SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 6

池田信行，上野正，田中洋，佐藤健一

多次元擴散過程の境界問題（下）

1961

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

目 次

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

第4章　境界上の process

楕円型 operator A と Wentzell の境界条件 $Lu=0$ から定まる diffusion を求める問題は解析的には、任意の $\alpha>0$ に対し

$$(0.1)\qquad \begin{cases} D\text{内で} & (\alpha-A)u=f \\ \partial D\text{上で} & Lu=0 \end{cases}$$

を解く問題である。これは、前章で述べたように、α を固定した時任意の $\beta>0$ に対し

$$(0.2)\qquad \begin{cases} D\text{内で} & (\alpha-A)u=0 \\ \partial D\text{上で} & (\beta-L)u=g \end{cases}$$

を解く問題に帰着する。すなわち、方程式

$$(0.3)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=LH_\alpha u$$

より定まる境界上の Markov 過程を求める問題に帰着する。そして、ある場合には実際（0.2）が解けたのであった。ところで、（0.1）で定まる $\overline{D}$上の process と（0.3）で定まる境界上の process との間には，どんな関係があるであろうか？

α を正とせず 0 として

$$(0.4)\qquad \begin{cases} D\text{内で} & Au=0 \\ \partial D\text{上で} & (\beta-L)u=g \end{cases}$$

とするとこれは丁度，（0.1）と見かけ上の dual である。境界条件が今度は方程式と呼ぶべき役割を果し，内部での方程式はいわば"内部条件"とでもいうべき役割を果す。（0.4）から定まる process，すなわち，方程式

$$(0.5)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=LHu$$

から定まる境界上の Markov 過程 $\widetilde{x}_t$ を，われわれは，（0.1）よりきまる x_t に対応する境界上の process と呼ぶ。

x_t と $\widetilde{x}_t$ との間にはどのような関係があるであろうか？　大ざっぱに云って，x_t を境界上だけで見たものが $\widetilde{x}_t$ になるのである。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

これの確率論的考察がこの章の目標である。特に，$L=\frac{\partial}{\partial n}$ の場合境界上の process $\widetilde{X}_t$ の確率論的構成を行う。

§1. 一般的な説明

領域Dが有界というわれわれの set up には入らないけれども，最も簡単な場合として，2次元 Euclid 空間 R^2 内の上半平面をDとし，$A=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$，$L=\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial n}$ の場合を考える。[1] 即ち，反射壁の Brown 運動である。$x_t(w)$ を R^1 の standard Brownian motion，$y_t(w)$ を $[0,+\infty)$ における reflecting Brownian motion とし，互に独立とすると，$(x_t(w), y_t(w))$ がこれである。$H((x,y), d\xi)$ を境界への hitting measure，すなわち，

$$(1.1)\qquad H((x,y), d\xi)=P_{(x,y)}(x_{\sigma_0(w)}(w)\in d\xi),$$

たゞし

$$\sigma_0(w)=\inf\{t\geq 0\,;\ y_t(w)=0\}$$

とする。第2章§4で述べたことと同様に，

$$(1.2)\qquad Hf(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)H((x,y), d\xi)$$
$$=E_{(x,y)}(f(x_{\sigma_0(w)}(w)))$$

は，境界函数fに対する Dirichlet 問題の解である。さて，

$$(1.3)\qquad \widetilde{T}_t f(x)=Hf(x,t)$$

とおくと，$\widetilde{T}_t$ は半群であることが，(x_t, y_t) の強 Markov 性と空間的一様性から証明される。しかも，Hfが境界で微分可能ならば

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}(\widetilde{T}_t f(x)-f(x))=\frac{\partial}{\partial y}Hf(x,0)$$

$$=\sqrt{2}\,\frac{\partial}{\partial n}Hf(x,0)=LHf(x)$$

---

1) $\frac{\partial}{\partial n}$ の定義は第2章(1.2)を採用する。従って，$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}$.

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

であるから，$\tilde{T}_t$が丁度，(x_t, y_t)に対応する境界上のprocessの半群である。

y_t の 0 における local time[2] を $t(t,w)$，その逆函数を $t^{-1}(t,w)$ とする：

$$(1.4)\quad t^{-1}(t,w)=\max\{s;\, t(s,w)=t\}$$

$t(t,w)$ はtに関して連続で，tが0から$+\infty$まで動く時 $t(t,w)$ も 0から$+\infty$へ動く単調非減少函数である。従って(1.4)によって $t^{-1}(t,w)$ が $0\leq t<+\infty$ で定義され，単調増大かつ右連続である。また，$t(t,w)$ は $y_t(w)$ が 0 にある時刻だけで増加するから，$y_{t^{-1}(t,w)}(w)$ は常に0である。

$$(1.5)\quad x_{t^{-1}(t,w)}(w)=\tilde{x}_t(w)$$

とおくと，$\tilde{x}_t$ は ∂D すなわち x軸上のMarkov過程になり，

$$(1.6)\quad E_{(x,0)}(f(\tilde{x}_t(w)))=\tilde{T}_t f(x)$$

が成り立つ。

(1.6)を証明するには，$t^{-1}(t,w)$ が first passage process と同法則であることに注意する。すなわち，

$$(1.7)\quad E_{(x,0)}(t^{-1}(t,w)\in ds)=E_{(x,t)}(\sigma_0(w)\in ds)$$

である[3]。$y_t(w)$，$t^{-1}(t,w)$，$\sigma_0(w)$ はすべて $x_t(w)$ と独立であるから，(1.7)により

$$E_{(x,0)}(f(\tilde{x}_t(w)))=E_{(x,t)}(f(x_{\sigma_0(w)}(w)))$$
$$=Hf(x,t)=\tilde{T}_t f(x)$$

であり，(1.6)が云えた。つまり今の場合は，もとのprocess

2) [15] P. 30 参照

3) [16] 参照.

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

(x_t, y_t) を境界上だけで増加する時間 $t(t, w)$ によって眺めたものが対応する境界上の process にほかならない。なお、この場合境界上の process は Cauchy 過程である.[4)]

一般の場合にも、∂D 上だけで増加する時間 $S(t,w)$ —— ∂D 上の local time と云うべきもの —— があって，S を time scale としてもとの Markov 過程 $X_t(w)$ を眺めたもの $\tilde{X}_t(w) = X_{S^{-1}(t,w)}(w)$ が X_t に対応する境界上の process になっていないだろうか？　反射壁の diffusion では事実そうなっていることが，§4 で証明される。

$X_{S^{-1}(t,w)}(w)$ が Markov 過程になるためには，$S(t,w)$ が次の3つの性質を持っていることが望ましい：[5)]

(1.8)　　$S(t, w) \geqq 0,$

(1.9)　　$S(t, w)$ は $\mathbb{B}_t$ 可測.

(1.10)　　$S(t+s, w) = S(t, w) + S(s, w_t^+).$

V. A. Volkonski [69] は (1.8) —— (1.10) をみたすものを additive functional と呼び，excessive function との関連においてその構造を研究している。函数の $e(x)$ が excessive とは，

(1.11)　　$e(x) \geqq 0$

(1.12)　　$T_t e \leqq e$

(1.13)　　$T_t e \uparrow e, \quad t \downarrow 0$

なることである．$S(t,w)$ が右連続のとき，$e(x) = E_x(S(+\infty, w))$ が excessive function になるのである。

次節では excessive function に関する一つの定理を述べ，そ

---

4) Spitzer [65] 参照.

5) [16], [68], [61] 等を参照.

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

の応用として境界上の *local time* の存在について論じる。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

§2. excessive function と additive functional

第1章で定義したように，$\mathbf{M}=(W,\mathcal{B},P_x)$ を位相空間R上の強Markov過程とする．pathは右連続である．

<u>定義 2.1</u>　$\alpha\geqq 0$ とする．R上で定義され $\mathcal{B}(R)$ 可測な函数 $e(x)\geqq 0$ が

$$(2.1)\qquad e^{-\alpha t}E_x(e(x_t)\,;\,t<\sigma_\infty)\uparrow e(x),\ t\downarrow 0$$

をみたす時，$e(x)$ を $(\mathbf{M},\alpha)$ に関し excessive であるという．[1)]

今，$f\geqq 0$ に対し

$$(2.2)\qquad S(t,w)=\int_0^{t\wedge\sigma_\infty(w)}e^{-\alpha s}f(x_s(w))\,ds$$

とおくと，次の性質を持つ：

$$(2.3)\qquad 0=S(0,w)\leq S(t,w),\ S(t,w)\text{ は }t\text{ の連続函数}.$$

$$(2.4)\qquad S(t,w)=S(t,w_t^-)$$

$$(2.5)\qquad S(t+s,w)=S(t,w)+e^{-\alpha t}S(s,w_t^+).$$ 函数 $e(x)$ を

$$(2.6)\qquad e(x)=E_x(S(+\infty,w))$$

によって定義しよう。$e(x)$ が α に関し excessive なることが (2.3)――(2.5) から分る，なぜなら

$$e^{-\alpha t}E_x(e(x_t)\,;\,t<\sigma_\infty)=e^{-\alpha t}E_x(E_{x_t}(S(+\infty))\,;\,t<\sigma_\infty)$$

$$=e^{-\alpha t}E_x(S(+\infty,w_t^+)\,;\,t<\sigma_\infty)$$

$$=E_x(S(+\infty,w)-S(t,w)\,;\,t<\sigma_\infty)\uparrow e(x),\ t\downarrow 0$$

であるから，一般に，(2.3)――(2.5) を満たす $S(t,w)$ が与えられると，(2.6) によって定義した $e(x)$ は α に関し excessive なのである。

---

1) $\mathbf{M}$ が自明のときは単に，α に関し excessive であるとも云う。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

逆に，どのような excessive function が (2.3)——(2.5) を満たす random functional $S(t,w)$ を用いて (2.6) の形に表わされるであろうか？ これに対して次の定理が成り立つ。

<u>定理 2.1</u> $e(x)$ を $(\mathbf{M}, \alpha)$ に関し excessive とする $(\alpha \geq 0)$. もし $e(x)$ が有界で

(2.7) $e^{-\alpha t}E_x(e(x_t)\,;\, t<\sigma_\infty)\to 0,\ t\to+\infty$, を満たし，更に x につき一様に

(2.8) $e^{-\alpha t}E_x(e(x_t)\,;\, t<\sigma_\infty)\uparrow e(x),\ t\downarrow 0$ を満たしていれば，

(i) (2.3)——(2.5) を満たすような $S(t,w)$ が存在して $e(x)$ は (2.6) の形に書ける。

(ii) このような $S(t,w)$ は唯一つ.

<u>証明</u> (i) H. P. McKean が Brownian hitting probability の diffusion に対する time substitution function を構成したのと同様の方法を用いる。

$$f_n(x)=n\left[e(x)-e^{-\alpha n^{-1}}E_x(e(x_{n^{-1}})\,;\, n^{-1}<\sigma_\infty)\right]$$

$$S_n(t,w)=\int_0^{t\wedge\sigma_\infty(w)}e^{-\alpha s}f_n(x_s(w))\,ds$$

$$e_n(x)=E_x(S_n(+\infty))$$

とおくと，

(2.9) $$\begin{aligned} e_n(x)&=nE_x\left[\int_0^{\sigma_\infty}e^{-\alpha t}\{e(x_t)-e^{-\alpha n^{-1}}E_{x_t}(e(x_{n^{-1}})\,;\, n^{-1}<\sigma_\infty)\}\,dt\right]\\ &=nE_x\left[\int_0^{\sigma_\infty}e^{-\alpha t}e(x_t)\,dt\right]-nE_x\left[\int_{n^{-1}}^{\sigma_\infty}e^{-\alpha t}e(x_t)\,dt\,;\, n^{-1}<\sigma_\infty\right]\\ &=n\int_0^{n^{-1}}e^{-\alpha t}E_x(e(x_t)\,;\, t<\sigma_\infty)\,dt\uparrow e(x)\ (n\uparrow+\infty)\end{aligned}$$

が x につき一様に成立つ．次に $\ell_n(t)=E_x[S_n(+\infty)/\mathcal{B}_{t\wedge\sigma_\infty}]$ とおくと，$S_n(t,w)$ に対する (2.4), (2.5) から明らかに

(2.10) $S_n(t,w)=\ell_n(t,w)-e^{-\alpha t}e_n(x_t(w))$ である．更に

$$(2.11) \qquad P_x\{\max_{0\leq t\leq +\infty} |l_n(t)-l_m(t)|>\varepsilon\}\leq 2\varepsilon^{-2}\|e\|\|e_n-e_m\|$$

が成立つ．実際 $l_n(t)-l_m(t)=E_x\{S_n(+\infty)-S_m(+\infty)/\mathcal{B}_{t\wedge\sigma_\infty}\}$

より $\{l_n(t)-l_m(t),\ 0\leq t\leq +\infty,\ \mathcal{B}_t\}$ は martingale である．

もちろん $E_x\{|l_n(t)-l_m(t)|^2\}<+\infty$ であるから

$\{|l_n(t)-l_m(t)|^2,\ 0\leq t\leq +\infty,\ \mathcal{B}_t\}$ は semi-martingale になる．[2] 故に Doob による Kolmogorov 不等式の semi-martingale への拡張[3]により

$$P_x\{\max_{0\leq t\leq +\infty} |l_n(t)-l_m(t)|>\varepsilon\}\leq \varepsilon^{-2}E_x\{|l_n(+\infty)-l_m(+\infty)|^2\}$$

が成立つ．ところが

$$\begin{aligned}(2.12) \qquad & E_x\{|l_n(+\infty)-l_m(+\infty)|^2\}\\ &=E_x\{|S_n(+\infty)-S_m(+\infty)|^2\}\\ &=E_x\{\int_0^{\sigma_\infty}\int_0^{\sigma_\infty}e^{-\alpha t_1}e^{-\alpha t_2}f(x_{t_1})f(x_{t_2})\,dt_1\,dt_2\}\ (f=f_n-f_m)\\ &=2E_x\{\int_0^{\sigma_\infty}dt_1 e^{-\alpha t_1}f(x_{t_1})\int_{t_1}^{\sigma_\infty}e^{-\alpha t_2}f(x_{t_2})\,dt_2\}\\ &=2E_x\{\int_0^{\sigma_\infty}e^{-\alpha t_1}f(x_{t_1})(e_n-e_m)(x_{t_1})\,dt_1\}\\ &\leq 2\|e\|\|e_n-e_m\|\end{aligned}$$

であるから（2.11）を得る。

（2.11）より $n_1<n_2<\cdots$ を適当に選び

$$P_x\{\max_{0\leq t\leq +\infty} |l_{n_i}(t)-l_{n_k}(t)|>2^{-j}\}<2^{-j},\ x\in S,\ i,k\geq j$$ と出来

る．Borel-Cantelli の lemma により $P_x\{l_{n_j}(t)$ が $j\to+\infty$ のときｔにつき一様収束$\}=1$ を得る。ところが（2.10）に注意すると、

---

[2] Doob [1] p. 295

[3] Doob [1] p. 353

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$W' = \{w\,;\, S_{n_j}(t,w)$ が $j\to+\infty$ のとき t につき一様収束$\}$
とおくとき $P_x[W'] = 1$ が成り立つ。

$S_{n_j}(t,w)$ の極限を $S(t,w)$ とすると $w \in W'$ に対し (2.3)−(2.5) が成り立つことが容易にわかる。又 (2.6) も明らか。

(ii) $S_1(t,w)$ を (2.3)−(2.6) をみたす任意の random functional とし，$\tilde{S}(t,w) \doteq S(t,w) - S_1(t,w)$ とおく。

$$
\begin{aligned}
& E_x\{\tilde{S}(+\infty,w)^2\} \\
&= E_x\{\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\tilde{S}(dt_1)\tilde{S}(dt_2)\} \\
&= 2E_x\{\int_0^{+\infty}\tilde{S}(dt_1)\int_{t_1}^{+\infty}\tilde{S}(dt_2)\} \\
&= 2E_x\{\int_0^{+\infty}\tilde{S}(dt_1)\,e^{-\alpha t_1}\int_0^{+\infty}\tilde{S}(dt_2, w_{t_1}^+)\} \\
&= 2E_x\{\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t_1}\tilde{S}(dt_1)E_{x_{t_1}}(\int_0^{+\infty}\tilde{S}(dt_2))\} \\
&= 2E_x\{\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t_1}\tilde{S}(dt_1)\{e(x_{t_1})-e(x_{t_1})\}\} = 0
\end{aligned}
$$

であるから，$\tilde{S}(+\infty,w) = 0$ である。また

$$E_x(\tilde{S}(+\infty, w_t^+)^2) = E_x(E_{x_t}(\tilde{S}(+\infty)^2)) = 0$$

であるから $\tilde{S}(+\infty, w_t^+) = 0$. 従って (2.5) により $S = S_1$ を得る。

<u>定義 2.2</u> 前定理で構成された $S(t,w)$ を $e(x)$ からきまる additive functional と呼ぶ。

<u>系.</u> $\alpha > 0$，S が campact, T_t が $C(S)\to C(S)$ で，$e(x)$ が α に関し excessive な連続函数であれば，前定理の結論が成り立つ。

次に，$\mathbb{M}$ の遷移確率 $P(t,x,dy)$ がある測度 m につき絶対連続な場合を考え，その密度函数を $p(t,x,y)$ としよう。

$$g_\alpha(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,p(t,x,y)\,dt, \quad \alpha \geqq 0$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

とおこう．測度μに対し potential

$$e(x)=\int_S g_\alpha(x,y)\mu(dy) \tag{2.13}$$

は$\alpha\geqq 0$に関し excessive になっている[4]．なぜなら，積分の順序を変え，Chapman-Kolmogorov の等式を用いることにより

$$e^{-\alpha t}T_t e(x)=\int_t^{+\infty}e^{-\alpha s}ds\int_S p(s,x,y)\mu(dy)$$

となるからである．

このような potential に対して次の定理が成り立つ．

<u>定理 2.2</u>　potential $e_i=\int g_\alpha d\mu_i\ (i=1,2)$ が定理2.1の条件を満すものとし，$S_i(t,w)$ を e_i からきまる additive functional とする．閉集合 F の上で $\mu_1=\mu_2$ であれば

$$S_1(t,w)=S_2(t,w),\quad t<\sigma(w)=\sigma_{F^c}(w)$$

である。

<u>証明</u>　(2.5)，(2.6) から

$$E_x(S_i(\sigma,w))=e_i(x)-E_x(e^{-\alpha\sigma}e_i(x_\sigma))$$

$$=\int_S g_\alpha(x,y)\mu_i(dy)-E_x(e^{-\alpha\sigma}\int_S g_\alpha(x_\sigma,y)\mu_i(dy))$$

$$=\int_F g_\alpha^F(x,y)\mu_i(dy).$$

ただし

$$g_\alpha^F(x,y)=g_\alpha(x,y)-E_x(e^{-\alpha\sigma}g_\alpha(x_\sigma,y))$$

とおいた[5]．明かに $g_\alpha^F(x,y)=0,\ x\notin F$ である。よって

$$E_x(S_1(\sigma,w))=E_x(S_2(\sigma,w))$$

である．あとは定理2.1 (ii) の証明と同様にして $S_1(\sigma,w)=S_2(\sigma,w)$，更に $S_1(t,w)=S_2(t,w)$，$t<\sigma$ を得る．

---

[4] 逆に，与えられた excessive function を (2.13) の形に表現する問題は付録[5°]で論じる。

[5] g_α^Fはσで殺した Markov 過程の Green 密度である。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$S_i(\sigma(w), w) = S_i(t, w) + S_i(\sigma(w_t^+), w_t^+)$, $t < \sigma(w)$ に注意すればよい。

系. potential $e = \int g_\alpha \, d\mu$ からきまる。
additive functional $S(t, w)$ は, $x_t(w)$ が μ の support の上にある時刻でのみ増加する。

証明 $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = 0$, $F \subset$ (μ の support の補集合) として前定理を応用し, 更に $\mathbb{M}$ の強 Markov 性を用いればよい。

以上で excessive function と additive functional を関係づける一般論を終り, 再び多次元拡散過程に戻る。領域 D, 微分 operator A に対する仮定は第2章で述べた通りとする。
$\mathbb{M}^+ = (W_c, \mathcal{B}(W_c), P_x : x \in \overline{D})$ を A から決まる $\overline{D}$ 上の反射壁の process とし, 特に, 微分しない項 $C \equiv 0$ とする。その定義は第2章§4で述べた。W_c は $\sigma_\infty = +\infty$ なる $\overline{D}$ 上の連続な path の全体である。第2章§4と同じく, A と境界条件 $Lu = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ に対する基本解を $p^+(t, x, y)$ とおき, 測度 $m(dy)$, $\widetilde{m}(dy)$ は第2章(1.3), (1.4)で定義する。$\mathbb{M}^+$ の遷移確率の測度 m に関する密度が丁度 $p^+(t, x, y)$ である。$\alpha > 0$ に対し

(2.14) $$g_\alpha^+(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} p^+(t, x, y) \, dt$$

とおくと, 函数

(2.15) $$e_\alpha(x) = \int_{\partial D} g_\alpha^+(x, y) \, \widetilde{m}(dy)$$

は $(\mathbb{M}^+, \alpha)$ に関し, excessive であるのみならず, $\overline{D}$ 上で連続である。(第2章定理2.3参照[6]). よって定理2.1の系により, e_α に対応する additive functional $S^\alpha(t, w)$ が存在する。

(2.16) $$S(t, w) = \int_0^t e^{\alpha s} S^\alpha(ds, w)$$

とおくと, S^α の構成法から明かなように, $S(t, w)$ は

---

[6] 今の場合, $\widetilde{g}(x, y) = g_\alpha^+(x, y)$.

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$S_n(t,w)=\int_0^t f_n(x_s(w))\,ds$$

の一様（$0\leqq t\leqq T<+\infty$ に於いて）極限である。但し $f_n(x)=n\{e_\alpha(x)-e^{-\alpha n^{-1}}E_x(e_\alpha(x_{n^{-1}}))\}$. これから容易に次のことが分る：

$P_x(W')=1$, $x\in\bar{D}$ なるある W' があって，$\forall w\in W'$ に対し

(2.17) $S(t,w)\geqq 0$ で t につき連続非減少,

(2.18) $S(t,w)$ は $\mathbb{B}_t$ 可測,

(2.19) $w\in W'$ なら $w_t^+\in W'$ で
$S(t+s,w)=S(t,w)+S(s,w_t^+)$,

(2.20) $E_x(S(t,w))=\int_{\partial D}\tilde{m}(dy)\int_0^t p^+(s,x,y)\,ds.$

定理2.1における S の一意性の証明と同様にして（2.17）—（2.20）をみたす $S(t,w)$ は唯一つであることが分り，特にαの選び方に関係しない。なお，定理2.2の系により，$S_\alpha(t,w)$ 従って $S(t,w)$ は，$x_t(w)\in\partial D$なるような時刻 t以外では増加しない。

定義2.3　$S(t,w)$ を反射壁の process $\mathbb{M}^+$ に対する境界上の local time と呼ぶ。

§4でわれわれは，以上とは別の方法で境界上の local time $S(t,w)$ を構成する。それは,1次元の local time の直接の analogyである。そして，その構成法を用いて，$x_{S^{-1}(t,w)}(w)$が$\mathbb{M}^+$に対応する境界上の processになることを示す。次節は§4への準備である。

§3. a^{ij} からきまる距離

領域D，楕円型 operator A に対する仮定は，第2章と同じとする。すなわち，Dに対する仮定は上巻 p,22, A に対する仮定は上

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

巻 P. 38 で述べた。A の形は次の通りである。

$$Au(x)=\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}(x)\sqrt{a(x)}\frac{\partial u(x)}{\partial x^j}\right)+b^i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^i}+c(x)u(x)$$

$a(x)$, 法線微分 $\frac{\partial}{\partial n}$, 測度 m, $\tilde{m}$ 等の定義も上巻 P. 38−39 で述べた通りとする。$a_{ij}(x)$ は上巻 P. 48で定義した通り $a^{ij}(x)$ の逆行列である。

a^{ij} から次のようにして $\overline{D}$ に距離がはいる。まず, $\overline{D}$ 上の曲線 C, すなわち

$$C:\ \lambda\in[0,1]\longrightarrow x(\lambda)=(x^1(\lambda),\cdots,x^N(\lambda))\in\overline{D}$$

なる連続かつ区分的に C^1 級なる写像に対し,

$$(3.1)\qquad \ell(C)=\int_0^1\left(a_{ij}(x(\lambda))\frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}\frac{dx^j(\lambda)}{d\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}d\lambda$$

なる値を, 曲線 C の「a^{ij} からきまる長さ」と呼ぶ。a_{ij} が座標変換に対し共変 tensor の変換をするから, (3.1) の値は座標変換に対し不変である。$x, y\in\overline{D}$ に対し x と y を結ぶ $\overline{D}$ 上のすべての曲線 C を考え, $\ell(C)$ の下限を x と y との「a^{ij} からきまる距離」と呼ぶ。これを記号 $dis(x,y)$ で表わす。これが距離の公理を満たすことは明らかであり, この距離は Euclid 空間の普通の距離と equivalent である。なお, 記号

$$dis(x,\partial D)=\inf_{y\in\partial D}\ dis(x,y)$$

を用いる。

第2章 Prop. 1.1 で述べたように, 点 $x_0\in\partial D$ に対し, $\overline{D}$ の上のある近傍 $U(x_0)$ において canonical な局所座標 $(\overline{x}^i)$ と称する座標系のとり方が存在した。その主な性質は,

$$(3.2)\qquad x\in\partial D\cap U(x_0)\iff \overline{x}^N=0$$

$$(3.3)\qquad x\in D\cap U(x_0)\iff \overline{x}^N>0$$

(3.4) $\quad x\in\partial D\cap U(x_0)$ ならば

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$\overline{a}^{Ni}(x)=\overline{a}^{iN}(x)=\overline{a}_{Ni}(x)=\overline{a}_{iN}(x)$$
$$=\begin{cases}0, & i=1,\cdots,N-1\\ 1, & i=N\end{cases}$$

であった。たゞし，$\overline{a}^{ij}(x)$, $\overline{a}_{ij}(x)$ は局所座標 $(\overline{x}^i)$ で表わした時の a^{ij}, a_{ij} の値であった。

以下，canonical な局所座標と a^{ij} からきまる距離との関係を述べ，それを用いていくつかの Prop. を導く。

$U(x_0)$ とそこにおける canonical な局所座標 $(\overline{x}^i)$ を一つ固定する。十分小さい $r>0$ を固定し，$\rho>0$ に対し

$$(3.5)\qquad V_\rho=\left\{x\,;\,\sum_{i=1}^{N-1}(\overline{x}^i-\overline{x}_0^{\,i})^2<r^2,\ 0\leq\overline{x}^N<\rho\right\}$$

とおく。すなわち V_ρ は，底面の中心 x_0，canonicalな局所近傍ではかって 底面の半径 r，高さ ρ なる円筒である。ρ も十分小さくとる。

<u>Prop. 3.1.</u> V_{ρ_0} を一つ固定する。$x\in V_{\rho_0}$ において $\overline{x}^N\to 0$ と $dis(x,\partial D)\to 0$ とは同値で，その時

$$(3.6)\qquad \frac{dis\,(x,\partial D)}{\overline{x}^N}\longrightarrow 1$$

が成り立つ。

<u>証明</u> $\varepsilon>0$ が任意に与えられたとしよう。点 $x\in V_{\rho_0}$ の canonical な局所座標を $(\overline{x}^i)$ とし，$\overline{x}^N=\rho$ とする。x と ∂D とを結ぶ曲線 C_1 として

$$C_1:\ \lambda\in[0,1]\longrightarrow y(\lambda)\in V_{\rho_0}$$
$$\begin{cases}\overline{y}^i(\lambda)=\overline{x}^i, & i=1,\cdots,N-1\\ \overline{y}^N(\lambda)=\rho\lambda\end{cases}$$

を選ぶ。(3.4) により ρ を十分小さく選んで $0\leq\overline{y}^N\leq\rho$ ならば $0<\overline{a}_{NN}(y)\leq 1+\varepsilon$ とする。この時 (3.1) により

$$(3.7)\qquad dis\,(x,\partial D)\leq l(C_1)=\int_0^1(\overline{a}_{NN}(y(\lambda))\rho^2)^{\frac{1}{2}}d\lambda\leq(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\rho$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

故に $\overline{x}^N \to 0$ ならば $dis(x, \partial D) \to 0$ である。$dis(x, \partial D) \to 0$ ならば $\overline{x}^N \to 0$ なることも明らかである。

$y \in \partial D \cap U(x_0)$ とし、(3.4) が成り立っていることに注意して、行列 $(\overline{a}_{ij}(y))$ の固有値を $\overline{\alpha}_1(y), \cdots, \overline{\alpha}_{N-1}(y)$, 1 とすると、$N-1$ 次のある直交行列によって

$$\begin{pmatrix} Q^t & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \cdots & \overline{a}_{1N-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \overline{a}_{N-11} & \cdots & \overline{a}_{N-1N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \overline{\alpha}_{N-1} & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

となる。K を $const. \neq 0$ とすると座標変換

$$(\overline{y}^1, \cdots, \overline{y}^{N-1}, \overline{y}^N) \to (K\overline{y}^1, \cdots, K\overline{y}^{N-1}, \overline{y}^N)$$
$$= (\overline{\overline{y}}^1, \cdots, \overline{\overline{y}}^{N-1}, \overline{\overline{y}}^N)$$

によって a_{ij} の値は

$$\overline{\overline{a}}_{ij}(y) = \overline{a}_{kl}(y) \frac{\partial \overline{y}^k}{\partial \overline{\overline{y}}^i} \frac{\partial \overline{y}^l}{\partial \overline{\overline{y}}^j} = K^{-2} \overline{a}_{ij}(x), \quad i, j \neq N$$

$$\overline{\overline{a}}_{Ni}(y) = K^{-1} \overline{a}_{Ni}(y), \quad i \neq N$$

$$\overline{\overline{a}}_{NN}(y) = \overline{a}_{NN}(y)$$

と変換される。行列 $(\overline{\overline{a}}_{ij}(y))$ の固有値 $\overline{\overline{\alpha}}_1(y), \cdots, \overline{\overline{\alpha}}_N(y)$ は $y \in \partial D \cap U(x_0)$ では $K^{-2}\overline{\alpha}_1(y), \cdots, K^{-2}\overline{\alpha}_{N-1}(y)$, 1 となる。それには前と同じ

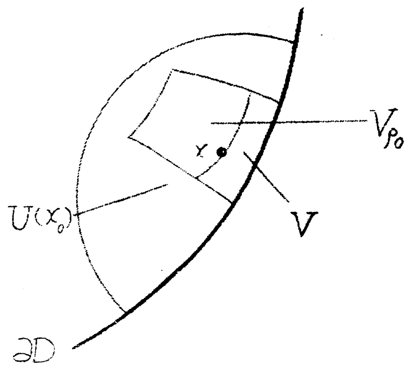
変換 $\begin{pmatrix} Q & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$ を施せばよい。従って K を適当にとれば

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\overline{\alpha}}_i(y) \geqq 1, \quad i = 1, \cdots, N-1 \\ &\overline{\overline{\alpha}}_N(y) = 1 \end{aligned}\right\} y \in \partial D \cap U(x_0)$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

となる。∂D の十分近くでは，すなわち，ρ を十分小さく選んで $0 \leq \overline{y}^N \leq \rho$ では，$\overline{\overline{\alpha}}_i(y) \geqslant 1-\varepsilon$, $i=1,\cdots,N$ である。

今度は t_x を，x と ∂D を結ぶ $U(x_0)$ 内の任意の曲線としよう。$\overline{y}^N(\lambda)=\overline{\overline{y}}^N(\lambda) \leq \rho$ では



$$
\begin{aligned}
&\overline{\overline{a}}_{ij}(y(\lambda))\frac{d\overline{\overline{y}}^i(\lambda)}{d\lambda}\frac{d\overline{\overline{y}}^j(\lambda)}{d\lambda}\\
&\geqslant (1-\varepsilon)\sum_{i=1}^N\left(\frac{d\overline{\overline{y}}^i(\lambda)}{d\lambda}\right)^2\\
&\geqslant (1-\varepsilon)\left(\frac{d\overline{\overline{y}}^N(\lambda)}{d\lambda}\right)^2\\
&=(1-\varepsilon)\left(\frac{d\overline{y}^N(\lambda)}{d\lambda}\right)^2
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
l(t_x)&=\int_0^1\left(\overline{\overline{a}}_{ij}(y(\lambda))\frac{d\overline{\overline{y}}^i(\lambda)}{d\lambda}\frac{d\overline{\overline{y}}^j(\lambda)}{d\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}d\lambda\\
&\geqslant (1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\lambda_0}\left|\frac{d\overline{y}^N(\lambda)}{d\lambda}\right|d\lambda,
\end{aligned}
$$

ただし　$\lambda_0=\min\{\lambda\in[0,1]\,;\,\overline{y}^N(\lambda)=\rho\}$　である。従って

$$
l(t_x)\geqslant(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\left|\int_0^{\lambda_0}\frac{d\overline{y}^N}{d\lambda}d\lambda\right|=(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\rho
$$

が成り立つ。$x\in V_{\rho_0}$ とし　しかも $\overline{x}^N=\rho$ を十分小さくとったから，$dis(x,\partial D)$ を考える際 $U(x_0)$ の外に出ない曲線 t_x のみを考えて $l(t_x)$ の下限をとってもよい。従って

(3.8)　　$dis(x,\partial D)\geqslant(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\rho$

である。(3.7) と (3.8) によって (3.6) が証明された。

次に，*boundary strip* D_ρ を

(3.9)　　$D_\rho=\{x\in\overline{D}\,;\,dis(x,\partial D)<\rho\}$

と定義する。

<u>Prop. 3.2.</u>　V_{ρ_0} を一つ固定する。十分小さい $\rho>0$ に対応して

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

ρ', ρ'' を

(3.10) $\quad V_{\rho'} \subset D_\rho \cap V_{\rho_0} \subset V_{\rho''}$

かつ

(3.11) $\quad \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{\rho'}{\rho} = \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{\rho''}{\rho} = 1$

