立つ.

(v)　ある $\alpha > 0$ に対し, 任意の $f \in C_0^+(E)$ で (5.12) が成立つ.

なお, (v) は必要条件でもある (この場合 $\forall \alpha > 0$ でよい).

(iv) は,

(5.14)　$$\alpha \int_F G_0^\alpha f(a)\, n(da) = \int_E f(a)\, m(da) \quad (\forall \alpha > 0,\ \forall f \in B_0(E))$$

が成り立つための十分条件でもある. $\alpha = 1$ の場合, (5.14) は $(\dot{X}, n)$ の Green measure が m になることを意味している. (5.14) のための十分条件としては次のようなものもある.

(vi)　$$\int_E G_0^\alpha f(a)\, m(da) < \infty \quad (\forall \alpha > 0,\ \forall f \in C_0^+(E)).$$

(vii)　$$\lim_{\beta \downarrow 0} \beta \int_E G_\beta^\alpha f(a)\, m(da) = 0 \quad (\forall \alpha > 0,\ \forall f \in C_0^+(E)).$$

(vii) は (5.14) の必要十分条件である.

§6. $\tilde{X}$, $\dot{X}$ の adjoint process.

この節では $\tilde{X}$ と $\dot{X}$ の adjoint についての結果をのべるが，証明の詳細は [11] にゆずる．まず，次の仮定を置く。

A.6.1. 1) X ($\hat{X}$) は state space $(E, \mathcal{B})$, M_1–M_7 を満すマルコフ過程である。

2) φ_t ($\hat{\varphi}_t$) は X ($\hat{X}$) の非負連続 additive functional.

3) m, n は E 上の σ-finite measure.

4) $\{g_\alpha(a,b) ; \alpha > 0\}$ は非負 $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$－可測函数の family であって，各 $g_\alpha(a,b)$ は a の函数として，X に関し α-excessive 且つ $E\setminus b$ で α-harmonic．b の函数として，$\hat{X}$ に関し α-excessive 且つ $E\setminus a$ で α-harmonic

5) G^0_α, $\hat{G}^0_\alpha$ は

(6.1) $$G^0_\alpha f(a) = \int_E g_\alpha(a,b) f(b)\, m(db)$$

(6.2) $$\hat{G}^0_\alpha f(b) = \int_E m(da) f(a) g_\alpha(a,b)$$

6) ある $\alpha_0 > 0$ に対し，

(6.3) $$0 \neq K^{\alpha_0}_0 1(a) = E_a\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha_0 t} d\varphi_t\right] = \int_E g_{\alpha_0}(a,b)\, n(db) \leqq K < \infty$$

且つ $\hat{\alpha}_0 > 0$ が存在して

(6.4) $$0 \neq \hat{K}^{\hat{\alpha}_0}_0 1(b) = \hat{E}_b\left[\int_0^{\hat{\zeta}} e^{-\hat{\alpha}_0 t} d\hat{\varphi}_t\right] = \int_E m(da) g_{\hat{\alpha}_0}(a,b) \leqq K < \infty$$

(6.1), (6.2) から，X と $\hat{X}$ は m に関し adjoint であることがわかる．又定理 2.2 から，$K^\alpha_0 f$, $\hat{K}^\alpha_0 f$ ($\alpha > 0$, $f \in B(E)$) は有界である。

$\tilde{X}$: X の φ_t での time change.
$\hat{\tilde{X}}$: $\hat{X}$ の $\hat{\varphi}_t$ での time change.
$\dot{X}$: X の $e^{-\varphi_t}$ での killing.
$\hat{\dot{X}}$: $\hat{X}$ の $e^{-\hat{\varphi}_t}$ での killing.

とおく。

Lemma 6.1. U を X 又は $\hat{X}$ に対する intrinsic topology（[2] 参照）に関し開集合とすると，$m(U) > 0$ である．

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

証明　$a \in U$ に対し，$P_a[X_r \in U,\ 0 \leqq \forall r < {}^\exists t] = 1$ （$\hat{X}$ は $\hat{P}_a[X_r \in U,\ 0 \leqq \forall r < {}^\exists t] = 1$）であるから，$G^0_\alpha \chi_U(a) > 0$ （$\hat{X}$ は $\hat{G}^0_\alpha \chi_U(a) > 0$）従って，$m(U) > 0$.　q.e.d.

Lemma 6.2.　$\forall \alpha > 0$, $\forall f \in B(E)$ に対し，

(6.5)　$K^\alpha_0 f(a) = \int_E g_\alpha(a.b) f(b) n(db)$.

(6.6)　$\hat{K}^\alpha_0 f(b) = \int_E n(da) f(a) g_\alpha(a.b)$.

である．

証明　resolvent equation から，$\forall a \in E$, m-a.e $b \in E$.

$\alpha > \beta$ に対し，

(6.7)　$g_\beta(a.b) = g_\alpha(a.b) + (\alpha-\beta)\int_E g_\alpha(a.c) m(dc) g_\beta(c.b)$

$= g_\alpha(a.b) + (\alpha-\beta)\int_E g_\beta(a.c) m(dc) g_\alpha(c.b)$

が成立つ．ところが，両辺は，$\hat{X}$ に関する excessivity により b の函数として $\hat{X}$ の intrinsic topology に関し連続である．従って，lemma 6.1.により (6.7) は $\forall b \in E$ で成立する．

(6.5) を示す．(6.6) も同様である．$\alpha = \alpha_0$ のときは，定理 4.1 で既に証明した．

$\alpha < \alpha_0$ とする．(6.7) を用いて，

$\int g_{\alpha_0}(a.b) f(b) n(db)$

$= \int g_{\alpha_0}(a.b) f(b) n(db) + (\alpha_0-\alpha)\iint g_\alpha(a,c) m(dc) g_{\alpha_0}(c,b) f(b) n(db)$

$= K^{\alpha_0}_0 f(a) + (\alpha_0-\alpha) G^0_\alpha K^{\alpha_0}_0 f(a) = K^\alpha_0 f(a)$

$\alpha > \alpha_0$ のときは

$K^\alpha_0 f(a) + (\alpha-\alpha_0) G^0_\alpha K^{\alpha_0}_0 f(a) = K^{\alpha_0}_0 f(a) = \int g_{\alpha_0}(a.b) f(b) n(db)$

$= \int g_\alpha(a.b) f(b) n(db) + (\alpha-\alpha_0)\iint g_\alpha(a.b) m(dc) g_{\alpha_0}(c.b) f(b) n(db)$

$= \int g_\alpha(a.b) f(b) n(db) + (\alpha-\alpha_0) G^0_\alpha K^{\alpha_0}_0 f(a)$

となり，(6.5) が $\forall \alpha > 0$ で成立する．　q.e.d.

§4 で定義したと同様に，$g^\lambda_\alpha(a.b)$，$\hat{g}^\lambda_\alpha(a.b)$ を

(6.8)　$g^\lambda_\alpha(a.b) = g_\alpha(a.b) - \lambda E_a\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha t - \lambda \varphi_t} g_\alpha(X_t, b)\, d\varphi_t\right]$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(6.9). $\hat{g}_\alpha^\lambda(a,b) = g_\alpha(a,b) - \lambda \hat{E}_b[\int_0^\zeta e^{-\alpha t - \lambda \hat{\varphi}_t} g_\alpha(a, \hat{x}_t)\, d\hat{\varphi}_t]$

で定義すると，K_λ^α, $\hat{K}_\lambda^\alpha$, G_α^λ, $\hat{G}_\alpha^\lambda$ がこれを使って表現される（定理 4.2）

$F_0 = F \cap \hat{F}$ とおこう．ただし，$F = \{a : P_a[\tau_0 > 0] = 0\}$, $\hat{F} = \{a ; \hat{P}_a[\hat{\tau}_0 > 0] = 0\}$ とする．*Lemma* 5.1 の証明を少しかえれば，

<u>*Lemma* 6.3.</u> $n(E \setminus F_0) = 0$

が得られる．更に，

<u>定理 6.1.</u> $\alpha \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$. $\alpha + \lambda > 0$; $f, g \in B_0(E)$ に対し，

(6.10) $$\int_{F_0} K_\lambda^\alpha f(a) g(a) n(da) = \int_{F_0} f(b) \hat{K}_\lambda^\alpha g(b) n(db).$$

が成立つ．又 $\alpha > 0$, $\lambda \geqq 0$ に対し，

(6.11) $$\int_E G_\alpha^\lambda f(a) g(a) m(da) = \int_E f(b) \hat{G}_\alpha^\lambda g(b) m(db)$$

である．云いかえれば $\{K_\lambda^\alpha ; \lambda > 0\}$, $\{\hat{K}_\lambda^\alpha ; \lambda > 0\}$ を *resolvent* に持つ *process* は n に関し互に *adjoint* であり，$\{G_\alpha^\lambda ; \alpha > 0\}$, $\{\hat{G}_\alpha^\lambda ; \alpha > 0\}$ を *resolvent* に持つ *process* は m に関し互に *adjoint* である。

証明は省略．本質的には，$E \times E$ 上の適当な *measure* に関しほとんど到る所，$g_\alpha^\lambda(a,b) = \hat{g}_\alpha^\lambda(a,b)$ が成り立つということである．同様にして，

<u>定理 6.2</u> $\forall \alpha \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$. $\alpha + \lambda > 0$; $f, g \in B(E)$ に対し，

(6.12) $$\int_{F_0} G_\alpha^\lambda f(a) g(a) n(da) = \int_E f(b) \hat{K}_\lambda^\alpha g(b)\, m(db)$$

(6.13) $$\int_E K_\lambda^\alpha f(a) g(a) m(da) = \int_{F_0} f(b) \hat{G}_\alpha^\lambda g(b)\, n(db)$$

が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

§7. 測度nの性質 II.

A.6.1. の仮定の下で，§5で論じた問題を再び取り上げると必要十分条件を得ることができる．Xに対する仮定は§5の場合より強いが（adjointの存在），mがXのinvariant measureであることを仮定しなくてもよい点は，§5とちがっている。

定理7.1. 次の各命題は同等である．

(7.1) nは$\hat{X}$のinvariant measureである．

(7.2) $\hat{X}$はconservativeである．

(7.3) $\hat{P}_a[\hat{\zeta}=\infty,\ \hat{\varphi}_\infty=\infty]=1 \qquad (\forall a\in\hat{F})$

(7.4) $\hat{P}_a[\hat{\varphi}_{\zeta-0}=\infty]=1 \qquad (n\text{-a.e. } a\in F_0)$

定理7.2. 次の各命題は同等である．

(7.5) $\alpha\int_{F_0}G_0^\alpha f(a)n(da)=\int_E f(a)m(da) \qquad (\forall\alpha>0,\ f\in B_0(E))$

(7.6) $\hat{P}_a[\hat{\zeta}=\infty,\ \hat{\varphi}_\infty=\infty]=1 \qquad (\forall a\in E)$

(7.7) $\hat{P}_a[\hat{\varphi}_{\zeta-0}=\infty]=1 \qquad (m\text{-a.e. } a\in E)$

系 (5.14)（=(7.5)）から(5.11)が出る．

証明は述べないが，この種の定理が成り立ちそうなことは定理6.1から見てとれるであろう．上記二定理の条件は$\hat{G}_\alpha$を使って表わすこともできる．すなわち，$\hat{X}$がconservativeならば，$\hat{P}_a[\hat{\varphi}_{\zeta-0}=\infty]=1$と$\lim_{\alpha\downarrow 0}\alpha\hat{G}_\alpha 1(a)=0$とが同等であることがいえる。

これらを使えば，(5.14)の十分条件として次のようなものが得られる．しかし，(i)以外は$\hat{X}$に関する条件を含んでいる点がよくない。

(i) mが有限で，$P_a[\varphi_{\zeta-0}=\infty]=1 \qquad (a\in E)$

(ii) mが有限で，$\hat{P}_a[\hat{\varphi}_{\zeta-0}>0]=1 \qquad (a\in E)$

(iii) nが有限で，$P_a[\varphi_{\zeta-0}=\infty]=1 \qquad (a\in E)$ 且つ
$P_a[\hat{\varphi}_{\zeta-0}>0]=1 \quad (a\in E)$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(iv) $\hat{X}$ が conservative 且つ recurrent で $\hat{G}^0_\alpha$ は $B(E)$ を $C(E)$ にうつす。

ただし，いずれも (5.1) を仮定する。

Process が self-adjoint (i.e. $X=\hat{X}$) の時は上記の諸定理はかなり簡単になる。又 Brown 運動の場合 $P_a[\varphi_\infty=\infty]=1$ となる条件を [5] で求めているので，参照されたい。

最後に $P_a[\varphi_{\zeta-0}=\infty]=1$ でも，n は $\tilde{X}$ の invariant measure にならない例を与える。$X(\hat{X})$ を real line の上の速度 1 で右(左)に進む uniform motion とする。Lebesgue 測度を m とし，m の $[0,\infty)$ への制限を n とする。

この場合

$$g_\alpha(a,b)=e^{-\alpha(b-a)} \quad b>a$$
$$=0 \quad b<a \tag{7.8}$$

であって，A.6.1. をすべて満している。

$$g^\lambda_\alpha(a,b)=\hat{g}^\lambda_\alpha(a,b)=\begin{cases} 0 & (b<a) \\ e^{-\alpha(b-a)-\lambda(b-a)} & (b>a\geqq 0) \\ e^{-\alpha(b-a)-\lambda b} & (b>a,\ a<0,\ b\geqq 0) \\ e^{-\alpha(b-a)} & (b>a,\ a<0,\ b<0) \end{cases} \tag{7.9}$$

となり

$$K^0_\lambda 1(a)=\frac{1}{\lambda}, \quad \hat{K}^0_\lambda 1(a)=\frac{1}{\lambda}[1-e^{-\lambda a}] \tag{7.10}$$

を得る。従って，$P_a[\varphi_\infty=\infty]=1\ (a\in E)$, $\hat{P}_a[\hat{\varphi}_\infty<\infty]=1\ (a\in E)$. 即ち，$\tilde{X}$ は conservative であるが n は $\tilde{X}$ の invariant measure ではない。(subinvariant ではある。) 一方 $\hat{\tilde{X}}$ は conservative ではないが，invariant measure n をもっている。この例では F と $\hat{F}$ は一致しない。実際，$0\in F$ であるが $0\notin\hat{F}$ である。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

第 2 章 文 献

[1] Dynkin, E. B., Foundations of the theory of Markov processes. Moscow, 1959 (ロシヤ語, 英訳あり).

[2] Dynkin, E. B., The intrinsic topology and excessive functions determined by Markov processes. Dokl. Akad. Nauk SSSR 127 (1959), 17-19 (ロシヤ語)

[3] Hunt, G. A., Markoff processes and potentials. III. J. Math. 1 (1957) 44-93, 316-369; 2 (1958) 151-213.

[4] 池田信行, 佐藤健一, 田中洋, 上野正 多次元拡散過程の境界問題(下), Sem. on Prob. 6 (1961)

[5] McKean, H. P., Jr. and H. Tanaka, Additive functionals of the Brownian path. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. 33 (1961), 479-506.

[6] Meyer, P-A., Semi-groupes en dualité. Seminaire de theorie du potentiel dirigé par M. Brelot, G. Choquet et J. Deny, 5e année, 1960/61.

[7] Meyer, P.-A., Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov. Ann. Inst. Fourier, 12 (1962), 125-230.

[8] Motoo, M., Representation of a certain class of excessive functions and a generator of Markov process. Sci. Rep. Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo, 12 (1962), 143-159.

[9] 本尾実, マルコフ過程の additive functional. Sem. on Prob, 15 (1962).

[10] Nagasawa, M., The adjoint process of diffusion with reflecting barrier, Kōdai Math. Sem. Rep. 13 (1961), 235-248.

[11] Nagasawa, M. and K. Sato, Some theorems on time change and killing of Markov processes. (Kōdai Math. Sem. Rep. 予定)

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

第3章　マルコフ過程の time reversion

マルコフ過程が invariant measure を持つ場合，既に1930年代に，コルモゴロフ[7][8]は解析的な意味での adjoint（定義はたとえば第2章§1）について，その generator およびそれがもとのマルコフ過程と同等（すなわち self-adjoint）になる条件を求めた。この場合には invariant measure で process を時間 $-\infty$ から $+\infty$ まで流しておけば，時間を逆にして見たものが丁度 adjoint になる。

しかし adjoint process は subinvariant measure に関して考えられる（Nelson[15]）ものであるにもかかわらず，その場合の adjoint の確率論的意味は分らなかった。どんなマルコフ過程も，時間を逆にして見た時またマルコフ過程になる（たとえば[1] p.83）が，この際もとのマルコフ過程が時間的一様でも逆に見た方は時間的一様とは限らなくなり，adjoint ではない。

これに対し Hunt [4]は，ある種の random な時点から time reversion を行えばマルコフ性と共に時間的一様性も保存され，adjoint の確率論的構成となることを示した。Hunt が扱ったのは Markov chain（状態可算，時間 discrete）の場合なので，われわれはそれを一般の場合に拡張する。Hunt の場合に比べ大分複雑な計算が必要で，additive functional が重要な道具となる。

ここで扱っているのは，本質的には transient な場合である。recurrent な場合に適当な時間 T を見つけて，T から time reversion を行ったものが時間的一様なマルコフ性をもつようにすること，しかもその際 T の分布が関係しないようにすること，はまだ出来ていない。x_t が加法過程の時には，T を constant time として $z_t = x_{T-t} - x_T \quad (0 \leq t \leq T)$ とおくと再び加法過程になる。[1)] これは，この章で扱うのとは違う種類の time reversion を暗示している。

1) 白尾恒吉氏の注意による。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

この章の結果は主として長沢，佐藤が共同で調べたものであるが，かなりの部分が，池田信行氏を加えた3人の共同によるものであることをお断りしておく。

§1. 定義と記号

用語を固定するために，マルコフ過程に関連した必要な定義をのべる．

a) Sを才2可算公理をみたす局所 compact Hausdorff 空間，$\mathcal{B}$をその topological σ-field とする．可測空間 $(S, \mathcal{B})$ を state space と呼ぶ．extra point ∂を，位相は孤立点として付加しておく．

b) $[0, \infty]$ から $S \cup \{\partial\}$ への写像 W で次の条件をみたすものの全体を $\mathbb{W}$ で表わし，path space と呼ぶ．

1) $\zeta(W) \in [0, \infty]$ が存在して $t < \zeta(W)$ では $W(t) \in S$，$t \geq \zeta(W)$ では $W(t) = \partial$

2) $0 \leq t < \zeta(W)$ では $W(t)$ は t に関し右連続でかつ左極限をもつ．

$\zeta(W)$ を killing time という．coordinate を $x_t(W) = W(t)$ と記す．

c) W の shifted path を W_t^+ で表わす．

d) $\{x_s \in A\}$ $(s \in [0, t],\ A \in \mathcal{B})$ から生成された σ-field を $\mathcal{N}$ とする．

<u>定義 1.1.</u> 次の条件をみたす $(\mathbb{W}, \mathcal{N})$ 上の確率測度の系 $\{P_a; a \in S\}$ が与えられた時，$X = (x_t, \zeta, \mathcal{N}_t, P_a)$ をマルコフ過程と呼ぶ。

(1.1) $P_a(B)$ は a の函数として $\mathcal{B}$ 可測．

(1.2) $P_a[x_0 = a] = 1$

(1.3) $P_a[x_{t+h} \in A \mid \mathcal{N}_t] = P_{x_t}[x_h \in A]$．

e) $\mathcal{N}_t$ の P_μ による completion $\mathcal{N}_t(\mu)$ の，μ が $\mathcal{B}$ 上のすべて

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

の確率測度を動く時の交わりを $\mathfrak{F}_t = \bigcap_\mu N_t(\mu)$ と記す. 同様に, $\mathfrak{F} = \bigcap_\mu N(\mu)$ と記す.

f). $\sigma : W \to [0, \infty]$ が Markov time とは $\{\sigma < t\} \in \mathfrak{F}_t$ をみたすこととする.

g) Markov time σ に対し $A \cap \{\sigma < t\} \in \mathfrak{F}_t \quad (\forall t \geqq 0)$ なる $A \in \mathfrak{F}$ の全体をつくる σ-field を $\mathfrak{F}_\sigma$ と記す.

h) X が強マルコフ性をもつとは, 任意の Markov time σ に対し.

(1.4) $\quad P_a[x_{\sigma+h} \in A \mid \mathfrak{F}_\sigma] = P_{x_\sigma}[x_h \in A]$.

i) X が擬左連続性をもつとは, 任意の Markov time の列 σ_n に対し $\{\sigma_n \uparrow, \lim \sigma_n < \zeta\}$ の上で P_a-a.e. に $x_{\sigma_n} \to x_{\lim \sigma_n}$ が成立つこと.

<u>定義 1.2.</u> マルコフ過程が強マルコフ性と擬左連続性をもつとき, standard process と呼ぶ.

<u>定義 1.3.</u> $b(t, w)$ が X の連続な additive functional とは.

(1.5) $\quad b(t, w)$ は $\mathfrak{F}_t$ 可測

(1.6) $\quad b(t+s, w) = b(t, w) + b(s, w_t^+). \qquad \forall w \in W$

(1.7) $\quad 0 = b(0, w) \leqq b(t, w) < \infty \qquad \forall t < \infty$

(1.8) $\quad t \geqq \zeta(w)$ では $b(t, w) = b(\zeta, w)$

(1.9) $\quad t$ の函数として連続

j) A への first hitting time $\sigma_A(w) = \inf\{t > 0 : x_t(w) \in A\}$ ($\inf \phi = \infty$).

k) a が A の regular point であるとは $P_a[\sigma_A = 0] = 1$.

l) S 上の有界連続函数の空間を C(S), compact support の連続函数の空間を $C_0(S)$, uniform norm による $C_0(S)$ の closure を $C_\infty(S)$, S 上の有界 $\mathcal{B}$ 可測函数の空間を $B_0(S)$ で表わす. すべて函数 f は $f(\partial) = 0$ と約束する.

以下, standard process X を一つ固定して考える.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

§2. Type L の Random Time.

マルコフ過程 X_t をある時刻 τ から逆にもどして、$Z_t = X_{\tau - t}$ を作ったとき、τ を適当にとらないと、Z_t は時間的に一様なマルコフ過程にならない。そこでこの節では《適当》な時間として type L の random time という概念を導入する。

<u>定義 2.1</u>　値を $[-\infty, \infty]$ にとる $\overline{W}$ 上の函数 $\tau(w)$ が、

(2.1)　$\tau(w)$ は $\mathcal{F}$ − 可測で $\tau(w) \leqq \zeta(w)$.

(2.2)　$\{0 < \tau(w) - t < \infty\} = \{0 < \tau(w_t^+) < \infty\}$, P_a-a.e. $(\forall a \in S)$

を満足するとき、<u>type L の random time</u> と呼ぶ。（又は <u>L-time</u>）

<u>Lemma 2.2.</u>　$\tau(w)$ を type L の random time とすると、

(2.3)　$\ell(a) = P_a[0 < \tau(w) < \infty]$

は excessive function である。

<u>証明</u>　$E_a[\ell(x_t)] = P_a[0 < \tau(w_t^+) < \infty]$

$= P_a[0 < \tau - t < \infty] \leqq P_a[< \tau < \infty] = \ell(a)$.

$\lim_{t \downarrow 0} E_a[\ell(x_t)] = \lim_{t \downarrow 0} P_a[t < \tau < \infty] = P_a[0 < \tau < \infty] = \ell(a)$

q.e.d.

<u>定義 2.3.</u>　$\tau(w)$ が L-time であって、$\ell(a) \not\equiv 0$、且つ

(2.4)　連続な additive functional $b(t, w)$ が存在して、

$E_a(b(\infty)) = \ell(a)$　$(a \in S)$.

を満足するとき、$\tau(w)$ を <u>regula L-time</u> と呼ぶ。

このとき、又、$b(t, w)$ を <u>L-additive functional</u> と呼ぶ。

次の二つの proposition は L-time の例を与えている。

<u>proposition 2.4</u>　$\zeta(w)$ は L-time である。

証明はほとんど明らかである。

<u>定義 2.5.</u>　$D \subset S$ に対し、

(2.5)　$\xi_D(w) = \sup[t \geqq 0 ; x_t \in D]$　$(\sup \phi = -\infty)$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

とおき，ξ_D をDからの *last exit time* と呼ぶ．

Proposition 2.6 開集合Dに対し，ξ_DはL-time である．[1]

証明 path は連続だから $\{\xi_D > t\} = \{{}^{\exists}\text{rational } r > t.\ x_r(w) \in D\} \in \mathcal{N}$ i.e. (2.1). 次に (2.2) を示す．

$w \in \{0 < \xi_D(w) - t < \infty\}$ とすると

$$\begin{aligned}\xi_D(w) &= \sup [t + s\ ;\ {}^{\exists}s \geq 0,\ x_{t+s} \in D] \\ &= t + \sup [s\ ;\ {}^{\exists}s \geq 0.\ x_s(w_t^+) \in D] \\ &= t + \xi_D(w_t^+).\end{aligned}$$

従って，$w \in \{0 < \xi_D(w_t^+) < \infty\}$

逆 $\{0 < \xi_D(W_t^+) \infty\} \subset \{0 < \xi - t < \infty\}$ も明らか． q.e.d.

注意 2.7 state space S からの last exit time を ξ_S とすると，

(2.6) $\xi_S(w) = \zeta(w).\quad \forall w \in \{\zeta(w) > 0\}$.

である，従って，P_a-a.e. の意味で ξ_S と ζ は同一視してよい．

ξ_D が regular L-time になる場合として，

Proposition 2.8. Dを，その closure $\bar{D}$ の全ての点がDの regular point になる開集合で，$P_a[\xi_D < \infty] = 1$ を満足するとせよ．$\xi_D(w)$ は regular L-time である。

$l(a) = P_a[0 < \xi_D < \infty]$ から，連続な additive functional がきまることを云えばよい．従って，次の Lemma を示せばよい．([12] P47. 定理 3.3.8 参照).

Lemma 2.9. Proposition 2.8 の仮定の下で，$l(a)$ は bounded regular excessive function である．

証明 bounded excessive function であることは prop 2.6 と Lemma 2.2 による．regular であること，i.e. $\sigma_n \uparrow \sigma$ なる任意の Markov time の列に対し．

---

[1] 一般にDが nearly analytic set ならば ξ_D は L-time である．
$\{\xi_D > t\} = \{\sigma_D(w_t^+) > 0\} \in \mathcal{F}$.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$(2.7)\qquad \lim_{n\to\infty} E_a[\ell(x_{\sigma_n})] = E_a[\ell(x_\sigma)] \qquad (\forall a \in S).$$

を満すことを示す.

$\lim_{n\to\infty} E_a[\ell(x_{\sigma_n})] = \lim_{n\to\infty} E_a[P_{x_{\sigma_n}}[0<\xi_D<\infty]]$

$= \lim_{n\to\infty} E_a[P_{x_{\sigma_n}}[\exists s>0,\ x_s\in D]] = \lim_{n\to\infty} P_a[\exists s>0,\ x_{\sigma_n+s}\in D]$

$= P_a[\bigcap_n \{\exists s>0,\ x_{\sigma_n+s}\in D\}]$

$= P_a[\bigcap_n A_n,\ \sigma>\xi_D] + P_a[\bigcap_n A_n,\ \sigma<\xi_D] + P_a[\bigcap_n A_n,\ \sigma=\xi_D]$

$=$ I + II + III とおく. ここで $A_n = \{w\ ;\ \exists s>0,\ x_{\sigma_n+s}(w)\in D\}$.

$\mathrm{I} = P_a[\bigcap_n A_n,\ \sigma>\xi_D] = P_a[\bigcap_n A_n,\ \sigma \geqq \exists\sigma_{n_0} > \xi_D]$

A_{n_0} と $\{\sigma_{n_0}>\xi_D\}$ は矛盾するから,

$= 0.$

$\mathrm{II} = P_a[\bigcap_n A_n,\ \sigma<\xi_D] = P_a[\exists s>0,\ x_{\sigma+s}\in D]$

$\mathrm{III} = P_a[\bigcap_n A_n,\ \sigma=\xi_D,\ x_\sigma\in\overline{D}] + P_a[\bigcap_n A_n,\ \sigma=\xi_D,\ x_\sigma\notin\overline{D}]$

$= \mathrm{III}_1 + \mathrm{III}_2$ とおく.

(2.6) は σ に対しても成立するから,

$\{\sigma=\xi_D\} = \{\xi_D(w_\sigma^+)\leqq 0,\ \sigma=\xi_D\}$, 従って,

$\mathrm{III}_1 \leqq P_a[\sigma=\xi_D,\ x_\sigma\in\overline{D}] \leqq P_a[x_\sigma\in\overline{D},\ \xi_D(w_\sigma^+)\leqq 0]$

$= E_a[P_{x_\sigma}[\xi_D\leqq 0]\ ;\ x_\sigma\in\overline{D}] = 0.$

何故なら, 仮定により, $\overline{D}$ の点は D の *regular point* だから,

$P_{x_\sigma}[\xi_D\leqq 0]=0$, P_a-a.e. である。 $P_a[\bigcap A_n\ \sigma=\xi_D,\ \exists\sigma_n=\sigma] = 0$

だから

$\mathrm{III}_2 = P_a[\bigcap_n A_n,\ \sigma=\xi_D,\ x_\sigma\notin\overline{D},\ \bigcap_n(\sigma_n<\xi_D)]$

$= P_a[B]$ とおく.

$\tau_n(w) = \sigma_n(w) + \sigma_D(w_{\sigma_n}^+)$ とおくと, τ_n は Markov time で, B の上で $\sigma_n \leqq \tau_n \leqq \xi_D = \sigma < \zeta$. 従って,

$\tau_n(w) \uparrow \sigma(w) < \zeta$, 且つ $x_{\tau_n}(w)\in\overline{D}$. 擬左連続性により

$P_a[B] = P_a[\lim_{n\to\infty} x_{\tau_n} = x_\sigma,\ B] = P_a[x_\sigma = \lim_{n\to\infty} x_{\tau_n}\in\overline{D},\ B]$

$= 0.$

以上まとめて

$\lim_{n\to\infty} P_a[\ell(x_{\sigma_n})] = P_a[\exists s>0,\ x_{\sigma+s}\in D] = E_a[P_{x_\sigma}[\exists s>0,\ x_s\in D]]$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$= E_a[\ell(x_\sigma)].$ q.e.d.

regular L-time に関する F の Lemma 2.11 は reversed process の議論で基本的である。まず次のことをいう。

Lemma 2.10. $\tau(w)$ を regular L-time とする。任意の有界 $\overline{\mathcal{N}}_s$-可測函数 $f(w)$ と $0 \leq s < t \leq \infty$ に対し、

(2.8) $$E_a[f(w); s<\tau(w) \leqq t] = E_a[f(w)(b(t)-b(s))]$$

証明 $E_a[f(w); s<\tau<\infty] = E_a[f(w) P_a[s<\tau<\infty \mid \overline{\mathcal{N}}_s]]$

$= E_a[f(w) P_a[0<\tau(w_s^+)<\infty \mid \overline{\mathcal{N}}_s]] = E_a[f(w)\ell(x_s)]$

$= E_a[f(w) E_{x_s}[b(\infty)]] = E_a[f(w)(b(\infty)-b(s))]$

これから直ちに (2.8) を得る。

Lemma 2.11. $\tau(w)$ を regular L-time とする。任意の有界 $f_0, \cdots, f_n \in B(S)$ 及び $0<t_1<\cdots<t_n<T \leqq \infty$ に対し、

(2.9) $$E_a[\prod_{j=0}^{n} f_j(x^-_{\tau-t_j}) e^{-\alpha\tau}; t_n<\tau<T]$$

$$= E_a[\int_{t_n}^{T} \prod_{j=0}^{n} f_j(x_{t-t_j}) e^{-\alpha t} \, b(dt)].$$

が成立つ。ただし、$f_0 \neq 1$ の時は $P_a[x^-_\tau$ が S に存在 $|0<\tau<\infty] = 1$ を仮定する。

証明 $E_a[\prod_{j=0}^{n} f_j(x^-_{\tau-t_j}) e^{-\alpha\tau}; t_n<\tau<T]$

$= \lim_{h \downarrow 0} \sum_{0 \leq k < \frac{T-t_n}{h}-1} E_a[\prod_{j=0}^{n} f_j(x_{t_n+kh-t_j}) e^{-\alpha(t_n+kh)}; t_n+kh<\tau \leq t_n+(k+1)h]$

Lemma 2.10 により

$= \lim \sum E_a[\prod_{j=0}^{n} f_j(x_{t_n+kh-t_j}) e^{-\alpha(t_n+kh)}(b(t_n+(k+1)h)-b(t_n+kh))]$

$= E_a[\int_{t_n}^{T} \prod_{j=0}^{n} f_j(x^-_{t-t_j}) e^{-\alpha t} b(dt)]$

jump の時点は高々可算個だから、

$= E_a[\int_{t_n}^{T} \prod_{j=0}^{n} f_j(x_{t-t_j}) e^{-\alpha t} b(dt)]$ q.e.d.

Killing time ζ が regular L-time になるための十分条件を

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

あげておく．

<u>Proposition 2.12.</u> φ_t を X の連続 additive functional, $\overline{X}$ を X の $e^{-\varphi_t}$ subprocess とする．次の条件のどちらかあれば，$\overline{X}$ の Killing time $\overline{\zeta}$ は $\overline{X}$ の regular L-time である。

(2.10) $\overline{P}_a[0<\overline{\zeta}<\infty]$ が a について連続．

(2.11) $\exists\alpha\geq 0$ に対し，$E_a[\int_0^\infty e^{-\alpha t}d\varphi_t]$ が uniformly (X,α)-excessive.

<u>証明</u> (2.10)の場合，$\overline{X}$ も standard と見なしてよいから，$u(a)=\overline{P}_a[0<\overline{\zeta}<\infty]$ が regular excessive なることをいへばよい．$\overline{\sigma}_n\to\overline{\sigma}$ を $\overline{X}$ の Markov time の列とする，σ_n を $\overline{\sigma}_n$ に対応する X の Markov time ($\overline{\sigma}_n\wedge\overline{\zeta}=\sigma\wedge\overline{\zeta}$)，$\lim\sigma_n=\sigma$ とすると

$$\overline{E}_a[u(\overline{x}_{\overline{\sigma}_n})]=\overline{E}_a[u(x_{\sigma_n}):\sigma_n<\overline{\zeta}]=E_a[u(x_{\sigma_n})e^{-\varphi_{\sigma_n}}]$$
$$\to E_a[u(x_\sigma)e^{-\varphi_\sigma}]=\overline{E}_a[u(x_{\overline{\zeta}})].$$

(2.11)の場合：u が uniformly $\overline{X}$-excessive なことをいう．

$$u(a)-\overline{E}_a[u(\overline{x}_t)]=\overline{P}_a[\overline{\zeta}>0]-\overline{P}_a[\overline{\zeta}>t]$$
$$=1-E_a[e^{-\varphi_t}]\leq E_a[\varphi_t]$$
$$\leq e^{\alpha t}E_a[\int_0^t e^{-\alpha s}d\varphi_s]=e^{\alpha t}(v(a)-E_a[e^{-\alpha t}v(x_t)])$$
$$\to \quad (t\downarrow 0) \quad (一様)$$

ただし，$v(a)=E_a[\int_0^\infty e^{-\alpha s}d\varphi_s]$ とおいた．

§3. Regular L-time からの Reversed Process I.

