Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 11

近　藤　亮　司

Markov 過程と Potential

1962

確　率　論　セ　ミ　ナ　ー

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

前書き

このノートは、Markov過程と、Potentialに関し、Potentialがあつたとき Markov過程が定まること、及びMarkov過程があつたとき、それできまるPotentialを確率論的に考察する様子を紹介したものである。歴史的には、多次元Brown運動とNewton Potential、調和函数、Dirichlet問題等の関係が、Lévy, Kakutani, Doob等の研究により、段々と明らかにされ、Newton potentialに関係した諸量が、Brown運動の言葉によつて表現されると、自然な形に、分り易くなつて来たわけであるが、Hunt は、1957年から1958年にかけて、もつと一般的な立場から、Newton Potential, Riesz Potential, Heat potential 等をすべて包含する、Markov Processes & potential という表題のエネルギッシュな仕事をしている。それは確率論研究者にとつて重要な内容を多く含んでいるが、そればかりではなくPotential論の研究にも1つの重要な方法を与えていると考えられる。しかし相当難解なのでもつと分り易い民主化された形でその主要な部分が紹介されることをこのノートの作者は希望していた。幸い最近Brelot, Choquet, Deny 等 Potential論の研究者と、Meyer によるSeminar note が出て分り易くなつたり、Potential論の中で占める役割で、明白になつた所もあるのでこのノートを作る上に非常に参考になつた。内容は、主として、Huntの仕事の紹介で、オ一章では、Markov過程の定義を与え、まづCompactな空間でsemi-groupからMarkov過程を構成して、その性質の中であとに必要なものを調べ、最後にlocally compactな空間に拡張する。

オ二章では、函数を函数に写す作用素というPotentialを考え、最大値の原理の定義、その他の原理との関係等を調べ、最大値の原理をみたすPotentialには、Markov過程が対応するというHuntの表現定理を証明する。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

才三章では、Markov過程があったとき、それできまる函数を函数に写すPotentialにつき、最大値の原理その他を証明し、又、優調和函数にあたる、excessive function、調和測度にあたるH_E^α、等を論じる。Potential 0の集合、極集合、正則点、細位相等も、確率論的に表現すると、意味が分り易くなる。

才四章ではMarkov過程から、才三章とは双対的な測度を測度に写すPotentialを考え、優調和函数が調和函数＋Potentialとかける Riesz分解にあたるものを、excessive measureに対して行い、Potentialの列に関するいくつかの定理をのべる。

才五章、Potentialの核がある測度に関してdensityをもっているとき、本来Newton Potentialがそうであるように、測度から函数へのPotentialが定義出来る。それを才四章迄の立場で考えるために、出発点と到達点の立場を交換して考えるdual processというものを考え（そのためにはかなり強い仮定をおくが、一章の終にあげる例はすべて含まれる）三章と四章の結果を綜合する。

最後にAppendixとして、Brown運動と、Newton Potentialに関して、見通しのよい解説と確率論セミナーのメンバーによる仕事を紹介する予定であったが、前者は主として時間がないために、後者は主として筆者の能力の不足のため、省いて了ったことをお詫びする。

このノートを作製するに当って世話になった確率論セミナーのメンバー、特にしばしば討論し、御教示願った白尾氏、貴重な時間をさいて、二度potential論のセミナーを開いて下さった関西のメンバー、印刷をひき受けて下さった東京のメンバーに深く感謝する。

3月23日　　浜松にて

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

■ 凡　例

$[f]$　f の support．$\{x ; f(x) \neq 0\}$ の closure.

$[\mu]$　μ の support．その上で μ が 0 となる最大の開集合の余集合、μ の measure がある場所は μ の mass がのっている所という。

$\left.\begin{array}{l} \mu_n \uparrow, \\ f_n \uparrow \end{array}\right\}$ μ_n, f_n が単調増加.

$\mu_n \to \mu$（漠）；compact support をもつ連続函数 f につき

$$\int f(x)\mu_n(dx) \to \int f(x)\mu(dx)$$

$\mu_n \to \mu$（弱）；有界連続函数 f に対し、

$$\int f(x)\mu_n(dx) \to \int f(x)\mu(dx)$$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

目　次

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

第一章 Markov 過程

§1 Markov 過程の定義

1° Sを才二可算公理をみたす locally compact な Hausdorff 空間，$\mathbb{B}(S)$を open set 全体を含む最小の Borel field とする．Sに一点$\{\partial\}$をつけ加え compact 化した空間を$S'=S\cup\{\partial\}$．(但しSが compact のときは，∂は isolated point としてつけ加える) $\mathbb{B}(S')$を，その上の，上と同じ意味の Borel field とする。慣例に従い，$\mathbb{B}(S)$，($\mathbb{B}(S')$)を位相的 Borel field，それに属する集合をS，(S')の Borel set，又，$\mathbb{B}(S)$($\mathbb{B}(S')$)可測函数を，Borel 可測な函数ということにする．

2° $T=[0,\infty)$，$\mathbb{B}(T)$をTに含まれる1次元 Borel 集合の全体，$T'=[0,\infty]$は$T=\infty$を limit point としてつけ加えた空間，$\mathbb{B}(T')$はT'上の位相的 Borel field とする。 3° WをT'からS'への写像$w=W_t$の集合で

(W.1) $W_\infty=\partial$

(W.2) $t<\infty$で右連続

(W.3) $\sigma_\infty(w)=\inf\{t;\ W_t=\partial\}$とおくと，$t\geqq\sigma_\infty$のとき $W_t=\partial$．

(W.4) $t<\sigma_\infty(w)$のときW_{t-0}が存在する．

をみたすものの全体とする。 $w\in W$をpath といい， W_tを$x_t(w)$ともかくことにする．

$0\leqq t\leqq\infty$を1つ固定し，任意の$0=t_0<t_1<\cdots<t_n\leqq t$，$E_0, E_1,\cdots, E_n\in\mathbb{B}(S')$に対し，

$\{w;\ x_{t_0}(w)\in E_0,\ x_{t_1}(w)\in E_1,\cdots,\ x_{t_n}(w)\in E_n\}$

という形のWの部分集合を t迄できまる cylinder set ということにし，t迄できまる cylinder set 全体を含む最小の Borel field を$\mathbb{B}_t$と表わす．

又，WからWへの写像W_t^+を

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$(W_t^+)_s = w_{t+s} \quad (0 \leqq s < \infty),\ (W_t^+)_\infty = \partial$

と定義し，*shifted path* という．

<u>注意1</u>　$(t, w) \longrightarrow W_t$ なる写像は $(T' \times W,\ \mathbb{B}(T') \times \mathbb{B}_\infty)$ から $(W,\ \mathbb{B}_\infty)$ への写像として可測である．

<u>注意2</u>　$w \longrightarrow w_t^+$ なる写像は $(W,\ \mathbb{B}_\infty) \longrightarrow (W,\ \mathbb{B}_\infty)$ として可測である．

4° $P_x(B)$，$(x \in S')$ を $(W,\ \mathbb{B}_\infty)$ 上の確率測度で

(P.1)　$P_x(x_0(w) = x) = 1 \quad (\forall x \in S')$

(P.2)　$B \in \mathbb{B}_\infty$ を固定すると，$x \to P_x(B)$ は，Borel 可測．

(P.3)　（Markov 性）

$\forall t \in T',\ \forall\ B \in \mathbb{B}_\infty,\ \forall.\ B_1 \in \mathbb{B}_t$ に対し，

$P_x(W_t^+ \in B,\ B_1) = E_x(P_{x_t}(B)\ ;\ B_1)$ *)

を表わすものとする．

<u>定義1．1</u>　上の条件をみたす．S'，W，$\mathbb{B}_t$，P_x の組 $\mathbb{M} = \{S',\ W,\ \mathbb{B}_t,\ P_x\ x \in S'\}$ を Markov 過程という．

<u>注意3</u>　$\{\partial\}$ は定義の都合上，つけ加えたもので，実際 S の内部のみを考察の対象とするのであるから，$\mathbb{M} = \{S, W, \mathbb{B}_t\ P_x,\ x \in S\}$ と書くこともある．

<u>注意4</u>　(P.3) により，$\forall t \in T'$，すべての有界 $\mathbb{B}_\infty$ 可測函数 $\Phi(w)$，$\forall.\ B_1 \in \mathbb{B}_t$ に対して

$E_x(\Phi(w_t^+);\ B_1) = E_x(E_{x_t}(\Phi);\ B_1)$

であることが分る．更に条件つき期待値を使つてかけば

$E_x(\Phi(W_t^+) \mid \mathbb{B}_t) = E_{x_t}(\Phi) \qquad a.e.\ P_x.$

といつてもよい．

<u>注意4</u>　$\sigma_\infty(w)$ は $\mathbb{B}_\infty$ 可測である．

<u>定義1．2</u>　すべての $x \in S$ に対し，$P_x(\sigma_\infty(w) = \infty) = 1$ となるとき，$\mathbb{M}$ は *conservative* という。

Conservative のときは，T'，S' の代りに本来の T，S，で与えれはよい．

<u>定義1．3</u>　$t \in T$，$x \in S$，$B \in \mathbb{B}(S)$ に対し．

---

*) $E.(f) = \int_W f(w) P.(dw)$，$E.(f : B) = \int_B f(w) P.(dw)$)

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$$P(t, x, B) = P_x(x_t(w) \in B, \quad t < \sigma_\infty(w))$$

とおきMの遷移確率という.

$\{P(t, x, B);\ t \in T,\ x \in S,\ B \in \mathbb{B}(S)\}$ は次の性質

(T. 1) (t, x) を固定すると, $P(t, x, \cdot)$ は $(S, \mathbb{B}(S))$ 上の測度で $0 \leqq P(t, x, S) \leqq 1$.

(T. 2) $B \in \mathbb{B}(S)$, $t \in T$ を固定すると, $x \to P(t, x, B)$ は Borel 可測.

(T. 3) (Chapmann-Kolmogorov の等式)

$$\int_S P(t, x, dy) P(s, y, B) = P(t+s, x, B)$$

(T. 4) V を x の任意の近傍とすると,

$$\lim_{t \downarrow 0} P(t, x, V) = 1$$

を持つことが知られている. (伊藤その他 [24] 参照)

定義 1. 4　(T. 1)~(T. 4) をみたす測度の系を、遷移確率という。

遷移確率が与えられたとき、それを遷移確率とする Markov 過程が存在するか、という問題は, 一般には難かしいが, われわれはもう少し, 強い条件のもとにその存在を §2, §5 で示すことにして, この § の残りでは, その后の理論に必要なのでここに述べた Markov 性を少し一般化することを考える.

今 μ を $(S', \mathbb{B}(S'))$ 上の確率測度とし, $P_\mu(B) = \int \mu(dx) P_x(B)$ $(B \in \mathbb{B}_\infty)$ とおくと, $P_\mu(\cdot)$ は $(W, \mathbb{B}_\infty)$ 上の確率測度で $P_\mu(x_0 \in B) = \mu(B)$ をみたす。$\mathcal{F}_t^\mu$ を $\mathbb{B}_t$ の P_μ 測度による完備化とし、

$$\mathcal{F}_t = \cap \{\mathcal{F}_t^\mu;\ \mu \text{ は } (S', \mathbb{B}(S')) \text{ 上の確率測度}\}$$

とおく。但し $\mathcal{F}_\infty$ を単に $\mathcal{F}$ とかくことにし μ を初期分布ということにする.

Lemma 1.1　$w \to w_t^+$ は $(W, \mathcal{F})$ から $(W, \mathcal{F})$ への写像として可測である.

証明　$E \in \mathbb{B}(S')$ に対し, $\nu_t(E) = P_\mu(x_t \in E)$ とおくと, ν_t は

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$(S', \mathbb{B}(S'))$ 上の確率測度で (P.4) により．$\forall, B \in \mathbb{B}_\infty$ に対し．

$$P_\mu(W_t^+ \in B) = P_{\nu_t}(B)$$

今 $B \in \mathcal{F}$ とすると．$B \in \mathcal{F}^{\nu_t}$ 従って．$B_1, B_2 \in \mathbb{B}_\infty$ で $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$ 且つ．$P_{\nu_t}(B_1) = P_{\nu_t}(B_2)$ となるものが存在する。

$\{W; W_t^+ \in B_1\} \subseteq \{W; W_t^+ \in B\} \subseteq \{W; W_t^+ \in B_2\}$ で注意２により $\{W; W_t^+ \in B_i\} \in \mathbb{B}_\infty$ $(i = 1, 2)$ 又．

$$P_\mu(W_t^+ \in B_1) = P_{\nu_t}(B_1) = P_{\nu_t}(B_2) = P_\mu(W_t^+ \in B_2)$$

であるから．$\{W_t^+ \in B\} \in \mathcal{F}_\infty^\mu$．$\mu$ は任意であったから．$\{W_t^+ \in B\} \in \mathcal{F}$．（証終）

<u>定理 1.1</u> （P_μ．$\mathcal{F}_t$ による Markov 性）

$\Phi(w)$ を有界 $\mathcal{F}$ 可測函数とする．とすべての確率測度 μ に対し．

$$E_\mu(\Phi(W_t^+) \mid \mathcal{F}_t) = E_{x_t}(\Phi(w)) \qquad a.e. \ P_\mu$$

<u>証明</u> 任意の $B \in \mathcal{F}_t$ に対し

$$E_\mu(\Phi(W_t^+); B) = E_\mu(E_{x_t}(\Phi); B)$$

をいえばよい．*Lemma* 1.1 により．有界 $\mathbb{B}_\infty$ 可測函数 $\Phi_1(w)$, $\Phi_2(w)$ で $\Phi_1(w) \leqq \Phi(w) \leqq \Phi_2(w)$ 且つ．

$$E_\mu(\Phi_1(W_t^+)) = E_\mu(\Phi_2(W_t^+))$$

となるものが存在する．又．$B_1, B_2 \in \mathbb{B}_t$，$B_1 \subseteq B \subseteq B_2$ 且つ $P_\mu(B_1) = P_\mu(B_2)$ なる B_1, B_2 をとれば．注意４より．$E_\mu(\Phi_i(W_t^+); B_i) = E_\mu(E_{x_t}(\Phi_i); B_i)$ $i = 1, 2$

であることが分る．しかるに

$$E_\mu(\Phi_1(W_t^+); B_1) = E_\mu(\Phi_2(W_t^+); B_2)$$

$$E_\mu(\Phi_1(W_t^+); B_1) \leqq E_\mu(\Phi(W_t^+); B) \leqq E_\mu(\Phi_2(W_t^+); B_2)$$

$$E_\mu(E_{x_t}(\Phi_1); B_1) \leqq E_\mu(E_{x_t}(\Phi); B) \leqq E_\mu(E_{x_t}(\Phi_2); B_2)$$

であるから $E_\mu(\Phi(W_t^+); B) = E_\mu(E_{x_t}(\Phi); B)$ である（証終）

§2 Markov 過程の構成 I

この§では S が *compact* な第二可算公理をみたす Hausdorff 空間で．次に示すような条件をみたす遷移確率 $\{P(t, x, B)\}$ が与えられたとき．それを遷移確率とする *Markov* 過程を構成する．

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$C(S)$をS上の連続函数の全体、$B(S)$をS上の有界可測函数の全体とすると、$C(S)$, $B(S)$は共に norm を $\|f\| = \sup_{x\in S}|f(x)|$ とすることによりBanach空間になる。又Sは metrizable であるから、その metric を d としておく。

今$C(S)$の元を$C(S)$の元に写す線型作用素 H_t $(t\geqq 0)$ があって、

(H.1) $f(x)\geqq 0 \Rightarrow H_t f(x)\geqq 0$

(H.2) $H_t 1 \equiv 1$

(H.3) $H_t H_s f = H_{t+s} f$

(H.4) $\lim_{t\downarrow 0}\|H_t f - f\| = 0$

をみたと仮定する。これらの条件から $\|H_t\| = 1$. $f\in C(S)$を固定すると、$[0,\infty)\ni t \to H_t f \in C(S)$ は一点連続であることが分る。所でxを固定すると、$C(S)\ni f \to H_t f(x)$ は、$C(S)$上の線型汎函数であるから Riesz の定理により測度$P(t, x, dy)$が定まり

$$H_t f(x) = \int_S P(t, x, dy) f(y)$$

とかける。H_t に関する条件から、$\{P(t, x, B);\ t\in T,\ x\in S,\ B\in \mathbb{B}(S)\}$ は、§1で述べた遷移確率になるが、$P(t, x, S) = 1$で、更に条件

1° $B\in \mathbb{B}(S)$ を固定すると、$(t, x)\to P(t, x, B)$ は $\mathbb{B}(T)\times\mathbb{B}(S)$ 可測函数

2° $V_r(x) = \{y : d(x, y)\leqq r\}$ $(r>0)$ とおくと、

$$\lim_{t\downarrow 0}\inf_{x\in S} P(t, x, V_r(x)) = 1$$

をみたす。(2°を以后 uniform condition と呼ぶ)

何となれば $f(x)\in C(S)$ とすると、$(t, x)\to H_t f(x)$ は $T\times S$上の連続函数であるから $\mathbb{B}(T)\times\mathbb{B}(S)$ 可測。又、$\int_S P(t, x, dy) f_n(y)$ が $\mathbb{B}(T)\times\mathbb{B}(S)$可測で $f_n \uparrow(\downarrow) f$ であれば $\int_S P(t, x, dy) f(y)$ も $\mathbb{B}(T)\times\mathbb{B}(S)$可測であるから、$f\in\mathbb{B}(S)$に対し、$\int_S P(t, x, dy) f(y)$ は $\mathbb{B}(T)\times\mathbb{B}(S)$ 可測、$B\in\mathbb{B}(S)$なら、Bの indicator $\chi_B(x)$は $B(S)$に属するから1°が出る。2°の証明；$h_x(y)$を$C(S)$ の函数で $0\leqq h_x\leqq 1$、$h_x(y) = 1$ $(y\in V_{r/2}(x))$ $h_x(y) = 0$ $(y\notin V_r(x))$ な

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

るものとすると

$P(t,y,V_r(x)) \geqq H_t h_x(y)$ で $\|H_t h_x - h_x\| \to 0$
$(t \downarrow 0)$ であるから．

$$\lim_{t\downarrow 0} \inf_{y\in V_{\frac{r}{2}}(x)} P(t,y,V_r(x)) = 1$$

$\varepsilon > 0$ が与えられたとし、$S = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\frac{r}{4}}(x_i)$ とすると．上のことから，$t_0 > 0$ が存在し．$\forall t \in [0,t_0)$ に対し，

$$\inf_{y\in V_{\frac{r}{4}}(x_i)} P(t,y,V_{\frac{r}{2}}(x_i)) > 1-\varepsilon \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

と出来る．$x \in S$ とすれば、ある i につき $x \in V_{\frac{r}{4}}(x_i)$ で $V_r(x) \supseteq V_{\frac{r}{2}}(x_i)$ であるから

$P(t,x,V_r(x)) \geqq P(t,x,V_{\frac{r}{2}}(x_i)) > 1-\varepsilon \ (\forall t \in [0,t_0))$

故に $2°$ が証明された。

この遷移確率に対して Markov 過程が存在することを示す．
（伊藤 [23]，Maruyama [29] 参照）

なお証明の途中に出て来る次のことがらは，Doob [11] を参照して頂くことにして、証明は略する．

S を compact な距離空間、$(\Omega,\mathbb{B},P)$ を確率空間、$x_t(w)$ $(t \geqq 0)$ を Ω 上で定義され S の値をとる確率過程とする．

定義 2．1　$x_t(w)$ が（Compact set に関し）可分であると云うのは．$T=[0,\infty)$ の中で dense な可算個の集合 T_0 が存在し、すべての open interval $I \subseteq T$，すべての Compact set $K \subseteq S$ に対し、集合 $\{w;\ \forall t\in I$ につき $x_t(w)\in K\}$ は $\mathbb{B}$ に属し、

$P(\forall t\in I,\ x_t \in K) = P(\forall t \in I\cap T_0,\ x_t\in K)$

となることである．

定理 2．1（Doob）

S を値とする、すべての確率過程 $x_t(w)$ $t\in T$ に対し、$P(x_t(w) = \tilde{x}_t(w)) = 1$ $(\forall t \in T)$ となる．可分な確率過程、$\tilde{x}_t(w)$ が $(\Omega,\mathbb{B},P)$ の上に構成出来る。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

証明は上掲書．P. 57. 定理２．４と同様．

この定理により出来る$\hat{x}_t(w)$を$x_t(w)$の可分変形（separable modification）という．

定理 2.2 もし１．x_t $t \in T$ が確率連続．即ち．$\varepsilon > 0$ に対し、

$P(d(x_{t+h}, x_t) > \varepsilon) \to 0 \quad (h \to 0) \quad \forall t \in T$

であれば $\hat{x}_t(w)$ を $(t.w) \to \hat{x}_t(w)$ として、$\mathbb{B}(T) \times \mathbb{B}$ 可測にすることが出来る．

証明は、上掲書 P. 61　定理 2．6．

又．martringale, semi-martringale に関しても既知とするが、定義と使用する結果を述べておく．

$x_t(W)$ を $(\Omega . \mathbb{B} . P)$ で定義され実数値をとる確率過程とし、$\{\mathbb{B}_t \quad t \in T\}$ を $\mathbb{B}$ の sub Borel field で

1° $s < t \Rightarrow \mathbb{B}_s \subseteq B_t$.

2° $x_t(w)$ は $\mathbb{B}_t$ －可測

をみたすものとする．$\{x_t, \mathbb{B}_t \ t \in T\}$ が semi-martringale であるというのは．

定義 2．2　1° $E(|x_t|) < \infty \quad \forall . t \in T$

2°　$S < t$のとき　$E(x_t | \mathbb{B}_S) \geqq x_S$　a.e. P

をみたすことである．

定理 2．3　$\{x_t ; \mathbb{B}_t, t \in T\}$ を可分な semi-martringale とすると．殆んど全ての $W \in \Omega$ に対し、

1° $x_t(w)$　$a \leqq t \leqq b < \infty$は有界

2° すべての $t \in T$ につき左右からの極限が存在する．

証明．上掲書　P. 361．定理 11．5．

定理 2．4（構成定理）　$\{P(t. x, B)\}$を遷移確率とする conservative な Markov 過程 $M = \{S. W. \mathbb{B}_t . P_x . x \in S\}$ が存在して、しかも唯一通りに定まる．

証明；数段階に分けて証明する．

a) 唯一性の証明．

$M^{(i)} = \{S. W. \mathbb{B}_t . P_x^{(i)} \ x \in S\}$ $(i = 1. 2)$ を二つの markov 過

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

一とする。このとき，$\forall . x \in S$．$\forall . B \in \mathbb{B}_\infty$に対し，$P_x^{(1)}(B) = P_x^{(2)}(B)$をいえばよい。$B$が Cylinder set $B = \{W ; x_{t_1}(W) \in E_1, \cdots\cdots, x_{t_n} \in E_n\}$（$0 \leq t_1 < \cdots\cdots < t_n$．$E_1 \cdots E_n \in \mathbb{B}(S)$）のときは，Markow性により，$P_x^{(1)}(B) = \int_{E_1} P(t_1, x, dx_1) \int_{E_2} P(t_2 - t_1, x_1, dx_2) \cdots\cdots \int_{E_n} P(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, dx_n) = P_x^{(2)}(B)$で等しい。

又，Cylinder set の有限個の和集合に対しても等しく，又，$P_x^{(1)}(B_n) = P_x^{(2)}(B_n)$で$B_n \uparrow (\downarrow) B$であれば$P_x^{(1)}(B) = P_x^{(2)}(B)$であるから，すべての$B \in \mathbb{B}_\infty$に対し

$$P_x^{(1)}(B) = P_x^{(2)}(B)$$

以下存在を示す。

b) $\widetilde{W} = S^T = \{\widetilde{W} ; \widetilde{W}$ は$T = [0, \infty)$からSへの写像の全体$\}$

$x_t(\widetilde{W}) = \widetilde{W}_t$ （$\widetilde{W}_t$ は $\widetilde{W}$ の t 座標）

$\widetilde{W}_t^+$ を $(\widetilde{W}_t^+)_s = \widetilde{W}_{t+s}$．以下 Cylinder set $\widetilde{E}$；t迄できまる Cylinder set を含む Cylinder set 全体を含む最小の Borel field $\widetilde{\mathbb{B}}_t$，等は，§1と同じ形式で定義する。（$\widetilde{\mathbb{B}}_\infty$ の定義では $0 \leqq t_1 < \cdots < t_n < \infty$ とする）

$$\widetilde{E} = \{\widetilde{W} ; x_{t_1}(\widetilde{W}) \in E_1, \cdots\cdots, x_{t_n}(\widetilde{W}) \in E_n\}$$

に対し，

$$\widetilde{P}_x(\widetilde{E}) = \int_{E_1} P(t, x, dx_1) \int_{E_2} P(t_2 - t_1, x_1, dx_2) \cdots\cdots \int_{E_n} P(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, dx_n)$$

と定義すると，Kolmogorovの拡張定理と同様にして，$\widetilde{P}_x(\cdot)$ は $\widetilde{\mathbb{B}}_\infty$上の確率測度に拡張出来，$\widetilde{P}_x$ は（$\widetilde{W}$，$\widetilde{\mathbb{B}}_t$）に対し，(P.1)〜(P.3)をみたすことが分る。（Doob [11] P.86〜P.89参照）

c) 次に，$x_t(\widetilde{W})$ は $\widetilde{P}_x$につき確率連続であることを示す。

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\lim_{h \to 0} \widetilde{P}_x(d(x_{t+h}(\widetilde{W}), x_t(\widetilde{W})) > \varepsilon) = 0$$

を示せばよい。　$h \uparrow 0$ のときと，$h \downarrow 0$ のときを示せばよいが同じことであるから　$h \downarrow 0$　のときを示す。$h > 0$

とすれば(P. 3)により、

$\widetilde{P}_x(d(x_{t+h}(\widetilde{w}), x_t(\widetilde{w})) \leqq \varepsilon)$

$= \widetilde{P}_x(d(x_h(\widetilde{w}_t^+), x_0(\widetilde{w}_t^+)) \leqq \varepsilon)$

$= \widetilde{E}_x(P(h, x_t(\widetilde{w}), V_\varepsilon(x_t(\widetilde{w})))$

しかるに uniform condition から

$$\lim_{h\downarrow 0} \widetilde{E}_x(P(h, x_t(\widetilde{w}), V_\varepsilon(x_t(\widetilde{w})))) = 1$$

故に、$\lim_{h\downarrow 0} \widetilde{P}_x(d(x_{t+h}(\widetilde{w}), x_t(\widetilde{w})) > \varepsilon) = 0$

d) $\hat{x}_t(\widetilde{w})$ を $x_t(\widetilde{w})$ の可分変形とすると、c)により、$\hat{x}_t(\widetilde{w})$ は $(t, \widetilde{w}) \to \hat{x}_t(\widetilde{w})$ として、$\mathbb{B}(T) \times \widetilde{\mathbb{B}}_\infty$ 可測である。今 $\alpha > 0$, $f \in C(S)$ に対し、Green operator $G_\alpha f$ を

$$G_\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t f(x) dt$$

と定義すると、$f(x) \geqq 0$ $f(x) \in C(S)$ のとき

$$Y_t(\widetilde{w}) = e^{-\alpha t} G_\alpha f(\hat{x}_t(\widetilde{w})) \qquad t \geqq 0$$

は $\widetilde{\mathbb{B}}_t$ に関し semi-martingale を作る。

何となれば $0 \leqq s < t$ とすると、

$e^{-\alpha t} \widetilde{E}_x(G_\alpha f(\hat{x}_t(\widetilde{w})) \mid \widetilde{\mathbb{B}}_s)$

$= \widetilde{E}_x(\int_t^\infty e^{-\alpha u} f(\hat{x}_u(\widetilde{w})) du \mid \widetilde{\mathbb{B}}_s)$

$\leqq \widetilde{E}_x(\int_s^\infty e^{-\alpha u} f(\hat{x}_u(\widetilde{w})) du \mid \widetilde{\mathbb{B}}_s) = e^{-\alpha s} G_\alpha f(\hat{x}_s(\widetilde{w}))$

故に、

$$\widetilde{E}_x(Y_t(\widetilde{w}) \mid \widetilde{\mathbb{B}}_s) \geqq Y_s(\widetilde{w}) \qquad a.e.\ P_x.$$

e) $\widetilde{W}_0 = \{w ; \forall t \in T$ につき $\lim_{s\uparrow(\downarrow)t} \hat{x}_s(\widetilde{w})$ が存在する$\}$

とおけば $\widetilde{W}_0$ は可測事象で $\widetilde{P}_x(\widetilde{W}_0) = 1$

何となれば、Y_t は可分な semi-martingale であるから Doob の結果から、

$$P_x(\forall, t \in T. \lim_{s\uparrow(\downarrow)t} Y_s \text{ が存在する}) = 1$$

故に $\{x_n\}$ を S の dense な可算個の点、$f_n(x) = d(x, x_n)$

$\Gamma = \{f_n ; n = 1, 2 \cdots\cdots\}$ とおくと、

$$P_x\begin{pmatrix} \forall t \in T, \forall \alpha \text{ 有理数} > 0 \ \ \forall f \in \Gamma \text{ に対し} \\ \lim_{s\uparrow(\downarrow)t} G_\alpha f(\hat{x}_s(\widetilde{w})) \text{ が存在する。} \end{pmatrix} = 1$$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

しかるに，$x \neq y$ とすると，ある n につき $f_n(x) < f_n(y)$ 又，$\alpha G_\alpha f_n(x)$ は $\alpha \to \infty$ のとき，$f_n(x)$ に一様収束するから，充分大きい有理数 α に対し，$\alpha G_\alpha f_n(x) < \alpha G_\alpha f_n(y)$．

故に，$P_x(\widetilde{W}_0) = 1$

f) $W \in \widetilde{W}_0$ に対し

$x'_t(w) = \hat{x}_t(w)$ （$\hat{x}_{t+0}(w) = \hat{x}_t(w)$ のとき）

$x'_t(w) = \hat{x}_{t+0}(w)$ （$\hat{x}_{t+0}(w) \neq \hat{x}_t(w)$ のとき）

と定義する．$x'_t(w)$ は可分で c) により $P(\hat{x}_t = x'_t) = 1$ である．

g) $x'_t(w)$ の定義から，

$\{\widetilde{W};\ \widetilde{W} \in W_0,\ x'_t(\widetilde{w})$ は右連続で左からの極限が存在する $\}$ は可測事象で $\widetilde{P}_x$ 測度 1。

故に $\widetilde{P}_x$ を

$W = \{w;\ w_t$ 右連続，左からの極限が存在する $\}$ の上に制限した測度を P_x とすると，$P_x(W) = 1$　P_x は (P.1)～(P.3) をみたすことも作り方から分る．

又，$P_x(x_t(w) \in B) = P(t, x, B)$ であるから

$M = \{S, W, \mathbb{B}_t, P_x\ x \in S\}$ は求める Markov process である．

（証終）

以下，この章では最後の § を除き，すべてこの Markov 過程につき考える．$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}$ とおくと，

<u>定理 2．5</u>（P_μ，$\mathcal{F}_{t+}$ に関する markov 性）

すべての初期分布 μ に対し，$\Phi(w)$ を有界 $\mathcal{F}$ 可測函数とすると，

$E_\mu(\Phi(w_t^+) \mid \mathcal{F}_{t+}) = E_{x_t}(\Phi(w))$　a. e. (P_μ)

が成立つ．

<u>証明</u>．$\forall B \in \mathcal{F}_{t+}$ に対し，$E_\mu(\Phi(w_t^+); B) = E_\mu(E_{x_t}(\Phi); B)$ を云えばよい．先づ $f(x) \in C(S)$ と仮定し，

$E_\mu(f(x_s(w_t^+)); B) = E_\mu(E_{x_t}(f(x_s)); B)$ を示す．

$B \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}$ であるから，（P_μ，$\mathcal{F}_t$）による Markov 性から

$E_\mu(f(x_s(w_{t+\frac{1}{n}}^+)); B) = E_\mu(E_{x_{t+\frac{1}{n}}}(f(x_s)); B)$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$|f(x_s(w^+_{t+\frac{1}{n}}))| \leqq \|f\|$, 又 pathの右連続性から,

$f(x_s(w^+_{t+\frac{1}{n}})) \to f(x_s(w^+_t))$ $(n \to \infty)$. 故に Lebesgue の定理で

$$\lim_{n\to\infty} E_\mu(f(x_s(w^+_{t+\frac{1}{n}}));B) = E_\mu(f(x_s(w^+_t));B)$$

一方 $E_\mu(E_{x_{t+\frac{1}{n}}}(f(x_s));B) = E_\mu(H_s f(x_{t+\frac{1}{n}});B)$

$H_s f \in C(S)$. $|H_s f(x_{t+\frac{1}{n}})| \leqq \|f\|$. path は右連続、故に

$$\lim_{n\to\infty} E_\mu(E_{x_{t+\frac{1}{n}}}(f(x_s));B) = E_\mu(E_{x_t}(f(x_s));B)$$

故に. $E_\mu(f(x_s(w^+_t));B) = E_\mu(E_{x_t} f(x_s);B)$

次に上の結果を拡張して. 任意の有界 $\mathbb{B}_\infty$ 可測函数 $\phi(w)$ に対し、

$E_\mu(\phi(w^+_t);B) = E_\mu(E_{x_t}(\phi);B)$

となることがいえる.

両辺が ϕ にに関して加法的であるから. ϕ が1つの座標だけの連続函数の有限個の積になっているときを示せば充分である. たとえば2つの場合 $s_1 < s_2$ に対し

$E_\mu(f_1(x_{s_1}(w^+_t))f_2(x_{s_2}(w^+_t));B)$

$\qquad = E_\mu(E_{x_t}(f_1(x_{s_1})f_2(x_{s_2});B))$

をいえばよい。これは上と同様

$E_\mu(f_1(x_s(w^+_{t+\frac{1}{n}}))f_2(x_{s_2}(w^+_{t+\frac{1}{n}}));B)$

$= E_\mu(E_{x_{t+\frac{1}{n}}}(f_1(x_{s_1})f_2(x_{s_2}));B)$ より $n \to \infty$ として出来る.

最後に $\phi(w)$ が $\mathcal{F}$ 可測有界函数のときは. 定理1.1の証明と同様 $\phi_1(w)$. $\phi_2(w)$ を $\mathbb{B}_\infty$ 可測有界函数で $\phi_1(w) \leqq \phi(w) \leqq \phi_2(w)$. 且つ. $E_\mu(\phi_1(w^+_t)) = E_\mu(\phi(w^+_t)) = E_\mu(\phi_2(w^+_t))$ なるものをとつて、上下からはさめばよい。(終)

<u>系1</u> (Blumenthalの 0-1 法則)

$B \in \mathcal{F}_{0+}$ とすると. $\forall x \in S$ に対し.

$P_x(B) = 0$ 又は1.

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

証明　定理の$\phi(w)$をBの indicator $\chi_B(w)$とすれば

$$E_x(\chi_B(w_0^+); B) = E_x(E_{x_0}(\chi_B); B)$$

しかるに $w_0^+ = w$　$P_x(x_0 = x) = 1$　であるから．

$$P_x(B \cap B) = P_x(B)^2$$

故に　$P_x(B) = 0$　又は 1.