にとることができる。

<u>証明</u> $(\partial D_\rho - \partial D) \cap \overline{V_{\rho_0}}$ を B_ρ とおこう。

$\rho' = \min_{x\in B_\rho} \overline{x}^N$, $\rho'' = \max_{x\in B_\rho} \overline{x}^N$ とおけば，(3.10) が成り立つことは明かである。(3.11) は prop. 3.1 から云える。

<u>系</u> $\quad \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{1}{\rho} m(V_{\rho'}) = \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{1}{\rho} m(V_{\rho''}) = 1$

<u>証明</u> 才2章 (1.3) により

$$m(V_{\rho'}) = \int_0^{\rho'} d\overline{x}^N \int \cdots \int_R \sqrt{\overline{a}(x)}\, d\overline{x}^1 \cdots d\overline{x}^{N-1}$$

であることに注意すれば，上の Prop. から出る。ただし $\overline{a}(x)$ は $(\overline{x}^i)$ で表わした $a(x)$ の値，R は $\{(\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^{N-1}) ; \sum_{i=1}^{N-1} (\overline{x}^i - \overline{x}_0^i)^2 < r\}$ である。

次に、境界上での測度 $\widetilde{m}$ による積分が，D_ρ での積分の極限として表わされることを述べる。この性質が次の § で重要な働きをするのである。

<u>Prop. 3.3.</u> $\quad f \in C(\overline{D})$ ならば

(3.12) $\quad \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_{D_\rho} f(x) m(dx) = \int_{\partial D} f(x) \widetilde{m}(dx)$

である。函数族 $\{f_\alpha\} \subset C(\overline{D})$ が $C(\overline{D})$ で compact（すなわち同程度一様連続かつ一様有界）ならば，α に関する一様収束で

(3.13) $\quad \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_{D_\rho} f_\alpha(x) m(dx) = \int_{\partial D} f_\alpha(x) \widetilde{m}(dx)$

が成り立つ。

<u>証明</u> $x_j \in \partial D$ に対し，$U(x_j)$ における canonical な局所座標を $(\overline{x}^i)$ とする。この座標によって円筒

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$(3.14)\qquad V_\rho(x_j)=\{x:\sum_{i=1}^{N-1}(\bar{x}^i-\bar{x}_j^i)^2<r_j^2,\ 0\leqq \bar{x}^N<\rho\}$$

をつくる。r_jは十分小さくとって固定しておく。∂D上に有限個の点$x_1,\cdots,x_M$を適当にとると$\bigcup_{j=1}^{M}V_{\rho_0}(x_j)$は$\bar{D}$における$\partial D$の近傍になる。しかも函数$\lambda_j(x)$, $j=1,\cdots,M$を次のようにとれる。

$$\lambda_j(x)\geqq 0,\quad \lambda_j\in C(\bar{D})$$
$$Car(\lambda_j)\subset V_{\rho_0}(x_j)$$
$$\partial D \text{ の近傍で}\qquad \sum_{j=1}^{M}\lambda_j(x)=1.$$

（このような函数を作るには、たとえば、第２章 Prop. 1.2 の証明と同様にすればよい。）

十分小さいρに対しては

$$(3.15)\qquad \frac{1}{\rho}\int_{D_\rho}f_\alpha(x)m(dx)=\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho}f_\alpha(x)\lambda_j(x)m(dx)$$

である。Prop. 3.2 の系により

$$(3.16)\qquad \left|\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho}f_\alpha(x)\lambda_j(x)m(dx)-\frac{1}{\rho}\int_{V_{\rho'}(x_j)}f_\alpha(x)\lambda_j(x)m(dx)\right|$$
$$\leqq\frac{1}{\rho}\|f_\alpha\|m(D_\rho\cap V_{\rho_0}(x_j)-V_{\rho'}(x_j))$$
$$\leqq\frac{1}{\rho}\|f_\alpha\|m(V_{\rho''}(x_j)-V_{\rho'}(x_j))$$
$$\xrightarrow[\rho\downarrow 0]{}0,\qquad \alpha \text{ につき一様},$$

また

$$\frac{1}{\rho'}\int_{V_{\rho'}(x_j)}|f_\alpha(x)|\lambda_j(x)m(dx)$$
$$=\frac{1}{\rho'}\|f_\alpha\|\int_0^{\rho'}d\bar{x}^N\int_R\cdots\int\sqrt{\bar{a}(x)}\,d\bar{x}^1\cdots d\bar{x}^{N-1}$$
$$(R=\{(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^{N-1});\ \sum_{i=1}^{N-1}(\bar{x}^i-\bar{x}_j^i)^2<r_j^2\})$$

が一様有界であるから，Prop. 3.2 により

$$(3.17)\qquad \left|\frac{1}{\rho}\int_{V_{\rho'}(x_j)}f_\alpha(x)\lambda_j(x)m(dx)-\frac{1}{\rho'}\int_{V_{\rho'}(x_j)}f_\alpha(x)\lambda_j(x)m(dx)\right|$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$\leq \left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right)\frac{1}{\rho'}\int_{V_{\rho'}(x_j)}|f_\alpha(x)|\lambda_j(x)m(dx)$$

$$\xrightarrow[\rho\downarrow 0]{} 0, \quad \alpha \text{ につき一様}$$

である。また第２章（1.3），（1.4）によって

$$(3.18)\qquad \frac{1}{\rho'}\int_{V_{\rho'}(x_j)} f_\alpha(x)\lambda_j(x)m(dx)-\int_{\partial D} f_\alpha(x)\lambda_j(x)\widetilde{m}(dx)$$
$$=\int\cdots\int_R d\overline{x}'\cdots d\overline{x}^{N-1}\Big([f_\alpha(x)\lambda_j(x)\sqrt{a(x)}]_{x=(\overline{x}',\cdots,\overline{x}^{N-1},0)}$$
$$-\frac{1}{\rho'}\int_0^{\rho'} f_\alpha(x)\lambda_j(x)\sqrt{a(x)}\; d\overline{x}^N\Big)$$
$$\xrightarrow[\rho\downarrow 0]{} 0$$

$\{f_\alpha\}$ の同程度連続性によって，この収束も α につき一様である。
（3.16），（3.17），（3.18）によって α につき一様に

$$\lim_{\rho\downarrow 0}\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} f_\alpha(x)\lambda_j(x)m(dx)=\int_{\partial D} f_\alpha(x)\lambda_j(x)\widetilde{m}(dx)$$

故に（3.15）により，（3.13）が云えた。

<u>Prop. 3.4.</u> V_{ρ_0} において，canonical な局所座標を用いて，境界への射影

$$V_{\rho_0}\ni x=(\overline{x}',\cdots,\overline{x}^N)\longrightarrow P(x)=(\overline{x}',\cdots,\overline{x}^{N-1},0)$$

を定義する。$\{f_\alpha\}\subset C(\overline{D})$ が一様有界で，かつすべての V_{ρ_0} に対し

$$(3.19)\qquad \lim_{\rho\downarrow 0}\sup_{x\in V_\rho}|f_\rho(x)-f_\rho(P(x))|=0$$

ならば

$$(3.20)\qquad \lim_{\rho\downarrow 0}\left(\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} f_\rho(x)m(dx)-\int_{\partial D} f_\rho(x)\widetilde{m}(dx)\right)=0$$

である。

<u>証明</u> Prop. 3.3. の証明と同様である。α を ρ にかえる時（3.16），（3.17）は一様有界性から成立し，（3.18）は（3.19）から成立する。

境界条件を表す operator

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$Lu(x)=\gamma(x)u(x)+\mu(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n}$$

が才ス章（1.51）の仮定を満たすとし，（A, L）に対する基本解を $p(t,x,y)$ としよう。この時次のことがいえる。

Prop. 3.5. 任意のTに対し，次のような const. K が存在する。

$$\left.\begin{aligned}&(3.21)\quad \frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} p(t,x,y)\,m(dy)\leqslant K\,t^{-\frac{1}{2}}\\&(3.22)\quad \int_{\partial D} p(t,x,y)\,\widetilde{m}(dy)\leqslant K\,t^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}\quad\begin{pmatrix}0<t\leqslant T\\ x\in\overline{D}\end{pmatrix}$$

ρ は十分小とする。Kはもちろん，ρ, t, x によらない。

証明. 才ス章（3.1）および才ス章 Prop. 3.3 の証明中に述べた評価により，

$$p(t,x,y)\leqslant K_1 t^{-\frac{N}{2}}\exp\frac{-K_2\sum_{i=1}^{N}(x^i-y^i)^2}{4t}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}K_1^{n+1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{-1}t^{\frac{n-N+1}{2}}\exp\frac{-K_2\sum_{i=1}^{N}(x^i-y^i)^2}{4t}$$

である。こゝで (x^i)，(y^i) は点 x, y の Euclid 空間の座標。従って const. K_3 が存在して $0<t\leqslant T$ では

$$(3.23)\qquad p(t,x,y)\leqslant K_3 t^{-\frac{N}{2}}\exp\frac{-K_2\sum_{i=1}^{N}(x^i-y^i)^2}{4t}$$

である。この評価を基にして証明を行う。

$V_{\rho_0}(x_j)$，$\lambda_j(x)$ は Prop. 3.3 の証明で用いたものとする。容易に分るように，ある const. $\delta>0$ が存在して，同じ $V_{\rho_0}(x_j)$ に属さないすべての x, y に対して $\sum_{i=1}^{N}(x^i-y^i)^2\geqslant\delta$ である。ρ を十分小さくすると

$$\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho}p(t,x,y)m(dy)=\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{\rho}\int(t,x,y)\lambda_j(y)m(dy)$$

x を固定し右辺の和を，$V_{\rho_0}(x_j)\ni x$ なる j についての和と $V_{\rho_0}(x_j)\not\ni x$ なる j についての和とに分ける。$V_{\rho_0}(x_j)\not\ni x$ ならば，Prop. 3.2 の系によって

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} p(t,x,y)\lambda_j(y)\,m(dy)$$
$$\leq K_3 t^{-\frac{N}{2}} \exp\frac{-K_2\delta}{4t}\cdot\frac{1}{\rho}m(D_\rho\cap V_{\rho_0}(x_j)) \leq K_4$$

$V_{\rho_0}(x_j)\ni x$ ならば，適当に K_5 をとることにより

$$\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} p(t,x,y)\lambda_j(y)m(dy)$$
$$\leq \frac{\rho''}{\rho}\cdot\frac{1}{\rho''}\int_{V_{\rho''}(x_j)} p(t,x,y)\lambda_j(y)m(dy)$$
$$\leq \frac{\rho''}{\rho}\cdot\frac{1}{\rho''}\int_0^{\rho''}d\bar{x}^N\int\cdots\int_R K_3 t^{-\frac{N}{2}}\exp\frac{-K_5\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}^i-\bar{y}^i)^2}{4t}\,d\bar{x}^1\cdots d\bar{x}^{N-1}$$
$$\leq K_6 t^{-\frac{1}{2}}$$

こゝでも Prop. 3.2 を用いた。結局

$$\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} p(t,x,y)m(dy)\leq M(K_4+K_6 t^{-\frac{1}{2}})$$

これで（3.21）が証明された。（3.22）をいうにも

$$\int_{\partial D}p(t,x,y)\tilde{m}(dy)=\sum_{j=1}^{M}\int_{\partial D}p(t,x,y)\lambda_j(y)\tilde{m}(dy)$$

の右辺の和を分けて考えればよい。

§4. 反射壁の場合の境界上の process

1次元の Brown 運動の local time は次のように表わされる。$x_t(w)$ を $[0,+\infty]$ における反射壁の Brown 運動とするとき、0 における local time $\mathfrak{t}(t,w)$ は

$$\mathfrak{t}(t,w)=\lim_{\rho\downarrow 0}\frac{1}{2\rho}\int_0^t\chi_{[0,\rho)}(x_s(w))\,ds$$

である。

§2 で多次元 diffusion に対して定義した境界上の local time にも，これと類似の表現を与えよう。

この§では、

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$A = \frac{1}{\sqrt{a(x)}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}(x)\sqrt{a(x)}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

とする．すなわち，$c \equiv 0$, $\mathbb{M}^+ = (W_C, \mathbb{B}(W_C), P_x : x \in \overline{D})$ を A からきまる反射壁の *process* とする。すなわち A と境界条件 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ に対する基本解を $p^+(t,x,y)$ とする時，$\mathbb{M}^+$ の遷移確率は $p^+(t,x,y)\,m(dy)$ である。$\mathbb{M}^+$ の構成法は第2章§4で述べた。W_C は $\overline{D}$ 上の連続な *path* の全体であった。

§3で a^{ij} からきまる距離を用いて定義した D_ρ によって

$$(4.1)\qquad S_\rho(t,w) = \frac{1}{\rho}\int_0^t \chi_{D_\rho}(x_s(w))\,ds$$

$$(4.2)\qquad e_\rho(t,x) = E_x(S_\rho(t,w))$$

とおく。

<u>定理 4.1</u>　任意に固定した出発点 $x \in \overline{D}$ に対し

$$(4.3)\qquad \lim_{\rho\downarrow 0} S_\rho(t,w) = S(t,w) \quad (P_x \text{ 測度での平均収束})$$

が成り立つ。$S(t,w)$ は§2で定義した ∂D 上の *local time* である．また x に依存しない列 $\rho_m \downarrow 0$ をとり

$$(4.4)\qquad P_x\left(\lim_{m\to\infty} S_{\rho_m}(t,w) = S(t,w),\ t \text{ につき広義一様}\right) = 1$$

とできる。

<u>*Lemma* 4.1.</u>　任意の T に対し，$0 \leq t \leq T$, $x \in \overline{D}$ で一様に

$$(4.5)\qquad \lim_{\rho\downarrow 0} e_\rho(t,x) = \int_0^t ds \int_{\partial D} p^+(t,x,y)\,\tilde{m}(dy)$$

<u>証明</u>

$$(4.6)\qquad \begin{aligned} e_\rho(t,x) &= E_x\left(\frac{1}{\rho}\int_0^t \chi_{D_\rho}(x_s(w))\,ds\right) \\ &= \int_0^t ds\,\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} p^+(s,x,y)\,m(dy) \end{aligned}$$

である。$p^+(s,x,y)$ は第2章 *Prop.* 3.1 で述べたように，3変数の函数として連続であるから、任意の $0 < t_0 < T$ に対し，$\{p^+(s,x,y);\ t_0 \leq s \leq T,\ x \in \overline{D}\}$ は同程度一様連続かつ一様有

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

界である。従って Prop. 3.3 によって，$t_0 \leqq s \leqq T$, $x \in D$ で一様に

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_{D_\rho} p^t(s,x,y)\, m(dy) = \int_{\partial D} p^t(s,x,y)\, \widetilde{m}(dy)$$

である。

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，Prop. 3.5 により，t_0 を

$$\int_0^{t_0} ds \frac{1}{\rho} \int_{D_\rho} p^t(s,x,y)\, m(dy) < \varepsilon$$

$$\int_0^{t_0} ds \int_{\partial D} p^t(s,x,y)\, \widetilde{m}(dy) < \varepsilon$$

にとれる，従って

$$\left| \int_0^t ds \frac{1}{\rho} \int_{D_\rho} p^t(s,x,y)\, m(dy) - \int_0^t ds \int_{\partial D} p^t(s,x,y)\, \widetilde{m}(dy) \right|$$

は $0 < t \leqq t_0$ では $< 2\varepsilon$，$t_0 \leqq t \leqq T$ では

$$\leqq \int_0^{t_0} ds \frac{1}{\rho} \int_{D_\rho} p^t(s,x,y)\, m(dy) + \int_0^{t_0} ds \int_{\partial D} p^t(s,x,y)\, \widetilde{m}(dy)$$

$$+ \int_{t_0}^t ds \left| \frac{1}{\rho} \int_{D_\rho} p^t(s,x,y)\, m(dy) - \int_{\partial D} p^t(s,x,y)\, \widetilde{m}(dy) \right|$$

ρ を十分小さくとって第2項の integrand $< \varepsilon$ とすれば

$$< 2\varepsilon + \varepsilon T$$

である。

<u>定理 4.1 の証明</u> $f(x) = \frac{1}{\rho} \chi_{D_\rho}(x) - \frac{1}{\rho'} \chi_{D_{\rho'}}(x)$

とおくと (2.12) と同様の計算で

$$E_x(|S_\rho(t,w) - S_{\rho'}(t,w)|^2)$$

$$= 2 \int_0^t E_x\left(f(x_s) E_{x_s}\left(\int_0^{t-s} f(x_u)\, du\right)\right) ds$$

$$\leqq 2 E_x\left(\int_0^t |f(x_s)|\, ds\right) \sup_{0 \leqq s \leqq t,\, y \in \overline{D}} \left| E_y\left(\int_0^s f(x_u)\, du\right) \right|$$

$$\leqq 4 \sup_\rho e_\rho(t,x) \cdot \sup_{0 \leqq s \leqq t,\, y \in \overline{D}} \left| e_\rho(s,y) - e_{\rho'}(s,y) \right|$$

$$\longrightarrow 0, \quad \rho, \rho' \downarrow 0$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

最後は Lemma 4.1 による。故に $S_\rho(t,w)$ は平均収束する。

任意の $\rho_m \downarrow 0$ と T に対し ($\ell_{\rho_m}(t,w)=E_x(S_{\rho_m}(T,w)|\mathbb{B}_t)$, $0\leqq t\leqq T$, $\mathbb{B}_t$) が martingale であることに注意し，定理2.1の証明と同様にして，ρ_m の部分列 ρ_m' を適当にとれば

$$P_x(S_{\rho_m'}(t,w),\ m\to\infty \text{ が } 0\leqq t\leqq T \text{ で一様収束})=1,\quad x\in\overline{D}$$

がいえる.

まず $\rho_m^{(1)}\downarrow 0$ を

$$P_x(S_{\rho_m^{(1)}}(t,w),\ m\to\infty \text{ が } 0\leqq t\leqq 1 \text{ で一様収束})=1$$

にとり，$\rho_m^{(n-1)}$ の部分列 $\rho_m^{(n)}$ を

$$P_x(S_{\rho_m^{(n)}}(t,w),\ m\to\infty \text{ が } 0\leqq t\leqq n \text{ で一様収束})=1$$

にとって対角線 $\rho_m^{(m)}$ を ρ_m とおけば,

(4.7) $W'=\{w\,;\,S_{\rho_m}(t,w),\ m\to\infty$ が $0\leqq t<+\infty$ で広義一様収束$\}$

は $P_x(W')=1$, $x\in\overline{D}$ を満たす. $S_{\rho_m}(t,w)$ の極限 $\overline{S}(t,w)$, $w\in W'$ は (2.17)―(2.19) は $S_{\rho_m}(t,w)$ が満たすから極限 $\overline{S}(t,w)$ にも遺伝し，(2.20) は Lemma 4.1 から云える. 従って一意性により $\overline{S}(t,w)$ は ∂D における local time $S(t,w)$ である。

<u>注意</u>　$x_t(w)\in D$ なる t では $S(t,w)$ は増加しない. すなわち，$x_t(w)\in D$ なる w,t に対しては $\exists t_1<t<\exists t_2$, $S(t,w)=S(t_2,w)$ である。(ただし $t=0$ の時は $t_1=0$ とする。) このことは既に §2 で証明したが，path の連続性と上の定理から直ちに分ることである。

<u>Lemma 4.2.</u>　$f(x)$, $g(x)$ を $\overline{D}$ 上で一様 Hölder 連続な函数とし

(4.8) $$v(t,x)=E_x\left(\int_0^t e^{-\int_0^s g(x_u(w))du} f(x_s(w))\,ds\right)$$

とおくと，$v(t,x)$ は $t>0$ に関し C^1級，x に関し $C^2(\overline{D})$ で[1]

(4.9) $$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}+g(x)v(t,x)-Av(t,x)=f(x),\ t>0,\ x\in\overline{D},$$

---

[1] 後に使うためには，x に関し $C^1(\overline{D})$ かつ $C^2(D)$ という結論で十分。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

(4.10) $\quad \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial n}=0, \quad t>0, \quad x\in\partial D,$

(4.11) $\quad \lim_{t\downarrow 0} v(t,x)=0, \quad x\in\overline{D}.$

証明

$$\begin{aligned}
&v(t,x)-E_x\left(\int_0^t f(x_s)\,ds\right)\\
&=E_x\left(\int_0^t \left(e^{-\int_0^s g(x_u)\,du}-1\right) f(x_s)\,ds\right)\\
&=-E_x\left(\int_0^t f(x_s)\,ds\int_0^s e^{-\int_r^s (x_u)\,du}\, g(x_r)\,dr\right)\\
&=-E_x\left(\int_0^t g(x_r)\,dr\int_r^t e^{-\int_r^s g(x_u)\,du} f(x_s)\,ds\right)\\
&=-E_x\left(\int_0^t g(x_r)\,dr\int_r^t e^{-\int_0^{s-r} g(x_u)(w_r^+))\,dr} f(x_s)\,ds\right)\\
&=-\int_0^t dr\,E_x\left(g(x_r)E_{x_r}\left(\int_0^{t-r} e^{-\int_0^s g(x_u)\,du} f(x_s)\,ds\right)\right)\\
&=-E_x\left(\int_0^t g(x_s)\,v(t-s,x_s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

これは $p^+(t,x,y)$ を使って書くと，

(4.12)
$$\begin{aligned}
v(t,x)&=\int_0^t ds\int_D p^+(s,x,y)(f(y)-g(y)v(t-s,y))\,m(dy)\\
&=\int_0^t ds\int_D p^+(t-s,x,y)(f(y)-g(y)v(s,y))\,m(dy)
\end{aligned}$$

である。第2章 Prop. 3.3 により，(4.12) から $v(t,x)$ は $C'(\overline{D})$ でしかも

$$\sup_{0<t\le T,\, x\in\overline{D}}\left|\frac{\partial v(t,x)}{\partial x^i}\right|\le K_T<+\infty$$

であるから

$$\begin{aligned}
|v(t,x)-v(t',x')|&\le|v(t,x)-v(t',x)|+|v(t',x)\\
&-v(t',x')|\le\|f\|\cdot|t-t'|+K_T\sum_{i=1}^N|x^i-x'^i|,
\end{aligned}$$

すなわち，$v(t,x)$ は $(0,+\infty)\times\overline{D}$ で広義一様 Hölder 連続である。従って (4.12) に第2章定理 1.3[2] を適用でき，(4.9) ― (4.11) が云える。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

次の lemma は local time $S(t,w)$ と境界上の process との関係を与える基礎になり，また，特別な場合として，$S(t,w)$の分布の Laplace-Stieltjes 変換がどんな函数であるかを明かにする（定理4.2）。更に定理4.2から $\lim_{t\to+\infty} S(t,w)=+\infty$ がいえる。

<u>Lemma 4.3.</u>　$f(x)$ を $\overline{D}$ 上の連続函数で、∂D上では一様 Hölder 連続とする。$\alpha>0$とし

$$(4.13)\qquad u_\alpha(t,x)=E_x\left(\int_0^t e^{-\alpha S(s,w)} f(x_s(w))\,dS(s,w)\right)$$

とおく[3]。$u(t,x)$ は $t>0$ の函数として C'級，xの函数として $C'(\overline{D})$ かつ $C^2(D)$ となり

$$(4.14)\qquad \frac{\partial u_\alpha(t,x)}{\partial t}=Au_\alpha(t,x),\qquad t>0,\ x\in D$$

$$(4.15)\qquad \alpha u_\alpha(t,x)-\frac{\partial u_\alpha(t,x)}{\partial n}=f(x),\qquad t>0,\ x\in\partial D$$

$$(4.16)\qquad \lim_{t\downarrow 0} u_\alpha(t,x)=0,\qquad x\in\overline{D}$$

を満たす。

<u>証明</u>　$u_\alpha(t,x)$ を近似するものとして

$$(4.17)\qquad u_\alpha^\rho(t,x)=E_x\left(\int_0^t e^{-\alpha S_\rho(s,w)} f(x_s(w))\,dS_\rho(s,w)\right)$$

$$=E_x\left(\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\rho}\int_0^s \chi_{D_\rho}(x_u)\,du} f(x_s)\frac{1}{\rho}\chi_{D_\rho}(x_s)\,ds\right)$$

とおく。$u_\alpha^\rho(t,x)$ の満たす積分方程式

$$(4.18)\qquad \begin{aligned} u_\alpha^\rho(t,x)=&\int_0^t ds\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} p_\alpha(t-s,x,y)\left(f(y)-\alpha u_\alpha^\rho(s,y)\right)m(dy)\\ &+\int_0^t ds\int_{\partial D} p_\alpha(t-s,x,y)\,\alpha u_\alpha^\rho(s,y)\,\widetilde{m}(dy)\end{aligned}$$

---

2) 第2章定理1.3で $\varphi\equiv 0$ の時は、$u(t,x)$ は xに関し $\overline{D}$でC^2級になる。

3) (4.13)の右辺の存在は $E_x(S(t,w))<+\infty$ から明か。

をまず証明する。$p_\alpha(t,x,y)$ は A と境界条件 $-\alpha u+\frac{\partial u}{\partial n}=0$ に対する基本解である。

$\overline{D}$ で一様 Hölder 連続な函数列 f_m, g_m を、

$\lim_{m\to\infty} f_m(x)=f(x)\frac{1}{\rho}\chi_{D_\rho}(x)$, $\lim_{m\to\infty} g_m(x)=\frac{\alpha}{\rho}\chi_{D_\rho}(x)$, かつ一様有界にとり、

$$v_m(t,x)=E_x\left(\int_0^t e^{-\int_0^s g_m(x_u)du} f_m(x_s)ds\right)$$

とおく。Lemma 4.2 により

$$\frac{\partial v_m}{\partial t}-Av_m=f_m-g_m v_m \qquad \text{on } \overline{D}$$

$$\alpha v_m-\frac{\partial v_m}{\partial n}=\alpha v_m \qquad \text{on } \partial D$$

$$v_m(0,x)=0$$

である。従って第2章定理1.3によって

$$\text{(4.19)}\quad \begin{aligned} v_m(t,x)=&\int_0^t ds\int_D p_\alpha(t-s,x,y)\bigl(f_m(y)-g_m(y)v_m(s,y)\bigr)m(dy)\\ &+\int_0^t ds\int_{\partial D}\widetilde{p_\alpha}(t-s,x,y)\alpha v_m(s,y)\widetilde{m}(dy)\end{aligned}$$

である。しかも第2章(1.18), (1.19)から容易に分るように $\widetilde{p_\alpha}(t,x,y)=p_\alpha(t,x,y)$, $y\in\partial D$ である。v_m の定義から

$$\lim_{m\to\infty} v_m(x)=u_\alpha^\rho(x) \qquad (\text{有界収束})$$

であることに注意し、(4.19) を $m\to\infty$ とすると (4.18) を得る。

(4.18) を変形して

$$\text{(4.20)}\quad \begin{aligned} u_\alpha^\rho(t,x)=&\int_0^t ds\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} p_\alpha(t-s,x,y)f(y)m(dy)\\ &+\int_0^t ds\Bigl(\int_{\partial D} p_\alpha(t-s,x,y)\alpha u_\alpha^\rho(s,y)\widetilde{m}(dy)\\ &-\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} p_\alpha(t-s,x,y)\alpha u_\alpha^\rho(s,y)m(dy)\Bigr)\end{aligned}$$

とかく。この式から

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$(4.21) \qquad \lim_{\rho\downarrow 0} u_\alpha^\rho(t,x) = \int_0^t ds \int_{\partial D} p_\alpha(t-s,x,y) f(y)\,\widetilde{m}(dy)$$

を証明しよう。

(4.20) の右辺の第1項については、Prop. 3.3 から

$$\lim_{\rho\downarrow 0} \frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} p_\alpha(t-s,x,y) f(y)\, m(dy) = \int_{\partial D} p_\alpha(t-s,x,y) f(y)\,\widetilde{m}(dy)$$

であり，Prop. 3.5 によって $\lim_{\rho\downarrow 0}$ と $\int_0^t ds$ との交換が可能である。すなわち (4.20) の右辺の第1項は (4.21) の右辺に収束する。第2項を処理するため，まず，(14.17) から $|u_\alpha^\rho(t,x)| \leqq \frac{1}{\alpha}\|f\|$，すなわち u_α^ρ が一様有界なることに注意する。従って (3.19) を証明しさえすれば Prop. 3.4 により

$$\lim_{\rho\downarrow 0}\Big(\int_{\partial D} p_\alpha(t-s,x,y)\,\alpha u_\alpha^\rho(s,y)\,\widetilde{m}(dy)$$

$$- \frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} p_\alpha(t-s,x,y)\,\alpha u_\alpha^\rho(s,y)\, m(dy)\Big) = 0$$

であり，やはり Prop. 3.5 により $\lim_{\rho\downarrow 0}$ と $\int_0^t ds$ との交換が可能で，(4.20) の右辺の第2項は 0 に収束する。条件 (3.19) は次の通り確かめられる。$x \in V_{\rho_0}$ とする。(4.18) により

$$|u_\alpha^\rho(t,x) - u_\alpha^\rho(t,P(x))|$$

$$\leqq (\|f\|+1)\int_0^t ds\,\frac{1}{\rho}\int_{D_\rho} |p_\alpha(t-s,x,y) - p_\alpha(t-s,P(x),y)|\, m(dy)$$

$$+ \int_0^t ds \int_{\partial D} |p_\alpha(t-s,x,y) - p_\alpha(t-s,P(x),y)|\,\widetilde{m}(dy)$$

である。右辺の $\sup_{x\in V_\rho}$ が $\rho\downarrow 0$ の時 0 に収束することは，Prop. 3.5 と p_α の連続性 (第2章 Prop. 3.1) から容易に分る。

$$(4.22) \qquad \lim_{m\to\infty} u_\alpha^{\rho_m}(t,x) = u_\alpha(t,x)$$

である。何となれば，(4.17) から

$$u_\alpha^\rho(t,x) = \frac{1}{\alpha} E_x\Big(\int_0^t f(x_s(w))\, d(-e^{-\alpha S_\rho(s,w)})\Big)$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

であり，また定理 4.1 から

$$\lim_{m\to\infty}(-e^{-\alpha S_{\rho_m}(s,w)}) = -e^{-\alpha S(s,w)},\quad w\in W'$$

で，$f(x_s(w))$ は s の連続函数であるから

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^t f(x_s(w))\,d(-e^{-\alpha S_{\rho_m}(s,w)}) = \int_0^t f(x_s(w))\,d(-e^{-\alpha S(s,w)})$$

（有界収束）

である。故に

$$\lim_{m\to\infty} u_\alpha^{\rho_m}(t,x) = \frac{1}{\alpha}E_x\left(\int_0^t f(x_s(w))\,d(-e^{-\alpha S(s,w)})\right)$$

$$= u_\alpha(t,x)$$

である。

（4.21）と（4.22）によって

$$(4.23)\qquad u_\alpha(t,x) = \int_0^t ds\int_{\partial D} p_\alpha(t-s,x,y)f(y)\widehat{m}(dy)$$

$$= \int_0^t ds\int_{\partial D} \widetilde{p}_\alpha(t-s,x,y)f(y)\widehat{m}(dy)$$

である。これで Lemma が証明された（第2章定理 1.3）。

注意　（4.17）で定義した u_α^ρ は，次のような境界値問題の unique な解として特徴ずけられる。

$$u_\alpha^\rho \in C^1(\overline{D})\cap C^2(D_\rho)\cap C^2(D-\overline{D}_\rho)$$

$$Au_\alpha^\rho(x) = 0,\qquad x\in D-\overline{D}_\rho$$

$$(\alpha-\rho A)u_\alpha^\rho(x) = f(x),\qquad x\in D_\rho$$

$$\frac{\partial u_\alpha^\rho(x)}{\partial n} = 0,\qquad x\in \partial D$$

その証明は省略する。

定理 4.2.

$$(4.24)\qquad v_\alpha(t,x) = E_x(e^{-\alpha S(t,w)})$$

とおくと，$t>0$ の函数として C^1 級，x の函数として $C^1(\overline{D})$ かつ

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$C^2(D)$ となり

$$(4.25)\quad \frac{\partial v_\alpha(t,x)}{\partial t} = A v_\alpha(t,x), \qquad t>0,\ x\in D$$

$$(4.26)\quad \alpha v_\alpha(t,x) - \frac{\partial v_\alpha(t,x)}{\partial n} = 0, \qquad t>0,\ x\in \partial D$$

$$(4.27)\quad \lim_{t\downarrow 0} v_\alpha(t,x) = 1, \qquad x\in \overline{D}$$

を満たす.

証明. Lemma 4.3 で $f\equiv 1$ としたものは

$$E_x\left(\int_0^t e^{-\alpha S(s,w)}\, dS(s,w)\right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} E_x\left(e^{-\alpha S(t,w)}\right)$$

である。これに Lemma 4.3 の結果を適用すればよい。

系. $P_x\left(\lim_{t\to+\infty} S(t,w) = +\infty\right) = 1, \quad x\in\overline{D}$

証明 上の定理により

$$v_\alpha(t,x) = \int_D p_\alpha(t,x,y)\, m(dy)$$

である。$v_\alpha(t,x)$ は t について非増大で，第2章§2で述べたように

$$\int_0^\infty v_\alpha(t,x)\,dt = \int_0^\infty dt \int_D p_\alpha(t,x,y)\, m(dy) < +\infty$$

であるから，$\lim_{t\to+\infty} u_\alpha(t,x) = 0$，すなわち $E_x(e^{-\alpha S(+\infty,w)}) = 0$.