τ を regular L-time とするとき，τ からの reversed proces $z_t=x_{\tau-t}$ が時間的一様なマルコフ過程になることを示すのがこの節の目的である．

<u>定義 3.1.</u> τ を random time とし，$W_0=\{0<\tau<\infty\}$ とおく．

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$(3.1)\qquad z_t(w) = \begin{cases} x_{\tau-t}(w), & 0<t<\tau(w) \\ \partial, & t \geq \tau(w) \end{cases} \qquad w \in W_0$$

により定義された process $z_t(w)$ $(w \in W_0)$ を x_t の時刻 τ からの <u>reversed process</u> と呼ぶ．次の仮定をおく．

<u>A 3.1.</u> 函数 $p(t,a,b)$ $(t>0,\ a,b \in S)$，S 上の σ-finite measure m が存在して

1) $p(t,a,b)$ は非負かつ (a,b) について $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 可測で，
$E_a(f(x_t)) = \int p(t,a,b)\, f(b)\, m(db)$.

2) $p(t,a,b)$ は t について $(0,\infty)$ で右連続．

3) $\int p(t,a,b)\, m(db)\, p(s,b,c) = p(t+s,a,c)$

4) $p(t,a,b)$ は t,b を固定した時 a に関し有界．

<u>注意 3.2.</u> 1)，2) から，$p(t,a,b)$ が三変数について可測であることが分る．また，$t \geq s > 0$ ならば
$p(t,a,b) \leq \sup_a p(s,a,b)$． これは 3) から分る。

$$(3.2)\qquad g_\alpha(a,b) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, p(t,a,b)\, dt \leq +\infty.$$

とおく．明かに，

<u>Lemma 3.3.</u> $\forall E \in \mathcal{B}$, $\forall \alpha \geq 0$ に対し

$$(3.3)\qquad G_\alpha(a,E) = E_a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\chi_E(x_t)\,dt\right] = \int_E g_\alpha(a,b)\, m(db)$$

Lemma 2.11 と合せるとこれから証明する次の定理が本質的には z_t のマルコフ性を示している．

<u>定理 3.4.</u> $b(t,w)$ を L-additive functional とする．[1]

任意の $n \geq 1$，$\alpha \geq 0$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n > 0$，$0 = t_0 < t_1 < \cdots < \cdots < t_n$，$f_0, \cdots, f_n \in B(S)$ に対し，

$$(3.4)\quad \int_0^\infty e^{-\alpha_1 t_1} dt_1 \int_{t_1}^\infty e^{-\alpha_2 t_2}\, dt_2 \int_{t_2}^\infty \cdots \int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\alpha_n t_n} dt_n\, E_a\left[\int_{t_n} \prod_{j=0}^{n} f_j(x_{t-t_j})\, e^{-\alpha t}\, b(dt)\right]$$

---

[1] 連続な additive functional で，$E_a(b(\infty))$ が a について有界ならば十分である．

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(3.4) $$=\int\cdots\int E_{a_1}\left[\int_0^\infty f_0(X_t)e^{-(\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_n)t}\,b(dt)\right]m(da_1)f_1(a_1)g_{\alpha+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}(a_2,a_1)$$

$$\cdot m(da_2)f_2(a_2)g_{\alpha+\alpha_3+\cdots+\alpha_n}(a_3,a_2)\cdots g_{\alpha+\alpha_n}(a_n,a_{n-1})m(da_n)f_n(a_n)g_\alpha(a,a_n)$$

まず Lemma を準備する.

<u>Lemma 3.5.</u> $k_N(a)=N\{\ell(a)-E_a[\ell(X_{\frac{1}{N}})]\}$, $b_N(t,w)=\int_0^t k_N(X_s)ds$ とおくと,

(3.5) $P_a[\,b_N(t)\longrightarrow b(t)\ (N\to\infty)$ t について広義一様$\,]=1$,

(3.6) $E_a[b_N(t)]\longrightarrow E_a[b(t)]\quad(N\to\infty)$,

(3.7) $E_a[b_N(t)]$ は a, N, t について有界.

<u>証明</u> (3.5) は [16] を用いて [6] (下巻) と同様な証明をすればよい. (3.6), (3.7) は [17] §1 にある証明が通用する.

<u>Lemma 3.6.</u> $T<\infty$ とする. $[0,T]$ 上の有界 $\Phi_n(dt)$ が連続有界測度 $\Phi(dt)$ に weak* に収束すれば, $[0,T]$ で有界かつたかだか第一種不連続の任意の函数 $f(t)$ に対し,

$$\int_{[0,T]}f(t)\Phi_n(dt)\longrightarrow\int_{[0,T]}f(t)\Phi(dt)\qquad(n\to\infty).$$

<u>証明</u> $\varepsilon>0$ に対し, $t_0=0$, $t_{i+1}=\inf\{t: t_i<t\leq T$, かつ $|f(t)-f(t_i)|\geq\varepsilon\}$ ($\inf\phi=T$) とおいて $\{t_i\}$ を定める. f に対する仮定から, $t_i<T$ ならば $t_i<t_{i+1}$ であり, また N が存在して $t_N=T$ である.

$$f_\varepsilon(t)=\sum_{i=0}^{N-1}f(t_i)\chi_{[t_i,t_{i+1})}(t)+f(T)\chi_{\{T\}}(t)$$

とおくと, $|f(t)-f_\varepsilon(t)|<\varepsilon$. 従って

$$\left|\int_0^T f(t)\Phi(dt)-\int_0^T f_\varepsilon(t)\Phi(dt)\right|\leq\int_0^T|f(t)-f_\varepsilon(t)|\Phi(dt)<\varepsilon K.$$

$$\left|\int_0^T f_\varepsilon(t)\Phi(dt)-\int_{[0,T]}f_\varepsilon(t)\Phi_n(dt)\right|\leq\sum_{i=0}^{N-1}\left|f(t_i)\{\Phi([t_i,t_{i+1}))-\Phi_n([t_i,t_{i+1}))\}\right|$$
$$+\left|f(T)\{\Phi(\{T\})-\Phi_n(\{T\})\}\right|\longrightarrow 0,\ (n\to\infty).$$

$$\left|\int_{[0,T]}f_\varepsilon(t)\Phi_n(dt)-\int_{[0,T]}f(t)\Phi_n(dt)\right|<\varepsilon K$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

ここで $K=\sup_n \Phi_n[0,T]<\infty$. 三つの不等式を合せて,充分大きな n に対し,

$$\left|\int_0^T f(t)\Phi(dt)-\int_{[0,T]} f(t)\Phi_n(dt)\right|<3\varepsilon K.$$

q.e.d.

(定理3.4の証明) $f_j\in C(S)$, $f_j\geqq 0$ の場合に証明すれば十分である. まず次のことを注意しておく. $f_j(x_{t-t_j})$ は $t\in[t_j,\zeta-\varepsilon]$ に関し第一種不連続だから, Lemma 3.6 により, $N\to\infty$ の時

$$(3.8)\quad \int_{t_n}^{T'}\prod_{j=0}^{n} f_j(x_{t-t_j})e^{-\alpha t}k_N(x_t)dt\to\int_{t_n}^{T'}\prod_{j=0}^{n} f_j(x_{t-t_j})e^{-\alpha t}\,b(dt)$$

である.[2] ただし, $T=const<\infty$ とし $T'=T'(w)=T\wedge(\zeta-\frac{1}{T})$ とおく。一方 (3.6) から $b_N(T)$ は N に関し一様可積分となり, それにより (3.8) の左辺も N に関し一様可積分となる. 従って

$$(3.9)\quad E_a\left[\int_{t_n}^{T'}\prod_{j=0}^{n} f_j(x_{t-t_j})e^{-\alpha t}k_N(x_t)dt\right]\to E_a\left[\int_{t_n}^{T'}\prod_{j=0}^{n} f_j(x_{t-t_j})e^{-\alpha t}b(dt)\right]$$

である。しかも (3.7) により (3.9) の左辺は a, N, T に関し有界である。

さて, (3.4) を帰納法で証明しよう. まず $n=1$ の場合をいおう. 上の注意を用いて,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_1 t_1}dt_1\,E_a\left[\int_{t_1}^\infty f_0(x_t)f_1(x_{t-t_1})e^{-\alpha t}\,b(dt)\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\lim_{N\to\infty}\int_0^T e^{-\alpha_1 t_1}dt_1\,E_a\left[\int_{t_1}^{T'} f_0(x_t)f_1(x_{t-t_1})e^{-\alpha t}k_N(x_t)dt\right]$$

$$=\lim\lim\int_0^T e^{-\alpha_1 t_1}dt_1\int_{t_1}^T e^{-\alpha t}dt\,E_a\left[f_1(x_{t-t_1})E_{x_{t-t_1}}\left(f_0(x_{t_1})k_N(x_{t_1});\ t_1<\zeta-\tfrac{1}{T}\right)\right]$$

$$=\lim\lim\int_0^T e^{-(\alpha+\alpha_1)t_1}dt_1\int_0^{T-t_1}e^{-\alpha t}dt\,E_a\left[f_1(x_t)E_{x_t}\left(f_0(x_{t_1})k_N(x_{t_1});\ t_1<\zeta-\tfrac{1}{T}\right)\right]$$

$$=\lim\lim\int_0^T e^{-\alpha t}dt\int_0^{T-t}e^{-(\alpha+\alpha_1)t_1}dt_1\,E_a[\qquad]$$

$$=\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt\,E_a\left[f_1(x_t)E_{x_t}\left(\int_0^\infty f_0(x_{t_1})e^{-(\alpha+\alpha_1)t_1}b(dt_1)\right)\right]$$

$$=\int E_{a_1}\left[\int_0^\infty f_0(x_t)e^{-(\alpha+\alpha_1)t}b(dt)\right]m(da_1)f_1(a_1)g_\alpha(a,a_1)$$

---

2) $s>s'$ の時は $\int_s^{s'}dt=\int_s^{s'}b(dt)=0$ と約束する。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

すなわち，$n=1$ の時 (3.4) がいえた．一般の n についても，同様な計算により

(3.10) $$\int_{t_{n-1}}^{\infty} e^{-\alpha_n t_n}\,dt_n\ E_a\Big[\int_{t_n}^{\infty}\prod_{j=0}^{n} f_j(x_{t-t_j})\,e^{-\alpha t}\,b(dt)\Big]$$
$$=\int E_{a_n}\Big[\int_{t_{n-1}}^{\infty}\prod_{j=0}^{n-1} f_j(x_{t-t_j})\,e^{-(\alpha+\alpha_n)t}\,b(dt)\Big]\,m(da_n)\,f_n(a_n)\,g_\alpha(a,a_n)$$

が得られる．従って，$n-1$ の時 (3.4) が成立するとすると，次の計算により，n の時も (3.4) が成立する．

(3.4) の左辺
$$=\int\int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 t_1}\,dt_1\cdots\int_{t_{n-2}}^{\infty} e^{-\alpha_{n-1}t_{n-1}}\,dt_{n-1}\ E_{a_n}\Big[\int_{t_{n-1}}^{\infty}\prod_{j=0}^{n-1} f_j(x_{t-t_j})\,e^{-(\alpha+\alpha_n)t}\,b(dt)\Big]$$
$$\cdot\, m(da_n)\,f_n(a_n)\,g_\alpha(a,a_n)$$
$=$ (3.4) の右辺． q.e.d.

以下，T を regular L-time とする．更に σ-finite な測度 ν を初期分布にとり，

(3.11) $$\eta(a)=\int\nu(db)\,g_0(b,a)$$

(3.12) $$S_\eta=\{a\,;\,0<\eta(a)<\infty\},\qquad S_0=S-S_\eta$$

とおく．次の仮定をおく．

A 3.2. 任意の compact 集合 K に対し

(3.13) $$\int_0^{\infty} P_\nu[x_t\in K]\,dt<\infty$$

(3.14) $$P_\nu[z_t\in K]<\infty\qquad(\forall t>0).$$

(3.15) $$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\,dt\,P_\nu[z_t\in K]<\infty\qquad(\forall\alpha>0).$$

ここで z_t は x_t の T からの reversed process.

Lemma 3.7. z_t に関しては S_0 は次の意味で無視可能である。

(3.16) $$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\,dt\,P_\nu[z_t\in S_0]=0.\qquad(\forall\alpha>0).$$

証明 compact 集合の列 $K_n\uparrow S$ をとる。Lemma 2.11，定理 3.4 により
$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}dt\,P_\nu[z_t\in S_0\cap K_n]=\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}dt\ E_\nu\Big[\int_t^{\infty}\chi_{S_0\cap K_n}(x_{s-t})\ b(ds)\Big]$$
$$=\int E_a\Big[\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}b(dt)\Big]\,m(da)\,\chi_{S_0\cap K_n}(a)\,\eta(a)=0\ \text{ or }\ \infty$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

ところが左辺は (3.15) により有限だから，これは 0 である。
$n\to\infty$ とすれば (3.16) を得る。 q.e.d.

さて，$f\in B(S)$ に対し $a\in S_\eta$ で

(3.17) $u_f(\alpha,a)=\frac{1}{\eta(a)}\int g_\alpha(b,a)\,m(db)f(b)\eta(b)$

(3.18) $v_f(t,a)=\frac{1}{\eta(a)}\int p(t,b,a)\,m(db)f(b)\eta(b)$

とおこう。$|u_f(\alpha,a)|\le\frac{1}{\alpha}\|f\|$, $|v_f(t,a)|\le\|f\|$ である。
何となれば $g_0(c,a)=g_\alpha(c,a)+\alpha\int g_0(c,b)g_\alpha(b,a)m(db)$ から $\eta(a)\ge\alpha\int\eta(b)g_\alpha(b,a)m(db)$ であり，$\int g_0(c,b)p(t,b,a)m(db)=\int_t^\infty p(s,c,a)ds$ から $\int\eta(b)p(t,b,a)m(db)\le\eta(a)$ であるから。
(3.4) から Laplace 変換をはずすために，次の仮定をおく。

A 3.3. 任意の $f\in C_0(S)$ と $\alpha>0$ に対し

$\varphi_f^\alpha(t,w)=u_f(\alpha,z_t(w))$ ($z_t(w)\in S_\eta$ の時)

とおくと，P_ν-a.e. $w\in W_0$ に対し $\varphi_f^\alpha(t,w)$ が $t\in(0,\tau)$ に関し有界右連続な函数に拡張される。

定理 3.8 マルコフ過程 X は A.3.1 を満たし，τ は regular L-time，ν は A.3.2 をみたす σ-finite な測度で，A.3.3 も満たされるとする。この時，初期分布 ν の x_t に対する τ からの reversed process z_t は時間的一様マルコフ性をもち，その遷移確率は

(3.19) $P_\nu[z_t\in db\mid z_s=a]=\begin{cases}p(t-s,b,a)\dfrac{\eta(b)}{\eta(a)}m(db), & a\in S_\eta\\ 0, & a\notin S_\eta\end{cases}$

$(0<s<t)$ である。

Reversed process の遷移確率が τ のとり方に依存せず，x_t の初期分布と遷移確率のみに依存することは，注目すべき事実である。

証明 $f_1,\cdots,f_n\in C_0(S)$, $0<t_1<\cdots<t_n$ とし

(3.20) $E_\nu[\prod_{j=1}^n f_j(z_{t_j}):t_n<\tau<\infty]=E_\nu[\prod_{j=1}^{n-1}f_j(z_{t_j})\chi_{S_\eta}(z_{t_{n-1}})v_{f_n}(t_n-t_{n-1},z_{t_{n-1}});\ t_{n-1}<\tau<\infty]$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

を証明すればよい。Lemma 2.11, 定理 3.4 および Lemma 3.7 により，$\alpha_j > 0$ に対し，

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_1 t_1} dt_1 \int_{t_1}^\infty e^{-\alpha_2 t_2} dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\alpha_n t_n} dt_n \, E_\nu\Big[\prod_{j=1}^n f_j(z_{t_j}) : t_n < \tau < \infty\Big]$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha_1 t_1} dt_1 \cdots \int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\alpha_n t_n} dt_n \, E_\nu\Big[\prod_{j=1}^n f_j(z_{t_j}) \chi_{S_\eta}(z_{t_{n-1}}) : t_n < \tau < \infty\Big]$$

$$= \int\cdots\int E_{a_1}\Big[\int_0^\infty e^{-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)t} b(dt)\Big] m(da_1) f_1(a_1) g_{\alpha_2+\cdots+\alpha_n}(a_2,a_1) m(da_2)$$

$$\cdot f_2(a_2) \cdots g_{\alpha_{n-1}+\alpha_n}(a_{n-1},a_{n-2}) m(da_{n-1}) f_{n-1}(a_{n-1}) \chi_{S_\eta}(a_{n-1}) g_{\alpha_n}(a_n, a_{n-1})$$

$$\cdot m(da_n) f_n(a_n) \eta(a_n)$$

$$= \int\cdots\int E_{a_1}\Big[\int_0^\infty e^{-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)t} b(dt)\Big] m(da_1) f_1(a_1) g_{\alpha_2+\cdots+\alpha_n}(a_2,a_1) m(da_2)$$

$$\cdot f_2(a_2) \cdots g_{\alpha_{n-1}+\alpha_n}(a_{n-1},a_{n-2}) m(da_{n-1}) f_{n-1}(a_{n-1}) \chi_{S_\eta}(a_{n-1}) u_{f_n}(\alpha_n, a_{n-1}) \eta(a_{n-1})$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha_1 t_1} \int_{t_1}^\infty e^{-\alpha_2 t_2} dt_2 \cdots \int_{t_{n-2}}^\infty e^{-(\alpha_{n-1}+\alpha_n)t_{n-1}} dt_{n-1} \, E_\nu\Big[\prod_{j=1}^{n-1} f_j(z_{t_j}) \chi_{S_\eta}(z_{t_{n-1}})$$

$$\cdot u_{f_n}(\alpha_n, z_{t_{n-1}}) : t_{n-1} < \tau < \infty\Big]$$

次の Lemma 3.9 により，（測度 0 のあいまいさなく）n−2回までは Laplace 変換をはずすことができて，

$$\int_{t_{n-2}}^\infty e^{-\alpha_{n-1} t_{n-1}} dt_{n-1} \int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\alpha_n t_n} dt_n \, E_\nu\Big[\prod_{j=1}^n f_j(z_{t_j}) : t_n < \tau < \infty\Big]$$

$$= \int_{t_{n-2}}^\infty e^{-(\alpha_{n-1}+\alpha_n)t_{n-1}} dt_{n-1} \, E_\nu\Big[\prod_{j=1}^{n-1} f_j(z_{t_j}) \chi_{S_\eta}(z_{t_{n-1}}) u_{f_n}(\alpha_n, z_{t_{n-1}}) : t_{n-1} < \tau < \infty\Big]$$

$$= \int_{t_{n-2}}^\infty e^{-(\alpha_{n-1}+\alpha_n)t_{n-1}} dt_{n-1} \, E_\nu\Big[\prod_{j=1}^{n-1} f_j(z_{t_j}) \varphi_{f_n}^{\alpha_n}(t_{n-1}) : t_{n-1} < \tau < \infty\Big]$$

を得る。次に Lemma 3.9, A.3.3, (3.14) を使うともう一回 Laplace 変換をはずせる。すなわち

$$\int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\alpha_n t_n} dt_n \, E_\nu\Big[\prod_{j=1}^n f_j(z_{t_j}) ; t_n < \tau < \infty\Big]$$

(3.21)

$$= e^{-\alpha_n t_{n-1}} E_\nu\Big[\prod_{j=1}^{n-1} f_j(z_{t_j}) \varphi_{f_n}^{\alpha_n}(t_{n-1}) ; t_{n-1} < \tau < \infty\Big]$$

である。(3.21) は f_{n-1} が $B_0(S)$ の函数の場合にまで成り立つとしてよいから，再び Lemma 3.7 により

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(3.21)の左辺 $=\int_{t_{n-1}}^{\infty} e^{-\alpha_n t_n} dt_n\, E_\nu[\prod_{j=1}^{n} f_j(z_{t_j})\chi_{S_\eta}(z_{t_{n-1}}) ; t_n<\tau<\infty]$

$= e^{-\alpha_n t_{n-1}} E_\nu[\prod_{j=1}^{n-1} f_j(z_{t_j})\chi_{S_\eta}(z_{t_{n-1}}) u_{f_n}(\alpha_n, z_{t_{n-1}}) ; t_{n-1}<\tau<\infty]$

$= \int_{t_{n-1}}^{\infty} e^{-\alpha_n t_n} dt_n E_\nu[\prod_{j=1}^{n-1} f_j(z_{t_j})\chi_{S_\eta}(z_{t_{n-1}}) v_{f_n}(t_n-t_{n-1}, z_{t_{n-1}}) ; t_{n-1}<\tau<\infty]$

このLaplace変換を更にはずして(3.20)を得るには，(3.13)と．$p(t, a, e)$に対する仮定から$v_{f_n}(t, a)$がtについて右連続であることに注意すればよい．

<u>Lemma 3.9</u>　f_j; $B_0(S)$, $\alpha_j>0$ ($j=1,\cdots,n$) $1\leq k\leq n-1$, $f_k\in C_0(S)$とする．

$\int_{t_k}^{\infty} e^{-\alpha_{k+1}t_{k+1}} dt_{k+1}\cdots\int_{t_{n-1}}^{\infty} e^{-\alpha_n t_n} dt_n E_\nu[\prod_{j=1}^{n} f_j(z_{t_j}) ; t_n<\tau<\infty]$ はt_kについて右連続である．

<u>証明</u>　この函数を$h(t_k)$とおこう．$t_k' \downarrow t_k$とすると

$|h(t_k')-h(t_k)| \leq \int_{t_k'}^{\infty} e^{-\alpha_{k+1}t_{k+1}} dt_{k+1}\cdots E_\nu[\prod_{j\neq k}|f_j(z_{t_j})||f_k(z_{t_k'})-f(z_{t_k})|]$

$+\int_{t_k}^{t_k'} e^{-\alpha_{k+1}t_{k+1}} dt_{k+1}\int_{t_{k+1}}^{\infty}\cdots E_\nu[\prod_j |f_j(z_{t_j})|]$.

$f_k(z_{t_k'})-f_k(z_{t_k})\to 0$ であり，(3.15)により有界収束定理が使えるから，第一項$\to 0$である．第2項$\to 0$も(3.15)から明らか。　q.e.d.

A.3.3を前提としたことは不満足であるが，適当な(あまり強くない)十分条件が見つからないので仮定して証明した．ℓがpotentialであること或いはXのadjointの存在を仮定すればいらなくなる．(§4, §6)

定理3.8によりProp.2.8の条件をみたすDからのlast exit timeからのreversed processが時間的一様マルコフ性をもつことが分った．ただし，A3.1, 3.2, 3.3がみたされる場合である。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

§4. Regular L-time からの reversed process II.

x_τ^- がSに存在する場合には，τからの reversed process $z_t = x_{\tau-t}^-$ を $t=0$ を含めて考えることができ，z_t の初期分布，$t=0$ を含めてのマルコフ性をも論ずることができる。この節では次の仮定をおく。

A.4.1. A 3.1 と同じ仮定であるが，4)を少し強めておく．

4)' $p(t,a,b)$ は t を固定した時 (a,b) に関し有界．与えられた regular L-time τと，それから定まる連続 additive functional $b(t,w)$ に関して，

A.4.2.

1) $P_a[x_\tau^-$ が S に存在 $\mid 0<\tau<\infty] = 1$ [1] $\qquad (a\in S)$.

2) σ-finite な測度 μ が存在して

$$E_a\left[\int_0^\infty f(x_t)e^{-\alpha t}b(dt)\right] = \int g_\alpha(a,b)f(b)\mu(db). \tag{4.1}$$

($f\in B(S)$, $\alpha\geq 0$, $a\in S$)が成り立つ。 $g_\alpha(a,b)$ は (3.2) で定義したもの．

x_tのτからの reversed process z_t は，$t=0$ でも $z_0(w)=x_\tau^-(w)$ によって定義しておく。

定理4.1. 任意の $n\geq 1$, $\alpha\geq 0$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$, $f_0,\cdots,f_n\in B(S)$ に対し，

$$\begin{aligned}
(4.2)\quad & E_a\left[\prod_{j=0}^n f_j(z_{t_j})e^{-\alpha\tau}\,;\, t_n<\tau<\infty\right] \\
&= E_a\left[\int_{t_n}^\infty \prod_{j=0}^n f_j(x_{t-t_j})e^{-\alpha t}\,b(dt)\right] \\
&= e^{-\alpha t_n}\int\cdots\int \mu(da_0)f_0(a_0)p(t_1,a_1,a_0)m(da_1)f_1(a_1)\cdots p(t_{n-1}-t_{n-2}, \\
&\qquad a_{n-1},a_{n-2})m(da_{n-1})f_{n-1}(a_{n-1})p(t_n-t_{n-1},a_n,a_{n-1})m(da_n)f_n(a_n)g_\alpha(a,a_n).
\end{aligned}$$

証明　第1式＝第2式は Lem. 2.11 で既に示したから第2式＝第3式を示せばよい．$f_j\in C_0(S)$, $\alpha>0$ とする．まず，$\alpha_n>0$

---

1) $\tau<\zeta$ ではいつも x_τ^- が存在するから，この仮定が問題にしているのは $\tau=\zeta$ の場合である。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

として

$$(4.3)\quad \int_{t_{n-1}}^{\infty} e^{-\alpha_n t_n} dt_n\, E_a\Big[\int_{t_n}^{\infty} \prod_{j=0}^{n} f_j(X_{t-t_j}) e^{-\alpha t} b(dt)\Big]$$

$$= \int_{t_{n-1}}^{\infty} e^{-(\alpha+\alpha_n)t_n} dt_n \int\cdots\int \mu(da_0) f_0(a_0) p(t_1, a_1, a_0) m(da_1) f_1(a_1) \cdots$$

$$\cdots p(t_n - t_{n-1}, a_n, a_{n-1}) m(da_n) f_n(a_n) g_\alpha(a, x_n)$$

を証明しよう。(3.10) により $n-1$ について (4.3) がいえたとすると

$$(4.3)\text{の左辺} = e^{-(\alpha+\alpha_n)t_{n-1}} \int\cdots\int \mu(da_0) f_0(a_0) p(t_1, a_1, a_0) m(da_1)$$

$$\cdot f_1(a_1) \cdots p(t_{n-1} - t_{n-2}, a_{n-1}, a_{n-2}) m(da_{n-1}) f_{n-1}(a_{n-1}) g_{\alpha+\alpha_n}(a_n, a_{n-1}) m(dx_n)$$

$$\cdot f_n(a_n) g_\alpha(a, a_n) = (4.3)\text{ の右辺}.$$

すなわち n について (4.3) がいえる。(4.1) を用いれば同じ計算で (4.3) が $n=1$ の時いえるから，結局，(4.3) が証明された。

Lemma 3.9 の証明と同じ論法で，(4.2) の第2式は t_n について右連続である。一方，(4.2) の第3式も，$\alpha > 0$ と μ, m が compact 集合に対し有限なことと A 4.1. 4) を用いれば，t_n について右連続である。故に，(4.3) の Laplace 変換をはずすことができ，(4.2) の第2式＝第3式がいえた。$\alpha = 0$ のときは $\alpha > 0$ の極限をとればよい。 q.e.d.

前節と同様，σ-finite な測度 ν を初期分布にとり，$\eta(a)$, S_η, S_0 を (3.11), (3.12) によって定義する。仮定として，

A.4.3. 任意の compact 集合 K に対し

$$(4.4)\qquad P_\nu[z_t \in K] < \infty \qquad (\forall t \geq 0).$$

Lem. 3.7 と同様に，次のことがいえる。

Lemma 4.2. $P_\nu[z_t \in S_0] = 0 \qquad (\forall t \geq 0).$

われわれの目標は次の定理である。

定理 4.3. standard process X. は A.4.1 をみたし，τ は A.4.2 をみたす regular L-time，ν は A.4.3 をみたす σ-finite な測度とする。この時初期分布 ν の X_t に対する τ からの reversed process z_t は時間的一様なマルコフ性をもつ。その遷移確率は

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(4.5) $$P_\nu[z_t \in db \mid z_s = a] = p(t-s, b, a)\frac{\eta(b)}{\eta(a)} m(db)$$

$(0 \leq s < t)$ であり，その初期分布は

(4.6) $$P_\nu[z_0 \in db] = \eta(b)\mu(db)$$

である。

証明　(4.6) は Lem. 2.11 と (4.1) から明らか．(4.5) をいうには，任意の $n \geq 1$, $0 = t_0 < \cdots < t_n$. $f_0, \cdots, f_n \in C_0(S)$ に対し

(4.7) $$E_\nu[\prod_{j=0}^{n} f_j(z_{t_j}) : t_n < \tau < \infty] = E_\nu[\prod_{j=0}^{n-1} f_j(z_{t_j})\chi_{S_\eta}(z_{t_{n-1}})v_{f_n}(t_n - t_{n-1}, z_{t_{n-1}}) : t_{n-1} < \tau < \infty]$$

をいえばよい，ところが定理 4.1, Lem. 4.2 により，

$$(4.7)\text{の右辺} = E_\nu[\prod_{j=0}^{n} f_j(z_j)\chi_{S_\eta}(z_{n-1}) : t_n < \tau < \infty]$$
$$= \int\cdots\int \mu(da_0)f_0(a_0)p(t_1, a_1, a_0)m(da_1)f_1(a_1)\cdots p(t_{n-1}-t_{n-2}, a_{n-1}, a_{n-2})m(da_{n-1})$$
$$\cdot f_{n-1}(a_{n-1})\chi_{S_\eta}(a_{n-1})v_{f_n}(t_n - t_{n-1}, a_{n-1})\eta(a_{n-1})$$
$$= (4.7)\text{の左辺}.$$

ただし，$n=1$ の時は第2式は $\int \mu(da_0)f_0(a_0)\chi_{S_\eta}(a_0)v_{f_1}(t_1, a_0)\eta(a_0)$ とする。

注意 4.4　条件 A 4.2 (2) をもっと見やすい条件でおきかえることを考えよう。A 4.1 があれば，次の A 4.4 または A 4.5 から A 4.2 (2) がいえる。

A 4.4　$g_\alpha(a, b)$ を (3.2) で定義した時，

1)　$g_\alpha(a, b)$ は a について，α-excessive かつ $S-b$ で α-harmonic $(\forall \alpha \geq 0)$.

2)　σ-finite な測度 μ が存在して

$$E_a[\int_0^\infty e^{-\alpha t} b(dt)] = \int g_\alpha(a, b)\mu(db), \qquad (\exists \alpha \geq 0).$$

A 4.5.　1)　A 4.4 1) と同じ

2)　$G_\alpha^* f(a) = \int m(db)f(b)g_\alpha(b, a)$ は $C_\infty(S)$ を $C_\infty(S)$ にうつし，$G_\alpha^*[C_\infty(S)]$ は $C_\infty(S)$ で dense. $(\alpha \geq 0)$.

証明．A 4.4 が十分条件であることは第2章で証明した．A 4.5 を仮定しよう．開集合列 $\{G_n\}$ を，G_n^c が compact かつ $G_n^c \uparrow S$ に

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

とると $\ell(a)=P_a[0<\tau<\infty]=E_a[b(\infty)]$ は

$$E_a[\ell(x_{\sigma_{G_n}})]=E_a[b(\infty)-b(\sigma_{G_n})]\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

をみたす。故に、[6](下) p. 115, Prop. 5.1 によって、一意的に σ-*finite* な測度 μ が定まって $\ell(a)=\int g_0(a,b)\,\mu(db)$ と表わされる。すなわち A4.4 がいえた。 q.e.d.

注意 4.4 と §2 の結果により、τ が特に *last exit time* の時は次の結論を得る。

<u>定理 4.5</u> X を A4.1, A4.5 をみたす *standard process* とし、開集合 D を、$\bar{D}$ の点がすべて D の *regular point* で、$P_a[\zeta_D<\infty]=1$ かつ $P_a[x_{\zeta_D}^{-}$ が S に存在$]=1$ とする。ν を A4.3 をみたす σ-*finite* な測度とすると、初期分布 ν の x_t に対する ζ_D からの *reversed process* z_t, $t\geq 0$ は時間的一様なマルコフ性をもち、遷移確率は

$$P_\nu[z_t\in db\mid z_s=a]=p(t-s,b,a)\frac{\eta(b)}{\eta(a)}\,m(db),\quad 0\leq s<t.$$

仮定 A4.4 i) について の簡単な注意を与えておく。

<u>Proposition 4.5</u> $p(t,a,b)$ が存在して A.3.1 を満し、加えて、i) *compact support* の連続函数 f に対し、$\int m(da)f(a)g_\alpha(a,b)$ は連続函数 $(\alpha\geq 0)$. ii) f が連続なら

$$\lim_{t\downarrow 0}\int m(da)f(a)p(t,a,b)=f(b).$$

を満すならば、$g_\alpha(a,b)$ は A4.4 i) を満す。

<u>証明</u> $g_\alpha(a,b)$ が a の函数として α-*excessive* であることは

$$E_a[g_\alpha(x_t,b)e^{-\alpha t}]=\int_t^\infty e^{-\alpha s}p(s,a,b)\,ds\uparrow g_\alpha(a,b)\ (t\downarrow 0).$$

である。次に $b\in D$ なる開集合に対し、

$g_\alpha(a,b)=E_a[e^{-\alpha\sigma_D}g_\alpha(x_{\sigma_D},b)]$ を示す。*support* が D に含まれる 任意の $f\in B(S)$ を取ると

$$H_D^\alpha G_\alpha f(a)=E_a\left[\int_{\sigma_D}^\infty e^{-\alpha t}f(x_t)\,dt\right]=G_\alpha f(a)$$

従って、m-a.e $b\in D$ に対し

$$g_\alpha(a,b)=E_a[e^{-\alpha\sigma_D}g_\alpha(x_{\sigma_D},b)]\equiv H_D^\alpha g_\alpha(a,b)$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

である。次に，f を $f(b)=1$. $f(a)=0$ $\forall a \notin D$. $f \leqq 1$ なる連続函数. $h \in C_0(S)$ とすると，

$$\int h(a) m(da) g_\alpha(a,b) = \lim_{t \downarrow 0} \iint h(a) m(da) g_\alpha(a,c) f(c) m(dc) e^{\alpha t} p(t,c,b)$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \iint h(a) m(da) H_D^\alpha g_\alpha(a,c) f(c) m(dc) e^{-\alpha t} p(t,c,b)$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \iint h(a) m(da) H_D^\alpha (a,dc) \int_t^\infty e^{-\alpha s} p(s,c,b) ds$$

$$- \lim_{t \downarrow 0} \iint h(a) m(da) H_D^\alpha g_\alpha(a,c)(1-f(c)) m(dc) e^{-\alpha t} p(t,c,b)$$

オ一項 $= \int h(a) m(da) H_D^\alpha g_\alpha(a,b)$

$|$ オ二項 $| \leqq K \cdot \lim_{t \downarrow 0} \int (1-f(c)) m(dc) p(t,c,b) = 0$

ただし $\left| \int h(a) m(da) H_D^\alpha g_\alpha(a,c) \right| \leqq \int |h(a)| m(da) g_\alpha(a,c) \leqq K$. すなわち

$$\int h(a) m(da) g_\alpha(a,b) = \int h(a) m(da) H_D^\alpha g_\alpha(a,b) \qquad \forall b \in S.$$

従って，

$$H_D^\alpha g_\alpha(a,b) = g_\alpha(a,b) \qquad \forall b \in S, \ m\text{-a.e. } a \in S.$$

ところが，両辺とも a の函数として，α-*excessive* だから，$\forall a \in S$ で成立つ. q.e.d.