系2　$\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ である．

証明　$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+}$ であるから $\mathcal{F}_{t+} \subseteq \mathcal{F}_t$ をいえばよい．そのためには任意の初期分布μに対し．すべての有界$\mathcal{F}$可測函数$\phi(w)$につき．

$$E_\mu(\phi \mid \mathcal{F}_t) = E_\mu(\phi \mid \mathcal{F}_{t+}) \qquad (a.e.\ P_\mu)$$

をいえばよい．何となれば．$f(w)$を$\mathcal{F}_{t+}$ 可測函数とすると．
$f(w) = E_\mu(f \mid \mathcal{F}_{t+}) = E_\mu(f \mid \mathcal{F}_t)$ $(a.e.\ P_\mu)$ となり右辺は．$\mathcal{F}_t$ 可測となるからである．所で $f_1(w)$を$\mathcal{F}_t$ 可測．$f_2(w)$を$\mathcal{F}$ー可測とすると定理により、

$$E_\mu(f_1(w) f_2(w_t^+) \mid \mathcal{F}_{t+})$$
$$= f_1(w) E_{x_t}(f_2(w)) = E_\mu(f_1(w) f_2(w_t^+) \mid \mathcal{F}_t) \quad (a.e.\ P_\mu)$$

しかるに．$\phi(w) = f_1(w) \cdot f_2(w_t^+)$なる形の函数は有界$\mathcal{F}$可測函数全体の作る Banach 空間の中で dense であるから．任意の有界$\mathcal{F}$可測函数につき．

$$E_\mu(\phi(w) \mid \mathcal{F}_t) = E_\mu(\phi(w) \mid \mathcal{F}_{t+}) \ (a.e.\ P_\mu) \qquad (終)$$

§3. 強 Markov 性と．Blumenthal の定理

定義 3.1　$\sigma(w)$がWから$[0, \infty]$への写像で、すべての$t \geqq 0$に対し、$\{\sigma(w) < t\} \in \mathcal{F}_t$ となっているとき．Markov time という。

注意　$\{\sigma(w) \leqq t\} \in \mathcal{F}_t$ と定義しても定理2．5系2により同じことである。

定義から次の定理を得る。Markov time の全体をM.T. とかくと，

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

定理 3. 1

(i) $\sigma \equiv t \in$ M.T. $\quad (t \geqq 0)$

(ii) $\sigma_1, \sigma_2 \in$ M.T. $\Rightarrow \sigma_1 \wedge \sigma_2,\ \sigma_1 \vee \sigma_2 \in$ M.T.

(iii) $\sigma_n \in$ M.T.，$\sigma_n \uparrow \sigma\ (\sigma_n \downarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \in$ M.T.

(iv) $t \geqq 0 \quad \sigma \in$ M.T $\Rightarrow t + \sigma(W_t^+) \in$ M.T.

定義 3. 2 　σ が markov time であるとき、

$\mathcal{F}_\sigma = \{A ; A \in \mathcal{F}$, 且つ, $\forall t \in T$. に対し、$A \cap \{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t\}$
と定義する。

$\mathcal{F}_\sigma$ は Borel field であって。

定理 3. 2

(i) $\forall w \in W$ に対し. $\sigma(w) \leqq \tau(w)$ なら. $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

(ii) σ は $\mathcal{F}_\sigma$ 可測.

証明は定義から明らか．

今考えている Markov 過程は，conservative であるから、extra point $\{\partial\}$ や時間に関しても ∞ を考えなかったが．今後．$S' = S \cup \{\partial\}$．$x_\infty(w) = \partial$ と考えることにする。

Lemma 3. 1 　σ を markov time とすると．

(i) $x_\sigma(w)$ は $(W, \mathcal{F})$ から $(S', \mathbb{B}(S'))$ への写像として可測.

(ii) W_σ^+ を．$(W_\sigma^+)_s = W_{\sigma+s}$．($\sigma = \infty$．又は $s = \infty$ のとき．$(W_\sigma^+)_s = \partial$) により定義すると．$w \to W_\sigma^+$ は．$(W, \mathcal{F})$ から $(W, \mathbb{B}_\infty)$ への写像として可測である。

注意 　実は $(W, \mathcal{F}) \to (W, \mathcal{F})$ として可測になるが．それは、次の定理の中で示される。

Lemma の証明

(i) $n = 1, 2, \cdots\cdots$ に対し．

$$\sigma_n(w) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} \ ; \ w \in E_{nk} = \left\{ \dfrac{k-1}{2^n} \leqq \sigma < \dfrac{k}{2^n} \right\} \quad k = 1, 2, \cdots\cdots \\ \infty \ ; \ w \in E_\infty = \{\sigma = \infty\} \end{cases}$$

と定義すると、$\{\sigma_n < t\} = \bigcup_{1 \leqq k < t2^n} E_{nk} \in \mathcal{F}_t$ であるから．σ_n は markov time で $\sigma_n \downarrow \sigma$ である。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$B \in \mathbb{B}(S')$ とすると.

$$\{W; x_{\sigma_n}(w) \in B\} = \sum_{k \geqq 1} \{x_{\frac{k}{2n}} \in B\} \cap E_{nk} + \{x_\infty \in B\} \cap E_\infty \in \mathcal{F}.$$

$\lim_{n\to\infty} x_{\sigma_n}(w) = x_\sigma(w)$ であるから. $\{x_\sigma(w) \in B\} \in \mathcal{F}$.

(ii) $w \to W_t^+$ は. §1で注意したように $(T' \times \overline{W}, \mathbb{B}(T') \times \mathbb{B}_\infty)$ から $(\overline{W}, \mathbb{B}_\infty)$ への写像とし可測. 又. σ は markov time であるから $w \to (\sigma(w), w)$ は. $(\overline{W}, \mathcal{F}) \to (T' \times \overline{W}, \mathbb{B}(T') \times \mathbb{B}_\infty)$ として可測. 故に合成函数として $w \to W_\sigma^+$ は $(\overline{W}, \mathcal{F}) \to (\overline{W}, \mathbb{B}_\infty)$ として可測写像である.

定理 3.3' (強 Markov 性)

$\sigma(w)$ を markov time. $\Phi(w)$ を有界 $\mathcal{F}$-可測函数とすると. すべての初期分布 μ に対し、

$$E_\mu(\Phi(W_\sigma^+) \mid \mathcal{F}_\sigma) = E_{x_\sigma}(\Phi(w)) \qquad a.e. (P_\mu)$$

が成立つ.

証明 数段階に分けて証明する.

a) $f(x) \in C(S)$ を $f(\partial) = 0$ として $C(S')$ に拡張しておくと. $E_\mu(f(x_t(W_\sigma^+)) \mid \mathcal{F}_\sigma) = E_{x_\sigma}(f(x_t))$ $(a.e. P_\mu)$ が成立つ.

$B \in \mathcal{F}_\sigma$ に対し. $E_\mu(f(x_t(W_\sigma^+)); B)$

$$= E_\mu(E_{x_\sigma}(f(x_t)); B)$$

をいえばよいが. Lemma で作った σ_n をとり.

$$E_\mu(f(x_t(W_{\sigma_n}^+)); B) = E_\mu(E_{x_{\sigma_n}}(f(x_t)); B) \cdots\cdots (1)$$

がいえれば定理 2.5と同様にして. $n \to \infty$ として a) が示される.

$E_\mu(f(x_t(W_{\sigma_n}^+)); B)$

$= \sum_{k \geqq 1} E_\mu(f(x_t(W_{\frac{k}{2n}}^+)); B \cap E_{nk}) + E_\mu(f(\partial); B \cap E_\infty)$

しかるに. $B \cap E_{nk} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2n}}$ であるから定理 2.5により.

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$E_\mu(f(x_t(w^+_{\frac{k}{2^n}})); B\cap E_{nk}) = E_\mu(E_{x_{\frac{k}{2^n}}}(f(x_t)); B\cap E_{nk})$

$E_\mu(f(\partial); B\cap E_\infty) = 0$

故に.

$E_\mu(f(x_t(w^+_{\sigma_n})); B) = E_\mu(\sum_{k\geq 1} E_{x_{\frac{k}{2^n}}}(f(x_t)); B\cap E_{nk})$

$= E_\mu(E_{x_{\sigma_n}}(f(x_t)); B)$

b) $\Phi(w)$ を有界 $\mathbb{B}_\infty$ 可測函数とすると.

$E_\mu(\Phi(w^+_\sigma) \mid \mathcal{F}_\sigma) = E_{x_\sigma}(\Phi)$ $(a.e.\ P_\mu)$ が成立つ.

証明は定理 2．5と同様にすればよい.

c) $w \to w^+_\sigma$ は $(W, \mathcal{F}) \to (W, \mathcal{F})$ として可測.

何となれば $w \to w^+_\sigma$ は $(W, \mathcal{F}) \to (W, \mathbb{B}_\infty)$ として可測であるから、$E \in \mathbb{B}(S')$ に対し、$\nu_\sigma(E) = P_\mu(x_\sigma \in E)$ が定義出来、$(S', \mathbb{B}(S'))$ 上の確率測度である.

又、b) により、$B \in \mathbb{B}_\infty$ とすると.

$P_\mu(w^+_\sigma \in B) = E_\mu(\chi_B(w^+_\sigma)) = E_\mu(P_{x_\sigma}(B)) = P_{\nu_\sigma}(B)$

であるから. $B \in \mathcal{F}$ のとき. B_1、$B_2 \in \mathbb{B}_\infty$ で、$B_1 \subseteq B \subseteq B_2$

$P_{\nu_\sigma}(B_1) = P_{\nu_\sigma}(B_2)$ となるものが存在する.

$\{w; w^+_\sigma \in B_1\} \subseteq \{w; w^+_\sigma \in B\} \subseteq \{w; w^+_\sigma \in B_2\}$

で $P_\mu(w^+_\sigma \in B_1) = P_{\nu_\sigma}(B_1) = P_{\nu_\sigma}(B_2) = P(w^+_\sigma \in B_2)$

であるから $\{w; w^+_\sigma \in B\} \in \mathcal{F}^\mu$ μは任意であるから, $\{w; w^+_\sigma \in B\}$ $\in \mathcal{F}$.

d) 任意の有界 $\mathcal{F}$ 可測函数 $\Phi(w)$ に対し、

$E_\mu(\Phi(w^+_\sigma) \mid \mathcal{F}_\sigma) = E_{x_\sigma}(\Phi(w))$ $(a.e.\ P_\mu)$

である.

何となれば任意の $B \in \mathcal{F}_\sigma$ に対して.

$E_\mu(\Phi(w^+_\sigma); B) = E_\mu(E_{x_\sigma}(\Phi); B)$

を示せばよいが、c) により、有界 $\mathbb{B}_\infty$ 可測函数 $\Phi_1(w)$ $\Phi_2(w)$ で $\Phi_1(w) \leqq \Phi(w) \leqq \Phi_2(w)$, $E_\mu(\Phi_1(w^+_\sigma)) = E_\mu(w^+_\sigma))$ となるものが存在する. この Φ_1、Φ_2 からと、b) から、定理 1．1の証明と同様上下からはさんで証明出来る。 (終)

次に、markov time に沿っての左連続性を主張する Blum-

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

enthal によつて得られた次の定理を証明しよう。hitting time の可測性を主張するとき便利な定理である。

定理 3.4 (Blumenthal)

σ_n を markov time の単調増大列で $\sigma_n \uparrow \sigma$ とすると．すべての初期分布 μ に対し，

$$P\mu(\lim_{n\to\infty} x_{\sigma_n} = x_\sigma,\ \sigma<\infty) = P\mu(\sigma<\infty)$$

が成立つ。

証明 σ_n．σ が有界でないとき．$\sigma_n \wedge a$，$\sigma\wedge a\ (a>0)$ を改めて、σ_n．σ と考え，後で $a\to\infty$ とすればよいから．σ_n．σ は有界としてよい。$|\sigma|$，$|\sigma_n| \leqq a$ とする。$f\in C(S)$，とすると，$G_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt \in C(S)$ で $\|\alpha G_\alpha f - f\| \to 0\ (\alpha\to 0)$ であることを先づ注意しておこう。

path は左からの limit をもつから，$\lim_{n\to\infty} x_{\sigma_n}(w) = y(w)$ とおく。

$B\in\mathcal{F}_{\sigma_n}$，$m>n$ とすると．

$$E\mu(G_\alpha f(x_{\sigma_m});B)$$
$$= E\mu(e^{\alpha\sigma_m}\int_{\sigma_m}^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt;B)$$

同様に、

$$E\mu(G_\alpha f(x_\sigma);B)$$
$$= E\mu(e^{-\alpha\sigma}\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt;B)$$

しかるに

$$\left|e^{\alpha\sigma_m}\int_{\sigma_m}^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right| \leqq e^{a\alpha}\|f\|/\alpha$$

で $\lim_{m\to\infty} e^{\alpha\sigma_m}\int_{\sigma_m}^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt = e^{\alpha\sigma}\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt$．

故に Lebesgue の定理で

$$\lim_{m\to\infty} E\mu(G_\alpha f(x_{\sigma_m});B) = E\mu(G_\alpha f(x_\sigma);B)$$

$\lim_{\alpha\to\infty}\|\alpha G_\alpha f - f\| = 0$ であるから．

$$\lim_{m\to\infty} E\mu(f(x_{\sigma_m});B) = E\mu(f(x_\sigma);B)$$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

従つて、$\mathcal{B}$ が $\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{F}_{\sigma_n}$ で生成される Borel field に等しいとき

$$E_\mu(f(x_\sigma);B)=E_\mu(f(y);B)$$

もし、$P_\mu(x_\sigma \neq y)>0$ とすると、ある近傍 $V_r(x)$ で

$P_\mu(y\in V_r(x),\ x_\sigma \notin V_{2r}(x))>0$ となるものが存在する。

$f(z)\in C(S)$ を $0\leq f(z)\leq 1$, $f(z)=1$ ($z\in V_r(x)$), $f(z)=0$ ($z\notin V_{2r}(x)$) なる函数とし、$B=\{y\in V_r(x)\}$ とすると、

$$E_\mu(f(y(w));B)=P_\mu(y(w)\in V_r(x))$$

$$E_\mu(f(x_\sigma);B)\leq P_\mu(x_\sigma\in V_{2r}(x),\ y(w)\in V_r(x))$$

一方 $P_\mu(y(w)\in V_r(x))<P_\mu(y\in V_r(x),\ x_\sigma\in V_{2r}(x))$

であるから、

$$E_\mu(f(y(w));B)\neq E_\mu(f(x_\sigma);B)$$

で矛盾。 従つて、$y(w)=x_\sigma(w)$ (a.e. P_μ)。 (終)

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

§4. Hitting time

AをSの部分集合とし、path $x_t(w)$がAに始めて到達する時間即ちAへの hitting time $\sigma_A(w)$を次の様に定義する。

定義 4.1

$$\sigma_A(w) = \begin{cases} \inf\{t\,;\, t>0 \quad x_t(w)\in A\} \\ \infty \text{（上の} t \text{が存在しないとき）} \end{cases}$$

できるだけ広いclassの集合に対し、$\sigma_A(w)$がMarkov timeであることが望ましい。実は、$\mathbb{B}_t$等を完備化しておいたのもそのためである。そのためにわれわれは、capacityについてChoquetにより得られた次の二つの定理を証明なしに用いることにしよう。

定義 4.2　$A\subseteq S$がanalytic setであるというのは、Aに対し、あるcompact set Xと、その$K_{\sigma\delta}$集合（compact setの列$K_{m,n}\subseteq X$があって、$\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq 1} K_{mn}$と表わせる集合）$A'$があて、$A$は$A'$の連続写像の像になっていることである。

定理 4.1

$A\in\mathbb{B}(S)$はanalytic setである。

証明 Choquet [8] 又は Dynkin [15]

Choquetはもっと一般に論じていることが、ここではDynkinにより定式化された所謂order 2のcapacityの定義を次に与える。

定義 4.3

$\mathcal{G}$を、Sのすべてのopen setとcompact setを含む集合族とし、φが$\mathcal{G}$で定義され$[0.1]$の値をとる函数で、

(φ.1)　$A_1, A_2 \in \mathcal{G}$, $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \varphi(A_1) \leqq \varphi(A_2)$

(φ.2)　$A_n \in \mathcal{G}$, $A_n \uparrow A \Rightarrow A\in\mathcal{G}$ 且つ、$\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n) = \varphi(A)$

(φ.3)　$\forall$ compact set K, $\forall\varepsilon>0$に対し、open set $G\supseteqq K$が存在し、$\varphi(G)-\varphi(K)<\varepsilon$と出来る。

(φ.4)　$A_1, A_2, B\in\mathcal{G}$, $A_1\subseteq A_2$
$\Rightarrow \varphi(A_2\cup B)-\varphi(A_1\cup B) \leqq \varphi(A_2)-\varphi(A_1)$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

をみたすとき（order 2の）capacity という。*)

φ を capacity とするとき任意の $A \subseteq S$ に対し、

$$\varphi^*(A) = \inf\{\varphi(G);\ G \text{ open set} \supseteq A\}$$

$$\varphi_*(A) = \sup\{\varphi(K);\ K \text{ compact} \subseteq A\}$$

と定義し それぞれ outer capacity, inner capacity といい、特に

$$\varphi^*(A) = \varphi_*(A)$$

となる集合Aを capacitable という。

定理 4.2

すべての analytic set は capacitable である。

証明 Choquet [8] Dynkin [15]

次に2，3の記号を準備する。

$A \subseteq S$, $I \subseteq T = [0, \infty)$ に対し

$$R_I(A) = \{w;\ \text{ある } t \in I \text{ が存在して}, x_t(w) \in A\}$$

$$R(A) = R_{[0\infty)}(A)$$

とおく。又 $\sigma_A^0(w)$ を

$$\sigma_A^0(w) \begin{cases} \inf\{t;\ t \geqq 0,\ x_t(w) \in A\} \\ \infty \quad \text{上の } t \text{ が存在しないとき。} \end{cases}$$

と定義する。hitting time $\sigma_A(w)$ と，$\sigma_A^0(w)$ は一般には異るものであるが path の右連続性があるので，$\sigma_A(w) = \lim_{n\to\infty} \sigma_A^0(w_{\frac{1}{n}}^+)$ が成立つことを注意しておく。

定理 4.3 すべての analytic set Aに対し，hitting time $\sigma_A(w)$ は markov time である。従って，定理 4.1 により Borel set Aに対しても $\sigma_A(w)$ は markov time である。

証明 $\sigma_A(w) = \lim_{n\to\infty} \sigma_A^0(w_{\frac{1}{n}}^+)$ であるから，σ_A^0 が markov time であることをいえばよい。又，

$\{\sigma_A^0 < t\} = R_{[0,t)}(A)$ であるから，Aが analytic set であるとき，$R_{[0t)}(A) \in \mathcal{F}_t$ をいえばよい。

---

*) order 2は（φ.4）の性質をさしていう。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

a) $\mathcal{G}=\{A\,;\,R_{[0,t)}(A)\in\mathcal{F}_t\}$ とおくと、$\mathcal{G}$は、すべての open set と compact set を含む。

何となれば、Aを open set としよう。Q_t を $[0,t)$ に含まれる有理数の全体とすると、path の右連続性から、$R_{[0,t)}(A)=\bigcup_{r\in Q_t}\{x_r\in A\}$、故に、$R_{[0,t)}(A)\in\mathcal{B}_t\subseteq\mathcal{F}_t$. 故に $A\in\mathcal{G}$ で σ_A^0 は markov time である。次に A を compact とすると、open set の単調減少列 $\{G_n\}$ で $\bigcap_{n\geq 1}\overline{G}_n=A$、となるものが存在する。$\sigma_{G_n}^0\leqq\sigma_A^0$ で $\sigma_{G_n}^0$は単調増加、$\lim_{n\to\infty}\sigma_{G_n}^0=\sigma$ とおくと、$\sigma\leqq\sigma_A^0$。一方 path の右連続性から、$\sigma_{G_n}^0<\infty$ であれば $x_{\sigma_{G_n}^0}\in\overline{G}_n$ 故に $\sigma(w)<\infty$ なら、$\lim_{n\to\infty}x_{\sigma_{G_n}^0}\in A$. である。所が Blumenthal の定理で、すべての初期分布 μ に対し $P_\mu(\lim_{n\to\infty}x_{\sigma_{G_n}^0}=x_\sigma,\sigma<\infty)=P_\mu(\sigma<\infty)$ であるから $P_\mu(\sigma\geqq\sigma_A^0)=1$。従って $P_\mu(\sigma=\sigma_A^0)=1$。故に、$\{\sigma_A^0(w)<t\}\in\mathcal{F}_t^\mu$ で、μ は任意であるから、$\{\sigma_A^0<t\}=R_{[0,t)}(A)\in\mathcal{F}_t$、即ち、$A\in\mathcal{G}$ である。

b) $A\in\mathcal{G}$ に対し $\varphi(A)=P_\mu(R_{[0,t)}(A))$ とおくと、$\varphi(A)$は定義4.3の capacity である。

事実 $(\varphi.1)\sim(\varphi 4)$をたしかめてみればよい。

$(\varphi.1)$は定義より明らか。

$(\varphi.2)$ $A_n\in\mathcal{G}$. $A_n\uparrow A$ とする。$R_{[0,t)}(A)=\bigcup_{n\geq 1}R_{[0,t)}(A_n)\in\mathcal{F}_t$ で $\varphi(A)=P_\mu(\bigcup_{n\geq 1}R_{[0,t)}(A))=\lim_{n\to\infty}P_\mu(R_{[0,t)}(A_n))=\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)$

$(\varphi.3)$ Kを compact set とする。a) と同様に open set $\{G_n\}$ の単調列で $\bigcap_{n\geq 1}\overline{G}_n=A$ なるものをとれば、$\lim_{n\to\infty}\varphi(G_n)=\varphi(K)$ であるからよい。

$(\varphi.4)$ A_1, A_2, $B\in\mathcal{G}$, $A_1\subseteq A_2$ とする。

$$\begin{aligned}\varphi(A_1\cup B)&=P_\mu(R_{[0t)}(A_1\cup B))\\&=P_\mu(R_{[0t)}(A_1)\cup R_{[0,t)}(B))\\&=P_\mu(R_{[0,t)}(A_1))+P_\mu(R_{[0t)}(B))\\&\quad-P_\mu(R_{[0t)}(A_1)\cap R_{[0,t)}(B))\end{aligned}$$

同様に

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$$\varphi(A_2 \cup B) = P_\mu(R_{[0,t)}(A_2)) + P_\mu(R_{[0,t)}(B)) - P_\mu(R_{[0,t)}(A_2) \cap R_{[0,t)}(A_1))$$

故に

$$\begin{aligned}&\varphi(A_2 \cup B) - \varphi(A_1 \cup B)\\ &= \varphi(A_2) - \varphi(A_1) - \{P_\mu(R_{[0,t)}(A_2) \cap R_{[0,t)}(B)) \\ &\qquad - P_\mu(R_{[0,t)}(A_1) \cap R_{[0,t)}(B))\}\\ &\leqq \varphi(A_2) - \varphi(A_1)\end{aligned}$$

c) Aを analytic set とすると，σ_A^0 は markov time である。何となれば定理4.2 と c) により，

$$\sup_{K:\,compact \subseteq A} P_\mu(R_{[0,t)}(K)) = \inf_{G\, open \supseteqq A} P_\mu(R_{[0,t)}(G))$$

故に $R_{[0,t)}(A) \in \mathcal{F}_t^\mu$，$\mu$は任意であつたから

$$\{\sigma_A^0 < t\} = R_{[0,t)}(A) \in \mathcal{F}_t. \qquad \text{（終）}$$

定理4.4 Aを analytic set とすると，すべての初期分布μに対し、Aに含まれ単調増加な compact set の列$\{K_n\}$をとり、

$$P_\mu(\lim_{n\to\infty} \sigma_{K_n} = \sigma_A) = 1$$

と出来る。

証明 先ず $\forall \varepsilon > 0$，$\forall t > 0$ に対し compact set $K \subseteq A$ をとり $P_\mu(R_{(0,t)}(A)) \leqq P_\mu(R_{(0,t)}(K)) + \varepsilon$ と出来ることを注意しておく。事実 path の右連続により，$s \in (0,t)$をとつて，$0 \leqq P_\mu(R_{(0,t)}(A)) - P_\mu(R_{[s,t)}(A)) < \varepsilon/2$ と出来るし $P_\mu(R_{[s,t)}(A))$に対しては，前定理と同様 compact set $K \subseteq A$ をとり，$0 \leqq P_\mu(R_{[s,t)}(A)) - P_\mu(R_{[s,t)}(K)) < \varepsilon/2$ と出来る。一方 $P_\mu(R_{[s,t)}(K)) \leqq P_\mu(R_{(0,t)}(K)) \leqq P_\mu(R_{(0,t)}(A))$であるから，$P_\mu(R_{(0,t)}(A)) - P_\mu(R_{(0,t)}(K)) \leqq P_\mu(R_{(0,t)}(A)) - P_\mu(R_{[s,t)}(K)) < \varepsilon$である。

今$(0,\infty)$に含まれる有理数を$\{r_i\}$ $i=1,2\cdots$ とする。iを1つ

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

きめると、上の注意から、単調増加な compact set の列 $\{K_m^{(i)}\}$、($K_m^{(i)} \subseteq A$) をとり、

$P_\mu(R_{(0,r_i)}(A)) - P_\mu(R_{(0,r_i)}(K_m^{(i)})) < 1/m$

と出来る。ここで $K_n = \bigcup_{i=1}^{n} K_n^{(i)}$ とおくと、K_n は compact set で $\subseteq A$、又、

$K_n = \bigcup_{i=1}^{n} K_n^{(i)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_{n+1}^{(i)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} K_{n+1}^{(i)} = K_{n+1}$ であるから、単調増加、しかも、$\forall i \leqq n$ について、

$P_\mu(R_{(0,r_i)}(A)) - P_\mu(R_{(0,r_i)}(K_n)) \leqq \frac{1}{n}$

である。$P_\mu(\sigma_{K_n} \downarrow \sigma_A) = 1$ を示そう。$\lim_{n\to\infty} \sigma_{K_n} = \sigma$ とおき、$P_\mu(\sigma > \sigma_A) > 0$ と仮定する。

そうするとある有理数 r が存在して、

$P_\mu(\sigma \geqq r > \sigma_A) > 0$、所が $P_\mu(\sigma_A < r \leqq \sigma)$

$= P_\mu(\sigma_A < r) - P_\mu(\sigma < r) \leqq P_\mu(\sigma_A < r) - P_\mu(\sigma_{K_n} < r)$

$= P_\mu(R_{(0,r)}(A)) - P_\mu(R_{(0,r)}(K_n))$。 r は有理数であるから、$\{r_1 \cdots r_{n_0}\} \ni r$ となる n_0 が存在する。

$\forall n \geqq n_0$ に対し、

$0 < P_\mu(R_{(0,r)}(A)) - P_\mu(R_{(0,r)}(K_n)) < \frac{1}{n}$

これは矛盾であるから、$P_\mu(\sigma = \sigma_A) = 1$ （証終）

定理 4．5　A を analytic set とし、初期分布 μ は、A に mass を持たないとすると、A を含み単調減少な open set の列 $\{G_n\}$ をとり、

$P_\mu(\sigma_{G_n} \uparrow \sigma_A) = 1$

と出来る。

証明　μ に関する条件が必要なことは、たとえば、uniform motion（§5 参照）で $A = \{x\}$ $\mu(\cdot) = \varepsilon_x(\cdot)$（＝$x$ におかれた単位測度）を考えると、$P_x(\sigma_A = \infty) = 1$、一方、$\{x\} \subseteq G$ なるすべての open set に対して、$P_x(\sigma_G = 0) = 1$ であることから分る。この例で分るように、条件は、$\forall t > 0$ に対し、$P_\mu(R_{[0,t)}(A))$ $= P_\mu(R_{[0,t)}(A)) = P_\mu(R_{(0,t)}(A))$ を示すから、前定理と、同様にして証明出来る。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

定義 4. 4　$A\subseteq S$ が nearly Borel set (nearly analytic set) であるというのは、すべての初期分布 μ に対し Borel set (analytic set) A_1, A_2 で $A_1\subseteq A\subseteq A_2$ 且つ $P_\mu(R(A_1)) = P_\mu(R(A_2))$ となるものが存在することである。

注意　1° nearly Borel set の全体は Borel field を作る。この Borel field に関し可測な函数を nearly Borel measurable という。

2° $A\subseteq S$ が nearly Borel (nearly analytic) とすると、定義の A_1, A_2 をとれば、明らかに、$\mu(A_2-A_1)=0$ 従って、A は $\mathbb{B}(S)$ の μ による completion に属する。即ち、A は μ-可測である。

3° 定理 4.3, 4.4, 4.5 は nearly analytic set に対しても成立つ。

4° A を nearly analytic set とすると、Blumenthal の 0-1 法則により、$\forall x\in S$ に対し、$P_x(\sigma_A=0)=0$ 又は 1 が成立つ。

定義 4. 5　x が $A\subseteq S$ の regular point であるというのは、nearly analytic set $B\subseteq A$ が存在して、$P_x(\sigma_B=0)=1$ となることである。又、irregular point というのは、nearly analytic set $C\supseteq A$ が存在して、$P_x(\sigma_C=0)=0$ となることである。

われわれは以後、A に対し、regular な点の全体を A^{reg} と表わすことにする。

注意　A が nearly analytic であれば、任意の初期分布 μ に対し、A^{reg} は可測である。事実 $\{\sigma_A=0\}\in\mathcal{F}$ であるから、$B_1\subseteq\{\sigma_A=0\}\subseteq B_2$　B_1, $B_2\in\mathbb{B}_\infty$ で $P_\mu(B_1)=P_\mu(B_2)$ なるものが存在する。故に $x\to P_x(\sigma_A=0)$ は、μ-可測　従って　$A^{reg}=\{x; P_x(\sigma_A=0)=0\}$ は μ-可測である。

定理 4. 6　$A\subseteq S$ を nearly analytic set とすると、すべての初期分布 μ に対し、

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$$P_\mu(x_{\sigma_A} \in A \cup A^{reg};\ \sigma_A < \infty) = P_\mu(\sigma_A < \infty)$$

が成立つ.

証明 $\{x_{\sigma_A} \in A \cup A^{reg}\}$ の可測性は上の注意から分るから.
$P_\mu(x_{\sigma_A} \in S - (A \cup A^{reg})) = 0$ をいえばよい.

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_A & x_{\sigma_A} \in S - (A \cup A^{reg}) \\ \infty & \text{その他} \end{cases}$$

と定義すると σ は markov time であるから強 markov 性により

$$P_\mu(\sigma_A(w_\sigma^+) > 0.\ \sigma < \infty) = E_\mu(P_{x_\sigma}(\sigma_A > 0);\ \sigma < \infty)$$

σ_A の定義から. $P_\mu(\sigma_A(w_\sigma^+) > 0) = 0$、従って左辺 $= 0$、一方.
$\sigma(w) < \infty$ なら $x_\sigma \in A \cup A^{reg}$ 故に $P_{x_\sigma}(\sigma_A > 0) > 0$、従って.
$P_\mu(\sigma < \infty) = P_\mu(x_{\sigma_A} \in S - (A \cup A^{reg})) = 0$ (終)

最後に、次の§で使うので次の定理をあげておく.

定理 4.7 A を analytic set

$\sigma_A'(w) = \inf\{t;\ t \geqq 0.\ x_t \in A$ 又は $x_{t-0} \in A\}$

とおくと、$\sigma_A'(w)$ も markov time である.

証明

$$R'_{[0.t)}(A) = \{W;\ \text{ある } s \in [0.t) \text{ に対し、} x_s \in A \text{ 又は } x_{s-0} \in A\}$$

とおくと、$\{\sigma_A'(w) < t\} = R'_{[0.t)}(A)$. 故に $R'_{[0.t)}(A) \in \mathcal{F}_t$ を示せばよい. 一般に $R'_{[0.t)}(A) \geqq R_{[0.t)}(A)$ であるが. $G \geqq A$ なる任意の open set に対し. $R'_{[0.t)}(A) \subseteq R_{[0.t)}(G)$。一方任意の初期分布 μ に対し、$P_\mu(R_{[0.t)}(G) - R_{[0.t)}(A))$ をいくらでも小さくする G がとれるから. $P_\mu(R'_{[0.t)}(A) - R_{[0.t)}(A)) = 0$
故に $R'_{[0.t)}(A) \in \mathcal{F}_t$. (終)

§5. Markov 過程の構成 (II)

S を才二可算公理をみたす locally compact Hausdorff 空間. $S' = S \cup \{\partial\}$ をその compact 化. $\mathbb{B}(S)$. $\mathbb{B}(S')$ をそれぞれの

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

位相的 Borel field とする。$C_\infty(S)$ を無限大で 0 *) となる連続函数の全体とすると、norm を $\|f\| = \sup_{x\in S}|f(x)|$ と入れて、Banach空間になる。今、$C_\infty(S)$ の元を $C_\infty(S)$ に写す、線型作用素 $\{H_t ; t\geqq 0\}$ が与えられて、

(H.1) $f(x)\geqq 0 \Rightarrow H_tf(x)\geqq 0$ （正　値）

(H.2) $\|H_t\|\leqq 1$ （submarkov）

(H.3) $H_tH_sf = H_{t+s}f$ （semi-group）

(H.4) $\|H_tf-f\|\to 0 \quad (t\downarrow 0)$ （強　連　続）

をみたしているとする。

H_t は Riesz の定理で

$H_tf(x)=\int_S P(t,x,dy)f(y) \qquad f\in C_\infty(S)$

と表わされ、$\{P(t,x,B) ; t\geqq 0,\ x\in S,\ B\in \mathbb{B}(S)\}$ は、§1の意味での遷移確率となっていることが分る。特に(H.4)があるため、次の定理が証明出来る。

定理 5.1 $\{P(t,x,B) ; t\geqq 0,\ x\in S,\ B\in\mathbb{B}(S)\}$ を遷移確率にもつS上の Markov 過程 $\mathbb{M}=\{S', W, \mathbb{B}_t, P_x, x\in S'\}$ が唯一つ存在する。

証明 唯一通りにきまることは、定理2.4と同様であるから、存在について示す。$f(x)\in C(S')$ とすると、$f(x)-f(\partial)$ のS上への restriction は、$C_\infty(S)$の元と考えられるから、$H_t(f(x)-f(\partial))$は定義出来る。ことを注意して、$f\in C(S')$に対し、

$H'_tf(x)=H_t(f(x)-f(\partial))+f(\partial) \qquad t\geqq 0$

と定義する。$\{H'_t\ t\geqq 0\}$ は $C(S')$の元を$C(S')$の元に写す semi-group で、§2の(H.1)～(H.4)をみたすことが分る。又 H'_t に対する遷移確率を、$\{P'(t,x,B) ; t\geqq 0,\ x\in S',\ B\in\mathbb{B}(S')\}$ とすると、$\forall t\in T,\ \forall x\in S'$ につき $P'(t,x,S')=1$ で

---

*) $\forall \varepsilon>0$ に対し compact set $K\subseteq S$ が存在し、$\sup_{x\notin K}|f(x)|<\varepsilon$ と出来るとき、$f(x)$を無限大で 0 という。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

1° $P'(t, x, B) = P(t, x, B)$ $\quad x \in S,\ B \in \mathbb{B}(S)$

2° $P'(t, x, \{\partial\}) = 1 - P(t, x, S)$

3° $P'(t, \partial, S) = 0$ $\quad t \geqq 0$

4° $P'(t, \partial, \{\partial\}) = 1$ $\quad t \geqq 0$

をみたすことも分る。§2で示したように、$\{P'(t, x, B)\}$ を遷移確率にする S' 上の conservative な Markov 過程 $\mathbb{M}' = \{S', W', \mathcal{B}'_t, P'_x, x \in S'\}$ が存在する。ここで

$$\sigma_\infty(w') = \inf\{t\ ;\ t \geqq 0,\ x_t(w') = \partial \text{ 又は、} x_{t-0}(w') = \partial\}$$

とおくと、定理4.7.により、σ_∞ は markov time であり、又、$\forall x \in S'$ に対し、$P'_x(x_{\sigma_\infty} = \partial) = 1$ であることも分る。
強 Markov 性を使うと、

$$P'_x(x_t(w^+_{\sigma_\infty}) = \partial) = E'_x(P'_{x_{\sigma_\infty}}(x_t = \partial)) = P(t, \partial, \{\partial\}) = 1$$

であるから、

P'_x {すべての有理数 $t \geqq \sigma_\infty$ につき $x_t(w') = \partial$} $= 1$.