(4.7) の W' に属する w のうち $\lim_{t\to+\infty} S(t,w) = +\infty$ なるものの全体を W'' で表わす. $w\in W''$ に対し local time の inverse を

$$S^{-1}(t,w) = \max\{s\,;\, S(s,w) = t\}$$

と定義する。$S^{-1}(t,w)$ は $0\leq\forall t<+\infty$ に対して定義され，t に関し単調増大，右連続である。また，$S^{-1}(t,w)$ は Markov time である。何故なら，

$$\{w\in W''\,;\, S^{-1}(t,w) < s\} = \{w\in W''\,;\, S(s,w) > t\}$$

$$= \bigcup_n \lim_m \{w\in W''\,;\, S_{\rho_m}(s,w) > t + \tfrac{1}{n}\} \in \mathbb{B}_s(W'')$$

であるから。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$x_{S^{-1}(t,w)}(w)$ は w に関し可測，t に関し右連続であり，また，すべての $t\geqq 0$ に対し $x_{S^{-1}(t,w)}(w)$ は ∂D 上の値をとる。

$\widetilde{W}$ を $[0,+\infty)$ から ∂D への右連続な写像 $\widetilde{w}$ の全体，$\widetilde{\mathbb{B}}$ を $\widetilde{W}$ の cylinder set から生成される Borel field とし，W'' から $\widetilde{W}$ への写像 φ を

$$(4.28)\qquad \widetilde{x}_t(\varphi(w)) = x_{S^{-1}(t,w)}(w)$$

で定義する。

$$(4.29)\qquad \widetilde{P}_x(B) = P_x(\varphi^{-1}(B)),\quad B\in\widetilde{\mathbb{B}},\ x\in\partial D$$

とおくと，明らかに，$\widetilde{P}_x(B)$ は x に関し可測，B に関し確率測度である。

<u>定理 4.3.</u>

(I) $(\widetilde{W},\ \widetilde{\mathbb{B}},\ \widetilde{P}_x : x\in\partial D)$ は Markov 過程である。すなわち

$$(4.30)\qquad \widetilde{P}_x(\widetilde{x}_0(\widetilde{w}) = x) = 1$$

$$(4.31)\qquad \widetilde{P}_x(\widetilde{x}_{t+s}\in E\,|\,\widetilde{\mathbb{B}}_s) = \widetilde{P}_{\widetilde{x}_s}(\widetilde{x}_t\in E)$$

が成り立つ．

(II) $f\in C(\partial D)$ に対し

$$(4.32)\qquad \widetilde{T}_t f(x) = \widetilde{E}_x(f(\widetilde{x}_t))$$

とおくと，$\widetilde{T}_t$ は $C(\partial D)$ の上の強連続半群である。

(III) $\widetilde{T}_t$ の generator を $\widetilde{\mathfrak{G}}$ とおき，定義域を $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ とする。$f\in C^3(\partial D)$ ならば $f\in\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ かつ $Hf\in C^2(\overline{D})$ で

$$(4.33)\qquad \widetilde{\mathfrak{G}} f(x) = \frac{\partial}{\partial n} Hf(x)$$

が成り立つ。[4)]

つまり，簡単にいえば，$x_{S^{-1}(t,w)}(w)$ が $\mathbb{M}^+$ に対応する境界上の process である。

---

4) $f\in C(\partial D)$ に対し，D で $Au=0$，∂D で $u=f$ なる $u\in C(\overline{D})\cap C^2(D)$ が唯一つ存在する。これを $u=Hf$ とかく。第２章定理 2.5 により $Hf(x)=\int_{\partial D} k_0(x,y)f(y)\widetilde{m}(dy)$。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

証明. いくつかの段階に分けて行う。

第1段。(4.31)の証明。これには $\mathbb{M}^+$ の強Markov性が基になる。(2.19) から

$$(4.34) \qquad S^{-1}(t+s, w) = S^{-1}(s,w) + S^{-1}(t, w^+_{S^{-1}(s,w)})$$

がいえることをまず注意する。なぜなら、
$u + S^{-1}(s,w) = S^{-1}(t+s, w)$ とおくと $S(u+S^{-1}(s,w), w) = t+s$
$= t + S(S^{-1}(s,w), w)$ であるから (2.19) により
$t = S(u, w^+_{S^{-1}(s,w)})$ である。同様に、

$u' + S^{-1}(t,w) > S^{-1}(t+s, w)$ ならば $S(u', w^+_{S^{-1}(t,w)}) > t$
である。従って $u = S^{-1}(t, w^+_{S^{-1}(s,w)})$ で (4.34) を得る。

$\widetilde{P}_x$ の定義から容易に分るように

$$\widetilde{P}_x(\widetilde{x}_{t+s} \in E \mid \widetilde{\mathbb{B}}_s)(\varphi(w))$$

$$= P_x(x_{S^{-1}(t+s)} \in E \mid \varphi^{-1}(\widetilde{\mathbb{B}}_s))(w) = *$$

$\varphi^{-1}(\widetilde{\mathbb{B}}_s) \subset \mathbb{B}_{S^{-1}(s)}(W'')$ であるから

$$* = E_x(P_x(x_{S^{-1}(t+s)} \in E \mid \mathbb{B}_{S^{-1}(s)+}) \mid \varphi^{-1}(\widetilde{\mathbb{B}}_s))(w)$$

$\mathbb{M}^+$ の強Markov性と (4.34) から

$$= E_x(P_{x_{S^{-1}(s)}}(x_{S^{-1}(t)} \in E) \mid \varphi^{-1}(\widetilde{\mathbb{B}}_s))(w)$$

$x_{S^{-1}(s,w)}(w)$ は $\varphi^{-1}(\widetilde{\mathbb{B}}_s)$ 可測であるから

$$= P_{x_{S^{-1}(s,w)}(w)}(x_{S^{-1}(t)} \in E)$$

$$= \widetilde{P}_{\widetilde{x}_s(\varphi(w))}(\widetilde{x}_t \in E)$$

等号はいずれも P_x 測度1で成り立つ。故に (4.31) が $\widetilde{P}_x$ 測度1で成り立つ。

第2段。 $f \in C(\partial D)$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

(4.35) $\quad K_\alpha f(x)=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(x_{S^{-1}(t,w)}(w))\,dt\right),\ x\in\overline{D}$ とおく。

(4.36) $\quad K_\alpha f(x)=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha S(t,w)}f(x_t(w))\,dS(t,w)\right)$

を確かめよう。$Z(w)=\{t;$ 任意の $u>t$ に対し $S(u,w)>S(t,w)\}$ とおくと $\int_{Z(w)^c}dS(t,w)=0$ であるから，

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(x_{S^{-1}(t,w)}(w))\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\alpha S(t,w)}f(x_{S^{-1}(S(t,w),w)}(w))\,dS(t,w)$$

$$=\int_{Z(w)}e^{-\alpha S(t,w)}f(x_{S^{-1}(S(t,w),w)}(w))\,dS(t,w)$$

$$=\int_{Z(w)}e^{-\alpha S(t,w)}f(x_t(w))\,dS(t,w)$$

$$=\int_0^\infty e^{-\alpha S(t,w)}f(x_t(w))\,dS(t,w)$$

で (4.36) となる。

今，$u_\alpha(t,x)$ を (4.13) で定義すると (4.36) により

$$K_\alpha f(x)=\lim_{t\to+\infty}u_\alpha(t,x)$$

である。従って，f を一様 Hölder 連続とすると，(4.23) により

$$K_\alpha f(x)=\int_0^\infty ds\int_{\partial D}\hat{p}_\alpha(s,x,y)f(y)\hat{m}(dy),$$

すなわち，第2章定理 2.3 により[5]; $K_\alpha f\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$ で

(4.37) $\quad AK_\alpha f(x)=0,\quad x\in D$

---

5) 今の場合は

$$g(x,y)=\hat{g}(x,y)=\int_0^\infty p_\alpha(s,x,y)\,ds=\int_0^\infty \hat{p}_\alpha(s,x,y)\,ds$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

(4.38) $(\alpha - \frac{\partial}{\partial n})K_\alpha f(x) = f(x), \quad x \in \partial D$

である。

$K_\alpha f$ を ∂D へ制限したものを $\widetilde{G}_\alpha f$ と定義する。(4.37), (4.38) は次のように言える。

(4.39) $(\alpha - \frac{\partial}{\partial n}H)\widetilde{G}_\alpha f = f$

才3段。$\widetilde{G}_\alpha$ の性質。定義から明らかに

(4.40) $\sup_{x \in \partial D} |\widetilde{G}_\alpha f(x)| \leq \frac{1}{\alpha} \| f \|$

である。f が一様 Hölder 連続ならば才2段により $\widetilde{G}_\alpha f \in C(\partial D)$ であり，任意の連続函数は一様 Hölder 連続な函数で一様近似されるから，(4.40) により，$\widetilde{G}_\alpha$ は $C(\partial D)$ を $C(\partial D)$ の中に写す。しかも (4.40) は

(4.41) $\| \widetilde{G}_\alpha \| \leq \frac{1}{\alpha}$

を意味する。

(4.32) で定義した $\widetilde{T}_t$ は $B(\partial D) \longrightarrow B(\partial D)$ の operator で，才1段で証明した (4.31) により，半群の性質 $\widetilde{T}_t \widetilde{T}_s = \widetilde{T}_{t+s}$ を持つ。$\widetilde{G}_\alpha$ は $\widetilde{T}_t$ によって

(4.42) $\widetilde{G}_\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \widetilde{T}_t f(x)\, dt$

と表わされるから，resolvent equation

(4.43) $\widetilde{G}_\alpha f - \widetilde{G}_\beta f + (\alpha - \beta)\widetilde{G}_\alpha \widetilde{G}_\beta f = 0$

をみたす。[6)]

才4段。次に

(4.44) $\lim_{\alpha \to \infty} \| \alpha \widetilde{G}_\alpha f - f \| = 0, \quad f \in C(\partial D)$

を証明する。$f \in C^3(\partial D)$ なる時いえば十分である。$f \in C^3(\partial D)$ ならば才2章 Prop. 2.2 により $\frac{\partial}{\partial n}Hf$ が存在して連続である。

6) [15] P. 8

(4.45) $\quad \frac{\partial}{\partial n} H \widetilde{G}_\alpha f = \widetilde{G}_\alpha \frac{\partial}{\partial n} Hf$

がいえたとすると，(4.39) により

$$\|\alpha \widetilde{G}_\alpha f - f\| = \|\frac{\partial}{\partial n} H \widetilde{G}_\alpha f\| = \|\widetilde{G}_\alpha \frac{\partial}{\partial n} Hf\|$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha} \|\frac{\partial}{\partial n} Hf\| \longrightarrow 0, \quad \alpha \to \infty$$

がいえる。(4.45) の証明は次の通り。

$\widetilde{G}_\alpha f = u$，$\widetilde{G}_\alpha \frac{\partial}{\partial n} Hf = v$ とおく。f はもちろん一様 Hölder 連続，$\frac{\partial}{\partial n} Hf$ も第２章 Prop. 2.2 により C' 級，従って一様 Hölder 連続，故に (4.39) によって

(4.46) $\quad (\alpha - \frac{\partial}{\partial n} H) u = f$

(4.47) $\quad (\alpha - \frac{\partial}{\partial n} H) v = \frac{\partial}{\partial n} Hf$

である。(4.47) から $(\alpha - \frac{\partial}{\partial n} H)(v + f) = \alpha f$，すなわち $(\alpha - \frac{\partial}{\partial n} H)(\frac{v+f}{\alpha}) = f$ である。これと (4.6) を比較すると，(4.37)，(4.38) の型の境界値問題の解の一意性から $u = \frac{v+f}{\alpha}$ である。故に

$$\frac{\partial}{\partial n} Hu = \frac{\partial}{\partial n} H(\frac{v+f}{\alpha}) = \alpha \frac{v+f}{\alpha} - f = v$$

を得る。これは (4.45) に他ならない。

第５段．(4.41)，(4.43)，(4.44) をまとめ *Hille*－吉田の定理（第１章定理 2.2 の系）を応用すると，$\widetilde{G}_\alpha$ が $C(\partial D)$ 上のある強連続半群の *resolvent operator* であることが結論される。この半群が $\widetilde{T}_t$ と一致することが，(4.42) と $\widetilde{T}_t f(x)$ の t に関する右連続性から分る。従って定理の (II) がいえた。特に $\widetilde{T}_t$ の $t=0$ における強連続性から (4.30) が出る。

最後に，(III) は次のように証明される。$f \in C^3(\partial D)$ とし，$(\alpha - \frac{\partial}{\partial n} H) f = g$ とおくと，第２章 Prop. 2.2 により $g \in C'(\partial D)$ である。故に第２段の結果が使え，境界問題の解の一意性から $Hf = K_\alpha g$ である。従って $f = \widetilde{G}_\alpha g$，故に $f \in \mathfrak{D}(\widetilde{\mathfrak{G}})$ で $\widetilde{\mathfrak{G}} f = \alpha f - g = \frac{\partial}{\partial n} Hf$.

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

§5. 境界条件 $\gamma u+\delta Au+\mu\frac{\partial u}{\partial n}=0$ の場合.

反射壁の process，すなわち境界条件 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ の場合には，§4で見たように係数 a^{ij} から決まる距離が有力な働きをした．それを用いて幅 ρ の boundary strip D_ρ を定義し，時刻 t までの反射壁の process の D_ρ における滞在時間を ρ で割ったもの $S_\rho(t,w)$ が，$\rho\to 0$ の時境界における local time に収束したのであった。そしてそれを用いて，反射壁の process に対応する境界上の process が構成されたのであった。

もっと複雑な境界条件の場合には，このまゝのやり方では，境界における local time と境界上の process を構成することができない．$\overline{D}$ 上の process からいかにしてそれに対応する境界上の process を構成するかという問題は未解決である．一つのやり方として，$S_\rho(t,w)$ を定義する際，ρ で割らないで境界条件に応じた割り方をするとよいという結果が得られるので，それを紹介する。それは，境界条件 $\gamma u+\delta Au+\mu\frac{\partial u}{\partial n}=0$ の場合である．DやAとして特殊なものをとるし また§4で述べたような境界上の process の確率論的構成まで出来ているわけではないが，例の一つとして興味がある．

D は N次元 Euclid 空間の球（半径1，中心は原点）とする。すなわち $D=\{x;\ \sum_{i=1}^{N}(x^i)^2<1\}$ とする．A と L はそれぞれ

$$Au(x)=\frac{1}{\ell(x)}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2u(x)}{(\partial x^i)^2}+\sum_{i=1}^{N}b^i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^i}+c(x)u(x),\quad x\in\overline{D}$$

$$Lu(x)=\gamma(x)u(x)+\delta(x)\lim_{y\to x}Au(y)+\mu(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n},\quad x\in\partial D$$

とし，条件として，ℓ, b^i, $c\in C^3(\overline{D})$, $\ell>0$, $c\leq 0$, γ, δ, $\mu\in C^3(\partial D)$, $\gamma\leq 0$, $\delta\leq 0$, $\mu\geqq 0$ を要求するほか，

$$-\delta(x)+\mu(x)>0,\quad x\in\partial D$$

をも要求する．なおこゝで $\frac{\partial}{\partial n}$ と書いたのは 内法線（外法線）の

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

定義により $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{1}{\sqrt{l(x)}}\frac{\partial}{\partial r}$ である（r は半径方向の座標 $r = \left(\sum_{i=1}^{N}(x^i)^2\right)^{1/2}$ を示す）。

この (A, L) から決まる $\overline{D}$ 上の Markov 過程を $\mathbb{M} = (W, \mathbb{B}, P_x : x \in \overline{D})$ とする。[1] そのような process の存在は第3章 §5，例1で示した。

次に函数 γ, δ, μ を ∂D 上だけでなく D の内部の方へも拡張しておかなければならない。そこで，$x = (x^1, \cdots, x^N)$ に対し ∂D 上への射影 $P(x)$ を

$$P(x) = \left(\frac{x^1}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x^i)^2\right)^{1/2}}, \cdots, \frac{x^N}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x^i)^2\right)^{1/2}}\right)$$

で定義し，

$$\gamma(x) = \gamma(P(x)), \quad \delta(x) = \delta(P(x)), \quad \mu(x) = \mu(P(x))$$

によって，γ, δ, μ を $\overline{D} - \{0\}$ にまで拡張しておく。D と A の形に対し制限をつけた理由は，主として，γ, δ, μ の適当な拡張が作りやすいようにするためだったのである。

境界上の local time を近似すべきものを作るために，まず，boundary strip D_ρ は

$$D_\rho = \left\{x ;\ 1-\rho < \left(\sum_{i=1}^{N}(x^i)^2\right)^{1/2} \leq 1\right\}$$

とする。本章 §3，§4 で用いた D_ρ の定義とは違うから注意されたい。そして

$$S_\rho(t, w) = \int_0^t \frac{\chi_{D_\rho}}{\rho\sqrt{l}\,\mu - \delta}(x_s(w))\,ds$$

とおく。

$C(\overline{D})$ に属する函数で，D で C^2 級，$D \cup \{x \in \partial D ; \mu(x) > 0\}$ で C^1 級で，

---

1) $\mathbb{M}$ から定まる半群は $C(\overline{D})$ を $C(\overline{D})$ に写し，強連続で，その generator は A を $\mathfrak{D} \cap \{u : Lu = 0\}$ へ制限したものの closure である。$\mathfrak{D}$ の定義は後に述べる。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

かつ Au が $\overline{D}$ 上の一様 Hölder 連続な函数に拡張されるようなものの全体を $\mathfrak{D}$ と記そう。

その時次のことがいえる.

Prop. 5.1 正数 α を固定する. $\overline{D}$ 上一様 Hölder 連続な函数 f に対し

$$u_\rho(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha S_\rho(t,w)} f(x_t(w))\, dS_\rho(t,w)\right)$$

とおくと

$$\lim_{\rho \downarrow 0} u_\rho(x) = u_0(x), \qquad x \in \overline{D}$$

が存在する。u_0 は $\mathfrak{D}$ に属し

$$Au_0(x) = 0, \qquad x \in D$$

$$(\alpha - L)u_0(x) = f(x), \qquad x \in \partial D$$

を満たす.

即ち, $\mathbb{M}$ に対応する境界上の process の resolvent を $\widetilde{G}_\alpha$ とすると, $u_0 = \widetilde{G}_\alpha f$ なのである。

なお, u_ρ は次のような境界値問題の解として特徴づけられる.

Prop. 5.2. 前の Prop. と同じ仮定の下に, u_ρ は

1) $\overline{D}$ で連続, $D \cup \{x \in \partial D\,;\ \mu(x) > 0\}$ で C^1 級である。

2) $D_\rho - \partial D$ で C^2 級で

$$(\alpha - (\rho \vee \mathcal{X}\mu - \delta)A)\, u_\rho = f$$

3) $D - D_\rho$ の内部で C^2 級で $Au_\rho = 0$

4) ∂D で $Lu = 0$

を満足する. この4条件を満足する函数は u_ρ だけしかない。

これらの Prop の証明の technique は §4 に用いたのと似たものである。それを述べるのは相当の紙面を必要とするし, 結果自身まだ中間的な性質のものであるから, このプリントでは省略する。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

第5章　2次元拡散過程

これまでのべて来たMarkov過程の構成，及びそれに関する境界上のMarkov過程の定義，性質等を2次元という特殊な場合により具体的にみることがこの章の目的である。これまでと特に違う点はこれまでに主として使って来た方法が解析的すなわち，通常の函数方程式の理論であったのに，この章では勿論それらも用いるが，その他に伊藤清氏によって系統的に発展させられた確率積分，確率積分方程式等をしばしば用いることである。

この章で用いる道具については出来るならば，それについての解説をすべてここにのべるのが望ましいかもしれないが，紙数の都合もあって，定義可能な条件やしばしば用いる性質等をまとめて列記するにとどめたものが多い。しかしそのような場合は引用文献は可能な限り詳しくした。そのような考え方にもとづいて§§1〜3がもうけられている。従って本論は §4からである。

また証明の細部はしばしば省略されている。多くの場合はそれはこの中に同じ考え方でやった証明があるか，また容易に読者が引用できる本等にそのようなものがある時である。

例えば逐次近似法に固有な評価法をこの章で随所に用いるが，その証明は最初だけは割と詳しくのべたが，後は非常に簡単にした。これは通常解析学で用いる逐次近似の方法を知っている読者ならば最初にのべた方法から容易にそれぞれの場合の方法を考え出すことが出来ると考えたからである。またこの逐次近似については伊藤[13] K.Ito [56] 等に色々な場合に詳しいことがあるので詳細に知りたい読者はそれらを随時参照して頂きたい。

最后の章はmarkov過程の性質を利用して境界値問題の確率論的な取扱いに統一的観点を与えるための一つの筋書をのべる。これはこのノート自体の主目的ではないので　事情はできるだけ簡単な場合についてのべてあり，証明は筋書だけにとどめてある。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

なお全体を通じて，1次元拡散過程の境界での性質をしばしば使っている。これは§§4－9をみれば解ることであるが，2次元拡散過程で領域の内部での行動と境界での行動を如何に組合わせるかが構成の最重要点である。そこに生ずる困難さを1次元拡散過程でのその困難さに帰着したところにこの章の一つの特徴がある。
1次元拡散過程についてのそれらの性質についてはこのノートと同じシリーズのVol 3の伊藤．渡辺．福島[15]の第2章に詳しく出ているので多くの場合それを引用した。

§1　確率積分を用いる理由

最初にこゝで用いる方法の直観的な像を得るための説明を与える。こゝにR^Nの拡散過程があったとすれば，その *generator* は $N=1$ のとき，すなわち1次元拡散過程については *W. Feller* により完全に研究された。多次元のとき完全に求める問題はまだ解かれていないが，*path* が或る意味で四方にどこへでも行けるような点では適当な正則条件の下で2階の偏微分作用素になることが知られている。例えば第1章§3でのべた *Dynkin* の公式（定理3.3）を用いると次のようなことが言える。（E. B. Dynkin [48]，§4 参照）。

今ある連続函数 φ_i（$i=1,2,\cdots N$）と その任意の積 $\varphi_i\varphi_j$（$i,j=1,2\cdots N$）に対して ある点x_0で *Dynkin* の公式による *generator* $\mathfrak{G}$が定義できており，$F(y_1,\cdots,y_N)$ は $(\varphi_1(x_0),\cdots,\varphi_N(x_0))$ のある近傍Uで φ_i, $i=1,\cdots,N$ に関し2階連続微分可能な任意の函数とする。そのときは 点x_0で 函数 $F(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)$ に対し $\mathfrak{G}$ は定義され，

$$(1.1)\qquad \mathfrak{G}F(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)=\sum_{i=1}^{N}a_i\frac{\partial F}{\partial\varphi_i}+\sum_{i,j=1}^{N}b_{ij}\frac{\partial^2F}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}$$

となる。こゝで $a_i=\mathfrak{G}(\varphi_i-\varphi_i^0)$，$b_{ij}=\mathfrak{G}(\varphi_i-\varphi_i^0)(\varphi_j-\varphi_j^0)$ である（$\varphi_i=\varphi_i(x)$, $\varphi_i^0=\varphi_i(x_0)$）又（$b_{ij}$）は *non-negative definite matrix* になる。すなわち或る意味で楕円形偏微分作用素である。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

今係数に適当な連続性を仮定すれば，そのような作用素は *Laplacian* $\triangle$ と本質的に同じ性質を持っていることは良く知られている。ところで $\triangle$ に対応する拡散過程は *Brown* 運動である。従ってこのような拡散過程は充分小さな近傍では定数係数の作用素に対応するものに近い行動をしていると考えられるので，*Brown* 運動と 1 階微分作用素に対応する直線的な運動の独立な和と考えられる。このように局所的に考えたものを一つ一つつなぎ併せて行くと元のものが得られると考えるのは自然な考えである。このような考え方は拡散方程式の解の構成では例えば第2章にのべたように解析的にはしばしば用いられている。

これを拡散過程の *path* の構成に用いることは S. Bernstein [43], P. Lévy [60] 等により考えられ K. Ito [56] により系統的に発展させられた。先ず話を簡単にするために一次元の場合に P. Lévy [60], 2章，3章に従ってのべる。拡散過程の dt に於ける変化 $dX(t)$ は *Brown* 運動の dt の変化 $dB(t)$ と平均的なずれ dt にその場所場所に応じた係数 $a(X(t))$, $b(X(t))$ をそれぞれにかけ併せて加えたものになると考える。すなわち，

$$(1.2) \qquad dX(t) = a(X(t))\,dt + b(X(t))\,dB(t)$$

と考えようというわけである。これを瞬間瞬間について加える，すなわち積分すれば $X(t)$ が得られる。この事情は通常函数を得るのに各瞬間の接線を知って，それを積分するという方法を用いるのと同じ性質のものである。その類似から形式的に考えれば

$$(1.3) \qquad X(t) = X(0) + \int_0^t a(X(s))\,ds + \int_0^t b(X(s))\,dB(s)$$

なる積分方程式を考えればよいことになる。ところが w を固定した時 $B(s, w)$ は有界変動な函数ではないのでその点のみでもこの正当化は容易でない。伊藤清氏は一連の論文で，基本的にはこのような考えに立って，*generator* の事情が *path* ではこのような関係になること，すなわち (1.2) の数学的定式化を与え，それを解くために (1.3) の第二項における積分を考え，(1.2) を (1.3) にお

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

きかえた。P. Lévy [60]，第3章にもある通りこのような構成は多次元の場合にも適用できる。この拡散過程の接線は Brown 運動であるという主張は更に一般化して一般の Markov 過程の接線は一般の加法過程だというところまで適当な条件の下でひろげることができる。（K. Itô [56] 参照）。このように path を構成すれば Brown 運動の path の空間に這入っている測度から新たな path の空間の測度が自然に得られるわけである。path の確率論的特性を大きく利用したこの純確率論的方法は generator となるべき作用素を与えたとき Markov 過程を構成する一つの有力な方法として広く用いられている。

この方法の一つの大きな特徴は path の持っている特性の研究がしやすい点にある。以上のものはあくまで境界をもたない R^N 全体での path またはある domain を出たら killing する path の構成であったが，この特徴に着目して境界で適当な境界条件をみたすものを構成しようというのがこゝでの考え方である。第1章§5にのべたように Wentzell の境界条件は簡単のために $\delta(x)\equiv 0$ で $\nu_{x_0}(dy)$ が ∂D 上のみに mass を持つときを考えると，$\frac{\partial u}{\partial n}(x)$ と境界 ∂D 上の Markov 過程のある種の generator $\hat{\mathfrak{g}}$ の和の形に書けている。このことは path でみれば上に考えたことの類似と Lévy 過程の Lévy-Ito の分解の事情を併せれば，内部への出入は $\frac{\partial u}{\partial n}(x)$ に対応する process すなわち反射壁の運動と同じ形で，境界内の方向への運動は $\hat{\mathfrak{g}}$ に対応する運動と同じものであろうと考えられる。この後者には $N-1$ 次元での確率積分方程式が使えることは通常であろうということは容易に想像される。前者の内部への出入はそうは出来そうもないのでその点は一次元拡散過程に関する反射壁の運動に関する結果を使うというわけである。

しかしながらこのような接線という考え方は本質的に制限のあるものだということは，一次元 diffusion に関する W. Feller や K. Itô−H.P. McKean の研究から容易に解る。丁度それは函数の中に微分不可能なものがあるというようなことである。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

§2. 確率積分の定義と性質

Brown 運動を基礎とする確率積分については伊藤[13]の如く日本語の本も既にあり，文献も多いので，全く引用による結果の列記にとどめ，jumpのある加法過程に基礎をおく確率積分の方をやや詳しくのべる。

[1] Lévy 過程に関する準備.

基礎になる確率空間 $\Omega(\mathcal{B},P)$ を1つ考え，その上に次のような特性函数 $e^{\psi_0(z)}$ を持った Lévy 過程 $\{l(t,\omega),\ a\leq t\leq b\}$ を考える.

$$(2.1)\qquad E\{e^{iz\{l(t,\omega)-l(s,\omega)\}}\}=\exp\{(t-s)\psi_0(z)\},$$

こゝで $\psi_0(z)$ は

$$(2.2)\qquad \psi_0(z)=iz-\frac{z^2}{2}+\int_{|u|>1}(e^{iuz}-1)\frac{du}{u^2}+\int_{|u|\leq 1}(e^{iuz}-1-izu)\frac{du}{u^2}$$

で与えられる。

このような Lévy 過程は確かに存在し，殆んどすべての ω について path function は高々第一種不連続点のみを持ち，右連続と考えてよいことが良く知られている。それのみでなく，P. Lévy[59], 伊藤[13], [14]等によれば次のような Lévy-Itô の表現が可能である。

$$(2.3)\qquad l(t,\omega)=l(a,\omega)+t+g(t,\omega)+\int_a^t\int_{|u|>1}u\,P(du\,ds,\omega)+\int_a^t\int_{|u|<1}u\,q(du\,ds,\omega).$$

こゝで (a) $g(t,\omega)$ は $l(\tau,\omega)$, $a\leq\tau\leq t$, の函数であるような Brown 運動の1つの version であり，(b) $P(E,\omega)$ は $[a,b]\times R'$ の Borel subset E をとって来るとき，E に属する $l(t,\omega)$, $a\leq t\leq b$ の jump (s,u) の数である。こゝで s は jump の時間で，u はその大きさ，すなわち $l(s,\omega)-l(s-0,\omega)$ である。そのとき $p(E,\omega)$ は平均が

$$\pi(E)=\int_E d\tau\,du/u^2$$

の Poisson 分布に従う。(c) $q(E,\omega)=P(E,\omega)-\pi(E)$ とおく。
(d) $\{g(t,\omega),\ a\leq t\leq b\}$ と $\{P(E,\omega), q(E,\omega);\ E\in\mathcal{B}([a\times b]\times R')\}$ は

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

お互に独立になっている。

〔2〕 Wiener 過程を基礎とする確率積分。

$I=(\alpha,\beta]$ とするとき $S(I)$ は 次のような条件をみたす $\sigma(\tau,\omega)$. $\alpha\leqq\tau\leqq\beta$, $\omega\in\Omega$, の全体とする。

(S.1) $\sigma(t,\omega)$ は (t,ω) に関し可測である。

(S.2) 殆んどすべての ω に関し

$$\int_\alpha^\beta \sigma(s,\omega)^2 ds < +\infty,$$

(S.3) 任意の t, $\alpha\leqq t\leqq\beta$, に対し系 $\{\sigma(\tau,\omega),\ \alpha\leq\tau\leq t;\ g(\tau,\omega)-g(\alpha,\omega),\ \alpha\leq\tau\leq t\}$ は 系 $\{g(\tau,\omega)-g(t,\omega);\ t\leq\tau\leq\beta\}$ と独立とする。

このとき任意の $\sigma\in S(I)$ に対し 次のような性質をみたす "Wiener 過程 $g(t,\omega)$ に関する確率積分"

$$\int_\alpha^t \sigma(\tau,\omega)\,dg(\tau,\omega)\ \ (\equiv I(t,\omega;\sigma)),$$

が定義される：

(G.1) (連続性)：$I(t,\omega;\sigma)$は殆んどすべての ω に対し t に関して連続。

(G.2) (加法性)；殆んどすべての ω に対し，$\alpha\leqq t\leqq\beta$ で

$$I(t,\omega;c_1\sigma_1+c_2\sigma_2)=c_1I(t,\omega;\sigma_1)+c_2I(t,\omega;\sigma_2),$$

(G.3) 若し

$$\int_\alpha^\beta E\{\sigma^2(\tau,\omega)\}d\tau < +\infty$$

ならば

$$c^2P\{\sup_{\alpha\leqq t\leqq\beta}|I(t,\omega;\sigma)|>c\}\leqq\int_\alpha^\beta E\{\sigma^2(\tau,\omega)\}d\tau.$$

(G.4) 集合 Ω_1，(Ω_1 は P-measurable set) の上で $\sigma_1=\sigma_2$ ならば、Ω_1 の上の殆んどすべての点で

$$I(t,\omega;\sigma_1)=I(t,\omega;\sigma_2),\quad \alpha\leqq t\leqq\beta.$$

(G.5) 若し $\int_\alpha^\beta E\{\sigma^2(\tau,\omega)\}d\tau<+\infty$ ならば

$$E\{I(t,\omega;\sigma)\}=0.$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

(G.6) 若し

$$\int_\alpha^\beta E\{\sigma^2(\tau,\omega)\}d\tau<+\infty$$

ならば,

$$E\{(I(t;\omega,\sigma))^2\}=\int_\alpha^t E\{\sigma^2(\tau,\omega)\}d\tau 。$$

(G.7) 今 $\sigma_n\in S(I)$ が殆んどすべての (τ,ω) に対し σ_∞ に収束し，さらに $|\sigma_n|\leq\sigma_0\in S(I)$ とする。その上に $(\sigma_1,\sigma_2,\cdots)$ のすべての B-*measurable function* が (S.3) をみたすならば

$$I(t,\omega;\sigma_n)\to I(t,\omega;\sigma_\infty)\quad(\textit{in probability})$$

(G.8) $\alpha\leq t<u<s\leq\beta$ ならば

$$\int_t^u\sigma(\tau,\omega)dg(\tau,\omega)+\int_u^s\sigma(\tau,\omega)dg(\tau,\omega)=\int_t^s\sigma(\tau,\omega)dg(\tau,\omega)$$

なるよう

$$\int_t^s\sigma(\tau,\omega)dg(\tau,\omega)$$

が定義できる。

以上の積分は K. Ito [56] に従って居り，それは伊藤 [13] より (S.3) の条件がやゝ一般になっているが，この一般化は余り本質的なものではなく，唯後に $p(E,\omega)$, $q(E,\omega)$ に関する積分まで含んだ確率積分方程式を考えるのに都合のよい形にしてあるだけである。原理的なところは伊藤 [13] に充分出ているので普通はそちらを参照した方が便利である。

[3] $P(E;\omega)$ と $q(E;\omega)$ を基礎とする確率積分。[(1)]

$I=[\alpha,\beta]\times(\gamma,\delta]$, $0<\gamma,\delta<+\infty$, $a\leq\alpha\leq\beta\leq b$ とする。