§5. *Killing time* からの *reversed process*.

この節では X を *conservative* とし，それから，連続な *multiplicative functional* により *killing* して得られた *subprocess* を $\overline{X}$ とし，$\overline{X}$ の *killing time* $\overline{\zeta}$ からの *reversed process* を調べる．方針として，§4 の仮定をみたすための十分条件を与えることにする。

A.5.1. 1) $m(\text{open} \neq \phi) > 0$ なる σ-*finite* な測度 m と，三変数の可測函数 $p(t,a,b)$ が存在して，

$$E_a(X_t \in E) = \int_E p(t,a,b) m(db) \qquad (t \geqq 0, \ E \in \mathcal{B}).$$

2) $p(t,a,b)$ は b について連続.

3) $0<t$ を固定すると (a,b) について有界.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

4) 任意の $f \in B(S)$ に対し $E_a[f(x_t)] \in C(S)$

5) $g_\alpha(a,b) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t,a,b)\,dt$ とおくと，aの函数として，α-excessive かつ $S \setminus b$ で α-harmonic．$(\alpha > 0)$．

A.5.1 から明らかに．

$$(5.1) \qquad p(t,a,b) \geqq 0$$

$$(5.2) \qquad \int p(t,a,b)\,m(db)\,p(t,b,c) = p(t+s,a,c)$$

A.5.2. 連続な additive functional φ_t と σ-finite 測度μが存在して，

$$(5.3) \qquad E_a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\varphi(dt)\right] = \int g_\alpha(a,b)\,\mu(db) < \infty \qquad (\alpha > 0)$$

且つ，aの函数として，uniformly α-excessive．

以上の仮定をおき $e^{-\varphi_t}$による subprocess を $\overline{X}$ とする．才2章で示したように．

Lemma 5.1. A 5.1 (5) と (5.3) から，

$$(5.4) \qquad E_a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\varphi(dt)\right] = \int g_\alpha(a,b)\,f(b)\,\mu(db) \qquad (\forall f \in B(S))$$

定義 5.2. $q(t,a,b) = p(t,a,b) - E_a\left[\int_0^t p(t-s,x_s,b)\,e^{-\varphi_s}\varphi(ds)\right]$

定理 5.3 i) $\int_E q(t,a,b)\,m(db) = \overline{P}_a[\overline{x}_t \in E]$．

ii) $0 \leqq q(t,a,b) \leqq p(t,a,b)$

iii) $\int q(t,a,b)\,m(db)\,q(s,b,c) = q(t+s,a,c)$

iv) 任意の $f \in B(S)$ に対し，$E_a[f(\overline{x}_t)] \in C(S)$．

v) $q(t,a,b)$ は (t,b)を固定すると，aについて有界連続．

vi) $q(t,a,b)$ は $t>0$ について右連続．

Lemma 5.4. $f \in B(S)$ に対し．

$$(5.5) \qquad E_a\left[\int_0^t E_{x_s}(f(x_{t-s}))\,e^{-\varphi_s}\varphi(ds)\right] = E_a[(1-e^{-\varphi_t})f(x_t)].$$

証明 φ_sの右連続逆函数をτ_sとすると（才1章参照），

$$E_a\left[\int_0^t E_{x_s}[f(x_{t-s})]\,e^{-\varphi_s}d\varphi_s\right] = E_a\left[\int_0^{\varphi_t}[f(x_{t-r})]\Big|_{r=\tau_s} e^{-s}ds\right]$$

τ_s は Markov time であるから才1章 Lem. 1.1 により

$$= \int_0^\infty e^{-s}ds\,E_a[\chi_{[s<\varphi_t]}\,E_a[f(x_{t-\tau_s}(w^+_{\tau_s}))\,|\,N_{\tau_s}]]$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$= \int_0^\infty e^{-s} ds \; E_a[\chi_{[s<\varphi_t]} f(x_t)]$$

$$= E_a[\int_0^{\varphi_t} e^{-s} ds\, f(x_t)] \qquad q.e.d.$$

（定理5.3.の証明）

i) $f \in B(S)$, $f \geqq 0$ に対し.

$$\int E_a[\int_0^t p(t-s, x_s, b) e^{-\varphi_s} d\varphi_s] f(b) m(db)$$

$$= E_a[\int_0^t E_{x_s}[f(x_{t-s})] e^{-\varphi_s} d\varphi_s] \qquad \text{Lem. 5.4 により}$$

$$= E_a[f(x_t)(1-e^{-\varphi_t})]$$

$$= \int p(t, a, b) f(b) m(db) - E_a[f(\bar{x}_t)]$$

ii) $g(t,a,b) \leqq p(t,a,b)$ は定義から明らか。i)により m-a.e. b について $g(t,a,b) \geqq 0$. ところが, A5.1. 2) と定義5.2により $g(t,a,b)$ は b について上半連続だから, 例外点は存在しない。

iii) $\int g(t,a,b) m(db)\, g(s,b,c) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$.

$$I_1 = \int p(t,a,b) m(db) p(s,b,c) = p(t+s, a, c)$$

$$I_2 = -\int p(t,a,b) m(db) E_b[\int_0^s p(s-r, x_r, c) e^{-\varphi_r} d\varphi_r]$$

$$I_3 = -\int E_a[\int_0^t p(t-u, x_u, b) e^{-\varphi_u} d\varphi_u] m(db) p(s,b,c)$$

$$I_4 = \int E_a[\int_0^t p(t-u, x_u, b) e^{-\varphi_u} d\varphi_u] m(db) E_b[\int_0^s p(s-r, x_r, c) e^{-\varphi_r} d\varphi_r]$$

ii)により各項は, 絶対値が, I_1 でおさえられるので, 有限である。各項を変形して,

$$I_2 = -E_a[E_{x_t}[\int_0^s p(s-r, x_r, c) e^{-\varphi_r} d\varphi_r]]$$

$$I_3 = -E_a[\int_0^t p(t+s-u, x_u, c) e^{-\varphi_u} d\varphi_u]$$

$$I_4 = E_a[\int_0^t e^{-\varphi_u} d\varphi_u E_{x_u}[E_{x_{t-u}}[\int_0^s p(s-r, x_r, c)] e^{-\varphi_r} d\varphi_r]]]$$

$E.[\int_0^s p(s-r, x_r, c) e^{-\varphi_r} d\varphi_r] \leqq p(s, \cdot, c)$ は有界, 従って, Lemma 5.4 を用いて

$$I_4 = E_a[(1-e^{-\varphi_t}) E_{x_t}[\int_0^s p(s-r, x_r, c) e^{-\varphi_r} d\varphi_r]].$$

$$I_2 + I_3 + I_4 = -E_a[\int_0^t p(t+s-u, x_u, c) e^{-\varphi_u} d\varphi_u]$$
$$\qquad - E_a[e^{-\varphi_t} E_{x_t}[\int_0^s p(s-r, x_r, c) e^{-\varphi_r} d\varphi_r]]$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$= -E_a\left[\int_0^{t+s} p(t+s-u, x_u, c)\, e^{-\varphi_u} d\varphi_u\right]$$

以上まとめて，$\sum_{i=1}^{4} I_i = g(t+s, a, c)$.

iv) $f \in B(S)$ に対し，

$g_h(a) = E_a[E_{x_t}[f(x_{t-h})e^{-\varphi_{t-h}}]]$ とおくと，A 5.1 4) により

a について連続．

$|g_h(a) - E_a[f(x_t)e^{-\varphi_t}]| = |E_a[(1-e^{-\varphi_h})E_{x_h}[f(x_{t-h})e^{-\varphi_{t-h}}]]|$

$\leq \|f\| E_a[1-e^{-\varphi_h}] \to 0 \quad (h \downarrow 0)$

この収束は a について一様である（Prop. 2.12 の証明の後半を見よ）．

v) $p(t, a, b)$ は a について有界だから，ii) により $g(t, a, b)$ も a について有界．又，$0 < t_0 < t$ をとると iii) により $g(t, a, b)$ $= E_a[g(t-t_0, x_{t_0}, b)]$ であるが，これは iv) により a について連続．

vi) $g(t+r, a, b) = E_a[g(t, x_r, b)e^{-\varphi_r}]$

path は右連続であるから v) を使えば vi) が結論される．

q.e.d.

定義 5.5. $\bar{g}_\alpha(a, b) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \bar{g}(t, a, b)\, dt$ とおく．$(\alpha \geq 0)$

$\bar{G}_\alpha f(a) = \bar{E}_a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\, dt\right] = \int \bar{g}_\alpha(a, b) f(b)\, m(db)$

である．

Lemma 5.6. $g_\alpha(a, b) = \bar{g}_\alpha(a, b) + E_a\left[\int_0^\infty g_\alpha(x_s, b)\, e^{-\alpha s - \varphi_s} d\varphi_s\right]$ $\alpha > 0$.

証明 $\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt\, E_a\left[\int_0^t p(t-s, x_s, b)\, e^{-\varphi_s} d\varphi_s\right]$

$= E_a\left[\int_0^\infty e^{-\varphi_s} d\varphi_s \int_s^\infty p(t-s, x_s, b)\, e^{-\alpha t} dt\right]$

$= E_a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s - \varphi_s} d\varphi_s \int_0^\infty p(r, x_s, b)\, e^{-\alpha r} dr\right]$

$= E_a\left[\int_0^\infty g_\alpha(x_s, b)\, e^{-\alpha s - \varphi_s} d\varphi_s\right]$ q.e.d.

Lemma 5.7. $K_\beta^\alpha f(a) = E_a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s - \beta\varphi_s} f(x_s)\, d\varphi_s\right]$ とおくと

(5.6) $K_1^\alpha f(a) = \int \bar{g}_\alpha(a, b) f(b)\, \mu(db)$ $(\alpha \geq 0,\ f \in B(S))$.

証明 $\alpha > 0$ に対し，第 2 章 §2 で示したように

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$K_1^\alpha f(a) = K_0^\alpha f(a) - K_1^\alpha \cdot K_0^\alpha f(a)$$

Lemma 5.1 により

$$= \int g_\alpha(a,b) f(b)\mu(db) - E_a[\int_0^\infty e^{-\alpha t-\varphi_t} d\varphi_t \int g_\alpha(x_t,b) f(b)\mu(db)]$$

$$= \int \{g_\alpha(a,b) - E_a[\int_0^\infty e^{-\alpha t-\varphi_t} d\varphi_t\, g_\alpha(x_t,b)]\} f(b)\mu(db)$$

$$= \int \bar{g}_\alpha(a,b) f(b)\mu(db)$$

$\alpha \downarrow 0$ とすれば (5.6) で $\alpha=0$ の場合を得る。$\bar{g}_\alpha(a,b)\uparrow \bar{g}_0(a,b)$ と $|K_1^0 f(a)| \leq \|f\|$ に注意すればよい。 q.e.d.

Lemma 5.8. $\bar{X}$ の killing time $\bar{\zeta}$ は $\bar{X}$ の regular L-time であって，それから定まる L-additive functional $b(t)$ は，

(5.7) $$E_a[\int_0^\infty f(\bar{x}_t) e^{-\alpha t} b(dt)] = \int \bar{g}_\alpha(a,b) f(b)\mu(db) \quad (\alpha \geqq 0,\ f\in B(S))$$

を満足する。

証明　Prop. 2.12 の (2.11) がみたされているから，$\bar{\zeta}$ は regular L-time である。X が conservative だから $\bar{\zeta}<\infty$ ならば $x_{\bar{\zeta}-}$ が存在する。故に Lem. 2.11 により

$$\bar{E}_a[\int_0^\infty f(\bar{x}_t)e^{-\alpha t} b(dt)] = \bar{E}_a[f(\bar{x}_{\zeta-})e^{-\alpha\bar{\zeta}} : 0<\bar{\zeta}<\infty]$$

Lemma 2.11 と同様な計算により（X が conservative であることを用いる），

$$= E_a[\int_0^\infty f(x_t) e^{-\alpha t} e^{-\varphi_t} d\varphi_t], \qquad \text{Lemma 5.7 により}$$

$$= \int \bar{g}_\alpha(a,b) f(b)\mu(db)$$

q.e.d.

定理 5.3 により $\bar{X}$ は A4.1 をみたし，また上の Lemma により A4.2 もみたされるから，次の結論が得られる。[1]

定理 5.9　A5.1 をみたすマルコフ過程 X を A5.2 をみたす additive functional で killing した process を $\bar{X}$ とする。初期分布 ν の $\bar{X}$ に対する killing time $\bar{\zeta}$ からの reversed process z_t, $t\geqq 0$ は時間的一様なマルコフ性をもち，

1) $\bar{X}$ は必ずしも standard process ではないが，$l(a)=\bar{P}_a[0<\bar{\zeta}<\infty]$ が uniformly $\bar{X}$-excessive で，Lem. 3.5 がいえるために，同じように行く。この節に限り，次の定理も X の standard を仮定しなくてもよい。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(5.8) $\overline{P}_\nu[z(t)\in db \mid z_s=a]=g(t-s,b,a)\frac{\eta(b)}{\eta(a)}m(db),\ (0\le s<t)$

(5.9) $\overline{P}_\nu[z_0\in db]=\eta(b)\mu(db)$

である. ただし ν は任意の compact 集合 K と $t\geq 0$ に対し

$\overline{P}_\nu[z_t\in K]<\infty$ なる σ-finite measure.

(5.10) $\eta(a)=\int\nu(db)\,\overline{g}_0(b,a)$

とする。

§6. Adjoint Process の優調和変換との関係

この節は adjoint process の存在がわかっている場合の議論である. 次の仮定をおく.

A 6.1. σ-finite 測度 m と $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$-可測函数 $g_\alpha(a,b)\geq 0$ $(\alpha\geq 0)$ が存在して,

1). $G_\alpha f(a)=\int g_\alpha(a,b)f(b)m(db)$

2) $\hat{G}_\alpha f(a)=\int m(db)f(b)g_\alpha(b,a)$ を resolvent に持つマルコフ過程 $\hat{X}$ が存在する.

3) $g_\alpha(a,b)$ は b の函数として, $(\hat{X},\alpha)$-excessive

τ を X の regular L-time で A.4.2 をみたすとし $z_t, t\geq 0$ を X_t の τ からの reversed process とする.

A 6.2 ν は σ-finite な測度で, 任意の compact 集合 K に対し

(6.1) $\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt\ P_\nu[z_t\in K]<\infty.\quad(\alpha>0).$

(6.2) $P_\nu[z_0\in K]<\infty.$

優調和変換について簡単にのべる. e を X の excessive function とし, $S_e=\{a\,;\,0<e(a)<\infty\}$ 上に $P^e(t,a,E)$ を次の様に定義する。 $a\in S_e$, $E\subset S_e$ に対し

(6.3) $P^e(t,a,E)=\frac{1}{e(a)}E_a[e(X_t)\chi_E(X_t)]$

$$=\frac{1}{e(a)}\int_E P(t,a,db)\,e(b).$$

Lemma 6.1. i) $P^e(t,a,S_e)\leq 1\qquad(a\in S_e,\ t\geq 0)$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

ii) $\int P^e(t,a,db)\,P^e(S,b,E) = P^e(t+S,a,E)$

$$(t,S \geqq 0,\ a \in S_e,\ E \subset S_e)$$

証明 i) $P^e(t,a,S_e) \leqq \frac{1}{e(a)} E_a[e(X_t)] \leqq 1.$

ii) $S_1 = \{a\,;\,e(a)=0\}$, $S_2 = \{a\,;\,e(a)=\infty\}$ とおく。

$a \in S_e$ なら, $P(t,a,S_2)=0$ である。何故なら、$P(t,a,S_2)>0$ とすると

$\infty > e(a) \geqq \int_{S_2} P(t,a,db)\,e(b) = \infty$ となり矛盾する。

又, $a \in S_1$ に対しては, $E_a[e(X_t)]=0$ であることに注意して, $a \in S_e$ に対し,

$$\int_{S_e} P^e(t,a,db)\,P^e(S,b,E)$$
$$= \frac{1}{e(a)} \int_{S_e} P(t,a,db)\,E_b[e(X_s)\chi_E(X_s)]$$
$$= \frac{1}{e(a)} \int_S P(t,a,db)\,E_b[e(X_s)\chi_E(X_s)]$$
$$= \frac{1}{e(a)} E_a[e(X_{s+t})\chi_E(X_{s+t})] = P^e(t+s,a,E). \quad q.e.d.$$

従って, $P^e(t,a,E)$ は S_e 上の *transition probability* である。

$P^e(t,a,E)$ を $P(t,a,E)$ の e による優調和変換と呼ぶ。

$P^e(t,a,E)$ を遷移確率として持つ S_e 上のマルコフ過程を X の e による優調和変換と呼び, X^e で表わす。

Lemma 6.2. X の e による優調和変換 $X^e = (X_t, \mathcal{N}_t, P^e_x, x \in S_e)$ が存在する。X が右連続ならば X^e も右連続である。(ただし *path space* は S 上で右連続な *path* の全体とする。)

(証明は [10] 参照)。

次の定理を説明しよう。

定理 6.3. A 6.1, A 6.2 の仮定の下に, 初期分布 ν の X に対する τ からの *reversed process* は, $\hat{X}$ の η による優調和変換 $\hat{X}^\eta$ の初期分布 $\eta(a)\mu(da)$ の *version* である。ここで

$\eta(a) = \int \nu(db)\,g_0(b,a)$

Lemma 6.4 $f_1, \cdots, f_n \in B(S)$ とすると,

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_1 t_1} dt_1 \int_{t_1}^\infty e^{-\alpha_2 t_2} dt_2 \int_{t_2}^\infty \cdots \int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\alpha_n t_n} dt_n E_a[\prod_{j=1}^n f_j(x_{t_j})]$$

$$= G_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}(f_1 G_{\alpha_2+\cdots+\alpha_n}(f_2 G_{\alpha_3+\cdots+\alpha_n}(f_3 \cdots\cdots G_{\alpha_n} f_n)) \cdots)(a).$$

証明　帰納法による．$n=1$ のときは明らか．$n-1$ のとき成り立つとせよ．

$$\int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\alpha_n t_n} dt_n E_a[\prod_{j=1}^n f_j(x_{t_j})]$$

$$= \int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\alpha_n t_n} dt_n E_a[\prod_{j=1}^{n-1} f_j(x_{t_j}) E_{x_{t_{n-1}}}[f_n(x_{t_n - t_{n-1}})]]$$

$$= e^{-\alpha_n t_{n-1}} E_a[\prod_{j=1}^{n-1} f_j(x_{t_j}) G_{\alpha_n} f_n(x_{t_{n-1}})]$$

によって，n の時も成り立つ．　　　　q.e.d.

Lemma 6.5.　$S_\eta = \{a : 0 < \eta(a) < \infty\}$, $S_0 = S - S_\eta$ とおくと

(6.4)　$\int_0^\infty e^{-\alpha t} P_\nu[z_t \in S_0] dt = 0$　　$(\alpha > 0)$

(6.5)　$P_\nu[z_0 \in S_0] = 0$

証明　(6.4) は Lem. 3.7 と同様．(6.5) には (6.2) を用いればよい．

(定理 6.3 の証明)　$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $f_0, \cdots, f_n \in C_0(S)$ に対して

(6.6)　$E_\nu[\prod_{j=0}^n f_j(x_{\tau - t_j}) : t_n < \tau < \infty] = \hat{E}^\eta_{\mu\eta}[\prod_{j=0}^n f_j(x_{t_j})]$

をいえばよい．Lem. 6.5 により

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_1 t_1} dt_1 \int_{t_1}^\infty e^{-\alpha_2 t_2} dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\alpha_n t_n} dt_n E_\nu[\prod_{j=0}^n f_j(x_{\tau - t_j}) ; t_n < \tau < \infty]$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha_1 t_1} dt_1 \int_{t_1}^\infty \cdots \int_{t_{n-1}}^\infty e^{-\alpha_n t_n} dt_n E_\nu[\prod_{j=0}^n f_j \chi_{S_\eta}(x_{\tau - t_j}) : t_n < \tau < \infty]$$

定理 3.4 と A 4.2 (2) により

$$= \int_{S_\eta} \cdots \int_{S_\eta} \mu(da_0) f_0(a_0) g_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}(a_1, a_0) m(da_1) f_1(a_1) g_{\alpha_2+\cdots+\alpha_n}(a_2, a_1) m(da_2) f_2(a_2)$$

$$\cdots\cdots g_{\alpha_n}(a_n, a_{n-1}) m(da_n) f_n(a_n) \eta(a_n)$$

$$= \int_{S_\eta} \cdots \int_{S_\eta} \mu(da_0) \eta(a_0) f_0(a_0) \frac{1}{\eta(a_0)} g_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}(a_1, a_0) \eta(a_1) m(da_1) f_1(a_1)$$

$$\cdots\cdots \frac{1}{\eta(a_{n-1})} g_{\alpha_n}(a_n, a_{n-1}) \eta(a_n) m(da_n) f_n(a_n)$$

$$= \int_{S_\eta} \mu(da) \eta(a) f_0(a) \hat{G}^\eta_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}(f_1 \hat{G}^\eta_{\alpha_2+\cdots+\alpha_n}(f_2 \hat{G}^\eta_{\alpha_3+\cdots+\alpha_n} \cdots \hat{G}^\eta_{\alpha_n} f_n) \cdots)(a).$$

Lem. 6.4 により

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$= \int_0^\infty e^{-x_1 t_1} dt_1 \int_{t_1}^\infty e^{-x_2 t_2} dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^\infty e^{-x_n t_n} dt_n \hat{E}^{n}_{\mu\eta}\left[\prod_{j=0}^{n} f_j(X_{t_j})\right]$$

(6.6) の両辺は $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ について右連続だから，上の計算の結果の Laplace 変換をはずせて (6.6) が成立する。 q.e.d.

開集合 D からの last exit time ξ_D に対し A 4.2, 2) の条件を吟味しよう。

Lemma 6.6. X は A 6.1 をみたし，更に

(6.7) $\hat{X}$ も standard process. $g_\alpha(a,b)$ は a の函数として (X,α)-excessive.

とする。D を Prop. 2.8 の条件をみたす開集合，ξ_D からきまった L-additive functional を $b(t,w)$ とすると，$\bar{D}$ に support をもつ σ-finite な測度 μ_D が存在して，

(6.8) $E_a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)\, b(dt)\right] = \int g_\alpha(a,b) f(b)\, \mu_D(db), \quad \alpha \geq 0, \ f \in B(S).$

証明 $b^\alpha(t) = \int_0^t e^{-\alpha s}\, b(ds) \quad (\alpha > 0)$ とおく。$E_a[b^\alpha(\infty)]$ は regular だから μ_D が存在して

(6.9) $E_a[b^\alpha(\infty)] = \int g_\alpha(a,b)\, \mu_D(db)$

([9] P. 99 参照)。任意の Markov time σ に対し

$E_a[b^\alpha(\sigma)] \leq E_a[b(\sigma)] = l(a) - E_a[l(X_\sigma)] = P_a[0 < \xi_D \leq \sigma]$

であるから $E_a[b^\alpha(\infty)]$ は $\bar{D}$ の外で (X,α)-harmonic，従って μ_D の support は $\bar{D}$ を出ない ([9] P. 101)。しかも次 2 章 §6 で論じたように，μ_D は α によらないから，(6.9) で $\alpha \downarrow 0$ とすると

(6.10) $E_a[b(\infty)] = \int g_0(a,b)\, \mu(db).$

(6.9), (6.10) から (6.8) がいえることは次 2 章で示した。

§7. Approximate Markov Process.

§6 までで取扱った process は時間変数が $[0,\infty]$ であった。この節で扱う process は時間変数が $[-\infty, \infty]$ を動き，生まれる時間

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

と死ぬ時間は random である。

定義 7.1. 次の各要素が与えられたとせよ。

1) space Ω, Ω 上の σ-field $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ 上の測度 P ($P(\Omega)=\infty$ を許す).

2) Ω 上の函数 $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$。$-\infty \leqq \alpha(\omega) < \infty$, $-\infty < \beta(\omega) \leqq \infty$, $\alpha(\omega) \leqq \beta(\omega)$ を満す。

3) $(\alpha(\omega), \beta(\omega)) \times \Omega$ 上の函数 $y(t,\omega)$. 値は locally compact space S 上にとる。もし $\alpha(\omega) > -\infty$ ならば $y(\alpha(\omega), \omega) \in S$.

(y_t, α, β, P) が次の条件を満すとき random process であるという。

1) $\mathfrak{M} \ni \{y(t) \in A,\ \alpha \leqq t < \beta\}$
$$(\forall\, t \in (-\infty, \infty),\ \forall\, A \in \mathcal{B})$$

2) $P\,[\,y(t) \in A,\ \alpha \leqq t < \beta\,] < \infty$
$$(\forall\, A \in \mathcal{B},\ \text{compact closure.})$$

$\Omega_t = \{\alpha \leqq t < \beta\}$ とおく。

定義 7.2. $B = \Omega_t \cap \{y_t \in A\}$ ($\forall A$: compact) に対し,

(7.1) $$\int_B \Phi(\omega)\, P\,(d\omega) < \infty$$

のとき, $\Phi(\omega)$ は Ω_t 上で locally P-integrable であるという。

定義 7.3. $\mathfrak{M}_t$ は $\{y_r \in A\}$, ($\forall A \in \mathcal{B}$, $\forall r \leqq t$) の形の集合から生成された σ-field.

$\mathfrak{M}^t$ は $\{y_r \in A\}$, ($\forall A \in \mathcal{B}$, $\forall r \geqq t$) の形の集合から生成された σ-field.

定義 7.4. (A) 任意の $\mathfrak{M}_t$ ($\mathfrak{M}^t$)−可測で Ω_t 上で locally P-integrable な函数 f_1 (f_2) に対し,

(7.2) $$\mathcal{E}\,[f_1(\omega) f_2(\omega) \mid y_t] = \mathcal{E}\,[f_1 \mid y_t]\, \mathcal{E}\,[f_2 \mid y_t]$$

が成立するとき, (y_t, α, β, P) は Markov property を持つと云う。

ここで $\mathcal{E}[f] = \int f(\omega) P(d\omega)$, $\mathcal{E}[f \mid y_t]$ は conditional expectation.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(B) 更に transition probability $P(t,a,E)$ が存在して，任意の $s \leqq t$, A; compact に対し，

(7.3) $\mathcal{P}[y_t \in A \mid y_s] = P(t-s, y_s, A)$

となるとき，stationary Markov property を持つという。

定義 7.5. $\sigma(\omega)$ が次の性質を持つとき，$(y_t, \alpha, \beta, \mathcal{P})$ の reducing time という。

1) $\sigma(\omega)$ は $\mathcal{M}$-可測で $\alpha \leqq \sigma \leqq \beta$.

2) $\omega \in \Omega' = \{-\infty < \sigma < \infty\}$ に対し

$\gamma(\omega) = \beta(\omega) - \sigma(\omega)$, $y'(t,\omega) = y(\sigma(\omega)+t, \omega)$ $(\forall t \geqq 0)$

とおくと，$(y_t', 0, \gamma, \mathcal{P})$ は $(\Omega', \mathcal{M}')$ 上の stationary Markov property をもつ random process である。

このとき $(y_t', 0, \gamma, \mathcal{P})$ を $(y_t, \alpha, \beta, \mathcal{P})$ の σ による reduced process と呼ぶ。

定義 7.6. $(y_t, \alpha, \beta, \mathcal{P})$ が次の条件を満すとき approximate Markov process と呼ぶ。

$-\infty < \alpha^n(\omega) \leqq +\infty$ $\alpha^n \downarrow \alpha\ (n \to \infty)$ $\mathcal{P}$-a.e. を満す。

reducing time の列 $\{\alpha^n\}$ が存在して，各 reduced process の transition probability は n に依らない。

§8. Approximate Markov process の time reversion.

この節では $(y_t, \alpha, \beta, \mathcal{P})$ は approximate Markov process とする。次の仮定をおく。

A 8.1. 1) y_t の sample path は右連続。

2) $(y_t, \alpha, \beta, \mathcal{P})$ の $\{\alpha^n\}$ による全ての reduced process は一つの standard process と equivalent である。すなわち

$(y_t^n, 0, \gamma^n, \mathcal{P})$ を α^n による reduced process とし，

$\nu_n(A) = \mathcal{P}[y^n(0) \in A]$ とすると，standard process $X = (x_t,$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$\xi, \mathcal{F}_t, P_a$) が存在して, ($y_t^n, 0, \gamma^n, P$) は (x_t, P_{ν_n}) と equivalent ($\forall n$).

3) $\eta(A) = \mathcal{E}[\int_\alpha^\beta \chi_A(y_t)dt] < \infty$ ($\forall$ compact A).

定義 8.1. (y_t, α, β, P), ($y_t^m, 0, \gamma^m, P$) の集合 D からの last exit time を $\xi_D(\omega)$, $\xi_D^m(\omega)$ とする. i.e.

(8.1) $\xi_D(\omega) = \sup\{t ; y_t(\omega) \in D\}$ $(\sup\phi = -\infty)$

(8.2) $\xi_D(\omega) = \sup\{t \geqq 0 ; y_t^m(\omega) \in D\}$ $(\sup\phi = -\infty)$

Lemma 8.2. D が閉集合ならば $\xi_D(\omega)$, $\xi_D^m(\omega)$ は $\mathcal{M}$-可測.

証明 sample path が右連続だから。

Lemma 8.3. $m_0(\omega)$ が存在して, $\forall m \geqq m_0(\omega)$ に対し

(8.3) $\alpha^m(\omega) + \xi_D^m(\omega) = \xi_D(\omega)$.

証明 $\Omega_1 = \{\omega ; {}^\exists m_0(\omega), y_t^{m_0}(\omega) \in D \quad 0 \leqq {}^\exists t < \infty\}$

$\Omega_2 = \{\omega ; \forall m$ に対し, $y_t^m(\omega) \notin D, \ 0 \leqq \forall t < \infty\}$.

とおくと $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, $\omega \in \Omega_2$ ならば, $\xi_D^m(\omega) = -\infty$ ($\forall m$), $\xi_D(\omega) = -\infty$. 次に $\omega \in \Omega_1$ とすると,

$\forall m \geqq m_0(\omega)$に対し $\infty > t \geqq 0$ が存在して

$$y(\alpha^m + t, \omega) = y^m(t, \omega) \in D$$

であるから, $\xi_D(\omega) > \alpha^m(\omega)$. 従って

$$\xi_D(\omega) = \sup\{t + \alpha^m ; y(\alpha^m + t, \omega) \in D\} = \alpha^m(\omega) + \xi_D^m(\omega)$$

q.e.d.

定義 8.4. $\eta^m(A) = \mathcal{E}[\int_0^{\gamma^m} \chi(y^m(t))\,dt]$

(8.4) $\eta(A) = \mathcal{E}[\int_\alpha^\beta \chi_A(y(t))dt]$ とおく.

Lemma 8.5 $\eta^m(\forall m)$, η は transition probability $P(t, a, E)$ に関し excessive, 且つ $\eta^m \uparrow \eta$ $(m \to \infty)$ である.

証明 任意の $A \in \mathcal{B}$ に対し $\eta^m(A) = \mathcal{E}[\int_0^{\beta - \alpha^m} \chi_A(y(\alpha^m + t))dt]$

$$= \mathcal{E}[\int_{\alpha^m}^\beta \chi_A(y(t, \omega))dt] \underset{(m \uparrow \infty)}{\uparrow} \eta(A)$$

$$\int \eta^m(da) P(t, a, A) = \mathcal{E}[\int_0^{\gamma^m} P(t, y^m(\gamma), A)\, d\gamma]$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$= \mathcal{E}\left[\int_0^{\gamma^m - t} \chi_A(y^m(t+\gamma))d\gamma\right] = \mathcal{E}\left[\int_t^{\gamma^m} \chi_A(y^m(\gamma))d\gamma\right]$$

$$\leqq \eta^m(A) \leqq \eta(A). \quad (\forall A\,;\ compact)$$

$$\int \eta(da)P(t,a,A) = \lim \int \eta^m(da)P(t,a,A) \leqq \eta(A)$$

q.e.d.

定義 8.6. $\hat{\alpha}(\omega) = -\beta(\omega)$, $\hat{\beta}(\omega) = -\alpha(\omega)$, $\hat{y}_t(\omega) = y^-_{-t}(\omega) - (\lim_{s \downarrow t} y_{-s}(\omega))$ として得られた $(\hat{y}_t, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, P)$ を (y_t, α, β, P) の reversed process という。

以下では $(\hat{y}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, P)$ が approximate Markov process になることを示すのが目的である。§4, 又は §6 の結果を適用する必要上, A 8.1 に更に次の仮定を加える。

A 8.2. A.8.1. 2) の standard process が次の条件を満足する。

1) σ − finite な測度 m と $p(t,a,b) \geqq 0$ が存在して
$P(t,a,E) = \int_E p(t,a,b)m(db)$.

2) $g_\alpha(a,b) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t,a,b)\,dt \quad (\alpha \geqq 0)$ は A 4.1 と A 4.5 をみたす。

3) regular boundary[1] を持ち, compact closure の開集合の列 $\{D_k\}$ が存在して, $D_k \subset D_{k+1}$, $D_k \uparrow S$ を満す。

4) compact closure の開集合 D に対し,
a.e. P で $\xi_D < \infty$ かつ $y^-_{\xi_D}$ が存在。

定理 8.7. $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $E_j \in \mathcal{B}$ に対し,

(8.5) $$P[y^{m-}(\xi^m_{D_k} - t_j) \in E_j,\ 0 \leqq j \leqq n\,;\ t_n < \xi^m_{D_k}]$$
$$= \int\cdots\int \mu_{D_k}(da_0)\chi_{E_0}(a_0)p(t_1,a_1,a_0)m(da_1)\chi_{E_1}(a_1)p(t_2-t_1,a_2,a_1) m(da_2)\chi_{E_2}(a_2)$$
$$\cdots\cdots p(t_n - t_{n-1}, a_n, a_{n-1})\chi_{E_n}(a_n)\eta^m(da_n)$$

ここで μ_{D_k} は番号 m によらないある測度

証明 $y^m(0)$ の分布を ν_m とすると
$$P[y^{m-}(\xi^m_{D_k} - t_j) \in E_j,\ 0 \leqq j \leqq n.\ t_n < \xi^m_{D_k}]$$
$$= P_{\nu_m}[x^-(\xi_{D_k} - t_j) \in E_j,\ 0 \leqq j \leqq n.\ t_n < \xi^m_{D_k}]$$

---

[1] $\bar{D}$ の全ての点が D の regular point の時, D は regular boundary を持つと云う。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

故に定理4.1を用いればよい。 q.e.d.