Path の右連続性から、

$P'_x\{\forall t \geqq \sigma_\infty$ につき、$x_t(w') = \partial\} = 1$

従って、W' を制限して、

$W = \{w\ ;\ w \in W'$, 且つ、$\forall t \geqq \sigma_\infty$ に対し、$w_t = \partial\}$

とおくと、P'_x は W の上に total measure をもつ。ここで、§1の定義の所で述べた様に、$\mathbb{B}_t$ を定義し、$B \in \mathbb{B}_\infty$ に対し、

$P_x(B) = P'_x(B)$

と定義すると、$\mathbb{M} = \{S', W, \mathbb{B}_t, P_x, x \in S'\}$ は $\{P(t, x, B)\}$ を遷移確率とする Markov 過程である。 (終)

注意1° 構成された $\mathbb{M} = \{S', W, \mathbb{B}_t, P_x\ \ x \in S'\}$ は本質的には、$\mathbb{M}' = \{S', W', \mathbb{B}'_t, P'_x, x \in S'\}$ と同じであるからこの章のすべての結果は、$\mathbb{M}$ に対しても成立つ。 2° $\|H_t\| = 1$ のときには、$P(t, x, S) = 1$ となるから、$P'(t, x, \{\partial\}) = 0$, $x \in S$. 従って、$P_x(\sigma_\infty = \infty) = 1$ となり、conservative になる。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

定義 5.1　$B \in \mathbb{B}(S)$ で $\bar{B}$ が compact のとき、$\forall x \in S$ に対し

$$\int_0^\infty P(t, x, B)\,dt \text{ が有界}$$

となるならば $\{H_t\}$ を積分可能な semi-group という。

H_t が積分可能であれば、$\forall$compact set K に対し、K の平均滞在時間

$$E_x\left(\int_0^\infty \chi_K(x_t)\,dt\right) = \int_0^\infty P(t, x, K)\,dt < \infty$$

である。

以下例をあげよう。

例 1.（直線上の一様運動）

$S = (-\infty, +\infty)$ とし、$f(x) \in C_\infty(S)$ に対し、

$H_t f(x) = f(x + ct)$（c は 0 でない常数）とする。

これは直線上を等速度 c で運動する決定論的な Markov 過程を与える。明らかに $P(t, x, dy) = \varepsilon_{x+ct}(dy)$（$\varepsilon_x(dy)$ は x におかれた単位測度）で、path の空間 W は $\{x + ct;\ x \in S,\ t \geqq 0\}$ の形の連続函数でよい。

例 2（Brown 運動）

R^N を N 次元 Euclid 空間とし、$x = (x_1, \cdots x_N) \in R^N$ に対し、$\|x\| = \{\sum_{i=1}^N x_i^2\}^{\frac{1}{2}}$ とおく。

$S = R^N$, $\mathbb{B}(S) = \mathbb{B}^N$（$= N$ 次元 Borel field）とし、$f \in C_\infty(S)$ に対し、

$$H_t f(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{R^N} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}} f(y)\,dy \quad (dy : N \text{ 次元 Lebesgue 測度})$$

と定義する。$\{H_t\ t \geqq 0\}$ が (H.1)～(H.4) をみたすことは、直接検証してみればよい。$\|H_t\| = 1$ であるから conservative な Markov 過程が得られる。この場合 path space としては、オ一種不連続函数で右連続というばかりでなく、連続函数をとってよいことが知られている。又、$N \geqq 3$ とすると、

$$\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}} dt = \frac{\Gamma(\frac{N}{2}-1)}{2\pi^{\frac{N}{2}}} \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}$$

となるので積分可能な semi-group である．又この場合 右辺は $C/\|x-y\|^{N-2}$ となり丁度 Newton potential の kernel になっているから，以下の議論に，古典的な potential 論は含まれる．なお，このように W として連続函数をとることが出来るとき 拡散過程（diffusion）という．

例3　（安定過程）

例2と同様に $S=R^N$, $\mathbb{B}(S)=\mathbb{B}^N$, $0<\alpha<2$ とし，$f\in C_\infty(S)$ に対し，

$$H_t f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{R^N} f(y)\left\{\int_{R^N} e^{i\langle x-y,z\rangle} e^{-\frac{t}{2}\|z\|^\alpha} dz\right\} dy$$

と定義する．但し，$\langle x,y\rangle$ は x と y との inner product を示す．$\{H_t\}$ は $C_\infty(S)$ を $C_\infty(S)$ に写し，(H.1)〜(H.4) を満す semi-group である．H_t に対する Markov 過程 $\mathbb{M}$ を指数 α の N 次元安定過程という．Conservative で，path は才一種不連続，右連続であることが知られている．

$N\geqq 2$ とすると

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left\{\int_{R^N} e^{i\langle x-y,z\rangle} e^{-\frac{t}{2}\|z\|^\alpha} dz\right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{R^N} \frac{e^{i\langle x-y,z\rangle}}{\|z\|^\alpha} dz = \frac{C}{\|x-y\|^{N-\alpha}}$$

（但し $C = 2^{\frac{N}{2}}\pi^{\frac{N}{2}-1}\int_0^\infty \rho^{\frac{N}{2}-\alpha} J_{\frac{N-2}{2}}(\rho)d\rho$，$J_\nu(x)$ は才一種の Bessel 函数）

と表わされるから，$\{H_t\}$ は積分可能で，この場合は Riesz potential が対応する．

例4　（時空 Brown 運動）又は heat motion）

熱伝導方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u$ $\left(\Delta = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2\right)$ を $(N+1)$ 次元

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

空間の拡散過程に関する方程式と考えるため Doob が〔13〕において定義し研究している。名前は時間 parameter と Brown 運動を組にして考えるところから来ている。

$\mathbb{M} = \{R^N, \mathbb{W}, \mathbb{B}_\infty, P_x, x \in R^N\}$ をN次元 Brown 運動としたとき

$\widetilde{\mathbb{W}} = \{\widetilde{w} ; \widetilde{w}_t = (\tau - t, w_t), \tau \in R^1, w_t \in \mathbb{W}\}$

を path の空間とし、

$B = \{\widetilde{w} : (\sigma - t, w_t) \in B_1 \times B_2\} \; (B_1 \in \mathbb{B}(T), B_2 \in \mathbb{B}(R^N))$

の形の集合に

$$\widetilde{P}_{(\tau \cdot x)}(B) = \begin{cases} 0 & \sigma \neq \tau \\ P_x(B_2) & \sigma = \tau \end{cases}$$

で確率を入れると、

$\widetilde{\mathbb{M}} = \{R^{N+1} = R^1 \times R^N, \widetilde{\mathbb{W}}, \widetilde{\mathbb{B}}_t, \widetilde{P}_{(\tau \cdot x)} \; (\tau \cdot x) \in R^{N+1}\}$

は Markov process で、

$f(\cdot, \cdot) \in C_\infty(R^1 \times R^N)$ に対し、

$$\widetilde{H}_t f(\tau \cdot x) = \widetilde{E}_{(\tau \cdot x)} f(\widetilde{x}_t(\widetilde{w}))$$

$$= E_x(f(\tau - t, x_t(w)))$$

は $C_\infty(R^1 \times R^N)$ に属し、(H.1) ~ (H.4) をみたす。又、path は連続函数であるから拡散過程である。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

第二章　最大値の原理とHuntの表現定理

§1　核

才一章と同様 S は才二可算公理をみたす locally compact な Hausdorff 空間，$\mathbb{B}(S)$ はその位相的 Borel field とする。更に

$B(S)$；有界な $\mathbb{B}(S)$ 可測函数の全体

$B_0(S)$；compact support をもつ $\mathbb{B}(S)$ 可測函数の全体

$C(S)$；連続函数の全体

$C_\infty(S)$；無限大で 0 となる連続函数の全体

$C_0(S)$：compact support をもつ連続函数の全体

$\mathcal{M}(S)$；Radon 測度の全体

$\mathcal{M}_0(S)$；Compact support をもつ Radon 測度の全体

とし，$B^+(S), \cdots, \mathcal{M}^+(S)$ 等は，各々この非負な元の全体を示すものとする。この章で核というのは，

<u>定義 1.1</u>　$S \times \mathbb{B}(S)$ から $[0, \infty]$ への写像 $V(x, E)$ が核であるというのは，

1° $x \in S$ を固定すると $V(x, \cdot) \in \mathcal{M}^+(S)$

2° $E \in \mathbb{B}(S)$ で $\bar{E}$ を compact とすると，$V(\cdot, E)$ は，非負 $\mathbb{B}(S)$ 可測函数で，compact set の上では有界となるものである。

測度 $V(x, \cdot)$ をしばしば $V_x(\cdot)$ とも書く。

<u>定義 1.2</u>　$f(x)$ を $\mathbb{B}(S)$ 可測な函数とし，

$$Vf(x) = \int V(x, dy) f(y) = \int V_x(dy) f(y)$$

がすべての $x \in S$ に対し意味を持つとき，函数 f の potential，又は単に函数の potential という。

<u>定義 1.3</u>　$\mu \in \mathcal{M}(S)$ に対し，

$$\mu V(E) = \int \mu(dx) V(x, E)$$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

がすべての相対 compact な $E\in\mathbb{B}(S)$ に対し、絶対収束するとき、測度 μ の potential. 又は単に測度の potential という.

一般に $\int g(x)\nu(dx)$ を $\langle \nu, g\rangle$ と表わすことにすれば、$f\in \mathbb{B}_0(S)$, $\mu\in M_0(S)$ のとき,

$\langle \mu V, f\rangle = \langle \mu, Vf\rangle$

が成り立つ.

記述の便利上、性質により、核を次のように呼ぶことにしよう。

1° 正の核 …… $\forall x\in S$ に対し、$V_x(\cdot)\neq 0$

2° 有界な核 …… $V1(x)$ が有界函数

3° 連続な核 …… $\forall f\in C_0(S)$ に対し $Vf(x)\in C(S)$

4° Markov核 …… $V1(x)\equiv 1$

(sub-Markov 核 …… $V1(x)\leqq 1$)

<u>定義 1. 4</u> U, V を二つの核とし、

$(x, E)\in S\times \mathbb{B}(S)\longrightarrow \int U(x, dy)V(y, E)$

が核であるとき、これを U, V の convolution といい、

$UV(x, E)$ と表わす.

<u>例 1</u> $P(t, x, E)$ を遷移確率とすると、

$(x, E)\longrightarrow P(t, x, E)$ は核で $P(t, x, S)=1$, $P(t, x, S)\leqq 1$

に従って Markov 核, submarkov 核となる. 又、$P(t, x, E)$, $P(s, x, E)$ の convolution は $P(t+s, x, E)$ である.

<u>例 2</u> D を三次元 Euclid 空間の領域、$G(x, y)$ を D の Green 函数とする.

$V(x, E)=\int_E G(x, y)dy$ $E\subseteq D$ (dy: Lebesgue 測度) とおく.

と、V は、$S=D$ 上の核である. 又、$f\in C_0(D)$ に対し

$Vf(x)=\int_D G(x, y)f(y)dy\in C(D)$ であるから、連続な核である.

測度の核

$\mu V(E)=\int_D \mu(dx)\int_E G(x, y)dy=\int_E dy\int_D \mu(dx)G(x, y)$

は Lebesgue 測度につき絶対連続で density

$\int_D \mu(dx)G(x, y)$

をもつ.

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

§2 最大値の原理

定義2.1 (最大値の原理)*)

核Vが最大値の原理をみたすというのは、$f, g \in C_0^+(S)$ を任意にとつたとき $f(x)>0$ なるxに対し、$Vf(x) \leqq Vg(x)$ ならばすべての$x \in S$に対し、$Vf(x) \leqq Vg(x)$ となることである。

定義2.2 (掃散の原理)

核Vが掃散の原理をみたすというのは、$\mu \in M_0^+$ と相対compactなopen set Gを任意にとつたとき supportが$\bar{G}$に含まれる$\mu' \in M_0^+(S)$ が存在してG上では $\mu V = \mu' V$, S全体では$\mu V \geqq \mu' V$となることである。又μ' をμのG上への掃散という。

両原理に関して、次の定理が知られている。本論と直接関係はないがそれ自身興味があるので述べておく。([2], [10]参照)

定理2.1

Vを連続で正の核とすると、Vが最大値の原理をみたすことと、掃散の原理をみたすことは同値である。

証明 1° 掃散 ⇒ 最大値の証明.

$\varepsilon_x(dy)$をxにおかれた単位測度、ε'_x をそれの

$G=\{x ; f(x)>0\}$ 上への掃散とする。

$$\begin{aligned} Vf(x) &= \langle \varepsilon_x, Vf \rangle = \langle \varepsilon_x V, f \rangle = \langle \varepsilon'_x V, f \rangle = \langle \varepsilon'_x, Vf \rangle \\ &\leqq \langle \varepsilon'_x, Vg \rangle = \langle \varepsilon'_x V, g \rangle \leqq \langle \varepsilon_x V, g \rangle = \langle \varepsilon_x, Vg \rangle \\ &= Vg(x) \end{aligned}$$

2° 最大値 ⇒ 掃散の証明.

$\mathfrak{N}(A) = \{\mu V ; \mu \in M^+(A)\}$ (但しA compact)

とおくと、掃散の原理は、すべての相対compactなopen set Gに対し、

(1) $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}(\bar{G}) + M^+(G^c)$ (+は代数的な和)

が成立つことと同値であることを先づ注意しておく。

---

*) Choquet-Deny[10]では principe de domination と呼ばれている。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

次に $\mathfrak{M}(\bar{G}) + M^+(G^c)$ が漠収束[*] による位相の入った位相 Vecto
空間 M の中で convex closed set であることを示す．先づ $N(\bar{G}$
$=\{\mu;\mu\in M^+(S)$, support $\mu\subseteq\bar{G}$, $\mu(S)=1\}$ とおくと，$N(\bar{G}$
M の中で compact convex set で 0 を含まない。又，$\mu\in M_0$
μV は M の位相で連続．従つて．$N(\bar{G})V=\{\mu V;\mu\in N(\bar{G})\}$ は．
の中で compact convex set．$\mathfrak{M}(\bar{G})=\{aN(\bar{G})V;a\geqq 0\}$ て
るから．$\mathfrak{M}(\bar{G})$ は convex closed set である．

$M^+(G^c)$ は明らかに closed set で位相 vector 空間 $M(S)$ の中
非負で convex closed な二つの集合の和は．convex closed
あるから $\mathfrak{M}(\bar{G})+M^+(G^c)$ は convex closed である．所で V は
大値の原理をみたすから．$h\in C_0(S)$ で．$x\in G$ のとき $h(x)\geqq$
$x\in G$ のとき $Vh(x)\geqq 0$ なら，$Vh(x)\geqq 0$ である。何となれば、
$h(x)=h^+(x)-h^-(x)$ とすると．$\{x;\ h^-(x)>0\}\subseteq G$ で．$x\in$
のとき $Vh(x)=Vh^+(x)-Vh^-(x)\geqq 0$ であるから．最大値の原
ですべての $x\in S$ に対し．$Vh(x)\geqq 0$

故に　$\forall\mu\in M^+(G^c)$　につき　$\langle\mu,h\rangle\geqq 0$

且つ　$\forall\nu\in\mathfrak{M}(\bar{G})$　につき　$\langle\nu,h\rangle\geqq 0$

ならば、$\forall\lambda\in\mathfrak{M}$ につき　$\langle\lambda,h\rangle\geqq 0$　である。

即ち、$M^+(G^c)$ と $\mathfrak{M}(\bar{G})$ を含む閉半空間は、$\mathfrak{M}$ を含む。

convex closed set $M^+(G^c)+\mathfrak{M}(\bar{G})$ はかかる閉半空間
intersection であるから、$\mathfrak{M}\subseteq M^+(G^c)+\mathfrak{M}(\bar{G})$。

従つて (1) が証明出来たことになり、掃散の原理が成立つ。

（証）

定義 2．3（完全最大値の原理）

核 V が完全最大値の原理をみたすというのは．$f,g\in C_0^+(S)$，
数 $a\geqq 0$ を任意にとったとき．$f(x)>0$ なる x に対し．$Vf(x)$
$Vg(x)+a$ が成り立てば．すべての $x\in S$ に対し．$Vf(x)\leqq Vg(x)$

---

*) $M(S)$ に $\mu_n\to\mu$ を $\forall f\in C_0(S)$ に対し．$\langle\mu_n,f\rangle\to\langle\mu,f\rangle$ と定義
収束

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

となることである。

注意 1　$a=0$とすると 定義 1.1 の最大値の原理 $g(x)\equiv 0$ とすると、古典的な最大値の原理：$f(x)>0$ なるxに対し $\nabla f(x)\leqq a$ なら $\forall x\in S$ につき$\nabla f(x)\leqq a$；が出る。

注意 2　∇が定義 1.1 の最大値の原理をみたし．更に、$\varphi_n\in C_0^+(S)$で$\nabla\varphi_n\uparrow 1$となるものが存在すれば完全最大値原理をみたす。

Lemma 2.1 (Hunt-Herz)

核∇が i) $\nabla(C_0(S))\subseteq C_\infty(S)$, ii) $\nabla(C_0(S))$はC_∞の中でdense. iii) 完全最大値の原理 をみたせば $f\in C_0(S)$ である限り，$\nabla f(x)$が非負の最大値をとるxについて、$f(x)\geqq 0$ である。

証明　先づ $f\in C_0(S)$ で $\max_{x\in S}\nabla f(x)=M>0$ のとき，$f(x_0)\geqq 0$ で$\nabla f(x_0)=M$ となるx_0が存在することを示そう。函数fの support を$[f]$，$f^+=f\vee 0$，$f^-=(-f)\vee 0$，とかき，$a=0\vee\max_{x\in[f^+]}\nabla f(x)$ とおく。　$\nabla f(x)+\nabla f^-(x)=\nabla f^+(x)$ であるから．$[f^+]$の上で $a+\nabla f^-\geqq\nabla f^+$ 従って(iii)により，$\forall x\in S$ につき $a+\nabla f^-\geqq\nabla f^+$ 即ち $a\geqq\nabla f^+$. 即ち $a\geqq\nabla f(x)$ が成り立つ。

故に．$a\geqq\max_{x\in S}\nabla f(x)=M>0$ であるから．$a=\max_{x\in[f^+]}\nabla f(x)$ 即ち．$x_0\in[f^+]$ が存在して、$M=\nabla f(x_0)$となる．

次に定理を証明する．$\max_{x\in S}\nabla f(x)=M\geqq 0$，$\nabla f(x_0)=M$ と仮定する．Aをx_0を含む任意の compact set とすると (ii)により，ある $g(x)\in C_0$で$\nabla g(x_0)>0$ 且つ．$\nabla g(x_0)>\sup_{x\in A^c}\nabla g(x)$ となるものが存在する．$\varepsilon>0$を任意にとれば

$$\max\nabla(f+\varepsilon g)(x)\geqq\nabla f(x_0)+\varepsilon\nabla g(x_0)>0$$

又 $$\sup_{x\in A^c}\nabla(f+\varepsilon g)(x)\leqq\sup_{x\in A^c}\nabla f(x)+\varepsilon\sup_{x\in A^c}\nabla g(x)$$
$$<\nabla f(x_0)+\varepsilon\nabla g(x_0)$$

故に $y\in A\cap[(f+\varepsilon g)^+]$が存在して、

$$\max_{x\in S}\nabla(f+\varepsilon g)(x)=\nabla(f+\varepsilon g)(y)$$

となる．$y\in[(f+\varepsilon g)^+]$であるから$(f+\varepsilon g)(y)\geqq 0$　$\varepsilon>0$，Aは任意であったから、$f(x_0)\geqq 0$.　　(終)

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

<u>系</u> *Lemma* 2.1 と同じ条件の下で $f\in C_0$ で $\nabla f=0$ ならば $f=0$ である。

<u>証明</u> $\max\limits_{x\in S}\nabla f(x)=M=0$ で、すべてのxにつき $f(x)=M$ であるから、$f(x)\geqq 0$. $-f(x)$を考えれば $f(x)\leqq 0$. 故に$f(x)=0$ である。

§3. Huntの表現定理 I

Hunt は完全最大値原理をみたす核が与えられると、ある附帯条件のもとで唯一つのMarkov過程が対応し、核はその遷移確率の時間tを0から∞迄積分して得られることを示した。

これはpotential論そのものにも、又、Markov過程論にも、重要な結果と考えられる。Potential論に関していえば、今迄時間に関しては、0から∞迄積分して了つた結果を見ていたのに対し、任意の時間（randomな時間を含めて）迄という途中のことが使えるため、理論の意味が分り易くなつたり、精密になつたりする。markov過程に関しては 与えられた空間と核の比較的一般的な性質から、Markov過程を得るのに役立つ。

<u>定理3.1</u> 核∇が i) $\nabla(C_0(S))\subseteqq C_\infty(S)$, ii) $\nabla(C_0(S))$ は $C_\infty(S)$ でdense, iii)完全最大値原理をみたすならば、$C_\infty(S)$上のsemi-group $\{H_t\}$ で、オ一章 §5の(H.1)~(H.4)をみたし、更に

$\forall f\in C_0(S)$に対し $\nabla f(x)=\int_0^\infty H_t f(x)\,dt$

となるものが存在する。しかもこのような$\{H_t\}$は唯一通りにきまる。

証明は、長いのでこの§3では唯一性を示し、次の§4で、∇が有界の場合、最後の§5で、一般の場合の$\{H_t\}$の存在を示す。
$\{H_t\}$の存在を仮定すると次のLemmaが出る。

<u>Lemma 3.1</u> $f, g\in C_\infty^+(S)$ で $\nabla f(x)+f(x)=\nabla g(x)+g(x)$ ならば $\nabla f(x)<\infty$, $\nabla g(x)<\infty$ なるxに対し、$f(x)=g(x)$ である。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

証明　必要があれば $h(x)=f(x)\wedge g(x)$ とおき，$f(x)-h(x)$，$g(x)-h(x)$ を改めて f，g と考えて証明出来ればよいから，$f(x)\wedge g(x)=0$ と仮定してよい。

a) f，$g\in C_0^+(S)$ の場合

$f(x)>0$ とすると，$g(x)=0$ であるから

$\nabla f(x)<\nabla f(x)+f(x)=\nabla g(x)$

故に(iii)により，$\forall x\in S$ に対し $\nabla f(x)\leqq\nabla g(x)$。

同様に $g(x)>0$ として $\forall x\in S$ に対し，$\nabla g(x)\leqq\nabla f(x)$ であるから $\nabla f=\nabla g$。しかも ∇f，$\nabla g<\infty$ であるから，$f(x)=g(x)$

b) $f\in C_\infty^+(S)$，$g\in C_\infty^+(S)$ の場合

a)で分るように $\nabla f(x)\leqq\nabla g(x)$ をいえば充分である。最初に $f\in C_0^+(S)$，$g\in C_\infty^+(S)$ と仮定する。$g_n\in C_0^+(S)$，$(n=1,2\cdots\cdots)$ をとり，$g_n(x)\uparrow g(x)$ と出来る。又，$h(x)\in C_0^+(S)$ で $[f]$ 上で $\nabla h(x)\geqq 1$ となるものが存在する。何となれば，$k(x)\in C_0^+(S)$，$[f]$ 上で $k(x)>1$ なる $k(x)$ をとれば，$(H_{1,4})$ より，ある $t_0>0$ が存在し，$[f]$ 上で $\forall t<t_0$ につき $H_t k(x)>1$

$$\nabla k(x)\geqq\int_0^{t_0}H_t k(x)\,dt>t_0$$

であるから，$h(x)=k(x)/t_0$ とおけばよい。

$\forall\varepsilon>0$ に対し，ある n_0 が存在し，$\forall n\geqq n_0$ に対し，

$x\in[f]$ なら，$\nabla f(x)\leqq\nabla f(x)+f(x)\leqq\varepsilon\nabla h(x)+\nabla g_n(x)$ と出来る。

故に $\forall x\in S$ に対し，$\nabla f(x)\leqq\varepsilon\nabla h(x)+\nabla g_n(x)$　$n\to\infty$，$\varepsilon\downarrow 0$ とすると，$\nabla f(x)\leqq\nabla g(x)$。

次に $f\in C_\infty^+(S)$ とする。$f_n(x)\in C_0^+(S)$，$f_n(x)\uparrow f(x)$ なる f_n をとれば，$\nabla f_n(x)\leqq\nabla g(x)$。故に $n\to\infty$ として $\nabla f(x)\leqq\nabla g(x)$　（証終）

Lemma 3. 2　$\alpha\geqq 0$，$f\in C_0(S)$ に対し，

$$\nabla^\alpha f(x)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}H_t f(x)\,dt$$

と定義すると $\nabla f=(\alpha\nabla+I)(\nabla^\alpha f)$ が成立つ。

証明　Fubini の定理により

$$\alpha\nabla^\alpha(\nabla f)=\alpha\nabla(\nabla^\alpha f)=\nabla f-\nabla^\alpha f$$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

が出るから．

$$Vf=(\alpha V+I)(V^{\alpha}f)$$

唯一性の証明

2つの semi-group $\{H_t\}$, $\{K_t\}$ があって，$\forall f\in C_0(S)$に対し，

$$Vf(x)=\int_0^\infty H_t f(x)dt=\int_0^\infty K_t f(x)dt$$

とする。

$$V^{\alpha}f=\int_0^\infty e^{-\alpha t}H_t f(x)dt,\quad W^{\alpha}f=\int_0^\infty e^{-\alpha t}K_t f(x)dt$$

とおくと，Lemma 2により $\forall f\in C_0^+(S)$ に対し，

$$Vf(x)=(\alpha V+I)(V^{\alpha}f)=(\alpha V+I)(W^{\alpha}f)$$

又，$V^{\alpha}f$, $W^{\alpha}f\in C_\infty^+(S)$ で $\alpha V(V^{\alpha}f)=Vf-V^{\alpha}f\in C_\infty^+(S)$ $\alpha V(W^{\alpha}f)=Vf-W^{\alpha}f\in C_\infty^+(S)$であるから Lemma 1 より$\alpha>0$ ならば $V^{\alpha}f=W^{\alpha}f$

故に Laplace 逆変換の uniqueness から，$H_tf(x)$ と $K_tf(x)$ は $t\geqq 0$で殆んど至る所等しい．しかるに，$f\in C_0^+(S)$のとき，$t\to H_tf(x)$, $t\to K_tf(x)$は連続であるから $K_tf(x)=H_tf(x)$, $\forall t\geqq 0$.

（終）

§4. Huntの表現定理（II）

この§ではVが有界のとき，$\{H_t\}$の存在を示す．Vが有界であり，$C_0(S)$は，Banach 空間 $C_\infty(S)$の中で稠密であるから，Vを拡張して，$C_\infty(S)$を$C_\infty(S)$に写す作用素にすることが出来るが，それを再びVと書くことにする．

a)　f, $g\in C_\infty^+(S)$, $a\geqq 0$ とし，

$f(x)>0$ なるxに対し，$Vf(x)\leqq Vg(x)+a$であれば，$\forall x\in S$に対し，$Vf(x)\leqq Vg(x)+a$ である．

何となれば$f_n\in C_0^+(S)$, $g_n\in C_0^+(S)$ をとり，$f_n(x)\uparrow f(x)$, $g_n(x)\uparrow g(x)$ とすると Dini の定理で $\forall\varepsilon>0$ に対し，Nが存在し，$\forall m\geqq N$に対し，

$Vg-\varepsilon<Vg_m$ と出来る．従って $\forall m\geqq N$ $\forall n$に対し，

$f_n(x)>0$ ならば $Vf_n(x)\leqq Vf(x)\leqq a+\varepsilon+Vg_m(x)$．　従って，(iii) に

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

より、$\forall x \in S$ に対し、$\nabla f_n(x) \leqq a + \varepsilon + \nabla g_m(x)$. 故に $m \to \infty$ として $\forall x \in S$ に対し、$\nabla f_n(x) \leqq a + \varepsilon + \nabla g(x)$. $f(x) > 0$ なら、ある n につき $f_n(x) > 0$ であるから $n \to \infty$ として、$\nabla f(x) \leqq a + \varepsilon + \nabla g(x)$. ε は任意であるから；$\nabla f(x) \leqq a + \nabla g(x)$. （証終）

このことにより Lemma 2.1 系と同様にして $\nabla f = 0$ なら $f = 0$ が出るから $\mathcal{D} = \nabla(C_\infty(S))$ とおき $f \in \mathcal{D}$ に対し、$\mathcal{G} f = -\nabla^{-1} f$ と定義する。$\mathcal{G}$ は明らかに閉作用素で 定義域 $\mathcal{D}$ は $C_\infty(S)$ の中で稠密である。

b) $0 \leqq \alpha < 1/\|\nabla\|$ なる α に対し、

$$\nabla^\alpha = \sum_{k \geqq 0} (-\alpha)^k \nabla^{k+1}$$

と定義すると、

1° $\forall f \in \mathcal{D}$ に対し $\nabla^\alpha(\alpha - \mathcal{G}) f = f$

2° $\forall f \in C_\infty(S)$ に対し、$(\alpha - \mathcal{G}) \nabla^\alpha f = f$

3° $\forall f \in C_\infty^+(S)$ に対し、$\nabla^\alpha f \geqq 0$

4° $\|\nabla\| \leqq \frac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$

が成立つ。

証明 1° $\nabla^{-1} f = g \in C_\infty(S)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha(\alpha - \mathcal{G}) f &= \alpha \nabla^\alpha \nabla g + \nabla^\alpha g \\ &= \alpha \sum_{k \geqq 0} (-\alpha)^k \nabla^{k+2} g + \sum_{k \geqq 0} (-\alpha)^k \nabla^{k+1} g \\ &= \nabla g = f \end{aligned}$$

2° 先づ $\alpha - \mathcal{G}$ が閉作用素であることを注意しておく。

$$\nabla_n^\alpha f = \sum_{k=0}^{n-1} (-\alpha)^k \nabla^{k+1} f \longrightarrow \nabla^\alpha f \qquad (n \to \infty)$$

$$(\alpha - \mathcal{G}) \nabla_n^\alpha f = f - (-\alpha\nabla)^n f \longrightarrow f \qquad (n \to \infty)$$

であるから $(\alpha - \mathcal{G}) \nabla^\alpha f = f$.

3° $f \in C_\infty^+(S)$ に対し、$g = \nabla^\alpha f$ とおく。$g \in \mathcal{D}$ であるから ある $h \in C_\infty(S)$ が存在して $g = \nabla h$ とかける。所で 3° をいうのには、$(\alpha - \mathcal{G}) g \geqq 0$ なら、$g \geqq 0$ であることをいえばよい。今 $g(x_0) < 0$ となる $x_0 \in S$ が存在したとすると $\min_{x \in S} \nabla h(x) = m < 0$.
$g(x_1) = \nabla h(x_1) = m$ とすると、Lemma により、$h(x_1) \leqq 0$.