$F(I)$ は次の条件をみたすような函数 $f(t,u,\omega)$, $\alpha\leq t\leq\beta$, $\gamma\leq u\leq\delta$, $\omega\in\Omega$, の全体とする。

(F1) $f(t,u,\omega)$ は (t,u,ω) に関し可測である。

(F2) 殆んどすべての ω に関して,

$$\int_I|f(s,u,\omega)|\,ds\,du/u^2<+\infty,$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

(P.3) $\{ f(s, u, \omega),\ \alpha \leqq s \leqq t,\ P(E;\omega);\ E \subseteq R^2_-(t) \}$

と

$$\{ P(E;\omega);\ E \subseteq I \cap R^2_+(t) \}$$

はお互に独立である。こゝで

$$R^2_+(t) = \{ (\tau, u);\ \tau \geqq t \},\quad R^2_-(t) = \{ (\tau, u);\ \tau < t \}$$

である。

このとき任意の $f \in F(I)$ に対し次のような性質をみたす確率積分

$$\int_E f(s, u, \omega)\, P(ds\,du, \omega)\ (\equiv \tilde{I}(E, \omega; f)),$$

E は I の Borel subset

が定義できる。

(P.1) (第1種不連続性), $\tilde{E} \equiv (\gamma, \delta]$ とすれば 殆んどすべての ω に対し,

$$\int_\alpha^t \int_{\tilde{E}} f(s, u, \omega)\, P(ds\,du, \omega)$$

は t に関し高々第1種不連続点のみを持ち，右連続になっている。

(P.2) (加法性)： 殆んどすべての ω に対し

$$\tilde{I}(E, \omega; C_1 f + C_2 g) = C_1 \tilde{I}(E, \omega; f) + C_2 \tilde{I}(E, \omega; g),$$

(P.3) 若し集合 Ω_1 (Ω_1 は P-measurable set) の上で，$f_1 = f_2$ ならば，Ω_1 の上の殆んどすべての点で，

$$\tilde{I}(E, \omega; f_1) = \tilde{I}(E, \omega; f_2),$$

(P.4) 若し $\int_I E\{ |f(\tau, u, \omega)| \}\, d\tau\, du/u^2 < +\infty$ ならば

$$E\{ \tilde{I}(E, \omega; f) \} = \int_E E\{ f(\tau, u, \omega) \}\, d\tau\, du/u^2,$$

(P.5) 若し $f_n(\tau, u, \omega) \in F(I)$ が殆んどすべての (τ, u, ω) について $f_\infty(\tau, u, \omega)$ に収束し，$|f_n| \leqq f_0 \in F(I)$ であり，しかも更に $(f_1, f_2, \cdots)$ のすべての B-measurable function $f(\tau, u, \omega)$ が (P.3) の条件をみたすならば，そのときは

$$I(E, \omega; f_n) \longrightarrow I(E, \omega; f_\infty) \quad (\text{in probability})$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

である。

(P.6) 任意の disjoint な Borel set の系 $\{B_n\}$ に対し，殆んどすべての ω について

$$I(B,\omega;f)=\sum_{n=1}^{+\infty} I(B_n,\omega;f), \qquad B=\sum_{n=1}^{+\infty} B_n,$$

である。

(P.7) 任意の n に対して，$f(\tau,u,\omega)\in F((\alpha,\beta]\times(\gamma,n])$ であれば

$$\int_t^s\int_\gamma^\infty f(\tau,u,\omega)P(d\tau du,\omega) \quad , \quad \alpha\leqq t\leqq s\leqq\beta,$$

が定義でき，上の性質を持っている。同様に $\delta<0$ に対し

$$\int_t^s\int_{-\infty}^\delta f(\tau,u,\omega)P(d\tau du,\omega)$$

も定義される。

次に次の性質をみたすような函数 $f(\tau,u,\omega)$，$(\tau,u)\in\widehat{I}=(\alpha,\beta]\times(0,\delta]$，$a\leq\alpha\leq\beta\leq b$，$0<\delta<\infty$，の全体を $F_1(\widehat{I})$ とする：

1) (F.1) をみたす。

2) (F.3) をみたす。

3) (F.2′) すなわち

$$\int_I (f(\tau,u,\omega))^2 d\tau du/u^2 \quad <+\infty$$

をみたす。

先づ $f\in F(I)$ のときは

$$\int_E f dq=\int_E f dP-\int_E f(\tau,u,\omega)\,d\tau du/u^2$$

とする。次に $F_1(\widehat{I})\ni f(\tau,u,\omega)$ に対する $q(E;\omega)$ についての積分も定義される。この積分も又 (P.1)，(P.2)，(P.3)，(P.6) 等をみたす。

(P.10) 若し $\int_I E\{f^2\}d\tau du/u^2 \quad <+\infty$ ならば

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$E\{(\iint_{E} f(\tau,u,\omega)\,q(d\tau du,\omega))\}=0,$$

$$E\{(\iint_{E} f(\tau,u,\omega)\,q(d\tau du,\omega))^2\}=\int_{E} E\{f^2(\tau,u,\omega)\}\,d\tau du/u^2$$

である・

(F.11) $\iint_I E\{f^2(\tau,u,\omega)\}\,d\tau du/u^2<+\infty$ ならば

$$C^2P\{\sup_{\alpha\le t\le\beta}|\int_\alpha^t\int_{\widetilde{E}} f(\tau,u,\omega)q(d\tau du,\omega)|>C\}\le\int_\alpha^\beta\int_{\widetilde{E}} E\{f^2(\tau,u,\omega)\}\,d\tau du/u^2$$

である．こゝで $\widetilde{E}\subseteq(\gamma,\delta]$ である・

尚 $\hat{I}=(\alpha,\beta]\times[\delta,0]$, $a\le\alpha\le\beta\le b$, $-\infty<\delta<0$, のときも $q(E,\omega)$ を基礎とする積分は同じような性質を持つように定義できる。$I=\widetilde{I}\cup\hat{I}$ のときはそれぞれの和として定義する。

$F(I)$, $F_1(\widetilde{I})$ 等の定義で (F.1) の条件は積分等を考えるにごく自然な条件である。(F.3) は定義の途中でも必要になるし，又将来確率積分方程式を使って Markov 過程の path を定義するのに，それが好都合な形になっている。(F.2) 又は (F.2′) についても又将来の目的から来る或る自然な制限であるが，それについては次のようにして大体の直観像を得ることができる・

一般に無限分解可能な分布の特性函数の対数は

$$\psi(z)=imz-\frac{\sigma^2}{2}z^2+\int_{|u|>1}(e^{if(u)z}-1)\frac{du}{u^2}+\int_{|u|\le1}(e^{if(u)z}-1-if(u)z)\frac{du}{u^2}$$

と書き表わすことができる・こゝで m は実数，$\sigma\ge0$, $f(u)$ は単調非減少函数で右連続であり，そして

(2.4) $\displaystyle\int_{|u|\le1} f(u)^2\frac{du}{u^2}<+\infty$.

今 Lévy 過程 $\{\widetilde{l}(t,\omega),\ a\le t\le b\}$ が

$$E\{e^{iz(\widetilde{l}(t,\omega)-\widetilde{l}(s,\omega))}\}=e^{\psi(z)(t-s)}$$

なる関係をみたすならば，伊藤 [13], P. Lévy [59] によれば

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

(2.5) $$\tilde{\ell}(t,\omega)=\tilde{\ell}(a,\omega)+mt+\frac{\sigma^2}{2}g(t,\omega)+\int_a^t\int_{|u|>1}f(u)P(duds,\omega)+\int_a^t\int_{|u|<1}f(u)q(duds,\omega)$$

と表わされる version が存在する。われわれがこれから考えるものは (2.5) の拡張のようなものであることは，§1でぼく然たることをのべておいた。そう考えたとき，例えば (F,2) の条件は (2.4) に密接に関連して考えられるものである。

[4] $P(E,\omega)$ と $q(E,\omega)$ を基礎とする確率積分。[(2)].

次に [3] でのべた積分の定義の道筋を極く簡単にのべる。それは伊藤 [13], §64, と基本的には同じものである。

1°) $f(\tau,u,\omega)$ が次の条件をみたすとき，それは uniformly stepwise function と言われる：

ω に無関係な $\{t_n\}$, $\{u_n\}$；

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,\quad \gamma=u_0<u_1<\cdots<u_n=\delta$$

が存在し，

$$f(\tau,u,\omega)=f(t_{\mu-1},u_{\nu-1},\omega),\quad t_{\mu-1}\leq t<t_\mu,\quad u_{\nu-1}\leq u<u_\nu$$
$$\mu=1,2,\cdots,m$$
$$\nu=1,2,\cdots,n.$$

2°) 先ず $f(\tau,u,\omega)$ が uniformly stepwise function のときは

$$\int_I f(\tau,u,\omega)P(d\tau du,\omega)=\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}f(t_{\mu-1},u_{\nu-1},\omega)P([t_{\mu-1},t_\mu)\times(u_{\nu-1},u_\nu),\omega)$$

と定義する。

この積分は (P.2), (P.3), (P.4) をみたしている。

3°) 任意の $\int_I E\{|f(\tau,u,\omega)|\}d\tau du/u^2<+\infty$ なる $f(\tau,u,\omega)\in F(I)$ に対しては，uniformly stepwise function $f_n(\tau,u,\omega)\in F(I)$ で

$$\|f(\tau,u,\omega)-f_n(\tau,u,\omega)\|\equiv\int_I E\{|f(\tau,u,\omega)-f_n(\tau,u,\omega)|\}d\tau du/u^2\to 0\quad(n\to+\infty)$$

なるような系列が 伊藤 [13], §64, の場合と基本的なところは全く同じにして構成できる。

4°) $f_n(\tau,u,\omega)$ に対しては 2°) により積分が定義されている

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

が,

$$E\{|\int_I f_n(\tau,u,\omega)P(d\tau du,\omega)-\int_I f_m(\tau,u,\omega)P(d\tau du,\omega)|\}$$
$$\leqq \int_I E\{|f_n(\tau,u,\omega)-f_m(\tau,u,\omega)|\}\frac{du\,d\tau}{u^2}\longrightarrow 0\quad\left(\begin{matrix}m,n\to\infty\\ \text{のとき}\end{matrix}\right)$$

となるので,

$$\int_I f_n(\tau,u,\omega)P(d\tau du,\omega)$$

の極限 $I(\omega)$ が一意的に定まる。この $I(\omega)$ を $\int_I f(\tau,u,\omega)P(d\tau du,\omega)$ とする。そうすると $\int_I f_n(\tau,u,\omega)P(d\tau du,\omega)$ に関する (P.2)—(P.4) は $I(\omega)$ まで遺伝する。

5°) 任意の $f(\tau,u,\omega)\in F(I)$ に対しては,

$$f_n(\tau,u,\omega)=\chi_{(-n,n)}\left(\int_\alpha^\tau\int_\gamma^u|f(\tau,u,\omega)|\frac{d\tau du}{u^2}\right)f(\tau,u,\omega)$$

とすると,先づ $f_n(\tau,u,\omega)\in F(I)$ が解る。この $f_n(\tau,u,\omega)$ は 3°) の条件をみたすので,その積分を定義し,$n\to+\infty$ のときにその極限が存在することを示し,それをもって $f(\tau,u,\omega)$ の積分とする。これも (P.1)—(P.4) をみたす。

6°) 次にその積分に関し (P.5) を *Wiener* 過程に関するものと同じ考えで示す。

7°) (P.7) も上の積分に対して示される。

8°) 又 E が I の *Borel-subset* ならば

$$\int_E f(\tau,u,\omega)P(d\tau du,\omega)=\int_I f(\tau,u,\omega)\chi_E(\tau,u)P(d\tau du,\omega)$$

で定義し,それに関して色々な性質を確かめる。例えば (P.6) が *in Probability* の意味で言える。

9°) その後に *regular kernel* と呼ばれるものを作る。
始めに

(a) $f \geqq 0$, (b) $\int_I E\{f(\tau,u,\omega)\} d\tau du/u^2 < +\infty$

なるものについて作る。

$\{\alpha_\iota\}$, $\{\gamma_\iota\}$として $(\alpha,\beta]$, $(\gamma,\delta]$ の中で dense な系列で $\{\alpha_\iota\} \ni \alpha,\beta$, $\{\gamma_\iota\} \ni \gamma,\delta$ なるようにとって来る。

$(\alpha_\mu, \alpha_\iota] \times (\gamma_\lambda, \gamma_\kappa]$ なる区間の有限和を elementary set と呼ぶことにする。

10°) $E_1, E_2, \cdots, E_n$ を disjoint elementary set とすれば, $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ のとき,

$$\int_E f(\tau,u,\omega) P(d\tau du,\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{E_\nu} f(\tau,u,\omega) P(d\tau du,\omega)$$

は確率 1 で成立つように出来る。此等の等式は高々可附番個であるので, 共通の除外集合で確率 0 のものがとれる。$f \geqq 0$ より

$$\int_E f(\tau,u,\omega) P(d\tau du,\omega)$$

は finite additive measure になる。

11°) G を I の中で open subset, B を I の任意の Borel set とするとき,

$* \int_G f(\tau,u,\omega) P(d\tau du,\omega) = \sup\{\int_E f(\tau,u,\omega) P(d\tau du,\omega)$; E は G に含まれるすべての elementary set $\}$

$* \int_B f(\tau,u,\omega) P(d\tau du,\omega) = \inf\{* \int_G f(\tau,u,\omega) P(d\tau du,\omega)$; G は B を含む I の中の任意の open set $\}$,

により, $* \int_G f(\tau,u,\omega) P(d\tau du,\omega)$, $* \int_B f(\tau,u,\omega) P(d\tau du,\omega)$ を定義する。

12°) $* \int_B f(\tau,u,\omega) P(d\tau du,\omega)$ については (P.6) が成立つ。

13°) 次に殆んどすべての ω に対して

$$* \int_B f(\tau,u,\omega) P(d\tau du,\omega) = \int_B f(\tau,u,\omega) P(d\tau du,\omega)$$

を示す。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

14°) 9°) の (a),, (b) がないときは, (b) がないとき,

$$*\int_B f(\tau,u,\omega)\,P(d\tau du,\omega)=\lim_{N\uparrow+\infty} *\int_B \chi_{[-N,N]}\Big(\int_{I\cap R^2_-(\tau)} f(\tau',u',\omega)\,d\tau' du'/u'^2\Big) f(\tau,u,\omega)\,P(d\tau du,\omega)$$

とし, (9) がないときは

$$*\int_B f(\tau,u,\omega)\,P(d\tau du,\omega)= *\int_B \frac{|f|+f}{2}\,dP - *\int_B \frac{|f|-f}{2}\,dP$$

と定義する。このような *regular kernel* は (P.1) をみたすことが言える。

15°) $F,(\widetilde{I}) \ni f(\tau,u,\omega)$ の $q(E;\omega)$ に関する積分は $F(I)$ の元に対する $q(E,\omega)$ に関する積分を用いて定義する。先づ始めに

$$\int_I E\{f(\tau,u,\omega)^2\}\,d\tau du/u^2 < +\infty$$

とする。このときは $I_n=(\alpha,\beta]\times(1/n,\delta]$ とすれば $f\in F(I_n)$ なることが示される。そこで

$$\int_{I_n} f(\tau,u,\omega)\,q(d\tau du,\omega)$$

が定義される。

16°)
$$E\Big\{\Big(\int_{I_n} f(\tau,u,\omega)\,q(d\tau du,\omega)-\int_{I_m} f(\tau,u,\omega)\,q(d\tau du,\omega)\Big)^2\Big\}$$
$$=\int_\alpha^\beta \int_{1/n}^{1/m} E\{f^2(\tau,u,\omega)\}\,d\tau du/u^2 \to 0,\ (n,m\to+\infty \text{ のとき}),$$

であるので $\int_{I_n} f(\tau,u,\omega)\,q(d\tau du,\omega)$ の極限として

$\int_I f(\tau,u,\omega)\,q(d\tau du,\omega)$ が定義できる。

17°) 一般の場合は

$$f_n(\tau,u,\omega)=\chi_{[-n,n]}\Big(\int_\alpha^\tau \int_u^\delta (f(\tau',u',\omega))^2\,d\tau' du'/u'^2\Big) f(\tau,u,\omega)$$

について積分を定義し、後はその極限として $f(\tau,u,\omega)$ の積分を定義する。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

18°) 後は又 regular kernel を作って (P.1) をみたすようにする。

19°) (P.10), (P.11) は原理的に Wiener 過程に関する積分の場合と同じ方法で証明される。(それらについては伊藤[13], §64, を参照)。

§3. 2、3 の Lemma.

分布の収束の模様及び、その反映としての性質に関する 2, 3 の Lemma をこゝにのべる。此等の結果は後程、generator, 境界条件を求めるときに用いる。先づ筋を明確につかむためには、この § はとばして読んで差支えない。この章の主目的ではないので証明の詳細は省略する。(K. Ito [56] 参照)

Lemma 3.1. 確率空間 $\Omega(\mathbb{B}, P)$ での確率変数 $X(\omega)$, $Y(\omega)$, $Z(\omega)$ があり、$0<\alpha<1$ なる α に対し、

$$|E\{Y(\omega)\}| \leq \frac{\alpha}{n}, \quad E\{(Y(\omega))^2\} \leq \frac{\alpha}{n}, \quad P\{Z(\omega) \neq 0\} < \frac{\alpha}{n}$$

ならば、

$$\rho(P_X^{*n}, P_\Phi^{*n}) < 4\sqrt{2}\,\alpha^{\frac{1}{3}},$$

こゝで $\Phi = X+Y+Z$ とおき、ρ は分布に関する Lévy の距離で、P_X, P_Φ はそれぞれ X, Φ の分布で P_X^{*n}, P_Φ^{*n} はそれらの n 回の convolution を表わす。

証明. (概略) $\Omega^*(\mathbb{B}^*, P^*)$ を $\Omega(\mathbb{B}, P)$ の n 個の product 確率空間とする。$\omega^* = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ に対し、

$$X_\nu^*(\omega^*) = X(\omega_\nu), \quad Y_\nu^*(\omega^*) = Y(\omega_\nu), \quad Z_\nu^*(\omega^*) = Z(\omega_\nu),$$

$$\nu = 1, 2, \cdots, n$$

とする。条件より

$$E\left\{\left(\sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu^*(\omega^*)\right)^2\right\} \leq \alpha^2 + \alpha < 2\alpha.$$

従って、

$$P\left\{\left|\sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu^*(\omega^*)\right| > \alpha^{1/3}\right\} \leq 2\alpha^{1/3}。$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

又 $P\{\sum_\nu Z_\nu^*(\omega^*)\neq 0\}\leqq \sum_\nu P\{Z_\nu^*(\omega^*)\neq 0\}\leq \alpha$。

従って

$$P\{|\sum_{\nu=1}^n \Xi_\nu^*(\omega^*)-\sum_{\nu=1}^n X_\nu^*(\omega^*)|>\alpha^{1/3}\}<2\alpha^{1/3}+\alpha<3\alpha^{1/3}。$$

ここで　$\Xi_\nu^*(\omega^*)=X_\nu^*(\omega^*)+Y_\nu^*(\omega^*)+Z_\nu^*(\omega^*)$。　（証明終り）。

Lemma 3.2.　Pを特性函数の対数が次のようになる無限分解可能な　分布とする。

$$\psi(z)=imz-\frac{\sigma^2}{2}z^2+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2})\,n(du)$$

$\{P_h\}$ は分布の系列で，$P_h^{*[\frac{1}{h}]}$ は $h\to 0$ のとき，Pに法則収束する。ここで［　］はガウスの記号を意味する。

そのとき，$\mathbb{C}^2((-\infty,+\infty))$　に属する有界函数 $u(x)$ に対し，

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}[\int u(x+y)P_h(dy)-u(x)]=m u'(x)+\frac{\sigma^2}{2}u''(x)+\int_{-\infty}^{\infty}(u(x+y)-u(x)-\frac{y}{1+y^2}u'(x))\,n(dy)$$

である。

証明の概略．　今　$G(u)$ を次のような函数とする。

$$G(u)=\begin{cases}\sigma^2+\displaystyle\int_{-\infty}^{u}\frac{v^2}{1+v^2}\,n(dv), & u>0\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{u}\frac{v^2}{1+v^2}\,n(dv), & u<0\end{cases}$$

又　$G_h(u)$　は

$$G_h(u)=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{u}\frac{v^2}{1+v^2}\,P_h(dv)$$

で定義される。そのとき，$G(u)$ のすべての連続点で

(3.1)　$$G_h(u)\longrightarrow G(u),\qquad (h\downarrow 0)$$

であり，かつ

(3.2)　$$\int\frac{dG_h(u)}{u}\longrightarrow m\qquad (h\downarrow 0)$$

である。一方

$$\frac{1}{h}[\int u(x+y)P_h(dy)-u(x)]=u'(x)\int\frac{dG_h(u)}{u}+\int\varphi(y,x)\,dG_h(y),$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

こゝで

$$\psi(y,x)=\left(u(x+y)-u(x)-\frac{y}{1+y^2}u'(x)\right)\frac{1+y^2}{y^2} \qquad (y\neq 0)$$

$$\psi(0,x)=u''(x)/2$$

とする。

$\psi(y,x)$ は有界で，すべての固定した x に対して，$y=0$ の近傍以外では連続である。一方任意の固定した x に対して $y=0$ の近傍内でも有界連続であることが次のことから解る。

$$u(x+y)-u(x)-\frac{y}{1+y^2}u'(x)=yu'(x)+\frac{y^2}{2}u''(x)-yu'(x)+o(y^2)$$

$$=\frac{y^2}{2(1+y^2)}u''(x)+o(y^2)$$

故に (3.1), (3.2) と (3.3) に注意すれば求める結果を得る。

（終り）。

この証明は一見して解る通り，無限分解可能な分布の特性函数に関する標準形の求め方と同じ思想にそって行われている。今 P_h を Lévy 過程の時間 h の分布とすれば，$P_{\frac{1}{n}}^{*(n)}=P_1$ となる。このとき，P_h に関し Lemma 3.2 が成立つことは色々の著者によって示されている。例えば伊藤[13]，P 329 の例1を参照されたい。又第1章§5にのべた。A. D. Wentzell [37] による多次元拡散過程に関する境界条件の求め方も同じような考え方である。そこでは遷移確率 $P(t,x,E)$ を上の Lemma 3.2 の P_h と思えば，$P(t,x,E)$ の generator が存在することが，$P_h^{*[\frac{t}{h}]}\Rightarrow P$ と同じ役割を果していることが解る。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

§4 尺度の変換

拡散過程を1対1の連続な写像により写したものはまた拡散過程である。従ってそのような形で写されるもの同志は1つのクラスと考えるのが妥当であろう。そうするとその中どれを代表と考えた方が好都合かという問題がおこる。正則区間の1次元拡散過程に対してはこのような変換は W. Feller [52], [53], [7] により最初に研究され，その代表の取り方が，微分作用素という形の研究より，一歩進めた段階で1次元拡散過程を研究する一つの大きな土台になっている。その変換については其の後 E.B. Dynkin [48] により確率論的な構成が行われている。これらの事情は伊藤・渡辺・福島[15]又は E.B. Dynkin [49] を参照されたい。

この種の問題は多次元拡散過程の研究でも当然問題になって来る。しかし問題の解決は一層困難である。上の1次元拡散過程についての変換を作るときは，左右という一次元固有の性質を深く用いているので，単純な拡張はできない。多次元の場合はまだそのような問題を系統的に取扱ったものはないように思える。こゝではそれへの一つの試みを当面の目的に必要な範囲でのべる。なおこゝでのべる方法は一次元のときの変換のように確率論的な意味が明確になったものでなく，あくまで一つの試みである。

この事情をみるために，Jordan 曲線で囲まれた単連結な領域Sの内部で Brown 運動を考えてみる。簡単のため ∂S に path が到達したら killing するとする。このとき，Sを単位円Dに写す等角写像 φ により，Brown 運動をうつすと，新しい過程の generator は $C^2(\overline{D})$ に属する函数 $u(x)$ に対し

$$\frac{1}{|\varphi'|^2}\Delta u$$

なる値を与える。このとき新しい過程の半径成分はもはや markov 過程ではないが，それは半径成分が markov 過程になる Brown 運動の時間を random time で変換することにより得られる。このような事情を参考に"次の2つの条件をみたす変換が一般のときも

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

存在するか？" という問題が設定される。

(1) 変換で写された領域は単位円である。

(2) 新しい過程は半主成分が markov 過程であるような過程の時間を random time で変換することによって得られる。

この2つの条件は上の1次元拡散過程に関する変換によって得られる条件より弱い形であるが，次の点で共通性がある。(1), (2) の性質を用いて，後でのべるような方法により，一般の場合（勿論適当な正則条件の下で）の拡散過程の構成ができる。

上に考えた markov 過程の green 函数を $g^{\circ}(z_1, z_2)$ とすれば ψ は次のようにして構成される。

$$w(z)=e^{-g^{\circ}(z;0)-ih(z)}, \quad 0\in S \left(\begin{matrix}\text{このことは一般性を}\\ \text{失わず仮定できる}\end{matrix}\right)$$

こゝで $v(z)$ を $u(z)=g(z,0)-\log\frac{1}{|z|}$ の共軛調和函数とするとき，z の偏角を θ とすれば

$$h(z)=-\theta+v(z)$$

とおく。等角写像を作るのに $g^{\circ}(z;0)$ を用いている。このようなことを念頭に入れて1次元拡散過程の場合を考えると，W. Feller の S-scale による変換は

$$g^{\circ}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(S(x)-S(a))(S(b)-S(y))}{S(b)-S(a)}, & x\leqq y,\\[2ex] \dfrac{(S(y)-S(a))(S(b)-S(x))}{S(b)-S(a)}, & x>y,\end{cases}$$

を用いて変換すると考えてもよいことは容易に解る。すなわち，$[a,b]\ni 0$ を固定し，$[a,b]$ 上の任意の点を $g^{\circ}(x,0)$ の値とそれが0より右か左かということと組にすれば，表わすことができる。又 渡辺〔36〕によるように境界の構成に green 函数が重要な役割を果すことも考え併せ，(1), (2) の条件をみたす変換を作るのに green 函数を用いた方が好都合であるということが考えられる。

このような考え方を具体化する準備から始める。以下この §では全体と記号が少し違うが複素平面と考え $z=x+iy$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

適当な正則条件の下では，random time change を考えに入れれば，$\mathbb{C}^2$に属する函数 $u(z)$ に対し，generator が

$$(4.1) \qquad Au(z) = \left(\Delta + a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y)$$

なる値を与えるものを考えても一般性を失わないので，この場合のみを考える。さらに解析的複雑さをさけるために次のような正則条件を仮定する。

<u>Assumption 4.1.</u> $a(z)$, $b(z)$ は $\mathbb{C}(\overline{S})$ で，しかもその1階の偏導函数が存在し，S の任意の compact set で uniformly Hölder condition をみたす。さらに ∂S は $\mathbb{C}^3$ に属する curve である。

この Assumption の下では $S \ni 0$ に特異点を持つ，(4.1) に対応する単連結な領域Sでの Green 函数 $g_S^0(z,0)$ が存在する。記号を簡単にするために，この§ではこれを単に $g(z;0)$ と書く。

Brown 運動の場合の等角写像の構成から推察されるように，S を単位円に写すためには，

$$r(z) = e^{-g(z;0)}$$

を半径成分とすればよい。後は適当に角成分を作ればよいことになる。そのために，$g(z;0)$の等高数に直交する曲数を与える函数が有益であることは Brown 運動のときから推察できる。しかるにそのような函数を考えるには，

$$(4.2) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}g(z;0)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}g(z;0)\right)^2 > 0, \qquad {}^\forall z \in \overline{S} - 0$$

が言えていれば甚だ便利である。現在取扱っている場合に，(4.2) が保証されていることを示すために，green 函数の函数論的な取扱いに関する L. Bers [44], [45] の理論を用いる。そのために先づ 2, 3 の定義から始める。

<u>Definition 4.1</u> $\alpha(z)$, $\beta(z)$ をSの任意の compact set で uniformly Hölder condition をみたす函数（一般には complex valued）とする。そのとき，$\mathbb{C}^1(\overline{S})$ の函数 $v(z)$ が，若し

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$v_{\bar{z}}(z) = \alpha(z)v(z) + \beta(z)\bar{v}(z) \quad ,$$

ならば，$v(z)$ は $[\alpha, \beta]$-*pseudo-analytic* (*of the first kind*) という。こゝで $v_{\bar{z}}(z)$ は $v(z)$ の $\bar{z}$ による微分で，$\bar{v}(z)$ は $v(z)$ の *conjugate* を表わす。

<u>Definition 4.2.</u> 2つの函数 $f(z)$, $v(z)$ は S の上に定義されているとする。そのとき，若し，

$$v(z) = e^{S(z)} f(z)$$

ならば，それらは *similar* と呼ばれる。こゝで $S(z)$ は $\bar{S}$ で連続である。

このとき，次のような "*similar principle*" と呼ばれるものが成立つ。但しこゝでのべるのはわれわれの場合に特殊化してある。

<u>Lemma 4.1.</u> S における $[\alpha_1, \bar{\alpha}_1]$-*pseudo-analytic function* $v(z)$ は1つの *analytic function* $f(z)$ に *similar* で，逆にすべての *analytic function* $f(z)$ は1つの $[\alpha_1, \bar{\alpha}_1]$-*pseudo-analytic function* に *similar* である。こゝで $\alpha_1(z) = -a(z) - ib(z)$。しかも一方が与えられたときは次の条件をみたすようにとれる。

今 $(v/f) = S(z)$ とおけば

(i) $1/K \leqq |S(z)| \leqq K$ なる $K > 1$ で，$\alpha_1(z)$ と領域 S のみに関係する定数が存在する。

(ii) $|S(z_1) - S(z_2)| \leqq k|z_1 - z_2|^{\varepsilon}$，$k$ と ε は $\alpha_1(z)$ と領域 S のみに関係する。

(iii) 与えられた $z_1 \in S$ に対して $|S(z_1)| = 1$ となる。

(iv) $\mathrm{Im}\{S(z)\} = 0$，$z \in \partial S$ となる。

この *Lemma* を用いて次の *Lemma* を得る。

<u>Lemma 4.2.</u> $g^*(z;0)$ を領域 S における 0 で特異点を持つ Δ の *Green* 函数とする。$v(z)$ は

$f(z) = \frac{\partial}{\partial x} g^*(z;0) - i\frac{\partial}{\partial y} g^*(z;0)$ に *similar* で $|(v/f)(0)| = 1$，

で ∂S 上で $\mathrm{Im}\{v/f\} = 0$ となるような *pseudo-analytic function*

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

とする．そのとき $z_1 \in \partial S$ を１つ固定すれば

(4.3) $$g(z;0) = \mathrm{Re}\left\{\int_{z_1}^{z} v\, dz\right\}$$

は積分の path 及び z_1 に無関係で，しかも S での (4.1) に対する green 函数で 0 で特異点を持つものとなる。

Lemma 4.1 と 4.2 を用いると直ちに

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} g(z;0)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} g(z;0)\right)^2 = |v|^2 \geq K\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} g^*(z;0)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} g^*(z;0)\right)^2\right\} > 0,$$
$$z \in \overline{S} - 0$$

となり，(4.2) が示されたことになる。

(4.2) に注意すれば $S_r = \{z\,;\, g(z;0) = r\}$, $0 \leq r < +\infty$ は 0 を内部に含むような Jordan 曲線になることが解る。しかも $r \neq r'$ に対しては $S_r \cap S_{r'} = \phi$ である．さらにスカラー場 $g(z;0)$ に対する流線を与える函数 $\theta(z)$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, を考える。そうすると $g(z;0)$ の gradiant vector と $\theta(z)$ のそれとは定義から直交している。そこで

(4.4) $$\psi(z) = e^{-g(z;0) + i\theta(z)}$$

とすれば，明らかに

$$\psi : \overline{S} \xrightarrow{\psi} \overline{D},$$

であり，しかも１対１である．この変換を用いると次の定理が得られる。

<u>Proposition 4.1</u>　１対１な連続写像 $\psi(z) = (r(z), \theta(z))$ により (4.1) は次の形に変る。

(4.5) $$Au(z) = m(r(z), \theta(z))\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}(r(z), \theta(z))\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right.$$
$$\left. + \hat{b}(r(z), \theta(z))\frac{\partial}{\partial \theta}\right\}\hat{\phi}(r(z), \theta(z)),$$

こゝで $\hat{\phi}(r(z), \theta(z)) = \phi(z)$ で，

$$m(r(z), \theta(z)) = \{r(z)\|\mathrm{grad}\, g(z;0)\|^2\} > 0, \qquad z \in \overline{S} - 0,$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$\hat{a}(r(z),\theta(z)) = \frac{\|grad\ g(z;0)\|^2}{m(r(z),\theta(z))} > 0 \quad , \qquad z \in \bar{S}-0,$$

$$\hat{b}(r(z),\theta(z)) = \frac{A\theta(z)}{m(r(z),\theta(z))} \quad , \qquad z \in \bar{S}-0,$$

である.