次の仮定をおく。

A8.3. 任意のk, $t \geqq 0$, compact集合Kに対し

$$P[y^-(\xi_{D_k}-t)\in K,\ \xi_{D_k}-t>\alpha]<\infty$$

定理8.8 (y_t, α, β, P)はA.8.1及びA.8.2を満すとする。reversed process $(\hat{y}_t, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, P)$はapproximate Markov processであって、そのreducing timeは$\{-\xi_{D_k}\}$, transition probabilityは$\hat{P}(t, a, A)$である。但し、$\hat{P}$は

$$(8.6)\quad \hat{P}(t, a, A)=\int_A p(t, b, a)\frac{\eta(b)}{\eta(a)}m(db)$$

$$\eta(b)=\lim_{m\to\infty}\int \nu_m(da)\int_0^\infty p(t, a, b)\,dt\ ^{2)}$$

証明 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$, $E_j\in B$をとる。

$$B=\{y^-(\xi_{D_k}-t_j)\in E_j,\ 0\leqq j\leqq n;\ \xi_{D_k}^m-t_j>\alpha\}$$

$$B_m=\{y^{m-}(\xi_{D_k}^m-t_j)\in E_j,\ 0\leqq j\leqq n;\ \xi_{D_k}^m>t_n\}$$

とおくとB_mでは$\xi_{D_k}=\alpha^m+\xi_{D_k}^m$となり、$B_m\uparrow B$である。

定理8.7により

$$P[B_m]=\int\cdots\int\mu_{D_k}(da_0)\chi_{E_0}(a_0)\cdots p(t_n-t_{n-1}, a_n, a_{n-1})\chi_{E_n}(a_n)\eta^m(da_n)$$

この式で$m\to\infty$とすると

$$P[B]=\int\cdots\int\mu_{D_k}(da_0)\chi_{E_0}(a_0)\cdots p(t_n-t_{n-1}, a_n, a_{n-1})\chi_{E_n}(a_n)\eta(da_n)$$

$S_\eta=\{a: 0<\eta(a)<\infty\}$とおくとA8.3により

$$=\int\cdots\int\mu_{D_k}(da_0)\chi_{E_0}(a_0)\cdots\chi_{E_{n-1}}(a_{n-1})\chi_{S_\eta}(a_{n-1})\eta(da_{n-1})\hat{P}(t_n-t_{n-1}, a_{n-1}, E_n)$$

$$=\mathcal{E}[\hat{P}(t_n-t_{n-1}, y^-(\xi_{D_k}-t_{n-1}), E_n);\ y^-(\xi_{D_k}-t_j)\in E_j, 0\leqq j\leqq n-1]$$

$y^-(\xi_{D_k}-t_j)=\hat{y}(-\xi_{D_k}+t_j)$である。又、$\hat{y}^k(t)=\hat{y}(-\xi_{D_k}+t)$とおくと、

$$P[\hat{y}^k(t_j)\in E_j;\ 0\leqq j\leqq n]$$

$$=\mathcal{E}[\hat{P}[t_n-t_{n-1}, \hat{y}^k(t_{n-1}), E_n);\ \hat{y}^k(t_j)\in E_j, 0\leqq j\leqq n-1]$$

---

2) $\int\nu_m(da)\int_0^\infty p(t, a, b)\,dt$は$m$ a.e. bに対し↑故にlimitが存在し、$\eta(db)=\eta(b)m(db)$である。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

これから(7.2)に当るものも得られるから $\{-\xi_{D_k}\}$ は $(\hat{y}_t, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, P)$ を transition probability $\hat{P}(t, a, E)$ の stationary Markov property をもつ random process $(\hat{y}^k_t, 0, \hat{\gamma}^k, P)$ に reduce した。

また，$-\xi_{D_k} \downarrow -\beta = \hat{\alpha}$, $-\infty < -\xi_{D_k} \leqq +\infty$. であるから，証明は終る。

§9. Approximate Markov Processの構成

与えられた standard process $X = (x_t, \zeta, \mathfrak{F}_t, P_a)$ と σ-finite な excessive measure η とから approximate Markov process (y_t, α, β, P) を構成して，その reduced process が X と同じ transition probability $P(t, a, E)$ をもち，かつ，

$$(9.1) \qquad \mathcal{E}\left[\int_\alpha^\beta \chi_A(y_t)\,dt\right] = \eta(A) \qquad (A \in \mathcal{B})$$

が成り立つようにしたい。これが構成の問題である。

この構成を完全に行うことはまだ筆者にはできないが，その途中の段階として，次のようなものまでは構成できることを，以下述べることとしよう。

Ω, $\mathfrak{M}$, P, y_t, α, β は次のような要素である。

1) space Ω, Ω 上の field $\mathfrak{M}$ (σ-field とは限らない). $\mathfrak{M}$ 上の finitely additive function P (σ-additive と限らない). $0 \leqq P \leqq +\infty$.

2) Ω 上の函数 $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ で $-\infty < \alpha(\omega) < \beta(\omega) \leq +\infty$

3) $\omega \in \Omega$, $t \in [\alpha(\omega), \beta(\omega))$ に対して定まった函数 $y(t, \omega)$, 値は locally compact space S 上にとる。$y(t, \omega)$ は t に関して右連続。

4) Ω 上で定まった函数 $\alpha^m(\omega)$ があり，$\alpha^m(\omega) \leqq \beta(\omega)$ かつ $\alpha^m(\omega) \downarrow \alpha(\omega)$ $(m \to \infty)$. 更に，$\gamma^m(\omega) = \beta(\omega) - \alpha^m(\omega)$; $y^m(t, \omega) = y(\alpha^m(\omega) + t, \omega)$ $(0 \leq t < \gamma^m(\omega))$ とおき $\{y^m(t);$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$t \geq 0$ } から生成された Ω 上の σ-field を $\mathfrak{M}^m$ とおくと，$\mathfrak{M}^m \subset \mathfrak{M}$ かつ P は $\mathfrak{M}^m$ 上で measure となり，$(y^m(t), 0, \gamma^m; P)$ は stationary Markov property をもつ random process となる。そして，その transition probability は与えられた $P(t, a, E)$ と一致する。

5) $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}\left[\int_{\alpha_m}^{\beta} \chi_A(y_t)\,dt\right] = \eta(A)$ $\quad(A \in \mathcal{B},\ \bar{A}$ compact$)$.

まず，X に対して次の仮定をおく。

A 9.1. $f \in C_0$ に対し $Gf \in C_\infty$，かつ $G[C_0]$ は C_∞ で dense。ここで G は $G(a, A) = E_a\left[\int_0^\infty \chi_A(x_t)\,dt\right]$.

Hunt の結果から，必要ないくつかの lemma を簡単に述べる。くわしくは [5] 又は [7] を参照せよ。

excessive measure η に対して有界測度の列 $\{\mu_n\}$ が存在して，$\mu_n G \uparrow \eta$ である[1]。$\mu_n H_A G \uparrow$ であるから

(9.2) $\qquad L_A \eta = \lim_{n\to\infty} \mu_n H_A G \qquad (A:$ analytic$)$

とおいて L_A を定義する。この定義は，μ_n のとり方にはよらない。

Lemma 9.1. compact closure をもつ $A \in \mathcal{B}$ に対し $\{\mu_n H_A\}$ は uniformly bounded. また，$n \to \infty$ の時その weak*-limit ν_A が存在し，

(9.3) $\qquad \nu_A G = L_A \eta$

である。

証明　$G[C_0]$ は C_∞ で dense だから，$Gg(a) \geq 1$ $(a \in \bar{A})$ となる $g \in C_0$ が存在する。

$$\mu_n H_A(S) = \mu_n H_A(\bar{A}) \leq \int_S \mu_n H_A(da)\, Gg(a)$$
$$= \int_S \mu_n H_A G(da)\, g(a) \leq \int \eta(da)\, g(a) \leq K < \infty.$$

$\forall f \in C_0$ に対し

$$\langle L_A \eta, f \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mu_n H_A G, f \rangle$$

1) $\mu_n G(A) = \int \mu_n(da)\, G(a, A)$, $\mu_n H_A G(B) = \iint \mu_n(da)\, H_A(a, db)\, G(b, B)$, $H_A(a, B) = P_a[x_{\tau_A} \in B,\ \sigma_A < \infty]$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$= \lim_{n\to\infty} \langle \mu_n H_A, Gf \rangle = \langle \nu_A, Gf \rangle = \langle \nu_A G, f \rangle \text{ [2]}$$

従って

$$\nu_A G = L_A \eta. \qquad q.e.d.$$

Lemma 9.2.

1) $L_A\eta$ は excessive measure で $L_A\eta \leqq \eta$.

2) A上では $L_A\eta = \eta$.

3) $\nu_{A_1} H_A = \nu_A \qquad (A \subset A_1,\ A$ は open)

証明 1) $\mu_n H_A G$ は excessive で $\mu_n H_A G \uparrow L_A\eta$ だから $L_A\eta$ は excessive. $\mu_n H_A G \leqq \mu_n G$ から $L_A\eta \leqq \eta$.

2) A上では $\mu_n H_A G = \mu_n G$ だから $L_A\eta = \eta$.

3) 任意の $f \geq 0$ に対し $H_A G f$ は excessive であるから, $\mu_n H_{A_1} G \uparrow \nu_{A_1} G$ から $\mu_n H_{A_1} H_A G \uparrow \nu_{A_1} H_A G$ がいえる. $G[C_0]$ が dense だから, 従って $\mu_n H_{A_1} H_A \to \nu_{A_1} H_A$ を得る. 一方, $A \subset A_1$ かつ A は open だから, $H_{A_1} H_A = H_A$. 故に, $\mu_n H_{A_1} H_A = \mu_n H_A \to \nu_A$. すなわち, $\nu_A = \nu_{A_1} H_A$ がいえた.

q.e.d.

次に, $\overline{D}_n$: compact, $D_n \uparrow S$ となる開集合の列 $\{D_n\}$ を一つ取って固定し, $\nu_n = \nu_{D_n}$ とおく.

(9.4) $\quad \sigma_n(w) = \inf\{t > 0 : x_t(w) \in D_n\} \qquad (\inf \phi = \infty)$

とし, $\tau(w)$を次のように定義する。なお standard process X は右連続な path の空間 W で定義しておく.

定義 9.3.

(9.5) $\quad \tau(w) = \sigma_m(w), \qquad w \in \{\sigma_1(w) = \cdots = \sigma_{m-1}(w) = \infty,\ \sigma_m(w) < \infty\}$

とおく.

W上に $y(t, w) = y_t(w)$ を次のように定義する.

定義 9.4. $w \in W$ に対し

(9.6) $\quad \alpha(w) = -\tau(w), \quad \beta(w) = \zeta(w) - \tau(w)$

$\qquad y_t(w) = x_{\tau(w)+t}(w) \qquad (\alpha(w) \leq t < \beta(w))$

---

2) $\langle \nu, f \rangle = \int \nu(da) f(a).$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

とおく。更に

(9.7) $\alpha^m(w) = \sigma_m(w) - \tau(w)$ （$\sigma_m(w) < \infty$ の時）

$= B(w)$ （$\sigma_m(w) = \infty$ の時）

とおき，$\{y_{\alpha^m + t}\ ;\ t \geq 0\}$ から生成された W の上の σ-field を $\mathfrak{M}^m$，$\mathfrak{M} = \bigcup_m \mathfrak{M}^m$ とおく。

Lemma 9.5. $B \in \mathfrak{M}^m$，$n' > n > m$ ならば

(9.8) $P_{\nu_n}(B) \leq P_{\nu_{n'}}(B)$

である。特に $B \subset \{\alpha^m < \beta\}$ ならば (9.8) で等号がいえる。

証明 $B = \{y_{\alpha^m + t_j} \in A_j\ ;\ j = 1, \cdots, N\}$，$0 \leq t_j \leq t_N$，$A_j \in \mathcal{B}$ とする。

Lemma 9.2 を用いて，

$P_{\nu_n}(B) = P_{\nu_n}[\sigma_m + t_N < \zeta,\ x_{\sigma_m + t_j} \in A_j\ ;\ j = 1, \cdots, N]$

$= P_{\nu_{n'}}[\sigma_n(w) < \infty,\ \sigma_m(w_{\sigma_n}^+) + t_N < \zeta(w_{\sigma_n}^+),\ x(\sigma_m(w_{\sigma_n}^+) + t_j, w_{\sigma_n}^+) \in A_j\ ;\ j = 1, \cdots, N]$

$= P_{\nu_{n'}}[\sigma_n < \infty,\ \sigma_m + t_N < \zeta,\ x_{\sigma_m + t_j} \in A_j\ ;\ j = 1, \cdots, N]$

$= P_{\nu_{n'}}[\sigma_n < \infty,\ B]$.

すなわち，

(9.9) $P_{\nu_n}[B] = P_{\nu_{n'}}[\sigma_n < \infty,\ B]$

である。上のような形の B の全体は [2] の用語で π-system をなすから，(9.9) が成り立つような B の全体 $\mathfrak{L}$ が λ-system をなすことをいえば，$\mathfrak{L} \supset \mathfrak{M}^m$ である。

λ-system の条件のうち $W \in \mathfrak{L}$ 以外は明らか。

$P_{\nu_n}[W] = P_{\nu_n}[\sigma_m = \infty] + P_{\nu_n}[y_{\alpha^m} \in S]$

$= P_{\nu_{n'}}[\sigma_n(w) < \infty,\ \sigma_m(w_{\sigma_n}^+) = \infty] + P_{\nu_{n'}}[y_{\alpha^m} \in S]$

$= P_{\nu_{n'}}[\sigma_n < \infty,\ \sigma_m = \infty] + P_{\nu_{n'}}[\sigma_n < \infty,\ y_{\alpha^m} \in S]$

$= P_{\nu_{n'}}[\sigma_n < \infty]$.

故に $W \in \mathfrak{L}$ もいえたから (9.8) が証明された。

$B \subset \{\alpha^m < \beta\}$ の時には実は $B \subset \{\sigma_n < \infty\}$ であるから $P_{\nu_n}[B] = P_{\nu_{n'}}[B]$ である。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

故に Lemma の後半もいえる。 q.e.d.

このLemma から次の定義が可能である。

定義 9.6. $B \in \mathfrak{M}$ に対し

(9.10) $\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to\infty} P_{\nu_n}(B)$ とおく。

とおく。

定理 9.7. Wの上で 以上のように定義した ($y_t, \alpha, \beta, \mathbb{P}$) および α_n は (1) — (5) を満足する。

証明 (1) — (3) は定義から明らか。 $\beta \ge \alpha^m \downarrow \alpha$ も明らかである。任意の $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_N$, $A_j \in \mathcal{B}$ に対し Lemma 9.5 により ($n > m$)

$$\mathbb{P}[y^m_{t_j} \in A_j ; j=1,\cdots,N] = \mathbb{P}[y_{\alpha^m+t_j} \in A_j ; j=1,\cdots,N]$$

$$= P_{\nu_n}[\sigma_m + t_N < \zeta, x_{\sigma_m+t_j} \in A_j ; j=1,\cdots,N]$$

$$= E_{\nu_n}[P_{x_{\sigma_m+t_{N-1}}}[x_{t_N-t_{N-1}} \in A_N, t_N - t_{N-1} < \zeta] ; \sigma_m + t_{N-1} < \zeta, x_{\sigma_m+t_j} \in A_j, j=1,\cdots,N-1]$$

$$= E_{\nu_n}[P(t_N - t_{N-1}, x_{\sigma_m+t_{N-1}}, A_N) ; \sigma_m + t_{N-1} < \zeta, x_{\sigma_m+t_j} \in A_j, j=1,\cdots,N-1]$$

$$= \mathcal{E}[P(t_N - t_{N-1}, y^m_{t_{N-1}}, A_N) ; y^m_{t_j} \in A_j, j=1,\cdots,N-1]$$

従って

$$\mathbb{P}[y^m_t \in A \mid y^m_u, 0 \le u \le s] = P(t-s, y^m_s, A)$$

であり、(4) が示された。次に (5) を示そう。 $n > m$ とすると

$$\mathcal{E}\left[\int_{\alpha^m}^{\beta} \chi_A(y_t)\,dt\right] = E_\nu\left[\int_{\sigma_n}^{\zeta} \chi_A(x_t)\,dt\right]$$

$$= E_{\nu_m}\left[\int_0^{\zeta} \chi_A(x_t)\,dt\right] = \nu_m G(A) = L_{D_m}\eta(A),$$

$$\longrightarrow \eta(A)$$

ここに Lemma 9.2 を用いた。 q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

第3章文献

[1] Doob, J. L., Stochastic processes New York (1953).

[2] Dynkin. E. B., Foundations of the theory of Markov processes. Moscow (1959) (ロシア語, 英訳あり).

[3] Dynkin. E. B., Markov processes (1963) (ロシア語)

[4] Hunt, G. A. Markoff chains and Martin boundaries. Ill. J. Math. 4 (1960). 316-340.

[5] Hunt, G. A. Markoff processes and potentials. Ill. J. Math. 1 (1957), 44-93, 316-369; 2 (1958) 151-213.

[6] 池田. 上野. 田中. 佐藤, 多次元拡散過程の境界問題(上)(下) (Seminar on prob. vol. 5.6)

[7] Kolmogoroff, A., Zur Theorie der Markoffschen Ketten, Math. Ann. 112 (1953), 155-160.

[8] Kolmogoroff, A., Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze, Math. Ann. 113 (1936), 766-772.

[9] 近藤亮司, Markov過程とPotential. (Seminar on prob. vol. 11 (1962).

[10] 岡田寛, (未発表. Seminar on prob. vol. 17?)

[11] Meyer, P. A. Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov. Ann. Inst. Fourier, 12 (1962) 125-230.

[12] 本尾実, マルコフ過程のAdditive Functional. (Seminar on prob. vol. 15)

[13] Nagasawa, M., The adjoint process of diffusion with reflecting barrier. Kōdai Math. Sem. Rep. 13 (1961), 235-248.

[14] Nagasawa, M. and K. Sato, Remarks to the above paper. Kōdai Math. Sem. Rep. 14 (1962), 119-122.

[15] Nelson, E. The adjoint Markov process, Duke Math. J. 25 (1958), 671-690.

[16] Šur, M. G., Continuous additive functionals of Markov processes and excessive functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 137 (1961), 800-803. (ロシア語)

[17] Volkonskiĭ, V. A., Additive functionals of Markov processes. Trudy. Mosk. Mat. Ob. 9 (1960), 143-190.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

才4章　境界問題と境界上の process (B-process)

Markov 過程の境界問題について次の二つの研究方向が考えられる。① 与えられた Markov 過程から適当に境界を構成して空間を拡張しその上に，内部ではもとと同じ行動をする新らたな process を構成すること。② 適当な空間 S 上に Markov 過程 IM が与えられたとして S の適当な subset B の上で イ) path のとり得る可能な行動の type をあげ ロ) その典型的なものの特徴を知ること。(B が S − B の適当な意味での境界であるときには② イ)は 解析的にいえば，可能な境界条件の全てを求めるということになる)。

もちろん①と②は切り離せない問題であるが，この章では②の設定の下で議論を行なう。②を調べるについては，IM から一定の方法で S − B 上の process と B 上の process を導びき，両者の相互関係を見るのが妥当な方法である。§1 から §4 まではかなり一般的な仮定の下で，B 上の process を導きその process のいくつかの性質を，特に S − B 上の process から定まる量との関係に於て，調べる。§5 では古典的拡散過程の場合に反射壁過程のもつ著るしい特徴について触れる。

しかし，現在の所このような一般的仮定の下では，② イ)の問題は未解決である。

§1 でその存在を仮定した m, μ なる基礎の measure を IM の minimal part だけに関係するように定めて，Green 函数の分解を行なうという問題は才5章で扱われる。

尚 この章は 筆者が池田信行氏と共同で調べたものの一部を筆者がまとめたものである。§4, §5 に扱かった Dirichlet norm の定義は渡辺信三氏に教わったものである。　　　　(福島)

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

§1. Green 函数の分解.

今後 位相空間 Eに対して

$\mathbb{C}(E)=\{u ; u$ はE上で定義された実数値の有界連続函数$\}$

$\mathbb{C}^+(E)=\{u : u\in\mathbb{C}(E),\ u\geqq 0\}$ とおく.

Sを才二可算公理を満す compact な Hausdorff 空間とする。

今Sを state space に持つ二つの強マルコフ過程 $\mathbb{M}=\{W, \mathfrak{F}_t ; P_x, x\in S\}$, $\hat{\mathbb{M}}=\{W, \hat{\mathfrak{F}}_t, \hat{P}_x, x\in S\}$[1]があって次にあげる仮定 (A.1)(A.2)(A.3)(A.4) を満すものとする. (以後 $\hat{\mathbb{M}}$に関する諸量は^をつけて表わすことにする).

(A.1) $\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$ 共に conservative.

$W=\{w ; w$ は $I=[0,+\infty)$ で 定義されたSの値をとる.
右連続且つ才一種不連続函数$\}$

Wの$t\in I$ に於ける値を $X_t(w)$ とする.

(A.2) $V_t f(x)=E_x(f(X_t))$, $\hat{V}_t f(x)=\hat{E}(f(\hat{X}_t))$, $f\in\mathbb{C}(S)$, とおく. ここに E_x, $\hat{E}_x$ は各々 P_x, $\hat{P}_x$ による平均. このとき

イ) $\{V_t f(x),\ t\geqq 0\}$, $\{\hat{V}_t,\ t\geqq 0\}$は $\mathbb{C}(S)$ を $\mathbb{C}(S)$ に移す operator で且つ強連続な semigroup をなす.

ロ) S上の非負 Radon measure $m(dy)$, 及び $(0,+\infty)\times S\times S$ 上の非負連続函数 $p(t,x,y)$ が存在して,

$V_t f(x)=\int_S p(t,x,y)f(y)m(dy)$, $\hat{V}_t f(x)=\int_S p(t,x,y)f(y)m(dy)$ $f\in\mathbb{C}(S)$.

以後 $g_\alpha(x,y)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}p(t,x,y)\,dt$, $G_\alpha f(x)=E_x(\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}f(X_t)dt)$, とおく. 明らかに $G_\alpha f(x)=\int_S g_\alpha(x,y)f(y)m(dy)$ である.

(A.3) $S=D+\partial D$ なる D, ∂D を考え. Dは locally compact, ∂D は closed で次の性質を満すとする.

イ) $m(\partial D)=0$.

ロ) ∂Dの 任意の点は ∂D に関し ($\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$に関し) regular である。
即ち, $\forall x\in\partial D$, $P_x(\sigma_{\partial D}=0)=1$, $\hat{P}_x(\hat{\sigma}_{\partial D}=0)=1$.

---

1) $\mathfrak{F}_t$の定義は次の通りである. $\mathbb{B}_t$をtまでできるWの Borel field. $M^+(S)$をSの非負有界測度全体. $P_\mu(B)=\int P_x(B)\mu(dx)$ とするとき $\mathfrak{F}_t=\bigcap_{\mu\in M^+(S)}\mathbb{B}_t^\mu$. ここに $\mathbb{B}_t^\mu$ は $\mathbb{B}_t$ の P_μ による completion.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

ここに $E\subset S$ に対して $\sigma_E(w)$ は次の様に定義されているものとする. $\sigma_E(w)=\inf\{t:t>0,\ X_t(w)\in E\}$ 但し $\inf\phi=+\infty$ とする.

(A.4) ∂D 上の非負有界測度 μ, $D\times\partial D$ 上の非負連続函数 $h(x,b)$, $\hat{h}(b,x)$, $x\in S$, $b\in\partial D$ があって

$$E_x(f(x_{\sigma_{\partial D}}))=\int_{\partial D}h(x,b)f(b)\mu(db)$$

$$\hat{E}_x(f(\hat{x}_{\sigma_{\partial D}}))=\int_{\partial D}f(b)\hat{h}(b,x)\mu(db),\quad f\in\mathbb{C}(\partial D).$$

(path の右連続性と ∂D の compactness より $P_x(X_{\sigma_{\partial D}}\in\partial D)=1$ が成立することに注意). ∂D の任意の relative open set の μ-measure は strictly positive であるとしておく.

注意

i) (A.3) イ) は ∂D 上に滞留のないことを示す. 実際 $\forall\alpha>0$,

$E_x(\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\chi_{\partial D}(X_t)dt)=\int_{\partial D}g_\alpha(x,y)m(dy)=0.$ であるから path の ∂D での滞留時間の Lebesgue measure は P_x-1 で 0 である. ここに $\chi_{\partial D}$ は ∂D の indicator function.

ii) 更に D は fine topology で考えて S で dense である. 実際、E を S の non empty. fine open set とすると $G_\alpha\chi_E(x)>0$. $x\in E$, 従って $m(E)>0$. ([1] p. 94 参照). $m(\partial D)=0$ だから $S-\partial D=D$ は S で dense.

$S=D\cup\partial D$ 上の与えられたマルコフ過程 $\mathbb{M}$ を path の D に於ける行動と ∂D に於ける行動に分けて考察することにより調べて行くのが本章を通じての目標である.

今後簡単のため ∂D を D の"境界"と呼ぶ.

iii) (A.2) ロ) は $\mathbb{M}$ と $\hat{\mathbb{M}}$ とが互に dual であるための条件である. semigroup property. $V_t\,V_s f(x)=V_{t+s}f(x)$, $t,s>0$ より

$$\int[\int P(t,x,z)P(s,z,y)m(dz)]f(y)m(dy)=\int_S P(t+s,x,y)f(y)m(dy).$$

が任意の $f\in\mathbb{C}(S)$ について成立する. 従って

$$\int_S P(t,x,z)P(s,z,y)m(dz)=P(t+s,x,y)$$

が m-measure 0 を除いて, 従って ii) と同じ注意により (fine topology で) S で dense な y につき成立つが. $P(s,z,y)$ の y に関する連続性と z,y に関する有界性より任意の $y\in S$ に

ついて成立することがわかる。これを使うと

$$e^{-\alpha t}E_x(g_\alpha(X_t,y))=\int_{\partial D}e^{-\alpha t}p(t,x,z)m(dz)\int_0^{+\infty}e^{-\alpha s}p(s,z,y)ds$$

$=\int_t^{+\infty}e^{-\alpha s}p(s,x,y)ds \uparrow g_\alpha(x,y)\ (t\downarrow 0)$ が出る。即ち $g_\alpha(x,y)$ は y を固定したとき x の函数として (V_t,α)- *excessive* である。同様にして $g_\alpha(x,y)$ が x を固定した時 y の函数として $(\hat{V}_t,\alpha)$- *excessive* であることもわかる。従って [11] 才5章§2の意味で $\mathbb{M}$ と $\hat{\mathbb{M}}$ は *dual* である。

次の *Lemma* は [11] 才5章定理 2.2 の特別な場合であり証明は省略するが最後まで本質的な役割を果す。

<u>Lemma 1</u> $\forall x, y\in S\ \ \forall\alpha>0$

(1) $E_x(e^{-\alpha\sigma_{\partial D}}g_\alpha(X_{\sigma_{\partial D}},y))=\hat{E}_y(e^{-\alpha\hat{\sigma}_{\partial D}}g_\alpha(x,\hat{X}_{\hat{\sigma}_{\partial D}}))$.

<u>定義 1</u> $\alpha>0$. f を D 上の有界可測函数とするとき $x\in D$ に対し

(2) $G_\alpha^0 f(x)=E_x(\int_0^{\sigma_{\partial D}}e^{-\alpha t}f(X_t)\,dt)$

(2)′ $\hat{G}_\alpha^0 f(x)=\hat{E}_x(\int_0^{\hat{\sigma}_{\partial D}}e^{-\alpha t}f(\hat{X}_t)\,dt)$

とおく。更に $\alpha>0$, $x, y\in S$ に対し

(3) $g_\alpha^0(x,y)=g_\alpha(x,y)-E_x(e^{-\alpha\sigma_{\partial D}}g_\alpha(x_{\sigma_{\partial D}},y))$ とおく。

<u>定義 2.</u> $\alpha>0$ $x\in D$ $b\in\partial D$ に対し

(4) $h_\alpha(x,b)=h(x,b)-\alpha\int_D g_\alpha^0(x,y)h(y,b)m(dy)$

(4)′ $\hat{h}_\alpha(b,x)=\hat{h}(b,x)-\alpha\int_D\hat{h}(b,y)g_\alpha^0(y,x)m(dy)$

とおく。

<u>Lemma 2</u>

i) x or $y\in\partial D$ なら $g_\alpha^0(x,y)=0$. D 上の有界函数 f. $x\in D$ に対し

(5) $G_\alpha^0 f(x)=\int_D g_\alpha^0(x,y)f(y)m(dy)$

(5)′ $\hat{G}_\alpha^0 f(x)=\int_D g_\alpha^0(y,x)f(y)m(dy)$

ii) $f\in\mathbb{C}(\partial D)$. $x\in D$ に対し

(6) $E_x(e^{-\alpha\sigma_{\partial D}}f(x_{\sigma_{\partial D}}))=\int_{\partial D}h_\alpha(x,b)f(b)\mu(db)$

(6)′ $\hat{E}_x(e^{-\alpha\hat{\sigma}_{\partial D}}f(\hat{X}_{\hat{\sigma}_{\partial D}}))=\int_{\partial D}f(b)\hat{h}_\alpha(b,x)\mu(db)$

特に $h_\alpha(x,b)\geqq 0$. $\hat{h}_\alpha(b,x)\geqq 0$ $\forall x\in D\ \forall b\in\partial D$

<u>証明</u>

i) 境界点の *regularity* に関する仮定 (A.3) ロ) と *Lemma 1* より x.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

又は y が境界上にあれば $g_\alpha^0(x,y)=0$ がすぐに出る。又 Dynkin の公式より

$$\int_S g_\alpha(x,y)f(y)m(dy)=E_x\left(\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}f(X_t)dt\right)$$
$$=E_x\left(\int_0^{\sigma_{\partial D}}e^{-\alpha t}f(X_t)dt\right)+E_x\left(e^{-\alpha\sigma_{\partial D}}G_\alpha f(X_{\sigma_{\partial D}})\right).$$

この式と (3) の両辺を $f(y)m(dy)$ で y につき積分した式を比べて、(5) を得る。(5)′ は同様に計算して Lemma 1 を使うと得られる。

ii) $f\in\mathbb{C}(\partial D)$ に対し $hf(x)=\int_{\partial D}h(x,b)f(b)\mu(db)$ とおく (A.4) と (5) より

$$\alpha\int_D g_\alpha^0(x,y)hf(y)m(dy)=\alpha\int_D g_\alpha^0(x,y)E_y(f(X_{\sigma_{\partial D}}))m(dy)$$
$$=\alpha E_x\left(\int_0^{\sigma_{\partial D}}e^{-\alpha t}E_{X_t}(f(X_{\sigma_{\partial D}}))dt\right)$$
$$=\alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}E_x(f(X_{\sigma_{\partial D}}):t<\sigma_{\partial D})dt \qquad \text{(Markov 性)}$$
$$=\alpha E_x\left(\int_0^{\sigma_{\partial D}}e^{-\alpha t}dt\cdot f(X_{\sigma_{\partial D}})\right)=E_x(f(X_{\sigma_{\partial D}}))-E_x(e^{-\alpha\sigma_{\partial D}}f(X_{\sigma_{\partial D}}))$$

この等式と (4) の両辺を $f(b)\mu(db)$ で b につき積分した式とを比べて (6) を得る。(6)′ も全く同様にして得られる。(6) より $h_\alpha(x,b)\geq 0$ が μ-measure 0 を除いた b について従って (A.4) より dense な b で成立するが $h(x,b)$ の連続性に注意して (4) の右辺に Fatou の Lemma を使うことでいたる所 $h_\alpha(x,b)\geq 0$ がわかる。

定理 1 (Green kernel の Feller 式分解) $x,y\in D$ のとき

(7) $g_\alpha(x,y)=g_\alpha^0(x,y)+\int_{\partial D}\int_{\partial D}h_\alpha(x,b)g_\alpha(b,c)\hat{h}_\alpha(c,y)\mu(db)\mu(dc)$

$x\in\partial D$, $y\in D$ のとき

(8) $g_\alpha(x,y)=\int_{\partial D}g_\alpha(x,c)\hat{h}_\alpha(c,y)\mu(dc)$.