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

従つて、$(\alpha-\mathcal{O}_f)\,g(x_1)=\alpha g(x_1)+h(x_1)\leqq m<0$ となり、$(\alpha-\mathcal{O}_f)\,g\geqq 0$ と矛盾する。

4° $f(x)\in C_\infty^+(S)$ に対し、$\nabla^\alpha f(x)\leqq \frac{1}{\alpha}\max_{x\in S} f(x)$ $(\alpha>0)$ をいえばよい。$g(x)=\nabla^\alpha f(x)$ とおくと、3° により、$g(x)\geqq 0$. $g(x_0)=\max_{x\in S} g(x)$ とおくと、Lemma により、$f(x_0)\geqq 0$、従つて、$(\alpha-\mathcal{O}_f)\,g(x_0)=\alpha g(x_0)+f(x_0)\geqq \alpha g(x_0)$. 故に $\max_{x\in S} f(x)\geqq \alpha\nabla^\alpha f(x)$。

次に ∇^α の定義を帰納的に $0\leqq\alpha<2^n/\|\nabla\|$ 迄拡張する。形式的には

$$\nabla^\alpha=\frac{1}{\alpha-\mathcal{O}_f}=\frac{1}{(\alpha-\beta)+(\beta-\mathcal{O}_f)}=\frac{(\beta-\mathcal{O}_f)^{-1}}{(\alpha-\beta)(\beta-\mathcal{O}_f)^{-1}+1}$$

$$=\sum_{k\geqq 0}^{\infty}(\beta-\alpha)^k(\nabla^\beta)^{k+1}$$

となつていることを考えて、$0\leqq\beta<2^{n-1}/\|\nabla\|$ が既に定義出来たと仮定して、

$0\leqq\alpha<2^n/\|\nabla\|$ に対し、

$$\nabla^\alpha=\sum_{k\geqq 0}(\beta-\alpha)^k(\nabla^\beta)^{k+1}$$

と定義する。

<u>c)</u> $\nabla^\alpha(\alpha\geqq 0)$ は unique に定まり、再び $1^\circ\sim 4^\circ$ を満足することが証明出来る。実際

定義から $\nabla^\alpha(\alpha\geqq 0)$ は $\nabla^\alpha(0\leqq\alpha<\frac{1}{\|\nabla\|})$ の解析接続であるから、unique にきまつて了うことが分る。又 $1^\circ\sim 4^\circ$ が成立つには同じことであるから、$0\leqq\alpha<2/\|\nabla\|$ に対し、$1^\circ\sim 2^\circ$ が成立つことをいえばよいであろう。1°, 2° から 3° 4° を出すのは b) と同じ推論である。

1° $f\in\mathcal{D}$ $\beta<1/\|\nabla\|$ として、

$$\nabla^\alpha(\alpha-\mathcal{O}_f)f=-\sum_{k\geqq 0}^{\infty}(\beta-\alpha)^{k+1}(\nabla^\beta)^{k+1}f+\sum_{k\geqq 0}^{\infty}(\beta-\alpha)^k(\nabla^\beta)^k f$$

$$=f$$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

2° $f \in C_\infty(S)$ とすると、

$$(\alpha - \mathcal{G})\, V^\alpha f = -\sum_{k\geq 0}^{\infty} (\beta-\alpha)^{k+1} (V^\beta)^{k+1} f + \sum_{k\geq 0}^{\infty} (\beta-\alpha)^{k} (V^\beta)^{k} f = f.$$

従って Yoshida - Hille の定理（吉田；位相解析 I. P.260）により $C_\infty(S)$ 上に (H.1)〜(H.4) を充たす semi - group $\{H_t ; t \geq 0\}$ が存在し、$f \in C_\infty(S)$ に対し、

$$V^\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t f(x)\, dt \qquad \alpha \geq 0$$

とかける。 $\alpha = 0$ のときは

$$V f(x) = V^0 f(x) = \int_0^\infty H_t f(x)\, dt$$

であるから、これが求めるものである。

なお H_t が (H1)〜(H4) をみたすから、才一章§5により、Markov 過程 $\mathbb{M} = \{S', W, \mathbb{B}_t, P_x, x \in S'\}$ が存在して、$f \in C_\infty(S)$ に対し、

$$H_t f(x) = E_x(f(x_t) ; t < \sigma_\infty) = \int_S f(y) P(t, x, dy)$$

$$V^\alpha f(x) = E_x\left(\int_0^{\sigma_\infty} f(x_t)\, dt\right) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int_S P(t, x, dy) f(y)\, dt$$

とかけることを注意しておく。当然 $\{H_t \; t \geq 0\}$ は積分可能である。

§5. Hunt の表現定理（III）

この§では、V が必ずしも有界でない場合につき $\{H_t\}$ の存在を示す。

最初に time change について注意しておく。

$\mathbb{M} = \{S', W, \mathbb{B}_t, P_x, x \in S'\}$ を才一章§5で構成した Markov 過程とし、$a(x)$ を S' 上で連続で > 0 な函数とする。$\underline{s}(t, w) = \int_0^t a(x_s(w))\, ds$ と定義すると、$\underline{s}(0, w) = 0$、$\underline{s}(\infty \cdot w) = \infty$。且つ、$w$ を固定すると、t の函数として、連続で狭い意味で単調増

加函数であるから、逆函数 $\underline{\underline{s}}^{-1}(s, w)$ が存在する。明らかに $\underline{\underline{s}}^{-1}(s, w)$ も狭義単調増加連続函数で $\underline{\underline{s}}^{-1}(0, w) = 0$. $\underline{\underline{s}}^{-1}(\infty, w) = \infty$ であるが、

$$\{w; \underline{\underline{s}}^{-1}(s, w) < t\} = \{w; s < \int_0^t a(x_u(w))\,du\} \in \mathbb{B}_t$$

であるから、$\mathbb{M}$ に対し、Markov time である。

今 $w \in \mathbb{W}$ に対し、w^* を $w_t^* = w_{\underline{\underline{s}}^{-1}(t, w)}$ と定義し、w_t^* を $x_t^*(w^*)$ とも書くことにする。又、$\mathbb{B}_t^*$ を $x_t^*(w^*)$ に関し、t 迄できまる cylinder set.

$\{w^*; x_{t_1}^*(w^*) \in E_1, \cdots, x_{t_n}^*(w^*) \in E_n\}$ $(t_1 < \cdots < t_n \leqq t,$ $E_1, \cdots E_n \in \mathbb{B}(S'))$ を含む最初の Borel field. P_x^* を

$$P_x^*(x_t^*(w^*) \in E) = P_x(x_{\underline{\underline{s}}^{-1}(t, w)} \in E)$$

により定義する。（この定義を cylinder set に拡張し、$\mathbb{B}_\infty^*$ に拡張するのは、才一章同様に出来る）

<u>Lemma 5. 1</u> (time change)

$\mathbb{M}^* = \{S', \mathbb{W}^*, \mathbb{B}_t^*, P_x^*, x \in S'\}$ は Markov 過程である。

<u>証明</u> $\sigma_\infty^*(w^*) = \int_0^{\sigma_\infty(w)} a(x_s(w))\,ds$ とおくと、w^* は、$w_t^* = \partial$. $t \geqq \sigma_\infty^*(w^*)$ で $(\mathbb{W}.1) \sim (\mathbb{W}.4)$ をみたすことは明らかである。又、P_x^* が $(\mathbb{W}^*, \mathbb{B}_\infty^*)$ 上の確率測度で $B \in \mathbb{B}_\infty^*$ に対し、$x \to P_x^*(B)$ は $\mathbb{B}(S')$ 可測のことも分るから、Markov 性を示せばよい。先づ $\underline{\underline{s}}^{-1}(s + t, w) = \underline{\underline{s}}^{-1}(s, w) + \underline{\underline{s}}^{-1}(t, w^+_{\underline{\underline{s}}^{-1}(s, w)})$, $\mathbb{B}_s^* \subseteq \mathcal{F}_{\underline{\underline{s}}^{-1}(s)}$ であることに注意しておく。

$E \in \mathbb{B}(S')$ とすると、

$$\begin{aligned}
&P_x^*(x_{s+t}^*(w^*) \in E \mid \mathbb{B}_s^*) \\
&= E_x\left(P_x(x_{\underline{\underline{s}}^{-1}(s+t, w)}(w) \in E \mid \mathcal{F}_{\underline{\underline{s}}^{-1}(s, w)}) \mid \mathbb{B}_s^*\right) \\
&= E_x\left(P_x(x_{\underline{\underline{s}}^{-1}(s, w) + \underline{\underline{s}}^{-1}(t, w^+_{\underline{\underline{s}}^{-1}(s, w)})}(w) \in E \mid \mathcal{F}_{\underline{\underline{s}}^{-1}(s, w)}) \mid \mathbb{B}_s^*\right) \\
&= E_x\left(P_x(x_{\underline{\underline{s}}^{-1}(t, w^+_{\underline{\underline{s}}^{-1}(s, w)})}(w^+_{\underline{\underline{s}}^{-1}(s, w)}) \in E \mid \mathcal{F}_{\underline{\underline{s}}^{-1}(s, w)}) \mid \mathbb{B}_s^*\right) \\
&= E_x\left(P_{x_{\underline{\underline{s}}^{-1}(s, w)}}(x_{\underline{\underline{s}}^{-1}(t, w)}(w) \in E) \mid \mathbb{B}_s^*\right) \\
&= P_{x_s^*}(x_t^* \in E) \qquad (a.e.\ P_x^*)
\end{aligned}$$

（終）

今、VをHuntの表現定理の条件をみたす有界な核とすると§4によりsemi-group$\{H_t\}$が存在し、従って、第一章§5により、Markov過程$\mathbb{M}$が定まる。上のtime changeに使った$a(x)$をとり、$f \in C_0(S)$に対し、$Uf(x) = V(af)(x)$と定義すると、
$\| Uf \| \leqq \| a \| \, \| V \| \, \| f \|$であるから$U$も、Huntの条件をみたす有界な核であり、semi-group$\{H_t'\}$、従ってMarkov過程$\mathbb{M}'$が対応する。

<u>Lemma 5.2</u>　$\mathbb{M}$からtime changeで出来るprocess $\mathbb{M}^*$とUから出来るprocess $\mathbb{M}'$は一致する。

<u>証明</u>　$f(x) \in C_0(S)$とすると、

$$V^* f(x) = E_x^*\left(\int_0^{\sigma_\infty^*} f(x_t^*(w_t^*))dt\right)$$
$$= E_x\left(\int_0^{\sigma_\infty^*} f(x_{\xi^{-1}(t,w)})\, dt\right)$$
$$= E_x\left(\int_0^{\sigma_\infty} f(x_t)a(x_t)dt\right)$$
$$= V(af)(x) = Uf(x)$$

従って、V^*も有界な核で、各々のGreen measureを$(V^\alpha)^*$、$(V^\alpha)'$とすると、$0 < \alpha < \dfrac{1}{\|V^*\|} = \dfrac{1}{\|U\|}$において

$$(V^*)^\alpha f = \sum_{k \geqq 0} (-\alpha)^k V^{*k+1} f = \sum_{k \geqq 1} (-\alpha)^k U^{k+1} f$$
$$= (V^\alpha)' f$$

である。従って、すべての$\alpha \geqq 0$に対し、$(V^\alpha)^* f = (V^\alpha)' f$が成立するから、逆Laplace変換のuniquenessで、殆んどすべての$t \geqq 0$に対し、$H_t^* f(x) = H_t' f(x)$。又$H_t^* f(x)$、$H_t' f(x)$は共にtにつき連続、故に、$\forall t \geqq 0$に対し$H_t^* f(x) = H_t' f(x)$。従って、

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

遷移確率が一致するから、$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}'$ である。 （終）

本論に入つて、∇を表現定理の条件をみたす必ずしも有界でない核として、$\{H_t\}$ の存在を示す。先づ $a_n(x) \in C_0^+(S)$ で(i) $a_n(x)\uparrow$, (ii) $\sum_{n\geqq 1}\|\nabla(a_n - a_{n-1})\| = \alpha < \infty$, (iii) $a(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) \in C_\infty(S)$ 且つ、$1 \geqq a(x) > 0$ $x\in S$ なる函数列 $\{a_n(x)\}$ をとれることを示す。実際 $\{K_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を単調増加な compact set の列で $\bigcup_{n\geqq 1} K_n = S$ なるものとし、$\varphi_n(x)\in C_0^+(S)$を、$0\leqq\varphi_n\leqq 1$ で

$\varphi_n(x) = 1$ $x\in K_n$, $=0$ $x\in K_{n+1}^c$ とする。

$$\alpha_n = \max_{x\in S}\nabla\varphi_n, \quad \beta_n = \alpha_n \vee 1.$$

$$a_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_n}{\beta_n 2^n}$$

とおけばよい。$f(x)\in C_\infty(S)$, $m>n$ とすると、

$$\begin{aligned} &\|\nabla(a_m f) - \nabla(a_n f)\| \\ &\leqq \sum_{k=n+1}^{m} \|\nabla(a_k - a_{k-1})f\| \\ &\leqq \sum_{k=n+1}^{m} \|\nabla(a_k - a_{k-1})\|\,\|f\| \end{aligned}$$

であるから、$\{\nabla(a_n f)(x)\}$ は $C_\infty(S)$の中で Cauchy 列をなすからある $\hat{f}\in C_\infty(S)$が存在して、

$$\|\nabla(a_n f) - \hat{f}\| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

となる。 $\hat{\nabla} f = \hat{f}$ と定義すると、

$$\begin{aligned} \|\hat{\nabla} f\| &\leqq \|\hat{\nabla} f - \nabla(a_n f)\| + \|\nabla(a_n f)\| \\ &\leqq \|\hat{\nabla} f - \nabla(a_n f)\| + \sum_{k=1}^{n}\|\nabla(a_k f) - \nabla(a_{k-1} f)\| \end{aligned}$$

（ $a_0 \equiv 0$ としておく ）

$$\leqq \|\hat{\nabla} f - \nabla(a_n f)\| + \alpha\|f\|$$

nは任意であるから、$\|\hat{\nabla} f\| \leqq \alpha\|f\|$ となる有界な線型作用素である。又 $\hat{\nabla}$の $C_0(S)$ への restriction は、表現定理の条件(ii)(iii)をみたすことは $f\in C_0(S)$のとき$\nabla(af) = \hat{\nabla} f$ から分る、従つて§4から $\hat{\nabla}$ に対し、semi-group $\{\hat{H}_t\}$, 更に markov 過程

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$\hat{\mathbb{M}}=\{S', \hat{W}, \hat{\mathbb{B}}_t, \hat{P}_x\ x\in S'\}$ が対応する．$a(\partial)=1$ と定義して，$a(x)$ を S' 上の函数に拡張し，$b(x)=\frac{1}{a(x)}$ とおくと，$Vf=\hat{V}(bf)$ となっているから，$\hat{\mathbb{M}}$ を $b(x)$ により time change すれば 求める process が得られる訳であるが，$b(x)$ が S' 上で連続ではないので，Lemma 5.2 は、そのままでは使えない．しかし $b(x)$を連続函数で近似して証明することが出来る．

$\{G_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ を S の open set の列で，$G_0=\phi$，$\bar{G}_n$ compact $\subseteq G_{n+1}$，$\bigcup_{n\geq 0} G_n=S$ となっているものとし、$b_0(x)\equiv 1$，$b_n(x)$ は S' 上で連続で $b_n(x)=\frac{1}{a(x)}$ $x\in G_n$ $b_n(x)\equiv 1$ $x\notin G_{n+1}$，$(n\geqq 1)$ とする。

$U^{(n)}f=\hat{V}(b_nf)$ $n\geqq 0$ とおくと、$U^{(0)}f=\hat{V}f$，又 $f\in C_0^+(S)$，$[f]\subseteq G_n$ であれば $U^{(n)}f=Vf$ である．

$U^{(n)}$ に対しては，§4 の結果から，semi-group $\{H_t^{(n)}\}$，それを semi group とする Markov process $\mathbb{M}^{(n)}$ が対応するが Lemma 5.2 により，$\mathbb{M}^{(n)}$ は $\mathbb{M}$ を $b_n(x)$ により time change したものに等しい。$\xi_n(t,\hat{w})=\int_0^t b_n(x_s(\hat{w}))ds$ $x_t^{(n)}(\hat{w})=x_{\xi_n^{-1}(t,\hat{w})}(\hat{w})$ とおき，$\mathbb{M}^{(n)}=\{S', \hat{W}, \hat{\mathbb{B}}_t^{(n)}, \hat{P}_x, x\in S'\}$ とおく。(path で区別すれば $\hat{P}_x^{(n)}$ と $\hat{P}_x$ を同じ測度として混乱は起きないであろう)

次に $f\in V(C_0(S))$ とすると、$H_t^{(n)}f(x)$ が $n\to\infty$ のとき (t,x) に関し一様収束することを示す．

$f=Vg$ $g\in C_0^+(S)$，$\varepsilon>0$ を任意にとり，$A=\{x; f(x)\geqq\varepsilon\}$ とおくと，A は compact である．nを充分大とすると，$[g]\subseteq G_n$ であるから，

$$H_t^{(n)}f=H_t^{(n)}Vg=H_t^{(n)}U^{(n)}g\leq U^{(n)}g\leqq f$$

故に $H_t^{(n)}f(x)<\varepsilon$ $x\in A^c$ (1)

が成立つ。

$h(x)\in C_0^+(S)$，$\hat{V}h(x)\geqq 1$，$x\in A$ をとると、$G_n\supseteqq[h]$ であれば $Vh(x)=U^{(n)}h(x)\geqq U^0h(x)=\hat{V}h(x)$ より，$x\in A$ ならば $Vh(x)$，$U^{(n)}h(x)\geqq 1$ である．

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$B=\{x\,;\,Vh(x)\geqq\varepsilon\}$ とおくと．Bは compact で $\geqq A$．

$x\notin B$ とすると

$$\hat{P}_x(\sigma_A^{(n)}(\hat{w})<\infty)$$
$$=\hat{E}_x(\chi_A(x^{(n)}_{\sigma_A^{(n)}})\,;\,\sigma_A^{(n)}<\infty)$$
$$\leqq\hat{E}_x(U^{(n)}h(x^{(n)}_{\sigma_A^{(n)}})\,;\,\sigma_A^{(n)}<\infty)$$
$$=\hat{E}_x(\int_{\sigma_A^{(n)}}^{\infty}h(x_t^{(n)}(\hat{w}))dt\,;\,\sigma_A^{(n)}<\infty)$$
$$\leqq U^{(n)}h(x)\leqq Vh(x)<\varepsilon$$

であるから．

$$\hat{P}_x(\sigma_A^{(n)}(\hat{w})<\infty)<\varepsilon \qquad x\notin B \tag{2}$$

今 $m>n$ とし．n を充分大とすると．$G_n\geqq B$ となるが $x\in A$ なる限り．$\hat{P}_x(\sigma^{(n)}_{G_n^c}=\sigma^{(m)}_{G_m^c})=1$ であり．$\hat{P}_x(x_t^{(n)}(\hat{w})=x_t^{(m)}(\hat{w})\,;\,t<\sigma^{(n)}_{G_n^c})$ $=\hat{P}_x(t<\sigma^{(n)}_{G_n^c})$ である．（ time change の $b_n(x)$ と $b_m(x)$ が G_n 上で一致するから）

従つて．

$$H_t^{(n)}f(x)-H_t^{(m)}f(x)$$
$$=\hat{E}_x(f(x_t^{(n)})\,;\,\sigma^{(n)}_{G_n^c}\leqq t)-\hat{E}_x(f(x_t^{(m)})\,;\,\sigma^{(m)}_{G_m^c}\leqq t)$$
$$=\hat{E}_x(E_{x_{\sigma^{(n)}_{G_n^c}}}(f(x^{(n)}_{t-\sigma^{(n)}_{G_n^c}})-f(x^{(m)}_{t-\sigma^{(m)}_{G_n^c}})\,;\,\sigma^{(n)}_{G_n^c}\leqq t)$$

ここで (1)．(2) を考慮すると．

$$|H_t^{(n)}f(x)-H_t^{(m)}f(x)|\leqq 2\varepsilon\|f\|+2\varepsilon$$

従つて．$n\to\infty$ のとき (t,x) に関し．一様に収束する．

$V(C_0(S))$ は $C_\infty(S)$ で dense であるから．$\forall f\in C_\infty(S)$ に対して．$H_t^{(n)}f(x)$ は (t,x) に関し一様収束する．

$$H_tf(x)=\lim_{n\to\infty}H_t^{(n)}f(x)$$

とおくと．$H_tf(x)$ は求める semi-group である．

実際 $\{H_t\}$ は (H.1)〜(H.4) をみたすことは明らか．又．$f\in C_0^+(S)$ とすると．n が大であれば

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$$\nabla f(x)=U^{(n)}f(x)=\int_0 H_t\ f(x)dt$$

$H_t^{(n)}f(x)$は(t,x)に関し、一様収束で、$\|H_t^{(n)}f\|\leqq\|f\|$であるからFatouの定理により、

$$\nabla f(x)=\int_0^\infty H_t f(x)dt. \qquad \text{(終)}$$

この証明法はHunt[17]に忠実なものであるが、*time change*を使わないで作用素論的証明法が[2]では行われている。この定理は*potential*から*Markov*過程をきめるのに便利だと言いたが実際$\nabla(C_0)$が$C_\infty(S)$の中で*dense*という条件等はチェックし難いもので、それをおとした場合、Sの*topology*を入れかえて、*semi-group*のようなものが対応するか。又は、*sub-process*（オ五章§1参照）の*potential*になっているか、等の問題は興味がある。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

第三章 Excessive function

才二章で完全最大値原理をみたす核が与えられると、ある付帯条件のもとで、積分可能な semi-group（従つて Markov 過程）が対応することが分つたが、この章以後は、$C_\infty(S)$ を $C_\infty(S)$ に写す semi-group $\{H_t ; t \geqq 0\}$（尚論才一章§5の仮定をみたすとする） が与えられたとして、それから出来る核につき調べることにする．必ずしも積分可能は仮定しないので、$f \in C_0^+(S)$ に対し、$\int_0^\infty H_t f(x)\, dt$ は収束するとはいえない．そこで $\alpha > 0$ として、$\int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t f(x) dt$ を考えるか．$\{H_t\}$ が積分可能（才一章§5参照）のときは、出て来る定理は $\alpha = 0$ としても成立つ．

§1. 函数の potential

S, $\mathbb{B}(S)$, S', $\mathbb{B}(S')$ はすべてこれ迄と同じものとする．μ を、$(S, \mathbb{B}(S))$ 上の正の Radon 測度即ち、$\mu \in M^+(S)$ とし、$\mathbb{B}(S)$ の μ による完備化を $\overline{\mathbb{B}(S)}^\mu$、すべての μ についての $\overline{\mathbb{B}(S)}^\mu$ の共通部分を $\mathcal{G}(S)$ と表わすことにする．今 $S \times \mathbb{B}(S)$ 上の核 $V(x, B)$ があったとすれば、$S \times \mathbb{B}(S)$ x を固定すると、$V_x(\cdot)$ は $(S, \mathcal{G}(S))$ 上の測度と考えることが出来る．又、$\mu \in M^+(S)$ のとき、$\mu V \in M^+(S)$ であれば、任意の $B \in \mathcal{G}(S)$ に対し、B_1, $B_2 \in \mathbb{B}(S)$ で、$B_1 \subseteq B \subseteq B_2$, $\mu V(B_1) = \mu V(B_2)$ なるものがとれるから、$x \to V(x, B)$ は $\mathcal{G}(S)$ 可測である。従つて以下に出て来る核は 函数としては $\mathcal{G}(S)$ 可測、測度としては、$(S, \mathcal{G}(S))$ 上の測度と考えてよい．

$\{H_t, t \geqq 0\}$ を才一章§5の仮定をみたす $C_\infty(S)$ 上の semi-group、$\mathbb{M} = \{S', W, \mathbb{B}_t, P_x, x \in S'\}$ を H_t からきまる Markov 過程とする．記号を固定するため $\mathbb{M}$ に付随する核と名称

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

を列挙しておく。

$f\in C_0^+(S)$ に対して定義出来ていれば充分であるから、$f\in C_0^+(S)$ としておこう。

1° $H_t f(x) = E_x(f(x_t) ; t<\sigma_\infty) = \int_S P(t,x,dy) f(y)$ を遷移確率。

2° $\alpha \geqq 0$ として $H_t^\alpha f(x) = E_x(e^{-\alpha t} f(x_t) ; t<\sigma_\infty) = \int_S e^{-\alpha t} P(t,x,dy) f(y)$

を α 位の遷移確率という。

$\alpha>0$ とすると、必ず積分可能になる。又、$H_t^0 = H_t$

3° $U^\alpha f(x) = E_x(\int_0^{\sigma_\infty} e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt) = \int_S U^\alpha(x,dy) f(y)$ を Green 測度 ($\alpha \geqq 0$) という。

$\alpha>0$ のときは有界で $\|U^\alpha\| \leqq 1/\alpha$

又 U^0 を単に U とかくこともある。

4° E を nearly analytic set として

$H_E f(x) = E_x(f(x_{\sigma_E}) ; \sigma_E<\infty)$

を、調和測度といい、

5° $\alpha \geqq 0$ として

$H_E^\alpha f(x) = E_x(e^{-\alpha\sigma_E} f(x_{\sigma_E}) ; \sigma_E<\infty)$

を α 位の調和測度という。$H_E^0 = H_E$ である。

<u>定義 1.1</u> $f(x) \geqq 0$ で $\mathcal{B}(S)$ 可測のとき、

$U^\alpha f(x) = E_x(\int_0^{\sigma_\infty} e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt)$

を函数の(α 位)potential と呼ぶ。(オ一章では G_α とかいたが同じものである)

<u>注意</u> S 上の函数は ∂ 上で 0 と考えることにより、S' 上の函数と考える方が便利なことが多い。はっきり区別したいときは f^* で表わすことにする。

<u>定理 1.1</u> $\alpha>0$ とすると、S 上の有界連続函数 $f(x)$ に対し、

$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}[U^\alpha f(x) - H_t^\alpha U^\alpha f(x)] = f(x)$.

が成立つ。即ち、f は、その potential で決定される。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

証明

$$\frac{1}{t}[U^\alpha f(x)-H_t^\alpha U^\alpha f(x)]$$
$$=\frac{1}{t}[E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha s}f^*(x_s)ds)-E_x(e^{-\alpha t}E_{x_t}(\int_0^\infty e^{-\alpha s}f^*(x_s)ds))]$$
$$=\frac{1}{t}[E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha s}f^*(x_s)ds)-E_x(e^{-\alpha t}E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha s}f^*(x_{s+t})ds))]$$
$$=\frac{1}{t}E_x(\int_0^t e^{-\alpha s}f^*(x_s)ds)$$
$$=\frac{1}{t}\int_0^t H_s^\alpha f(x)ds \longrightarrow f(x) \qquad (t\downarrow 0)$$ （終）

定理 1．2　$\alpha \geqq 0$ $f(x)\geqq 0$ で、E を nearly analytic とすると、$H_E^\alpha U^\alpha f(x) \leqq U^\alpha f(x)$ で等号の成立つのは $[f]\subseteq E$ のときである。

証明

$$U^\alpha f(x)= E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f^*(x_t)dt)$$
$$= E_x(\int_0^{\sigma_E} e^{-\alpha t}f^*(x_t)dt)+E_x(\int_{\sigma_E}^\infty e^{-\alpha t}f^*(x_t)dt)$$
$$\geqq E_x(\int_0^\infty e^{-\alpha(t+\sigma_E)}f^*(x_t(w_{\sigma_E}^+))dt)$$
$$= E_x(e^{-\alpha\sigma_E}U^\alpha f(x_{\sigma_E});\ \sigma_E<\infty)$$
$$= H_E^\alpha U^\alpha f(x).$$

等号は、$[f]\subseteq E$ なら、$E_x(\int_0^{\sigma_E} e^{-\alpha t}f^*(x_t)\,dt)=0$ より明らか。

定理 1．3　（最大値の原理）

$\alpha \geqq 0$ で $f(x)\geqq 0$，E を nearly analytic set とし、$\{x;\ f(x)>0\}\subseteq E$ とする．$g(x)\geqq 0$ で

$U^\alpha f(x)\leqq U^\alpha g(x)$ が $x\in E$ に対して成立てば

すべての x に対し成立つ．

証明　最初に E を closed set とすると、$[f]\subseteq E$．

又、$E\cup E^{reg}\subseteq E$ であるから、$H_E^\alpha(x.dy)$ の total mass は E に含まれる．従って　前定理と合わせて、

$$U^\alpha f(x)=H_E^\alpha U^\alpha f(x)\leqq H_E^\alpha U^\alpha g(x)\leqq U^\alpha g(x).$$

次に E を一般とし、F を E の sub set で closed とし

$h_F(x)=f(x)$　$(x\in F)$，$h_F(x)=0$　$x\notin F$ とすると、

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$$U^\alpha h_F(x) = H_F^\alpha U^\alpha h_F(x) \leqq H_F^\alpha U^\alpha f(x) \leqq H_F^\alpha U^\alpha g(x)$$
$$\leqq U^\alpha g(x)$$

一方、$U^\alpha f(x) = \sup\{U^\alpha h_F(x);\ F \text{ closed} \subseteq E\}$ ——(?)

であるから $U^\alpha f(x) \leqq U^\alpha g(x)$ (終)

§2. Excessive function

定義 2.1 $u(x)$がα位の excessive function というのは

i) $u(x) \geqq 0$で$\mathcal{G}(S)$可測

ii) $\forall t \geqq 0$に対し、$H_t^\alpha u(x) \leqq u(x)$

iii) $\lim_{t \downarrow 0} H_t^\alpha u(x) = u(x)$

をみたすことである。

注意 1° $u(x)$がα-excessive であるためには、$\forall \beta > \alpha$に対し、β-excessive であることが必要且つ充分である。従って 0-excessive function は$\forall \alpha > 0$に対してα-excessive である。

2° $u_n(x)$をα-excessive function の単調増大列とすると、$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$も$\alpha$-excessive である。

3° Mが3次元の Brown 運動であれば 0-excessive function は優調和函数(但し、恒等的に$+\infty$となる函数も含めて)と一致する。これはこの章の定理2.1から分る)

次に excessive function の例をあげる。

例1 $u(x) \equiv c \geqq 0$

例2 $f(x) \geqq 0$で$\mathcal{G}(S)$可測とすると、

$u(x) = U^\alpha f(x)$はα-excessive である。

事実、$u(x) \geqq 0$で、$\mathcal{G}(S)$可測であることは、§1の注意から分る。

$$H_t^\alpha U^\alpha f(x) = E_x\left(e^{-\alpha t} E_{x_t}\left(\int_0^\infty e^{-\alpha s} f^*(x_s)\,ds\right)\right)$$
$$= E_x\left(\int_t^\infty e^{-\alpha s} f^*(x_s)\,ds\right)$$
$$\leqq U^\alpha f(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

で $\lim_{t\downarrow 0} H_t^\alpha U^\alpha f(x) = U^\alpha f(x)$

であるから、α-excessiveである。

例3 Eをnearly analytic setとして、

$\Phi_E^\alpha(x) = E_x(e^{-\alpha\sigma_E})$, $\Phi_E^0(x) = E_x(\sigma_E < \sigma_\infty)$

とおくと、$\Phi_E^\alpha(x)$は α-excessive である。

何となれば $\Phi_E^\alpha(x) = H_E^\alpha 1(x)$であるから $\geqq 0$ で $\mathcal{G}(S)$ 可測である。$\sigma_E(w) \leqq t + \sigma_E(w_t^+)$ $t \geqq 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned} H_t^\alpha \Phi_E^\alpha(x) &= E_x(e^{-\alpha t} E_{x_t}(e^{-\alpha\sigma_E})) \\ &= E_x(e^{-\alpha t} E_x(e^{-\alpha\sigma_E(w_t^+)})) \\ &= E_x(e^{-\alpha(t+\sigma_E(w_t^+))}) \leqq \Phi_E^\alpha(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{t\to 0} H_t^\alpha \Phi_E^\alpha(x) = E_x(\lim_{t\downarrow 0} e^{-\alpha(t+\sigma_E(w_t^+))}) = \Phi_E^\alpha(x)$$

例4 $f(x) \geqq 0$、$\mathcal{G}(S)$可測で有界、Eをnearly analytic とすると、$u(x) = H_E^\alpha U^\alpha f(x)$ は α-excessive である。何となれば

$\int_S H_E^\alpha(x, dz) U^\alpha(z, dy)$ は $S \times \mathbb{B}(S)$ 上の核であるから §1の注意により、$u(x) \geqq 0$で $\mathcal{G}(S)$ 可測である。強Markov 性により、

$$\begin{aligned} u(x) &= E_x(\int_{\sigma_E}^\infty e^{-\alpha s} f^*(x_s)\,ds) \\ &= E_x(\int_{\sigma_E}^\infty e^{-\alpha s} f^*(x_s)\,ds \,;\, \sigma_E \geqq t) \\ &\quad + E_x(\int_{\sigma_E}^\infty e^{-\alpha s} f^*(x_s)\,ds \,;\, \sigma_E < t) = \mathrm{I} + \mathrm{II} \end{aligned}$$

$\sigma_E(w) \geqq t$ であれば $\sigma_E(w) = t + \sigma_E(w_t^+)$ であるから、

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= E_x(\int_{t+\sigma_E(w_t^+)}^\infty e^{-\alpha s} f^*(x_s)\,ds \,;\, \sigma_E \geqq t) \\ &= E_x(e^{-\alpha t} \int_{\sigma_E(w_t^+)}^\infty e^{-\alpha s} f^*(x_s(w_t^+))\,ds \,;\, \sigma_E \geqq t) \\ &= E_x(e^{-\alpha t} E_{x_t}(\int_{\sigma_E}^\infty e^{-\alpha s} f^*(x_s)\,ds) \,;\, \sigma_E \geqq t) \end{aligned}$$

$$\mathrm{II} = E_x(\int_{\sigma_E}^\infty e^{-\alpha s} f^*(x_s)\,ds \,;\, \sigma_E < t)$$

$$\geqq E_x\left(\int_t^\infty e^{-\alpha s} f^*(x_s)\,ds\,;\,\sigma_E < t\right)$$
$$= E_x\left(e^{-\alpha t} E_{x_t}\left(\int_0^\infty e^{-\alpha s} f^*(x_s)\,ds\,;\,\sigma_E < t\right)\right)$$

故に

$$u(x) = \mathrm{I} + \mathrm{II} \geqq E_x\left(e^{-\alpha t} E_{x_t}\left(\int_0^\infty e^{-\alpha s} f^*(x_s)\,ds\right)\right)$$
$$= H_t^\alpha\, u(x)$$

で $u(x) - H_t^\alpha u(x)$

$$= E_x\left(\int_{\sigma_E}^t e^{-\alpha s} f^*(x_s)\,;\,\sigma_E < t\right)$$

であるから

$$\lim_{t\downarrow 0} H_t^\alpha\, u(x) = u(x)$$

<u>*Lemma*</u> 3.1　$\alpha \geqq 0$，　$u(x)$をα-excessive とすると有界なα-excessive function の単調増大列$u_n(x)$で$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$となるものが存在する。

<u>証明</u>　$v_n(x) = u(x) \wedge n$ とおくと $0 \leqq v_n(x) \leqq n$，$\mathcal{G}(S)$可測，$H_t^\alpha\, v_n(x) \leqq v_n(x)$ である。従って $0 < s < t$ のとき $H_t^\alpha\, v_n(x) \leqq H_s^\alpha\, v_n(x) \leqq v_n(x)$ であるから $\lim_{t\to 0} H_t^\alpha v_n(x) = u_n(x)$ が存在し，$u_n(x) \leqq n$，且つα-excessive である。

又 $u(x) \geqq \lim_{n\to\infty} u_n(x) \geqq \lim_{n\to\infty} H_t^\alpha\, v_n(x) = H_t^\alpha\, u(x)$ がすべての $t > 0$ に対し成立し，$\lim_{t\to 0} H_t^\alpha\, u(x) = u(x)$ であるから

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$
（終）

<u>*Lemma*</u> 3.2　$\alpha > 0$，$u(x)$ を有界なα-excessive function とすると $U^\alpha\left\{\frac{1}{t}(u - H_t^\alpha u)\right\}(x) \uparrow u(x)$　$(t \downarrow 0)$

<u>証明</u>　$t_0 > 0$ を１つ固定すると

$$\frac{1}{t}\int_0^{t_0}\{H_s^\alpha u - H_s^\alpha H_t^\alpha u\}\,ds$$
$$= \frac{1}{t}\int_0^t H_s^\alpha u\,ds + \frac{1}{t}\int_t^{t_0} H_s^\alpha u\,ds - \frac{1}{t}\int_t^{t+t_0} H_s^\alpha u\,ds$$
$$= \frac{1}{t}\int_0^t H_s^\alpha u\,ds - \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} H_s^\alpha u\,ds$$

$\alpha > 0$ で $u(x)$ は有界であるから

$$\lim_{t_0\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} H_s^\alpha u\,ds = 0$$

故に $t_0 \to \infty$ とすると

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$$U^{\alpha}\left(\frac{u-H_E^{\alpha}u}{t}\right)(x)=\frac{1}{t}\int_0^t H_s^{\alpha}u(x)\,ds$$

$t\downarrow 0$とすると右辺$\uparrow u(x)$であるから証明出来た　（終）

<u>定理 2.1</u>　$\alpha>0$とするとすべてのα－excessive function は有界函数の potential の単調増加の極限である。

<u>証明</u>　α－excessive function $u(x)$に対し Lemma 2.1 により$u_n(x)\uparrow u(x)$となる有界なα－excessive function が存在する。又 Lemma 2.2 により$u_n(x)$は有界函数の potential の単調増加の極限であるから結局、$u(x)$自身有界函数の potential の単調増加列の極限である。

<u>系</u>　$u(x)$をα－excessive，Eを nearly analytic set とすると　$H_E^{\alpha}u(x)$もα－excessive で$H_E^{\alpha}u(x)\leqq u(x)$である。