証明の概略　この証明は $g(z;0)$ と $\theta(z)$ の gradiant vector が直交していることを用いて,

$$(4.6) \qquad \frac{\partial r(z)}{\partial x}\frac{\partial \theta(z)}{\partial x} + \frac{\partial r(z)}{\partial y}\frac{\partial \theta(z)}{\partial y} = 0$$

が得られること, 及び定義より明らかに

$$(4.7) \qquad Ar(z) = \|grad\ g(z;0)\|^2 r(z)$$

が導かれることに注意すれば, 後は単純な微分の計算であるので省略する。

Proposition 4.1 により適当な正則条件の下では, random time change を考慮に入れれば, generator が二階の偏微分作用素になるものを考えるかわりに, C^2 に属するものに対して,

$$(4.8) \qquad Au(r,\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + b(r,\theta)\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2a(r,\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right)u(r,\theta)$$

なる値を持つ generator を持った拡散過程を考えてよいことを示している。

このような尺度変換は1次元拡散過程のときほど強力ではないが, 前に述べた目的の(1), (2)はみたしている。さらに(2) はもっと具体的になっていて, 半径成分の微分の項は Brown 運動のものと同じであり, しかも半径成分と角成分両方の微分は含んでいない。この最后の注意から次のことが言える。一般に2階微分作用素を2次元領域で考えるときは, 法線方向というのはその作用素に応じてとらねば, 普通の意味の法線方向では意味がないことは良く知られている。ところが現在の場合は (4.8) に対応する法線方向を考えれば上の最后の注意から, それが通常の法線方向と一致する。(第2章§1参照)

従って 今后この章に関する限り $\frac{\partial u}{\partial n}$ というのは境界における接線に垂直な方向での微分という意味に用いる。
このことは 才1章，才3章で A.D. Wentzell による境界条件を記述する際 各点に応じ適当な local coordinate を導入して問題を考えて行ったことに関連している。すなわち，その際の法線方向として各点各点考える必要はなく，どの境界点でも統一的に通常の意味の半径成分がとれることになる。このことがこの章の序でのべた内部と境界のつながりを与える2次元的なものを1次元拡散過程のそれに帰着させることのできることの主要な原因の一つである。

§5. 一般化された確率積分方程式。

(a) 一般的説明

(4.8)を考える限り，Brown 運動の場合から推察して，極座標で書いたとき，半径方向の成分はベッセル過程すなわち generator が $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)$ の一次元 diffusion になっていることが容易に解る。従って回転方向の成分をどう構成するかが2次元拡散過程の構成上の最重要事になる。その方法として，今 K. Itô [55], [56] にならって確率積分方程式を用いたい。そこで 作り方の荒筋を明確にするため先づ (4.8) の A は $\frac{1}{2}\Delta$ ででき上った過程の境界条件も rotation に関し不要のときを考えよう。先づ反射壁の Brown 運動 $\{B(t,\omega)=(r(t,\omega), \theta(t,\omega)), 0\leq t<+\infty\}$ があったとしよう。（この存在は仮定するが，現在領域が円であるので その構成は容易である。-----解析的には既に才2章にその構成を示した)。このときは才2章の結果から解るように荒く言って境界条件は $\frac{\partial}{\partial n}u(1,\theta)=0$, $(1,\theta)\in\partial D$, となる。この条件はすべての $f\in \mathbb{C}(\overline{D})$ に対し，$G_\alpha f(r,\theta)$ がみたしている。直観的にその意味を考えれば それは境界上の一点での過程の回転方向の行動とその点から法線方向のすぐ内部の点での過程の回転方向の行動が変らない

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

ことを示している。ところがそのようなものの他に境界点ではすぐ内部の点での行動と違って，接線方向に働く別の力が作用し，その力から来る行動とすぐ内部での行動とが組合さって，一つの境界での回転方向の行動になって現われるような Markov 過程の存在が考えられる．

このことは H.P. Mckean 氏が数年前在日中 Brown 運動を確率論的に考察することにより示した。又この章の§1の説明の部分でのべた Wentzell の境界条件で $\hat{\partial}$ の部分がそれに対応する。

ところが path の行動として，そこに到達した1回1回すぐ内部の点と行動が違うのでは直観的に言って強 Markov 性がこわれる。(そのような例は附録にのべる)．そこで1回1回ではそのような変化は現われないが，その点の近く極度に多数回 path が訪れることにより，その微小な変化が顕在化するという事情がおきていると考えるべきである。　　　　このことを正確に定式化するには　1次元拡散過程の local time の使用と類似のことが必要だということは容易に推察できる。(伊藤・渡辺・福島 [15] 参照)。

この事情をもう少し数学化すると次のようになる。上にのべた反射壁の Brown 運動と独立な円周上の Lévy 過程 $\{\ell(t,\tilde{w}), 0\le t<+\infty\}$ を一つ考える。そこで

$$(5.1)\qquad \hat{\theta}(t,w^*) = \theta(t,w) + \ell(\underline{t}(t,w),\tilde{w})$$

とおき，$\hat{\theta}(t,w^*)$ を円周上にまきつけたものをあらためて $\tilde{\theta}(t,w^*)$ とおく。(ここで $\underline{t}(t,w)$ は $\{r(t,w), 0\le t<+\infty\}$ の点 $\{1\}$ における local time)．そのとき，

$\{x^*(t,w^*) = (r(t,w), \tilde{\theta}(t,w^*)), 0\le t<+\infty\}$ が又1つの拡散過程の version になっていることは 次のことに注意すれば解る。

$$\hat{\theta}(t+s,w^*) - \hat{\theta}(s,w^*) = (\theta(t,w_s^*) - \theta(0,w_s^+)) + (\ell(\underline{t}(t,w_s^+),\tilde{w}^+_{\underline{t}(s,w)})$$

$$-\ell(0,\tilde{w}^+_{\underline{t}(s,w)})),\qquad 0\le t<+\infty,$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

の $\{x(\tau,w),\ \ell(\underline{t}(\tau,w),\tilde{w}),\ 0\leq\tau\leq s\}$ で生成される *Borel field* で条件付けた分布は $r(s,w)$ のみに関係して定まり、しかも

$E_x\times\tilde{E}\{f(r(t,w),\hat{\theta}(t,w^*))\}$ は $\mathbb{C}([0,1]\times(-2\pi,+2\pi))$ を $\mathbb{C}(\bar{D})$ に写す。後 $x^*(t,w^*)$ が t の函数として高々第一種不連続点しか持ち得ないことに注意すれば 強マルコフ性までが示される。

$\{r(t,w),\ 0\leq t<+\infty\}$ の点 $\{r\}$ での *local time* を $\underline{t}(t,r,w)$ とする。従って $\underline{t}(t,w)=\underline{t}(t,1,w)$ である。$\{x^*(t,w),\ 0\leq t<+\infty\}$ を半径 r の所だけをみるのに伊藤・渡辺・福島 [15] にのべられた *local time* による *random time-change* を拡張して次のようなものが考えられる。

$$(5.2)\qquad \hat{\theta}(\underline{t}^{-1}(t,r,w),w^*)=\theta(\underline{t}^{-1}(t,r,w),w)+\ell(\underline{t}(\underline{t}^{-1}(t,r,w),1,w),\tilde{w})$$

として，これを半径 r の円周上にまきつけたものが，半径 r 上の点だけみたものと考えられる。

(5.2) から解ることは，*path* が半径 $r\ (\neq 1)$ の所に来てもそれから *path* が半径 1 の所に行くまでは $\underline{t}(\underline{t}^{-1}(t,r,w),\tilde{w})$ は 0 である。従って (5.2) の第2項は半径 1 の所に *path* が到達するまでは影響しない。半径 1 の所では任意の t に対し $\underline{t}(\underline{t}^{-1}(t,1,w),W)$ は直ちに増加を始める。従って半径 1 の所とそうでない所は *path* の回転方向の行動に違いがある。これが前に直観的言葉でのべたことを数学的にのべた一例である。同じようなことを *rotation* に関し不変でないものまで考えようとすれば K.Ito [55], [56] や §1 で概観したように，*rotation invariant* のもの即ち *generator* の係数が定数のものを確率積分方程式みたいにつなぐことが必要になる。ところが K.Ito の場合と違うところは (5.1) 式の右辺の第2項に相当するものが必要で，そのためには通常の時間のみでなく，境界でのみ増加する時間，すなわち境界での *local time* を用いる必要がある。

(b) 基礎的なものとして用いる確率過程

この §では上のような一般化した確率積分方程式の解の構成及

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

び一意性を考える。先づその準備から始める。

$\{r(t, w^{(1)}),\ 0 \leq t < +\infty,\ P^{(1)}\}$ は $[0, 1]$ 上のベッセル過程で $P^{(1)}\{r(0, w^{(1)}) = 1\} = 1$ をみたし，$\{1\}$ では反射壁の境界条件をみたしているとする。すなわち

$$\mathcal{G}u(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)u(r), \quad r \in (0, 1), \qquad u(r) \in \mathcal{D}(\mathcal{G}),$$

で

$$u^+(1) = 0$$

である。$t(t, w^{(1)})$ は上のベッセル過程の点 $\{1\}$ における *local time* である。

$\{B(t, w^{(2)}),\ 0 \leq t < +\infty,\ P^{(2)}\}$ を R^1 上の Brown 運動とする。

$\{\ell(t, w^{(3)}),\ 0 \leq t < +\infty,\ P^{(3)}\}$ は §2, [1] で考えた Lévy 過程とする。すなわち，その特性函数の対数

$\log E\{e^{iz\{\ell(t, w^{(3)}) - \ell(s, w^{(3)})\}}\} = \exp\{(t-s)\psi_0(z)\}$ である。

これに関する §2 の記号はそのまゝこゝで用いる。

上の3つの過程はお互に独立であるとする。すなわち3つの直積測度 $P = P^{(1)} \times P^{(2)} \times P^{(3)}$ を考える。

これは言うまでもなく，一つの確率空間の上に3つの独立なものを構成して使用してもよいわけであるが，あるものに条件付けて平均をとるというようなことを考えるので記号上の都合でこのようにする。従って今后混乱をおこす心配のない限り しばしば $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, ---- 等を省略しておく。

以下 $a(r, \theta)$, $b(r, \theta)$, $\sigma(\theta)$, $m(\theta)$, $\beta(u, \theta)$ は θ に関しては今后断わらない限り 周期 2π の R^2 の函数の polar 座標によるものと考える。

$w = (w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)})$ として，

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$
\begin{aligned}
\eta(t,\omega)=\theta&+\int_0^{t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})} a(r(s,w^{(1)}),\eta(s,\omega))ds+\int_0^{t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})} b(r(s,w^{(1)}),\eta(s,\omega))dB(s,w^{(2)}) \\
&+\int_0^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})} m(\eta(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))ds+\int_0^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})} \sigma(\eta(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))dg(s,w^{(3)}) \\
(5.3)\qquad &+\int_0^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}\int_{1\leq|u|<+\infty} \beta(u,\eta(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))p(dsdu,w^{(3)}) \\
&+\int_0^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}\int_{|u|<1} \beta(u,\eta(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))q(dsdu,w^{(3)}) \quad ,
\end{aligned}
$$

を考える。こゝで r_0 は $0<r_0<1$ に任意に1つ固定し，

$$\sigma_{r_0}\equiv\sigma_{r_0}(w^{(1)})=\inf\{t;\ r(t,w^{(1)})=r_0\},\ \underline{t}^{-1}(t,w^{(1)})=\sup\{s;\ \underline{t}(s,w^{(1)})<t\}$$

とする。この (5.3) は (5.1) で定義されるものの拡張を考えるための方程式である。定義より明らかに (5.3) の右辺の第3項以下は積分区間が $r(t,w^{(1)})$ が境界にいる時以外は増加しない。

ここで時間を $\sigma_{r_0}(w^{(1)})$ でとめてあるのは次のような理由による。

円内の Brown 運動の場合に極座標で書くと，

$$\mathcal{G}u(r,\theta)=\frac{1}{2}\Delta u(r,\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\qquad (r,\theta)\neq 0$$

となり，$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ の係数は $\frac{1}{r^2}$ となる。それは $r=0$ の近傍で有界でなく，連続でもない。そこで $r=0$ の値は $\mathcal{G}u(r,\theta)$ の連続性を用いて定める。このとき $\mathcal{G}u(r,\theta)$ で $r\to 0$ のとき，θ に無関係な値になるという形で定められたことになる。それは一種の境界条件と考えられる。すなわち，(r,θ) で $r\downarrow 0$ で定まる境界ができ，それらを一点と考えて始めて強 Markov になっているような $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ の係数であると考えるわけである。このように極座標で書くと，$r=0$ の所には境界を考える困難さが Brown 運動のときすら出て来る。このような事情を (4.8) の作用素に極座標で書いた形で考えるのは難しい問題が生ずるので，当面の目標の解決のためにそれをさけて，path が $r=r_0$ の所に来たら stop するもののみを考え

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$\{(r,\theta),\ r_0<r<1,\ -\pi<\theta\leqq\pi\}=D_{r_0}$ という領域の closure $\overline{D}_{r_0}$ で markov 過程を作ることを考えるので，時間を $\sigma_{r_0}(w^{(\cdot)})$ で stop してある。

(d) 係数の條件

次に (5.3) に用いた積分の定義可能性と解の一意性の保証のため，K. Ito [56] と同じ型の仮定を (5.3) の係数に導入する。

Assumption 5.1

〔1〕 $a(r,\theta)$, $b(r,\theta)$ は $\mathbb{C}(\overline{D})$ で定義された実函数で次の3つの仮定をみたす。

(A,1) $a(r,\theta),\ b(r,\theta)\in\mathbb{C}(\overline{D}-0)$.

(A,2) 任意の (r,θ), (r',θ') に対して

$$|a(r,\theta)-a(r',\theta')|\leqq A\{|r-r'|+|\theta-\theta'|\},$$

$$|b(r,\theta)-b(r',\theta')|\leqq B\{|r-r'|+|\theta-\theta'|\},$$

こゝで $A\equiv A_{r_0}$, $B\equiv B_{r_0}$ は r_0 には関係するが，r と θ には無関係。

(A,3) 任意の (r,θ) に対して

$$b(r,\theta)>0。$$

〔2〕 $m(1,\theta)(\equiv m(\theta))$, $\sigma(1,\theta)(\equiv\sigma(\theta))$ は ∂D 上に定義された実函数で次の3つの仮定をみたす。

(B,1) $m(\theta),\ \sigma(\theta)\in\mathbb{C}(\partial D)$,

(B,2) 任意の $(1,\theta)$, $(1,\theta')$ に対し，

$$|m(\theta)-m(\theta')|\leqq M|\theta-\theta'|,\quad |\sigma(\theta)-\sigma(\theta')|\leqq S|\theta-\theta'|,$$

こゝで M と S は θ,θ' に無関係。

(B,3) 任意の $(1,\theta)\in\partial D$ に対し

$$\sigma(\theta)\geqq 0$$

である。

〔3〕 $\beta(u,\theta)$ は次の3つの条件をみたす。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

(C.1) 任意の $u\in(-\infty,+\infty)$ に対し

$$\beta(u,\pi)=\beta(u,-\pi)$$

であり，任意の $\theta\in(-\pi,\pi]$ に対し

$$\beta(-\infty,\theta)=-\pi,\qquad \beta(+\infty,\theta)=\pi,$$

(C.2) 任意の $\theta,\theta'\in(-\pi,\pi]$ に対し

$$\|\beta(u,\theta)-\beta(u,\theta')\|_{(c)}\equiv\left\{\int_{|u|<+\infty}(\beta(u,\theta)-\beta(u,\theta'))^2du/u^2\right\}^{1/2}\leqq F|\theta-\theta'|,$$

こゝで F は θ と θ' に無関係。

(C.3) 任意の $\theta\in(-\pi,\pi]$ に対し，$\beta(u,\theta)$ は u の non-decreasing な右連続函数で

$$\int_{|u|<+\infty}\beta(u,\theta)^2du/u^2<+\infty$$

である。

このAssumption 5.1 で (A.3) は (4.8)' の $b(r,\theta)$ に相当するようになることを考えていて，しかも内部では一階に退化しないような拡散を考えているのであるから当然な仮定である。(B.3) は境界条件の中で，先にのべたねじる力に関係したもので，(5.1) で言えば $l(t,w)$ の連続部分の係数に当るようなものだからこのような形になることは容易に考えられる。(A.3) とちがって等号も許されるのはねじる力のない時，すなわち反射壁の時を考えているからである。(C.3) はやはりねじる力に関係するもので，(5.1) で言えば $l(t,w)$ の jump の状態に関するもので，この条件は無限分解可能な分布に課される有名な条件のとびが bounded なときの特殊な形である。(A.1)，(A.2)，(B.1)，(B.2)，(C.2) 及び (C.1) の前半はいづれも連続性に関する正則性の条件で，確率積分方程式による方法に深く関連した方法上の制限であり，逐次近似の評価でしばしば用いる。(C.1) の后半は境界上のとびが $(-\pi,\pi)$ 内にあるための条件であることを後に示す。

(5.3) の第2項，第3〜6項の積分は §2 で考えた確率積分の意

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

味とする。Assumption 5.1 の下でそれが積分可能なことは後でのべる。

(e) 逐次近似による解の構成

(5.3) の解の存在及び一意性を示すためにわれわれは逐次近似の方法を用いたい。後で markov 性の証明等のときも用いられるように，(5.3) よりやゝ一般の形のものについてそのことを示しておく。

前にのべた3つの markov 過程とすべてお互に独立な確率変数 $\{c(w^{(4)}), P^{(4)}\}$ を考える。そして $c_N(w^{(4)}) = \chi_{[-N,N]}(c(w^{(4)}))\, c(w^{(4)})$ とする。そして $w = (w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}, w^{(4)})$ とする。

$0 \leq \tau < +\infty$ とする。そのとき，

$$\eta_0(t,w) = c_N(w^{(4)}),$$

$$\begin{aligned}\eta_n(t,w) = {} & c_N(w^{(4)}) + \int_{\tau\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}^{t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})} a(r(s,w^{(1)}), \eta_{n-1}(s,w))\,ds + \int_{\tau\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}^{t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})} b(r(s,w^{(1)}), \eta_{n-1}(s,w))\,dB(s,w^{(2)}) \\ & + \int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})} m(\eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),w)) + \int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})} \sigma(\eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),w))\,dg(s,w^{(3)}) \\ & + \int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})} \int_{1\leq|u|<+\infty} \beta(u, \eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),w))\,P(dsdu, w^{(3)}) \\ & + \int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})} \int_{|u|<1} \beta(u, \eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),w))\,q(dsdu, w^{(3)}),\end{aligned} \tag{5.4}$$

とする。いま

$$\Omega_{r_0}^{(1)} \equiv \{w^{(1)};\ \sigma_{r_0}(w^{(1)}) < +\infty,\ \underline{t}(\sigma_{r_0}(w^{(1)}), w^{(1)}) < +\infty\}$$

とおけば $P(\Omega_{r_0}^{(1)}) = 1$ である（伊藤・渡辺・福島 [15] 参照）。そこで $w^{(1)} \in \Omega_{r_0}^{(1)}$ を1つ固定する。そういうとき $n=1$ ならば (5.4) の確率積分が可能なことは §2 の (S.1)〜(S.3)，(F.1)〜(F.3)，(F.2′) なる条件がそれぞれに応じてたゞされることから言える。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

次に $P^*=P^{(2)}\times P^{(3)}\times P^{(4)}$ に関する平均を E^* で表わす。逐次近似に関する基本的な不等式を示すため，先づ

$$E^*\{(\eta_1(t,\omega))^2\}$$

を計算する。そのために (5.4) の式の第6項と第7項をこみにして次のように書き換えておく。

$$\text{第6項}+\text{第7項}=\int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0})}\int_{1\leq|u|<+\infty}\beta(u,\eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s)))\frac{du\,ds}{u^2}$$

$$(5.5)\qquad +\int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0})}\int_{|u|<+\infty}\beta(u,\eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s)))\tilde{q}(ds\,du).$$

このことは $\beta(u,\theta)$ が有界なことより可能である。こう書き換えた (5.4) を改めて (5.4′) とする。そうすると $E^*\{(\eta_1(t,\omega))^2\}$ は (5.4′) の右辺の各項の二乗の E^* による平均の和の7倍より小さいので，その評価のためには各項の2乗の（E^*による）平均をしらべるとよい。それを逐次 $I_{1,1}, I_{1,2},\cdots, I_{1,7}$ とする。

今 $\overline{A}_{r_0}=\max_{(r,\theta)\in\overline{D}_{r_0}}|a(r,\theta)|$, $\overline{B}_{r_0}=\max_{(r,\theta)\in\overline{D}_{r_0}}(b(r,\theta))$, $\overline{M}=\max_{(r,\theta)\in\partial D}|m(\theta)|$, $\overline{S}=\max_{(r,\theta)\in\partial D}\sigma(\theta)$,

$\overline{F}=\max_{(1,\theta)\in\partial D}\|\beta(u,\theta)\|_{(c)}$ とおけば §2にのべた確率積分の性質を用いると次の評価式を得る。

$$I_{1,1}\leq N^2,$$

$$I_{1,2}\leqq(\overline{A}_{r_0}\sigma_{r_0})^2,$$

$$I_{1,3}\leqq B_{r_0}^2\,\sigma_{r_0},\qquad (\S2\text{の}(G.6)\text{による})$$

$$I_{1,4}\leqq(\overline{M}\,\underline{t}(\sigma_{r_0}))^2,$$

$$I_{1,5}\leqq\overline{S}^2\underline{t}(\sigma_{r_0}),\qquad (\S2\text{の}(G.6)\text{による})$$

$$I_{1,6}\leqq 2\,\underline{t}(\sigma_{r_0}),\int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0})}E^*\{\|\beta(u,C_N)\|_{(c)}^2\}\leqq 2\{\underline{t}(\sigma_{r_0})\overline{F}\}^2,$$

$$I_{1,7}\leqq\int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0})}E^*\{\|\beta(u,C_N)\|_{(c)}^2\}\,ds\leqq\overline{F}^2\underline{t}(\sigma_{r_0}),\quad\left(\begin{matrix}\S2\text{の}(P.10)\\\text{による}\end{matrix}\right)$$

ここで $\sigma_{r_0}, \underline{t}(\sigma_{r_0})$ はそれぞれ $W^{(1)}$ に関係しているがそれは固定しているので一応定数と考え取扱える。このようなことを今后しばしば，断りなしで用いる。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

故に $E^*\{(\eta_1(t,\omega))^2\}$, $0\leq t<+\infty$, は有界 (G_1) である。従って

$$E^*\{(\eta_1(t,\omega)-\eta_0(t,\omega))^2\},\quad 0\leq t<+\infty,$$

も又有界となる。而も殆んどすべての ω に対し $\eta_1(t,\omega)$ は第1種不連続で右連続にとることができることは §2の確率積分の定義による。従って (t,ω)に関し measurable。しかも固定した $\omega^{(1)}\in\Omega^{(1)}_{\gamma_0}$ に対して、$\{\eta_1(t,\omega),\ \ell(\underline{t}(s-\tau,W^{(1)+}_\tau), W^{(3)}_{\underline{t}(t,W^{(1)})})-\ell(0,W^{(3)+}_{\underline{t}(\tau,W^{(1)})})$,

$B(s-\tau,W^{(2)+}_\tau)-B(0,W^{(2)+}_\tau)$, $\tau\leq s\leq t\}$ は

$\{\ell(\underline{t}(s-t,W^{(1)+}_t), W^{(3)+}_{\underline{t}(t,W^{(1)})})-\ell(0,W^{(3)+}_{\underline{t}(t,W^{(1)})})$,

$B(s-t,W^{(2)+}_t)-B(0,W^{(2)+}_t)$, $t\leq s\leq \sigma_{\gamma_0}(W^{(1)})\}$ と任意の t, $\tau\leq t\leq\sigma_{\gamma_0}(W^{(1)})$, に対し独立である。このことは $n=2$ のときの kernel に関し、§2の $(S,3)$, $(F,3)$ の条件を保証し、$n=2$ のときの $(5,4)$ 及び $(5,4')$ の各項の積分可能性を保証する。以下同じ論理で任意の n に対する $(5,4)$ 及び $(5,4')$ の各項の積分可能性が示される。従って后は通常の逐次近似同様、$\eta_{n+1}(t,\omega)-\eta_n(t,\omega)$ の評価を行えばよい。

今 $0\leq t\leq\sigma_{\gamma_0}$ とする。

$$I_{2,1}\equiv E^*\{[\int_\tau^t\{a(\gamma(s),\eta_n(s))-a(\gamma(s),\eta_{n-1}(s))\}ds]\}$$

$$\leqq A^2_{\gamma_0}\sigma_{\gamma_0}\int_\tau^t E^*\{|\eta_n(s)-\eta_{n-1}(s)|^2\}ds,$$ (Assumption 5.1, (A,2)による),

$$I_{2,2}\equiv E^*\{[\int_\tau^t\{b(\gamma(s),\eta_n(s))-b(\gamma(s),\eta_{n-1}(s))\}dB(s)]^2\}$$

$$\leqq B^2_{\gamma_0}\int_\tau^t E^*\{|\eta_n(s)-\eta_{n-1}(s)|^2\}ds,$$ (Assumption 5.1, (A,2) 及び §2の(G.6) による。)

(5.6) $$I_{2,3}\equiv E^*\{[\int_{\underline{t}(\tau)}^{\underline{t}(t)}\{m(\eta_n(\underline{t}^{-1}(s)))-m(\eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s)))\}ds]^2\}$$

$$\leqq M^2\underline{t}(\sigma_{\gamma_0})E^*\{\int_{\underline{t}(\tau)}^{\underline{t}(t)}|\eta_n(\underline{t}^{-1}(s))-\eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s))|^2ds\}$$ (Assumption 5.1, (B,2) による)

$$\leqq M^2\underline{t}(\sigma_{\gamma_0})\int_\tau^t E^*\{|\eta_n(s)-\eta_{n-1}(s)|^2\}\underline{t}(ds),$$

$$I_{2,4}\equiv E^*\{[\int_{\underline{t}(\tau)}^{\underline{t}(t)}\{\sigma(\eta_n(\underline{t}^{-1}(s)))-\sigma(\eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s)))\}dg(s)]^2\}$$

$$\leqq S^2\underline{t}(\sigma_{\gamma_0})\int_\tau^t E^*\{|\eta_n(s)-\eta_{n-1}(s)|^2\}\underline{t}(ds)$$ (Assumption (5.1), (B,2) 及び §2の (G.6) による)

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$I_{2,5}\equiv E^*\{[\int_{\underline{t}(\tau)}^{\underline{t}(t)}\int_{1\le|u|<+\infty}\{\beta(u,\eta_n(\underline{t}^{-1}(s)))-\beta(u,\eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s)))\}du\,ds/u^2]^2\}$$

(5,6) $$\leqq 2F^2\underline{t}(\sigma_{\gamma_0})\int_\tau^t E^*\{\eta_n(s)-\eta_{n-1}(s)|^2\}\underline{t}(ds),$$ (Assumption 5,1の (C,2)による.)

$$I_{2,6}\equiv E^*\{[\int_{\underline{t}(\tau)}^{\underline{t}(t)}\int_{|u|<+\infty}\{\beta(u,\eta_n(\underline{t}^{-1}(s)))-\beta(u,\eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s)))\}g(ds\,du)]^2\}$$

$$\leqq F^2\int_\tau^t E^*\{|\eta_n(s)-\eta_{n-1}(s)|^2\}\underline{t}(ds),$$ (Assumption 5,1,(C,2) 及び §2の (P.10) による.)

以上を併せると，$K=6[A_{\gamma_0}^2+\sigma_{\gamma_0}+B_{\gamma_0}^2+M^2\underline{t}(\sigma_{\gamma_0})+S^2+F^2(2\underline{t}(\sigma_{\gamma_0})+1)]$ とおくとき，

(5,7) $$E^*\{|\eta_{n+1}(t)-\eta_n(t)|^2\}\leqq K\int_{\tau\wedge\sigma_{\gamma_0}}^{t\wedge\sigma_{\gamma_0}}E^*\{|\eta_n(s)-\eta_{n-1}(s)|^2\}\hat{\underline{t}}(ds),$$

を得る。こゝで $\hat{\underline{t}}(t)=\underline{t}(t)+t$。この計算で平面 E^* に関しては $\sigma_{\gamma_0}\equiv\sigma_{\gamma_0}(w^{(1)})$，$\underline{t}(t)=\underline{t}(t,w^{(1)})$ は定数の役割を果していることを繰返し使っていることは前にも注意した通りである。

ところが前に示したように $E^*\{|\eta_1(t)-\eta_0(t)|^2\}$，$0\leqq t<+\infty$，は有界（$\leqq G$）であるので逐次的に（5,6），（5,7）を用いると次の式を得る。$0\leqq t<\sigma_{\gamma_0}$ に対して

$$E^*\{|\eta_{n+1}(t)-\eta_n(t)|^2\}\leqq K^{n-1}G(\hat{\underline{t}}(t))^n/n!\,,$$

(5,8)
$$I_{2,1}\leqq K^{n-1}GA_{\gamma_0}^2\sigma_{\gamma_0}(\hat{\underline{t}}(t))^n/n!\,,$$
$$I_{2,2}\leqq K^{n-1}GB_{\gamma_0}^2(\hat{\underline{t}}(t))^n/n!\,,$$
$$I_{2,3}\leqq K^{n-1}GM^2\underline{t}(\sigma_{\gamma_0})(\hat{\underline{t}}(t))^n/n!\,,$$
$$I_{2,4}\leqq K^{n-1}GS^2(\hat{\underline{t}}(t))^n/n!\,,$$
$$I_{2,5}\leqq 2K^{n-1}GF\,\underline{t}(\sigma_{\gamma_0})(\hat{\underline{t}}(t))^n/n!$$
$$I_{2,6}\leqq K^{n-1}GF(\hat{\underline{t}}(t)^n/n!$$

（5,8）の評価式とチェブシエーフの不等式を用いると，固定された $w^{(1)}\in\Omega_{\gamma_0}^{(1)}$ に対し，$\lambda_n=K^{n-1}GA_{\gamma_0}^2(\hat{\underline{t}}(\sigma_{\gamma_0}))^{n+1}/n!$ とおけば

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$P^*\{\sup_{\tau\le t<+\infty}|\int_{\tau\wedge\sigma_{r_0}}^{t\wedge\sigma_{r_0}}(a(r(s),\eta_n(s))-a(r(s),\eta_{n-1}(s)))ds|\ge\lambda_n^{1/4}\}$$

$$\le P^*\{\int_{\tau\wedge\sigma_{r_0}}^{t\wedge\sigma_{r_0}}|a(r(s),\eta_n(s))-a(r(s),\eta_{n-1}(s))|ds\ge\lambda_n^{1/4}\}\le\lambda_n^{1/2}$$

となり，$\sum\lambda_n^{1/4}$，$\sum\lambda_n^{1/2}$ が共に収束することに注意すれば Borel-Cantelli の lemma により

$$(5,9)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\tau\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}^{t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}[a(r(s,w^{(1)}),\eta_n(s,\omega))-a(r(s,w^{(1)}),\eta_{n-1}(s,\omega))]ds,$$

は t に関し一様に P^*-measure 1 をもって収束である。又 §2 の性質 (G,3) と (5,8) を用いると，

$$P^*\{\sup_{\tau\le t<+\infty}|\int_{\tau\wedge\sigma_{r_0}}^{t\wedge\sigma_{r_0}}[b(r(s),\eta_n(s))-b(r(s),\eta_{n-1}(s))]dB(s)|\ge\lambda_n^{1/4}\}$$

$$\le(\lambda_n^{1/4})^{-2}E^*\{(\int_{\tau\wedge\sigma_{r_0}}^{t\wedge\sigma_{r_0}}[b(r(s),\eta_n(s))-b(r(s),\eta_{n-1}(s))]dB(s))^2\}\le\lambda_n^{1/2}。$$

従って，任意に固定した $w^{(1)}\in\Omega_{r_0}^{(1)}$ に対して，

$$(5,10)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\tau\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}^{t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}[b(r(s,w^{(1)}),\eta_n(s,\omega))-b(r(s,w^{(1)}),\eta_{n-1}(s,\omega))]dB(s,w^{(2)})$$

は t に関し一様に P^*-measure 1 をもって収束である。さらに §2 の (P,11) に注意すれば (5,9) か (5,10) のどちらかの考えを用いて，任意に固定した $w^{(1)}\in\Omega_{r_0}^{(1)}$ に対し，次の各項が t に関し一様に P^*-measure 1をもって収束であることが言える；

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}[m(\eta_n(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega)-m(\eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))]ds,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}[\sigma(\eta_n(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))-\sigma(\eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))]dg(s,w^{(1)}),$$

(5,11)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}\int_{1\le|u|<+\infty}[\beta(u,\eta_n(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))-\beta(u,\eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))]ds\,du/u^2,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}\int_{|u|<+\infty}[\beta(u,\eta_n(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))-\beta(u,\eta_{n-1}(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))]q(ds\,du,w^{(3)})。$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

(5,9)～(5,11)により，任意に固定した $\omega^{(1)}\in\Omega^{(1)}_{r_0}$ に対し $\eta_n(t,\omega)$，$\tau\leq t<+\infty$，はtに関し一様に P^*-measure 1で収束する．従って $P(\Omega^{(1)}_{r_0})=1$ に注意すれば P-measure 1でそのことが言えたことになる．その極限を $\eta(t,\omega)$ で与えると，$\eta_n(t,\omega)$，$\tau\leq t<+\infty$，がSスの確率積分の定義から，高々第一種不連続点しか持たず，しかも右連続であるので，(t,ω) に関しmeasurableである．逐次的に証明して行くと，$\eta(t,\omega)$，$\tau\leq t<+\infty$，についても同様のことが言えている。以上を綜合すると，

$$
\begin{aligned}
\eta(t,\omega)=C_N&+\int_{\tau\wedge\sigma_{r_0}}^{t\wedge\sigma_{r_0}}a(r(s),\eta(s,\omega))\,ds+\int_{\tau\wedge\sigma_{r_0}}^{t\wedge\sigma_{r_0}}b(r(s),\eta(s,\omega))\,dB(s,\omega)\\
&+\int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0})}m(\eta(\underline{t}^{-1}(s)))\,ds+\int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0})}\sigma(\eta(\underline{t}^{-1}(s),\omega))\,dg(s,\omega)\\
&+\int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0})}\int_{1\leq|u|<+\infty}\beta(u,\eta(\underline{t}^{-1}(s),\omega))\,P(dsdu,\omega)\\
&+\int_{\underline{t}(\tau\wedge\sigma_{r_0})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0})}\int\beta(u,\eta(\underline{t}^{-1}(s),\omega))\,q(dsdu,\omega)\ ,
\end{aligned}
\tag{5,12}
$$