$x\in D$, $y\in\partial D$ のとき

(9) $g_\alpha(x,y)=\int_{\partial D}h_\alpha(x,b)g_\alpha(b,y)\mu(db)$

証明 E を ∂D の Borel set, χ_E をその indicator function とすると Lemma 2, ii) により $E_x(e^{-\alpha\sigma_{\partial D}}\chi_E(X_{\sigma_{\partial D}}))=\int_E h_\alpha(x,b)\mu(db)$ だから $x\in D$, $y\in\partial D$ の場合 (A.4) ロ) の $\hat{P}_y(\hat{\sigma}_{\partial D}=0)=1$ に注意すると、(9) は Lemma 1 の式を書きかえたものに過ぎないことがわかる。(8) も同様である。(3) より $x\in D$ のときは

$$g_\alpha(x,y)=g_\alpha^0(x,y)+\int_{\partial D}h_\alpha(x,b)g_\alpha(b,y)\mu(db).$$

これに(8)を代入して(7)を得る。

<u>Lemma 3</u> 次の等式が成立する。

i) (resolvent equation)

(10) $g^0_\alpha(x,y)-g^0_\beta(x,y)+(\alpha-\beta)\int_D g^0_\alpha(x,z)\,g^0_\beta(z,y)\,m(dz)=0$

$\alpha,\beta>0 \quad x,y\in D$

ii)

(11) $h_\alpha(x,b)-h_\beta(x,b)+(\alpha-\beta)\int_D g^0_\alpha(x,y)\,h_\beta(y,b)\,m(dy)=0$

(11)' $h_\alpha(x,b)-h_\beta(x,b)+(\alpha-\beta)\int_D g^0_\beta(x,y)\,h_\alpha(y,b)\,m(dy)=0$

(12) $\hat h_\alpha(b,x)-\hat h_\beta(b,x)+(\alpha-\beta)\int_D \hat h_\beta(b,y)\,g^0_\alpha(y,x)\,m(dy)=0$

(12)' $\hat h_\alpha(b,x)-\hat h_\beta(b,x)+(\alpha-\beta)\int_D \hat h_\alpha(b,y)\,g^0_\beta(y,x)\,m(dy)=0$

$\alpha,\beta>0 \quad x\in D \quad b\in\partial D$

<u>証明</u> i) 定義1より $G^0_\alpha f,\ f\in\mathbb{C}(D)$ は $\mathbb{M}$ を $\sigma_{\partial D}$ で killing した Markov 過程の Green 函数である。従って

$G^0_\alpha f-G^0_\beta f+(\alpha-\beta)G^0_\alpha G^0_\beta f=0$ が任意の $f\in\mathbb{C}(D)$ に関し成立する。故に Lemma 2 の(5)式より m-measure 0 を除いて、従って fine topology で dense な y に関し(10)が成立する。ところが $g^0_\alpha(x,y)$ の定義の式(3)を見ればわかるように(10)の左辺は y の函数として g_α, g_β の right potential の差で書けている。right potential が $\hat V_t$-excessive であることを注意1 iii)と同じようにして証明できるから(10)の左辺は y に関し fine continuous である。従って(10)は全ての y について成立する。

ii) h_α の定義の式(4)より

$h_\alpha(x,b)-h_\beta(x,b)=\beta\int_D g^0_\beta(x,y)h(y,b)m(dy)-\alpha\int_D g^0_\alpha(x,y)\,h(y,b)m(dy)$

$=\beta\int_D(g^0_\beta(x,y)-g^0_\alpha(x,y))h(y,b)m(dy)+(\beta-\alpha)\int_D g^0_\alpha(x,y)\,h(y,b)m(dy)$

$=\beta(\alpha-\beta)\int_D\int_D g^0_\alpha(x,z)\,g^0_\beta(z,y)\,h(y,b)\,m(dz)\,m(dy)$

$\quad+(\beta-\alpha)\int_D g^0_\alpha(x,y)\,h(y,b)\,m(dy)$

$=(\alpha-\beta)\int_D g^0_\alpha(x,y)(h(y,b)-h_\beta(y,b))m(dy)+(\beta-\alpha)\int_D g^0_\alpha(x,y)h(y,b)\,m(dy)$

$=(\beta-\alpha)\int_D g^0_\alpha(x,y)\ h(y,b)\ m(dy)$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

個々の積分は発散しないから　上の変形は可能である．
(11)′ (12) (12)′ も同様にして得られる．

§2. U-processと境界条件

この節で $\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$ から ∂D 上の Markov 過程の system を導びく．それは $\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$ を各々特定の（∂D 上のみで増加する）additive functional で time change して得られるものであり上野氏により定式化されたので Ueno process あるいは U-process と呼ぶことにしよう．本節では更に U-process の generator ともとの process $\mathbb{M}$（あるいは $\hat{\mathbb{M}}$）の所謂"境界条件"との相互関係を調べる．ここでいう境界条件とは $\mathbb{M}$($\hat{\mathbb{M}}$) の generator の domain に指定されるべき必要条件の一つという意味に了解する，W. Feller は [5] で，Markov chain で境界点有限ケの場合に，§1 の定理1 に相当する式を前提として　この問題を解く重要な手がかりを与えた．この節のいくつかの定理は formal には [5] の結果の拡張である．

上野氏は逆に最初に境界条件を与えたときに，それに対応すべき境界上の process なる概念を定式化し，それを媒介として与えられた境界条件を満す Markov process がどのように構成されるべきかという議論を一般的な形で展開された．[7]，[19]．

Feller [5] の結果や，本節の結果だけでは　しかし，境界条件のわからなさを U-process のわからなさにそのままおし込めた形になり，U-process そのものの解析を更に進める必要がある．§3，§4 ではその問題を扱かう．

以下 (A.1) (A.2) (A.3) (A.4) の他に，次の仮定をおく．

(A.5) $\alpha>0$ の $x\in S$ に対し

$$K^\alpha f(x)=\int_{\partial D} g_\alpha(x,c)\,f(c)\,\mu(dc),\quad \hat{K}^\alpha f(x)=\int_{\partial D} g_\alpha(c,x)\,f(c)\,\mu(dc)$$ と

おくと $f\in\mathbb{C}(\partial D)$ なら $K^\alpha f\in\mathbb{C}(S)$，$\hat{K}^\alpha f\in\mathbb{C}(S)$．

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(A.6) $f \in \mathbb{C}(\partial D)$ に対し

$h f(x) = \int_{\partial D} h(x,b) f(b) \mu(db)$, $f\hat{h}(x) = \int_{\partial D} f(b) \hat{h}(b,x) \mu(db)$ とおくと $hf \in \mathbb{C}(D)$ $f\hat{h} \in \mathbb{C}(D)$. 又 $\forall \alpha > 0$ $u \in \mathbb{C}(D)$ に対し

$u h_\alpha(b) = \int_D u(x) h_\alpha(x,b) m(dx)$, $\hat{h}_\alpha u(b) = \int_D \hat{h}_\alpha(b,x) u(x) m(dx)$

とおくと $u h_\alpha \in \mathbb{C}(\partial D)$, $\hat{h}_\alpha u \in \mathbb{C}(\partial D)$

Lemma. 4 (Hunt の条件). K^α は 次の性質を持つ.

(i) (completely maximum principle) $f, g \in \mathbb{C}^+(\partial D)$ に対し

(13) g の support の上で $K^\alpha f \geqq K^\alpha g$

(14) $K^\alpha f \geqq K^\alpha g$

が ∂D 上の全ての点で成立する.

ii) $^\exists h_n$, $h_n \in \mathbb{C}^+(\partial D)$, $K^\alpha h_n \uparrow 1$ on ∂D

iii) $\{K^\alpha f/_{\partial D}\ ;\ f \in \mathbb{C}(\partial D)\}$ は $\mathbb{C}(\partial D)$ で dense である.[2)]

証明 i) 先ず $f \in \mathbb{C}^+(\partial D)$ に対し $K^\alpha f$ は (V_t, α)-excessive であることに注意する. 実際, 定義より

$$e^{-\alpha t} V_t K^\alpha f(x) = \int_{\partial D} \left[\int_t^{+\infty} e^{-\alpha s} p(s,x,c)\, ds\right] f(c) \mu(dc) \underset{(t \downarrow 0)}{\uparrow} K^\alpha f(x)$$

次に $C_g = \{b\ ;\ b \in \partial D,\ g(b) > 0\}$ とおくと g は連続であるから C_g は ∂D の relative open set である.

即ち $S \supset O$ なる open set O が存在して $O \cap \partial D = C_g$.

$b \in C_g$ のとき path の右連続性より

P_b ($t > 0$ が存在して $0 < s < t$ なる任意の s に対し $X_s \in O$) $= 1$

又 ∂D の点は ∂D に関し regular であるから ((A.3) ロ))

P_b (任意の t に対し $0 < s < t$ が存在して $X_s \in \partial D$) $= 1$

従って

P_b (任意の t に対し $0 < s < t$ が存在して $X_s \in C_g$) $= 1$

即ち

(15) $P_b(\sigma_{C_g} = 0) = 1$.

つまり C_g の任意の点は C_g に関し regular であることがわかった. 同様に (15)' $\hat{P}_b(\hat{\sigma}_{C_g} = 0) = 1$ $\forall b \in C_g$

---

2) $K^\alpha f/_{\partial D}$ は $K^\alpha f$ の ∂D への restriction の意味.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

更に、path の右連続性より $\forall x \in S$

(16) $P_x(X_{\sigma_{C_g}} \in \overline{C},\ \sigma_{C_g} < +\infty) = 1$

$\overline{C} \subset \partial D$ であり, $K_\alpha f$, $K_\alpha g$ の連続性と (i) の仮定 (13) より

(13)' $K_\alpha f \geqq K_\alpha g$ on $\overline{C}_g$

以上の準備をして (i) の証明に移る。$K^\alpha f$ は α-excessive だから $\forall x \in S$

$$
\begin{aligned}
K^\alpha f(x) &\geqq E_x(e^{-\alpha\sigma_{C_g}} K^\alpha f(X_{\sigma_{C_g}})) && \text{[11] P. 58 参照.}\\
&\geqq E_x(e^{-\alpha\sigma_{C_g}} K^\alpha g(X_{\sigma_{C_g}})) && \text{(16) (13)' による}\\
&= \int_{\partial D} E_x(e^{-\alpha\sigma_{C_g}} g_\alpha(X_{\sigma_{C_g}}, b))\, g(b)\, \mu(db)\\
&= \int_{C_g} \hat{E}_b(e^{-\alpha\hat{\sigma}_{C_g}} g_\alpha(x, \hat{X}_{\hat{\sigma}_{C_g}}))\, g(b)\, \mu(db) && \text{Lemma 1 による}\\
&= \int_{C_g} g_\alpha(x, b)\, g(b)\, \mu(db)\\
&= K^\alpha g(x)
\end{aligned}
$$

(ii) S で恒等的に 1 である函数は α-excessive であるから $\exists f_n \in \mathbb{C}^+(S)$, $G_\alpha f_n \underset{(n\to\infty)}{\uparrow} 1$ on S. [11] P. 57 参照

今 $b \in \partial D$ に対し $h_n(b) = \int_D \hat{h}_\alpha(b, y) f_n(y) m(dy)$ とおくと (A.6) より $h_n \in \mathbb{C}^+(\partial D)$ である。定理 1 の (8) の式より $b \in \partial D$ なら $K^\alpha h_n(b) = G_\alpha f_n(b)$ であるから $K^\alpha h_n \underset{(n\to\infty)}{\uparrow} 1$ on ∂D.

(iii) V_t, $t \geqq 0$ は $\mathbb{C}(S)$ 上の強連続 semigroup であるから $\{G_\alpha f;\ f \in \mathbb{C}(S)\}$ は dense in $\mathbb{C}(S)$. 従って $\{G_\alpha f/_{\partial D};\ f \in \mathbb{C}(S)\}$ は dense in $\mathbb{C}(\partial D)$. (ii) の場合と同様に $b \in \partial D$ に対し $h(b) = \int_D \hat{h}_\alpha(b, y) f(y) m(dy)$ とおくと $h \in \mathbb{C}(\partial D)$ で $K^\alpha h(b) = G_\alpha f(b)$ であるから $\{K^\alpha h/_{\partial D}\}$ は dense in $\mathbb{C}(\partial D)$. 当然 $\{K^\alpha f/_{\partial D};\ f \in \mathbb{C}(\partial D)\}$ は dense in $\mathbb{C}(\partial D)$

(q.e.d.)

今後 $K^\alpha f$ はその ∂D への restriction のみを考えるので $K^\alpha f/_{\partial D}$ を改めて $K^\alpha f$ と記す。

<u>定義3</u> $b, b' \in \partial D$ に対し $U_\alpha(b, b') = \alpha\int_D \hat{h}_\alpha(b, m\, h(x, b')\, m(dx)$ $(\alpha > 0)$ とおき α-位の Feller の kernel と呼ぶ。$f \in \mathbb{C}(\partial D)$ に対し $U_\alpha f(b) = \int_{\partial D} U_\alpha(b, b') f(b') \mu(db')$ とおくと (A.6) より $U_\alpha : \mathbb{C}(\partial D) \longrightarrow \mathbb{C}(\partial D)$ である。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

<u>Lemma 5</u> i) $\exists\alpha_0>0,\ U_{\alpha_0}(b,b')<+\infty$ なら $\forall\alpha>0,\ U_\alpha(b,b')<+\infty$ であって、このような b, b' に対しては $\forall\alpha,\beta>0$

(17) $U_\alpha(b,b')-U_\beta(b,b')=(\alpha-\beta)\int_D \hat{h}_\alpha(b,x)h_\beta(x,b')m(dx)$

ii) $\mathbb{C}(\partial D)\ni f,\ \alpha,\beta>0$ に対し

(18) $K^\alpha f-K^\beta f+K^\alpha(U_\alpha-U_\beta)K^\beta f=0$

<u>注意2</u> i)より $U_\alpha(b,b')$ は α に関し単調増大であることがわかる。$\lim_{\alpha\to\infty}U_\alpha(b,b')$ を $U(b,b')$ と書いて単に Feller の kernel と呼ぶ。($U_\alpha(b,b')=+\infty$ のときは $U(b,b')=+\infty$ とする)。後で示すように K^α は α 位の U-process の 0 次の resolvent operator であり従って (18) は α を動かした時の U-process の相互の関係を示す式である。この式は S が可算ヶの点から成り ∂D が有限ヶの場合に Neveu [15] によって導かれた。

<u>Lemma 5 の証明</u> i) $U_{\alpha_0}(b,b')<+\infty$ なら 定義3により

$\forall\alpha>\alpha_0\quad U_\alpha(b,b')\leq\frac{\alpha}{\alpha_0}U_{\alpha_0}(b,b')<+\infty$

今 $\alpha\geq\alpha_0>\beta$ なる任意の β をとると、(4) (12)' を使って

$$+\infty>U_\alpha(b,b')+(\beta-\alpha)\int_D\hat{h}_\alpha(b,x)h_\beta(x,b')m(dx)$$
$$=\beta\int_D\hat{h}_\alpha(b,x)h(x,b')m(dx)+(\alpha-\beta)\int_D\hat{h}_\alpha(b,x)(h(x,b')-h_\beta(x,b'))m(dx)$$
$$=\beta\int_D\hat{h}_\alpha(b,x)h(x,b')m(dx)+\beta(\alpha-\beta)\int_D\int_D\hat{h}_\alpha(b,x)g^0_\beta(x,y)h(y,b')m(dx)m(dy)$$
$$=\beta\int_D\hat{h}_\alpha(b,x)h(x,b')m(dx)+\beta\int_D(\hat{h}_\beta(b,x)-\hat{h}_\alpha(b,x))h(x,b')m(dx)$$
$$=U_\beta(b,b').$$

従って $U_\beta(b,b')<+\infty$ である。任意の $\alpha,\beta>0$ に対して (17) が成立することは上の計算から明らか。

ii) resolvent equation より $(a\in\partial D)$

$$K^\alpha f(a)-K^\beta f(a)=\int_{\partial D}(g_\alpha(a,b)-g_\beta(a,b))f(b)\mu(db)$$
$$=(\beta-\alpha)\int_{\partial D}\int_D g_\alpha(a,x)g_\beta(x,b)f(b)m(dx)\mu(db)$$

一方 定理1と Lemma 5 i)より $a\in\partial D$ に対し

$$K^\alpha(U_\alpha-U_\beta)K^\beta f(a)$$
$$=(\alpha-\beta)\int_{\partial D}\int_D\int_{\partial D}g_\alpha(a,b)\hat{h}_\alpha(b,x)h_\beta(x,c)K^\beta f(c)\mu(db)m(dx)\mu(dc)$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$= (\alpha-\beta)\int_{\partial D}\int_D g_\alpha(a,x)\, g_\beta(x,b)\, f(b)\, m(dx)\, \mu(db)$$

(q.e.d.)

さて U-process を conservative にするための条件として次の仮定をおこう.

(A.7) $\forall x \in D$

$$P_x(\sigma_{\partial D} < +\infty) = 1, \quad \hat{P}_x(\hat{\sigma}_{\partial D} < +\infty) = 1.$$

<u>Lemma 6</u> i) $\mathbb{C}(\partial D)$ の K^α による range を $\mathcal{R}$ とすると $\mathcal{R}$ は α に無関係で $\mathbb{C}(\partial D)$ で dense である.

又対応 $K^\alpha : \mathbb{C}(\partial D) \longrightarrow \mathcal{R}$ は one to one である.

ii) $\exists\, Q : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{C}(\partial D)$ closed operator

(19) $-(K^\alpha)^{-1} = Q - U_\alpha$

iii) $f \in \mathbb{C}(\partial D)$ に対し $\lim_{\alpha\to\infty} K^\alpha f = 0$ (∂D 上で一様)

$f \in \mathcal{R}$ に対し $\lim_{\alpha\to\infty} K^\alpha U_\alpha f = f$ (∂D 上で一様)

iv) $1 \in \mathcal{R}$, $Q1 = 0$

<u>証明</u> i) $\mathcal{R}$ が dense であることは Lemma 4 iii) で既に示した. これが α に無関係なことは Lemma 5 の (18) 式より容易に証明できる. $K^\alpha : \mathbb{C}(\partial D) \longleftrightarrow \mathcal{R}$ が one to one であることは、Lemma 4 i) ii) iii) より証明できる。証明について例えば [11] p. 40 参照.

ii) $u \in \mathcal{R}$ とすると $\exists f \in \mathbb{C}(\partial D)$ $u = K^\beta f$ と書ける. $f = (K^\beta)^{-1}u$.

(18) より

$$K^\alpha f - u + K^\alpha(U_\alpha - U_\beta)u = 0$$

$$f - (K^\alpha)^{-1}u + (U_\alpha - U_\beta)u = 0$$

即ち

$$-(K^\alpha)^{-1}u + U_\alpha u = -(K^\beta)^{-1}u + U_\beta u$$

従って $Qu = -(K^\alpha)^{-1}u + U_\alpha u$ とおくと Q は α に無関係で (19) の式を得る. Q が closed であることは K^α, U_α の有界性より出る。

iii) $f \in \mathbb{C}^+(\partial D)$ として一般性を失わない.

$$K^\alpha f(b) = \int_{\partial D} g_\alpha(b,c) f(c)\mu(dc) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}dt \int_{\partial D} P(t,b,c) f(c)\, \mu(dc)$$

$\therefore$ $K^\alpha f \downarrow 0$ $(\alpha \to \infty)$ Dini より一様収束.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

又 $f \in \mathcal{R}$ とすると (19) より $K^\alpha(Q-U_\alpha)f = -f$
$K^\alpha Q f \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (一様) だから $K^\alpha U_\alpha f \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} f$ (一様)

iV) $\mathbb{M}$ は conservative であるから

$\forall x \in S \quad \alpha \int_D g_\alpha(x, y)\, m(dy) = 1.$

又仮定 (A.7) より $\forall x \in D,\ h1(x) = \int_{\partial D} h(x, b)\, \mu(db)$

$= P_x(X_{\sigma_{\partial D}} \in \partial D) = P_x(X_{\sigma_{\partial D}} \in \partial D,\ \sigma_{\partial D} < +\infty) = 1.$

従って $b \in \partial D$ のとき 定理1より

$$1 = \alpha \int_{\partial D}\int_D g_\alpha(b, c)\, \hat{h}_\alpha(c, y)\, m(dy)\, \mu(dc)$$
$$= \int_{\partial D} g_\alpha(b, c)\, [\alpha \int_D \hat{h}_\alpha(c, y)\, h1(y)\, m(dy)]\, \mu(dc).$$
$$= K^\alpha U_\alpha 1.$$

$\therefore\ 1 \in \mathcal{R}$ で $Q1 - (K^\alpha)^{-1} 1 + U_\alpha 1 = 0.$ (q.e.d

次の仮定は §3. §4に於て本質的であるが 0位の U-process の群の強連続性を保証するためさしあたって必要なので ここにもうけることにする。

(A.8) $(0, +\infty) \times D \times \partial D$ 上の連続函数 $H_u(x, b)$, $\hat{H}_u(b, x)$, $u \in ($
$x \in D$, $b \in \partial D$ があって

$h(x, b) = \int_0^{+\infty} H_u(x, b)\, du.\quad \hat{h}(b, x) = \int_0^{+\infty} \hat{H}_u(b, x)\, du.$

且つ

(20) $\int_D P^0(v, x, dy)\, H_u(y, b) = H_{u+v}(x, b)$

(20)' $\int_D \hat{H}_u(b, y)\, \hat{P}^0(v, x, dy) = H_{u+v}(b, x)$

ここに $P^0(v, x, E) = P_x(X_v \in E,\ v < \sigma_\infty)$,
$\hat{P}^0(v, x, E) = \hat{P}_x(\hat{X}_v \in E,\ v < \hat{\sigma}_\infty)$ EはDの Borel

Neveu [16] の言葉に従がえば (20)を満すHを exit law, (20)'
満す $\hat{H}$ を entrance law と呼ぶべきである.

<u>Lemma 7</u> i) $\forall \alpha \geq 0 \quad x \in D \quad b \in \partial D$

(21) $h_\alpha(x, b) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} H_u(x, b)\, du$

(21)' $\hat{h}_\alpha(b, x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} H_u(b, x)\, du.$

ii) $u>0$ $b, b' \in \partial D$ に対し

(22) $A_u(b,b') = \int_D \hat{H}_v(b,x)\, H_{u-v}(x,b')\, m(dx) \qquad 0<v<u$

とおくと A_u は v のとり方に無関係で

(23) $U_\alpha(b,b') = \int_0^{+\infty} (1-e^{-\alpha u}) A_u(b,b')\, du$

証明 i) $h_\alpha(x,b)$ の定義（定義2）より

$$h_\alpha(x,b) = \int_0^{+\infty} H_u(x,b)\,du - \alpha\int_D g_\alpha^0(x,y)\,m(dy)\int_0^{+\infty} H_u(y,b)\,du$$
$$= \int_0^{+\infty} H_u(x,b)\,du - \alpha\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt\int_D P^0(t,x,dy)\int_0^{+\infty} H_u(y,b)\,du$$
$$= \int_0^{+\infty} H_u(x,b)du - \alpha\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} H_{u+t}(x,b)\,du\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} H_u(x,b)du - \int_0^{+\infty} H_u(x,b)\left(\int_0^u \alpha e^{-\alpha t}dt\right)du$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} H_u(x,b)\,du.$$

(21)′も同様の計算で得られる。

ii) E, F を D の Borel set とすると $\int_E m(dx)\, p^0(t,x,F) = \int_F \hat{p}^0(t,y,E)\, m(dy)$ であることは容易にわかるから $0<v<w<u$ とすると

$$\int_D \hat{H}_w(b,x) H_{u-w}(x,b') m(dx) = \int_D\int_D \hat{H}_v(b,y)\hat{P}^0(w-v,x,dy) H_{u-w}(x,b') m(dx)$$
$$= \int_D\int_D \hat{H}_v(b,y) P^0(w-v,y,dx) H_{u-w}(x,b') m(dy)$$
$$= \int_D \hat{H}_v(b,y) H_{u-v}(y,b')\, m(dy).$$

即ち A_u は v のとり方に無関係に定まる。又

$$\int_0^{+\infty}(1-e^{-\alpha u}) A_u(b,b')du = \int_0^{+\infty}\int_0^u \alpha e^{-\alpha v} A_u(b,b')\,dv\,du$$
$$= \alpha\int_D m(dy)\int_0^{+\infty} e^{-\alpha v}\hat{H}_v(b,y)dv \int_v^{+\infty} H_{u-v}(y,b')\,du$$
$$= \alpha\int_D \hat{h}_\alpha(b,y)\, h(y,b')\, m(dy) = U_\alpha(b,b') \qquad \text{(q.e.d.)}$$

以上の準備の下に ∂D の process の system の存在定理に入る。

定理 2

i) $\mathbb{C}(\partial D)$ 上の強連続な semigroups の system $\{T_t^\alpha\,;\,\alpha \geqq 0\}$ が存在して

(24) $\forall f \in \mathbb{C}(\partial D),\ \alpha>0,\ K^\alpha f(a) = \int_0^{+\infty} T_t^\alpha f(a)\,dt \qquad a \in \partial D$

$T_t^\alpha, \alpha>0$ の generator は $Q-U_\alpha$, $T_t = T_t^0$ の generator は Q である。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

ii) $f \in \mathbb{C}(\partial D)$ に対し $K_\lambda^\alpha f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t^\alpha f(a)\,dt,\ \alpha \geqq 0,\ \lambda > 0$ とおくと K_λ^α による $\mathbb{C}(\partial D)$ の image は $\mathcal{R}$ で

(25) $K_\lambda^\alpha f - K_\lambda^\beta f + K_\lambda^\alpha (U_\alpha - U_\beta) K_\lambda^\beta f = 0 \quad \alpha, \beta \geqq 0,\ \lambda > 0$ が成立する・

<u>証明</u>　先ず $\alpha > 0$ の場合を示す. Lemma 6 より.

$-(Q - U_\alpha) K^\alpha f = f$ がわかった.

$K_\lambda^\alpha = \sum_{k \geqq 0} (-\lambda)^k (K^\alpha)^{k+1} \quad 0 \leqq \lambda < 1/\|K^\alpha\|$

(26) $K_{\tilde\lambda}^\alpha = \sum_{k \geqq 0} (\lambda - \tilde\lambda)^k (K_\lambda^\alpha)^{k+1} \qquad 0 \leqq \tilde\lambda < 2\lambda$

としていくと 任意の $\lambda > 0$ に対し K_λ^α が定義できて,

イ) $(\lambda - Q + U_\alpha) K_\lambda^\alpha f = f \qquad \forall f \in \mathbb{C}(\partial D)$

ロ) Lemma 5 i) の complete maximum principle より positive maximum principle がでる. 即ち $\forall g \in \mathcal{R}$ a が g の positive maximum point なら $-(Q - U_\alpha) g(a) \geqq 0$

ハ) $\mathcal{R}$ は $\mathbb{C}(\partial D)$ で dense.

従って Hille-Yosida の定理より強連続な半群 T_t^α があって (24) が成立し, その generator は $Q - U_\alpha$ である. 又 $K_\lambda^\alpha f - K_\mu^\alpha f + (\lambda - \mu) K_\lambda^\alpha K_\mu^\alpha f = 0,\ \alpha > 0,\ \lambda, \mu \geqq 0$ だから K_λ^α の range は $\mathcal{R}$ に等しい. 今 $u \in \mathcal{R}$ とすると $u = K_\lambda^\alpha f,\ \alpha > 0,\ \lambda \geqq 0$ $f \in \mathbb{C}(\partial D)$ と書ける.

$(\lambda - Q + U_\beta) u - (\lambda - Q + U_\alpha) u + (U_\alpha - U_\beta) u = 0$

両辺に K_λ^β を operate して

$K_\lambda^\alpha f - K_\lambda^\beta f + K_\lambda^\beta (U_\alpha - U_\beta) K_\lambda^\alpha f = 0$

を得る。

最後に $T_t = T_t^0$ の存在を示そう. $\mathbb{C}(\partial D)$ に於ける norm を $\|\ \|$ で表わす. 先ず (23) より $b \in \partial D$ に対し

$U_\alpha 1(b) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\alpha u}) A_u 1(b)\,du \downarrow 0 \qquad (\alpha \to 0)$

ここに $A_u 1(b) = \int_b A_u(b, b') \mu(db')$. 従って Dini により $\|U_\alpha 1\| \to 0 \quad (\alpha \to 0)$. U_α の operator としての norm を $\|U_\alpha\|$ とかくと $\|U_\alpha\| \leqq \|U_\alpha 1\| \to 0 \qquad (\alpha \to 0)$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

次に $\lambda>0$ とすると (25) より
$\|K_\lambda^\alpha - K_\lambda^\beta\| \leqq \|K_\lambda^\beta\| \|U_\beta - U_\alpha\| \|K_\lambda^\alpha\| \leqq \frac{1}{\lambda^2}\|U_\beta - U_\alpha\| \longrightarrow 0.$ $(\alpha, \beta \to 0)$
故に $\exists K_\lambda$ $\lim_{\alpha\to 0} K_\lambda^\alpha = K_\lambda$ in morm

K_λ : $\mathbb{C}(\partial D) \longrightarrow \mathbb{C}(\partial D)$ であるが K_λ に関し、次の イ)′ ロ)′ ハ)′ が成立する。

イ)′ $f \in \mathbb{C}(\partial D)$ に対し $K_\lambda f \in \mathcal{R}$ で $(\lambda - Q)K_\lambda f = f$

ロ)′ $g \in \mathcal{R}$ $a \in \partial D$ が g の positive maximum point とすると
$Qg(a) \leqq 0$

ハ)′ $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{R}$: dense in $\mathbb{C}(\partial D)$

ハ)′ は (25) より,
$K_\lambda f - K_\lambda^\alpha f - K_\lambda U_\alpha K_\lambda^\alpha f = 0.$ $K_\lambda^\alpha f - K_\lambda f - K_\lambda^\alpha U_\alpha K_\lambda f = 0$
が出ることに注意すれば 明らかである。

イ)′ の証明. $f \in \mathbb{C}(\partial D)$ に対し $(\lambda - Q)K_\lambda^\alpha f + U_\alpha K_\lambda^\alpha f = f$ $\alpha>0,\ \lambda>0$
である。ところが $\|U_\alpha K_\lambda^\alpha\| \leq \frac{1}{\lambda}\|U_\alpha\| \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$ 従って Q の closed 性を使って $(\lambda - Q)K_\lambda f = f$ を得る。

ロ)′ の証明. $g \in \mathcal{R}$, a を g の positive maximum point とする。
$\forall \alpha > 0$, ロ) より

$(Q - U_\alpha)g(a) \leqq 0$ $\quad Qg(a) \leqq U_\alpha g(a)$

最初の注意より α を充分小さくとって右辺をいくらでも 0 に近くすることが出来る。従って $Qg(a) \leqq 0$

イ)′ ロ)′ ハ)′ がわかったから Hille-Yosida の定理により Q を generator とする semigroup T_t があって
$K_\lambda f = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t f\, dt$ $\quad \lambda>0 \quad f \in \mathbb{C}(\partial D).$ (q.e.d.)

<u>定義4</u> $\{T_t \cdot t \geqq 0\}$ から導かれる ∂D 上の Markov 過程を $\mathbb{M}_{\partial D}$ と書き $\mathbb{M}$ から ∂D に導びかれた $\mathcal{U}$-process と呼ぶ. $\{T_t^\alpha,\ t \geqq 0\}$ $\alpha>0$ に対応する ∂D 上の Markov 過程を $\mathbb{M}_{\partial D}^\alpha$ と書き $\mathbb{M}$ から ∂D に導かれた α 位の $\mathcal{U}$-process という。

$Q1 = 0$ から $T_t 1 = 1$ が出るから $\mathbb{M}_{\partial D}$ は conservative である。
$\mathbb{M}$ からも 今までと同じことを繰り返すことにより ∂D 上 に

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

Markov 過程の system が導かれるが、これに関しては§4で触れる。

次に $\mathbb{M}_{\partial D}^{\alpha}$ は $\mathbb{M}$ を適当に time change して得られることを示そう。

<u>定理3</u> ∂D のみで増加する $\mathbb{M}$ の continuous additive functional $S(t,w)$ があって $\forall\alpha \geqq 0$ $\forall f \in \mathbb{C}(\partial D)$

(27) $T_t^{\alpha} f(b) = E_b(e^{-\alpha S^{-1}(t,w)} f(X_{S^{-1}(t,w)}))$ $b \in \partial D$

ここに $S^{-1}(t,w) = \max\{u : S(u,w) \leqq t\}$.

<u>証明</u> 先ず (A.2) イ) と (A.5) より $\alpha > 0$ に対し $K^{\alpha}1(x) = \int_{\partial D} g_{\alpha}(x,b)\mu(db)$ が uniformly (V_t,α)-excessive であることがわかる。従って Tanaka の定理 [7] より ∂D 上のみで増加する additive functional (continuous) $S^{\alpha}(t,w) \geq 0$ があって $K^{\alpha}1(b) = E_b(S^{\alpha}(+\infty,w))$. $S(t,w) = \int_0^t e^{\alpha s} dS^{\alpha}(t,w)$ とおくとこれは α に無関係で $K^{\alpha}1(b) = E_b(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dS(t,w))$ が任意の $\alpha > 0$ について成立する。K_{λ}^{α} の定義 (26) より $\frac{1}{\lambda} = K_{\lambda}1(b) = \lim_{\alpha \to 0} K_{\lambda}^{\alpha}1(b) = E_b(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda S(t)} dS(t)) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}E_b(e^{-\lambda S(+\infty)})$ がわかるから $P_b(S(+\infty) = +\infty) = 1$ である。一方オ2章§4の表現定理によって $\forall f \in \mathbb{C}(\partial D)$

$$K^{\alpha} f(b) = E_b(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(X_t) dS(t,w)) = \int_0^{+\infty} E_b(e^{-\alpha S^{-1}(t)} f(X_{S^{-1}(t)}))dt.$$

再び (26) より

$$K_{\lambda}^{\alpha} f(b) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} E_b(e^{-\alpha S^{-1}(t,w)} f(X_{S^{-1}(t,w)}))dt. \quad \forall\lambda > 0.$$

一方 $K_{\lambda}^{\alpha} f(b) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t^{\alpha} f(b) dt$. ところが $E_b(e^{-\alpha S^{-1}(t,w)} f(X_{S^{-1}(t,w)}))$ は t に関し右連続であり $T_t^{\alpha} f(b)$ は t に関し連続である。従って

$$T_t^{\alpha} f(b) = E_b(e^{-\alpha S^{-1}(t,w)} f(X_{S^{-1}(t,w)})) \quad \forall\alpha > 0.$$

又 $K_{\lambda} f(b) = \lim_{\alpha \to 0} K_{\lambda}^{\alpha} f(b) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} E_b(f(X_{S^{-1}(t,w)}))dt$. と $K_{\lambda} f(b) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t f(b)\, dt$ を比べて $T_t f(b) = E_b(f(X_{S^{-1}(t,w)}))$ を得る。

(q.e.d.)

以下 $\mathbb{M}$ の境界条件を $\mathbb{M}_{\partial D}$ の generator Q を使って表現する問題を考えよう。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

この節の以下の部分だけに次の仮定を設ける。

(A.9) V_t の generator を $\mathfrak{G}$, その domain を $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ と書く。
任意の $f \in \mathbb{C}(\partial D)$ に対し $h_\alpha f(x) = \int h_\alpha(x, b) f(b) \mu(db)$ とおくと $x \in D$ に対し
$\mathfrak{G}(h_\alpha f)(x) = \lim_{t \downarrow 0} \dfrac{V_t(h_\alpha f)(x) - h_\alpha f(x)}{t}$
が well defined で且つ $\mathfrak{G}(h_\alpha f)(x) = \alpha h_\alpha f(x)$.

<u>Lemma 8</u> $\forall f \in \mathbb{C}(D)$ に対し $\mathfrak{G}(G_\alpha^0 f)(x)$ $x \in D$ が well defined であって

(28) $\int_D \hat{h}(b, x) \mathfrak{G}(G_\alpha^0 f)(x) m(dx) = -\int_D \hat{h}_\alpha(b, x) f(x) m(dx)$

<u>証明</u> 定理 I より $G_\alpha f(x) = G_\alpha^0 f(x) + \int_{\partial D} h_\alpha(x, b) G_\alpha f(b) \mu(db)$ である
$\mathfrak{G}$ の定義より $\mathfrak{G}(G_\alpha f) = \alpha G_\alpha f - f$ 従って (A.9) より
$\mathfrak{G}(G_\alpha^0 f)(x) = \alpha G_\alpha^0 f(x) - f(x)$, $x \in D$ さて $f \in \mathbb{C}(D)$ で support が compact とする。

$$\int_D \hat{h}(b, y) \mathfrak{G}(G_\alpha^0 f)(y) m(dy) = \int_D \hat{h}(b, y)(\alpha G_\alpha^0 f(y) - f(y)) m(dy)$$
$$= \alpha \int_D \int_D \hat{h}(b, y) g_\alpha^0(y, z) f(z) m(dz) m(dy) - \int_D \hat{h}(b, y) f(y) m(dy)$$
$$= \int_D (\hat{h}(b, z) - \hat{h}_\alpha(b, z)) f(z) m(dz) - \int_D \hat{h}(b, y) f(y) m(dy)$$
$$= -\int_D \hat{h}_\alpha(b, y) f(y) m(dy)$$

support compact な函数で近似して $f \in \mathbb{C}(D)$ に対し (28) を得る。

<u>定理 4.</u> (境界条件) $u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ なら $u/_{\partial D} \in R$ であって

(29) $Qu(b) - \int_D \hat{h}(b, x) \mathfrak{G} u(x) m(dx) = 0$ $\qquad b \in \partial D$

が成立する。

証明 $u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ とすると $\exists f \in \mathbb{C}(S)$ $u = G_\alpha f$ で定理 I より

(30) $u(x) = G_\alpha^0 f(x) + \int_{\partial D} h_\alpha(x, b) u(b) \mu(db)$ $\qquad x \in D$

(31) $u(b) = K^\alpha \cdot [\hat{h}_\alpha f](b)$ $\qquad b \in \partial D$

但し $[\hat{h}_\alpha f](c) = \int_D \hat{h}_\alpha(c, x) f(x) m(dx)$ とする (31) と (19) より
$[\hat{h}_\alpha f](b) = (K^\alpha)^{-1} u(b) = -Qu(b) + U_\alpha u(b)$

(30) と (A.9) と Lemma 8 とにより

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$\int_D \hat{h}(b,x)\mathcal{G}u(x)m(dx) = -\int_D \hat{h}_\alpha(b,x)f(x)m(dx) + U_\alpha u(b)$$
$$= Qu(b) - U_\alpha u(b) + U_\alpha u(b) = Qu(b).$$ (q.e.d.)