<u>証明</u>　$f(x)\geqq 0$，$u(x)=U^{\alpha}f(x)$のときは例4と定理1.2から明らか。

$\alpha>0$　のとき定理2.1により、$f_n\geqq 0$　で$U^{\alpha}f_n(x)\uparrow u(x)$　となる$f_n(x)$が存在する。

$H_E^{\alpha}U^{\alpha}f_n(x)\uparrow H_E^{\alpha}u(x)$　であるから$H_E^{\alpha}u(x)$はα－excessive、又、$H_E^{\alpha}U^{\alpha}f_n\leqq U^{\alpha}f_n$ より$H_E^{\alpha}u(x)\leqq u(x)$

$\alpha=0$のときは$H_E^{\alpha}u(x)\uparrow H_E u(x)$　（$\alpha\downarrow 0$）
に注意すればよい。　（終）

<u>Lemma 2.3</u>　$u(x)$をα－excessive function，Eを nearly analytic set、$x_0\in E^{reg}$　とすると

$$\inf_{x\in E}u(x)\leqq u(x_0)\leqq\sup_{x\in E}u(x)$$

が成立つ。

<u>証明</u>

1°　$a=\inf_{x\in E}u(x)\leqq u(x_0)$　の証明

FをEの compact sub set とすると前定理の系と$\sigma_F<\sigma_\infty$　なら$x_{\sigma_F}\in F$となることから

$$u(x_0)\geqq H_F^{\alpha}u(x_0)\geqq a\,H_F^{\alpha}(x_0,S)$$

が成立つ。今オ一章定理4.4により compact set $F_n\subseteq E$ で

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$P_{x_0}(\sigma_{F_n} \downarrow \sigma_E,\ \sigma_E < \infty) = P_{x_0}(\sigma_E < \infty)$

となる単調増大列 $\{F_n\}$ をとると

$H^{\alpha}_{F_n}(x_0, S) = E_{x_0}(e^{-\alpha\sigma_{F_n}}) \to E_{x_0}(e^{-\alpha\sigma_E})\quad (n \to \infty)$

であるから

$u(x_0) \geq a\, E_{x_0}(e^{-\alpha\sigma_E})$

しかるに $x_0 \in E^{reg}$ であるから $E_{x_0}(e^{-\alpha\sigma_E}) = 1$

故に $u(x_0) \geq a = \inf_{x \in E} u(x)$

$2°$ $u(x_0) \leq \sup_{x \in E} u(x)$ の証明

0 - excessive function は α - excessive ($\alpha > 0$) であるから $\alpha > 0$ として証明すればよい。又このとき $u(x)$ は有界函数の potential の単調増加の limit であるから $u(x) = U^{\alpha} f(x)$, ($0 \leq f(x) \leq K < \infty$) のとき出来れば充分である。$F$: compact $\subseteq E$ とすると

$U^{\alpha} f(x_0) = E^{\alpha}_{x_0}(U^{\alpha} f(x_{\sigma_F})) + E_{x_0}(\int_0^{\sigma_F} e^{-\alpha s} f^*(x_s) ds)$

$\leq \sup_{x \in E} U^{\alpha} f(x) + E_{x_0}(\int_0^{\sigma_F} e^{-\alpha s} f^*(x_s) ds)$

$1°$ と同様に compact subset の列 $\{F_n\}$ をとれば

$P_{x_0}(\sigma_{F_n} \downarrow \sigma_E) = 1$ であるから $E_{x_0}(\int_0^{\sigma_{F_n}} e^{-\alpha s} f^*(x_s) ds) \downarrow E_{x_0}(\int_0^{\sigma_E} e^{-\alpha s} f^*(x_s) ds) = 0$ 故に $U^{\alpha} f(x_0) \leq \sup_{x \in E} U^{\alpha} f(x)$。 (終)

<u>Lemma 2.4</u> $f(x)$ を nearly Borel measurable で ≥ 0 とし $\varepsilon > 0$ に対し

$\sigma^{\varepsilon}(w) = \inf\{t; |f^*(x_t(w)) - f^*(x_0(w))| > \varepsilon\}$

とおくと $x_0(w)$ の分布が何であっても $\sigma^{\varepsilon}(w)$ は Markov time である。

<u>証明</u> $E = \{w; \sigma^{\varepsilon}(w) \geq t\}$ とおくと

$E = \{w;\ \forall r \in [0,t),\ |f^*(x_r(w)) - f^*(x_0(w))| \leq \varepsilon\}$

と表わされる。 又整数 $n > 0, k \geq 1$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$$E_{nk}=\{w;\ \tfrac{k}{n}\leqq f^*(x_0(w))<\tfrac{k+1}{n},\ \forall r\in[0,t),$$
$$\tfrac{k}{n}-\epsilon\leqq f^*(x_r(w))<\tfrac{k+1}{n}+\epsilon\}$$

とおくと才章§4により $E_{nk}\in\mathcal{F}_t$. 従って

$E=\bigcap_n\bigcup_k E_{nk}\in\mathcal{F}_t$. （終）

注意 1° 初期分布が単位分布 ϵ_x であれば

$A=\{y;|f^*(y)-f^*(x)|>\epsilon\}$ とおくと、$\sigma^\epsilon(w)=\sigma_A(w)$ である。

2° 特に $f(x)$ が α-excessive function であれば Lemma 2.3 により $P_x(\sigma^\epsilon>0)=1$ である。

定理 2.2 $u(x)$ を α-excessive function $\alpha\geqq 0$ とすると任意の初期分布 μ に対し

1° $u(x)$ は nearly Borel measurable

2° $P_\mu(u(x_t(w))$ は $t\in[0,\sigma_\infty)$ で右連続$)=1$

3° $E_\mu(u(x_0(w)))<\infty$ ならば，$P_\mu(u(x_t(w))$ は $\forall t\in[0,\sigma_\infty)$ に対し左からの極限をもつ$)=1$

証明

a) 1° を仮定し 2° を証明する。

超限帰納法で markov time の列 σ_s を次のように定義する。

1° $\sigma_0(w)=0$.

s を才二級順序数とし

2° s が極限数であれば $\sigma_s(w)=\sup_{\eta<s}\sigma_\eta(w)$

3° s が孤立数であれば

$\sigma^\epsilon(w)=\inf\{t;|u^*(x_t)-u^*(x_0)|>\epsilon\}$ とおき

$\sigma_{s-1}(w)=\infty$ ならば $\sigma_s(w)=\infty$

$\sigma_{s-1}(w)<\infty$ ならば $\sigma_s(w)=\sigma_{s-1}(w)+\sigma^\epsilon(w^+_{\sigma_{s-1}})$

強 Markov 性と Lemma の注意により $\nu_{\sigma_s}(dy)=P_\mu(x_{\sigma_s}\in dy)$ とおくと

$P_\mu(\sigma_s(w)<\infty,\ \sigma_{s+1}(w)=\sigma_s(w))=P_{\nu_{\sigma_s}}(\sigma^\epsilon(w)=0)=0$

従って $E_\mu(e^{-\sigma_s})$ を考えると，$E_\mu(e^{-\sigma_s})$

$=E_\mu(e^{-\sigma_{s+1}})$ である限り $P_\mu(\sigma_s=\infty)=1$ である。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

今 $P_\mu(u^*(x_{s+0}) \neq u^*(x_s)) > 0$ とするとある $\varepsilon > 0$ が存在して $P_\mu(\sigma^\varepsilon(w_s^+) = 0) > 0$ である。従ってこの $\varepsilon > 0$ に対し $\sigma_s(w)$ を定義すると $P_\mu(\sigma_s(w) \leqq s) > 0$ となり矛盾する。(なお $u(x_0) = \infty$ となる所では $\sigma^\varepsilon(w) = \inf\{t;\, u(x_t) > \frac{1}{\varepsilon}\}$ として同様にすればよい。)

b) (i)を仮定して(ii)を証明する。
$u(x)$ を α-excessive とすると $\{e^{-\alpha t} u(x_t(w));\, t \geqq 0\}$ は semi-martingale を作り(ii)により右連続だから可分である。従って martingale の定理により P_μ 測度0を除いて左からの極限が存在する。

c) 最後に $u(x)$ が α-excessive のとき nearly Borel measurable であることを示す。0-excessive は α-excessive ($\alpha > 0$) であるから $\alpha > 0$ と仮定してよい。$\alpha > 0$ のときは定理2.により有界 $\mathfrak{B}(S)$ 可測函数 $f(x)$ の potential の上極限になっているから $U^\alpha f(x)$ ($\alpha > 0$) が nearly Borel measurable であることを云えば充分である。μ を初期分布とすると f は $\mathfrak{B}(S)$ 可測で有界であるから、$B(S)$ 可測な g, h で $g \leqq f \leqq h$ 且つ $\langle \mu U^\alpha H_t^\alpha U^\alpha, g \rangle = \langle \mu U^\alpha H_t^\alpha U^\alpha, h \rangle$ となるものが存在する。故に

$E_\mu(\int_0^\infty e^{-\alpha t} U^\alpha g(x_t)\, dt) = E_\mu(\int_0^\infty e^{-\alpha t} U^\alpha h(x_t)\, dt)$、

$U^\alpha g(x_t) \leqq U^\alpha h(x_t)$ (a.e. P_μ) であるから P_μ 測度0のWを除いて殆んどすべての $t \geqq 0$ に対し、$U^\alpha g(x_t) = U^\alpha h(x_t)$、しかるに、$U^\alpha g$、$U^\alpha h$ は $B(S)$ 可測であるから(a)により右連続、従って、

$P_\mu(U^\alpha g(x_t) = U^\alpha h(x_t);\, t \geqq 0) = 1$

即ち $U^\alpha f(x)$ は nearly Borel measurable である。 (終)
(なおこの証明の途中∂における値は0と定義し*は記号が複雑になるので省いた)

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

注意 excessive function は必ずしも Borel measurable でなく反例がある。 例えば $S = R^1$, $f(x) \in C_\infty(S)$ に対し、$H_t f(x) = f(x)$ から出来る Markov 過程 —— すべての点が運動しない process —— を考え、$u(x)$ を $\mathfrak{F}(S)$ 可測で $B(S)$ 可測でない任意の ≥ 0 なる函数とすると excessive function であって $B(S)$ 可測でない。

系 $u(x)$ $v(x)$ を α - excessive とすると $(u \wedge v)(x)$ も α - excessive である。

証明 $(u \wedge v)(x)$ が $\mathfrak{F}(S)$ 可測 ≥ 0, $H_t^\alpha (u \wedge v)(x) \leq (u \wedge v)(x)$ であることは明らか、

$$\lim_{t \downarrow 0} H_t^\alpha (u \wedge v)(x) = \lim_{t \downarrow 0} E_x(e^{-\alpha t}(u \wedge v)(X_t))$$
$$\geq E_x(\lim_{t \downarrow 0} e^{-\alpha t}(u \wedge v)(X_t)) = (u \wedge v)(x) \quad \text{(終)}$$

α - excessive と云うことを Green 測度を使って云う方が便利な場合もあるので次の定理を補足しておく。

定理 2.3 $u(x)$ が α - excessive であるための必要且つ充分なる条件は

(i) $u(x) \geq 0$ で $\mathfrak{F}(S)$ 可測

(ii) $\forall \beta \geq 0$ に対し $\beta\, U^{\alpha+\beta}\, u(x) \leq u(x)$

(iii) $\lim_{\beta \to \infty} \beta\, U^{\alpha+\beta}\, u(x) = u(x)$

である。

証明 (必要性)

(i) は明らか (ii) $H_t^\alpha u(x) \leq u(x)$ に $e^{-\beta t}$ をかけ 0 から ∞ 迄積分すればよい。 (iii)

$$\beta\, U^{\alpha+\beta}\, u(x) = \int_0^\infty e^{-s} H^\alpha_{\frac{s}{\beta}}\, u(x)\, ds \to u(x) \quad (\beta \uparrow \infty)$$

(充分性)

resolvent equation $U^\alpha - U^\beta + (\alpha - \beta) U^\alpha U^\beta = 0$ が成立つから $\alpha \to \alpha + \beta$, $\beta \to \alpha$ とすると

$$U^{\alpha+\beta}\, u(x) = U^\alpha (u(x) - \beta\, U^{\alpha+\beta}\, u(x))$$

で $f(x) = u(x) - \beta\, U^{\alpha+\beta}\, u(x) \geq 0$ $\mathfrak{F}(S)$ 可測 故に $U^{\alpha+\beta}\, u(x) = U^\alpha f(x)$ は potential として α - excessive 、

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

(iii) により $\beta U^{\alpha+\beta}u(x) \uparrow u(x)$ ($\beta \to \infty$) であるから，$u(x)$ は α-excessive である．（終）

§3. $H_E^\alpha u(x)$ の性質

$u(x)$ を α-excessive，E を nearly analytic set としたとき $H_E^\alpha u(x) \leqq u(x)$ で $H_E^\alpha u(x)$ も α-excessive であることは前に示したが，更に

定理 3．1

(i) $H_E^\alpha u(x) = u(x)$ $\quad x \in E^{reg}$

(ii) E_1，E_2，E nearly analytic set で $E_1 \subseteq E_2$ とすると

$$H_{E_2 \cup E}^\alpha u(x) - H_{E_1 \cup E}^\alpha u(x) \leqq H_{E_2}^\alpha u(x) - H_{E_1}^\alpha u(x)$$

(alternative of order 2) が成立つ．

証明 (i) $x \in E^{reg}$ とすると，$P_x(\sigma_E = 0) = 1$

故に

$$H_E^\alpha u(x) = E_x(e^{-\alpha\sigma_E} u(x_{\sigma_E}) ; \sigma_E < \infty)$$
$$= u(x)$$

(ii) 0-excessive function は α-excessive ($\alpha > 0$) で

$H_E u(x) = \sup_{\alpha > 0} H_E^\alpha u(x)$ であるから $\alpha > 0$ のとき示せばよい。

又 $\alpha > 0$ なら，$u(x)$ は有界函数の potential の単調増加の limit であるから　f を有界 $\mathcal{G}(S)$ 可測 $\geqq 0$ として，$u(x) = U^\alpha f(x)$ に対し，証明すれば充分である．

$$H_{E \cup E_2}^\alpha u(x) = E_x(e^{-\alpha\sigma_{E \cup E_2}} E_{x_{\sigma_{E \cup E_2}}}(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f^*(x_t)dt))$$
$$= E_x(\int_{\sigma_{E \cup E_2}}^\infty e^{-\alpha t} f^*(x_t)dt)$$

同様に

$$H_{E \cup E_1}^\alpha u(x) = E_x(\int_{\sigma_{E \cup E_1}}^\infty e^{-\alpha t} f^*(x_t)dt)$$

$E_1 \subseteq E_2$ であるから $\sigma_{E_1} \geqq \sigma_{E_2}$ 　又 $\sigma_{E \cup E_i} = \sigma_E \wedge \sigma_{E_i}$ ($i = 1, 2$)

であるから $\sigma_{E \cup E_2} \leqq \sigma_{E \cup E_1}$

故に，

$$H_{E \cup E_2}^\alpha u(x) - H_{E \cup E_1}^\alpha u(x) = E_x(\int_{\sigma_{E \cup E_2}}^{\sigma_{E \cup E_1}} e^{-\alpha t} f^*(x_t)dt)$$

$$W = \{\sigma_E \leqq \sigma_{E_2} \leqq \sigma_{E_1}\} + \{\sigma_{E_2} < \sigma_E \leqq \sigma_{E_1}\} + \{\sigma_{E_2} \leqq \sigma_{E_1} < \sigma_E\}$$
$$= W_1 + W_2 + W_3$$

で W_1 上では $\sigma_{E\cup E_2}=\sigma_E$. $\sigma_{E\cup E_1}=\sigma_E$

W_2 上では $\sigma_{E\cup E_2}=\sigma_{E_2}$, $\sigma_{E\cup E_1}=\sigma_{E_1}$

であるから.

$$H^\alpha_{E\cup E_2}u(x)-H^\alpha_{E\cup E_1}u(x)$$
$$\leqq E_x\left(\int_{\sigma_{E_2}}^{\sigma_{E_1}} e^{-\alpha t} f^*(x_t)dt\ ;\ W_2\right)+E_x\left(\int_{\sigma_{E_2}}^{\sigma_{E_1}} e^{-\alpha t} f^*(x_t)dt ; W_3\right)$$
$$\leqq E_x\left(\int_{\sigma_{E_2}}^{\sigma_{E_1}} e^{-\alpha t} f^*(x_t)dt\right)=H^\alpha_{E_2}u(x)-H^\alpha_{E_1}u(x).$$
(終)

系 F_k, E_k $k=1,\cdots\cdots,n$ を nearly analytic set で $F_k\subseteq E_k$ $k=1,\cdots\cdots,n$ とすると.

$$H^\alpha_{\cup_{k=1}^n E_k}u(x)-H^\alpha_{\cup_{k=1}^n F_k}u(x)\leqq\sum_{k=1}^n\left[H^\alpha_{E_k}u(x)-H^\alpha_{F_k}u(x)\right]$$

証明

$$A_k=E_1\cup\cdots\cdots\cup E_{k-1}\cup F_{k+1}\cup\cdots\cdots\cup F_n$$

とおくと、$F_1\cup A_1=\cup_{k=1}^n F_k$. 又 $A_k\cup E_k=F_{k+1}\cup A_{k+1}$
$A_n\cup E_n=\cup_{k=1}^n E_k$ であるから、$\varphi(E)=H^\alpha_E u(x)$ とかくと.

$$\sum_{k=1}^n\left[\varphi(A_k\cup E_k)-\varphi(F_k\cup E_k)\right]$$
$$=\sum_{k=1}^n\left[\varphi(F_{k+1}\cup E_{k+1})-\varphi(F_k\cup E_k)\right]$$
$$=\varphi(E_n\cup A_n)-\varphi(A_1\cup F_1)$$

従つて.

$$\varphi(\cup_{k=1}^n E_k)-\varphi(\cup_{k=1}^n F_k)$$
$$=\sum_{k=1}^n\left[\varphi(E_k\cup A_k)-\varphi(F_k\cup A_k)\right]\ (\text{定理3.1により})$$
$$\leqq\sum_{k=1}^n\left[\varphi(E_k)-\varphi(F_k)\right]$$
(終)

Lemma 3.1 E を nearly analytic set, $\{\sigma_n\}$ を $\sigma_n\uparrow\sigma_E$ なる markov time の列とする. $\Phi^\alpha_E(x)=E_x(e^{-\alpha\sigma_E})$ $W_1=\{W\ ;\ \sigma_E(W)<\infty,\ \forall n\geqq 1$ につき $\sigma_n(W)<\sigma_E(W)\}$ とすると.

$$P_x\left(\lim_{n\to\infty}\Phi^\alpha_E(x_{\sigma_n})=1\ ;\ W_1\right)=P_x(W_1)$$

が成立つ。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

証明　$\Phi_E^{\alpha}(x) \leqq \Phi_E^{0}(x)$ であるから $\alpha > 0$ のとき示せばよい。定理 2.2.2° により $\lim_{n\to\infty} \Phi_E^{\alpha}(x_{\sigma_n}) = \psi(w)$ が存在し，$\psi(w) \leqq 1$ である。

$$E_x(e^{-\alpha\sigma_E}) = E_x(e^{-\alpha\sigma_E} ; \sigma_n < \sigma_E) + E_x(e^{-\alpha\sigma_E} ; \sigma_n = \sigma_E)$$

で第一項は強 Markov 性を使って，

$$E_x(e^{-\alpha\sigma_n}\Phi_E^{\alpha}(x_{\sigma_n}) ; \sigma_n < \sigma_E)$$

とかけるから，

$$E_x(e^{-\alpha\sigma_E}) = E_x(e^{-\alpha\sigma_n}\Phi_E^{\alpha}(x_{\sigma_n}) ; \sigma_n < \sigma_E) + E_x(e^{-\alpha\sigma_E} ; \sigma_n = \sigma_E)$$

がすべての n につき成立つ．$n \to \infty$ とすると，

$$E_x(e^{-\alpha\sigma_E}) = E_x(e^{-\alpha\sigma_E}\psi(w) ; W_1) + E_x(e^{-\alpha\sigma_E} ; W_1^c)$$

故に $E_x(\psi(w) = 1 . W_1) = P_x(W_1)$　　即ち，

$$P_x(\lim_{n\to\infty}\Phi_E^{\alpha}(x_{\sigma_n}) ; W_1) = P_x(W_1)$$

（終）

定理 3.2　M を $\forall x \in S$ に対し $P_x(\sigma_\infty < \infty) = 1$ であるような markov process とし，$u(x)$ を 0-excessive function，E を nearly analytic set とする．そのとき $\forall x \notin E - E^{reg}$ に対し，

$$H_E u(x) = \inf\{v(x) ; v(x) \text{ 0-excessive，} E \text{上で } v \geqq u\}$$

が成立つ。

証明　$u_E^*(x) = \inf\{v(x) ; v(x) \text{ 0-excessive，} E\text{上で } v \geqq u\}$ とおく。

a) 先づ $u_E^*(x) \geqq H_E u(x)$ であることに注意する。実際 $v(x)$ を 0-excessive で E 上で $v \geqq u$ とすると，Lemma 2.3 により，$v(x) \geqq u(x)$ $(\forall x \in E \cup E^{reg})$，$H_E$ は $(E \cup E^{reg})^c$ に mass をもたないから，

$$v(x) \geqq H_E v(x) \geqq H_E u(x) \quad \forall x \in S .$$

従って $u_E^*(x) \geqq H_E u(x)$ である。一方，もし $x \in E \cap E^{reg}$ であれば $H_E u(x) = u(x)$ で $H_E u(x)$ は 0-excessive であるから $u_E^*(x) = H_E u(x)$　　結局 $x \in E$ のとき，$u_E^*(x) \leqq H_E u(x)$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

であることをいえばよい。

b) Eを相対compactで $\sup_{x\in E} \Phi_E^\alpha(x) \leqq a < 1$, 又 $u(x)$ をE上で有界とする。そのとき $\forall \varepsilon > 0$ に対し nearly analytic set Fで $F^{reg} \supseteqq E$, 且つ

$$H_F u(x) \leqq H_E u(x) + \varepsilon \quad (x \in E \text{を固定して})$$

なるものが存在する。何となれば $\sup_{x\in E} u(x) = \lambda$, GをEを含む相対compactなopen setとして, $H = G \cap \{x ; u(x) < \lambda+1\}$ とおくと, $H \supseteqq E$ でHは nearly Borel set. $E \subseteq H^{reg}$ である。

$x \in E$ であるから第一章定理4.5により open set の単調減少列で $P_x(\sigma_{G_n} \uparrow \sigma_E) = 1$ となるものがとれるから,

$F_n = G_n \cap H$ とおく。F_n も nearly Borel set で $P_x(\sigma_{F_n} \uparrow \sigma_E) = 1$. Lemma 3.1 で $\sigma_n = \sigma_{F_n}$ とおくと, $P_x(\lim_{n\to\infty} \Phi_E^\alpha(x_{\sigma_n}) = 1$, $\sigma_E < \infty$, $\forall n$ につき $\sigma_n(w) < \sigma_E) = P_x(\sigma_E < \infty, \sigma_n < \sigma_E)$ で, $\Phi_E^\alpha(x) \leqq a < 1$ であるから, $P_x(\sigma_E < \infty$, ある n に対し $\sigma_n = \sigma_E) = P(\sigma_E < \infty)$ 又, $P_x(\sigma_\infty < \infty) = 1$ であるから すべての compact set K に対し, 充分大きい t に対しては $x_t(w) \notin K$ である確率が1。従って,

$$P_x(\sigma_E = \infty, \text{ある } n \text{ につき } \sigma_n(w) = \sigma_E) = P(\sigma_E = \infty)$$

故に Lebesgue の定理により,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_x(u^*(x_{\sigma_n})) \leqq E_x(\overline{\lim_{n\to\infty}} u^*(x_{\sigma_n}))$$
$$= E_x(u^*(x_{\sigma_E}))$$

即ち $\lim_{n\to\infty} H_{F_n}(x) \leqq H_E u(x)$. 従って, 求めるFがとれる。

c) $u(x)$ を有限の値をとる 0-excessive. Eを nearly analytic とする。そのとき $\forall \varepsilon > 0$ に対し $E \subseteq F^{reg}$, $H_E u(x) + \varepsilon \geqq H_F u(x)$ なる nearly analytic set がとれることを示す。これが出来れば, $u(x) < \infty$ のとき $v(x) = H_F u(x)$ と考え $u_E^* \leqq H_E u(x)$ が云えたことになる。

$\{K_n\}_{n\geqq 1}$ を compact set の単調増大列で, $\bigcup_{n\geqq 1} K_n = S$ とし,

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$E_n = K_n \cap \{y ; u(y) \leqq n\} \cap \{y ; \Phi_E^0(y) \leqq 1 - \frac{1}{n}\}$ $(n=1,2,\cdots)$
$E_0 = E$ とおく。$n \geqq 1$ のとき、E_n は、b)の条件をすべてみたすから、$E_n \subseteq F_n^{reg}$

$$H_{F_n} u(x) \leqq H_{E_n} u(x) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

なる nearly analytic set F_n がとれる。$F_0 = E$ とし、$F = \bigcup_{n=0}^\infty F_n$ とおくと、$E \subseteq F^{reg}$. $\sigma_n = \sigma_{\bigcup_{i=0}^n F_i}$ とおくと、$\sigma_n \downarrow \sigma_F$, $u(x_t)$ の右連続性から、$P_x\left(\lim_{n\to\infty} u^*(x_{\sigma_n}) = u^*(x_{\sigma_F})\right) = 1$. 従って Fatou の定理で $H_F u(x) \leqq \varliminf_{n\to\infty} H_{(\bigcup_{i=0}^n F_i)} u(x)$ である。

又、$n \geqq 1$ に対しては $P_x(\sigma_{E_n} = \infty) = 1$ であるから、$P_x(\sigma_{\bigcup_{i=0}^n E_i} = \sigma_E) = 1$. 所で定理3.1系により

$$H_{(\bigcup_{i=0}^n F_i)} u(x) - H_{(\bigcup_{i=0}^n E_i)} u(x) \leqq \sum_{i=0}^n [H_{F_i} u(x) - H_{E_i} u(x)]$$

であるから、

$$H_{(\bigcup_{i=0}^n F_i)} u(x) \leqq H_E u(x) + \sum_{i=0}^\infty \frac{\varepsilon}{2^n} = H_E u(x) + \varepsilon$$

従って　$H_F u(x) \leqq H_E u(x) + \varepsilon$.

d)　$u(x)$ が一般な場合

$x \in E$ とし、$F = E \cap \{y ; u(y) = \infty\}$ とおく。

先づ $\Phi_F^0(x) > 0$ とすると、$H_F u(x) = \infty$ であるから、$H_E u(x) = \infty$. 従って、$u_E^*(x) \leqq H_E u(x)$ がいえたことになる。次に $\Phi_F^0(x) = 0$ とする。このときは $\forall \varepsilon > 0$ に対し 0-excessive function $v(x)$ で F 上で $v(y) = \infty$ 且つ $v(x) < \varepsilon$ となるものが存在する。実際 c) により

$$\Phi_F^0(x) = H_F 1(x) = \inf\{v ; v,\ 0\text{-excessive} \geqq 1\ x \in F\}$$

であるから 0-excessive function v_n で $\inf_{x\in F} v_n(x) \geqq 1$. $v_n(x) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ $n = 1, 2 \cdots\cdots$ が存在する。ここで、$v(x) = \sum_{n=1}^\infty v_n(x)$ とおけばよい。又 u は $E - F$ 上で有限であるから、c) により、$\forall \varepsilon' > 0$ に対し、E 上で $v' \geqq u$ で $v'(x) < H_{E-F} u(x) + \varepsilon'$ となる 0-excessive function $v'(x)$ が存在する。しかるに、$\Phi_F^0(x) = 0$ であるから、$H_{E-F} u(x) = H_E u(x)$、従って、$v'(x) < H_E u(x) + \varepsilon'$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

である．ここで $v^{*} = v + v'$ とおくと，v^{*} は 0-excessive で E上では $v^{*} \geqq u$．x では，

$v^{*}(x) = v(x) + v'(x) \leqq \varepsilon + H_E u(x) + \varepsilon'$．

従って $u_E^{*}(x) \leqq H_E u(x)$ （終）

注意　この定理は，$P_x(\sigma_\infty < \infty) = 1$ として，$\alpha = 0$ につき証明されたが，必ずしも $P_x(\sigma_\infty < \infty) = 1$ でなくても $\alpha > 0$ の場合には成立つ。大筋を述べると，M を才一章 §5 で構成した Markov 過程とし，$\alpha > 0$ とする．

$T' = [0, \infty]$ として，$T' \times \overline{W}$ を考え，$[t, \infty] \times B$ ($t \geqq 0$, $B \in \mathbb{B}_\infty$) という形の集合に $Q_x([t, \infty] \times B) = e^{-\alpha t} P_x(B)$ と定義すると，Q_x は $(T' \times \overline{W}, \mathbb{B}(T') \times \mathbb{B}_\infty)$ 上の確率測度と拡張される。$(t, w) \in T' \times \overline{W}$ に対し，$\Phi(t, w) = \widetilde{w}$ を $\widetilde{w}_s = w_s$, $(s < t)$，$\widetilde{w}_s = \partial$, $(s \geqq t)$ と定義し，$\widetilde{\mathbb{B}}_t$ を $\mathbb{B}_t$ と同様に $\widetilde{x}_t(\widetilde{w}) = \widetilde{w}_t$ を使つて定義する．$B \in \widetilde{\mathbb{B}}_\infty$ に対し $\widetilde{P}_x(B) = Q_x(\Phi^{-1}(B))$ とおくと，$\widetilde{M}^\alpha = \{S', \overline{W}, \widetilde{\mathbb{B}}_t, \widetilde{P}_x, x \in S'\}$ は markov 過程になる。（これを M の α 位の subprocess ということにする）所で $\widetilde{P}_x(\widetilde{\sigma}_\infty(\widetilde{w}) > t) \leqq e^{-\alpha t}$ となつているから，$\widetilde{P}_x(\widetilde{\sigma}_\infty < \infty) = 1$ である．

$$\widetilde{P}_x(\widetilde{x}_t \in E, \widetilde{\sigma}_\infty > t) = e^{-\alpha t} P_x(x_t \in E, \sigma_\infty > t) = e^{-\alpha t} P(t, x, E)$$

となっているから，$\widetilde{H}_t = H_t^\alpha$，$\widetilde{U}^0 = U^\alpha$ である．又一般に nearly analytic set E に対し，$\widetilde{H}_E = H_E^\alpha$ もいえるから，結局定理 3.2 は，一般の M に対して，$\alpha > 0$ のとき成立つ．（α 位 subprocess に関しては Dynkin [15] 参照）

(定理 3. 2)：M を Markov process，E を nearly analytic set $\alpha > 0$，$u(x)$ を α-excessive function とすると，$x \in E - E^{reg}$ に対し，

$H^\alpha u(x) = \inf \{ v(x) ; v(x)\ \alpha\text{-excessive}, \text{E上で } v \geqq u \}$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

§4. 細位相（fine topology）

細位相に限らずこの§では種々の集合を確率論的に特徴づける。

定義 4.1　Eが極集合（ensemble polaire）であるというのは、ある nearly analytic set $A \supseteq E$ が存在して、$\forall x \in S$ に対し、$P_x(\sigma_A = \infty) = 1$ となる集合である。

定義 4.2　Eが半極集合（ensemble semi polaire）というのは nearly analytic set $\{A_n\}_{n=1,2\cdots}$ で $A_n^{reg} = \phi$　$E \subseteq \bigcup_{n \geqq 1} A_n$ となるものが存在することである。

注意　極集合は半極集合である。

定理 4.1　Eを nearly analytic set とすると、E^{reg} は nearly Borel set で $E - E^{reg}$ は半極集合である。

証明　$\alpha > 0$ とすると、$E^{reg} = \{x\,;\,\Phi_E^\alpha(x) = 1\}$

従って nearly Borel set である。（従って $E - E^{reg}$ は nearly analytic set）又、$E_n = E \cap \{y\,;\,\Phi_E^\alpha(y) < 1 - \frac{1}{n}\}$ とおくと、$\forall x$ に対し、$P_x(\sigma_{E_n} = 0) = 0$　即ち、$E_n^{reg} = \phi$ で、$E - E^{reg} = \bigcup_{n \geqq 1} E_n$.　（終）

定理 4.2　Eを半極集合とし、

$T_E(w) = \{t\,;\,x_t(w) \in E\}$ とおくと、

すべての初期分布 μ に対し、

$P_\mu(\overline{\overline{T_E(w)}} \leqq \aleph_0) = 1$　（$\overline{\overline{T}}$ はTの濃度）

証明　Eがそれ自身 nearly analytic で、$E^{reg} = \phi$

$\sup_{x \in A} \Phi_A^\alpha(x) \leqq a < 1$ のとき示せば充分である。

ここで markov time の列 σ_n を

$\sigma_0(w) \equiv 0$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$\sigma_1(w)=\sigma_A$, ... $\sigma_{n+1}(w)=\sigma_n(w)+\sigma_A(w^+_{\sigma_n})$

と定義する。もし $P_\mu(\overline{\overline{T}}_E(w)>\aleph_0)>0$ とすると、

$P_\mu(\sum_{n\geqq 1} e^{-\alpha\sigma_n}=\infty)>0$ である。故に

$E_\mu(\sum_{n\geqq 1} e^{-\alpha\sigma_n})<\infty$ を示せばよい。所が

$E_\mu(e^{-\alpha\sigma_0})=1 \qquad E_\mu(e^{-\alpha\sigma_1})=\mu H^\alpha_E 1\leqq a,$

...... $E_\mu(e^{-\alpha\sigma_n})=\mu \overbrace{H^\alpha_E\cdots H^\alpha_E}^{n\text{個}} 1\leqq a^n$ であるから

$$E_\mu(\sum_{n\geqq 1} e^{-\alpha\sigma_n})=\sum_{n\geqq 1}E_\mu(e^{-\alpha\sigma_n})$$

$$\leqq 1+a+\cdots+a^n+\cdots\leqq\frac{1}{1-a}<\infty.$$

故に $P_\mu(\overline{\overline{T}}_E(w)\leqq\aleph_0)=1$ （終）

<u>定義 4.3</u> $A\in\mathcal{G}(S)$ のとき A が potential 0 の集合というのは、$\forall x\in S$ に対し、ある $\alpha>0$ が存在して $U^\alpha(x,A)=0$ となることである。

<u>注意</u> 1° 定理 4.2 により、半極集合（従って極集合）も potential 0 の集合である。

2° $u(x)$ を α-excessive function、$E=\{y\,;\,u(y)=\infty\}$ とすると、E が potential 0 なら極集合である。

<u>定義</u>

$E\subseteq S$ が細位相の意味で開集合（fine open）であるというのは、$\forall x\in E$ が E^c の irregular point になっていることである。

$\mathcal{O}=\{E\,;\,E$ は fine open set$\}$ とすると、$S(\mathcal{O})$ は位相空間である。実際 1° $E_1, E_2\in\mathcal{O}$ ならば $E_1\cap E_2\in\mathcal{O}$
2° $E_\alpha\in\mathcal{O}$ ならば $\bigcup_\alpha E_\alpha\in\mathcal{O}$ は irregular point の定義（一章 §4）から証明出来る。