なる方程式の解 $\eta(t,\omega)$，$\tau\leq t<+\infty$，が1つ構成され，しかもそれは高々第一種不連続点しか持たない右連続なtの函数で，(t,ω)に関しmeasurableである。

(f) 解の一意性の証明。

つぎに，(5,12)の解が一意的であることを示す。

先ず，$E^*\{(\eta^{(1)}(t,\omega))^2\}$，$E^*\{(\eta^{(2)}(t,\omega))^2\}$，$\tau\leq t<+\infty$，が共に有界な($\leq G_1$)なような(5,12)の解が2つあったとする。そのときは上の議論と同じようにして，

$$E^*\{(\eta^{(1)}(t,\omega)-\eta^{(2)}(t,\omega))^2\}\leq K^{n-1}(4G_1)^n(\underline{t}(t))^n/n!\to 0,\quad \tau\leq t<+\infty,$$

となり，確率1で任意の固定したtについて $\eta^{(1)}(t,\omega)=\eta^{(2)}(t,\omega)$ なることが言え，しかも共に高々第一種不連続な点しか持たないので，$\eta^{(1)}(t,\omega)=\eta^{(2)}(t,\omega)$，$\tau\leq t<+\infty$，が言える．ところで上の逐次近似で作られたのは確かに $E^*\{(\eta(t,\omega))^2\}$，$\tau\leq t<+\infty$，は有界であるので，先ず $\eta_0(t,\omega)$ の取り方に無関係なことが言える。次に $\tilde{\eta}(t,\omega)$ を(5,12)の任意の

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

解とすれば，$\eta_0(t,\omega)=\chi_{[-M,M]}(\tilde{\eta}(t,\omega))\tilde{\eta}(t,\omega)$ から出発して，全く同じ方法で，$\eta_n(t,\omega)$, $\tau\leq t<+\infty$, $n=1,2,\cdots\cdots$, が定義できる。そうして解 $\eta(t,\omega)$ を得る．今

$$\Omega_M=\{\omega;\ |\tilde{\eta}(t,\omega)|\leqq M,\ \tau\leq t<+\infty\}$$

とすれば $M\uparrow+\infty$ のとき，Ω_M は単調増大であり，しかも $\tilde{\eta}(t,\omega)$ は高々第1種不連続点しかもたないので，$P^*(\Omega_M)\uparrow 1$ である．殆んどすべての $\omega\in\Omega_M$ に対しては

$$\tilde{\eta}(t,\omega)=\eta_0(t,\omega)=\eta_1(t,\omega)=\cdots\cdots\cdots,$$

かつ

$$(5,13)\qquad \eta(t,\omega)=\lim_{n\uparrow+\infty}\eta_n(t,\omega)=\tilde{\eta}(t,\omega).$$

故に $M\uparrow+\infty$ として確率 1 で (5,13) が成立つ。

従って (5,12) の解の存在と1意性が証明されたことになる．そこでそれを $\eta(t,\omega,N)$ とおく。

今 (5,12) で $C_N(w^{(4)})$ を $C(w^{(4)})$ でおきかえた式を改めて (5,12') とする．次にその解を作ることを考える．

そこで

$$\Omega'_M=\{\omega;\ |C(w^{(4)})|\leq M\}$$

とおくと，Ω'_M は M と共に単調増大で $P^*(\Omega'_M)\uparrow 1$ である。

$\eta_0(t,\omega)=\eta(t,\omega,M)$ から出発して，(5,12)のときの方法により $\eta_n(t,\omega)$ を定義する．極限として $\eta(t,\omega,N)$ を得る。$M<N$ であれば，$\omega\in\Omega'_M$ に対し，$\eta(t,\omega,M)=\eta_0(t,\omega)=\cdots\cdots=\eta_n(t,\omega)=\eta(t,\omega;N)$。従って $\eta(t,\omega,N)$ は充分大きな N に対し，確率 1 で N に無関係である。従って $\lim_{N\to+\infty}\eta(t,\omega;N)$ は存在する．しかもその極限は (5,12') をみたしている。

次に (5,12') の任意の解を $\tilde{\eta}(t,\omega)$ とする。今

$$\Omega''_M=\{\omega;\ |\tilde{\eta}(t,\omega)|\leq M,\ \tau\leq t<+\infty\}\cap\Omega'_M$$

とする。そうすると $\omega\in\Omega''_N$ に対し，$\tilde{\eta}(t,\omega)$ は (5,12) をみたす.

$$\eta_0(t,\omega)=\chi_{[-N,N]}(\tilde{\eta}(t,\omega))\tilde{\eta}(t,\omega)$$

より出発して，$\eta_n(t,\omega)$ を (5,4) で定義すれば，$\omega\in\Omega''_N$ に対し，

$$\tilde{\eta}(t,\omega)=\eta_0(t,\omega)=\cdots\cdots\ \to\eta(t,\omega;N)。$$

$\tilde{\eta}(t,\omega)$ が高々可算個の不連続点しか持たないので，$P^*(\Omega''_N)\uparrow 1$ である．従って上に得られたものは $\tilde{\eta}(t,\omega)$ と一致する。

(g) *Markov* 性を保証する等式

さらに (5,12) の解を $\eta(t,\omega)$ とすれば次式が成立つ．

$\tau \leqq t' \leqq t < +\infty$ に対し，

$$
\begin{aligned}
\eta(t,\omega) &= \eta(t',\omega) + \int_{t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}^{t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})} a(r(s,w^{(1)}), \eta(s,\omega))\,ds + \int_{t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}^{t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})} b(r(s,w^{(1)}), \eta(s,\omega))\,dB(s,w^{(2)}) \\
&+ \int_{\underline{t}(t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})} m(\eta(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))\,ds + \int_{\underline{t}(t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})} \sigma(\eta(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))\,dg(s,w^{(3)}) \\
&+ \int_{\underline{t}(t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})} \int_{1<|u|<+\infty} \beta(u,\eta(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),\omega))\,P(dsdu,w^{(3)}) \\
&+ \int_{\underline{t}(t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}^{\underline{t}(t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})} \int_{|u|\leqq 1} \beta(u,\eta(\underline{t}^{-1}(s,w^{(1)}),w))\,q(dsdu,w^{(3)}).
\end{aligned}
\tag{5,14}
$$

これは又 (5,12) と同型の方程式である．解の一意性を用いると，

$\eta(t,\omega)$ が $\{\eta(t',\omega),\ r(s\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}), W^{+}_{t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}),\ B(s\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}), W^{(2)+}_{t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})})$

$-B(0, W^{(2)+}_{t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}),\ \ell(\underline{t}(s\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)}), W^{(3)+}_{\underline{t}(t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})})$

$-\ell(0, W^{(3)+}_{\underline{t}(t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})}),\ t'\leqq s\leqq t\}$ の *Borel measurable function*

であることが言える。この性質は後程この解と $r(t,w)$ を組にしたものを *polar* 座標とする過程の *Markov* 性の証明に用いる。

(h) この§の結論

以上を綜合すると以下の議論で基本的役割を果たす次の定理を得る。

<u>*Theorem 5.1*</u>　*Assumption* 5.1 の下で，(5,12') は確率 0 を除いて 1 つかつただ 1 つのみの解を有し，次の性質を持つ。

$\eta(t,\omega)$, $\tau\leqq t<+\infty$, は任意の $\tau\leqq t'\leqq t<+\infty$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$\{\eta(t', \omega),\ Y(s\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}), W^{+}_{t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}),\ B(s\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}), W^{(2)+}_{t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}) - B(0, W^{(2)+}_{t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}),$

$\ell(s\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)}), W^{(3)+}_{t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}) - \ell(0, W^{(3)+}_{t'\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)})}),\ t' \leq s \leq t\}$ の Borel measurble

な函数である。

今后 (5.12′) の解で $\tau=0$, $c(\omega^{(4)})=\theta$ のもの，すなわち (5.3) の解を $\eta(t, \theta; \omega)$ と書く。

§6. markov 過程の構成

§5で目的の Markov 過程の構成に関する前道とそれに必要な確率積分方程式の解の構成を示した。こゝではもっと具体的に Markov 過程を構成すること，及びその強 markov 性を示すのが目的である。

こゝでは内部から出発する path は境界に到達するまでと，それ以后は別々の確率空間の上に構成しつなぎ合わせる方法によっている。これは強 markov 性を考えれば妥当なことであることは容易に解るが，それを同時に実行できれば方法として簡単で望ましいわけだが，こゝでは強 markov 性の証明のための純技術的な観点から上のような方法をとった。恐らくうまい証明を考えればその点を簡略できるだろう。

というのは確率積分方程式を用いて構成された markov 過程の強 markov 性の証明に K. Ito [57] の方法を用いたが，それは強 markov 性よりもっと強い性質の証明になっているようである。今の方法の複雑さはその点に関連しており，強 markov 性の証明等を主目標にすれば一層簡単になるだろうということである。

$\{Y(t, W^{(1)}),\ 0 \leq t < +\infty,\ P^{(1)}\}$, $\{B(t, W^{(2)}),\ 0 \leq t < +\infty,\ P^{(2)}\}$,

$\{\ell(t, W^{(3)}),\ 0 \leq t < +\infty,\ P^{(3)}\}$ 及びそれに関係する量については §5と同じ意味に用いる。

そこで内部から出発して境界に到達するまでの path の構成のために，新たに Brown 運動を2つもって来る。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

それを $\{B^{(1)'}(t,\omega^{(1)'});\ 0\leq t<+\infty,\ P^{(1)'}\}$, $\{B^{(2)'}(t,\omega^{(2)'});\ 0\leq t<+\infty,\ P^{(2)'}\}$ とする。これら自身，又前に用意した Process ともお互に独立としておく。すなわち，$\hat{P}=P^{(1)}\times P^{(1)'}\times P^{(2)}\times P^{(2)'}\times P^{(3)}$ を考える。

$\hat{\omega}=(w^{(1)}, w^{(1)'}, w^{(2)}, w^{(2)'}, w^{(3)})$ とする。§5では，半径成分はただベッセル過程というだけで version の構成法を特に指定しなかったが，今はその path 及び path の函数等の path の出発点に関する連続性を計算し易い形で保証しておきたいために，次のような version をとる。今

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{d}{r\,dr}\ \frac{d}{\frac{1}{r}dr}\right)$$

なることに注意すれば

$$(6.1)\qquad \begin{aligned} r(t,r,w^{(1)'})&=e^{B(\xi^{-1}(t,r,w^{(1)'}))+\log r},\\ \xi(t,r,w^{(1)'})&=\int_0^t e^{2B(s,w^{(1)'})}\,ds \end{aligned}$$

がベッセル過程の1つの version を与えることは，伊藤・渡辺・福島[15]にのべられていることにより容易に示される。

又角成分は通常の確率積分

$$(6.2)\qquad \eta(t,(r,\theta),w')=\theta+\int_0^{t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)'})} a(r(s,w^{(1)'}),\eta(s,(r,\theta),w'))\,ds + \int_0^{t\wedge\sigma_{r_0}(w^{(1)'})} b(r(s,w^{(1)'}),\eta(s,(r,\theta),w'))\,dB(s,w^{(2)'})$$

を用いて定義する。ここで $w'=(w^{(1)'},w^{(2)'})$ で

$\sigma_E(w^{(1)'})=\inf\{t;\ r(t,r,w^{(1)'})\in E\}$ とする。(6.2) が一意的な解を持つことは K.Ito[56] によるか，又§5の特別の場合と考えることにより得られる。

そこで $\eta(t,(r,\theta),\hat{\omega})$ を次のように定義する。

(a) 先ず $r(t,r,w^{(1)'})$ が r_0 又は1に到達するまで，すなわち $\sigma_{\{r_0,1\}}(w^{(1)'})>t$ までは，

$$(6.3)\qquad r(t,r,\hat{\omega})=r(t,r,w')\qquad \eta(t,(r,\theta),\hat{\omega})=\eta(t,(r,\theta),w')$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

とする。

(b) 若し，$r(t,r,w^{(1)'})$ が 1 より先に r_0 に到達すれば $\eta(t,(r,\theta),\hat{\omega})$ はそれ以后は到達した時間における $\eta(t,(r,\theta),\omega')$ の値に等しいとする。すなわち

(6.4) $r(t,r,\hat{\omega})=r(\sigma_{r_0}(w^{(1)'})\,r,w')$，$\eta(t,(r,\theta),\hat{\omega})=\eta(\sigma_{r_0}(w^{(1)'}),(r,\theta),\omega)$ $\quad t\geq\sigma_{r_0}(w^{(1)'})$

(c) 若し，$r(t,r,w^{(1)'})$ が r_0 より先に 1 に到達すれば その時刻以后は $r(t,r,\hat{\omega})=r(t-\sigma_{r_0}(w^{(1)'}),r,w^{(1)})$ とおき，$\eta(t,(r,\theta),\hat{\omega})$ はその時刻以后は $\eta(t-\sigma_1(w^{(1)}),(1,\eta(\sigma_1(w^{(1)'}),(r,\theta),\omega')),\omega)$ に等しいとする。そうして次に $r(t-\sigma_1(w^{(1)'}),w^{(1)})$ が r_0 に到達すれば (b) と同じような操作で *path* を *stop* させる。

かくして得られた $(r(t,r,\hat{\omega}),\eta(t,(r,\theta),\hat{\omega}))$ を一組にして *polar* 座標を与えると考える。($\eta(t,(r,\theta),\hat{\omega})$ は $2\pi\,(mod)$ で考えるという意味)。それを

(6.5) $\quad x(t,(r,\theta),\hat{\omega})=(r(t,r,\hat{\omega}),\eta(t,(r,\theta),\hat{\omega})) \qquad 0\leq t<+\infty$

と書く。そうすると $\overline{D_{r_0}}$ 上の値をとる高々第1種不連続点を持つ右連続函数で，ある時間 t_0 で $x(t,(r,\theta),\hat{\omega})$ が D_{r_0} の内部の値をとっている $\hat{\omega}$ についてはその t_0 でそれは連続になっているような1つの *path* が得られる。そこで $\mathbb{B}$ として $\overline{D_{r_0}}$ 上 値をとる高々第1種の不連続点しか持たない右連続函数で，D_{r_0} の内部の値をとるような点では連続になるものの全体 W の作る *Borel field* とする。そうして

(6.6) $\quad P_{(r,\theta)}(B)=\hat{P}\{\hat{\omega}\,;\,x(0\,;(r,\theta),\hat{\omega})\in B\}$，$\quad B\in\mathbb{B}$，$\quad (r,\theta)\in\overline{D_{r_0}}$

により，$(W,\mathbb{B})$ の上に測度 $P_{(r,\theta)}(\cdot)$ を定義する。そうしてできる $\mathbb{M}=[W,\ x(t,w),\ \mathbb{B},\ P_{(r,\theta)},\ (r,\theta)\in\overline{D_{r_0}}]$ は次の性質を持っている。

Theorem 6.1 構成した $\mathbb{M}$ は Markov 過程で，任意の $f\in\mathbb{B}(\overline{D_{r_0}})$ に対して $\quad T_t f(r,\theta)=E_{(r,\theta)}\{f(x(t,w))\}$，$\quad (r,\theta)\in\overline{D_{r_0}}$

とすれば，$\{T_t,\ t\geq 0\}$ は 強連続な半群で $\mathbb{C}(\overline{D_{r_0}})$ を $\mathbb{C}(\overline{D_{r_0}})$ の中にうつす。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

この定理が成立つならば，良く知られているように $\mathbb{M}$ は markov であるのみでなく強 markov である。この定理証明のために，K. Ito [57] で用いられた方法を用いる。

証明 1) 先づ Markov 性の証明は polor 座標の角成分が stochastic integral equation で定義されることに注意すれば

$\eta(t,\hat{\omega})-\eta(s,\hat{\omega})$ は

(1) $s<t<\sigma_1(\widetilde{W}^{(1)})$ のとき，

$$r(t',\widetilde{W}_s^{(1)+}),\ B(t',\widetilde{W}_s^{(2)+})-B(0,\widetilde{W}_s^{(2)+}),\quad 0\leq t'\leq t-s,$$

の Borel measurable function

(2) $s\leq\sigma_1(\widetilde{W}^{(1)})<t$ のとき，

$$r(t'\wedge\sigma_1(\widetilde{W}_s^{(1)+}),\ \widetilde{W}_s^{(1)+}),\ B(t'\wedge\sigma_1(\widetilde{W}_s^{(1)+}),\widetilde{W}_s^{(2)+})-B(0,\widetilde{W}_s^{(2)+}),$$

$$r((t'-\sigma_1(\widetilde{W}_s^{(1)+}))\wedge 0;W^{(1)}),\ B((t'-\sigma_1(\widetilde{W}_s^{(1)+})\wedge 0;W^{(2)})$$
$$-B(0;W^{(2)}),$$

$$\ell(\underline{t}((t'-\sigma_1(\widetilde{W}_s^{(1)+}))\wedge 0;W^{(1)}),W^{(3)})-\ell(0;W^{(3)}),\quad 0\leq t'\leq t-s,$$

の Borel measurable function

(3) $\sigma_1(\widetilde{W}^{(1)})<s<t$ のとき，

$$r(t';W_s^{(1)+}),\ B(t';W_s^{(2)+})-B(0;W_s^{(2)+}),$$
$$\ell(\underline{t}(t',W_s^{(1)+}),W^{(3)+}_{\underline{t}(s,W^{(1)})})-\ell(0;W^{(3)+}_{\underline{t}(s,W^{(1)})}),$$

$0\leq t'\leq t-s$ の Borel measurable function

となっている。

又 stochastic integral equation の係数が 2π を周期とする周期函数になっていることに注意すれば $(r(s,\hat{w}),\eta(s,\hat{w}))$ を固定した時の $\eta(t,\hat{w})-\eta(s,\hat{w})$ の分布は $\eta(s,\hat{w})$ が $2n\pi$ だけ違っても，$\eta(t,\hat{w})$ を R' のものとしてみるとき，同じであることが解る。以上の考察より次の式が得られる。

任意の $t\geq s$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$\hat{E}_{(r,\theta)}\{f(x(t,\hat{w}));B\}=\hat{E}_{(r,\theta)}\{B;\hat{E}_{(x(s,\hat{w}))}(f(x(t-s,\hat{w})))\}$, $B\in\hat{\mathbb{B}}_s$,
こゝで $\hat{\mathbb{B}}_s$ は $\{x(t,\hat{w}), 0\leq t\leq s\}$ による Borel field とする．
故に $\mathbb{M}$ の Markov 性が示される。

2) $(r_n,\theta_n)\to(r,\theta)\in\overline{D}_{r_0}$ ならば殆んどすべての $\hat{\omega}$ に対して

(6.7) $\quad \eta(t,(r_{n_k},\theta_{n_k}),\hat{\omega})\to\eta(t,(r,\theta),\hat{\omega})$

なる subsequence $\{r_{n_k},\theta_{n_k}\}$ が存在することを示す．そうすると Lebesque の bounded convergence の定理より，$f(r,\theta)\in\mathbb{C}(\overline{D}_{r_0})$ に対し

(6.8) $\quad \hat{E}\{f(x(t,(r_{n_k},\theta_{n_k}),\hat{\omega}))\}\to\hat{E}\{f(x(t,(r,\theta),\hat{\omega}))\}=\mathcal{P}_tf(r,\theta)$。

故に $\mathcal{P}_t$ が $\mathbb{C}(\overline{D}_{r_0})$ を $\mathbb{C}(\overline{D}_{r_0})$ に写すことが示される。

3) $\{\mathcal{P}_t, t\geqq 0\}$ が強連続なることは $\{x(t,(r,\theta),\hat{\omega}), 0\leq t<+\infty\}$ が右連続なることから解る．

4) 従って問題は 2) のことを示すことであることが解った。以下そのことについてのべる．そのためには殆んどすべての $(\omega^{(1)},\omega^{(1)'})$ に対して，

(6.9) $\quad \overline{\lim_{(r_n,\theta_n)\to(r,\theta)}} E^{*\prime}\{|\eta(t,(r_n,\theta_n),\hat{\omega})-\eta(t,(r,\theta),\hat{\omega})|^2\}=0,\quad 0\leq t<+\infty,$

が言えればよい．こゝで $P^{*\prime}=P^{(2)}\times P^{(2)'}\times P^{(3)}$ とする。そうすると in probability について言えるので subsequence をぬいて殆んどすべての $\hat{\omega}$ について言える。

(6.9) の証明のために，われわれはこの § の始めに特殊な version を構成しておいたので，$\sigma_{r_0}(W^{(1)\prime},r)$, $\sigma_1(W^{(1)\prime},r)$, $\sigma_{\{r_0,1\}}(W^{(1)\prime},r)$ が殆んどすべての $W^{(1)\prime}$ について，r の連続函数であることが容易に示されることに先づ注意する．そこで (5.12) の解の構成のときに行った近似 近似の評価法を再三繰返す．

(a) $t\leqq\sigma_{\{r_0,1\}}(W^{(1)\prime},r)$ ならば §5 のときの評価法を (6.2) に適用し，Fatou's lemma を用いると，

$$\overline{\lim_{(r_n,\theta_n)\to(r,\theta)}} E^{*\prime}\{|\eta(t,(r_n,\theta_n),\omega')-\eta(t,(r,\theta),\omega')|^2\}$$

(6.10)
$$\leqq 3(B_{r_0}^2+\sigma_{\{r_0,1\}}(W^{(1)\prime},r)A_{r_0}^2)\int_0^t \overline{\lim_{(r_n,\theta_n)\to(r,\theta)}} E^{*\prime}\{|\eta(s,(r,\theta),\omega')-\eta(s,(r_n,\theta_n),\omega')|^2\}ds.$$

(b) $\sigma_E(\hat{\omega},r)=\inf\{t;r(t,r,\hat{\omega})\in E\}$ とするとき $\sigma_{r_0}(\hat{\omega},r)>t>\sigma_1(\hat{\omega},r)$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

ならば，同じ評価法を（5.12′）に適用して，やはり Fatou's lemma を用いると，

$$\overline{\lim_{(r_n,\theta_n)\to(r,\theta)}} E^{*\prime}\{|\eta(t,(r,\theta),\hat{\omega})-\eta(t,(r_n,\theta_n),\hat{\omega})|^2\}$$

$$(6.11)\qquad \leqq K'\int_0^{t-\sigma_1(w^{(1)},r)} \overline{\lim_{(r_n,\theta_n)\to(r,\theta)}} E^{*}\{|\eta(s,(1,\eta(\sigma_1(\hat{w},r),(r,\theta),\hat{\omega})),\hat{\omega})$$

$$-\eta(s,(1,\eta(\sigma_1(\hat{\omega},r_n),(r_n,\theta_n),\hat{\omega})),\hat{\omega})|^2\}\,\text{t}(ds,w^{(1)}),$$

こゝで $K'=12\{A_{r_0}^2\sigma_{r_0}(w^{(1)})+B_{r_0}^2+M^2\text{t}(\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})+S^2+(2\text{t}(\sigma_{r_0}(w^{(1)}),w^{(1)})+1)F^2\}$.

一方

$$(6.12)\qquad \begin{aligned}&\overline{\lim_{(r_n,\theta_n)\to(r,\theta)}} E^{*\prime}\{|\eta(t-\sigma_1(\omega^{(1)},r),(1,\eta(\sigma_1(\omega^{(1)},r_n),(r_n,\theta_n),\hat{\omega})),\hat{\omega})\\ &\qquad -\eta(t-\sigma_1(\omega^{(1)},r_n),(1,\eta(\sigma_1(\omega^{(1)},r_n),(r_n,\theta_n),\hat{\omega})),\hat{\omega})|^2\}=0\end{aligned}$$

である。(6.11)，(6.12)，(6.13) を用いれば殆んどすべての $(\omega^{(1)},\omega^{(1)\prime})$ に対し

$$(6.13)\qquad \overline{\lim_{(r_n,\theta_n)\to(r,\theta)}} E^{*\prime}\{|\eta(t,(r,\theta),\hat{\omega})-\eta(t,(r_n,\theta_n),\hat{\omega})|^2\}=0,$$

$$0\leqq t<\sigma_{r_0}(\hat{\omega},r)。$$

他の場合も (6.13) が成立つことは同じ考えで示される。従って一般に (6.9) が成立つことになる。　　　　（証明終り）。

これまで $\{r(t,w^{(1)}),\ 0\leqq t<+\infty\}$ として反射壁の境界条件をみたすものを考えて来たが，そのかわりに滞留を持った反射壁のものをもって来ても以上の議論もできる。すなわち，

$$\mathcal{G}u(r)=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)u(r)\,,\qquad u(r)\in\mathfrak{D}(\mathcal{G}),$$

を，

$$\lim_{r\uparrow 1}\mathcal{G}u(r)=\frac{d^-}{dr}u(1)\qquad\qquad (\tfrac{d^-}{dr}\text{ は左微分})$$

をみたすものを半径成分としてもよい。そのときは $\text{t}(t,w^{(1)})$ は local time でなく，本当に t 迄の $\{1\}$ に於ける sojourn time になる。途中の推論は簡単にこそなれ，複雑になることはない。結果も境界条件の形が違うだけで同じ型のものが常に成立つ。以下の § では これを用いて作った Markov 過程を $\mathbb{M}'$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

§7. Generator の形。

ベッセル過程 $\{r(t, r, w^{(1)}),\ 0 \le t \le \sigma_{r_0}(w^{(1)}, r),\ r \in (r_0, 1]\}$ は伊藤[13]の確率積分方程式を用いてもその一つの version が構成できる。又 $\mathbb{M}$ の path が D_{r_0} の内部で連続なことから，例えば E.B. Dynkin [48] にあるように T_t の generator は内部では local operator になっている。これらに注意すれば $\mathbb{P}_t$ の generator の D_{r_0} 内部での値を知るには，∂D_{r_0} で killing したとしてできたものについてのそれらを計算してもよい。そうすると，Brown 運動を基礎にした，2次元での確率積分方程式で定義される拡散過程の generator の計算と同じことになる。ところが，このことは K. Ito [55] で既に証明してある。この K. Ito [55] の定理をこゝにのべておくのが便利かもしれないが，記号等の準備が長いので，こゝでは単に引用にとゞめる。それは K Ito [55], §3, P.46 の Theorem 3.2 である。それを用いると，

<u>Theorem 7.1</u>　若し $a(r,\theta)$, $b(r,\theta)$ が $\mathbb{C}^1(\overline{D}_{r_0})$ に属するならば $u(r,\theta) \in \mathbb{C}^2(D_{r_0})$ に対して，

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}_t u(r,\theta) - u(r,\theta)}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + b(r,\theta)\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2a(r,\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right)u(r,\theta), \quad (r,\theta) \in D_{r_0}, \tag{7.1}$$

である。

尚 K. Ito [55] では Markov 過程の性質を示すのに，stochastic integral equation を stochastic differential equation に変換してそれで求めてあるが，現在は半群の理論に持ち込んだ方が好都合であると思われる。このような立場で K. Ito の記述を必要に応じ言い換えておく方が便利なことが多い。

以下 解析的な困難をさけるために，§8〜9では Assumption 5.1 の上に，次の Assumption 7.1 を常に仮定する。

<u>Assumption 7.1</u>　$a(r,\theta)$, $b(r,\theta) \in \mathbb{C}^3(\overline{D}_{r_0})$ である。

今次のような記号を導入する。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$(7.2)\quad \begin{aligned}&(\alpha - A)u(r,\theta) = 0 \quad , && (r,\theta)\in D_{r_0}\\ &u(r,\theta) = f(r,\theta) \quad , && (r,\theta)\in\partial D_{r_0}, \quad f\in\mathbb{C}(\partial D_{r_0}),\end{aligned}$$

なるような解の存在は第2章にのべたが，その解を次のように表わす．

$$(7.3)\qquad u(r,\theta) = H_\alpha f(r,\theta) = H_\alpha^1 f(r,\theta) + H_\alpha^2 f(r,\theta),$$

こゝで

$$(7.4)\quad \begin{aligned}&H_\alpha^1 f(r,\theta) = \int_{\partial D} H_\alpha^1((r,\theta);dr'd\theta')f(r',\theta'),\\ &H_\alpha^2 f(r,\theta) = \int_{\{r=r_0\}} H_\alpha^2((r,\theta);dr'd\theta')f(r',\theta').\end{aligned}$$

また

$$(7.5)\quad \begin{aligned}&(\alpha - A)\,u(r,\theta) = f(r,\theta), && (r,\theta)\in D_{r_0},\\ &u(r,\theta) = 0 \quad , && (r,\theta)\in\partial D_{r_0}.\end{aligned}\qquad f(r,\theta)\in\mathbb{C}'(\overline{D}_{r_0})$$

とすれば，

$$(7.6)\qquad u(r,\theta) \equiv G_\alpha^0 f(r,\theta) = \int_{\partial D} g_\alpha^0((r,\theta);(r',\theta'))f(r',\theta')m(dr'd\theta')$$

なる形の $u(r,\theta)$ が存在する。こゝで $g_\alpha^0((r,\theta),(r',\theta'))$ は D_{r_0} における $(A-\alpha)$ の *green* 函数．この G_α^0 は $\mathbb{C}(\overline{D}_{r_0})$ の上の *operator* に拡張できるのは明らかなので今後そう考える．さらに

$$(7.7)\qquad G_\alpha^{0*} f(r,\theta) = G_\alpha^0 f(r,\theta) + \frac{1}{\alpha}H_\alpha^2 f(r,\theta)$$

とする。そうすると次のことが成立つ。

<u>*Proposition 7.1*</u>　任意の $f(r,\theta)\in\mathbb{C}(\overline{D}_{r_0})$ に対して

$$G_\alpha f(r,\theta) = G_\alpha^{0*} f(r,\theta) + H_\alpha^1(G_\alpha f)(r,\theta)$$

である．こゝで G_α は $\mathbb{M}$ に対応する *green operator* である．

証明は $\|f_n - f\|\to 0$ ならば $\|G_\alpha^{0*}f_n - G_\alpha^{0*}f\|\to 0$, $\|H_\alpha^1(G_\alpha f_n) - H_\alpha^1(G_\alpha f)\|\to 0$ なることを用い $\mathbb{C}$ を一様近似できるような $\mathbb{C}$ の中で *dense* な充分なめらかな函数族に対して *Proposition* が成立てば一般の $\mathbb{C}$ の函数に成立つ。ところが *dense* な所では強 *Markov* 性と上にのべた函数方程式の結果を用いると容易に示される。従って詳細は省略

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

する。

§8. 境界上での markov 過程

われわれは既に第3章，第4章で，compact な所での morkov 過程 $\mathbb{M}$ があるとき，それの $G_\alpha f$ の境界上での値は $\mathbb{M}$ にある仕方で関連した"境界上の marcov 過程"の green operator と内部での minimal な拡散過程の green operator に関連する量で与えられるという事情を解析的な方法でみた。こゝではそのことを§6で構成した $\mathbb{M}$ 及び $\mathbb{M}'$ について確率論的な方法でしらべる。

この§では特に断らない限り $\mathbb{M}$ 及び $\mathbb{M}'$ は $r(t, 1, \hat{w})$ に対応するものすなわち ∂D 上から出発するものを考えることにする。そして最初に $\mathbb{M}$ についてみる。

$\mathbb{M}$ の境界上の行動をみるのであるから，それが境界上にいる時だけ見ることにすればよいと単純に考える。ところがそのような時間は $r(t, w^{(1)})$ が $\{1\}$ なる点にいる時間であるので，任意の $t>0$ に対し，それ迄に反射壁のベッセル過程が点 $\{1\}$ にいる時間の Lebesgue 測度は0であることに注意すれば，そのように単純に考えられない。しかしそのようなときは伊藤、渡辺・福島［15］に示してあるように local time でそれを測ればよいことが知られている。幸いにわれわれの場合は ∂D 上にいるということが、1次元拡散過程の性質に帰着できるので，そのような local time の概念も単純になり，以下の議論も容易になっている。従って以下のことは第4章にのべたのより一層詳細な形で議論できることになる。

$\mathbb{M}$があるとき，$x(t,w)=(r(t,w), \theta(t,w))$ として，$\{r(t,w), 0 \leq t < +\infty\}$ の点 $\{1\}$ における local time を $\underline{t}(t,w)$ とする。そうして

$$\{ \theta(\underline{t}^{-1}(t,w),w),\ 0 \leq t < +\infty \}$$

を考える。こゝで $\underline{t}^{-1}(t,w)$ は inverse local time である。今 $\widetilde{W}$ として ∂D 上の値をとる高々第1種の不連続点を持った右連続

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

な函数の全体とする。$\widetilde{W}$ に対する通常の方法で定義した Borel field を $\widetilde{\mathbb{B}}$ とする。

$$\widehat{P}_\theta\{\widetilde{W}\in B\} = P_{(1,\theta)}\{\theta(\underline{t}^{-1}(\cdot, W), W)\in B\}, \qquad B\in\widetilde{\mathbb{B}},$$

で $\{\widehat{P}_\theta,\ (1,\theta)\in\partial D\}$ を定義する。そのとき，

<u>Theorem 8.1.</u>　組 $\mathcal{B}=(\widetilde{W},\ Z(t,\widetilde{w}),\ \widetilde{\mathbb{B}},\ \widehat{P}_\theta,\ (1,\theta)\in\partial D)$ は次のような性質を持った $\widetilde{T}_t$ が対応する強 Makov 過程になっている。

1) $\widetilde{T}_t$ は強連続で，　2) T_t は $\mathbb{C}(\partial D)$ を $\mathbb{C}(\partial D)$ に写す．

証明．この証明で 1) 及び 2) は §6 で T_t が同様な性質を持つことの証明の方法と全く同じ方法を繰返すのでこゝでは省略する。

markov 性の証明も伊藤・渡辺・福島 [15]，§8 にある random time change のやり方と基本的に同じであるので，筋だけのべる。

a) 先ず　$\underline{t}^{-1}(t+s,w)=\underline{t}^{-1}(t,w^+_{\underline{t}^{-1}(s,w)})+\underline{t}^{-1}(s,w)$　と

$$\{w;\underline{t}^{-1}(s,w)\geqq t\}=\{w;s\geqq\underline{t}(t,w)\}\cap\{w;\underline{t}^{-1}(+\infty,w)\geqq t\}\in\mathbb{B}_t$$