注意 $\int_D \hat{h}(b,x)\mathcal{G}u(x)m(dx)$ に相当する量をFellerは[5]の場合に u の b に於ける"normal derivative analogue"と呼んだ。実際にはそれは u を定理1の型に分解したときの g_α に関するpotentialのpartのnormal derivativeに類似である。これはLemma 8からも推察できるが、境界がregularな古典的な拡散過程などでは確かめることができる事実である。

Harmonic partのnormal derivativeにanalogousな情報は(境界条件を知るにはこれが最も重要なものであるが) Qの中に入っているとみるべきである。

§3. $\mathcal{U}$-processから導かれるspace-time process.

この節では定理3の $S(t,w)$ に対し $(S^{-1}(t,w), X_{S^{-1}}(t,w))$ の分布により $[0+\infty]\times\partial D$ 上のMarkov過程を導びく。このprocessのLévy measureを計算することにより最初のprocess $\mathbb{M}$ のexcursion (pathが ∂D より D に入ってから最初に ∂D に達するまでのpathの行動)の状態を調べるのをこの節の主な目標とする。

(A.1)～(A.8) を仮定する。

定理4 $\bar{I} = [0,+\infty]$ 即ち、$I = [0,+\infty)$ のone point compact化とする。$\mathbb{C}(\bar{I}\times\partial D)$ 上の強連続なsemigroup $\{F_t, t \geqq 0\}$ があって次の性質を満す。

$h(u,b) = e^{-\alpha u}f(b)$, $u\in\bar{I}$, $b\in\partial D$, $f\in\mathbb{C}(\partial D)$

なる函数に対しては

(32) $F_t h(u,b) = e^{-\alpha u}T_t^\alpha f(b)$

証明 $\bar{I}$ のBorel set J, ∂D のBorel set B, $b\in\partial D$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(33) $F_t'(J:b,B)=P_b(S^{-1}(t,w)\in J;\ x_{S^{-1}(t,w)}\in B)$

とおく．定理3より $T_t^\alpha f(b)=E_b(e^{-\alpha S^{-1}(t,w)}f(X_{S^{-1}(t,w)}))$

であるから

(34) $T_t^\alpha f(b)=\int_0^{+\infty}\int_{\partial D}e^{-\alpha u}f(b')\,F_t'(du;b,db')$

が $f\in\mathbb{C}(\partial D)$, $b\in\partial D$ に対して成立する．今 $h(u,b)\in\mathbb{C}(\bar{I}\times\partial D)$ に対し

(35) $F_t h\cdot(u,b)=\int_0^{+\infty}\int_{\partial D}h(u+v,b')\,F_t'(dv:b,db')$

とおこう．(32)が成立することは(34)から明らか．F_t が強連続な semigroup であることを示そう．

先ず $F_t:\mathbb{C}(\bar{I}\times\partial D)\longrightarrow\mathbb{C}(\bar{I}\times\partial D)$ を示す．

$\mathbb{D}=\{h\in\mathbb{C}(\bar{I}\times\partial D);\ h(u,b)=e^{-\alpha u}f(b),\ \alpha\geqq 0,\ f\in\mathbb{C}(\partial D)\}$

とおくと Stone-Weierstrass の定理より $\mathbb{D}$ は $\mathbb{C}(\bar{I}\times\partial D)$ で dense である．任意の $h\in\mathbb{C}(\bar{I}\times\partial D)$ に対し $h_n\in\mathbb{D}$, $h_n\rightrightarrows h$ $(n\longrightarrow\infty)$ なる $\{h_n\}$ をとる．(32)より $F_t h_n\in\mathbb{C}(\bar{I}\times\partial D)$ であって $|F_t h(u,b)-F_t h_n(u,b)|\leqq\|h-h_n\|\int_0^{+\infty}\int_{\partial D}F_t'(du,b,db')$

$=\|h-h_n\|\ T_t 1(b)=\|h-h_n\|$,

従って連続函数の一様収束の極限として $F_t h\in\mathbb{C}(\bar{I}\times\partial D)$ であり F_t の operator としての norm が 1 であることもわかる．

$h\in\mathbb{D}$ に対しては (32) より明らかに

$F_t F_s h=F_{t+s}h \qquad t,s\geqq 0$

$\|F_t h-h\|\longrightarrow 0 \qquad t\downarrow 0$

である．$\mathbb{D}$ が $\mathbb{C}(\bar{I}\times\partial D)$ で dense で F_t が有界であることからこの関係は全ての $h\in\mathbb{C}(\bar{I}\times\partial D)$ について成立する．(q.e.d)

<u>定義5</u> F_t から導びかれる $\bar{I}\times\partial D$ 上の Markov 過程を $\mathbb{M}_{\bar{I}\times\partial D}$ と書く．これを U-process $\{\mathbb{M}_{\partial D}^\alpha:\alpha\geqq 0\}$ から導びかれる space-time process と呼ぶ．

$f\in\mathbb{C}(\partial D)$, J を $\bar{I}$ の Borel set とするとき $\int_{\partial D}F_t'(J,b,db')f(b')$ を $F_t'(J,b,f)$ とかくことにする．

<u>Lemma 9</u>

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

i) $F_t'(\{0\}, b, f) = 0, \quad F_t'(\{+\infty\}, b, f) = 0$

$$0 < t < +\infty \quad b \in \partial D \quad f \in \mathbb{C}(\partial D).$$

ii) $\int_0^{+\infty} F_t'(du, b, f)\, dt = du \int_{\partial D} P(u, b, b') f(b') \mu(db') \quad f \in \mathbb{C}(\partial D)$

iii)

(36) $(1-e^{-u}) \dfrac{F_t'(du, b, f)}{t} \xrightarrow[t\downarrow 0]{} (1-e^{-u}) A_u f(b)\, du$

収束は du の measure としての弱収束の意味．$f \in \mathcal{R}$，

$A_u f(b) = \int_{\partial D} A_u(b, b') f(b') \mu(db')$ とする．

証明　i) (34) より

$\lim_{\alpha \to +\infty} T_t^\alpha f(b) = F_t'(\{0\}, b, f)$

$\lim_{\alpha \to \infty} (T_t f(b) - T_t^\alpha f(b)) = F_t'(\{+\infty\}, b, f)$

である．$T_t^\alpha f(b) = E_b(e^{-\alpha s^{-1}(t,w)} f(X_{s^{-1}(t,w)}))$ より $\lim_{\alpha \to \infty} T_t^\alpha f(b)$

$= T_t f(b)$ はすぐわかる．

$|T_t^\alpha f(b)| \leq \|f\| \cdot T_t^\alpha 1(b)$.

Lemma 6 iii) より．

$\lim_{\alpha \to +\infty} K^\alpha 1(b) = \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha \to \infty} T_t^\alpha 1(b)\, dt = 0.$

$\lim_{\alpha \to \infty} T_t^\alpha 1(b) = P_b(s^{-1}(t, w) = 0)$ は t に関する減少函数だから，

全ての t に対し $\lim_{\alpha \to +\infty} T_t^\alpha 1(b) = 0.$

ii) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} du \int_{\partial D} P(u, b, b') f(b') \mu(db') = K^\alpha f(b)$

$= \int_0^{+\infty} T_t^\alpha f(b)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} \int_0^{+\infty} F_t(du, b, f)\, dt$

が任意の $\alpha > 0$ に対し成立するから．．．．．．．

iii) 定理2より　$f \in \mathcal{R}$ に対し

$\dfrac{T_t f - f}{t} \xrightarrow[t\downarrow 0]{} Qf, \quad \dfrac{T_t^\alpha f - f}{t} \xrightarrow[t\downarrow 0]{} Qf - U_\alpha f$

従って $\dfrac{T_t f - T_t^\alpha f}{t} \xrightarrow[t\downarrow 0]{} U_\alpha f.$　書きかえると (34) と (23) より

$\int_0^{+\infty} (1-e^{-\alpha u}) \dfrac{F_t'(du, b, f)}{t} \xrightarrow[t\downarrow 0]{} \int_0^{+\infty} (1-e^{-\alpha u}) A_u f(b)\, du.$

が任意の α について成立することになる．$f \in \mathcal{R}$ を non-negative として一般性を失わない (36) の左辺が t に関し一様有界な measure であることがわかるから弱収束する部分列を含む．

一方 $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1-e^{-\alpha u}}{1-e^{-u}} \nu(du)$ とおく時 $\{f(\alpha); \alpha > 0\}$ は

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

measure ν_E を完全にきめる. 以上に注意すると iii) を得る.

(q.e.d.)

さて $\mathbb{M}_{\bar{I}\times\partial D}$ の確率法則を $\tilde{P}_{(u,b)}$ $(u,b)\in\bar{I}\times\partial D$, path の t 座標を $(\eta_t, Y_t)\in\bar{I}\times\partial D$ としよう. path は右連続で左から極限を持つ version をとっておく.

$+\infty > u_0 > 0$ を固定して $\bar{I}\times\partial D$ に於ける strip G を次の様にきめる.

$$G=\{(u,b)\in\bar{I}\times\partial D;\ 0\le u<u_0,\ b\in\partial D\}$$

τ_G を path の G からの first leaving time とする. 即ち

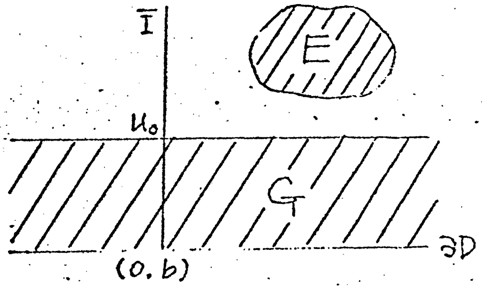
$$\tau_G = \inf\{t.\ t\ge 0,\ (\eta_t, Y_t)\notin G\}$$
$$= +\infty \quad \text{if there is no such } t$$

$\bar{I}\times\partial D - G$ に含まれる Borel set を E とした時次の定理が成立する. 但し E と G の距離は真に正とする.

定理 5

$$\tilde{P}_{(0,b)}((\eta_{\tau_G}, Y_{\tau_G})\in E)=\int_0^{u_0}\int_{\partial D}P(u,b,b')\,du\,\mu(db')\iint_E A_{v-u}(b',c)\,dv\,\mu(dc)$$

証明



証明は Markov 過程の Lévy measure についての関係式を論じた Semi on Prob. vol.13 [18] 第3章 §1 に従って行なう. (尚 [8] 参照) $\varepsilon>0$ を任意に与えたとき

$g\in\mathbb{C}(\bar{I})$, $g(u)=0$ $\ 0\le u<u_0+\varepsilon$ なる g と任意の $f\in\mathbb{R}$ に対し $h(u,b)=g(u)f(b)$ $(u,b)\in\bar{I}\times\partial D$ とおくと $h\in\mathbb{C}(\bar{I}\times\partial D)$ で h の support は G^c に含まれ, その G からの距離は真に正である. しかも $\frac{F_t h\cdot(u,b)}{t}$ は $(u,b)\in G$ で一様有界で

(37) $$\lim_{t\downarrow 0}\frac{F_t h(u,b)}{t}=\int_{u_0}^{+\infty}\int_{\partial D}A_{v-u}(b,b')h(v,b')\,dv\,\mu(db')$$

である. 但し $(u,b)\in G$. なぜなら

$$\frac{F_t h(u,b)}{t}=\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}\int_{\partial D}g(u+v)f(b')F_t(dv;b,db')$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$= \int_0^{+\infty} \frac{g(u+v)}{1-e^{-v}} (1-e^{-v}) \frac{F_t'(dv, b, f)}{t}.$$

ところが g に関する仮定により $0 \leq u < u_0$ なる限り、$g(u+v)/1-e^{-v}$ は v の函数として $\mathbb{C}(\bar{I})$ に属すことがわかるから Lemma 9 iii) より

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{F_t h(u,b)}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{g(u+v)}{1-e^{-v}} (1-e^{-v}) A_v f(b) dv$$

$$= \int_{u_0}^{+\infty} A_{v-u} f(b) dv$$

となり (37) を得る. 又 $\sup_{\substack{0 \leq u \leq u_0 \\ 0 \leq v < +\infty}} \frac{g(u+v)}{1-e^{-v}} = C$ とおくと $C < +\infty$

であって $\left| \frac{F_t h(u,b)}{t} \right| \leq C \cdot \|f\| \cdot \frac{T_t 1(b) - T_t^1 1(b)}{t} \xrightarrow[(unif.\ in\ b)]{} C\|f\| \cdot U_1 1(b)$

であるから (37) の収束が G で一様であることがわかる.

次に $\tilde{P}_{(u,b)}$ による平均を $\tilde{E}_{(u,b)}$ と表わした時 $b \in \partial D$ に対し

(38) $\quad \tilde{E}_{(0,b)}(\tau_G) < +\infty$

であることを示そう. G の indicator function を χ_G とおく時、

$$\tilde{E}_{(0,b)}(\tau_G) = \tilde{E}_{(0,b)}\left(\int_0^{\tau_G} \chi_G(\eta_t, Y_t) dt\right) \leq \tilde{E}_{(0,b)}\left(\int_0^{+\infty} \chi_G(\eta_t, Y_t) dt\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} F_t \chi_G(0,b) dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{u_0} \int_{\partial D} F_t'(du, b, db')$$

故に Lemma 9. ii) より

$$\tilde{E}_{(0,b)}(\tau_G) \leq \int_0^{u_0} du \int_{\partial D} P(u,b,b') \mu(db') \leq e^{\alpha u_0} \int_0^{u_0} e^{-\alpha u} du \int_{\partial D} P(u,b,b') \mu(db')$$

$$\leq e^{\alpha u_0} K^\alpha 1(b) < +\infty. \qquad (\alpha > 0)$$

更に

(39) $\quad \tilde{E}_{(0,b)}\left(\int_0^{\tau_G} \chi_F(\eta_t, Y_t) dt\right) = \iint_F P(u,b,b') du\, \mu(db')$

である. ここに F は G に含まれる Borel set とする. 実際

$$(39) \text{ の左辺} = \int_0^{+\infty} \tilde{P}_{(0,b)}((\eta_t, Y_t) \in F;\ t < \tau_G)\ dt$$

ところが後で示すように η_t は t に関する増加函数と考えてよいから $\eta_t \in [0, u_0)$ なら $t < \tau_G$ である. 従って

$$(39) \text{ の左辺} = \int_0^{+\infty} \tilde{P}_{(0,b)}((\eta_t, Y_t) \in F) dt = \int_0^{\infty} dt \iint_F F_t'(du, b, db')$$

となり Lemma 9 ii) より (39) を得る.

以上証明した (37) (38) (39) により、[18] の <u>定理 3.1</u> が成立するための条件が全てそろったから、この定理を我々の場合にあ

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

てはめて書くと、

$$\widetilde{E}_{(a,b)}(h(\eta_{\tau_G}, Y_{\tau_G})) = \iint_G P(u,b,b')\,du\,\mu(db') \iint_{G^c} A_{v-u}(b',c)\,h(v,b')\,dv\,\mu(dc)$$

となる. 但し h は証明の最初の部分にあげた性質を持つ函数とする. これより定理5が従うことは明らかであろう. (q.e.d)

最後に定理5をもとの process $\mathbb{M}$ の言葉でいいかえることを考える. $\mathbb{M} = \{W, P_b, X_t\}$ と定理3の $S(t,w)$ に対し

$P_{(u,b)}((S^{-1}(t,w), X_{S^{-1}(t,w)}) \in E) = P_b((S^{-1}(t,w)+u, X_{S^{-1}(t,w)}) \in E)$ (E は $\bar{I} \times \partial D$ の Borel set) によって $P_{(u,b)}$ を定義していくと process $\{W, P_{(u,b)}, (u,b) \in \bar{I} \times \partial D, (S^{-1}(t,w), X_{S^{-1}(t,w)})\}$ と process $\{\widetilde{P}_{(u,b)}, (u,b) \in \bar{I} \times \partial D, (\eta_t, Y_t)\}$ は Dynkin の意味で equivalent になる. (33) (35) より $h \in \mathbb{C}(\bar{I} \times \partial D)$ に対し

$$E_{(u,b)}(h(S^{-1}(t,w), X_{S^{-1}(t,w)})) = F_t h(u,b) = \widetilde{E}_{(u,b)}(h(\eta_t, Y_t))$$

がわかり両者の transition probability が一致するからである. 従って 後者を前者と思って差し支えない. $S^{-1}(t,w)$ は t に関し増加函数であり定理5の証明の中で η_t を t に関し増加函数と考えて一般性を失なわなかったわけである。定理5をこの立場で考えると

$$\tau_G(w) = \inf\{t : t \geq 0, S^{-1}(t,w) \geq u_0\} = S(u_0, w)$$

であるから

系 $0 < u_0 < u_1 < u_2 < +\infty$, ∂D の Borel set B に対し

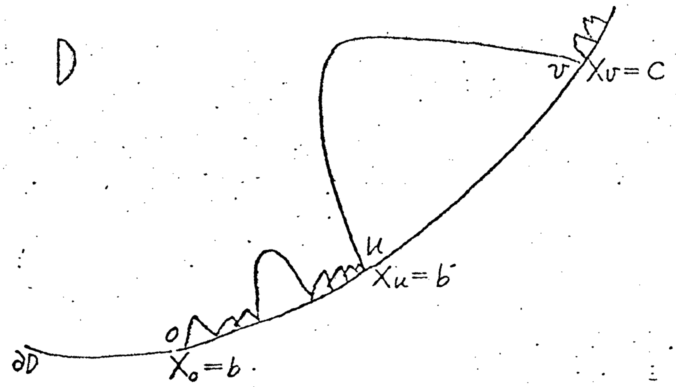
$$P_b(S^{-1}(S(u_0 w), w) \in (u_1, u_2), X_{S^{-1}(S(u_0,w),w)} \in B)$$
$$= \int_0^{u_0}\int_{\partial D} P(u,b,b')\,du\,\mu(db') \int_{u_1}^{u_2}\int_B A_{v-u}(b',c)\,dv\,\mu(dc)$$

が成立する.

証明 定理5で $E = (u_1, u_2) \times B$ とおけばよい.

これにより $(S^{-1}, X_{S^{-1}})$ の jumping measure が kernel $A_u(b,b')$ により与えられている事情がわかる. $S(t)$ は path が D にいる時は増加しないから S^{-1} の jump の巾だけの時間 path は D を excursion している.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138



§4. U-process に関する Dirichlet norm

この節では §2 で作った U-process $\mathbb{M}_{\partial D}$ に関して、函数の Dirichlet norm を確率論的に定義し、それを kernel A_u あるいは U によって表現する。一方それの Q ($\mathbb{M}_{\partial D}$ の semigroup の generator) による表現も考える。ここに得られる等式はもとの Markov process $\mathbb{M}$ に関する Green の第一公式にあたるものと考えられる。その事情は §5 で更に明らかになるであろう。

(A.1) 〜 (A.8) を仮定する。

§3 で $\mathbb{M}$ より $\mathbb{M}^{\alpha}_{\partial D}$ を導いたが $\hat{\mathbb{M}}$ より同じように U-process の system が作られる。定理2 の dual として、次の定理が成立することは §2 の議論を ^ をつけて繰返せばわかる。

(A.5) より $\hat{K}^{\alpha} f(b) = \int_{\partial D} g_{\alpha}(c,b) f(c) \mu(dc)$ で定義される $\hat{K}^{\alpha}$ は $\mathbb{C}(\partial D)$ を $\mathbb{C}(\partial D)$ に移すことがわかるが更に

<u>定理2'</u>

i) $\mathbb{C}(\partial D)$ 上の強連続な semi-group の system $\{\hat{T}^{\alpha}_t \,;\, \alpha \geq 0\}$ が存在して

$$\forall f \in \mathbb{C}(\partial D),\ \alpha > 0,\quad \hat{K}^{\alpha} f(a) = \int_0^{+\infty} \hat{T}^{\alpha}_t f(a)\, dt, \quad a \in \partial D$$

$\mathbb{C}(\partial D)$ の $\hat{K}^{\alpha}$ による image (indep. of α) を $\hat{R}$ とおき $u \in \hat{R}$ に対し $\hat{Q} = -(\hat{K}^{\alpha})^{-1} + \hat{U}_{\alpha}$ とおいたとき $\hat{Q}$ は α に無関係で

$\hat{T}^{\alpha}_t$, $\alpha > 0$ の generator は $\hat{Q} - \hat{U}_{\alpha}$

$\hat{T}_t = \hat{T}^{0}_t$ の generator は $\hat{Q}$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

である．但し $\hat{U}_\alpha f(b)=\int_{\partial D} U_\alpha(c,b)f(c)\mu(dc)$ $f\in \mathbb{C}(\partial D)$ とする．

ii). $\alpha \geqq 0$, $\lambda>0$ に対し $\hat{K}^\alpha_\lambda f(a)=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\hat{T}^\alpha_t f(a)\,dt$, $f\in\mathbb{C}(\partial D)$ とおくと

$$(40)\quad \hat{K}^\alpha_\lambda f-\hat{K}^\beta_\lambda f+\hat{K}^\alpha_\lambda(\hat{U}_\alpha-\hat{U}_\beta)\hat{K}^\beta_\lambda f=0 \qquad \alpha,\beta\geqq 0 \qquad \lambda>0$$

が成立する．

<u>定義4'</u> $\{\hat{T}^\alpha_t ; t\geqq 0\}$ から作られる ∂D 上の Markov 過程を $\hat{\mathbb{M}}^\alpha_{\partial D}$ と書き，$\hat{\mathbb{M}}$ から ∂D に導びかれた α－位の $\mathcal{U}$-process と呼ぶ．$\hat{\mathbb{M}}^0_{\partial D}$ を $\hat{\mathbb{M}}_{\partial D}$ と書き単に $\hat{\mathbb{M}}$ から導びかれる $\mathcal{U}$-process という．

$\mathbb{M}_{\partial D}$ と $\hat{\mathbb{M}}_{\partial D}$ の関係について次の Lemma が成立する．

<u>Lemma 10</u> i) ∂D上の measure μ は $\mathbb{M}_{\partial D}$ と $\hat{\mathbb{M}}_{\partial D}$ の common invariant measure である．即ち $\forall\lambda>0$, $\forall f\in\mathbb{C}(\partial D)$.

$$(41)\quad \lambda\int_{\partial D} K_\lambda f(b)\mu(db)=\int_{\partial D} f(b)\mu(db)$$

$$(41)'\quad \lambda\int_{\partial D} \hat{K}_\lambda f(b)\mu(db)=\int_{\partial D} f(b)\mu(db)$$

ii) $\forall\lambda>0$, $k_\lambda(b,c)$ なる函数があって $k_\lambda(b,c)$ は cを固定したとき b の函数として (T_t,λ)-excessive, bを固定したとき c の函数として $(\hat{T}_t,\lambda)$-excessive,

且つ $\forall f\in\mathbb{C}(\partial D)$

$$(42)\quad K_\lambda f(b)=\int_{\partial D}k_\lambda(b,c)f(c)\mu(dc),\ \hat{K}_\lambda f(b)=\int_{\partial D}k_\lambda(c,b)f(c)\mu(dc)$$

従って $\mathbb{M}_{\partial D}$ と $\hat{\mathbb{M}}_{\partial D}$ とは μ に関し互に adjoint である．

証明 ii) より i) が出る．$\mathbb{M}_{\partial D}$, $\hat{\mathbb{M}}_{\partial D}$ 共に conservative であるから $\forall f\in\mathbb{C}(\partial D)$

$$\lambda\int_{\partial D}K_\lambda f(b)\mu(db)=\lambda\int_{\partial D}\hat{K}_\lambda 1(b)\cdot f(b)\mu(db)=\int_{\partial D}f(b)\mu(db)$$

となるからである．(41)' も同様にして出る．従って ii)を証明すればよい．

先ず $\forall f, g\in\mathbb{C}(\partial D)$

$$(43)\quad \int_{\partial D}f(b)K_\lambda g(b)\mu(db)=\int_{\partial D}\hat{K}_\lambda f(b)\cdot g(b)\mu(db)$$

であることを示す．$\alpha>0$ のときは

$$\int_{\partial D}f(b)K^\alpha g(b)\mu(db)=\iint_{\partial D\,\partial D}f(b)g_\alpha(b,c)g(c)\mu(db)\mu(dc)=\int_{\partial D}\hat{K}^\alpha(b)\cdot g(b)\mu(db).$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

これより $\forall n$; 自然数

$$\int_{\partial D} f(b)((K^\alpha)^n g)(b)\mu(db) = \int_{\partial D}((\hat{K}^\alpha)^n f)(b)\cdot g(b)\mu(db)$$

がわかる: 但し $(K^\alpha)^n$ は K^α の n 回の iteration. 従って $\lambda>0$ に対する K^α_λ の定義の式(26)と $\hat{K}^\alpha_\lambda$ に関する類似の式より

$$\int_{\partial D} f(b)\, K^\alpha_\lambda g(b)\,\mu(db) = \int_{\partial D}\hat{K}^\alpha_\lambda f(b)\cdot g(b)\,\mu(db)$$

がわかる: ここでは μ が finite measure であることに注意すればよい. 上式で $\alpha\to 0$ として(43)を得る.

さて, $\alpha\geq 0$, $\lambda>0$ のとき $K^\alpha_\lambda f(b)$, $f\in \mathbb{C}(\partial D)$ は $\mathbb{C}(\partial D)$ の非負線型汎函数だから ∂D 上の measure $k^\alpha_\lambda(b.dC)$ があって $K^\alpha_\lambda f(b) = \int_{\partial D} k^\alpha_\lambda(b.dc)\, f(c)$ と書ける. $k^\alpha_\lambda(b.dC)$, 特に $k_\lambda(b.dC) = k^0_\lambda(b.dc)$ は $\mu(dC)$ に関して絶対連続である. なぜなら $\alpha>0$ のとき resolvent equation より $f\in\mathbb{C}^+(\partial D)$ に対し

$$K^\alpha_\lambda f(b) = K^\alpha f(b) - \lambda K^\alpha_\lambda K^\alpha f(b) \leq K^\alpha f(b).$$

従って $k^\alpha_\lambda(b.E)\leq\int_E g_\alpha(b.c)\mu(dc)$, E は ∂D の Borel set がわかるから $K^\alpha_\lambda(b.dc)$ は $\mu(dc)$ に関し絶対連続である。

更に(25)より $K_\lambda f(b) = K^\alpha_\lambda f(b) - K_\lambda U_\alpha K^\alpha_\lambda f(b)$ が任意の $f\in\mathbb{C}(\partial D)$ について成立することから $K_\lambda(b.dc)$ の $\mu(dc)$ に関する絶対連続性がわかる。

今 $K_\lambda(b.dc)$ の $\mu(dc)$ に関する density を $\widetilde{k}_\lambda(b.c)$ とする. $\hat{K}_\lambda f(b)$ より定まる measure を $\hat{k}_\lambda(dc,b)$ とおくと(43)と K_λ, $\hat{K}_\lambda$ に関する resolvent equation を使って $\mu\int\widetilde{k}_\lambda(b.C')\,\hat{k}_{\lambda+\mu}(dc',c)$ が μ に関し単調増大であることがわかるので

$$k_\lambda(b.c) = \lim_{\mu\to+\infty}\mu\int\widetilde{k}_\lambda(b.C')\,\hat{k}_{\lambda+\mu}(dc',c)$$

とおく. このようにして得られる $k_\lambda(b.c)$ が ii) の条件を全て満すことが証明される. これには再び(43)と $K_\lambda, \hat{K}_\lambda$ の resolvent equation を使うのであるが 詳しくは国田; Semi on Prob vol 17 を参照されたい. (q.e.d)

次に $\mathbb{M}_{\partial D}$, $\hat{\mathbb{M}}_{\partial D}$ に関する函数の Dirichlet norm を定義するための準備をする. $\lambda>0$ とする. $\mathbb{M}_{\partial D}$ の $e^{-\lambda t}$ による subprocess

の確率測度を $\hat{P}_b^\lambda$, $b\in\partial D$, それに関する平均を $\hat{E}_b^\lambda$, path の t 座標を $Y_t(w)$ と書く。このsubprocessに関するsemigroup は $e^{-\lambda t}T_t$ である。

$u\in\mathcal{D}(Q)$ に対し

(44) $$S_u^\lambda(t,w)=u(Y_t)-u(Y_0)+\int_0^t(\lambda-Q)u\cdot(Y_s)\,ds$$

とおくと次の Lemma が成立する。

Lemma 11 i) $S_u^\lambda(t,w)$ は additive functional であり $\lim_{t\to+\infty}S_u^\lambda(t,w)=S_u^\lambda(+\infty,w)$ が $\hat{P}_b^\lambda$-measure 1 で存在して

$$\hat{E}_b^\lambda(S_u^\lambda(+\infty,w))=0 \qquad \forall b\in\partial D.$$

ii) $P_u(b)=E_b^\lambda(S_u^\lambda(+\infty,w)^2)$ は有界で finite measure の λ-potential である。即ち ∂D 上の finite non negative measure $\xi_u^\lambda(db)$ があって

(45) $$v(b)=\int_{\partial D}k_\lambda(b,b')\,\xi_u^\lambda(db')$$ と書ける。

証明 i) $S_u^\lambda(t)$ が additive functional であることは明らかである。

$(\lambda-Q)u=f$ とおくと $u=K_\lambda f=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T_tf\,dt$ だから $\forall t>0$ $\forall b\in\partial D$

$$\hat{E}_b^\lambda(S_u^\lambda(t,w))=e^{-\lambda t}T_tK_\lambda f-K_\lambda f+\int_0^t e^{-\lambda t}T_sf\,ds=0$$

平均 0 の additive functional だから $S_u^\lambda(t,w)$ は martingale である。又 $E_b(|S_u^\lambda(t,w)|)\leqq 2\|u\|+\frac{1}{\lambda}\|f\|$ だから $S_u^\lambda(t,w)$ は uniformly integrable である。従って $\lim_{t\to+\infty}S_u^\lambda(t,w)=S_u^\lambda(+\infty,w)$ が $\hat{P}_b^\lambda$-1 で存在して $E_b^\lambda(S_u^\lambda(+\infty,w))=\lim_{t\to+\infty}E_b^\lambda(S_u^\lambda(t,w))=0$.

Doob [2] 参照

ii) $$\hat{E}_b^\lambda(S_u^\lambda(t,w)^2)\leqq 6\|u\|^2+3\hat{E}_b^\lambda\{(\int_0^t f(Y_s)\,ds)^2\}$$

$$\hat{E}_b^\lambda\{(\int_0^t f(Y_s)\,ds)^2\}=2\hat{E}_b^\lambda(\int_0^t f(Y_s)\int_0^s f(Y_r)\,dr\,ds)$$

$$\leqq 2\|f\|\hat{E}_b^\lambda(\int_0^t|f(Y_s)|s\,ds)\leqq 2\|f\|^2\int_0^t se^{-\lambda s}ds\leqq 2\frac{\|f\|^2}{\lambda^2}$$

即ち $0<C<+\infty$ なる constant C があって $\hat{E}_b^\lambda(S_u^\lambda(t,w)^2)\leqq C$

(C は t と b に関係しない) 従って Fatou より

$$v(b)=\hat{E}_b^\lambda(S_u^\lambda(+\infty,w)^2)\leqq C$$

又 S_u^λ の additivity と平均 0 の性質より

$$v(b)=\hat{E}_b^\lambda[(S_u^\lambda(t,w)+S_u^\lambda(+\infty,w_t^+))^2)$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$= \widehat{E}_b^\lambda(S_u^\lambda(t,w)^2) + 2\widehat{E}_b^\lambda(S_u^\lambda(t,w)\widetilde{E}_{Y_t}^\lambda(S_u^\lambda(+\infty))) + \widehat{E}_b^\lambda(\widetilde{E}_{Y_t}^\lambda(S_u^\lambda(+\infty)^2))$

$= \widehat{E}_b^\lambda(S_u^\lambda(t,w)^2) + e^{-\lambda t}T_t v(b)$

従って $e^{-\lambda t}T_t v(b) \uparrow v(b) \quad (t \downarrow 0)$ であり

vは (T_t, λ)-excessiveである。さて $\nu(db) = v(b)\mu(db)$ とおくと vは有界函数であり μは有界なmeasureだから νも有界なmeasureとなる。しかも vはexcessive だから (42) より ∂DのBorel set E に対し

$$\lambda\int_{\partial D}\nu(db)\hat{k}_\lambda(b,E) = \lambda\int_E \mu(dc)\int_{\partial D}k_\lambda(c,b)v(b)\mu(db) \leqq \nu(E)$$

となり νは $(\hat{T}_t\ \lambda)$ excessive measure である。有界な λ-excessive measureはある非負有界測度 ζ_u^λ の λ-potential measureである。即ち

(46) $\qquad \nu(E) = \int_{\partial D}\zeta_u^\lambda(db')\,\hat{k}_\lambda(b',E)$

と書ける。ここに ζ_u^λ の total mass $\zeta_u^\lambda(\partial D)$ は

(47) $\qquad \zeta_u^\lambda(\partial D) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_{\partial D}(\nu(db) - e^{-\lambda t}\nu\hat{T}_t(db))$

で与えられる。尚 $\hat{T}_t(c,db)$ は $\hat{T}_t f(c)$, $f \in \mathbb{C}(\partial D)$から定まるmeasureとし，$\nu\hat{T}_t(db) = \int\nu(dc)\hat{T}_t(c,db)$. (46) (47) については [11] P. 76 参照．(46) を書きかえると (45)が μ-measure 0の bを除いて成立することがわかるが、両辺がexcessive で fine continuous であることにより (45)が全ての bで成立するわけである。 (q.e.d)

<u>定義 6</u> $\quad u \in \mathcal{D}(Q)$ とする．Lemma 11で定まったmeasure ζ_u^λ に対し

(48) $\qquad D(u,u) = \lim_{\lambda\downarrow 0}\zeta_u^\lambda(\partial D)$

とおき $\sqrt{D(u,u)}$ を U-process $\mathbb{M}_{\partial D}$ に関する uの Dirichlet norm と呼ぶ．又 $u, v \in \mathcal{D}(Q)$ に対し

$D(u,v) = \frac{1}{4}(D(u+v, u+v) - D(u-v, u-v))$

を u, v の Dirichlet の内積と呼ぶ．

尚 $\lim_{\lambda\downarrow 0}\zeta_u^\lambda(\partial D)$が 確定することは次の定理からわかる．又

Lemma 11 に於ける $\zeta_u^\lambda(\partial D)$ は (47) で与えられるが (43) より $\int_{\partial D} f(b)\, T_t g(b)\, \mu(db) = \int_{\partial D} \hat{T}_t f(b)\cdot g(b)\, \mu(db)$ が従うことに注意すると (47) は次の様に書きかえることができる:

$$(49)\qquad \zeta_u^\lambda(\partial D) = \lim_{t\downarrow 0} \int_{\partial D} \left(v(b) - e^{-\lambda t}\, T_t v(b)\right) \mu(db)$$

今定義した $\mathcal{U}$-process に関する Dirichlet norm をもとの process $\mathbb{M}$ と $\hat{\mathbb{M}}$ に於ける ∂D への hitting measure から定まる所の kernel A_u, U によって表現することと, $\mathcal{U}$-process の generator Q により表現することを考えよう.