<u>定義</u> 位相 $\mathcal{O}$ を細位相（fine topology）という。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

注意 1° 細位相は本来の位相より強い位相である．

定理 4．3 近傍の filter base $\mathfrak{W}(x)$ を
$\mathfrak{W}(x) \ni B \Leftrightarrow$ i) B nearly Borel set. ii) $B \ni x$.
iii) $P_x(\sigma_{B^c}=0)=0$ とすれば、$\mathfrak{W}(x)$ からきまる近傍系．
$\mathfrak{U}(x)=\{U;$ ある $B \in \mathfrak{W}(x)$ が存在して、$B \subseteq U\}$
によって、S に位相が入るが これは細位相である．

証明 $\mathfrak{U}(x)$ から入る位相が細位相より弱い位相であることは明らかであるから、強い位相であることを示せばよい．E を fine open とすると、定義から $\forall x \in E$ に対し、nearly analytic set A で、$A \supseteqq E^c$ $x \notin A$. $P_x(\sigma_A=0)=0$ なるものが存在する．

才一章定理 4．5により open set の減少列 $\{G_n\}$ で $G_n \supseteqq A$. $P_x(\sigma_{G_n} \uparrow \sigma_A)=1$ が存在するから、$F=\bigcap_{n\geq 1} G_n$ とおくと、F は Borel set で $x \in F^c \subseteq E$ 且つ $F^c \in \mathfrak{W}(x)$ である。 （終）

定理 4．4 すべての α－excessive function $u(x)$ は細位相で連続である．但し、値としては、$+\infty$ を許す．

証明 E を nearly analytic set, $x \in E^{reg}$ とすると、Lemma 2 3 により

$$\inf_{y\in E} u(y) \leqq u(x) \leqq \sup_{y\in E} u(y)$$

が成立つことに注意して、$u(x)<\infty$ $\varepsilon>0$ とし、

$A=\{y;\ u(y) \leqq u(x)-\varepsilon\}$, $B=\{y;\ u(y) \geqq u(x)+\varepsilon\}$

とおくと、A．Bは nearly Borel set で

$P_x(\sigma_A=0)=P_x(\sigma_B=0)=0$. 従って．$A^c \cap B^c \in \mathfrak{W}(x)$で．
$\forall y \in A^c \cap B^c$ に対し、$|u(y)-u(x)|<\varepsilon$。$u(x)=\infty$ のときは、
$B=\{y:\ u(y) \geqq \frac{1}{\varepsilon}\}$ として同様に出来るから、$u(x)$ は細位相で連続である．

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

なお細位相を使つて、次のようなことが証明出来る。（［2］9-12）

$u(x)$ を α-pre-excessive function（α-excessive function の定義の中から $\lim_{t\downarrow 0} H_t^\alpha u(x) = u(x)$ を除いたもの）とすると、一般に $\lim_{t\downarrow 0} H_t^\alpha u(x) = \underline{u}(x)$ は α-excessive になることは容易に分る。これを $u(x)$ の regularization ということにすると、

1° $\underline{u}(x) =$（細位相に関する）$\liminf_{y \to x} u(x)$

2° $u_n(x)$ を α-excessive function の単調減少列とすると、$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ は α-pre-excessive で、$\{x ; \underline{u}(x) < u(x)\}$ は半極集合である。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

第四章 Excessive measure

$\mathcal{M}=\{S'、W、\mathcal{B}_t、P_x、x\in S'\}$ はこれ迄通り才一章§5できまったMarkov 過程、U^αをそのGreen 測度とする。 $\alpha=0$のときも一緒に論ずるために核とか測度を少し広く考える方が便利なので有界測度（$\geqq 0$）の列$\{\mu_n\}_{n\geqq 1}$ があつて$\mu=\sum_{n\geqq 1}\mu_n$ と表わされるものも測度と云うことにする。 又Aの上で$\mu\leqq\nu$と云うのはすべての$B\in\mathcal{B}(S)$ $B\subseteq A$ に対し、$\mu(B)\leqq\nu(B)$ の意味に解し単に$\mu\leqq\nu$ と云うのはS上で$\mu\leqq\nu$であることを意味するものとする。μ、$\nu\in M^+(S)=\{$非負Radon 測度$\}$のときは、$\forall f\in C^+(S)$に対し、$\langle\mu、f\rangle\leqq\langle\nu、f\rangle$であることと一致する。又$f\in C_0(S)$に対し、$\langle\mu_n、f\rangle\to\langle\mu、f\rangle$となるとき漠収束と云う。

§1 測度のpotential

<u>定義 1.1</u> 測度μに対し

$$\mu U^\alpha(\cdot)=\int_S\mu(dx)U^\alpha(x\cdot)$$

をμのpotential と云う。

定理 1.1 $\alpha>0$ μを有界測度とすると漠収束の意味で、$(\mu U^\alpha-\mu U^\alpha H_t^\alpha)/t\longrightarrow\mu$ である。

<u>証明</u> $f\in C_0(S)$とあると$\|H_t^\alpha f-f\|\to 0$（$t\downarrow 0$）であるから、Lebesgue-Fatou の定理で

$$\left\langle\frac{\mu U^\alpha-\mu U^\alpha H_t^\alpha}{t}, f\right\rangle=\left\langle\mu, \frac{U^\alpha f-U^\alpha H^\alpha f}{t}\right\rangle$$

$$=\left\langle\mu, \frac{1}{t}\int_0^t H_s^\alpha f\right\rangle\xrightarrow[(t\downarrow 0)]{}\langle\mu, f\rangle$$

（終）

<u>定義</u> 1.2 Eをnearly analytic set としたときμH_E^α をμのE上への射影（projection）と云う。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

注意　$f(x)\geqq 0$、$\mathcal{G}(S)$可能とすると

$\langle \mu H_E^\alpha U^\alpha f\rangle = \langle \mu, H_E^\alpha U^\alpha f\rangle$ であり又、μH_E^α の support は $\overline{E}$に含まれる。

定理 1.2（掃散の原理）

Eを nearly analytic set とすると

i) $\mu H_E^\alpha U^\alpha \leqq \mu U^\alpha$

ii) E上で $\mu H_E^\alpha U^\alpha = \mu U^\alpha$

が成立つ。

証明 i) $f(x)\geqq 0$ $\mathcal{G}(S)$ 可能とすると $H_E^\alpha U^\alpha f \leqq f$（III 定理 1.2）故に $\langle \mu H_E^\alpha U^\alpha, f\rangle = \langle \mu, H_E^\alpha U^\alpha f\rangle \leqq \langle \mu, U^\alpha f\rangle = \langle \mu U^\alpha, f\rangle$

ii) $f(x)\geqq 0$, $\mathcal{G}(S)$ 可能、$f(x)=0$ $(x \notin E)$ とすると

$H_E^\alpha U^\alpha f = U^\alpha f$ であるから（第三章定理 1.2）

$\langle \mu H_E^\alpha U^\alpha, f\rangle = \langle \mu, H_E^\alpha U^\alpha f\rangle = \langle \mu, U^\alpha f\rangle = \langle \mu U^\alpha, f\rangle$（終）

Potential の定義域として自然なのはμU^αが S 上の Radon 測度になるものであろう。射影の言葉で云い表わすと、

定義 1.3　$\mathfrak{M}^\alpha$ を

$\mathfrak{M}^\alpha = \{\mu ; \forall$ compact K に対し、μH_K^α が有界測度$\}$と定義する。

注意 1° Kを compact set とすると、$\langle \mu H_K^\alpha, 1\rangle = \langle \mu, \Phi_K^\alpha\rangle$ であるから、$\mu \in \mathfrak{M}^\alpha$ とすべての compact set に対し、$\langle \mu, \Phi_K^\alpha\rangle < \infty$とは同等である。

2° $f \in C_0^+(S)$、$K = [f]$とおく。Gを相対 compact な open set で$\supset K$なるものとすると、$f(x) \leqq \|f\| \Phi_G^\alpha(x)$ $x\in K$であるから $\mu \in \mathfrak{M}^\alpha$ であれば

$\langle \mu, f\rangle \leqq \langle \mu, \|f\| \Phi_G^\alpha\rangle \leqq \|f\| \langle \mu H_G^\alpha, 1\rangle < \infty$ 即ち、$\mathfrak{M}^\alpha \subseteq M^+(S)$である。

3° $\alpha > 0$のとき $\mu \in \mathfrak{M}^\alpha$ と$\mu U^\alpha \in M^+(S)$とは同等である。

証明　$\mu \in \mathfrak{M}^\alpha$, $f \in C_0^+(S)$とする。$K = [f]$とおくと

$\langle \mu U^\alpha, f\rangle = \langle \mu H_K^\alpha U^\alpha, f\rangle = \langle \mu H_K^\alpha, U^\alpha f\rangle \leqq \frac{1}{\alpha}\|f\| \langle \mu H_K^\alpha, 1\rangle < \infty$、逆に$\mu U^\alpha \in M^+(S)$ とする。$\{U^\alpha f ; f\in C_0(S)\}$は、

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$C_\infty(S)$の中でdense（III章定理1.1）であるから任意のcompact set Kに対し$g \in C_0^+(S)$でK上で$U^\alpha g(x) \geqq 1$となるものが存在する。

$\langle \mu H_K^\alpha, 1 \rangle \leqq \langle \mu H_K^\alpha, U^\alpha g \rangle \leqq \langle \mu H_K^\alpha U^\alpha, g \rangle \leqq \langle \mu U^\alpha, g \rangle$であるから、$\mu H_K^\alpha$は有界測度。（終）

定理 1.3　$\alpha > 0$ $\mu \in \mathfrak{M}^\alpha$のとき$\mu \to \mu U^\alpha \in \mathcal{M}^+(S)$は1対1である。

証明　$U^\alpha(C_0(S))$が$C_\infty(S)$の中でdenseであるから明らか。

定理 1.4　$\alpha > 0$, $\{\mu_n\}$を一様に有界な測度とし$\mu_n U^\alpha$が単調増加とすると、ある有界測度μが存在し、$\mu_n \to \mu$（漠）且つ、$\mu_n U^\alpha \uparrow \mu U^\alpha$である。

証明　μ_nが一様有界であるから、部分列$\mu_{n'}$をとり$\mu_{n'} \to \mu$（弱）と出来る。$f \in C_0(S)$とすると、

$\langle \mu_{n'} U^\alpha, f \rangle = \langle \mu_{n'}, U^\alpha f \rangle \to \langle \mu, U^\alpha f \rangle = \langle \mu U^\alpha, f \rangle$であるから、$\mu_{n'} U^\alpha \uparrow \mu U^\alpha$（漠）である。

$\mu_n U^\alpha$は単調増加であるから、$\mu_n U^\alpha \uparrow \mu U^\alpha$（漠）。

他の部分列$\mu_{n''}$があって$\mu_{n''} \to \mu'$（弱）とすると、$\mu U^\alpha = \mu' U^\alpha$となり、定理1.4により　$\mu = \mu'$　（終）

注意：単調減少のときも同じ定理が成立つ。

§2.　excessive measure

excessive functionの双対概念としてexcessive measureを定義する。

定義 2.1　測度$\xi \geqq 0$がα-excessive measureというのは（i）$\xi \in \mathcal{M}^+(S)$，（ii）$\forall t \geqq 0$に対し、$\xi H_t^\alpha \leqq \xi$をみたすことである。

注意 1°　tに関する連続性は仮定しないが、$\xi H_t^\alpha \uparrow \xi$（漠）（$t \downarrow 0$）が成立つ。

実際　$\xi H_t^\alpha \leqq \xi H_s^\alpha$（$s < t$）であり、$f \in C_0^+(S)$とすると、Fatouの定理で

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$\lim_{t\downarrow 0} \langle \xi H_t^\alpha, f \rangle = \lim_{t\downarrow 0} \langle \xi, H_t^\alpha f \rangle \geqq \langle \xi, f \rangle$

一方 $\lim_{t\downarrow 0} \langle \xi, H_t^\alpha f \rangle \leqq \langle \xi, f \rangle$であるから、$\xi H_t^\alpha \uparrow \xi$（漠）である。

2° ξがα-excessiveであることと$\forall \beta > \alpha$に対しβ-excessiveであるのとは同等である。

3° ξ_nがα-excessiveで$\xi_n \downarrow \xi$（漠）であればξもα-excessive、$\xi_n \uparrow \xi$（漠）且つ、$\xi \in M^+(S)$であれば、ξもα-excessiveである。

4° ξ_1, ξ_2をα-excessive、$\xi = \xi_1 + \xi_2$とおくと、$\xi_1 \xi_2$はξに関し絶対連続である。$f_1 = \frac{d\xi_1}{d\xi}$、$f_2 = \frac{d\xi_2}{d\xi}$とおき$d(\xi_1 \wedge \xi_2) = (f_1 \wedge f_2)\, d\xi$と定義すると、$\xi_1 \wedge \xi_2$もexcessive

例 $\mu \in \mathfrak{M}^\alpha$ $\alpha > 0$とすると、$\xi = \mu U^\alpha$はα-excessiveである。実際$\mu U^\alpha \in M^+(S)$で$f \in C_0^+(S)$に対し、$\langle \mu U^\alpha H_t^\alpha, f \rangle = \langle \mu, U^\alpha H_t^\alpha f \rangle \leqq \langle \mu, U^\alpha f \rangle \leqq \langle \mu U^\alpha, f \rangle$

<u>定理 2.1</u> $\alpha > 0$でξを有界なα-excessive measureとすると、ξはある有界測度μのpotentialである。

<u>証明</u> $\mu_t = \frac{1}{t}(\xi - \xi H_t^\alpha)$とおくと、$0 \leqq \mu_t$、又、$\mu_t(S) \frac{1}{t}\int_0^t \xi H_s^\alpha(S)\, ds \leqq (\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\alpha s}\, ds)\xi(S) \leqq \alpha \xi(S)$であるから、$t$に関し一様有界である。

又 $f \in C_0^+(S)$に対し、

$\langle \mu_t U^\alpha, f \rangle = \frac{1}{t}\int_0^t \langle \xi H_s^\alpha, f \rangle \uparrow \langle \xi, f \rangle$であるから、定理 1.4 により、$\mu_t$はある有界measure μに弱収束し、$\xi = \mu U^\alpha$である。（終）

<u>定理 2.2</u> $\alpha > 0$でξをα-excessive measureとすると有界測度の列$\{\mu_n\}$があって、$\mu U^\alpha \uparrow \xi$（漠）と表わせる。

<u>証明</u> 有界なα-excessive measure ξ_nで$\xi_n \uparrow \xi$となるものが存在することを云えばよい。

ξをα-excessive、$\beta > \alpha$とすると、ξはβ-excessiveで$f \in C_0^+(S)$とすると、

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$< \xi H_t^\beta , f > \leqq e^{-(\beta-\alpha)t} < \xi , f > \longrightarrow 0 \ (t \to +\infty)$ である。
従って $t_0 > t > 0$ とすると、
$\frac{1}{t}\int_0^{t_0} < \xi H_s^\beta - \xi H_{s+t}^\beta , f > ds = \frac{1}{t}\int_0^t < \xi H_s^\beta , f > ds - \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} < \xi H_s^\beta , f > ds$ であるから、$t_0 \to +\infty$ として
$\frac{1}{t} < \xi U^\beta - \xi H_t^\beta U^\beta , f > = \frac{1}{t}\int_0^t < \xi H_s^\beta , f > ds$ である。

故に $\mu_t = \frac{1}{t}(\xi - \xi H_t^\beta)$ とおくと $\mu_t \in \mathfrak{M}^\beta$ で $t \to 0$ のとき、
$\mu_t U^\beta \uparrow \xi$ (漠) である。

$\{ G_n \}$ を相対 compact な open set の単調増大列で ($\bar{G}_n \subsetneqq G_{n+1}$)
$\cup_{n \geqq 1} G_n = S$ なるものとする。

$\nu_n = \mu_{\frac{1}{n}} H_{G_n}^\beta$ とおくと、$\nu_n \leqq \mu_{\frac{1}{n}}$ で G_n 上では $\nu_n U^\beta = \mu_{\frac{1}{n}} U^\beta$ である。従って $f \in C_0^+(S)$ とすると、$< \nu_n U^\beta , f > \to < \xi , f >$ で又、ν_n は有界測度であるから $\nu_n U^\alpha$ は有界測度で $< \nu_n U^\alpha , f > \to \xi , f >$、ここで

$\xi_n = \xi \wedge (\sum_{k=1}^n \nu_k U^\alpha)$

とおくと ξ_n は有界 α - excessive measure で

$\xi_n \uparrow \xi$ である。 (終)

次に H_E^α の双対概念を定義する。 E を nearly analytic set、$\alpha > 0$、ξ を α - excessive とする。
定理 2.2 により有界測度 μ_n が存在して、$\mu_n U^\alpha \uparrow \xi$ と表わされる。
$\mu_n H_E^\alpha U^\alpha$ は単調増加列であるから、次の定義が可能である。

<u>定義 2.2</u> $L_E^\alpha \xi = \lim_{n \to \infty} \mu_n H_E^\alpha U^\alpha \quad (\alpha > 0)$

<u>注意 1</u> $L_E^\alpha \xi$ は測度の列 μ_n に関係しない。
実際 $f \in C_0^+(S)$ に対し、$H_E^\alpha U^\alpha f$ は α - excessive function であるから、$f_n \geqq 0$ があって $U^\alpha f_n \uparrow H_E^\alpha U^\alpha f$ と出来る。故に
$\lim_{k \to \infty} \lim_{n \to \infty} < \mu_n U^\alpha f_k > = \lim_{k \to \infty} < \xi , f_k >$
となり右辺は μ_n に無関係である。

<u>注意 2°</u> ξ_1、ξ_2 を α - excessive measure とし $\xi_1 \leqq \xi_2$ であれば $L_E^\alpha \xi_1 \leqq L_E^\alpha \xi_2$，又 ξ を α - excessive、E_1、E_2 を nearly analytic で $E_1 \leqq E_2$ とすると $L_{E_1}^\alpha \xi \leqq L_{E_2}^\alpha \xi$ である。

<u>注意 3°</u> $\xi_n \uparrow \xi$ (ξ_n、ξ α - excessive) とすると、

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$L_E^\alpha \xi_n \uparrow L_E^\alpha \xi$ である。

定理 2.3　E を nearly analytic、ξ を α - excessive とすると

(1)　$L_E^\alpha \xi$ は α - excessive measure で $L_E^\alpha \xi \leqq \xi$

(2)　E 上では $L_E^\alpha \xi = \xi$

である。

証明(1)　$\mu_n U^\alpha \uparrow \xi$ ($n \to \infty$) とすると $\mu_n H_E^\alpha U^\alpha$ は α - excessive、又、$\mu_n H_E^\alpha U^\alpha \leqq \mu_n U^\alpha$ より $L_E^\alpha \xi \leqq \xi$、(2) E 上では、$\mu_n H_E^\alpha U^\alpha = \mu_n U^\alpha$ であるから明らか。(終)

前章定理 3.2 と同様の定理

定理 2.4　E を fine open な nearly analytic set とすると、$L_E^\alpha \xi = \inf \{ \eta ; \eta\ \alpha$ - excessive、E 上で $\geqq \xi \}$ が成立つ。

証明　(後で使わないから省略する)

定理 2.5　E を nearly analytic set、ξ を α - excessive measure とすると、有界測度 $\{ \mu_n \}$ で support $[\mu_n] \leqq E$ 且つ、$\mu_n U^\alpha \uparrow L_E^\alpha \xi$ となるものが存在する。

証明　ξ に対し有界測度の列 $\{ \nu_n \}$ で

$\nu_n U^\alpha \uparrow \xi$ となるものが存在する。(定理 2.2)

又 n を1つ固定すると、一章定理 4、により E に含まれる Compact set の列 $\{ K_i^{(n)} \}_{i \geqq 1}$ で $P_{\nu_n} (\sigma_{K_i^{(n)}} \downarrow \sigma_E$、$i \to \infty) = P_{\nu_n}(W)$ となるものが存在する。

(ν_n は確率測度ではないが有界であるから、当然成立つ)

$f \in C_c^+ (S)$ とすると、

$\langle \nu_n H_{K_i^{(n)}}^\alpha U^\alpha, f \rangle \uparrow \langle \nu_n H_E^\alpha U^\alpha, f \rangle$　($i \to \infty$)

又 $\langle \nu_n H_E^\alpha U^\alpha, f \rangle \uparrow \langle L_E^\alpha \xi, f \rangle$　($n \to \infty$)

であるから、$\mu_n = \nu_n H_{K_n^{(n)}}^\alpha$ とおけばよい。　(終)

定理 2.6　$\alpha > 0$、ξ を α - excessive、A を compact とすると、$L_A^\alpha \xi$ は有界測度である。

証明　前定理で $[\mu_n] \subseteqq A$ なる有界測度の列 $\{ \mu_n \}$ があって、$\mu_n U^\alpha \uparrow L_A^\alpha \xi$ となっている。

$g \in C_c^+ (S)$ で A 上で $U^\alpha g \geqq 1$ なる函数をとると、$\mu_n (S) = \mu_n$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$(A) \leqq \langle u_n , U^\alpha g \rangle \leqq \langle \xi , g \rangle = \lambda < \infty$

故に $u_n U^\alpha (S) \leqq \frac{1}{\alpha} \lambda$ であるから，$L_A^\alpha \xi (S) \leqq \frac{\lambda}{\alpha} < \infty$

（終）

注意 $L_A^\alpha \xi$は有界なα－excessive measureであるから定理2.1により有界測度のpotentialである。

§3. Excessive measure のRiesz 分解、

open set の列$\{G_n\}$で$\overline{G}_n$ compact$\subseteq G_{n+1}$，$\bigcup_{n\geq 1} G_n = S$となるものを簡単にexhaustionと呼ぶことにする。又$\alpha > 0$とする。

Lemma 3.1. Eをnearly analytic set，GをEに含まれるopen setとすると$\forall\alpha$－excessive measure ξに対し、$L_G^\alpha L_E^\alpha \xi = L_G^\alpha \xi$．

証明 ξはα－excessive measureであるから、有界測度の列$\{u_n\}$があって、$u_n U^\alpha \uparrow \xi$，従って$L^\alpha$の定義から、

$u_n H_E^\alpha U^\alpha \uparrow L_E^\alpha \xi$，$(u_n H_E^\alpha) H_G^\alpha U^\alpha \uparrow L_G^\alpha L_E^\alpha \xi$，所が$G$が，open setであるから$H_E^\alpha H_G^\alpha = H_G^\alpha$ 故に，$\mu_n H_E^\alpha H_G^\alpha U^\alpha = u_n H_G^\alpha U^\alpha \uparrow L_G^\alpha \xi$

（終）

Lemma 3.2 $\{G_n\}_{n\geq 1}$をexhaustion，$F_n = G_n^c$，K compact $\subseteq S$，$u \in \mathfrak{M}^\alpha$とすると，

$$\lim_{n\to\infty} u_{F_n}^\alpha U^\alpha (K) = 0$$

である。

証明 先づuを有界測度とする。今$g(x)$を$g(x) \in C_0^+(S)$、$g(x) \geqq 1$ $x \in K$とすると，$U^\alpha g \in C_\infty^+(S)$であるから$\varepsilon > 0$に対し，compact set $F (\supseteq K)$をとり$\sup_{x \notin F} U^\alpha g(x) < \varepsilon / \mu(S)$と出来る。

従って$G_{n_0} \supseteq F$とすると、$\forall n \geqq n_0$に対し，

$u H_{F_n}^\alpha U^\alpha (K) \leqq \langle u H_{F_n}^\alpha , U^\alpha g \rangle = E_\mu (e^{-\alpha \sigma_{F_n}} U^\alpha g(x_{\sigma_{F_n}}))$

$\leqq \frac{\varepsilon}{u(S)} E_u (e^{-\alpha \sigma_{F_n}}) \leqq \varepsilon$．

次にuを必ずしも有界でないと仮定する。

有界測度の列をとり、$\mu = \sum_{m\geq 1} u_m$と表わせるが、$u \in \mathfrak{M}^\alpha$であるから、$\mathfrak{M}^\alpha$の定義の注意3）により、

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$\mu U^\alpha(K) < \infty$である。従つて$\varepsilon > 0$に対し、あるm_0が存在し、
$\sum_{m \geqq m_0} \mu_m U^\alpha(K) < \varepsilon/2$ と出来る。
こゝで$\sum_{m=1}^{m_0-1} \mu_m = \nu_1$、$\sum_{m \geqq m_0} \mu_m = \nu_2$ とおくとν_1は有界測度であるから、あるn_0が存在し、
$\nu_1 H^\alpha_{F_n} U^\alpha(K) < \varepsilon/2$、$(\forall n \geqq n_0)$と出来る。　故に、
$\forall n \geqq n_0$ に対し、

$$\mu H^\alpha_{F_n} U^\alpha(K) = \nu_1 H^\alpha_{F_n} U^\alpha(K) + \nu_2 H^\alpha_{F_n} U^\alpha(K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

（終）

定理 3.1（Riesz の分解定理）
$\alpha > 0$、ξをα-excessive measure とする。$\{G_n\}$ を任意の exhaustion 、$F_n = G_n^c$ とすると、
$\mu \in \mathfrak{M}^\alpha$、と$\alpha$-excessive measure ηで$L^\alpha_{F_n}\eta = \eta$となるものが存在して、

$$\xi = \eta + \mu U^\alpha$$

と分解出来る。又分解は唯一通りで、しかも$\{G_n\}$にはよらない。

証明　数段階に分けて示す。
a)　$\bar{G}_n$はcompact であるから$L^\alpha_{G_n}\xi$は有界測度で、従つて定理 2.6 の注意により有界測度μ_n の potental である。又$m > n$とすると、$\mu_n = \mu_m H^\alpha_{G_n}$である。　何となればLemma 3.1 により$L^\alpha_{G_n}$ $L^\alpha_{G_m}\xi = L^\alpha_{G_n}\xi$で$L^\alpha_m \xi = \mu_m U^\alpha$ であるから$L^\alpha_{G_m} L^\alpha_n \xi = H^\alpha_{G_n} U^\alpha$ より$\mu_m H^\alpha_{G_n} U^\alpha = \mu_n U^\alpha$、$\mu_m H^\alpha_{G_n} \in \mathfrak{M}^\alpha$、$\mu_n \in \mathfrak{M}^\alpha$ であるから定理 1.3 により$\mu_m H^\alpha_{G_n} = \mu_n$。
b)　$f \in C_0^+(S)$　$[f] = K$、$G_l \supseteqq K$とすると$n \geqq l$　で$\langle \mu_n, f \rangle$は単調減小である。何となれば
$m > n > l$とすると、

$$\langle \mu_n, f \rangle = \langle \mu_m H^\alpha_{G_n}, f \rangle = \langle \mu_m, H^\alpha_{G_n} f \rangle$$
$$= \int_{G_n} \mu_m(dx) E_x(e^{-\alpha\sigma_{G_n}} f(x_{\sigma_{G_n}}))$$
$$+ \int_{G_n^c} \mu_m(dx) E_x(e^{-\alpha\sigma_{G_n}} f(x_{\sigma_{G_n}}))$$
$$= \int_{G_n} \mu_m(dx) f(x) + \int_{G_n^c} \text{〃}$$
$$\geqq \langle \mu_m, f \rangle$$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

c) b)によって $\mu_n \to \mu$（漠）となる measure μ が定義出来るが $\mu \in \mathfrak{M}^\alpha$ である。実際 $f \in C_0^+(S)$ とすると充分大の n に対しては $\langle \mu_n, f \rangle \downarrow \langle \mu, f \rangle$

$\langle \mu U^\alpha, f \rangle = \langle \mu, U^\alpha f \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{G_n} \mu(dx) U^\alpha f(dx)$

$\le \lim_{n\to\infty} \lim_{R\to\infty} \int_{G_n} \mu_R(dx) U^\alpha f(x)$

$\le \lim_{R\to\infty} \int_S \mu_R(dx) U^\alpha f(x) = \lim_{R\to\infty} \langle \mu_R U^\alpha, f \rangle$

$\le \langle \xi, f \rangle < \infty$

故に $\mu U^\alpha \in M^+(S)$ で従って $\mu \in \mathfrak{M}^\alpha$、又、$\mu U^\alpha \le \xi$ である。

d) 次に $\eta = \xi - \mu U^\alpha$ と定義すると、η は α-excessive measure である。何となれば ν_n を μ の G_n 上への restriction とし、$m > n$ とすると $f \in C_0^+(S)$ に対し、

$\langle \nu_n, f \rangle = \int_{G_n} \mu(dx) f(x) \le \int_{G_n} \mu_m(dx) f(x) \le \langle \mu_m, f \rangle$ であるから $\mu_m - \nu_n \ge 0$、又、

$\langle (\mu_m - \nu_n) U^\alpha f \rangle \le \langle \mu_m U^\alpha, f \rangle = \langle L^\alpha_{G_m} \xi, f \rangle \le \langle \xi, f \rangle$

であるから $(\mu_m - \nu_n) U^\alpha \le \xi$ である。$\mu_m U^\alpha \uparrow \xi$ $(m \to \infty)$ であるから $\lim_{n\to\infty} (\mu_m - \nu_n) U^\alpha = \xi - \nu_n U^\alpha$ は α-excessive、又、$\xi - \nu_n U^\alpha \downarrow \xi - \mu U^\alpha$ $(n \to \infty)$ であるから $\eta = \xi - \mu U^\alpha$ は α-excessive である。

e) 次に $L^\alpha_{F_n} \eta = \eta$ であることを示す。

$L^\alpha_{F_n} \eta = \eta$ は $L^\alpha_{F_n} \xi - L^\alpha_{F_n} \mu U^\alpha = \xi - \mu U^\alpha$ と同値、従って、$\xi - L^\alpha_{F_n} \xi = \mu U^\alpha - L^\alpha_{F_n} \mu U^\alpha = \mu U^\alpha - \mu H^\alpha_{F_n} U^\alpha$ より $\xi - L^\alpha_{F_n} \xi = \mu U^\alpha - \mu H^\alpha_{F_n} U^\alpha$ を云えばよい。

所で両辺とも F_n 上に measure をもたないから

$L^\alpha_{G_n} \xi - L^\alpha_{G_n} L^\alpha_{F_n} \xi = \mu H^\alpha_{G_n} U^\alpha - \mu H^\alpha_{F_n} H^\alpha_{G_n} U^\alpha$ (1)を云えばよい。

$f \in C_0^+(S)$ とすると $| U^\alpha f | \le \frac{c}{\alpha}$ で、$x \notin \bar{G}_n$ とすると $H^\alpha_{G_n}(x, dy) = H^\alpha_{F_n} H^\alpha_{G_n}(x, dy)$ であるから

$H^\alpha_{G_n} U^\alpha f - H^\alpha_{F_n} H^\alpha_{G_n} U^\alpha f$ は $x \notin \bar{G}_n$ なら 0 で有界 $\mathcal{B}(S)$ 可測函数である。故に

$\langle \mu H^\alpha_{G_n} U^\alpha - \mu H^\alpha_{F_n} H^\alpha_{G_n} U^\alpha, f \rangle$

$= \langle \mu, (H^\alpha_{G_n} - H^\alpha_{F_n} H^\alpha_{G_n}) U^\alpha f \rangle$

$= \lim_{n\to\infty} < \mu_n H^\alpha_{G_n} U^\alpha - \mu_n H^\alpha_{F_n} H^\alpha_{G_n} U^\alpha, f >$

所が $\mu_n H^\alpha_{G_n} U^\alpha = \mu_n U^\alpha = L^\alpha_{G_n} \xi$, $\mu_n H^\alpha_{F_n} H^\alpha_{G_n} U^\alpha$

$= L^\alpha_{G_n} L^\alpha_{F_n} L^\alpha_{G_n} \xi$ で $L^\alpha_{G_n} \xi \uparrow \xi$ ($n\to\infty$) であるから

$< \mu H^\alpha_{G_n} U^\alpha - \mu H^\alpha_{F_n} H^\alpha_{G_n} U^\alpha, f >$

$= < L^\alpha_{G_n} \xi - L^\alpha_{G_n} L^\alpha_{F_n} \xi, f >$

即ち(1)が云えた。

f) 最後に分解の唯一性と $\{ G_n \}$ に無関係なことを示す。

$\xi = \eta + \mu U^\alpha \quad \mu \in \mathfrak{M}^\alpha$、$L^\alpha_{F_n} \eta = \eta$

と分解出来たとする。 $f \in C_0^+(S)$ とすると

$< \eta, f > = < L^\alpha_{F_n} \eta, f > = < L^\alpha_{F_n} \xi, f > - < \mu H^\alpha_{F_n} U^\alpha, f >$

しかるに Lemma 3.2 により $\lim_{n\to\infty} < \mu H^\alpha_{F_n} U^\alpha, f > = 0$

従って、$< \eta, f > = \lim_{n\to\infty} < L^\alpha_{F_n} \xi, f >$ である。

今二通りに $\xi = \eta + \mu U^\alpha = \eta' + \mu' U^\alpha$ と分解出来たとすると上の注意から、$\eta = \eta'$, 従って $\mu U^\alpha = \mu' U^\alpha$. 定理1.3により $\mu = \mu'$ である。

次に $\{ G'_n \}$, $\{ G''_n \}$ を二つの exhaustion とする。$G_n = G'_n \cup G''_n$ は又1つの exhaustion で $f \in C_0^+(S)$ に対し，明らかに

$\lim_{n\to\infty} < L^\alpha_{F_n} \xi, f > = \lim_{n\to\infty} < L^\alpha_{F'_n} \xi, f > = \lim_{n\to\infty} < L^\alpha_{F''_n} \xi, f >$ であるから上と同様にして $\{ G_n \}$ に無関係なことが云える。

<u>系1.</u> $\alpha > 0$ とし、ξ を α-excessive measure とする．

$\xi = \mu U^\alpha$ ($\mu \in \mathfrak{M}^\alpha$) である必要且つ充分条件は、$\forall f \in C_0^+(S)$ に対し．$\lim_{n\to\infty} < L^\alpha_{F_n} \xi, f > = 0$ である。

<u>系2</u> $\alpha > 0$，ξ を α-excessive measure とする。もし $\mu \in \mathfrak{M}^\alpha$ があって、$\xi \leqq \mu U^\alpha$ であれば $\xi = \nu U^\alpha$ ($\nu \in \mathfrak{M}^\alpha$) である。

<u>系3</u> $\alpha > 0$，$\nu \in \mathfrak{M}^\alpha$，$\mu_n \in \mathfrak{M}^\alpha$ ($n \geqq 1$) で

$\mu_n U^\alpha \uparrow$ 且つ、$\mu_n U^\alpha \leqq \nu U^\alpha$ ($n \geqq 1$) とすると、

μ_n はある測度 $\mu \in \mathfrak{M}^\alpha$ に漠収束し、$\mu_n U^\alpha \uparrow \mu U^\alpha$ (漠)である。

<u>系4</u> $\alpha > 0$ $\mu_n \in \mathfrak{M}^\alpha$ とし、$\mu_n U^\alpha \downarrow$ であれば、μ_n はある measure $\mu \in \mathfrak{M}^\alpha$ に漠収束し、$\mu_n U^\alpha \downarrow \mu U^\alpha$ である。