に注意する。

b) 任意の Borel measurable function g と f に対し，

$$\widehat{E}_\theta\{f(\widetilde{w}_s^-)g(Z(t+s,\widetilde{w}))\}=E_{(1,\theta)}\{f(\theta(\underline{t}^{-1}(\cdot,w_{\underline{t}^{-1}(s,w)}^-),w^-_{\underline{t}^{-1}(s,w)})\,g(\theta(\underline{t}^{-1}(t,w^+_{\underline{t}^{-1}(s,w)}),w^+_{\underline{t}^{-1}(s,w)}))\}$$

$$=E_{(1,\theta)}\{f(\theta(\underline{t}^{-1}(\cdot,w_{\underline{t}^{-1}(s,w)}),w^-_{\underline{t}^{-1}(s,w)}))\,E_{(1,\theta(\underline{t}^{-1}(s,w),w))}(g(\theta(\underline{t}^{-1}(t,w),w)))\}$$

$$=\widehat{E}_\theta\{f(w_s^-)\widehat{E}_{Z(s,\widetilde{w})}(g(Z(t,\widetilde{w})))\},\qquad t,s\geqq 0。$$

故に markov 性を持つ。

（証明終り）。

つぎに 伊藤・渡辺・福島 [15]，第一章 §9．の Kac の定理を用いて，[15] の第二章 §8 と同様に $\mathbb{M}$ を定数 α で killing した

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

ものを $\mathbb{M}^{(\alpha)}$とし，それと同じように，

$\underline{t}^{-1}(t,w)$ で random time change すると，

$$\{e^{-\alpha \underline{t}^{-1}(t,w)}\theta(\underline{t}^{-1}(t,w),w),\quad 0\leq t<+\infty\}$$

が得られる．これを用いて $(\widetilde{W},\widetilde{\mathbb{B}})$ の中に次のような測度の系を定義する。

$$\widetilde{P}_\theta^{(\alpha)}(\widetilde{w}\in B)=P_{(1,\theta)}(e^{-\alpha\underline{t}^{-1}(\cdot,w)}\theta(\underline{t}^{-1}(\cdot,w),w)\in B),\qquad B\in\widetilde{\mathbb{B}}。$$

このとき Theorem 8.1 に対応するものとして次の定理を得る。

__Theorem 8.2.__ 組 $\mathcal{B}^{(\alpha)}=[\widetilde{W},\ Z^{(\alpha)}(t,\widetilde{w}),\ \widetilde{\mathbb{B}},\ P_\theta^{(\alpha)},\ (1,\theta)\in\partial D]$ は次のような性質を持った半群 $\widetilde{\mathbb{P}}_t^{(\alpha)}$が対応する markov 過程になっている。

1) $\widetilde{\mathbb{P}}_t^{(\alpha)}$ は強連続で，2) $\widetilde{\mathbb{P}}_t^{(\alpha)}$ は $\mathbb{C}(\partial D)$ を $\mathbb{C}(\partial D)$ に写す。

証明． この証明は α による killing でできる $\mathbb{M}^{(\alpha)}$が強markov過程になっていることが，killing の一般論と半群が $\mathbb{C}(\overline{D}_{r_0})$を$\mathbb{C}(\overline{D}_{r_0})$に写すことから解る．そのことを使えば後は Theorem 8.1 の場合と全く同じにしてできる。従って省略する。

__Definition 8.1.__ $\mathcal{B}^{(\alpha)}$を（$\mathbb{M}$に対応する）“α次”の境界上の markov 過程という。特に $\mathcal{B}^{(0)}(\equiv\mathcal{B})$ を単に（$\mathbb{M}$に対応する）境界上の markov 過程という。

こゝで $\mathcal{B}$ から直接に $\mathcal{B}^{(\alpha)}$を得ることもできる。K. Itô − H.P. McKean [16] は一次元拡散過程について random time change と killingが順序を交換することができることを示している．このときもそのことが成立って，$\mathcal{B}$ を $P_{(1,\theta)}(\sigma>t/\mathbb{B})=\exp\{-\alpha\underline{t}^{-1}(t,w)\}$，なる σ で killingすれば $\mathcal{B}^{(\alpha)}$を得ることが証明できる．しかしこのことの関係を示すのが当面の目的でないので証明は省略する．

__Notation__ $\widetilde{\mathbb{P}}_t^{(\alpha)}$に対応する green operator を $\widetilde{G}_\beta^{(\alpha)}$，その generator を $\widetilde{\mathcal{G}}^{(\alpha)}$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

次に当面必要な *Lemma* をあげておく。

Lemma 8.1. $f(r,\theta) \in \mathbb{C}(\overline{D}_{r_0})$ ならば，$\frac{\partial}{\partial r} G_\alpha^{0*} f(r,\theta) \in \mathbb{C}(D_{r_0} \cup \partial D)$ である。

この証明は偏微分方程式で良く知られた事実，例えば第2章にのべたようなことと，G_α^{0*} の構成を用いると証明できるので省略する。

この章の主要な結果は次の定理である。（第4章§4 を参照）

Theorem 8.3 $\mathbb{M}$ 及び $\mathcal{B}^{(\alpha)}$ があるとする。

1) G_α の common range $\mathcal{R}$ の中の函数 $u = G_\alpha f$, $\alpha > 0$ は次のように表わすことができる。

$$(8.1) \qquad u(1,\theta) = \widetilde{G}_{0+}^{(\alpha)} \left(\frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^{0*} f \right)(\theta), \qquad (1,\theta) \in \partial D.$$

2) 任意の α, β に対し

$$(8.2) \qquad \widetilde{G}_\gamma^{(\alpha)} g(\theta) - \widetilde{G}_\gamma^{(\beta)} g(\theta) + (\alpha - \beta) \widetilde{G}_{0+}^{(\beta)} \left(\frac{\partial}{\partial n} G_\beta^{0*} H_\alpha \widetilde{G}_\gamma^{(\alpha)} g \right)(\theta) = 0,$$

$$g \in \mathbb{C}(\partial D), \ (1,\theta) \in \partial D.$$

3) $\mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{g}}^{(\alpha)})$ は α に無関係である。

4) 任意の $u \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{g}}^{(\alpha)})$ に対し，$\alpha, \beta \geqq 0$ に対して，

$$(8.3) \qquad \widetilde{\mathfrak{g}}^{(\beta)} u = \widetilde{\mathfrak{g}}^{(\alpha)} u + (\alpha - \beta) \frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^{0*} (H_\alpha u)(\theta).$$

この定理は W. Feller が種々の場合に研究した *elementary return process* で *jumping measure* が確率測度でしかも，境界上を *path* が訪れるのが可附番回のような時は容易に証明できる。その時は一回境界を訪れてから次に境界を訪れるまでの *path* の行動によって定まるものと，訪れた瞬間の *path* の位置というようなものを適当に結合して行くと元の *path* 全体の行動が定まる。この種の分解がこの定理と同型のものである。一般のときにそのようなことを考えようとすると，境界を訪れる回数が可附番でないので，その点からの困難が生じて来る。ところが境界から ε 以上の距離の所を訪ねた後に再び境界に帰るというような行動は多くの場合可附

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

番である。そのような仕方で境界を訪ねた時間における path の境界上の位置の状態は ε に関係するが，その ε を 0 に近づけたとき，それの極限が境界上の markov 過程の状態に関連したもので書けるだろうことは直観的には容易に解る。そこで可附番でない困難を境界上の markov 過程の存在とその具体的な形を使ってさけて行こうというのが一つの考え方として可能であろう。そうして ε を 0 にやるときの極限の存在等については，今の場合は境界の所の path の出入が或る意味で1次元化してあるので，1次元拡散過程の性質を使って保証しようというのがこゝの方針である。

その方針を具体化するに必要な Lemma を先ず準備する。

Lemma 8.2. 任意の整数 $n \geqq 1$ に対して

1) $$E_1^{(1)}\{(\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)}))^n\} = O(\varepsilon^{2n}), \qquad \varepsilon \downarrow 0,$$

そして，

2) $$E_1^{(1)}\{(\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)}), W^{(1)}))^n\} = O(\varepsilon^n), \qquad \varepsilon \downarrow 0$$

である。

証明． 伊藤、渡辺、福島 [15]，第2章§3−8 を見れば容易に

$$E_1^{(1)}\{(\sigma_{1-\varepsilon})^n\} \leqq n!\left(\int_{1-\varepsilon}^{1} g_{1-\varepsilon}(1,r)\,dm(r)\right)^n$$

(8.4)

$$E_1^{(1)}\{(\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}))^n\} \leqq n!\left(\int_{1-\varepsilon}^{1} g_{1-\varepsilon}(1,r)\,d\hat{m}(r)\right)^n$$

が示されることが解る。こゝで

$$(8.5) \qquad g_\varepsilon(r, r') = \begin{cases} S(r') - S(1-\varepsilon), & r' < r \\ S(r) - S(r-\varepsilon), & r' \geqq r \end{cases}$$

で，$m(dr) = r\,dr$，$\hat{m}(dr) = (m(dr) + \delta_{\{1\}}(r))$ $S(r) = \log r$ である．(8.4)，(8.5) を用いれば後は明らかであろう。

Lemma 8.3 任意の t，$0 \leqq t \leqq \sigma_{r_0}(W^{(1)})$ に対し，

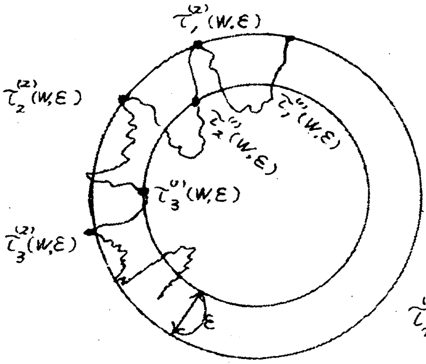
$$(8.6) \qquad \hat{E}\{|\hat{\eta}(t,(1,\theta),\hat{\omega}) - \theta|^2\} \leqq K\{t + t^2 + \underline{t}(t, W^{(1)}) + (\underline{t}(t, W^{(1)}))^2\},$$

こゝで K は t 及び $W^{(1)}$ に無関係。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

このLemmaの証明は(5.12)式を用い。Theorem 5.1の証明に用いた方法と同じようにして、(8.6)を予想すれば容易に示されるので省略する。

Theorem 8.3 の証明. 先づ IM に関する markov time の系列 $\{\tau_n^{(1)}(w,\varepsilon)\}$, $\{\tau_n^{(2)}(w,\varepsilon)\}$ を次のように定義する。



$$\tau^{(1)} \equiv \tau^{(1)}(w,\varepsilon) = \inf\{t;\ r(t,w)=1-\varepsilon,\ t\geq 0\},$$

$$\tau^{(2)} \equiv \tau^{(2)}(w,\varepsilon) = \inf\{t;\ r(t,w^+_{\tau^{(1)}(w,\varepsilon)})=1,\ t\geq 0\},$$

$$\tau_0^{(2)} \equiv \tau_0^{(2)}(w,\varepsilon)=0,\quad \tau_1^{(1)}\equiv\tau_1^{(1)}(w,\varepsilon)=\tau^{(1)}(w,\varepsilon),$$

$$\tau_n^{(1)}\equiv\tau_n^{(1)}(w,\varepsilon)=\tau^{(1)}(w^+_{\tau^{(2)}_{n-1}(w,\varepsilon)},\varepsilon)+\tau^{(2)}_{n-1}(w,\varepsilon),\quad n=1,2,\cdots$$

$$\tau_n^{(2)}\equiv\tau_n^{(2)}(w,\varepsilon)=\tau^{(2)}(w^+_{\tau_n^{(1)}(w,\varepsilon)},\varepsilon)+\tau_n^{(1)}(w,\varepsilon)。$$

ここで $\tau_n^{(2)}(w,\varepsilon)$ は境界から ε の距離の所に行って再び境界に帰ることを丁度 n 回行う時間で、$\tau^{(1)}_{n+1}(w,\varepsilon)$ は $\tau_n^{(2)}(w,\varepsilon)$ の後に始めて距離 ε の所に到達する時間である。いま $G_\alpha f(r,\theta)$ の積分を上の markov time で区切って強 markov 性を使うと、

$$G_\alpha f(1,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}E_{(1,\theta)}\{e^{-\alpha\tau^{(2)}_{n-1}}E_{(1,\theta(\tau^{(2)}_{n-1}))}(\int_0^{\tau^{(1)}}e^{-\alpha t}f(r(t),\theta(t))dt\}$$

$$(8.7)\qquad +\sum_{n=1}^{+\infty}E_{(1,\theta)}\{e^{-\alpha\tau_n^{(1)}}G_\alpha^{0*}f(1-\varepsilon,\theta(\tau_n'))\},\qquad \varepsilon>0,$$

$$\equiv I_1+I_2。$$

(8.7)の第1項は境界から ε の距離の所に行くまでの行動に主として関連し、第2項は ε の距離の所から境界までの行動に主として関連するものである。

(8.7)の各項で $\varepsilon\downarrow 0$ のときの状態を調べる。

先づ第1項であるが Lemma 8.2 に注意すれば

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

(8.8) $\left|E_{(1,\theta)}\left\{\int_0^{\tau^{(1)}} e^{-\alpha t} f(r(t),\theta(t))dt\right\}\right| \leqq \|f\| E_1^{(1)}\{\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)},\varepsilon)\} = o(\varepsilon^2)$,

（θ に関し一様），

となるので，オ一項全体は $\circ \varepsilon \downarrow 0$ のとき $o(1)$ である。すなわちオ2項は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき無視可能である。

つぎに *Lemma 8.1* を用いれば オ2項は次のように変形される。任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\varepsilon \downarrow 0$ のとき，

(8.9) $\quad I_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} E_{(1,0)}\left\{e^{-\alpha\tau_n^{(1)}} \frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^{0*} f(1,\theta(\tau_n^{(1)}))\right\}\varepsilon + o(1)$。

こゝで伊藤・渡辺・福島[15]，さらに詳しくは K.Ito-H.P.McKean [16] にあるように，$\tau^{(1)}_{[\frac{t}{\varepsilon}]}(W,\varepsilon)$ は $\varepsilon \downarrow 0$ のとある意味で $\underline{t}^{-1}(t,W)$ に近ずくことに注意して，(8.9) の評価のために次のようなものを評価する。

一般の $g(\theta) \in \mathbb{C}(\partial D)$ に対し

$$I_3 \equiv \left|\sum_{n=1}^{+\infty} E_{(1,\theta)}\{e^{-\alpha\tau_n^{(1)}} g(\theta(\tau_n^{(1)}))\}\varepsilon - E_{(1,\theta)}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} g(\theta(t))\underline{t}(dt)\right\}\right|$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{+\infty} E_{(1,\theta)}\left\{e^{-\alpha\tau_{n-1}^{(2)}} E_{(1,\theta(\tau_{n-1}^{(2)}))}\left[e^{-\alpha\tau^{(1)}} g(\theta(\tau^{(1)}))\varepsilon - \int_0^{\tau^{(1)}} e^{-\alpha t} g(\theta(t))\underline{t}(dt)\right]\right\}\right|$$

の評価を行う。I_3 を行うのに［　］の中の評価を行う。

$$I_4 \equiv E_{(1,\theta)}\left\{e^{-\alpha\tau^{(1)}}(g(\theta(\tau^{(1)})))\varepsilon - \int_0^{\tau^{(1)}} e^{-\alpha t} g(\theta(t))dt\right\}$$

$$= E_{(1,\theta)}\left\{e^{-\alpha\tau^{(1)}}(g(\theta(\tau^{(1)})) - g(\theta))\right\}\varepsilon$$

$$+ E_{(1,\theta)}\left\{\int_0^{\tau^{(1)}} e^{-\alpha t}(g(\theta) - g(\theta(t)))\,\underline{t}(dt)\right\}$$

$$+ E_1^{(1)}\left\{\varepsilon - \int_0^{\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)})} e^{-\alpha t}\,\underline{t}(dt, W^{(1)})\right\} g(\theta)$$

$$+ E_1^{(1)}\left\{e^{-\alpha\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)})} - 1\right\} g(\theta)\varepsilon$$

$$\equiv I_{4,1} + I_{4,2} + I_{4,3} + I_{4,4}$$

を評価する，伊藤、渡辺、福島[15] のオ2章の *first passage*

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

time に関する結果を，特にベッセル過程のときに特殊化して用いると，

$$|I_{4.3}+I_{4.4}|\leqq\delta^{(1)}(\varepsilon)\varepsilon$$

でこゝで $\delta^{(1)}(\varepsilon)$ は ε と共に θ に関し一様に 0 に行くことが容易に解る。IM の定義から

$$|I_{4.1}|\leqq\Big|E^{(1)}_{1}\big(e^{-\alpha\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)})}E^{*}\{g(\eta(\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)}),(1.\theta),\hat{W})))-g(\theta);$$

$$|\eta(\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)}),(1.\theta),\hat{W})-\theta|<\varepsilon^{1/4}\}\big)\Big|$$

$$+\Big|E^{(1)}_{1}\big\{e^{-\alpha\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)})}E^{*}\{g(\eta(\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)}),(1.\theta),\hat{W}))-g(\theta);$$

$$|\eta(\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)}),(1,\theta),\hat{W})-\theta|\geqq\varepsilon^{1/4}\}\big\}\Big|$$

上式の才１項は Dynkin formula から generator の確率論的表現を求めるときと全く同じ考えにより，ε と共に 0 に行く，しかも g の一様連続性に注意すればそれは θ に一様に行くことが言える。（才１章§３参照）。

才２項は先ず E^{*} の部分にチエビシエフの不等式を適用し，Lemma 8.2 を適用すれば，これも又 θ に関し一様に ε と共に 0 に行くことが解る。
つぎに

$$|I_{4.2}|\leqq\Big|E^{(1)}_{1}\Big(\int_{0}^{\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)})}e^{-\alpha t}E^{*}\{g(t)-g(\eta(t,(1.\theta),\hat{\omega}))$$

$$;|\theta-\eta(t.(1.\theta),\hat{\omega})|<\varepsilon^{1/4}\}\underline{\underline{t}}(dt\,W^{(1)})\Big)$$

$$+\Big|E^{(1)}_{1}\Big(\int_{0}^{\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)})}e^{-\alpha t}E^{*}\{g(t)-g(\eta(t,(1.\theta),\hat{\omega}))$$

$$;|\theta-\eta(t,(1.\theta),\hat{\omega})|\geqq\varepsilon^{1/4}\}\underline{\underline{t}}(dt,W^{(1)})\Big)\Big|$$

と変形すれば，$|I_{4.1}|$ の評価と同じにして

$$|I_{4.2}|\leq\varepsilon\,\delta^{(2)}(\varepsilon)$$

で，$\delta^{(2)}(\varepsilon)$ は θ に関し一様に ε と共に 0 に行くことが解る。

故に

$$|I_{4}|\leqq\varepsilon\,\delta^{(3)}(\varepsilon)$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

となり，$\delta^{(3)}(\varepsilon)$ は θ に関し一様に ε と共に 0 に行くことが解る。これを用いると I_3 が ε と共に 0 に収束することがわかる。このことを（8.9）に適用すれば

$$I_2 = E_{(1,\theta)}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^{0*} f(\theta(t,w))\, \underline{t}(dt,w)\right\} + o(1) \qquad \varepsilon \downarrow 0$$

となる。故に全体を綜合して

$$G_\alpha f(1,\theta) = \widetilde{G}_{0+}^{(\alpha)}\left(\frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^{0*} f\right)(\theta)$$

が証明された。

後 2）は 伊藤、渡辺、福島［15］の Kac の定理の証明と同じ考え方により

$$\widetilde{G}_\gamma^{(\alpha)} g(\theta) - \widetilde{G}_\gamma^{(\beta)} g(\theta) = E_{(1,\theta)}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} ds \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\gamma \underline{t}^{-1}(t, w_s^+)}\right.$$

$$\left. g(\theta(t, w_s^+))\, \underline{t}(dt, w_s^+)\right\}(\beta-\alpha)$$

が得られることから明らか。

3），4）は 2）から明らか。

（証明終り）

上の定理の意味で証明の途中で明らかになることがある。それは（8.7）の第1項が無視可能ということである。その原因は反射壁のベッセル過程では $E_1^{(1)}(\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)})) = O(\varepsilon^2)$ にある。逆に ε の距離の所から境界まで行く時間は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき確率1で 0 には行くが，$\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)})$ に比してはるかに order が小さく，$\frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^{0*} f$ が一般には 0 ではないようになっている。若し（5）で 第4項以下がないならば従って角の方の散らばりも主として内から境界に行くまでの方により生じ，境界から内に行く方で生じるものは或る意味で無視可能になっている。第4項以下があるときはその積分範囲を $\underline{t}(t, W^{(1)})$ とすることにより，時間が $\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)}), W^{(1)})$ となるので，この平均は $E_1^{(1)}\{\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)}), W^{(1)})\} = O(\varepsilon)$ となり，回転方向の散らばりでは境界から内へ行く方も関係して来ることになる。第4項以

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

下がなくなる場合が反射壁と言われるものに当っていることは第9章で解るが，従って反射壁のものの path はそのような意味では境界から normal 方向に出ると直観的に言えるわけである．このことが反射壁の Brown 運動を elemetary return process で近似しようとすれば，境界に到達したら normal 方向に ε の所にとびこませ，それから Brown 運動に従って行動させ，境界に来たら又同じことを繰返すというようなものの極限と考えられることに密接に関連している。

尚 $\mathbb{M}'$ については上の注意からも解る通り，(8.7) の第一項は無視できず，滞留のあるベッセル過程では $E''_1\{\sigma_{1-\varepsilon}(W'')\}=o(\varepsilon)$ なることに注意すれば，第1項は第2項と全く同じ事情になり，Theorem 8.3 の 1) の (8.1) 式は

$$G_\alpha f(1,\theta)=\widetilde{G}^{(\alpha)}_{0+}\left(f+\frac{\partial}{\partial n}G^{0*}_\alpha f\right)(\theta)$$

とおきかえなくてならないことが解る。Theorem 8.3 の 2) 以下の項もそれに応じて修正しなくてはならない。

§9 境界条件

境界条件というのは，Markov 過程の境界での行動を規制するものである。従って逆に境界での行動が解ると，境界条件は解る筈である。ところが境界での行動には“境界上の Markov 過程”が密接な関連があることは §8 でのべた通りである．又第1章 §5 の説明でものべた通り，境界條件を決めることは半群の generator の domain $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ を決めることである．このことに注意して，Theorem 8.3 の (8.1) 式とみれば，上の大ざっぱな推論が有効であることが解る・すなわち $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ は minimal process に対応する Green operator と“境界上の process”の Green operator で本質的に定まっている．それをもう少し正確に定式化すると次の形になる。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

Proposition 9.1. $\overline{\mathcal{G}}$ をIMに対応する *local generator* とする。すなわち D_{r_0} の内部で $\mathcal{G}$ と同じ値を与える *operator* とする。そのとき,

$$(9.1)\qquad \mathfrak{D}(\overline{\mathcal{G}})=\left\{\begin{array}{l} u(r,\theta);\ (\alpha-\overline{\mathcal{G}})u(r,\theta)\in\mathbb{C}(\overline{D}_{r_0}),\ \lim\limits_{r\downarrow r_0}\mathcal{G}u(r,\theta)=0,\\ \widetilde{\mathcal{G}}^{(0)}u(r,\theta)+\frac{\partial}{\partial n}(u-H_0u)(1,\theta)=0,\ u(r,\theta)\in\mathbb{C}(\overline{D}_{r_0}) \end{array}\right\}$$

となる。

証明. 今 (9.1) の右辺を $\mathfrak{D}$ とする。 $\mathfrak{D}(\overline{\mathcal{G}})\ni u(r,\theta)$ のとき, $\mathfrak{D}\ni u(r,\theta)$ であることは, *Theorem* 8.3 より明らかである. 従って問題は逆の証明である。 $\mathfrak{D}\ni u(r,\theta)$ とする. そのとき,

$$(9.2)\qquad (\alpha-\overline{\mathcal{G}})\,u(r,\theta)\equiv f(r,\theta)$$

とおけば $f(r,\theta)\in\mathbb{C}(\overline{D}_{r_0})$ である。今

$\hat{u}(r,\theta)=G_\alpha^{0*}f(r,\theta)+H_\alpha^{1}\widetilde{G}_{0+}^{(\alpha)}(\frac{\partial}{\partial n}G_\alpha^{0*}f)(1,\theta)$ とおけば, $\hat{u}(r,\theta)\in\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}(\overline{\mathcal{G}})$ である. 従って (9.2) の $f(r,\theta)$ が定まると, そのような $f(r,\theta)$ を持った $\mathfrak{D}$ の *element* は *unique* に定まることを言えばよい. 今2つあったとして, それを $u_i(r,\theta)$, $i=1,2$ として, $v(r,\theta)=u_1(r,\theta)-u_2(r,\theta)$ とおけば $v(r,\theta)=H_\alpha v(r,\theta)$ となる。定義により

$$0=\lim_{r\downarrow r_0}H_\alpha v(r,\theta)=\lim_{r\downarrow r_0}H_\alpha^2(r,\theta)=v(r_0,\theta)$$

となる. 故に

$$(9.3)\qquad v(r,\theta)=H_\alpha^2 v(r,\theta).$$

ところが 他方 $\widetilde{\mathcal{G}}^{(0)}u(r,\theta)+\frac{\partial}{\partial n}(u-H_0u)(1,\theta)=0$ と *Theorem* 8.3 の結果より,

$$\{H_\alpha-H_\beta+(\alpha-\beta)G_\alpha^0H_\beta\}v=0$$

に注意すれば,

$$(9.4)\qquad \widetilde{\mathcal{G}}^{(\alpha)}v(\theta)+\frac{\partial}{\partial n}(v-H_\alpha v)(\theta)=0,\qquad (1,\theta)\in\partial D$$

を得る. (9.3) と (9.4) より

故に $\widetilde{\mathcal{G}}^{(\alpha)}$ の性質により, $\widetilde{\mathcal{G}}^{(\alpha)}v(\theta)\equiv 0$
$v(\theta)\equiv 0$, 従って一意的になる。

（証明終り）。

Proposition 9.1 は所謂境界條件が ∂D 上では

$$(9.5)\qquad \widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}u(r,\theta)+\frac{\partial}{\partial n}(u-H_0u)(1,\theta)=0$$

になっていることを示している。従って ∂D 上での境界条件を定めるには境界上の *process* の *generator* を求めればよいことになる。このことは既に第3章にのべたことと原理的に同じことの特殊の場合の話である。

これまで構成された Markov 過程 $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ の境界条件がどんなものかをみるには、$\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}$ の形を知ればよいことになる。又そのことによって、(5.3) の第3項以下の係数 m, σ, β の意味も明確になる。

そこで $\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}$ の形をより具体的に求めることが重要である。この目的のために、§5.6 の構成を用いるが、先づ準備として、生成作用素の表現に関する Dynkin の結果を少し修正した形でのべておく。

<u>*Lemma* 9.1</u> $\mathbb{M}$ があるとき，

$$\tau_\varepsilon(W)=\sigma_{1-\varepsilon}(W)+\sigma_1(W^+_{\sigma_{1-\varepsilon}(W)})$$

とおけば，そのときは $u(\theta)\in\mathfrak{D}(\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)})$ に対して，

$$(9.6)\qquad \widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}u(\theta)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{E_{(1,\theta)}\{u(\theta(\tau_\varepsilon(W),W))\}-u(\theta)}{E_{(1,\theta)}\{\underline{t}(\tau_\varepsilon(W),W)\}}\ ,\qquad (1,\theta)\in\partial D$$

である。

証明． *Theorem* 8.3 により $u(\theta)\in\mathfrak{D}(\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)})$ であるので，$u(\theta)=\widehat{G}^{(0)}_\beta f(\theta)$，$f(\theta)\in\mathbb{C}(\partial D)$，$(1,\theta)\in\partial D$。従って強 *markov* 性により，

$$u(\theta)=E_{(1,\theta)}\Big\{\int_0^{\underline{t}(\tau_\varepsilon)}e^{-\beta t}f(\theta(\underline{t}^{-1}(t)))\,dt\Big\}+E_{(1,\theta)}\Big\{e^{-\beta\underline{t}(\tau_\varepsilon)}\ \widehat{G}_\beta f(\theta(\underline{t}^{-1}(\tau)))\Big\}。$$

今 $E_{(1,\theta)}\{\underline{t}(\tau_\varepsilon)\}=E^{(1)}_1\{\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)}),W^{(1)})\}<+\infty$ に注意すれば，*Dynkin* の公式と同じにして（第1章§3参照），

$$u(\theta)=-E_{(1,\theta)}\{\int_0^{\underline{t}(\tau_\varepsilon)}\tilde{\mathcal{G}}^{(0)}u(\theta(\underline{t}^{-1}(t)))dt\}+E_{(1,\theta)}\{u(\theta(\tau_\varepsilon))\},\qquad (1,\theta)\in\partial D。$$

Dynkin の時は，上式から直ちに生成作用素の表現が得られたが，今は $\{\theta(\underline{t}^{-1}(t,w),w),\ 0\leqq t\leqq \underline{t}(\tau_\varepsilon(w),w)\}$ の動く範囲が ε－近傍みたいになっていないので，ちよっとした注意を必要とする。そのためには次の評価を考えればよい。

$$|E_{(1,\theta)}\{\int^{\underline{t}(\tau_\varepsilon(w),w)}\tilde{\mathcal{G}}^{(0)}u(\theta(\underline{t}^{-1}(t,w),w))dt\}-E_{(1,\theta)}\{\underline{t}(\tau_\varepsilon(w),w)\}\tilde{\mathcal{G}}^{(0)}u(\theta)\}$$

$$\leqq E_1^{(1)}[\int_0^{\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}(w^{(1)}),w^{(1)})}E^*\{|\tilde{\mathcal{G}}^{(0)}u(\theta)-\tilde{\mathcal{G}}^{(0)}u(\eta(\underline{t}^{-1}(t,w^{(1)}),(1,\theta),\hat{\omega}))|;$$
$$|\eta(\underline{t}^{-1}(t,w^{(1)}),(1,\theta),\hat{\omega})-\theta|>\varepsilon^{1/4}\}]$$

$$+E_1^{(1)}[\int_0^{\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}(w^{(1)}),w^{(1)})}E^*\{|\tilde{\mathcal{G}}^{(0)}u(\theta)-\tilde{\mathcal{G}}^{(0)}u(\eta(\underline{t}^{-1}(t,w^{(1)}),(1,\theta),\hat{\omega}))|;$$
$$|\eta(\underline{t}^{-1}(t,w^{(1)}),(1,\theta),\hat{\omega})-\theta|\leqq\varepsilon^{1/4}\}]$$

こうすると §8 の I_4 の評価と同じような考え方で

$$\leqq E_1^{(1)}\{\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}(w^{(1)}),w^{(1)})\}\delta(\varepsilon),$$

こゝで $\delta(\varepsilon)$ は ε と共に 0 に行くということが証明きる。これによって (9.6) が出る。

（証明終り）。

次に $\eta(\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}(w^{(1)}),w^{(1)}),\hat{\omega})$ の変動に関する Lemma を示す。すなわち，それと，(5,12′) で係数が θ に関し定数の時の差の散らばりに関することである。

Lemma 9.2. 今 $X_\varepsilon(\hat{w})$, $Y_\varepsilon(\hat{w})$ を次の式で定義する。

$$X_\varepsilon(\hat{w})=m(\theta)\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}(w^{(1)}),w^{(1)})+\sigma(\theta)B(\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}(w^{(1)}),w^{(1)}),w^{(2)})$$
$$+\int_0^{\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}(w^{(1)}),w^{(1)})}\int_{|u|>1}\beta(u,\theta)p(dud\theta,w^{(1)})$$
$$+\int_0^{\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}(w^{(1)}),w^{(1)})}\int_{|u|<1}\beta(u,\theta)q(dud\theta,w^{(1)})$$

$$Y_\varepsilon(\hat{w})=\eta(\sigma_{1-\varepsilon}(w^{(1)}),(1,\theta),\hat{\omega})-X_\varepsilon(\hat{\omega})。$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

そのとき，

1) $\varepsilon \to 0$ のとき

$$\left[E\{ e^{izX_\varepsilon(\hat{\omega})} \} \right]^{[\frac{1}{\varepsilon}]} \longrightarrow e^{\psi(z)},$$

こゝで

$$\psi(z) = im(\theta)z - \frac{1}{2}\sigma^2(\theta)z^2 - \int_{-\pi}^{\pi} (e^{izu} - 1 - izu)\, n(du;\theta),$$

さらに $n(du;\theta)$ は

$$\beta(u;\theta) = \inf\{a;\ n(a,\pi];\theta) < \frac{1}{u}\}, \quad u > 0$$

$$= \sup\{a;\ n((-\pi,a),\theta) < \frac{1}{u}\}, \quad u < 0,$$

なる Lévy measure である。

2)

$$|E\{Y_\varepsilon(\hat{\omega})\}| = o(\varepsilon), \quad E\{Y_\varepsilon^2(\hat{\omega})\} = o(\varepsilon)。$$

証明。　定義より

$$E\{e^{izX_\varepsilon(\hat{\omega})}\} = E_1^{(1)}\{ e^{-\frac{1}{2}(\sigma_{1-\varepsilon}(W^{(1)}), W^{(1)})\psi(z)} \}。$$

上式から Lemma 8.2 に注意すれば 1) が直ちに出る。

2) の証明は §5 で繰返し用いた評価法と Lemma 8.2 と 8.3 を用いれば示すことができる。繰返しが多く，特に新しい手法を用いないので，こゝでは省略する。