定理 6　$u \in \mathfrak{D}(Q)$ とする.

i) u に対して $N(u,u)$ なる非負の実数が定まって.

$$(50)\qquad D(u,u) = \int_0^{+\infty} du \int_{\partial D}\int_{\partial D} (u(b)-u(c))^2 A_u(b,c)\, \mu(db)\, \mu(dc) + N(u,u)$$

$$(50)'\qquad = \int_{\partial D}\int_{\partial D} (u(b)-u(c))^2\, U(b,c)\, \mu(db)\, \mu(dc) + N(u,u)$$

ii)

$$(51)\qquad D(u,u) = -2\int_{\partial D} u(b)\, Qu(b)\, \mu(db)$$

(証明) ii) の証明　$u \in \mathfrak{D}(Q)$, $S_u^\lambda(t,w) = u(Y_t) - u(Y_0) + \int_0^t (\lambda - Q)u(Y_s)\, ds$.

$v(b) = \tilde{E}_b^\lambda(S_u^\lambda(+\infty, w)^2)$ とおく. $v(b) - e^{-\lambda t} v(b) = \tilde{E}_b^\lambda(S_u^\lambda(t,w)^2)$ であることと (49) より

$$D(u,u) = \lim_{\lambda\downarrow 0}\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_{\partial D} \tilde{E}_b^\lambda(S_u^\lambda(t,w)^2)\, \mu(db)$$

$\tilde{P}_\mu^\lambda(B) = \int_{\partial D} \mu(db)\, \tilde{P}_b^\lambda(B)$ による平均を $\tilde{E}_\mu^\lambda$ と書くと

$$\frac{1}{t}\tilde{E}_\mu^\lambda(S_u^\lambda(t,w)^2) = \frac{1}{t}\tilde{E}_\mu^\lambda\left\{\left(u(Y_t) - u(Y_0) + \int_0^t (\lambda - Q)u(Y_s)\, ds\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{t}\tilde{E}_\mu^\lambda((u(Y_t) - u(Y_0))^2) + 2\tilde{E}_\mu^\lambda\left\{(u(Y_t) - u(Y_0))\cdot\frac{1}{t}\int_0^t (\lambda - Q)u(Y_s)\, ds\right\}$$

$$+ \tilde{E}_\mu^\lambda\left\{\int_0^t (\lambda - Q)u(Y_s)\, ds \times \frac{1}{t}\int_0^t (\lambda - Q)u(Y_s)\, ds\right\}$$

ところが path の右連続性より

$$\frac{1}{t}\int_0^t (\lambda - Q)u(Y_s)\, ds \xrightarrow[t\downarrow 0]{} (\lambda - Q)u(Y_0) \qquad \text{有界収束}$$

従って上の最後の2つの項は $t\downarrow 0$ としたとき 0 になる. 故に $\tilde{E}_b$ を $\mathbb{M}_{\partial D}$ の確率測度による平均とすると

Sem. on Probab.
Vol.16　1963年
P1-138

$$D(u,u)=\lim_{\lambda\downarrow 0}\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\widetilde{E}^{\lambda}_{\mu}((u(Y_t)-u(Y_0))^2)$$
$$=\lim_{\lambda\downarrow 0}\left\{\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_{\partial D}\widetilde{E}_b((u(Y_t)-u(Y_0))^2)\mu(db)+\lambda\int_{\partial D}u^2(b)\mu(db)\right\}$$
$$=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_{\partial D}(T_tu^2(b)-u^2(b))\mu(db)-2\lim_{t\downarrow 0}\int_{\partial D}u(b)\frac{T_tu(b)-u(b)}{t}\mu(db)$$

Lemma 10 (i) より μ は invariant measure であるから最初の項は 0 である。$\dfrac{T_tu(b)-u(b)}{t}\xrightarrow[t\downarrow 0]{}Qu(b)$ は b に関して一様収束であるから (51) を得る。

i) の証明　$T_tf(b)$, $f\in\mathbb{C}(\partial D)$ より定まる measure を $T_t(b,dC)$ とすると
$$D(u,u)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_{\partial D}\widetilde{E}_b((u(Y_t)-u(Y_0))^2)\mu(db)$$
$$=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_{\partial D}\int_{\partial D}T_t(b,dC)(u(C)-u(b))^2\mu(db)$$
となる。§3 の (33) で定義した F_t' を考えると (34) であるから
$$D(u,u)=\lim_{t\downarrow 0}\int_0^{+\infty}\int_{\partial D}\int_{\partial D}F_t'(du;b,dC)(u(C)-u(b))^2\mu(db)$$
である。今

(52)　$$\gamma_t(du)=\frac{1}{t}\int_{\partial D}\int_{\partial D}F_t'(du;b,dC)(u(C)-u(b))^2\mu(db)$$
とおくと $\gamma_t(du)$ は非負の $I=[0,+\infty]$ 上の measure であり

(53)　$$\int_0^{+\infty}\gamma_t(du)\xrightarrow[t\downarrow 0]{}D(u,u)$$

であるが　更に

(54)　$\forall\alpha>0$　$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\alpha u}\gamma_t(du)$　は $t\downarrow 0$ のとき収束する。

もし　$\forall\alpha>0$

(55)　$$\int_0^{+\infty}(1-e^{-\alpha u})\gamma_t(du)\xrightarrow[t\downarrow 0]{}\int_{\partial D}\int_{\partial D}U_\alpha(b,b')(u(b')-u(b))^2\mu(db')\mu(db)<+\infty$$

であることがいえれば (53) に注意して (54) を得る。

(55) を証明しよう。先ず $f\in\mathfrak{D}(Q)$ に対しては §3 Lemma 9 iii) の証明の部分でのべたように $\dfrac{(T_t-T_t^\alpha)f(b)}{t}\xrightarrow[t\downarrow 0]{}U_\alpha f(b)$ (b に関し一様) である。$f\in\mathbb{C}(\partial D)$ とし任意の ε に対し $\|f-g\|<\varepsilon$ なる $g\in\mathfrak{D}(Q)$ をとると
$$\left|\frac{(T_t-T_t^\alpha)f(b)}{t}-U_\alpha f(b)\right|\leq\varepsilon\cdot\frac{(T_t-T_t^\alpha)1(b)}{t}+\left|\frac{(T_t-T_t^\alpha)g(b)}{t}-U_\alpha g(b)\right|$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$\cdots + \varepsilon \cdot U_\alpha 1(b)$

となるから $1 \in \mathfrak{D}(Q)$ に注意すると

$$\frac{(T_t - T_t^\alpha) f(b)}{t} \xrightarrow[t \downarrow 0]{} U_\alpha f(b) \quad b \text{ に関し一様} \qquad \forall f \in \mathbb{C}(\partial D)$$

であることがわかる。ところが (52) と (34) により

$$\int_0^{+\infty} (1-e^{-\alpha u}) \nu_t(du) = \int_{\partial D} \frac{(T_t - T_t^\alpha) u^2(b)}{t} \mu(db) - 2\int_{\partial D} u(b) \frac{(T_t - T_t^\alpha) u \cdot (b)}{t} \mu(db)$$
$$+ \int_{\partial D} u^2(b) \frac{(T_t - T_t^\alpha) 1(b)}{t} \mu(db)$$

である。これより直ちに (55)を得る。

さて (53) より non negative measure $\gamma_t(du)$ は一様有界であることがわかり，弱収束する部分列がとれるが (53) と (54) により極限の measure は unique でなければならない。極限の measure を $\gamma(du)$ で表わそう。

$$U_\alpha(b, b') = \int_0^{+\infty} (1-e^{-\alpha u}) A_u(b, b') du$$

であるから (55) より

$$\int_0^{+\infty} (1-e^{-\alpha u}) \gamma(du) = \int_0^{+\infty} (1-e^{-\alpha u}) du \int_{\partial D}\int_{\partial D} A_u(b, b')(u(b') - u(b))^2 \mu(db') \mu(db)$$

が任意の $\alpha > 0$ に対し成立することになる。従って 適当な非負実数 $N(u, u)$ があって

$$\gamma(du) = N(u, u)\delta_0(du) + du \int_{\partial D}\int_{\partial D} A_u(bb')(u(b') - u(b))^2 \mu(db) \mu(db')$$

と表わされる。ここに $\delta_0(du)$ は 0 に於ける δ-measure である。

(53) より

$$D(u, u) = \int_0^{+\infty} \gamma(du) = N(u, u) + \int_0^{+\infty} du \int_{\partial D}\int_{\partial D} A_u(b, b')(u(b') - u(b))^2 \mu(db) \mu(db')$$

を得る。 $U(b, b') = \int_0^{+\infty} A_u(b, b') du$ に注意すれば (50)′ がいえる。

(q.e.d.)

$\mathbb{M}_{\partial D}$ に dual な $\mathcal{U}$-process $\hat{\mathbb{M}}_{\partial D}$ についても同じ議論ができる。

$u \in \mathfrak{D}(\hat{Q})$ に対し，定義6と同じようにして $\hat{D}(u, u)$ が定義できて，定理6に相当する事実が成立する。それについて，

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

系1 i) $u\in\mathcal{D}(\hat{Q})$ とする. 非負実数 $\hat{N}(u,u)$ が定まって

$$\hat{D}(u,u)=\int_{\partial D}\int_{\partial D}(u(b)-u(c))^2\,U(b,b')\mu(db)\mu(dc)+\hat{N}(u,u).$$

ii) $u\in\mathcal{D}(Q)\cap\mathcal{D}(\hat{Q})$ とすると $D(u,u)=\hat{D}(u,u)$, 従って $N(u,u)=\hat{N}(u,u)$.

証明 i) は定理6 i) の dual である. 定理6 ii) の dual として

$u\in\mathcal{D}(\hat{Q})$ なら $\quad \hat{D}(u,u)=-2\int_{\partial D}u(b)\,\hat{Q}u(b)\mu(db)$

が成立する. ところが (43) より $u\in\mathcal{D}(Q)$ $v\in\mathcal{D}(\hat{Q})$ なら

$$(56)\quad \int_{\partial D}Qu(b)\cdot v(b)\mu(db)=\int_{\partial D}u(b)\,\hat{Q}v(b)\mu(db)$$

であるから $u\in\mathcal{D}(Q)\cap\mathcal{D}(\hat{Q})$ なら $\hat{D}(u,u)=D(u,u)$ となり

ii) がわかる.

系2 $u,v\in\mathcal{D}(Q)\cap\mathcal{D}(\hat{Q})$ とすると

$$(57)\quad \begin{aligned}&\int_{\partial D}\int_{\partial D}(u(b)-u(c))(v(b)-v(c))\,U(b,c)\mu(db)\mu(dc)+N(u,v)\\&=-\int_{\partial D}u(b)\,(Qv(b)+\hat{Q}v(b))\mu(db)\end{aligned}$$

ここに $N(u,v)$ は $\mathbb{M}_{\partial D}$ により定まる bilinear functional.

証明 定義6の $D(u,v)$ を計算し (56) に注意すればよい. 但し

$N(u,v)=\frac{1}{4}(N(u+v,u+v)-N(u-v,u-v))$ と定義する.

(57) の式は classical な場合の Green の第一公式

$$\int_D(\operatorname{grad}Hu,\operatorname{grad}Hv)\,dx=c\int_{\partial D}u\,\frac{\partial(Hu)}{\partial n}\,d\sigma$$

の拡張と考えられる. (但し Hu は u を境界値とする調和函数)
この事情は次の節で触れる.

§5. 反射壁拡散過程の特徴

この節では伊藤清三氏 [10] により構成された放物型微分方程式の基本解に対応する Markov 過程を考察する.

記号は sem. on prob. Vol. 5.6 に従がい, そこにある諸結果はそのまま使うことにする.

D を N-次元 Euclid 空間の bounded domain とし, そ

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

の境界 ∂D は C^3－級の超曲面になっているとする．

議論を簡単にするために，次の様な self-adjoint な elliptic 作用素 A を考える．

$$Au(x)=\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}(x)\sqrt{a(x)}\frac{\partial u(x)}{\partial x^j}\right)$$

ここに $(x^1, x^2, \cdots, x^N)$ は x の local coordinate，a^{ij} は $\bar{D}$ で strictly positive definite な contravariant tensor で $a(x)=\det((a^{ij}(x))^{-1}$ とする．$a^{ij}\in C^3(\bar{D})$ と仮定．

dx，$d\xi$，$\frac{\partial}{\partial n_\xi}$ を各々基本 tensor a^{ij} から定まる D の体積要素，∂D の面積要素，$\xi\in\partial D$ に於ける法線微分としよう．$P^+(t,x,y)$ を A と境界条件 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ に対応する基本解、$P^0(t,x,y)$ を A と境界条件 $u=0$ に対応する基本解とする．

$\{P^+(t,x,y)dy\}$ を transition probability にもつ path の連続な Markov 過程を $\mathbb{M}^+$，$\{P^0(t,x,y)dy\}$ に対応する Markov 過程を $\mathbb{M}^0$ とおくと，$\mathbb{M}^0$ は $\mathbb{M}^+$ を ∂D への first passage time で killing して得られることがわかる．（[7] オ2章 §4）．

先ず $\mathbb{M}^0$ に関する harmonic function の Dirichlet norm を定義し，それを表現する問題を考えよう．

$$G_\alpha(x,y)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}p^0(t,x,y)dt,\quad G(x,y)=G_0(x,y)\qquad x,y\in D$$

$$h_\alpha(x,\xi)=h_\alpha(\xi,x)=\frac{\partial}{\partial n_\xi}G_\alpha(x,\xi),\quad h(x,\xi)=h_0(x,\xi)\qquad x\in D,\ \xi\in\partial D$$

$$U_\alpha(\xi,\eta)=\alpha\int_D h_\alpha(\xi,z)h(z,\eta)dz\qquad \xi,\eta\in\partial D$$

と順次おいて行くと，

(58) $$h(x,\xi)=\alpha\int_z G(x,z)h_\alpha(z,\xi)dz+h_\alpha(x,\xi)\qquad \alpha>0$$

(59) $$U_\alpha(\xi,\eta)=\int_0^{+\infty}(1-e^{-\alpha t})\frac{\partial^2}{\partial n_\xi\partial n_\eta}P(t,x,\eta)dt\qquad \alpha>0$$

が成立する．$U(\xi,\eta)=\lim_{\alpha\to+\infty}U_\alpha(\xi,\eta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial n_\xi\partial n_\eta}P(t,\xi,\eta)dt$ を Feller の kernel と呼ぶ．

∂D 上の連続函数 u に対し

$H\bar{u}(x)=\int_{\partial D}h(x,\xi)u(\xi)d\xi$ とおくと $\lim_{t\uparrow\sigma_\infty}Hu(X_t)=u(X_{\sigma_\infty-})$．

$Hu(x)=E_x^0(u(X_{\sigma_\infty-}))$ $\mathbb{M}^0$ に関し確率 1 で成立する．

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

ここに σ_∞ は killing time, $X_{\sigma_\infty-} = \lim_{t \uparrow \sigma_\infty} X_t$ とする.
$v(x) = E^0_x((u(X_{\sigma_\infty-}) - Hu(X_0))^2)$ が potential であることを示そう.

$$S_t = Hu(X_t) - Hu(X_0) \qquad t < \sigma_\infty$$
$$= u(X_{\sigma_\infty-}) - Hu(X_0) \qquad t \geqq \sigma_\infty \text{ とおく.}$$

S_t は additive functional であり $E_x(S_{+\infty}) = 0$ だから

$$v(x) = E^0_x(S^2_{+\infty} ; t \geqq \sigma_\infty) + E^0_x(S^2_t ; t < \sigma_\infty) + E^0_x(v(X_t) ; t < \sigma_\infty)$$

が成立することが容易にわかる。これより $v(x)$ が excessive function であることが従がう.

一方 $\{D_n\}$ を D の exhaustion とし. σ_n を D_n への first passage time とすると

$$E^0_x(v(X_{\sigma_n})) = v(x) - E_x(S^2_{\sigma_n}) \longrightarrow 0 \qquad (n \to +\infty).$$

従って v は potential であり ([7] PP115 参照) non negative measure ν により

$$v(x) = \int_D G(x, y)\, \nu(dy). \tag{60}$$

と書ける. $D^0(Hu) = \nu(D)$ とおき これを Hu の M^0 に関する Dirichlet norm という.
($u \in C^3(\partial D)$ なら $D^0(Hu) = \int_D a^{ij}(x) \frac{Hu(x)}{\partial x^i} \frac{Hu(x)}{\partial x^j} dx$ であることがわかる.)

<u>定理 7</u> $Hu \in C'(\bar{D})$ のとき

$$D^0(Hu) = \int_{\partial D} \int_{\partial D} (u(\xi) - u(\zeta))^2\, U(\xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \tag{61}$$

証明 $D^0(Hu) < +\infty$ なら 簡単な計算により

$$\begin{aligned} &\int_{\partial D} \int_{\partial D} (u(\xi) - u(\zeta))^2\, U_\alpha(\xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta - \alpha \int_{\partial D} \int_D h_\alpha(\xi, x) v(x)\, dx\, d\xi \\ &= \alpha \int_{\partial D} \int_D (Hu(x) - u(\xi))^2\, h_\alpha(\xi, x)\, dx\, d\xi. \end{aligned} \tag{62}$$

ところが (53) を使うと

$$\alpha \int_{\partial D} \int_D h_\alpha(\xi, x) v(x)\, dx\, d\xi = \int_{\partial D} \int_D (h(\xi, x) - h_\alpha(\xi, x)) \nu(dx)\, d\xi$$
$$\uparrow \int_{\partial D} \int_D h(\xi, x)\, \nu(dx)\, d\xi = \nu(D) \qquad (\alpha \to +\infty)$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

従って (62) の右辺が $\alpha \to +\infty$ のとき 0 に収束することが (61) の成立する必十条件である。

固定した Euclid 座標に関する基本解の次の評価式 ([7] §3 参照) を使おう。

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi} P^0(t,\xi,x) \leq (C_1 t^{-\frac{1}{2}} + C_2) t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{C_3 \sum_{i=1}^{N} |x^i - \xi^i|^2}{4t}\right)$$

(C_1, C_2, C_3 は定数)

$Hu \in \mathbb{C}^1(\bar{D})$ なら 上の Euclid 座標に関し

$$|Hu(x) - u(\xi)| \leq C \sum_{i=1}^{N} |x^i - \xi^i|, \qquad \forall x \in D \quad \forall \xi \in \partial D$$

が適当な C について成立する。ところが各 ξ に対し

$$\alpha \int_D h_\alpha(\xi, x) |x^i - \xi^i|^2 dx^1 \cdots dx^N = \alpha \int_D^{+\infty} e^{-\alpha t} \left\{ \int_D \frac{\partial}{\partial n_\xi} P^0(t,\xi,x) |x^i - \xi^i|^2 dx^1 \cdots dx^N \right\} dt$$

$$\leq \alpha \int_D^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \int_D C'(C_1 t^{-\frac{1}{2}} + C_2) t \cdot (y^i)^2 e^{-\frac{C_3}{2} \sum_{i=1}^{N} (y^i)^2} dy^1 \cdots dy^n$$

$\leq \dfrac{C''}{\sqrt{\alpha}}$. ここで $y^i = \dfrac{x^i - \xi^i}{\sqrt{2t}}$ とおいた。C', C'' は $\xi \in \partial D$ に無関係である。これより直ちに (62) の右辺が $\alpha \to +\infty$ のとき 0 に tend することが従がう。

さて、$\mathbb{M}^+$ について考えよう。

$\mathbb{M}^+$ に関しては、§4 の結果を導くための仮定 (A.1)〜(A.7) が全く満されていることが容易に確かめ得る。Kernel U は上に定義した U をとればよく、又、$Au(\xi, \eta)$ は $\mathbb{M}^+$ の場合 $\dfrac{\partial}{\partial n_\xi} \dfrac{\partial}{\partial n_\eta} P^0(u, \xi, \eta)$ となる。

$\mathbb{M}^+$ から §2 に従って U-process を作りその generator を Q とする。§2 の結果より、$u \in \mathcal{D}(Q)$ に対し $\mathbb{D}(u)$ を その U-process に関する Dirichlet norm とすると、$\exists N(u,u) \geqq 0$ で

$$\mathbb{D}(u) = 2\int_{\partial D} u(\xi) Qu(\xi) d\xi = \int_{\partial D}\int_{\partial D} (u(\xi) - u(\eta))^2 U(\xi,\eta) d\xi d\eta + N(u,u).$$

ところが [7] 第4章 §3 より

$u \in \mathbb{C}^3(\partial D)$ ならば $u \in \mathcal{D}(Q)$, $Hu \in C^2(\bar{D})$ で

$$Qu(\xi) = \frac{\partial}{\partial n}(Hu)(\xi) \qquad \text{である。}$$

従って $u \in \mathbb{C}^3(\partial D)$ ならば Green の第一公式より

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$(63)\quad 2\int_{\partial D} u(\xi)\,Qu(\xi)\,d\xi = \int_D a^{ij}(x)\,\frac{Hu(x)}{\partial x^i}\,\frac{Hu(x)}{\partial x^j}\,dx$$

(63) と (61) より

<u>定理 8</u>

$u \in \mathbb{C}^3(\partial D)$ のとき

$\mathbb{D}(u) = \mathbb{D}^0(Hu)$, 従がって $N(u,u) = 0$.

この定理は、反射壁過程は境界上で energy の増加がないこと、いいかえると 新たな randomness が境界上につけ加わっていないことを示すと考えられる。(その点についての詳しい議論は省く) $\frac{\partial}{\partial n}(Hu)(\xi)$ を Au で表現することにより (63) も直接証明できるが それも省略する。

尚 上のような $D(u)$ を norm とする Hilbert 空間を考えそこで potential 論が展開できて、適当な条件の下に Markov 過程が対応するのであるが、まだ十分研究されていない。これは Markov 過程を構成する一つの方法になり得るかもしれず、事実、Green space などでの反射壁 process の構成のための有力な手段と思われるので注目する必要がある。([1], [3] [4] 参照)

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

文 献 表

[1] A. Beurling and J. Deny ; Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., 45, (1959) 208–215.

[2] J. L. Doob ; Stochastic processes. 1953.

[3] 〃 ; Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals. Ann. Inst. Fourier, 12 (1962) 573–622.

[4] J. Eliott ; Une application des espaces de Dirichlet. Seminaire Brelot-Choquet-Deny, 6 (1961–62) n°5.

[5] W. Feller ; On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations, Ann. of Math, 65 (1957), 527–570.

[6] G. A. Hunt ; Markov processes and potentials. I, II, III, Illinois J. Math. 1, 2.

[7] 池田, 上野, 田中, 佐藤 ; 多次元拡散過程の境界問題 (上) (下) Sem. on prob. Vol 5. 6

[8] N. Ikeda, S. Watanabe ; On some relations between the harmonic measure and Levy measure for a certain class of Markov processes, J. Math. Kyoto univ. 2 (1962)

[9] 伊藤清 ; Subordinationについて (数理科学研究班第2班報告 6 (1959).

[10] S. Ito ; Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems. Jap. J. Math., 27 (1957). 55–102.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

[1] 近藤亮司 ; Markov過程とPotential.
Sem. on prob, vol 11.

[2] P.-A. Meyer ; Interprétation probabiliste de la notion d'ennergie. Seminaire Brelot-Choquet-Deny 7, 1962/63 n° 5.

[3] 本尾実 ; マルコフ過程の Additive functional.
Sem. on prob, vol 15.

[4] M. Nagasawa ; The adjoint process of a diffusion with reflecting barrier. Kōdai. Math. Sem. Rep 13 (1961). 235-248.

[5] J. Neveu ; Une generalisation des processus á accroiss-ements positifs independents. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 25 (1961). 36-61.

[6] J. Neveu ; Sur les états déntrée et les étoats fictifs d'un processus de Markov, Ann. Inst. Poincaré (1962) 323-337.

[7] 竹内, 山田, 渡辺(信), 安定過程 - Riesz ポテンシャル・path の性質 —, Sem. on prob vol 13.

[8] T. Ueno ; The diffusion satisfying Wentzell's boundary condition and the Markov process on the boundary. I, II, Proc. Jap. Acad. 36, (1960) 533-538, 625-629.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

第5章 Green作用素の分解
(Minimal Process と U-Process)

$D+\partial D$で与えられたマルコフ過程が，境界∂Dで滞留をもたず，内部へのjumpをしない時，それをminimal processの部分と境界上のprocess (U-process) の部分の2つの要素に分解することを考える。具体的には，そのGreen作用素G_αを，

(0.1) $\quad G_\alpha f = \overset{\circ}{G}_\alpha f + K^\alpha \hat{h}_\alpha f$

($\overset{\circ}{G}_\alpha$はminimal processの，$K^\alpha$はU-processのGreen作用素)と分解し，$\hat{h}_\alpha$はminimal processだけから決まるようにする。これはdiffusionがgeneratorのlocalな形と境界条件で定まる事実の，ある段階における確率論的表現である。(0.1)は，diffusionで微分作用素と境界条件が与えられた時，上野氏([2] 第3章)が解析的に得た分解のspecial caseであるが，われわれはこれに逆の方向(processが与えられたとし，境界条件等は分っていない場合)から近ずく，既に前章§1で(0.1)と形式的には同じ分解が求められているが，前章の場合には作用素$\hat{h}_\alpha$の定義に不変測度mを用いており，mはminimal processだけからは決らないので分解(0.1)の意味が明瞭でなく，不満足であった。

以下で(0.1)を求める方法のkey pointは，Hunt [1]の公式(前章Lemma 1)を，time reversionを用いて，より確率論的に求めることにある。(佐藤)

§1. 仮定

Sを第2可算公理をみたすcompactなHausdorff空間，DをS内の領域でclosureがSに一致するものとし，$\partial D = S - D \neq \phi$とする．extra point ∂を，位相は孤立点としてSに附加しておく．次の(1.1)-(1.3)をみたす$w: [0,+\infty] \longrightarrow S \cup \partial$の全体を$W$とする．

(1.1) $\quad w(t)$はtについて$[0,+\infty)$で右連続かつ左極限をもつ．

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(1.2) $0 \leq \zeta(w) \leq +\infty$ が存在して，$t < \zeta(w)$ では $w(t) \in S$，
$t \geq \zeta(w)$ では $w(t) = \partial$.

(1.3) $w(t) \neq \partial$ ならば，$\lim_{s \uparrow t} w(s) \in \partial D$ の時かつその時に限り
$w(t) \in \partial D$.

$x_t(w) = w(t)$ とかく。(1.1) により，$\zeta(w) < \infty$ ならば $x_{\zeta-0}(w)$
もSに存在する。

次の様に定義する。

$$\sigma(w) = \inf\{t > 0 : x_{t-0}(w) \in \partial D\}$$
$$\tau_s(w) = \sup\{t : 0 \leq t < s \text{ かつ } x_t(w) \in \partial D\}$$

ただし，$\inf \phi = +\infty$, $\sup \phi = -\infty$ とする。

$$\tau(w) = \tau_{\zeta(w)}(w) = \sup\{t : 0 \leq t < \zeta \text{ かつ } x_t \in \partial D\}$$
$$W_0 = \{w \in W : \zeta(w) < \infty\}$$

更に $w \in W_0$ に対して

$$\hat{x}_t(w) = \begin{cases} x_{\zeta(w)-t-0}(w) & (0 \leq t < \zeta(w)) \\ \partial & (t \geq \zeta(w)) \end{cases}$$
$$\hat{\sigma}(w) = \inf\{t > 0 : \hat{x}_{t-0}(w) \in \partial D\}$$

とおく。従って，

$$\hat{x}_{t-0} = \lim_{s \uparrow t} \hat{x}_s = \lim_{s \uparrow t} x_{\zeta-s-0} = x_{\zeta-t},$$
$$\hat{\sigma}(w) = \inf\{\zeta - t : t < \zeta \text{ かつ } x_t \in \partial D\} = \zeta - \tau$$

である。

S上の連続函数の全体を $C(S)$，有界可測函数の全体を $B(S)$ とおく。各々の非負の元の全体を $C^+(S)$, $B^+(S)$ とかく。S上の函数fはすべて，$f(\partial) = 0$ として $S \cup \partial$ に拡張しておく。

マルコフ過程，強マルコフ性等の定義は，オ3章§1に従う。

次の条件 (1.4), (1.5) をみたすマルコフ過程 $\overset{\circ}{X} = (x_t, W, \overset{\circ}{P}_a : a \in S)$ が与えられたとし[1] 以後ずっと固定しておく。

(1.4) $\overset{\circ}{P}_a(\zeta = \sigma) = 1$

---

[1] この場合にはマルコフ過程の定義において，オ3章(1.2)の代りに $P_a(x_0 = a \text{ or } \partial) = 1$, $a \in S$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(1.5) $\quad \mathring{G}_\alpha f(a) = \mathring{E}_a\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right), \quad \alpha > 0$ とすこのとき

$$\mathring{G}_\alpha : C(S) \to C(S).$$

m_0 を任意に固定したS上の測度 ($0 < m_0(S) < \infty$).

とし, α_0を任意に固定した正数として $m(da) = m_0 \mathring{G}_{\alpha_0}(da)$ とおく.

𝔛を次のような (A1)-(A5) をみたすマルコフ過程 $X = (x_t, W, P_a : a \in S)$ の全体とする.

(A1) 強マルコフ性を持つ.

(A2) conservative

(A3) $E_a\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right) = \mathring{G}_\alpha f(a), \quad \forall \alpha > 0,\ \forall f \in B(S)$

(A4) $p(t, a, b)$ という非負函数 ($0 < t < \infty$, $a, b \in S$) が存在して, tを固定した時 (a, b) について有界可測, (a, b) を固定した時 tについて右連続で,

$$P_a(x_t \in db) = p(t, a, b)\, m(db).$$

次のようにおく.

$$g_\alpha(a, b) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t, a, b)\,dt.$$

$$G_\alpha f(a) = \int g_\alpha(a, b) f(b)\, m(db) = E_a\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right)$$

$$f G_\alpha(b) = \int f(a)\, m(da)\, g_\alpha(a, b)$$

$$T_t f(a) = \int p(t, a, b) f(b)\, m(db) = E_a(f(x_t))$$

$$f T_t(b) = \int f(a)\, m(da)\, p(t, a, b)$$

(A5) $f \in C(S)$ ならば

(1.6) $\quad G_\alpha f \in C(S)$

(1.7) $\quad f G_\alpha \in C(S)$

(1.8) $\quad f T_t(b)$ は (t, b) 二変数について連続 ($t > 0$, $b \in S$)

(1.9) $\quad \lim_{t \downarrow 0} f T_t(b) = f(b) \qquad$ (有界収束).

注意 $\quad W$の条件 (1.3) は, 内部から境界への jump, 境界から内部への jump がないことを示している. $X \in$ 𝔛 なら境界での滞留がない. なぜなら.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$m(\partial D)=\int m_0(da)\,\mathring{G}_{\alpha_0}\chi_{\partial D}(a)=\int m_0(da)\,\mathring{E}_a\left(\int_0^\sigma \chi_{\partial D}(x_t)e^{-\alpha_0 t}dt\right)=0$$

$$G_\alpha\chi_{\partial D}(a)=\int g_\alpha(a,b)\,\chi_{\partial D}(b)\,m(db)=0$$

$X\in\mathfrak{X}$ に対し その $e^{-\alpha t}$-subprocess を $X^\alpha=(x_t, W, P_a^\alpha\,;\,a\in S)$ とおく. 明かに

$$E_a^\alpha\left(\int_0^\infty f(x_t)dt\right)=G_\alpha f(a).$$

$$P_a^\alpha(W_0)=1.$$

§2. Time reversion I (Signed measure (u_α^ξ))

$\alpha>0$, $a\in S$ に対し $h_\alpha(a,db)=E_a(e^{-\alpha\sigma}\,;\,x_{\sigma-0}\in db)$. とおく. これは ∂D 上の測度である. 更に, $h_\alpha f(a)=\int_{\partial D}h_\alpha(a,db)f(b)$. とおく.

<u>Lemma 2.1</u> $h_\alpha(a,db)$ は $\mathring{X}$ だけから決まる（すべての $X\in\mathfrak{X}$ に共通である）

<u>証明</u> $\gamma(w)=\widetilde{w}$ を, $\zeta(\widetilde{w})=\sigma(w)\wedge\zeta(w)$, $x_t(\widetilde{w})=x_t(w)$ $(0\le t<\zeta(\widetilde{w}))$ によって定義する. γ は $W\to W$ の可測写像で, $\gamma^{-1}(x_t\in B,\ t<\zeta)=(x_t\in B,\ t<\sigma\wedge\zeta)$ である. $\widetilde{P}_a(B)=P_a(\gamma^{-1}B)$ とおくと (A3) から

$\widetilde{P}_a=\mathring{P}_a$ である. 任意の有界可測 f に対し $\widetilde{E}_a(f)=E_a(f\circ\gamma)$ であるから.

$$h_\alpha f(a)=E_a(e^{-\alpha\sigma}f(x_{\sigma-0}))=E_a(e^{-\alpha\sigma}f(x_{\sigma-0})\,;\,\sigma<\infty)$$
$$=E_a(e^{-\alpha(\sigma\wedge\zeta)}f(x_{\sigma\wedge\zeta-0}))=E_a(e^{-\alpha\zeta(\gamma w)}f(x_{\zeta(\gamma w)-0}(\gamma w)))$$
$$=\widetilde{E}_a(e^{-\alpha\zeta}f(x_{\zeta-0}))=\mathring{E}_a(e^{-\alpha\zeta}f(x_{\zeta-0}))$$

<u>Lemma 2.2</u> $\forall f\in B(S)$, $\forall\alpha>0$ に対し

(2.1) $$G_\alpha f(a)=\mathring{G}_\alpha f(a)+h_\alpha G_\alpha f(a).$$

<u>証明.</u> ρ を S の metric とし. $A_n=\{a\in S\,;\,\rho(a,\partial D)<\frac{1}{n}\}$. $\sigma_n(w)=\inf\{t>0\,;\,x_t(w)\in A_n\}$ とおく. (1.3) より $\sigma<\infty$ ならば $\sigma_n<\sigma$ かつ $\sigma_n\uparrow\sigma$ である。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$G_\alpha f(a) = E_a\left(\int_0^{\sigma_n} e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right) + E_a\left(\int_{\sigma_n}^{\infty} e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right)$$
$$= E_a\left(\int_0^{\sigma_n} e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right) + E_a\left(e^{-\alpha\sigma_n} E_{x_{\sigma_n}}\left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right)\right)$$
$$\to E_a\left(\int_0^{\sigma} e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right) + E_a\left(e^{-\alpha\sigma} E_{x_{\sigma-0}}\left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right)\right).$$

ここで(1.6)を用いた。 q.e.d.

次のような ν を初期分布に用いることが、今後のすべての計算の基礎になる。

<u>Lemma 2.3.</u> 有限な *total variation* をもつ S上の *signed measure* ν が存在して

(2.2) $\displaystyle\int_S \nu(da)\, g_{\alpha_0}(a,b) = 1$ $\qquad (m\text{-a.e. } b)$

この ν はすべての $X \in \mathfrak{X}$ に共通にとれる。

<u>証明</u> $\int \nu(da)\, G_{\alpha_0} f(a) = \int f(a)\, m(da)$, $\forall f$ にとればよい。

Lem. 2.2. より

$$\int f(a)\, m(da) = \iint m_0(da)\, \overset{o}{G}_{\alpha_0}(a, db) f(b)$$
$$= \int m_0(da)\left[\int G_{\alpha_0}(a, db) f(b) - \iint h_{\alpha_0}(a, dc)\, G_{\alpha_0}(c, db) f(b)\right]$$

故に

(2.3) $\displaystyle \nu(da) = m_0(da) - \int_{a' \in S} m_0(da')\, h_{\alpha_0}(a', da)$

にとればよい。 q.e.d.