以上証明は定理3.1から容易に出来るから省略する。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

第五章 Dual process

§1 *Relative Theory*

$\mathbb{M} = \{ S', W, \mathbb{B}_t, P_x \quad x \in S' \}$ を第一章§5の*Markov*過程，従つてその*semi-group* $\{ H_t, t \geqq 0 \}$ は $C_\infty(S)$ を $C_\infty(S)$ に写し強連続とする。$\mathcal{B}(S)$ を S 上の有界 $\mathbb{B}(S)$ 可測函数の全体 $\bar{\mathcal{B}}(S)$ を有界 $\mathcal{G}(S)$ 可測（第三章§1参照）函数の全体 $\mathcal{B}^+(S)$, $\bar{\mathcal{B}}^+(S)$ は各々の非負な元の全体とする。$\mathcal{B}(S)$ $\bar{\mathcal{B}}(S)$ は *norm* $\| f \| = \sup_{x \in S} | f(x) |$ によりBanach空間である。今 $f \in \bar{\mathcal{B}}(S)$ に対し、*Green*作用素 U^α を $U^\alpha f(x) = E_x (\int_0^{\sigma_\infty} e^{-\alpha t} f(x_t) dt)$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t f(x) dt$$

$$= \int_S U^\alpha (x, dy) f(y) \qquad (\alpha > 0)$$

とすると、今迄時々使っているがまとめておくと

(i) $0 \leqq U^\alpha$ （即ち $f \in \bar{\mathcal{B}}^+(S)$ に対し、$U^\alpha f \geqq 0$ ）

(ii) $\| U^\alpha \| \leqq \frac{1}{\alpha}$

(iii) *resolvent equation*

$$U^\alpha - U^\beta + (\alpha - \beta) U^\alpha U^\beta = 0 \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

(iv) $f \in C_\infty(S)$ なら、$U^\alpha f \in C_\infty(S)$ 且つ、

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \| \alpha U^\alpha f - f \| = 0$$

をみたすことが分る。

<u>定義 1.1</u>　$\alpha > 0$ に対し $\bar{\mathcal{B}}$ を $\bar{\mathcal{B}}(S)$ に写す線型作素 $\{ V^\alpha \}$ があって、

(i) $0 \leqq V^\alpha \leqq U^\alpha$

(ii) *resolvent equation*

$$V^\alpha - V^\beta + (\alpha - \beta) V^\alpha V^\beta = 0 \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

をみたすとき U^α の *subgreen* 作用素と云う。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

注意 $\|V^\alpha\| \le \frac{1}{\alpha}$, $f \in \mathfrak{B}(S)$ に対し $\lim_{\beta\to\infty} \beta V^{\beta} V^{\alpha} f = V^\alpha f$. 又 $V^\alpha f$ は測度（subgreen 測度と呼ぶことにする）$V^\alpha(x, dy)$ により $V^\alpha f(x) = \int_S V^\alpha(x, dy) f(y)$ とかける。

定義 1.2 $f(x) \in \mathfrak{B}^+(S)$ が V^α-pre-excessive と云うのは $\forall \beta > 0$ に対し $\beta V^{\alpha+\beta} f \le f$ となることで、V^α-excessive と云うのは、V^α-pre-excessive で $\lim_{\beta\to\infty} \beta V^{\alpha+\beta} f = f$ となることである。

注意 1° f が V^α-pre-excessive とすると $\beta V^{\alpha+\beta} f$ は $\beta \uparrow$ のとき単調増加であるから、

$$\lim_{\beta\to\infty} \beta V^{\alpha+\beta} f = \underline{f} \le f$$

が存在するが $\underline{f}$ は V^α-excessive である。これを f の regularization と云うことにしよう。

注意 2 $f \in \mathfrak{B}(S)$ が U^α-excessive と云うことと、α-excessive と云うことは同じである。（才三章定理 2.3）

注意 3 $f \in \mathfrak{B}^+(S)$ とすると

$$U^\alpha f - V^\alpha f - \beta U^{\alpha+\beta}(U^\alpha f - V^\alpha f)$$
$$\ge U^{\alpha+\beta} f - V^{\alpha+\beta} f \ge 0$$

であるから $U^\alpha f - V^\alpha f$ は U^α-pre-excessive である。

定義 1.3 $\{V^\alpha\}$ が U^α の exact な subgreen 作用素であると云うのは $\forall f \in \mathfrak{B}^+(S)$ に対し $U^\alpha f - V^\alpha f$ が U^α-excessive となることである。

定理 1.1 $\{V^\alpha\}$ を $\{U^\alpha\}$ の subgreen 作用素とすると exact な subgreen 作用素 $\{W^\alpha\}$ で

(1) $0 \le V^\alpha \le W^\alpha \le U^\alpha$

(2) もし $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha(V^\alpha 1)(x_0) = 1$ であれば $\forall f \in \mathfrak{B}(S)$ に対し $V^\alpha f(x_0)$ となるものが存在する。

証明 $f \in \mathfrak{B}^+(S)$ とすると $U^\alpha f - V^\alpha f$ は U^α-pre-excessive であるから $\beta U^{\alpha+\beta}(U^\alpha f - V^\alpha f)$ は β に関し単調増加、又 $\lim_{\beta\to\infty} \beta U^{\alpha+\beta} U^\alpha f = U^\alpha f$ であるから $\lim_{\beta\to\infty} \beta U^{\alpha+\beta} V^\alpha f$ が存在する。これを $W^\alpha f$ と定義すると、$U^\alpha f - W^\alpha f$ は $U^\alpha f - V^\alpha f$ の U^α に

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

よる regularization になっているから(1)をみたす exact な sub-green 作用素である。又、$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha(V^\alpha 1)(x_0)=1$ とすると $\lim_{\alpha\to\infty}\alpha(U^\alpha - V^\alpha)1(x_0)=0$。$\beta V^\beta 1 \leq 1$ であるから $\lim_{\alpha\to\infty}\alpha(U^\lambda - V^\alpha)V^\beta 1(x_0)=0$ 従って $W^\lambda 1(x_0)=V^\lambda 1(x_0)$。一般に $V^\alpha \leq W^\alpha$ であるから $W^\alpha_{x_0}$、$V^\alpha_{x_0}$ は測度として一致する。（終）

定義 1.4 $\mathcal{B}(S)$を$\mathcal{B}(S)$ に写す線型作用素 $\{K_t; t\geq 0\}$ があって、

(1) $\forall s,t\geq 0$に対し $K_{t+s}=K_t K_s$

(2) $\forall f\in \mathcal{B}^+(S)$に対し $0\leq K_t f\leq H_t f$

(3) $\lim_{t\downarrow 0} K_t 1 = K_0 1$

をみたすとき $\{K_t\}$ を $\{H_t\}$ の sub semi-group と云う。

注意 $K_t\geq 0$，$\|K_t\|\leq 1$ であるから核 $K_t(x,dy)$ があって $K_t f(x)=\int_S K_t(x,dy)f(y)$ とかける。

例 $\{M_t(w)\ t\geq\}$ を multiplicative functional 即ち、

(M.1) $\forall$ 初期分布 μ に対し、P_μ 測度 0 を除き $M_t(w)\in[0,1]$，t に関し単調減小で右連続。

(M.2) $M_t(w)$ は $\mathfrak{F}_t$ 可能

(M.3) $M_{t+s}(w)=M_t(w)\cdot M_s(w_t^+)$ a.e. P_μ

とする。

そのとき，$f\in\mathcal{B}(S)$に対し

$K_t f(x)=E_x(f(x_t)\cdot M_t)$

とおくと $\{K_t\}$ は $\{H_t\}$ の sub semi-group になる。

実際 $f\in\mathcal{B}^+(S)$に対し $0\leq K_t f\leq H_t f$ は明らかで $f\in\overline{\mathcal{B}}(S)$に対しては

$$
\begin{aligned}
K_{t+s}f(x) &= E_x(f(x_{t+s})M_{t+s})\\
&= E_x(f(x_t(W_s^+))M_s(W)M_t(w_s^+))\\
&= E_x(E_{x_s}(f(x_t)M_t)\cdot M_s(w))\\
&= K_s K_t f(x)
\end{aligned}
$$

である。特に重要なのは、

1° $M_t(w)=e^{-\alpha t}$

2° $a(x)\geq 0$ として、$M_t(w)=e^{-\int_0^t a^*(x_s(w))ds}$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

3° E を nearly analytic set とし、
$$M_t(w) = \chi_{\{t<\sigma_E(w)\}}(w)$$
等の場合で、1°からは H_t^α，3°からは E を hit する前の path の行動をきめる semi-group が得られる。

所で $\{K_t\}$ を $\{H_t\}$ の sub semi-group とすると、$\forall f\in \mathcal{B}^+(S)$ に対し、$K_0 f(x) \leqq f(x)$ で $K_0K_0f = K_0 f$ であるから $K_0(x, dy)$ は単位測度 $\varepsilon_x(dy)$ か又は、0 測度に等しい。

<u>定義</u> 1.5 x が parmanent であると云うのは、$K_0(x, dy) = \varepsilon_x(dy)$，non-parmanent と云うのは、$K_0(x, dy) = 0$ となることである。

<u>Lemma 1.1</u> $\{K_t\}$ を $\{H_t\}$ の sub semi-group とすると、

(i) $K_t(x\ dy)$ は parmanent な点の上にのみ mass をもつ。

(ii) f を S 上の有界連続函数とすると、

$t \to K_t f(x)$ は右連続

(iii) $f \in C_0(S)$ に対し、$V^\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} K_t f(x)\,dt$ とおくと V^α は核で、$\{U^\alpha\}$ の sub green 作用素である。

<u>証明</u>(i) $K_tK_0 = K_t$，$K_0K_t = K_t$ より明らか。

(ii) $f(x)$ を連続函数で $0 \leqq f(x) \leqq 1$ ($\forall x \in S$) とする。$0 \leqq (H_t - K_t) f \leqq (H_t - K_t)1$ $\lim_{t\downarrow 0} K_t 1 = K_0 1$ であるから、x が parmanent であれば、$\lim_{t\downarrow 0} K_t f(x) = \lim_{t\downarrow 0} H_t f(x) = f(x)$．又 x を non-parmanent とすると $0 \leqq K_t f(x) \leqq K_t 1(x)$ で $K_0 1(x) = 0$ であるから $\lim_{t\downarrow 0} K_t f(x) = 0$．故にすべての x に対し、$\lim_{t\downarrow 0} K_t f(x) = K_0 f(x)$。一般の有界連続函数に対しては $f^+(x) = f(x) \vee 0$，$f^-(x) = (-f(x)) \vee 0$ とおき $g^\pm(x) = f^\pm / \|f^\pm\|$ とおき、$t \to K_t g^+$，$t \to K_t g^-$ の連続性が云えるからよい。

(iii) $0 \leqq K_t \leqq H_t$ より $0 \leqq V^\alpha \leqq U^\alpha$，又、$K_{t+s} = K_t K_s$ より $V^\alpha - V^\beta + (\alpha-\beta) V^\alpha V^\beta = 0$ が出る　（終）

<u>定義 1.6</u> sub semi-group $\{K_t\}$ が exact と云うのは、$V^\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha t} K_t\,dt$ が U^α の exact な sub green 作用素となることである。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

注意 x が parmanent であれば $\alpha V^\alpha 1(x) \to 1 \ (\alpha \to \infty)$ である。

sub semi-group に対しては sub green 作用系が対応しているが逆に次の定理が成立つ。

定理 1.2 (Meyer [2])

$\{V^\alpha ; \alpha > 0\}$ を V^α の exact な sub green 作用系とすると、H_t の sub semi-group $\{K_t ; t \geq 0\}$ が存在し、その green 作用系は V^α となっている。又そのような $\{K_t\}$ は唯一通りに定まる。

証明 数段階に分けて証明する。

a) 唯一性の証明

f を有界連続函数とすると $t \to K_t f(x)$ は Lemma 1.1 より右連続である。又 $V^\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} K_t f(x) dt$ であるから逆 Laplace 変換の唯一性から $K_t f(x)$ $(t \geq 0)$ は唯一通りに定まる。

b) 注意 $V^0 = V$ を有界作用系として証明出来れば充分である。実際 $\alpha > 0$ を一つ固定し、V_α^β, V_α^β, $\beta > 0$ を $V_\alpha^\beta = V^{\alpha+\beta}$、$V_\alpha^\beta = V^{\alpha+\beta}$ と定義すると $\{V_\alpha^\beta \ \beta > 0\}$ は、

$V_\alpha^\beta f = \int_0^\infty e^{-\beta t} H_t^\alpha f(x) dt$ をみたし V_α^β は V_α^0 の exact な sub-green 作用系である。$\| V_\alpha^0 \| \leq \frac{1}{\alpha}$ であるから、もし $\{V_\alpha^\beta\}$ に対し、定理が証明出来て sub semi-group K_t^α が定まったとすると $K_t = e^{\alpha t} K_t^\alpha$ とおけば求めるものが得られる。

c) b) の注意により $V^0 = V$ を有界としてよい。$H = V^0(\mathcal{B}(S))$, $\bar{H}$ を H の Banach 空間 $\mathcal{B}(S)$ の中での完備化，$H^+ = \{f ; f \in H, f \geq 0\}$ とし、最初に $\bar{H}$ の上で sub. semi-group K_t を作る。実際 $V^\alpha(\bar{H}) \subseteq \bar{H}$ であるから V^α の $\bar{H}$ への restriction は

(1) $h \in H^+ \Rightarrow V^\alpha h \geq 0$ (2) $\| V^\alpha \| \leq \frac{1}{\alpha}$、(3) resolvent 方程式 (4) $h \in \bar{H}$ なら $\lim_{\alpha \to \infty} \| \alpha V^\alpha h - h \| = 0$ をみたす。(1)(2)(3) は明らかであるから (4) を示す。$h \in H$ とすると H の定義から $f \in \mathcal{B}(S)$ があって、$V^0 f = h$ とかける。$\alpha V^\alpha h = \alpha V^\alpha V^0 f = V^0 f - V^\alpha f = h - V^\alpha f$ より、$\| \alpha V^\alpha h - h \| = \| V^\alpha f \| \leq \frac{1}{\alpha} \| f \| \to 0 \ (\alpha \to \infty)$．故に (4) が成立つ。従って Hille-Yoshida の定理で $\bar{H}$ 上に強連続な semi-group $\{K_t, t \geq 0\}$ が存在し、$h \in \bar{H}$ に対し $V^\alpha h(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} K_t h(x) dt$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

とかける。 次に $h(x) \geqq 0$ のとき、$0 \leqq K_t h \leqq H_t h$ であることを示す。resolvent 方程式より

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}[V^\alpha h(x)] = n!(-1)^n[V^\alpha]^{n+1}h(x)$$

であるから $\alpha \to V^\alpha h(x)$ は complete monotonic。
従って Bernstein の定理 (Widder [41] P.) により殆んどすべての $t \geqq 0$ につき $K_t h(x) \geqq 0$ である。所が $t \to K_t h(x)$ は連続であるからすべての $t \geqq 0$ について $0 \leqq K_t h(x)$。 又同じように、

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}[U^\alpha h(x) - V^\alpha h(x)] = n!(-1)^n[(U^\alpha)^{n+1} - (V^\alpha)^{n+1}]h(x)$$ より

$\alpha \to U^\alpha h(x) - V^\alpha h(x)$ は complete monotonic で殆んどすべての t につき、$H_t h(x) - K_t h(x) \geqq 0$。 しかるに V^α は U^α の exact な sub-green 作用素であるから、$t \to H_t h(x) - K_t h(x)$ は右連続、故に $\forall t \geqq 0$ につき $K_t h(x) \leqq H_t h(x)$ である。

d) $\mathcal{E}^{++}$ を $\mathcal{B}(S)$ の元で nearly Borel measurable，細位相に関して連続、V^0-pre-excessive なもの、全体、$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{++} - \mathcal{E}^{++} = \mathcal{E}^{++} = \{f - g ; f, g \in \mathcal{E}^{++}\}$，$\mathcal{E}^+ = \{f ; f \in \mathcal{E}, f \geqq 0\}$ とする。f、$g \in \mathcal{E}^{++}$ とすると、$f \wedge g \in \mathcal{E}^{++}$ であるから $\mathcal{E}$ は Vector 束をなす。今 $g(x) \in \mathcal{E}^{++}$ とすると仮定により、$\alpha V^\alpha g(x)$ は α に関し単調増加で $\alpha V^\alpha g \in \mathcal{H}$ であるから

$$K_t g(x) = \sup_{\alpha \geqq 0} K_t \alpha V^\alpha g(x)$$

と定義する。$K_t \alpha V^\alpha g(x)$ は t に関し連続で単調減少であるから $K_t g(x)$ は t に関し下半連続で単調減少、故に右連続である。一般の $f \in \mathcal{E}$ は定義により $g_1, g_2 \in \mathcal{E}^{++}$ により $f = g_1 - g_2$ と表わされるから、

$$K_t f(x) = K_t g_1(x) - K_t g_2(x)$$

と定義する。 勿論 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}$ で $h \in \mathcal{H}$ に対しては逆に Laplace 変換の唯一性から新しい定義と c) で定義した K_t は一致する。

e) $\mathcal{E}$ は Vector 束で $h \to K_t h$ は $\mathcal{E}$ 上の Danielle 積分 (Loomis[28] P.29) になっている。 又、

$$U^0(C_0(S)) \subseteq U^0(\mathcal{B}(S)) = \mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}$$

で $U^0(C_0(S))$ は $C_\infty(S)$ の中で dense であるから積分は $C_\infty(S)$ 上で

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

従って$\mathcal{B}(S)$上で定義される。

次にK_tが$\mathcal{B}(S)$上の線型作用素でH_tの sub semi-group になっていることを示そう。

(1) $h\in\mathcal{B}(S)$に対し$K_{t+s}h=K_tK_sh$

何となれば$h\in\mathcal{H}$に対してはK_tが$\mathcal{H}$上の semi-group であるから成立ち従って$\mathcal{E}^{+}$, $\mathcal{E}$に対しても定義から成立つから明らか。

(2) $h\in\mathcal{B}^{+}(S)$に対し$0\leq K_th\leq H_th$

上と同様定義の各段階で示すことが出来る。

(3) $\lim_{t\downarrow 0} K_t1=K_01$

何となれば$1\in\mathcal{E}^{+}$ 故に$t\to K_t1$は、d)により右連続、

故に$\lim_{t\downarrow 0} K_t1=K_01$

又、$h\in\mathcal{H}$に対しては$V^{\alpha}h(x)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}K_th(x)dt$、で$g\in\mathcal{E}$

に対しては$K_tg=\sup_{\beta>0} K_t\beta V^{\beta}g$であるから

$\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}K_tg\,dt=\sup_{\beta>0}\beta V^{\beta}V^{\alpha}g=V^{\alpha}g$

である (終)

系 $\{K_t, t\geq 0\}$を$\{H_t, t\geq 0\}$の sub semi-group とする。そのとき exact な sub semi-group $\{K', t\geq 0\}$で

(1) $K_t\leq K_t'\leq H_t$

(2) xがK_tの parmanent な点とすると、

$K_t(x,\cdot)=K_t'(x,\cdot)$

となるものが存在する。

証明 $V^{\alpha}=\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}K_tdt$, $U^{\alpha}=\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}H_tdt$ とすると$\{V^{\alpha}\}$は$\{U^{\alpha}\}$の sub green 作用素である。

従って定理1.1により exact な sub green 作用素W^{α}で $V^{\alpha}\leq W^{\alpha}\leq U^{\alpha}$ となるものが存在する。

従って定理1.2により exact な sub semi-group $\{K_t', t\geq 0\}$が存在して$K_t\leq K_t'\leq H_t$ となる。

又xが parmanent であれば$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda V^{\lambda}1(x)=1$、故に$V^{\alpha}(x,dy)=W^{\alpha}(x,dy)$ fを有界連続函数とすると$t\to K_t'f(x)-K_tf(x)$は右連続であるから逆 Laplace 変換の唯一性から、

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$K_t(x,dy) = K'_t(x,dy)$ である。 (終)

定理 1.3 (Hunt-Meyer[*)])

$\{V^\alpha\}$ を $\{U^\alpha\}$ の exact な sub green 作用素とすると、submarkov 変核 A^α で、

(1) $f(x)$ が (H_t に関し) α-excessive であれば $A^\alpha f$ も α-excessive で $A^\alpha f(x) \leq f(x)$

(2) $U^\alpha - V^\alpha = A^\alpha U^\alpha$

をみたすものが存在する。

証明 定理 1.2 の証明と同様 U^0 を有界として $\alpha = 0$ につき証明出来れば充分である。

$\mathcal{D} = U^0(C_\infty(S))$ とおくと $\mathcal{D} \subseteq C_\infty(S)$ で $\mathcal{D}$ は $C_\infty(S)$ の中で、dense であり $f \in \mathcal{D}$ に対し $U^{0}f = g$ が定まる。(第三章定理 1.1)

$f \in \mathcal{D}$ に対し $(U^0 - V^0)g$ を対応させると

(i) linear (ii) $f \geq 0$ なら、$(U^0 - V^0)g \geq 0$

(iii) $\|(U^0 - V^0)g\| \leq \|f\|$ となることを示す

(i) は明らか。(ii) の証明; resolvent equation から

$(U^0 - V^0)(I - \beta U^\beta) = (I + \beta V^0)(U^\beta - V^\beta) \quad \beta > 0$

が成立つから、$f = U^0 g \geq 0$ とすると $(U^0 - V^0)(I - \beta U^\beta)f = (I + \beta V^0)(U^\beta - V^\beta)f \geq 0$ 所が $(I - \beta U^\beta)U^0 g = U^\beta g$ であるから、$(U^0 - V^0)U^\beta g \geq 0$. 従ってすべての $\beta > 0$ に対し $(U^0 - V^0)\beta U^\beta g \geq 0$. $\beta \to \infty$ として、$(U^0 - V^0)g \geq 0$. (iii) の証明; $0 \leq U^0 g$ に対し $0 \leq (U^0 - V^0)g \leq U^0 g$ を云えばよい。

所が $(U^0 - V^0)\beta U^\beta g = U^0 g - (I + \beta V^0)U^\beta g$ で

$U^\beta g = (I - \beta U^\beta)U^0 g \geq 0$ であるから $(U^0 - V^0)\beta U^\beta g \leq U^0 g$、

$\beta \to \infty$ として $(U^0 - V^0)g \leq U^0 g$。

(1)(2)(3) により $\mathcal{D}$ 上の線型作用素 A^0 で $A^0 \geq 0$, $\|A^0\|$ 1 なるものが存在し、$(U^0 - V^0)g = A^0 U^0 g$ とかける。 $\mathcal{D}$ は $C_\infty(S)$ で dense である

*) Hunt は σ を markov time とし、sub semi-group

$K_t f(x) = E_x(f(x_t); t < \sigma)$

(即ち、multiple functional の例3°にあたる) のこ(と)だけ証明している。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

から A^0は $C_\infty(S)$ 上の作用素で $f\in C_\infty(S)$に対し、

$$A^0 f(x)=\int_S A^0(x,dy)f(y)$$

とかける。更に $A^0(x,dy)$は $(S,\mathcal{B}(S))$の測度に拡張出来て、所謂 submarkov の核になる。次に f が 0-excessive のとき $A^0 f$ は 0-excessive で $A^0 f\leq f$ となることを示そう。U^0が有界であるから第二章定理 2.1 により $g_n\in\mathbb{B}(S)$ が存在して $U^0 g_n\uparrow f$ となっている。

所で $\{V^\alpha\}$は $\{U^\alpha\}$ の exact な sub green 作用素であるから $(U^0-V^0)g_n=A^0U^0g_n$ は 0-excessive、又 $A^0U^0g_n\uparrow A^0 f$ であるから $A^0 f$ は 0-excessive である。 $A^0 f\leq f$ は明らか （終）

系1　E を nearly analytic set、$f\in\mathbb{B}(S)$ として、

$$V^\alpha f(x)=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f^*(x_t)\cdot M_t(w)dt\right)\quad M_t(w)=\chi\{\sigma_E>t\}(w)$$

とすると $\{V^\alpha\}$ は exact な sub green 作用素で

$A^\alpha=H_E^\alpha$. である。

証明　$f\in\mathbb{B}(S)$ とすると強 Markov 性から、

$$U^\alpha f(x)=E_x\left(\int_0^{\sigma_E} e^{-\alpha t} f^*(x_t)dt\right)+E_x\left(\int_{\sigma_E}^\infty e^{-\alpha t}f^*(x_t)dt\right)$$
$$=V^\alpha f(x)+H_E^\alpha U^\alpha f(x)$$

故に $U^\alpha f-V^\alpha f=H_E^\alpha U^\alpha f(x)$、もし $f\in\mathbb{B}^+(S)$ とすると $H_E^\alpha U^\alpha f(x)$ は α-excessive であるから $U^\alpha f-V^\alpha f$ も α-excessive 従って exact である。 又 $A^\alpha U^\alpha f=H_E^\alpha U^\alpha f$ で $U^\alpha f$ は $\mathbb{B}(S)$の中で dense であるから $A^\alpha=H_E^\alpha$

系2　E を open sub とすると $K_t f(x)=E_x(f(x_t);t<\sigma_E)\ (f\in\mathbb{B}(S))$ は exact な sub semi-group E の点を non parmanent にするものの中に最大のものである。

証明　$V^\alpha=\int_0^\infty e^{-\alpha t}K_t\,dt$ とおき $\{W^\alpha\}$ を $\{U^\alpha\}$ の exact な sub-green 作用素で、$x\in E$ に対し、$W^\alpha(x,dy)=0$-測度なるものとする。定理により、A^αが存在して $U^\alpha-W^\alpha=A^\alpha U^\alpha$とかけ $f\in\mathbb{B}^+(S)$であれば $A^\alpha U^\alpha f$はα-excessive である。所で $x\in E$ ならば $A^\alpha U^\alpha f(x)=U^\alpha f(x)$ で $E\leq E^{\sim g}$ であるから才三章定理 3.2 により $A^\alpha U^\alpha f(x)\geq H^\alpha f(x)$、従って $U^\alpha f-W^\alpha f\geq U^\alpha f-V^\alpha f$ であるから $W^\alpha f\leq V^\alpha f$ （終）

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

定義 1.6　系2 できまる $\mathcal{V}^\alpha$ を E に関する Green 測度と云い $\mathcal{V}^\alpha_E$ と表わす。

§2 Dual process

$\mathbb{M} = \{S', W, \mathbb{B}_t, P_x, x \in S'\}$ を今迄通り第一章§5できまった Markov 過程とし $P(t, x, dy)$ をその遷移確率とする。もしある測度 m があって、$P(t, x, dy)$ が m に関し絶対連続で $P(t, x, dy) = p(t, x, y) m(dy)$ とかけ更に $f(x) \in C_\infty(S)$ に対し

$$\hat{H}_t f(x) = \int_S p(t, y, x) f(y) m(dy)$$

が定義出来て $C_\infty(S)$ に属し強連続な semi-group となれば出発する点と到達する点の立場を交換した Markov 過程（このような Markov 過程を $\mathbb{M}$ の dual process と呼ぶのであるが）$\hat{\mathbb{M}}$ が得られる。実際第一章の終にあげた例の中で Brown 運動、stable process 等に関してはそのことが可能で m としては Lebesgue 測度をとればよい。又この場合には密度函数 $p(t, x, y)$ は x, y に関し対称で potential 論としては出発点と到達点は全く同じ資格で参加する。しかし uniform motion や時空 Brown 運動等にはこの方法で、$\hat{\mathbb{M}}$ を定義することは出来ない。そのために Hunt はもう少し条件をゆめて $\gamma(t)$ を $[0, \infty)$ の上で定義された compact support をもつ、非負の函数とし、$\int_0^\infty P(t, x, dy) \gamma(t) dt$ がある測度 m に関し絶対連続であることを仮定している。こうすると実際 uniform motion や時空 Brown 運動も含めて議論出来る。この様に $P(t, x, dy)$ を時間に関し積分して滑らかにする作用は Green 作用素にもある訳で例として uniform motion をとりあげてみる。$S = (-\infty, +\infty)$ とし、$f \in C_\infty(S)$ に対し $H_t f(x) = f(x+t)$ を考えればよい。$p(t, x, dy) = \varepsilon_{x+t}(dy)$ であるから density はもたないが $\int_0^\infty e^{-\alpha t} H_t f(x) dt = \mathcal{V}^\alpha f(x) = \int_{-\infty}^\infty u^\alpha(x, y) f(y) dy$（但し $u^\alpha(x, y) = e^{-\alpha y} e^{\alpha x}$ $(x < y)$, $= 0$ $(y < x)$）とかけ $\hat{\mathcal{V}}^\alpha f(x) = \int_{-\infty}^\infty u^\alpha(y, x) f(y) dy$ とおくと $\hat{\mathcal{V}}^\alpha$ は丁度 semi-group $\hat{H}_t f(x) = f(x-t)$ の Green 作用素になっている。従って速度1で右に向って一様に運動する process に対し速度1で左に向って運動する process が dual process となる。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

以上のことから dual process を次のように定義する(Meyer[2])
$\{H_t\}$ を一章§5の仮定(H.1)~(H.4)をみたす $C_\infty(S)$ 上の semi-group. $\{U^\alpha\}$ をそのGreen作用素とする。又 $\{\hat{H}_t\}$ も同じ仮定みたす semi-group で $\{\hat{U}^\alpha\}$ をそのGreen作用素とする。

定義 2.1 $\{\hat{H}_t\}$ が $\{H_t\}$ の dual semi-group であると云うのは正の Radon 測度 $\xi(dx)$(これを dx ともかく)が存在して $\forall\alpha>0$ に対し $u^\alpha(x,y)$ が存在し、

1° $u^\alpha(x,y)\geq 0$, $\mathcal{G}(S)\times\mathcal{G}(S)$ 可測

2° y を固定すると $x\to u^\alpha(x,y)$ は $\{H_t\}$ に関し α-excessive

3° x を固定すると $y\to u^\alpha(x,y)$ は $\hat{H}_t$ に関し α-excessive

4° $U^\alpha(x,dy)=u^\alpha(x,y)\,dy$, $\hat{U}^\alpha(dx,y)=dx\,u^\alpha(x,y)$

をみたすことである。

定義 1.2 $\{\hat{H}_t\}$ を $\{H_t\}$ に対し dual な semi-group とし、それからきまるMarkov過程 $\hat{M}=\{S', \hat{W}, \hat{B}_t, \hat{P}_x, x\in S'\}$ を M の dual process と云う。

注意1° dual process $\hat{M}$ に関する諸量はすべて上に∧の記号をつけ言葉で云うときには前に双対-(co-)をつけることにする。例、$\hat{\sigma}_E$, $\hat{H}_E$ 等又、co-potential, co-regular 等。

注意2° $\hat{M}$ に関する核はすべて $\hat{U}^\alpha(dx,y)$, $\hat{H}_E(dx,y)$ 等と measure の成分を前に函数の成分を後にかくことにする。

定義 1.3 μ を非負測度とするとき

$U^\alpha\mu(x)=\int_S u^\alpha(x,y)\mu(dy)$,

$\mu\hat{U}^\alpha(y)=\int_S\mu(dx)\,u^\alpha(x,y)$

をそれぞれ μ の α 位の potential, α 位の co-potential と云う。$u_\alpha(x,y)$ に関する条件からそれぞれ α-excessive function co-α-excessive function である。

Lemma 2.1

(i) ξ は(H_t に関し)excessive measure で($\hat{H}_t$ に関して)も、

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

excessive measure である。

(ii) $\xi(B)=0$であることとBは potential 0 (copotential 0 であることは同値

(iii) $\xi(B)=0$ならB^cは細位相でSの中で dense

証明

(i) $\forall y\in S$ に対し $\alpha\hat{V}^\alpha(S,y)=\alpha\int_S\xi(dx)\,u^\alpha(x,y)\leqq 1$ $B\in\mathbb{B}(S)$ してB上でξで積分して、

$\alpha\xi V^\alpha(B)\leqq\xi(B)$

従って$\xi H_c\leqq\xi$、

(ii) $\xi(B)=0$とすると$V^\alpha(x,B)=\int_B u^\alpha(x,y)\xi(dy)=0$

故にBは potential 0 である。

逆に$\forall x\in S$ に対し $V^\alpha(x,B)=0$とすると$\xi V^\alpha(B)=0$

従って$\alpha\xi V^\alpha(B)=0$　$\alpha\to\infty$とすると$\alpha\xi V^\alpha(B)$は単調に増加して$\xi(B)$に近づくから$\xi(B)=0$

(iii) Eを細位相で open set (これを fine open set と呼ぶ)で nearly Borel set とすると$E\subset E^{reg}$, 従って$x\in E$ なら $P_x(\cdot>0)=1$

故に$V^\alpha(x,E)>0$であるから(ii)により$\xi(E)>0$

従って$\xi(B)=0$ならB^cは細位相で dense である。　(終

注意　$E\{x;u^\alpha(x,y)=\infty\}$とすると$E$は nearly Borel set $\xi(E)=0$、従って potential 0 であるから第三章定義 4.3 の注 2°によりEは極集合である。

定理 2.1

$\{V^\alpha\}$を$\{U^\alpha\}$の exact な sub green 作用素、A^αを定理 1.3 で定まった sub markov 作用素とする。$u^\alpha(x,y)<\infty$ なる(x,y)に

$$v^\alpha(x,y)=u^\alpha(x,y)-\int_S A^\alpha(x,dz)\,u^\alpha(z,y)$$

と定義すると、

(1) $V^\alpha(x,dy)=v^\alpha(x,y)\,dy$

(2) $\hat{V}^\alpha(dx,y)=dx\,v^\alpha(x,y)$と定義すると$\{\hat{V}^\alpha\}$は$\{\hat{U}^\alpha\}$の exact な sub green 作用素

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

(3) Eを open set，$V^\alpha = V_E^\alpha$、とすると$\hat{V}^\alpha$ は$\hat{A}_t$ によってきまるEに関するGreen 作用素$\hat{V}_E^\alpha$ である。

証明(1) xを固定すると$y \to u^\alpha(x,y)$は定義からα－co－excessive 又$y \to \int_S A^\alpha(x,dz)\, u^\alpha(z,y)$は測度$A_x^\alpha(d\ \ )$の$\alpha$－co potential であるから、$\alpha$－co－excessive、従って$\{y; u^\alpha(x,y)) < \infty\}$上で$y \to v^\alpha(x,y)$は双対細位相に関し連続（第三章定理4.4）又$\{y; u^\alpha(x,y) = \infty\}$は$\xi$測度$0$であるから$v^\alpha(x,y)$は$\xi$測度$0$の$\{y; u^\alpha(x,y)=\infty\}$を除き唯一通りにきまり$U^\alpha(x,B) - A^\alpha U^\alpha(x,B) = V^\alpha(x,B)$より，$v^\alpha(x,y)dy = V^\alpha(x,dy)$である。