<u>Lemma 2.4.</u>

任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ と $f_0, f_1, \cdots f_n \in B(S)$ に対し、

(2.4)
$$E_\nu^{x_0}\left(\prod_{i=0}^{n} f_i(\hat{X}_{t_i}) : t_n < \hat{\sigma}\right) = \int_S \alpha_0 m(da)\, f_n(a)\, e^{-\alpha_0 t_n} E_a\left(\prod_{i=0}^{n-1} f_i(X_{t_n - t_i}) : t_n < \sigma\right)$$

である。従ってこの値は $X \in \mathfrak{X}$ によらない。

<u>証明</u> 左辺を t_n について Laplace 変換しよう。

$$\int_{t_{n-1}}^{\infty} e^{-\beta t_n}\, \alpha t_n\, E_\nu^{x_0}\left(\prod_{i=0}^{n} f_i(\hat{X}_{t_i}) : t_n < \hat{\sigma}\right)$$
$$= E_\nu^{\alpha_0}\left(\prod_{i=0}^{n-1} f_i(\hat{X}_{t_i}) \int_{t_{n-1}}^{\hat{\sigma}} e^{-\beta t_n} f_n(\hat{X}_{t_n})\, dt_n : t_{n-1} \le \hat{\sigma}\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$\hat{\sigma}=\zeta-\tau$ だから 変換 $\zeta-t_n=t$ により

$$=E_\nu^{\alpha_0}\Big(\prod_{i=0}^{n-1}f_i(X_{\zeta-t_i-0})\int_{\tau\vee 0}^{\zeta-t_{n-1}}e^{-\beta(\zeta-t)}f_n(X_{t-0})dt:\tau\vee 0\leq\zeta-t_{n-1}\Big)$$

$$=E_\nu\Big(\int_{t_{n-1}}^{\infty}\alpha_0 e^{-\alpha_0 s}ds\prod_{i=0}^{n-1}f_i(X_{s-t_i-0})\chi_{\{\tau_s\leq s-t_{n-1}\}}\int_{\tau_s\vee 0}^{s-t_{n-1}}e^{-\beta(s-t)}f_n(X_{t-0})dt\Big)$$

jumpは高々可算個だから、ここで、X_{s-t_i-0}, X_{t-0} を X_{s-t_i}, X_t としてよい。$\zeta>s>t\geq 0$ ならば

$$\tau_s\leq t\iff\sigma(w_t^+)\geq s-t$$

であるから

$$=\alpha_0E_\nu\Big(\int_{t_{n-1}}^{\infty}e^{-\alpha_0 s-\beta s}ds\int_0^{\infty}e^{\beta t}dt\prod_{i=0}^{n-1}f_i(X_{s-t_i})f_n(X_t)\chi_{\{\tau_s\leq t\leq s-t_{n-1}\}}\Big)$$

$$=\alpha_0E_\nu\Big(\int_0^{\infty}e^{\beta t}dt\,f_n(X_t)\chi_{\{t_{n-1}\leq\sigma(w_t^+)\}}\int_{t+t_{n-1}}^{t+\sigma(w_t^+)}e^{-\alpha_0 s-\beta s}\prod_{i=0}^{n-1}f_i(X_{s-t_i})ds\Big)$$

$$=\alpha_0E_\nu\Big(\int_0^{\infty}e^{-\alpha_0 t}f_n(X_t)\chi_{\{t_{n-1}\leq\sigma(w_t^+)\}}dt\int_{t_{n-1}}^{\sigma(w_t^+)}e^{-\alpha_0 s-\beta s}\prod_{i=0}^{n-1}f_i(X_{t+s-t_i})ds\Big)$$

$$=\alpha_0E_\nu\Big(\int_0^{\infty}e^{-\alpha_0 t}f_n(X_t)dt\,E_{X_t}\Big(\chi_{\{t_{n-1}\leq\sigma\}}\int_{t_{n-1}}^{\sigma}e^{-\alpha_0 s-\beta s}\prod_{i=0}^{n-1}f_i(X_{s-t_i})ds\Big)\Big)$$

Lemma 2.3. より

$$=\alpha_0\int_S m(da)f_n(a)E_a\Big(\chi_{\{t_{n-1}\leq\sigma\}}\int_{t_{n-1}}^{\sigma}e^{-\alpha_0 s-\beta s}\prod_{i=0}^{n-1}f_i(X_{s-t_i})ds\Big)$$

$$=\int_{t_{n-1}}^{\infty}e^{-\beta t_n}dt_n\int_S\alpha_0 m(da)f_n(a)e^{-\alpha_0 t_n}E_a\Big(\prod_{i=0}^{n-1}f_i(X_{t_n-t_i}):t_n<\sigma\Big)$$

Laplace変換は1対1だから、従って a.e. t_n に対し証明すべき式が成立する。証明すべき式は両辺とも t_nについて右連続だから、すべての t_n に対して成り立つ。

<u>Lemma 2.5.</u> $\alpha>0$, $f_0, f_1\in B(S)$ とすると、

$$E_a^{\alpha_0}\big(e^{-(\alpha-\alpha_0)\hat{\sigma}}f_0(\hat{X}_0)f_1(\hat{X}_{\hat{\sigma}-0}):\hat{\sigma}<\infty\big)\ \text{は}\ a\ \text{について有界}.$$

<u>証明</u> $\alpha\geq\alpha_0$ なら明かだから、$\alpha<\alpha_0$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$\left| E_a^{\alpha_0}\left(e^{-(\alpha-\alpha_0)\hat{\sigma}} f_0(\hat{x}_0) f_1(\hat{x}_{\hat{\sigma}-0}) : \hat{\sigma}<\infty\right)\right|$$
$$\leq \|f_0\|\cdot\|f_1\|\, E_a^{\alpha_0}\left(e^{-(\alpha-\alpha_0)\zeta}\right)$$
$$= \|f_0\|\cdot\|f_1\|\alpha_0 E_a\left(\int_0^\infty e^{-\alpha_0 s-(\alpha-\alpha_0)s}ds\right) = \|f_0\|\cdot\|f_1\|\frac{\alpha_0}{\alpha}.$$

定義 $\alpha>0$, $f\in B(S)$ に対し

(2.5) $$\frac{1}{\alpha_0}E_\iota^{\alpha_0}\left(e^{-(\alpha-\alpha_0)\hat{\sigma}} f(\hat{x}_0) f_1(\hat{x}_{\hat{\sigma}-0}) : \hat{\sigma}<\infty\right) = \int_{\partial D} f_1(a)\,\mu_\alpha^f(da)$$

によって，有限 total variation の signed measure μ_α^f を定義する。

定理 2.1

μ_α^f は $x\in\mathfrak{X}$ によらない。

証明 $\gamma: W\longrightarrow W$ を

$$\gamma(w)=\tilde{w}\ :\ \begin{cases}\zeta(\tilde{w})=\hat{\sigma}(w)\wedge\zeta(w)\\ x_t(\tilde{w})=\hat{x}_t(w)\quad \text{for } t<\zeta(\tilde{w})\end{cases}$$

によって定義する。$0=t_0<t_1<\cdots<t_n$, $B_0,\cdots,B_n\in\mathbb{B}(S)$ に対し

$$\gamma^{-1}(x_0\in B_0,\cdots,x_{t_n}\in B_n,\ \zeta>t_n)$$
$$=(\hat{x}_0\in B_0,\cdots,\hat{x}_{t_n}\in B_n,\ \hat{\sigma}\wedge\zeta>t_n)$$
$$\gamma^{-1}(x_0\in B_0,\cdots,x_{t_k}\in B_k,\ x_{t_{k+1}}=\cdots=x_{t_n}=\partial)$$
$$=\gamma^{-1}(x_0\in B_0,\cdots,x_{t_k}\in B_k,\ t_k<\zeta\leq t_{k+1})$$
$$=(\hat{x}_0\in B_0\cdots,\hat{x}_{t_k}\in B_k,\ t_k<\hat{\sigma}\wedge\zeta\leq t_{k+1})$$
$$=(\hat{x}_0\in B_0,\cdots,\hat{x}_{t_k}\in B_k,\ t_k<\hat{\sigma}\wedge\zeta)$$
$$-(\hat{x}_0\in B_0,\cdots,\hat{x}_{t_k}\in B_k,\hat{x}_{t_{k+1}}\in S,\ t_{k+1}<\hat{\sigma}\wedge\zeta).$$

故に γ は可測で，$\hat{P}(B)=P_\iota^{\alpha_0}(\gamma^{-1}B)$ とおく時 Lem. 2.4 により $\hat{P}$ は $x\in\mathfrak{X}$ によらない。任意の有界可測な $g(w)$ に対し，$\hat{E}(g)=E_\iota^{\alpha_0}(g\circ\gamma)$. であることと，Lem. 2.5 を用いると

$$E_\iota^{\alpha_0}\left(e^{-(\alpha-\alpha_0)\hat{\sigma}} f(\hat{x}_0) f_1(\hat{x}_{\hat{\sigma}-0}) : \hat{\sigma}<\infty\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$= E_\nu^{\alpha_0}(e^{-(\alpha-\alpha_0)(\hat{\sigma}\wedge\zeta)} f(\hat{X}_0) f_1(\hat{X}_{\hat{\sigma}\wedge\zeta-0}) : \hat{\sigma}\wedge\zeta<\infty, \hat{X}_{\hat{\sigma}\wedge\zeta-0}\in\partial D)$$

$$= E_\nu^{\alpha_0}(e^{-(\alpha-\alpha_0)\zeta(\gamma w)} f(x_0(\gamma w)) f_1(x_{\zeta(\gamma w)-0}(\gamma w)) : \zeta(\gamma w)<\infty, x_{\zeta(\gamma w)-0}(\gamma w)\in\partial D)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \tilde{E}(e^{-(\alpha-\alpha_0)(\zeta\wedge T)} f(x_0) f_1(x_{\zeta-0}) : \zeta<\infty, x_{\zeta-0}\in\partial D)$$

これは $X\in\mathfrak{X}$ によらない． q.e.d.

次節で使うため，次のことも示しておく。

<u>Lemma 2.6.</u> $\forall f_0, f_1\in B(S)$, $\forall\alpha>0$ に対し

$$\lim_{T\to\infty} E_\nu^{\alpha_0}(f_0(\hat{X}_0)\int_0^{\hat{\sigma}\wedge T} e^{-(\alpha-\alpha_0)t} f_1(\hat{X}_t)\,dt) = \alpha_0\int m(da) f_1(a) \overset{\circ}{G}_\alpha f_0(a)$$

<u>証明</u>

$$E_\nu^{\alpha_0}(f_0(\hat{X}_0)\int_0^{\hat{\sigma}\wedge T} e^{-(\alpha-\alpha_0)t} f_1(\hat{X}_t)\,dt)$$

$$= \int_0^T e^{-(\alpha-\alpha_0)t}dt\, E_\nu^{\alpha_0}(f_0(\hat{X}_0) f_1(\hat{X}_t) : t<\hat{\sigma}),$$

Lemma 2.4 により

$$= \alpha_0\int_0^T e^{-\alpha t}dt\int m(da) f_1(a) E_a(f_0(X_t) : t<\sigma)$$

$$\to \alpha_0\int m(da) f_1(a) \overset{\circ}{G}_\alpha f_0(a)$$ q.e.d.

§3. Time reversion II （G_α の分解）

（0.1）の形までは行かないが，G_α の分解を（3.7）まで行なうのがこの節の目標である．

<u>Lemma 3.1.</u> 任意の $\alpha>0$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<T<\infty$, $f_0,\cdots,f_n\in B(S)$ に対して．

$$E_\nu^{\alpha_0}(\prod_{i=0}^{n-1} f_i(\hat{X}_{t_i})\int_{t_{n-1}}^T e^{-(\alpha-\alpha_0)t} f_n(\hat{X}_t)\,dt)$$

(3.1)

$$= e^{-(\alpha-\alpha_0)t_{n-1}} E_\nu^{\alpha_0}(\prod_{i=0}^{n-1} f_i(\hat{X}_{t_i})\cdot f_n R_\alpha(T-t_{n-1}, \hat{X}_{t_{n-1}}))$$

ただし，

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(3.2) $\quad {}_fR_\alpha(t,b)=\int_0^t e^{-\alpha s}\,ds\int_S p(s,a,b)f(a)\,m(da)$

証明 $\quad g(t,a,b)=e^{-\alpha_0 t}p(t,a,b)$ と記す. 第3章定理4.1を得たのと同じ計算で,

$$(3.1)\text{の左辺}=\int_{t_{n-1}}^{T}e^{-(\alpha-\alpha_0)t_n}dt_n\,E_\nu^{\alpha_0}\Big(\prod_{i=0}^{n}f_i(\hat{X}_{t_i})\Big)$$

$$=\int_{t_{n-1}}^{T}e^{-(\alpha-\alpha_0)t_n}dt_n\int\cdots\int\alpha_0 m(da_0)f_0(a_0)g(t_1,a_1,a_0)m(da_1)f_1(a_1)$$
$$\cdot g(t_2-t_1,a_2,a_1)m(da_2)f_2(a_2)\cdots g(t_n-t_{n-1},a_n,a_{n-1})m(da_n)f_n(a_n)$$
$$g_{\alpha_0}(a,a_n)\nu(da).$$

Lemma 2.3を使うと.

$$=e^{-(\alpha-\alpha_0)t_{n-1}}\int\cdots\int\alpha_0 m(da_0)f_0(a_0)g(t_1,a_1,a_0)m(da_1)f_1(a_1)\cdots$$
$$\cdots g(t_{n-1}-t_{n-2},a_{n-1},a_{n-2})m(da_{n-1})f_{n-1}(a_{n-1})\,{}_{f_n}R_\alpha(T-t_{n-1},a_{n-1})$$

一方同じ計算で, (3.1)の右辺もこれに等しいことが分るから証明を終る. 以上の説明の中で $p(t,a,b)$ に対する仮定 (A.4) を用いた.

定義 $\quad \rho: W_0 \to [0,+\infty]$ が $\wedge$-Markov time とは $\forall t\ge 0$. に対し $\{\rho<t\}$ が, $(\hat{X}_s: 0\le s\le t)$ 可測なることとする.

Lemma 3.2 $\quad \alpha>0,\ 0\le s<T<\infty$ とし. $f_0(W)$ を有界かつ $(\hat{X}_t: 0\le t\le s)$ 可測. $f_1\in B(S)$ とすると.

$$E_\nu^{\alpha_0}\Big(f_0(W)\int_s^T e^{-(\alpha-\alpha_0)t}f_1(\hat{X}_t)\,dt\Big)$$
(3.3)
$$=e^{-(\alpha-\alpha_0)s}E_\nu^{\alpha_0}\big(f_0(W)\,{}_{f_1}R_\alpha(T-s,\hat{X}_s)\big).$$

証明 $\quad$ Lemma 3.1を拡張して得られる.

Lemma 3.3

ρが$\wedge$-Markov time ならば 任意の $\alpha>0$, $T>0$, f_0, $f_1\in B(S)$ に対し

(3.4) $\quad E_\nu^{\alpha_0}\Big(f_0(\hat{X}_0)\int_{\rho\wedge T}^{T}e^{-(\alpha-\alpha_0)t}f_1(\hat{X}_t)\,dt\Big)$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(3.4) $\quad = E_\iota^{\alpha_0}\left(e^{-(\alpha-\alpha_0)\rho} f_0(\hat{x}_0)\, f_1 R_\alpha(T-\rho,\ \hat{x}_\rho) : \rho < T\right).$

<u>証明</u> $\quad f_1 \in C(S)$ として証明すれば十分.

$$\rho_n(w) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \left(\frac{k-1}{2^n} \leq \rho < \frac{k}{2^n}\right) \\ +\infty & (\rho = +\infty) \end{cases}$$

とおくと, $\rho_n \downarrow \rho$. である.

$$E_\iota^{\alpha_0}\left(f_0(\hat{x}_0)\int_{\rho\wedge T}^{T} e^{-(\alpha-\alpha_0)t} f_1(\hat{x}_t)\,dt\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} E_\iota^{\alpha_0}\left(f_0(\hat{x}_0)\int_{\rho_n\wedge T}^{T} e^{-(\alpha-\alpha_0)t} f_1(\hat{x}_t)\,dt\right).$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{0<\frac{k}{2^n}<T} E_\iota^{\alpha_0}\left(f_0(\hat{x}_0)\int_{\frac{k}{2^n}}^{T} e^{-(\alpha-\alpha_0)t} f_1(\hat{x}_t)\,dt : \frac{k-1}{2^n} \leq \rho < \frac{k}{2^n}\right)$$

Lem. 3.2 により.

$$= \lim_{n\to\infty} \sum e^{-(\alpha-\alpha_0)\frac{k}{2^n}} E_\iota^{\alpha_0}\left(f_0(\hat{x}_0) f_1 R_\alpha\left(T-\frac{k}{2^n},\ \hat{x}_{\frac{k}{2^n}}\right) : \frac{k-1}{2^n} \leq \rho < \frac{k}{2^n}\right)$$

$$= \lim E_\iota^{\alpha_0}\left(e^{-(\alpha-\alpha_0)\rho_n} f_0(\hat{x}_0) f_1 R_\alpha(T-\rho_n,\ \hat{x}_{\rho_n}) : \rho_n < T\right).$$

$f_1 R_\alpha(t, b) = f_1 G_\alpha(b) - e^{-\alpha t}\cdot f_1 G_\alpha T_t(b)$ であるから, (1.7),(1.8) により $f_1 R_\alpha$ は (t, b) について連続. 故に

$$= E_\iota^{\alpha_0}\left(e^{-(\alpha-\alpha_0)\rho} f_0(\hat{x}_0) f_1 R_\alpha(T-\rho,\ \hat{x}_\rho) : \rho < T\right) \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>Lemma 3.4</u> 任意の $f \in B(S)$, $\alpha > 0$ に対し m-almost every a で, $\int_{\partial D} g_\alpha(a, b)\mu_\alpha^f(db)$ が存在して

(3.5) $\qquad G_\alpha f(a) = \overset{0}{G}_\alpha f(a) + \int_{\partial D} g_\alpha(a, b)\mu_\alpha^f(db)$

<u>証明</u> $\quad f_1 \in C(S)$ を任意にとり, ρ を$\wedge$-Markov time とすると.

$$E_\iota^{\alpha_0}\left(f(\hat{x}_0)\int_0^T e^{-(\alpha-\alpha_0)t} f_1(\hat{x}_t)\,dt\right)$$

$$= E_\iota^{\alpha_0}\left(f(\hat{x}_0)\int_0^{\rho\wedge T} e^{-(\alpha-\alpha_0)t} f_1(\hat{x}_t)\,dt\right) + E_\iota^{\alpha_0}\left(f(\hat{x}_0)\int_{\rho\wedge T}^{T} e^{-(\alpha-\alpha_0)t} f_1(\hat{x}_t)\,dt\right)$$

$$= \qquad {}'' \qquad + E_\iota^{\alpha_0}\left(e^{-(\alpha-\alpha_0)\rho} f(\hat{x}_0) f_1 R_\alpha(T-\rho,\ \hat{x}_\rho) : \rho < T\right).$$

Lemma 2.2 の証明中の A_n を用いて, $\hat{\sigma}_n = \inf\{t > 0 : \hat{x}_t \in A_n\}$.

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

とおき，$\rho=\sigma_n$ としてから $n\to\infty$ とすると

$$=E_L^{\alpha_0}\left(f(\hat{X}_0)\int_0^{\hat{\sigma}\wedge T}e^{-(\alpha-\alpha_0)t}f_1(\hat{X}_t)\,dt\right)+E_L^{\alpha_0}\left(e^{-(\alpha-\alpha_0)\hat{\sigma}}f(\hat{X}_0)f_1R_\alpha(T-\hat{\sigma},\hat{X}_{\hat{\sigma}-0}):\hat{\sigma}<T\right)$$

である．最初の式は Lem. 3.1 により $E_L^{\alpha_0}(f(\hat{X}_0)f_1R_\alpha(T,\hat{X}_0))$ であるから，$T\to\infty$ とし，Lem. 2.6, 2.5 を用いると

$$E_L^{\alpha_0}(f(\hat{X}_0)f_1G_\alpha(\hat{X}_0))=\alpha_0\int f_1(a)\mathring{G}_\alpha f(a)m(da)+E_L^{\alpha_0}\left(e^{-(\alpha-\alpha_0)\hat{\sigma}}f(\hat{X}_0)f_1G_\alpha(\hat{X}_{\hat{\sigma}-0}):\hat{\sigma}<\infty\right)$$

Lem. 2.4 により $P_L^{\alpha_0}(\hat{X}_0\in db)=\alpha_0 m(db)$ だから

$$\alpha_0\int f_1G_\alpha(b)f(b)m(db)=\alpha_0\int f_1(a)\mathring{G}_\alpha f(a)m(da)+\alpha_0\int f_1G_\alpha(b)\mu_\alpha^f(db)$$

故に

$$\int f_1(a)G_\alpha f(a)m(da)=\int f_1(a)\mathring{G}_\alpha f(a)m(da)+\iint f_1(a)m(da)g_\alpha(a,b)\mu_\alpha^f(db) \tag{3.6}$$

故に，f_1 の任意性により，証明が終った．

<u>Lemm. 3.5.</u> $f\in B^+(S)$ ならば $\mu_\alpha^f\geq 0$.

<u>証明</u>

$u(a)=\int_{\partial D}g_\alpha(a,b)\mu_\alpha^f(db)$ とおく．これは m-a.e. で定義されて $u(a)=G_\alpha f(a)-\mathring{G}_\alpha f(a)=E_a\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t}f(x_t)\,dt\right)$ である．故に

$$e^{-\alpha t}T_t u(a)=e^{-\alpha t}E_a\left(E_{x_t}\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha s}f(x_s)\,ds\right)\right).$$

$$=e^{-\alpha t}E_a\left(\int_{\sigma(w_t^+)}^\infty e^{-\alpha s}f(x_{s+t})\,ds\right)=E_a\left(\int_{t+\sigma(w_t^+)}^\infty e^{-\alpha s}f(x_s)\,ds\right)\leq u(a).$$

$f_1\in C^+(S)$ としよう．μ_α^f を正の部分と負の部分に分けて Fubini の定理を使えば

$$\int f_1(a)u(a)m(da)=\int f_1G_\alpha(b)\mu_\alpha^+(db)$$

が分る．同様に

$$\int f_1(a)e^{-\alpha t}T_tu(a)m(da)=e^{-\alpha t}\int f_1G_\alpha T_t(b)\mu_\alpha^f(db)$$

である．故に，

$$0\leq\int f_1(a)\frac{u(a)-e^{-\alpha t}T_tu(a)}{t}m(da)=\int\frac{f_1G_\alpha(b)-e^{-\alpha t}f_1G_\alpha T_t(b)}{t}\mu_\alpha^f(db)$$

$$=\int\mu_\alpha^t(db)\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\alpha s}ds\int f_1(a)m(da)p(s,a,b)\to\int f_1(b)\mu_\alpha^f(db)$$

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

最後の収束は (1.9) による．故に $\mu_\alpha^f \geq 0$.　　　q.e.d.

定理3.1.　任意の $f \in B(S)$, $\alpha > 0$. $a \in S$ に対し

(3.7)　$G_\alpha f(a) = \mathring{G}_\alpha f(a) + \int_{\partial D} g_\alpha(a.b)\mu_\alpha^f(db)$.

証明　m-a.e. については Lemma 3.4 で云った．例外点が実はないということを $f \in B(S)$ としていおう．

$$e^{-\alpha t} T_t G_\alpha f(a) = E_a\left(\int_t^\infty e^{-\alpha s} f(X_s)ds\right) \uparrow G_\alpha f(a).$$

$$e^{-\alpha t} T_t(G_\alpha f - \mathring{G}_\alpha f)(a) = E\left(\int_{t+\sigma(w_t^+)}^\infty e^{-\alpha s} f(X_s)ds\right) \uparrow E_a\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha s} f(X_s)ds\right)$$
$$= G_\alpha f - \mathring{G}_\alpha f$$

故に，

$$e^{-\alpha t} T_t \mathring{G}_\alpha f(a) \downarrow \mathring{G}_\alpha f(a).$$

一方 Lem. 3.5 により $\int g_\alpha(a.b)\mu_\alpha^f(db)$ は $^\forall a$ に対して定義され．$e^{-\alpha t}\int p(t,a,b)m(db)\int g_\alpha(b.c)\mu_\alpha^f(dc)$

$$= \int_t^\infty e^{-\alpha s}ds\int p(s.a.c)\mu_\alpha^f(dc) \uparrow \int g_\alpha(a.b)\mu_\alpha^f(db).$$

故に、例外点なし．　　　q.e.d.

§4. 作用素 $\hat{k}_\alpha$

Lemma 4.1　任意の $f \in B(S)$, $B \in \mathbb{B}(S)$[1], $\alpha > 0$ に対し

(4.1)　$|\mu_\alpha^f(B)| \leq \|f\|\mu_\alpha^1(B)$

証明　$\|f\| - f \geq 0$. だから、Lem. 3.5 により $0 \leq \mu_\alpha^{\|f\|-f} = \|f\|\mu_\alpha^1 - \mu_\alpha^f$. 同様に $0 \leq \mu_\alpha^{\|f\|+f} = \|f\|\mu_\alpha^1 + \mu_\alpha^f$　　q.e.d.

Lemma 4.2　任意の $\alpha, \beta > 0$, $f \in B(S)$ に対し．

(4.2)　$\mu_\alpha^f - \mu_\beta^f + (\alpha - \beta)\mu_\alpha^{\mathring{G}_\beta f} = 0$

証明　$\beta > \alpha$ とする．まず

(4.3)　$g_\alpha(a.b) = g_\beta(a.b) + (\beta - \alpha)\int g_\alpha(a.c)m(dc)g_\beta(c.b)$

---

1) $\mathbb{B}(S)$ は S の topological Borel field

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

に注意する．$f\in B^+(S)$ とすると，

$$G_\alpha f(a) = G_\beta f + (\beta-\alpha) G_\alpha G_\beta f$$

$$= \overset{\circ}{G}_\beta f(a) + \int g_\beta(a,b)\mu_\beta^f(db) + (\beta-\alpha)\int g_\alpha(a,b)m(db)$$
$$\left(\overset{\circ}{G}_\beta f(b) + \int g_\beta(b,c)\mu_\beta^f(dc)\right).$$

$$= \overset{\circ}{G}_\alpha f + (\alpha-\beta)\overset{\circ}{G}_\alpha \overset{\circ}{G}_\beta f + \int g_\alpha(a,b)\mu_\beta^f(db) + (\beta-\alpha)\int g_\alpha(a,b)m(db)\,\overset{\circ}{G}_\beta f(b)$$

$$= \overset{\circ}{G}_\alpha f + \int g_\alpha(a,b)\mu_\beta^f(db) + (\beta-\alpha)\int g_\alpha(a,b)\mu_\alpha^{\overset{\circ}{G}_\beta f}(db).$$

故に $\int g_\alpha(a,b)\mu_\alpha^f(db)$

$$= \int g_\alpha(a,b)\left[\mu_\beta^f(db) + (\beta-\alpha)\mu_\alpha^{\overset{\circ}{G}_\beta f}(db)\right]$$

あとは Lem. 3.5 の証明と同様にして (4.3) が示される．

q.e.d.

<u>定理 4.1</u>　$\{\mu_\alpha^1 : \alpha>0\}$ は互いに絶対連続な measure である．

<u>証明</u>　$\mu_\alpha^1(B)=0$ とすると (4.1) により $\mu_\alpha^{\overset{\circ}{G}_\beta 1}(B)=0$

故に，(4.2) により $\mu_\beta^1(B)=0$.　q.e.d.

<u>定義</u>　$\mu_{\alpha_0}^1 = \mu$ とおき

(4.4)　$$\frac{d\mu_\alpha^f}{d\mu} = \hat{h}_\alpha f$$

によって $\alpha>0$, $f\in B(S)$ に対し $\hat{h}_\alpha f$ を定義する．

<u>定理 4.2.</u>　$\hat{h}_\alpha$ は $L_\infty(dm)\to L_\infty(d\mu)$ の非負，有界な linear operator で $x\in \mathfrak{X}$ によらない．更に

(4.5)　$$\hat{h}_\alpha f - \hat{h}_\beta f + (\alpha-\beta)\hat{h}_\alpha \overset{\circ}{G}_\beta f = 0$$

を満たす．

<u>証明</u>　$f=f'$ a.e.(m) ならば $\hat{h}_\alpha f = \hat{h}_\alpha f'$ なることは μ_α^f の定義と，$P_b^{\alpha_0}(\hat{x}_0\in db) = \alpha_0 m(db)$ なることから明らか．$\hat{h}_\alpha f$ が μ-essentially bounded なることは，(4.1)，(4.2) から，$\alpha\geq\alpha_0$ では

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

$$|\mu_\alpha^f(B)| \leq \|f\| \mu_\alpha^1(B) \leq \|f\| \mu(B).$$

$0 < \alpha < \alpha_0$ では

$$|\mu_\alpha^f(B)| = |\mu_{\alpha_0}^f(B) + (\alpha_0 - \alpha)\mu_{\alpha_0}^{\mathring{G}_\alpha f}(B)|$$
$$\leq \|f\| \mu(B) + (\alpha_0 - \alpha) \|\mathring{G}_\alpha f\| \mu(B)$$
$$\leq (1 + \frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha}) \|f\| \mu(B).$$

であることから分る．同時に $\hat{h}_\alpha$ の有界性も示された．$\hat{h}_\alpha$ が $x \in X$ によらないことは、Th. 2.1 から，非負性は Lem. 3. 5 から，(4.5) は Lemma 4.2 から。 q.e.d.

定義

(4.6) $K^\alpha f(a) = \int_{\partial D} g_\alpha(a, b) f(b) \mu(db)$. $\alpha > 0$, $f \in B(S)$.

定理 4.3. K^α は $L_\infty(d\mu) \longrightarrow B(S)$ の非負，有界な linear operator で．

(4.7) $K^\alpha f - K^\beta f + (\alpha - \beta) G_\alpha K^\beta = 0.$

をみたす．

証明　非負，linear は明か．$\alpha \geq \alpha_0$ の時

$$K^\alpha 1(a) = \int g_\alpha(a, b) \mu_{\alpha_0}^1(db) \leq \int g_{\alpha_0}(a, b) \mu_{\alpha_0}^1(db)$$
$$= G_{\alpha_0} 1 - \mathring{G}_{\alpha_0} 1 \leq \frac{1}{\alpha_0}$$

$0 < \alpha < \alpha_0$ の時

$$K^\alpha 1(a) \leq \int g_\alpha(a, b) \mu_\alpha^1(db) = G_\alpha 1 - \mathring{G}_\alpha 1 \leq \frac{1}{\alpha}$$

であるから有界である．(4.7) は (4.3) から明らか． q.e.d.

定理 4.4　任意の $\alpha > 0$, $f \in B(S)$, に対し

(4.8) $G_\alpha f = \mathring{G}_\alpha f + K^\alpha \hat{h}_\alpha f$

証明　定理 3.1 を K^α, $\hat{h}_\alpha$ の定義に従って書きなおしたもの．

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

§5. $\mathcal{U}$-process.

<u>Lemma 5.1.</u> $K^{\alpha_0}1$ は有界かつ uniformly (X, α_0)-excessive.

<u>証明</u> 有界，非負は既に云った．$\hat{h}_{\alpha_0}1 = 1$ により

$$K^{\alpha_0}1 = G_{\alpha_0}1 - \mathring{G}_{\alpha_0}1 = E_a\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha_0 t}\,dt\right).$$

$$e^{-\alpha_0 t}T_t K^{\alpha_0}1(a) = E_a\left(\int_{t+\sigma(w_t^+)}^\infty e^{-\alpha_0 s}\,ds\right) \leq K^{\alpha_0}1.$$

$G_{\alpha_0}1$, $\mathring{G}_{\alpha_0}1$ は共に連続だから

$$e^{-\alpha_0 t}T_t K^{\alpha_0}1(a) \longrightarrow K^{\alpha_0}1(a). \qquad t \downarrow 0.$$

しかも単調だから a について一様． • q.e.d.

[2] により，X に対し連続な α_0-additive functional $\varphi_t^{\alpha_0}(w)$ が P_a 測度 0 $(\forall a)$ を除いて唯一つ存在して，

(5.1) $\quad E_a(\varphi_\infty^{\alpha_0}) = K^{\alpha_0}1(a).$

とかける，

(5.2) $\quad \varphi_t(w) = \int_0^t e^{\alpha_0 s}\,d\varphi_s^{\alpha_0}(w)$

によって X の連続 additive functional を定義する．

<u>定義</u> X に対し，φ_t による time change，$e^{-\alpha t}$ による Killing を施して得られる process $\tilde{X}^\alpha$ を，X から定まる α-order の $\mathcal{U}$-process という．

<u>定理 5.1.</u> X から定まる α-order の $\mathcal{U}$-process $\tilde{X}^\alpha$ の state space は ∂D 上にあり，その 0 次の Green operator は K^α である．

<u>証明</u> 第1章，第2章の結果により，

$\tilde{X}^\alpha$ の 0次の Green operator は

$$E_a\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,d\varphi_t\right) = \int g_\alpha(a,b) f(b)\mu(db) = K^\alpha f(a)$$

以上の結果により，次のことが分る．

<u>定理 5.2</u> $X^{(1)}, X^{(2)} \in \mathfrak{X}$ に対し次の条件は同値．

Sem. on Probab.
Vol.16 1963年
P1-138

(i) $X^{(1)} = X^{(2)}$

(ii) $\forall \alpha > 0.$ $(\widetilde{X}^{\alpha})^{(1)} = (\widetilde{X}^{\alpha})^{(2)}$

(iii) $\exists \alpha > 0.$ $(\widetilde{X}^{\alpha})^{(1)} = (\widetilde{X}^{\alpha})^{(2)}$

(iv) $\forall \alpha > 0.$ $(K^{\alpha})^{(1)} = (K^{\alpha})^{(2)}$

(v) $\exists \alpha > 0.$ $(K^{\alpha})^{(1)} = (K^{\alpha})^{(2)}$

肩にある (1), (2) をつけたのは，それぞれ $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ に関する諸量である。

次のことは，本尾氏が証明を与えられた。紙数の関係で，結果だけとする。

<u>定理 5.3.</u> $X^{(1)}, X^{(2)} \in \mathfrak{X}$ とする。W 上に $\varphi_t(w)$ を適当に定義して，

$$P_a^{(i)}(\forall t,\ \varphi_t = \varphi_t^{(i)}) = 1. \qquad i = 1, 2$$

とできる。$\varphi_t^{(i)}$ は，$X^{(i)}$ に対し，(5,2) で定義した連続 *additive functional* である。

第5章文献

[1] Hunt, G. A., Markoff processes and potentials, III. Ill. J. Math. 2 (1958), 151–213.

[2] 池田信行，上野正，田中洋，佐藤健一，多次元拡散過程の境界問題，Sem. on Prob. 5. (1960), 6 (1961).