(2) yを１つ固定すると$x \to u^\alpha(x,y)$，$x \to \int_S A^\alpha(x,dz)\, u^\alpha(z,y)$はそれぞれ$\alpha$－excessive，従って細位相で連続又$\{x; u^\alpha(x,y) = \infty\}$は$\xi$測度$0$であるから$\hat{V}^\alpha(dx,y) = dx\, v^\alpha(x,y)$が定義出来、明らかに$0 \leq \hat{V}^\alpha(B,y) \leq \hat{U}^\alpha(B,y)$，$(\forall B \in \mathbb{B}(S))$が成立つ。又$x$を固定すると$\{V^\alpha\}$は resolvent 方程式をみたすから

$$V^\alpha(x,dy) - V^\beta(x,dy) + (\alpha-\beta)\int_S V^\alpha(x,dz)\, V^\beta(z,dy) = 0$$

従って(1)より$\{y; u^\alpha(x,y) < \infty$、$u^\beta(x,y) < \infty\}$なる集合の上で

$$v^\alpha(x,y) - v^\beta(x,y) + (\alpha-\beta)\int_S v^\alpha(x,z)\, v^\beta(z,y)\,dz = 0 \cdots ①$$

従ってyを固定すると$\{x; u^\alpha(x,y) < \infty$，$u^\beta(x,y) < \infty\}$の集合の上で①が成立ち$\{x; u^\alpha(x,y) = \infty$ or $u^\beta(x,y) = \infty\}$はξ測度0であるから①を積分して

$$\hat{V}^\alpha(dx,y) - \hat{V}^\beta(dx,y) + (\alpha-\beta)\int_S \hat{V}^\alpha(dx,z)\, \hat{V}^\beta(dz,y) = 0$$

が成立つ。故に sub green 測度である。今$f \in \mathbb{B}(S)$とすると$\int_S f(x)\,[\int_S A^\alpha(x,dz)\, u^\alpha(z,y)]\,dx = \int_S [\int_S f(x)\, A^\alpha(x,dz)dx]\, u^\alpha(z,y)$は測度$f A^\alpha(\cdot)$ α co potential として co－α－excessive である。従って，

$$\int_S f(x)\, \hat{U}^\alpha(dx,y) - \int_S f(x)\, \hat{V}^\alpha(dx,y) = \int_S f(x)\,dx \int_S A^\alpha(x,dz)\, u^\alpha(z,y)$$

は co－α－excessive であるから exact である。

(3) $\{V^\alpha\}$，$\{W^\alpha\}$が$\{U^\alpha\}$の exact な sub green 作用素で$\forall \alpha > 0$に対し$V^\alpha \leq W^\alpha$とすると(2)で定めた$\hat{V}^\alpha$，$\hat{W}^\alpha$についても$\hat{V}^\alpha \leq \hat{W}^\alpha$ $(\forall \alpha > 0)$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

でその逆も成立つことは明らかである。

Eを open set, $V^\alpha = V^\alpha_E$ としよう。V^αに対し(2)によってきまる dual な sub green 作用素を$\hat{V}^\alpha$, Eに関する dual な Green 作用素を$\hat{V}^\alpha_E = \hat{W}^\alpha$とおく。又、$\hat{W}^\alpha$を(2)の方法で与えるような$V^\alpha$の sub green 作用素を$W^\alpha$とおく。(M1と$\hat{M}1$の立場を交換すれば常に可能である) $v^\alpha(x, E)=0$であるから$\forall x \in S$に対しE上で測度0を除き$v^\alpha(x, y)=0$、Eは open set で$y \to v^\alpha(x, y)$は$u^\alpha(x, y)<\infty$なるyに対し双対細位相で連続であるから$u^\alpha(x, y)<\infty$なる限りE上で$\forall y$につき$v^\alpha(x, y)=0$ 従って$y \in E$に対し$\hat{v}^\alpha(dx, y)=0$、一方$\hat{W}^\alpha$はEの点を non parmanent にする最大の exact sub green 作用素であるから$\hat{V}^\alpha \leq \hat{W}^\alpha$である。全く同様にしてEの点は$W^\alpha$に対して non parmanent であることが云えるから$W^\alpha \leq V^\alpha$ 故に$\hat{W}^\alpha \leq \hat{V}^\alpha$で従って$\hat{V}^\alpha = \hat{V}^\alpha_E$ (終)

<u>系</u> Eを open set とし、V^α_Eに対し定理1.3のA^α_Eが対応し$\hat{V}^\alpha_E$に$\hat{A}^\alpha$が対応したとすると、

$\forall x, y \in S$に対し$\int_S A^\alpha(x, dz)u^\alpha(z, y) = \int_S u^\alpha(x, z)\hat{A}^\alpha(dz, y)$が成立つ。

<u>証明</u> $x \in S$を一つ固定すると、$u^\alpha(x, y)<\infty$なるyに対し、

$\int A^\alpha(x, dy)u^\alpha(z, y) = u^\alpha(x, y) - v^\alpha(x, y) = \int u^\alpha(x, z)\hat{A}^\alpha(dz, y)$が成立つ。しかるに定理1.3系1により

$\forall x \in S$に対し$A^\alpha(x, dz) = H^\alpha_E(x, dz)$

$\forall y \in S$に対し$\hat{A}^\alpha(dz, y) = \hat{H}^\alpha_E(dz, y)$

で$\int A^\alpha(x, dz)u^\alpha(z, y)$は co-potential, $\int u^\alpha(x, z)\hat{A}^\alpha(dz, y) = \int u^\alpha(x, z)\hat{H}^\alpha_E(dz, y)$は$u^\alpha \hat{H}^\alpha_E$として、co-α-excessive function であるから双対細位相で両辺とも連続又$\{y ; u^\alpha(x, y)<\infty\}$は双対細位相で dense、故に$\forall y \in S$につき$\int A^\alpha(x, dz)u^\alpha(z, y) = \int u^\alpha(x, z)\hat{A}^\alpha(dz, y)$ (終)

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

定理 2.2 (Hunt-Meyer)*)

E を nearly analytic set とすると $\forall x, y \in S$ に対し、

$\int_S H_E^\alpha(x, dz) u^\alpha(z, y) = \int_S u^\alpha(x, z) \hat{H}_E^\alpha(z, y)$ が成立つ。

<u>証明</u> 前定理の系の証明と同様 x を1つ固定すると、両辺とも y の函数として co-α-excessive であるから双対細位相で連続、又その mass は双対細位相で dense であるからそにつき殆んどすべての y に対し等しいことを云えばよい。

そのために $a(y) \in C_0^+(S)$ に対し

$\int_S [\int_S H_E^\alpha(x, dz) u^\alpha(z, y)] a(y) dy = \int_S [\int_S u^\alpha(x, z) \hat{H}_E^\alpha(dz, y)] a(y) dy$ を云えばよい。所が両辺とも x に関し α-excessive で細位相で連続であるから、上と同じ理由で

$b(x) \in C_0^+(S)$ に対し、

$\iiint b(x) dx H_E^\alpha(x, dz) u^\alpha(z, y) a(y) dy = \iiint b(x) dx\, u^\alpha(x, z) \hat{H}_E^\alpha(dz, y) a(y) dy$ を云えば充分である。 簡単のために $c = U^\alpha a$ $e = b\hat{U}^\alpha$ $\mu(dx) = b(x) dx$, $\nu(dy) = a(y) dy$ とおけば

$\int \mu(dx) \int H_E^\alpha(x, dz) c(z) = \int e(z) \int \hat{H}_E^\alpha(dz, y) \nu(dy)$

を云えばよい。所で E が open set のときは前定理の系により成立つ。 E を nearly analytic set とすると第三章定理 4.1 により $E - E^{reg}$ は半極集合であるから同じく定理 4.2 により potential 0 の集合で本章 Lemma 2.1 (iii) によりそに関し零集合である。 故に $\mu(dx) = b(x) dx$ は $E - E^{reg}$ に mass を持たない。 同様に $\nu(dy)$ も $E - E^{reg}$ に mass をもたないことも分る。 従って第一章定理 4.5 と同様にして open set の 減少列 $\{G_n\}$ で $G_n \supseteq E$ 且つ P_μ 測度0を除き $\sigma_{G_n} \downarrow \sigma_E$, $\hat{P}_\nu$ 測度0を除き $\hat{\sigma}_{G_n} \downarrow \hat{\sigma}_E$ となるものが存在する**)。従って $n \to \infty$ とすると、

$\int \mu(dx) \int H_{G_n}^\alpha(x, dz) c(z) = E_\mu(\int_{\sigma_{G_n}}^\infty e^{-\alpha t} a^*(x_t) dt)$

$\to E_\mu(\int_{\sigma_E}^\infty e^{-\alpha t} a^*(x_t) dt) = \int \mu(dx) \int H_E^\alpha(x, dz) c(z)$

$\int e(z) \int \hat{H}_{G_n}^\alpha(dz, y) \nu(dy) = \hat{E}_\nu(\int_{\hat{\sigma}_{G_n}}^\infty e^{-\alpha t} b^*(x_t) dt)$

*) Hunt が [18] で示しているがこの証明は Meyer による。

注 **) μ, ν は確率分布ではないが $P_\mu(\cdot) = \int \mu(dx) P_x(\cdot)$ $\hat{P}_\nu(\cdot) = \int \nu(dx) \hat{P}_x(\cdot)$ とおく。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$\to \hat{E}_\nu(\int_{\sigma_E}^{\infty} e^{-\alpha t} b^*(x_t)\,dt) = \int c(z)\int \hat{H}_E^\alpha(dz, y)\nu(dy)$

であるから、

$\int\mu(dx)\int H_{G_n}^\alpha(x, dz)c(z) = \int c(z)\int \hat{H}_E^\alpha(dz, y)\nu(dy)$

である。 （終）

§3 excessive function の Riesz 分解

第四章で excessive measure の Riesz 分解を行ったが dual Process を考えることが出来るときには excessive function の Riesz 分解が出来、potential 論に応用出来る。方法は excessive functional と co-excessive measure との対応を明確にし、dual の方で考察してもとに戻す方法である。

Lemma 3.1 $u(x)$ を compact set の上で可積分な α-excessive function とすると $\xi(dx)=u(x)$ は co-α-excessive measure である。

証明 $\forall\beta>0$ $\forall B\in\mathbb{B}(S)$ に対し $\beta\hat{U}^{\alpha+\beta}\xi(B)\leqq\xi(B)$ を云えばよい。しかるに

$\beta\hat{U}^{\alpha+\beta}\xi(B)=\int_B dx\int_S \beta u^{\alpha+\beta}(x, y)u(y)\,dy=\int_B \beta U^{\alpha+\beta}u(x)\,dx$ $u(x)$ は α-excessive であるから $\beta U^{\alpha+\beta}u(x)\leqq u(x)$

従って $\beta\hat{U}^{\alpha+\beta}\xi(B)\leqq\int_B u(x)\,dx=\xi(B)$ （終）

逆に co-α-excessive measure $\xi(dx)$ はある α-excessive function $u(x)$ により $\xi(dx)=u(x)dx$ とかける。

Lemma 3.2 $\xi(dx)$ を co-α-excessive measure とすると、$u(x)\lim_{\beta\to\infty}\beta U^{\alpha+\beta}\xi(x)$ が定まって $u(x)$ は compact set の上で可積分な α-excessive function、且つ $\xi(dx)$ $=u(x)dx$ である。

証明 最初に $\mu\in M^+(S)$ とすると $\hat{U}^\alpha\mu(dx)=\int\hat{U}^\alpha(dx, y)\mu(dy)$ $=(\int u^\alpha(x, y)\mu(dy))dx$ であるから $\hat{U}^\alpha\mu(dx)$ は dx に関し絶対連続で density が $U^\alpha\mu(x)$ であることを注意しておく。

$\xi(dx)$ は co-α-excessive measure であつるから $\forall\beta>0$ に対し、$\beta\hat{U}^{\alpha+\beta}\xi(dx)\leqq\xi(dx)$、又 β が増加したとき単調増加である。$\beta\hat{U}^{\alpha+\beta}\xi(dx)=\beta U^{\alpha+\beta}\xi(x)\,dx$ であるが $\beta U^{\alpha+\beta}\xi$

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

(x)は$\alpha+\beta$-potential として$(\alpha+\beta)$-excessive 従って、細位相に関し連続であるからすべての点で定義され再びβに関し単調増加である。故に$\lim_{\beta\to\infty} \beta U^{\alpha+\beta}$ 含$(x)=u(x)$は確定する。

又、$f\in C_0^+(S)$に対し$\langle \beta\hat{U}^{\alpha+\beta}$含$, f\rangle \uparrow \langle$含$, f\rangle$で

一方Lebesgue-Fatouの定理で$\lim_{\beta\to\infty}\int \beta U^{\alpha+\beta}$含$(x)f(x)dx$
$=\int u(x)f(x)dx$であるから$\int$含$(dx)f(x)=\int u(x)f(x)dx$

従って含$(dx)=u(x)dx$で$u(x)$がcompact setの上で可積分なことが分る。又$\beta U^{\alpha+\beta}$含(x)はresolvent方程式より非負Radon測度含$(dx)-\beta\hat{U}^{\alpha+\beta}$含$(dx)$の$u^\alpha(x,y)$によるpotentialであるから$\alpha$-excessive 従って$u(x)$も$\alpha$-excessive functionの単調増加の極限としてα-excessiveである。 （終）

Lemma 3.3 $\alpha>0$, $u(x)$をcompact setの上で可積分なα-excessive function, Eをnearly analytic setとし$u(x)dx=$含(dx)とおくと$(H_E^\alpha u(x))dx=\hat{L}_E^\alpha$含$(dx)$が成立つ。

<u>証明</u> 最初に$u(x)$が$f\in B^+(S)$のpotential
$u(x)=U^\alpha f(x)=\int u^\alpha(x,y)f(y)dy$のときを考える。

定理2.2により$\forall x,y\in S$に対し$\int H_E^\alpha(x,dz)u^\alpha(z,y)$
$=\int u^\alpha(x,z)\hat{H}_E^\alpha(dz,y)$が成立っているから、

$$H_E^\alpha u(x)=\iint H_E^\alpha(x,dz)u^\alpha(z,y)f(y)dy$$
$$=\iint u^\alpha(x,z)\hat{H}_E^\alpha(dz,y)f(y)dy$$

今$\rho(dy)=f(y)dy$とおいてみると含$(dx)=U^\alpha f(x)dx$
$=\hat{U}^\alpha\rho(dx)$とかけるから$\hat{L}_E^\alpha$含(dx)の定義（第四章§2参照）により

$\hat{L}_E^\alpha$含$(dx)=\hat{U}^\alpha\hat{H}_E^\alpha\rho(dx)=(\iint u^\alpha(x,z)\hat{H}_E^\alpha(dz,y)$
$f(y)dy)dx$

$$=(H_E^\alpha u(x))dx$$ （終）

<u>定理 3.1</u> （Excessive function のRiesz分解）

$\alpha>0$, $u(x)$をcompact setの上で可積分なα-excessive function, $\{G_n\}$をexhaustion, $F_n=G_n^c$とする。

そのとき$H_{F_n}v(x)=v^\alpha(x)$をみたすα-excessive function

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

$v(x)$ と $u \in \hat{\mathfrak{N}}^{\alpha}$ が存在して

$u(x) = v(x) + \bar{U}^{\alpha} u(x)$

とかける。又 $v(x)$, $u(x)$ は唯一通りに定まり $\{G_n\}$ にも関係しない。

証明　$\xi(dx) = u(x)dx$ とおくと Lemma 3.1 により、ξ は co-α-excessive measure であるから第四章定理 3.1 により、co-α-excessive measure $\eta(dx)$, 及び $u \in \hat{\mathfrak{N}}^{\alpha}$ が存在して

$\xi(dx) = \eta(dx) + \hat{U}^{\alpha} u(dx)$

とかける。η は $\hat{L}^{\alpha}_{F_n}\eta = \eta$ をみたし、このような分解は唯一通りである。所が η は co-α-excessive measure であるから Lemma 3.2 により compact set の上で可積分な α-excessive function $v(x)$ があって $\eta(dx) = v(x)dx$ となる。又 $\hat{U}^{\alpha} u(dx) = (\bar{U}^{\alpha} u(x))(dx)$ であるから dx に関し殆んどすべての x について、$u(x) = v(x) + \bar{U}^{\alpha} u(x)$ が成立つ。しかるに両辺とも α-excessive function であるから細位相で連続、従ってすべての x につき $u(x) = v(x) + \bar{U}^{\alpha} u(x)$ が成立つ。又 $\hat{L}^{\alpha}_{F_n}\eta(dx) = \eta(dx)$ で $\eta(dx) = v(x)dx$ であるから Lemma 3.3 より

$(H^{\alpha}_{F_n} v(x))dx = \hat{L}^{\alpha}_{F_n}\eta(dx) = \eta(dx) = v(x)dx$

故に殆んどすべての x に対し、$H^{\alpha}_{F_n} v(x) = v(x)$ であるが両辺とも α-excessive であるからすべての x に対し $H^{\alpha}_{F_n} v(x) = v(x)$ である。分解の一意性は $\xi(dx)$ の分解の一意性から出る。

（終）

次の諸定理はこの定理の系としても出るがむしろこの定理の証明と同様第三章の結果にもち込んで論じた方が早い。証明は大体明らかだから略すことにする。

定理 3.2　$\alpha > 0$, $u(x)$ を α-excessive function とする。もし $u \in \hat{\mathfrak{N}}^{\alpha}$ が存在して $u(x) \leq \bar{U}^{\alpha} u(x)$ であれば $u(x) = \bar{U}^{\alpha} \nu(x)$, $(\nu \in \hat{\mathfrak{N}}^{\alpha})$ である。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

定理 3.3 $\alpha > 0$, $\nu \in \hat{\mathfrak{M}}^\alpha$, $\mu_n \in \hat{\mathfrak{M}}^\alpha$ ($n \geq 1$) で $U^\alpha \mu_n(x)\uparrow$ 且つ、$\forall n \geq 1$ に対し、$U^\alpha \mu_n(x) \leq U^\alpha \nu(x)$ とすると μ_n はある測度 $\mu \in \hat{\mathfrak{M}}^\alpha$ に漠収束し $U^\alpha \mu_n(x) \uparrow U^\alpha \mu(x)$ である。

定理 3.4 $\alpha > 0$ $\mu_n \in \hat{\mathfrak{M}}^\alpha$ ($n \geq 1$) で $U^\alpha \mu_n(x)$ が単調減少であれば、μ_n はある $\mu \in \hat{\mathfrak{M}}^\alpha$ に漠収束し $U^\alpha \mu_n(x)$ は殆んどいたる所 $U^\alpha \mu(x)$ に収束する。

定理 3.5 $\alpha > 0$ $u(x)$ を compact set の上で可積分な α-excessive function とする。Eが相対compactな nearly analytic set とすると $H_E^\alpha u(x) = U^\alpha \mu(x)$ であ 但し μ は mass が $E \cup E^{co-reg}$ に含まれる有界測度である。

証明 $H_E^\alpha u(x) = U^\alpha \mu(x)$ とかけることは第三章定理 2.6 から分る。μ の mass $\subseteq E \cup E^{co-reg}$ の証明; GをEのcompactな近傍とすると明らかに $H_E^\alpha H_G^\alpha = H_E^\alpha$、
又 $H_G^\alpha u(x) = U^\alpha \nu(x)$ とかけるから

$$H_E^\alpha u(x) = H_E^\alpha H_G^\alpha u(x) = H_E^\alpha U^\alpha \nu(x) = U^\alpha \hat{H}_E^\alpha \nu(x)$$

従って有界測度は potential によってきまることから $\mu = \hat{H}_E^\alpha \nu$、所で $\hat{H}_E^\alpha \nu$ の mass は $E \cup E^{co-reg}$ に含まれる。

§4 capacity

こゝでは平衡 potential、平衡分布に関して考えるが集合が相対 compact な場合だけ考え他は筋道だけ書くことにする。
Eを相対compactな nearly analytic set、$\alpha > 0$ とすると $\Phi_E^\alpha(x) = H_E^\alpha 1(x)$ であるから定理 3.5 により mass が $E \cup E^{co-reg}$ に含まれる有界測度 $\pi_E^\alpha(dx)$ により $\Phi_E^\alpha(x) = U^\alpha \pi_E^\alpha(x)$ とかける。
又 $\hat{\Phi}_E^\alpha$ に関しても同様に mass が $E \cup E^{reg}$ に含まれる有界測度 $\hat{\pi}_E^\alpha(dx)$ により、$\hat{\Phi}_E^\alpha(x) = \hat{\pi}_E^\alpha \hat{U}^\alpha(x)$ とかける。

定理 4.1 $\hat{\pi}_E^\alpha(S) = \pi_E^\alpha(S)$ である。

証明 GをEを含み相対compactなopen setとすると、$\pi_E^\alpha = \hat{H}_E^\alpha \pi_G^\alpha$, $\hat{\pi}_E^\alpha = \hat{\pi}_G^\alpha H_E^\alpha$ が成立つ。何となれば $E \cup E^{reg} \cup E^{co-reg} \subseteq G$ でGは open set であるから $E \cup E^{reg} \subseteq G^{reg}$ 従って、$E \cup E^{reg}$ の上で $\Phi_G^\alpha(x) = 1$ 又 $H_E^\alpha(x, dy)$ の mass は $E \cup E^{reg}$ に含まれる

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

から、$\Phi_E^\alpha(x) = H_E^\alpha 1(x) = H_E^\alpha \Phi_G^\alpha(x)$、

従って $U^\alpha \Pi_E^\alpha(x) = H_E^\alpha U^\alpha \Pi_G^\alpha(x) = U^\alpha \hat{H}_E^\alpha \Pi_G^\alpha(x) \Pi^\alpha(dx)$、$\hat{H}_E^\alpha \Pi^\alpha(dx)$は有界測度で

$\hat{U}^\alpha \Pi_E^\alpha(dx) = U^\alpha \Pi_E^\alpha(x)dx = U^\alpha \hat{H}_E^\alpha \Pi_G^\alpha(x)dx = \hat{U}^\alpha \hat{H}_E^\alpha \Pi_G^\alpha(dx)$ で

あるから第四章定理 1.1 により

$\Pi_E^\alpha = \hat{H}_E^\alpha \Pi_G^\alpha$ が成立つ。 $\hat{\Pi}_E^\alpha = \hat{\Pi}_G^\alpha H_E^\alpha$ も同様

故に

$\hat{\Pi}_E^\alpha(S) \int \hat{\Pi}_E^\alpha(dx)\Phi_G^\alpha(x) = \int \hat{\Pi}_G^\alpha(dx) H_E^\alpha U^\alpha \Pi_G^\alpha(x)$

$C^\alpha(E) = \inf\{\mu(S);\ U^\alpha\mu(x) \geq 1、x \in E\}$

と定義する。実は最初に二つの patential

$u(x) = U^\alpha\mu(x)$, $\hat{u}(x) = \hat{\mu}\hat{U}^\alpha(x)$ をきめておき u, $\hat{u}$ に関する copacity $C^\alpha_{u,\hat{u}}(E)$ を $C^\alpha_{u,\hat{u}}(E) = \int \hat{\mu}(dx) H_E^\alpha u(x) = \int \hat{u}(y) \hat{H}_E^\alpha \mu(dy)$ によって定義し Choquet の alternative order ∞

及び右からの連続性等を議論しておいて $C^\alpha(E)$ に関する同じ定理を証明するが第三章 $H_E^\alpha u(x)$ の性質の所をもっと詳しくする必要があるので省略する。 結果をひろってかくと、

1° $u(x)$ を α-excessive function とすると $u(x)$ が dx に関し compact set の上で可積分ということは compact set の上で copacity measure により可積分なことゝ同値

2° copacity measure Π_E^α が存在するときは

$\Pi_E^\alpha = \Pi_E^\beta + \hat{H}_E^\alpha \gamma_E^\alpha$ $\quad \gamma_E(dx) = (\alpha-\beta)\Phi_E^\beta(x)dx$

$\Pi_E^\alpha(S)$ は α に関し連続、等である。

一方

$\Pi_E^\alpha(S) = \int \hat{\Phi}_G^\alpha(x)\Pi_E^\alpha(dx) = \int \hat{\Pi}_G^\alpha \hat{U}^\alpha \hat{H}_E^\alpha \Pi_G^\alpha(dx)$

$= \int \hat{\Pi}_G^\alpha(dx) H_E^\alpha U^\alpha \Pi_G^\alpha(x)$

故に $\Pi_E^\alpha(S) = \hat{\Pi}_E^\alpha(S)$

定義 1.1 Π_E^α を E の copacity measure, $\hat{\Pi}_E^\alpha$ を E の co-copacity measure と云い共通の値 $\Pi_E^\alpha(S) = \hat{\Pi}_E^\alpha(S)$ を E の capacity と云い $C^\alpha(E)$ と表わす。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

一般の nearly analytic set に対し $C^\alpha(E)$ を定義する方法は何通りもあるのであろう。例えば compact set に対しては上の方法で定義出来るから open set E に対しては，

$$C^\alpha(E)=\sup_{K\subseteq E} C^\alpha(K)$$

とし一般の set に対しては外容量と内容量を定義することは可能で E が nearly analytic で相対 compact のときは可容になり上の定義と一致すると思われる。実際の証明には H_E^α の E に関する上からと下からの連続性が必要である。

Hunt は [18] においてもっと直接的に次のように定義を与えている。E を analytic set とするとき．

$$C^\alpha(E)=\inf\{\mu(S);\ U^\alpha\mu(x)\geq 1\quad x\in E\}$$

と定義する。実は最初に二つの potential（これにも少し条件は要するが）$u(x)=U^\alpha\mu(x)$ と $\hat{u}(x)=\hat{\mu}\hat{G}^\alpha(x)$ をきめておき，$u\ \hat{u}$ に関する copacity $C^\alpha_{u\hat{u}}(E)$ を

$$C^\alpha_{u\hat{u}}(E)=\int\hat{u}(dx)\,H_E^\alpha u(x)=\int\hat{u}(y)\,\hat{H}_E^\alpha u(dy)$$

によって与えておき choquet の alternative of order ∞ 及び右からの連続性（才一章定義 4.3 参照）を議論しておいて、$C^\alpha(E)$ に対し同じことが成立つことを証明する。才三章「$H_E^\alpha u(x)$ の性質」をもう少し詳しく精密にする必要があるので Hunt の [20] を見て頂くことにして省略する。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

参考文献

直接. 間接に参考にしたもののみで完全を期したものではない

[1] Blumenthal. An extended Markov property. Trans. Amer. Math. Soc. Vol.85. (1957) P.52～72

[2] M. Brelot. G. Choquet. et J. Deny. Seminaire de Theorie du potentiel 1960/61.

[3] Bourbaki, Topologie generale Chapt. I.

[4] 〃 L' integration Chap. III.

[5] H. Cartan. Théorie du potentiel newtonien ; energie. capacité. suite de potentiels Bull. Soc. Math. France 73. (1945) P 74～106.

[6] H. Cartan, Theorie générale du balayage en potentiel newtonien

[7] H. Cartan and J. Deny, Le principe du maximum en theorie du potentiel et la notion de fonction subhar monique. Acta. Sci. Math. Szeged t 12 (1950) P.P 81～100.

[8] G. Choquet. Theory of capacities. Ann. inst Fourier : Grenoble t.5 (1953～1954)

[9] Choquet et J. Deny. Aspects lineaires de theorie du potentiel I. (Etude des modéle finis) C.R. Acad. Sci. Paris t.242 (1956 PP 222～225.

[10] Choquet and J. Deny. Aspects lineaire de Theorie du potentiel II. (Theoreme de dualit et application) C.R. Acad. Sci Paris t. 24 (1956) PP. 764～767.

[11] Doob, Stochastic processes. New York (195

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

[12] Doob, Semi-martingales and subharmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc. vol 77. (1954) P.P. 86~121.

[13] Doob, A probability approach to the equation, Trans. Amer. Math. Soc. vol 80 (1955) P.P. 216~280.

[14] Doob Probability methods applied to the first boundary value problem. Proceeding of 3rd Berkeley Symp. (1955)

[15] Dynkin ; Die Grundlagen der Theorie der Markoffschen Prozesse. Spriragen-Verlag (1961) (Theory of Markov processes : Pergamon (1960))

[16] 一松、二宮；最近のポテンシャル論 I（数学 ）

[17] G.A. Hunt ; Some theorems concerning Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. vol 81 (1956)

[18] G.A. Hunt; Markov processes and potentials [I] Ill. Jour of math. vol 1 No. 1 (1957) PP 44~93.

[19] G.A. Hunt ; Markov processes and potentials [II] Ill. Jour. of math. vol 1. No.3. (1957) P.P 316~369

[20] G.A. Hunt ; Markov processes and potentials [III] Ill. Jour of math vol. 2. (1958) p.p. 151~213.

[21] K. Ito and H.P. Mckean, Diffusion to oppear

[22] K. Ito. Tataの Lecture note.

[2.3] 伊藤 清；確率過程 (I) (II)（応用数学講座）

[24] 伊藤、渡辺(信)、福島；拡散過程 (Seminar on probability vol 3)

[25] 池田、上野、田中、佐藤、多次元拡散過程の境界問題(上)(下) (Seminar on probability vol 5. 6)

[26] 亀谷俊司、ポテンシャル論の最近の発展（現代の数学）

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

[27] J. R. Kinney, Continuity properties of sample functions of Markov processes. Trans. Amer. Math. Soc. vol 74 (1953) p.p. 280~302.

[28] H. Loomis. An introduction to abstract Harmonic analysis.

[29] G. Maruyama. On the strong Markov property. Mem. Kyushu Univ. 13 (1959)

[30] マルコフ過程について、確率論シンポジウム講演アブストラクト.

[31] 二宮．幸：最近のポテンシャル論II．数学．11巻．1号(1959)

[32] 大津賀信、函数論特論（現代数学講座）

[33] T. Rado; Sub harmonic functions (1937)

[34] T. Ueno. On recurent Markov processes. Kōdai Math. Sem. Rep. 12 (1960) 109−142.

[35] T. Watanabe; Some general properties of Markov processes J. Inst. poly. Osaka City univ. 10 (1959)

[36] T. Watanabe; A probabilistic method in Hausdorff moment problem and Laplace Stieltjes transform. J. math. Soc.

[37] T. Watanabe; On the theory of Martin boundries induced by countable Markov processes Mem of col. univ. of Kyoto vol 33: N. D 1 (1960)

[38] 渡辺 毅；可付番空間の上の Markov 過程から導かれる martin 境界（Seminar on Probability. vol 1）

[39] 吉田耕作　位相解析

[40] 井上正夫　ポテンシャル論.

[41] 数学 13巻 才1号（1961）　確率論特集号

[42] Widder. Laplace transform.

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

◆ 補　　足 ◆

1° オ一章に関しては[1] [2] [11] [8] [15] [18] [22] [23] [29]等参照．

$\mathcal{F}_\sigma$ の定義は．stopped path w_σ^- ; $(w_\sigma^-)_t = w_{\sigma\wedge t}$ を定義し、w_σ^- を可測にする最小の Borel field を $\mathbb{B}_\sigma$．その P_μ による completion を $\mathcal{F}_\sigma^\mu$，$\mathcal{F}_\sigma = \bigcap_\mu \mathcal{F}_\sigma^\mu$．と定義した方が．[21] [22] 等の formulation に近いが completion すると．$W \to W_\sigma^-$ が必ずしも $(\mathbb{W}.\mathcal{F}) \to (\mathbb{W}.\mathcal{F})$ として可測にならず強 Markov 性の表現に不便なので，Blumenthal，や Hunt に近い定義を与えた。

2° Hunt は[18]では強 Markov 性と．Blumenthal の定理を仮定して．そこから出発している．

3° オ二章は[2] [9] [10] [19] 参照．

最大値の原理に関しては [2]，[10]．Hunt の表現定理に関しては [19]．なお [10]の中には有限個の state の上での potential を考え（従って potential の核は matrix になり、$V(C_0(S))$ が $VC_\infty(S)$ で dense という条件は determinat $\neq 0$ になる）掃散の原理をみたす核 $V=(V(x.y))$ は対角線が 0 になる $\Pi=(\pi(x.y))$（但し．$\pi(x.y) \geqq 0$）と $g(x)>0$ により

$$V(x.y) = \sum_{z\in S-x} \pi(x.z)\,V(z.y) \qquad (x \neq y)$$

$$= \sum_{z\in S-x} \pi(x.z)\,V(z.x) + g(x) \qquad (x = y)$$

とかけることと同値であることを示してある．これは確率論でいう Dynkin formula に極めて近い形で．

$$V(x.y) = E_x\left(\int_0^\infty \chi_{\{y\}}(x_t)dt\right)$$

$$= E_x\left(\int_0^{\tau_x} \chi_{\{y\}}(x_t)dt\right) + E_x\left(E_{x_{\tau_x}}\left(\int_0^\infty \chi_{\{y\}}(x_t)dt\right)\right)$$

$(\tau_x = \inf\{t : x_t \neq x\})$ にあたる．

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

4° なお二章の Hunt の収束定理中で maximum principle を他の形でおきかえ、recurrent process に応用出来る形にする研究が京大の渡辺信三氏により進められている。

5° オ三章は主として[18]、細位相の定義は[2]による。細位相の定義は大体 path に沿っての極限という意味にもとれるから、Martin 境界論が完成したときの Fatou の定理は細位相に関係する。Brown 運動の場合には[12]に論じてある。

又、excessive function と superharmonic function (定義は、U を open base 1 の 1 つの element $\ni x$、$P_x(\sigma_{U^c}$
$=1$ のとき $u(x) \geqq E_x(u(x_{\sigma_{U^c}}))$) との本質的な同等性が
$U^\alpha ; C(S) \to C(S)$ [但し $C(S)$ は有界連続函数] のとき証さ
ことを、渡辺毅氏からの私信で知ったことをつけ加えてお

6° $H_E^\alpha u(x)$ の性質の中で、E が nearly open な a
のときは、$f_n \in \mathcal{B}^+(S)$ で $[f_n] \subseteq E$、かつ $U^\alpha f_n \uparrow$ る
ものがとれる。このことは killing による方法で の
中に示されていて、$H_E^\alpha u$、L_E^α 等の性質を論じた ty を
考えるとき重要であるが、killing を一般的に しわづ
らはしいので省略した。

7° オ五章 §1〜§2 は[2]の中で Meye そのままで
ある。定理 1.2 は Ray の compact の思想圏内に
入るものと考えられる。topology を入れかえる必要がないという条件が exact という概念であろう。§3 はそれを Hunt の[20]の一部に当てはめたものである。なお、Hunt の[20]の中には"F が compact で極集合でないとき、$F^{reg} \neq \phi$"という仮定をつけ加え(核が symmetric なときは自然にみたされている。)連続性の原理と同値な条件をいくつか出している。形式化が少し窮い、整理が不充分になったので省略した。

8° M が 3 次元 Brown 運動のときは、以上の議論は大体 Newton

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

potential 論の基本的部分とうまく対応がつく. $H_E(x.dy)$ を古典的な調和測度. regular, irregular の定義は Dirichlet 問題に対する regular, irregular, excessive function は super harmonic function, capacity は capacity に対応する. 唯 symmetric という仮定をおかない限りエネルギー原理にあたるもの, Gauss の変分にあたるものはなく、又, それ等のすっきりした確率論的表現を得られていない. 詳しくは Doob [12] Ito [22] [21] を見られたい。

Sem. on Probab.
Vol.11 1962年
P1-109

1962年3月発行 確率論セミナー