（終り）

この Lemma がわれわれが今構成した M の回転成分が境界上の点 $(1,\theta)$ で，§1 でのべた意味の接線に当たる加法過程からどれ位離れているかを示している。その誤差部分が $Y_\varepsilon(\hat{w})$ に当る。
Lemma 3.2 に注意すれば $\varepsilon \downarrow 0$ のとき，局所的に M の回転成分は加法過程でおきかえられることを示していることも解る。そのように考えれば $\tilde{\sigma}^{(0)}$ について次の定理が成立つことは当然予想される。

<u>Theorem 9.1.</u>　若し $u(\theta) \in C^2(\partial D)$ ならば

1) $u(\theta)\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{G}}^{(0)})$ であり。

2) $$\widetilde{\mathcal{G}}^{(0)}u(\theta)=-\frac{\partial}{\partial r}H_0u(1,\theta)+m(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}u(\theta)+\frac{1}{2}\sigma^2(\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(\theta)$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}\left(u(\theta+\xi)-u(\theta)-\xi\frac{\partial}{\partial\theta}u(\theta)\right)n(d\xi,\theta),\quad(1,\theta)\in\partial D,$$

こゝで $u(\theta)$ は polar 座標に関して考えられているので 2π の周期の函数とみる。

証明. Lemma 9.2 と 3.1 に注意すれば，$\theta(\sigma_{1-\varepsilon}(w),w)$ の分布を $P_\varepsilon(\cdot)$ とするとき

$$P_\varepsilon^{*(\frac{1}{\varepsilon})}\Rightarrow L\qquad(\Rightarrow\text{ は measure の収束})$$

となる。こゝで L は特性函数が $e^{\psi(z)}$ なる無限分解可能な分布。又

$$E_{(1,\theta)}\{u(\theta(\tau_\varepsilon(w),w))\}$$
$$=E_{(1,\theta)}\{H_0u(1-\varepsilon,\theta(\sigma_{1-\varepsilon}(w),w))\}$$

に注意すれば，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{E_{(1,\theta)}\{\underline{t}(\sigma_{1-\varepsilon}(w),w)\}}{\varepsilon}=1,$$

と Lemma 3.2，9.1 を用いて，2) が示される。仮定により $\widetilde{\mathcal{G}}^{(0)}u\in\mathbb{C}(\partial D)$ となり 1) が出る。

（終り）。

$\mathbb{M}'$ に対しても $u(\theta)\in\mathbb{C}^2(\partial D)$ ならば，$u(\theta)\,\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{G}}^{(0)})$ となり，

$$\widetilde{\mathcal{G}}^{(0)}u(\theta)=-\frac{\partial}{\partial r}H_0u(1,\theta)+(a(\theta)+m(\theta))\frac{\partial}{\partial\theta}u(\theta)+\frac{1}{2}(b^2(\theta)+\sigma^2(\theta))\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(\theta)$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}\left(u(\theta+\xi)-u(\theta)-\xi\frac{\partial}{\partial\theta}u(\theta)\right)n(d\xi;\theta)$$

が全く同じようにして示される。

Theorem 9.1 の 2) の式の右辺の最后の項の形から §5 でのべた条件（C.2）が jump の範囲に関する制限である事情が解るであろう。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

§10. 種々の注意

これまでのことを綜合すると，$\overline{D}_{r_0}$ 上の値をとり，しかも内部では path が連続になっていて，境界上では右連続になっている強 markov な拡散過程で次のような条件をみたすものが作られている。

$u(r,\theta) = G_\alpha f(r,\theta) \in \mathbb{C}^2(\overline{D}_{r_0}) \cap \mathfrak{D}(\mathcal{G})$ に対して

(1) $$(\alpha - A)u(r,\theta) = f(r,\theta), \qquad (r,\theta) \in D_{r_0},$$

(2) $$\lim_{r \downarrow r_0} Au(r,\theta) = 0,$$

(3) $$\frac{\partial}{\partial n}u(1,\theta) + m(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}u(1,\theta) + \frac{1}{2}\sigma^2(\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(1,\theta) + \int_{-\pi}^{\pi}\Big(u(1,\theta+\xi) - u(1,\theta) - \xi\frac{\partial}{\partial\theta}u(1,\theta)\Big)n(d\xi;\theta)$$
$$= \delta(\theta)\lim_{r \uparrow 1} Au(r,\theta),$$

こゝで $\delta(\theta) = 0$ 又は 1 である。

これを第1章§5にのべた A.D.Wentzell の境界条件と比較してみると，(3)の左辺の最后の項の $n(du;\theta)$ の suport が ∂D 上だけに制限されていること，又 $u(1,\theta)$ の項を含んでいない点がきわだった相異点である。$n(du;\theta)$ の support を $\overline{D}_{r_0}$ 全体にするものを確率論的な手法で作ることは，一次元拡散過程に関しては K.Itô－H.P.McKean の両氏は完全な解決を与えたとのことであるが，それ自体筆者達は詳細を知らないし，しかもそれが出来たとしても現在のような多次元にそれを持ち込むことにはまたそれなりの困難が存在すると思われる。なおそのような解析的な構成に関しては既に第3章にのべた。しかしながら $u(r,\theta)$ を含むものを作ることは M.Kac の定理を用いれば local time $\underline{t}(t,w)$ を用いる IM 又は IM′ の killing により可能である。しかもそれは伊藤，渡辺，福島 [15] の第2章と原理的には同じであるので詳細は省略する。

ある正則条件の下では偏微分作用素の大部分を占めるためには尺度の変換を考えに入れゝば $m(r,\theta)A$ の形のものを考えればよいことは §4 でのべた。上の (1) の A を $m(r,\theta)A$ でおきかえるこ

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

と，さらに大ざっぱに言ってそれと同じ harmonic function を与える A^* というようなものでおきかえたようなものを作るという問題は random time change の問題であり，$m(r,\theta)\in \mathbb{C}(\bar{D}_{r_0})$ で，$m(r,\theta)>0$ のときは伊藤・渡辺・福島［15］のときと同じ考えで容易に出来る。しかし，もっと一般の場合のその種の問題の解決は附録で論ぜられる Riesz 分解を一般化した結果を用いる必要がある。その考え方は Brownian hitting measure を持った拡散過程について H.P. Mckean − H. Tanaka［24］によって行われたのと同じである。しかしそれらを充分一般な条件で実行するには多くの準備を必要とすることや，細部に関しては種々の困難があるので，ここではこれ以上の詳論はさける。

なお §§4〜9までに論じたことで 証明が省略された部分の多くについては N. Ikeda［12］ では論じる予定である。

§11. 境界値問題への応用

この章のこれまでの§では相当に一般な境界条件をみたす markov 過程を作って来た。この§ではそのような markov 過程と境界値問題との関連をのべる。

Dirichlet 問題と markov 過程との関連は早くから知られ，その色々な側面が研究されている。（例えば J. Doob［46］,［47］や K. Ito［57］等を参照されたい。） ところが ポテンシャル論の第2問題（Neumann 問題）については markov 過程との関連は論じられていない。

Neumann 問題を例でのべれば，D を単位円とするとき，与えられた ∂D 上の連続函数 $f(\theta)$ に対し，

$$(11.1)\qquad \begin{aligned} &\Delta u(r,\theta)=0, \qquad (r,\theta)\in D,\\ &\frac{\partial}{\partial n}u(1,\theta)=f(\theta) \end{aligned}$$

なる調和函数 $u(r,\theta)$ を求めるということである。ところがこれは

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

常には解を持たず，解をもつのは

(11.2) $$\int_{\partial D} f(\theta)\, d\sigma(\theta) = 0$$

が成立つとき，又そのときのみである。（11.2）の条件がどのような確率論的性質に対応するかを示すのがこの§の目的である。

ある積分が $=0$ か $\neq 0$ かというものや，$=+\infty$ か $<+\infty$ かというような判定条件は解析学でしばしば出て来る特長のある一つの型である。しかも当然のことながら $=0$ と $=\infty$，$\neq 0$ と $<+\infty$ がそれぞれ対応する組になることが多い。それらの例としては例えばポテンシャル論における正則性に関する Wiener の判定条件，確率論では再帰性に関する判定条件等がある。

markov 過程が再帰ならば適当な正則条件の下で，すべての state space の点 x に対し，

(11.3) $$\int_0^{+\infty} P(t,x,E)\,dt = +\infty,$$

ここで E は点 x の任意の近傍である。非再帰ならば適当に E をとれば，

$$\int_0^{+\infty} P(t,x,E)\,dt < +\infty$$

である。（例えば P. Watanabe [71] をみよ）。こゝでは（11.2）と（11.3）の関連を示す。

§2～9 で $\overline{D}_{r_0}$ 上の markov 過程を構成したが，強 markov 性に注意すれば $\overline{D}$ 上で作れることを示すのは容易である。そこでこのことを以後前提とする。しかも話を簡単にするために，内部は Brown 運動と同じで境界上の markov 過程が Lévy 過程になっている時（rotation に関し不変の時）のみを考える。しかも境界に滞留のあるものを考える。そのときは

(11.4) $$G_\alpha f(r,\theta) = G_\alpha^0 f(r,\theta) + H_\alpha \widetilde{G}_{0+}^{(\alpha)}\Big(f + \frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0 f\Big)(\theta)$$

となる。こゝで G_α^0 は absorbing Brownian motion の green operator，H_α は

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$(\alpha - \tfrac{1}{2}\Delta) H_\alpha u = 0, \qquad (r,\theta) \in D,$$

$$H_\alpha u = u \quad , \qquad (r,\theta) \in \partial D,$$

とする。

このような Markov 過程 IM に関しては，若しそれが再帰的ならば定常分布 $m(dr d\theta)$ が存在し，しかも充分大きな T に対し，任意の $t > T$ について

$$(11.5) \qquad \left| T_t f(r,\theta) - \int_{\bar{D}} f(r',\theta') m(dr'd\theta') \right| \leqq K e^{-\delta t}$$

となる，こゝで $K>0$，$\delta>0$ で，それらは t と (r,θ) に無関係である。

この性質は色々な方法で示されるが，このような簡単の場合には内部が Brown 運動であることを用い遷移確率が Doeblin の条件をみたしていることが非常に大ざっぱな評価でわかる。こゝではこの問題自身が主目的でないのでその証明は省略する。さらに半径が滞留を持ったベッセル過程であること，rotation invariant なこと等を用いると G. Maruyama and H. Tanaka [62] のと同じ方法で $m(dr d\theta) = C\{r dr + \delta_{\{1\}}(dr)\} d\theta$, $C>0$, なることも解る。

(11.5) によれば

$$(11.6) \qquad \int_0^{+\infty} \left| T_t f(r,\theta) - \int_{\bar{D}} f(r',\theta') m(dr'd\theta') \right| dt < +\infty$$

である。(11.6) に注意すれば，若し

$$(11.7) \qquad \int_{\bar{D}} f(r,\theta) m(dr d\theta) = 0$$

が成立つならば

$$G_0 f(r,\theta) \equiv \int_0^{+\infty} T_t f(r,\theta)\, dt \quad < +\infty$$

となる。任意の $f(\theta) \in \mathbb{C}(\partial D)$ に対し，

$$f^*(r,\theta) = \begin{cases} f(r,\theta) & , \quad (r,\theta) \in \partial D, \\ 0 & , \quad (r,\theta) \in D, \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

と定義する。そのときは

$$G_\alpha f^*(r,\theta) = H_\alpha(\widetilde{G}^{(\alpha)}_{0+} f)(r,\theta), \qquad (r,\theta)\in\overline{D},$$

となる。このとき

$$\int_D f^*(r,\theta)m(dr d\theta) = c\int_{\partial D} f(\theta)d\sigma(\theta) = 0 \tag{11.8}$$

ならば $u(r,\theta) \equiv G_{0+}f^*(r,\theta) = H_0\widetilde{G}^0_{0+}f(r,\theta) \in \mathbb{C}(\partial D)$ なることが示される。他方定義より，

$$(11.9)\quad \begin{aligned} &\Delta u = 0, && (r,\theta)\in D, \\ &\widetilde{\mathcal{O}}_J^{(0)} u(1,\theta) = -f^{(\theta)}, && (1,\theta)\in\partial D, \end{aligned}$$

である。ところがこれは（11.1）と同じ型の方程式である。すなわち，$\mathbb{M}$ が存在すれば（11.9）なる方程式は（11.8）の条件の下で定数をのぞいて一意的にとけるということになる。もう少しはっきり言えば $\mathbb{M}$ に対応する境界上の markov 過程 $\mathcal{B}^{(0)}$ があればよいわけである。

example 11.1. 今（11.1）と（11.9）が同じ型であることを示すために滞留のある反射壁の Brown 運動を考える。このときは，

$$\widetilde{T}_t^{(0)} g(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,\frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}-2e^{-t}\cos(\theta-\xi)}\,d\xi \tag{11.10}$$

であるので，$u(\theta)\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{O}}_J^{(0)})$ に対し，$\widetilde{\mathcal{O}}_J^{(0)}u(\theta) = \frac{\partial}{\partial n}H_0 u(\theta)$ である。（11.10）の証明は subordination の理論を用いると明らかである。（尚（11.10）の半群は円周上の Cauchy process に対応するものである）。

example 11.2. §6 で構成された markov 過程の中には §9 から解るように $u(\theta)\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{O}}_J^{(0)})\cap\mathbb{C}^2(\partial D)$ に対し

$$\widetilde{\mathcal{O}}_J^{(0)}u(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial n}H_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)u(\theta), \qquad (1,\theta)\in\partial D,$$

というようになるもの等を含んでいる。そのような $\widetilde{\mathcal{O}}_J^{(0)}$ に対しても（11.8）の下で（11.9）はとける。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

このような形で Neumann問題を拡張して行くことは偏微分方程式の立場から M.I.Višik 等により1950年代の初期にソビエットで沢山研究された。(M.I.Višik and O.A.Ladyženskaya[67]を参照)。

さらに(11.9)をみたす解が存在すれば IM が再帰的なときは(11.8)が成立つ。というのは

$$(\gamma-\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)})u(1,\theta)=\gamma u(1,\theta)-f(\theta)\in\mathbb{C}(\partial D),\quad \gamma>0$$

であるので，$u(1,\theta)=\widetilde{G}_\gamma^{(0)}g_\gamma(\theta)$, $g_\gamma(\theta)=\gamma u(1,\theta)-f(\theta)$。ところが(8.2)により

$$\widetilde{G}_\gamma^{(\alpha)}g(\theta)-u(1,\theta)+\alpha G_\alpha H_0 u(1,\theta)=0,\qquad (1,\theta)\in\partial D,$$

となるので

$$|G_{0+}f^*(1,\theta)|=\lim_{\alpha\downarrow 0}|\widetilde{G}_{0+}^{(\alpha)}f(\theta)|\leqq 2\|u\|,\qquad (1,\theta)\in\partial D,$$

である。従って(11.6)に注意すれば

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{\int_{\partial D}f(\theta)d\sigma(\theta)}{\alpha}<+\infty$$

となり,

$$\int_{\partial n}f(\theta)d\sigma(\theta)=0$$

という条件が出てくる。このことは Neumann 問題のときは良く知られていることである。

ところが IM が非再帰ならば，G_α の連続性等に関する適当な条件の下で，任意の $f\in\mathbb{C}(\partial D)$ に対し，$G_{0+}f^*(1,\theta)<+\infty$ となる。

3次元及びそれ以上の次元の外部問題に対しては，球の外側では Brown 運動と同じで，境界 ∂D 上では滞留のある反射壁の IM をとる(そのようなものの存在は §§2−9のやり方から明らかである)。このときは又 $\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}$ はやはり $\frac{\partial}{\partial n}H_0 u$ である。したがってこの process で $u(r,\theta)=G_{0+}f^*(r,\theta)$ を作ればそれが外部問題の解になる。このときは IM は非再帰で又(11.8)の条件なしで $G_{0+}f^*(r,\theta)$ は存在する。

以上のことから(11.8)の条件は対応する IM が再帰的のときの

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

み必要である。

尚最后にわれわれはこのような確率論的な考察は必ずしも解の存在証明を簡単にしていることにはならないことを注意する。すなわちわれわれはIMの存在を仮定しているが，それは解析的には又或種の境界値問題の解を用いることになる。したがってIMの存在証明に充分注意しないと論理がまわる危険性がある。しかしこのような考察が問題の取扱いに1つの系統性を与えることは明らかであろう。又良く知られていた場合はより単純な境界値問題の解を使って複雑な境界値問題の解を与えるという形になっている。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

附　　録

この附録は全体としてまとまりあるものでなく，本文に対する注意や，問題点についての説明を与えるのが目的である．（しかしながら表題の題目についての問題点をすべてのべるというのでなく，本文にのべたことから容易に記述できるものの中のいくつかについてのべるだけである。）

［1°］ *Wentzell* の境界条件について。

第1章§5にのべたように，*Wentzell* の条件は境界上のある点の近傍で $\mathbb{C}^2$ になっている $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ の函数に対して，その点の条件を与えるという形になっている。ところがそのような函数が $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ の中にどれ位あるかということは論じられていない．若しそのような函数が $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ の中に殆んどない場合は条件は *trivial* になってしまう．この問題を完全に解決することは現在のところ非常な困難がありそうに思えるが，次にのべる *diffusion* は例としては好ましいものではないが条件が *trivial* になる一つの例である．

閉円板 $\overline{D}$ の内部で *Brownian motion* で境界に到達したら *spead measure* $m(d\theta)$ が *singular* なような ∂D 上の *linear diffusion* として行動するものを考える．これを式で言えば次の通りになる．

$B(t,w)\,(\equiv(r_r(t,w),\theta_\theta(t,w)))$, $0\leq t<+\infty$, は (r,θ) から出発する2次元 *Brownian motion* $\widetilde{\theta}_\theta(t,w)$, $0\leq t<+\infty$, は ∂D 上の *generator* $\frac{d}{dm(\theta)}\frac{d}{d\theta}$ の θ から出発する *linear diffusion*
$B(t,w)$, $\widetilde{\theta}_\theta(t,w)$, $0\leq t<+\infty$ はお互に独立。

そのとき．

$$\hat{\theta}(t,w)=\theta_\theta(t,w). \qquad 0\leq t<\sigma_1(w),$$
$$\widetilde{\theta}_{\theta(\sigma_1(w),w)}(t-\sigma_1(w),w) \qquad \sigma_1(w)\leq t<+\infty,$$
$$\sigma_1(w)=\inf\{t\,;\ r(t,w)=1\}$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

とおき，$\{(r(t,w),\ \hat{\theta}(t,w));\ 0\leq t<+\infty\}$ を *polar* 座標とする *Markov* 過程 $\mathbb{M}$ を考える。そうすると

$$G_\alpha f(1,\theta)=E\left\{\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}f(r_r(t,w),\theta_\theta(t,w))dt\right\}$$

となる．又 $\mathbb{M}$ に対応する半群 T_t が $\mathbb{C}(\bar{D})$ を $\mathbb{C}(\bar{D})$ の内部にうつす強連続なものであることも容易に解る。このとき，1次元 *diffusion* の結果により，$G_\alpha f(1,\theta)\notin\mathbb{C}^2(\partial D)$ である。故に $\mathbb{C}^2(\partial D)\cap\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ は空集合になる．もう少し詳しく言うと $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ は次の3つの条件をみたす函数の全体である。

1°) Dの内部で古典的な *Newtonian* ポテンシャルについての *signed Riesz measure* が存在し，その *measure* はDの内部で連続な *density* $u^*(r,\theta)$ を持ち，

2°) $\lim\limits_{r\uparrow 1}u^*(r,\theta)$ は存在し，$\mathbb{C}(\partial D)$ に属し，

3°) $\lim\limits_{r\uparrow 1}u^*(r,\theta)=\dfrac{d}{dm(\theta)}\dfrac{d}{d\theta}u(1,\theta)$。

ところでこれが例として好ましくないと前にのべたが，その理由はこのような *diffusion* は内部から境界に到達することはできるが，境界から内部へは這入れないからである．上の $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ を決める条件をもう少しあらっぽく書けば，$\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ の中で *dense* な函数のクラスで

$$(1.1)\qquad \begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\Delta u(r,\theta)\in\mathbb{C}(D),\\ &\lim_{r\uparrow 1}\tfrac{1}{2}\Delta u(r,\theta)=\frac{d}{dm(\theta)}\frac{d}{d\theta}u(1,\theta)\quad\in\mathbb{C}(\partial D)\end{aligned}$$

なるものが存在する。この(1.1)の式を

$$Lu(1,\theta)\equiv-\lim_{r\uparrow 1}\tfrac{1}{2}\Delta u(r,\theta)+\frac{d}{dm(\theta)}\frac{d}{d\theta}u(1,\theta)=0$$

とおけば 第1章 §5 の(5.8)式に相当するものが得られる．ところがその式で $\mu(x_0)\frac{\partial}{\partial n}$ に相当する項は 0 になっている。これは上にのべた境界から内部へ這入れないためにおこることであるが，この項が残っているような場合に $\mathfrak{D}(\mathcal{G})\cap\mathbb{C}^2(\partial D)$ が *trivial* になるものがあるかという問題は一層興味がある．直観的に言えば境界と内部が相互に *communication* のあるもので $\mathfrak{D}(\mathcal{G})\cap\mathbb{C}^2(\partial D)$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

が trivial になるものがあるかという問題である。

[2°] path の連続性について。

これまで論じてきた diffusion という言葉は通常用いられているより広い意味で，Dの内部を path が動くときのみ連続性を仮定し，境界からは境界及び内部への飛躍を許している。そこで通常の意味の diffusion，すなわち path が常に連続であるためにどのような境界条件であればよいかという問題がおこる。

このことについては第2章で反射壁の diffusion は $\overline{D}$ 上で path が連続であることを示した。さらに第5章の場合ならば角方向の成分が常に連続であればよい。ところが確率積分の定義からそのためには，任意の θ に対して，

$$\beta(u, \theta) \equiv 0$$

となれば充分である。境界条件で言えば任意の θ に対して $n(\partial D;\theta)=0$ であればよい。

一般の場合も 第3章 §2で任意の x に対して，

$$V_x(\overline{D})=0$$

となれば path は $\overline{D}$ 上で連続になるという予想は自然であるが，今のところ証明されていない。この問題は D. Ray [63] によって研究された遷移確率の局所性に密接に関連している。若し局所性が成立つとき，即ち，任意の $x \in \overline{D}$ に対し，その点の任意の近傍 $U(x)$ について，

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} P(t, x, U(x)^c)=0$$

ならば，第1章 §5の計算(Vol 5, P.30)で

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t u(x)-u(x_0))$$

を

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\left(\int_{U(x_0)} u(x) P(t, x_0, dx)-u(x_0)\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

でおきかえて計算してよい。こゝで $V(x_0)$ は x_0 の任意の近傍である。（1章§1，定理1.2参照）。

[3°] "境界上の Markov process の system" について

3～5章で論じて来た"境界上の Markov process の system"というものにはどのようなものがなり得るかという問題は一般的な diffusion の構成にとって重要なように思える。

いうまでもなく[1°]のところで論じたようなもの，すなわち，境界から出発した path は常に境界上を動き，内部に到達することはないときは，"境界上の Markov process の system"としては，∂D 上の任意の Markov process（T_t は強連続で $\mathbb{C}(\partial D)$ を $\mathbb{C}(\partial D)$ にうつす）を定数 α の比率で killing したものがなり得る。しかし内部と境界の間に communication があるときには問題はそのように簡単ではない。

あらっぽく言うと，0次の境界上の Markov 過程の generator は LH_0 である。（記号は第3章参照）。第1章§5でのべた通り，L 自身がまだ完全な形で求められていないので，このような形の generator をもった Markov 過程が，path が ∂D 上の値をとる，Markov 過程の中でどんなクラスを作っているかも充分には解らない。また L の中に $\frac{\partial}{\partial n}$ の項が残っている場合，例えば第5章で論じた場合は，

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \frac{\partial}{\partial n} H_0 + \tilde{\mathfrak{g}}^{(0)} \tag{3.1}$$

となっている。こゝでは $\tilde{\mathfrak{g}}^{(0)}$ は ∂D 上の或る種の Markov process の generator となっている。第1項は反射壁の diffusion に対する境界上の Markov process の generator である。（第4章参照）。(3.1)の形に制限した時も $\tilde{\mathfrak{g}}^{(0)}$ がどれだけ自由にとれるかという問題がおこる。これらのことはいづれもまだ解決されていない。尚2つの generator の和がまた，generator になり得るかという問題は

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

一般論として論じたものとしては *Trotter* [66] がある。又才3章§5, *Proposition* 5.1 も関連がある。

[4°] 反射壁の *diffusion* に対する境界上の Markov 過程について。

2章～5章までを通して，$\frac{\partial}{\partial n}u=0$ なる境界条件をみたす，反射壁の *diffusion* が基本的な役割を果たしている。才5章でみたように他の条件のものは，反射壁のものを，*path* が境界に到達したとき一定の法則に従って境界にそってズラしたり，内部や境界に *jump* させたりすることによって得られる。ところが，一般の場合には，この反射壁そのものを定義するのが非常に困難である。というのはこのノートで取扱った場合は境界というようなものが自然に考えられ，しかもなめらかであり，作用素 A も境界まで *degenerate* しないという非常に特殊な制限を設けたので作用素 A に応じた *normal* 方向というような概念が定義できるが，一般にはそうはできない。そこで普通の意味では *normal* 方向というものが定義できないときも通用するような反射壁の概念を得ることは非常に望ましいが，今の所それに対しての解答は得られていない。そのような目的を持った研究は *countable state* を持った *Markov process* の場合に，*W. Feller* [7] 等によって行われている。(わが国でも渡辺毅氏や福島正俊氏によってそれについての考えが出されている)。

こゝでは直接それに対する解答の方針を出すのではないが，一つの試みとして *Normal* 方向の定義できる反射壁の *diffusion* の持っている確率論的特性について考える。

半径1の閉円板内の *Brownian motion* $\{x(t,w),\ 0\leq t<+\infty\}$ を考える。*polar coordinate* で考え $x(t,w)=(r(t,w),\theta(t,w))$ とする。先ず反射壁の場合すなわち境界条件 $\frac{\partial}{\partial n}u=0$ をみたす場合を考える。このとき $r(t,w)$ の1に於ける *local time* を $\underline{t}(t,w)$ とすれば

$$\{\theta(\underline{t}^{-1}(t,w),w),\qquad 0\leq t<+\infty\}$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

が0次の境界上のMarkov過程であり，それは円周上のCacuchy過程の1つのversionを与えている．その特徴はP. Lévy [60]，伊藤清[13]にあるようにpathがpurely discontinuousなことである．

次に $(\frac{d}{dn}+\frac{d}{d\theta})u(1,\theta)=0$ 又は $(\frac{d}{dn}+\frac{d^2}{d\theta^2})u(1,\theta)=0$ のような境界条件をみたすdiffusionをpolar座標で書いた時の角成分の1つのversionはそれぞれ

$$\theta(t,w)+\underline{t}(t,w),$$
$$\theta(t,w)+B(\underline{t}(t,w),\widehat{w})$$

として得られる。（第5章参照） こゝで $B(s,\widehat{w})$ は $x(t,w)$ とお互に独立。上の2つに対する"境界上のMarkov過程"の1つのversionはそれぞれ，

$$\theta(\underline{t}^{-1}(t,w),w)+t,\quad \theta(\underline{t}^{-1}(t,w),w)+B(t,\widehat{w})$$

として与えられる．従っていずれもLévy-Itô表現をしたときcontinuous partを含んでいる．

このような考察は第5章の場合に行うと，もとのdiffusionが $\overline{D}$ 上でcontinuousなpathを持つもので，境界上のMarkov過程がcontinuous partを含まないのは，反射壁及びそれをtime-change又は適当にkillingすることにより得られる場合のみである．このことは直観的には境界にそってのズレのないのが反射壁と考えられることに関連している．

そこで反射壁のdiffusionの上のような特性が2章－4章で論じた時どうなるかというような疑問が当然考えられるが，今の所その解答もまだ得られていない。その解答は第3章§4, Lemma 4.1 (vol 5, P115) の (4.2)式にのべた $\frac{\partial}{\partial n}\widehat{H}_\alpha$ の形に関連している。$\alpha=0$ のとき，少くとも $\alpha^{ij}_{1,\alpha}(x)$，$\beta^{i}_{1\alpha}(x)$ が恒等的に0になる必要がある。

次にこのノートの定式化とはやゝ異るが，同じ事情の成立つ他の例についてこの問題を考えてみる。

state space D としては今 R^2 全体をとり，Aとしては

$$Au(x_1,x_2)=\left(\frac{b(x_1)}{2}\frac{d^2}{dx_1^2}+a(x_1)\frac{d}{dx_1}+\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx_2^2}\right)u(x_1,x_2)$$

を考える。今 $b(x_1), a(x_1)\in \mathbb{C}(R^1)$ で，$b(x_1)>0$ をみたし，更に

$$B(x_1)=\int^{x_1}\frac{2a(\xi)}{b(\xi)}d\xi,\quad S(x_1)=\int^{x_1}e^{-B(\xi)}d\xi,\quad m(x_1)=\int^{x_1}\frac{2e^{B(\xi)}}{b(\xi)}d\xi$$

とおくとき，$-\infty=S(-\infty)$，$S(+\infty)<+\infty$ 及び $-\infty=m(-\infty)$，$m(+\infty)<+\infty$ とする。

このとき上の A の closed extension を generator に持った吸収壁の process の version は次のようにして構成できる。

$X_1(t,w)$，$0\leq t<+\infty$，は generator $\mathscr{G}_1$ が

$$\frac{b(x_1)}{2}\frac{d^2}{dx_1^2}+a(x_1)\frac{d}{dx_1}$$

で吸収壁の一次元 diffusion とする。$X_2(t,w)$，$0\leq t<+\infty$，は一次元 Brownian motion であり，しかも $X_1(t,w)$，$0\leq t<+\infty$，とはお互に独立である。その時 $Y(t,w)=(X_1(t,w),X_2(t,w))$，$0\leq t<+\infty$，は目的の version であることは第5章の場合と同様にして示すことができる。

一次元 diffusion の結果より（伊藤・渡辺・福島 [15]）

$$\sigma_{+\infty}(w)=\inf\{t;\ X_1(t,w)=+\infty\}$$

とおけば $\sigma_{+\infty}(w)$ は確率1で有限である。従って X 座標が $+\infty$ になってから又内部に這入ってくるようなものが当然考えられる。Y 座標の方は1次 Brownian motion については $+\infty$，$-\infty$ 共に natural boundary point になるのでそのようなことはない。従って，

$$\bar{R}^2=\{(x,y);\ -\infty\leq x\leq+\infty,\ -\infty\leq y\leq+\infty\}$$

で $(x,+\infty)$，$(x,-\infty)$ の点はすべて identify $\{d\}$ としたものを改めて $\bar{R}^{2*}$ とする。（どのような境界点をつけ加えるかは渡辺毅 [17]，S. Martin [9] のように考えるのが妥当と思われ，このときは遷移確率の density が固有展開を用いて具体的に構成できるので，その方法により正確にその境界を構成できると思うが今は便宜的に上の

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

ものをとっておく）。

$\overline{R^{2}}^{*}$ の上の Markov 過程を考えるとき，$\{d\}$ さは当然 trap と考えるのが自然である。そこで問題となる境界は $D_1=\{(x,+\infty);\ x\in R^1\}$ である。

そのようなものの一つとして，$X_1(t,w)$ のかわりに $+\infty$ で反射壁の条件をみたし，内部では $X_1(t,w)$ と同じ generator を持った $\widetilde{X}_1(t,w)$ を $X_2(t,w)$ とお互に独立になるようにとる。

$\widetilde{Y}(t,w)=(\widetilde{X}_1(t,w),\ X_2(t,w))$ がある。このときの境界上の Markov 過程は

$$X_2(\underline{t}^{-1}(t,w),w),\quad 0\leq t<+\infty,$$

となる。こゝで $\underline{t}^{-1}(t,w)$ は $\widetilde{X}_1(t,w)$ の $+\infty$ における local time の uiversal function である。K. Ito－H.P. Mckean [16]により，$\underline{t}^{-1}(t,w)$ は jump だけ増加するある種の Lévy process の一つの version になっている。従って subordination の理論により $X_2(\underline{t}^{-1}(t,w),w)$ は jump だけで変化する Markov 過程になる。ところが他の Markov 過程として，

$$\widetilde{Y}_1(t,w)=(\widetilde{X}_1(t,w),\ X_2(t,w)+B(\underline{t}(t,w)))$$

や

$$\widetilde{Y}_2(t,w)=(\widetilde{X}_1(t,w),\ X_2(t,w)+\underline{t}(t,w))$$

が考えられる。こゝで $B(t,w)$ は $\widetilde{X}_1(t,w),\ X_2(t,w)$ とお互に独立な一次元 Brownian motion とする。このときはいづれも path は $\overline{R^{2}}^{*}$ で continuous になっているが，対応する境界上の Markov 過程はそれぞれ

$$X_2(\underline{t}^{-1}(t,w),w)+B(t,w),$$

$$X_2(\underline{t}^{-1}(t,w),w)+t$$

となり，どれも continuous part を含んでいる。直観的にみれば構成からみて $\{\widetilde{Y}(t,w),\ 0\leq t<+\infty\}$ が反射壁と考えるのが自然のように思えるので，この時も又第5章の場合の事情は保存されていることになる。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

[5°] Riesz 分解について。

4章及び5章でのべたように, state の subset に path の滞在する時間の全体を Lebesgue measure としては0であるが, それを適当な方法で測ることが重要な場合が多い。このような場合又后で注意する spead measure の変換において, excessive function の Riesz-measure という量が重要な役割を果たす。このことは positive super harmonic function の Riesz-measure の拡張として, H. Tanaka (確率論セミナー九州シンポジウム,(1960年4月) や Volkonsky [69] によって最近確立された。[5°]ではこのことについての注意をのべる。

R を局所コンパクト可分な距離空間とする. C_0 を R の one-point compactification ∞ で 0 になる連続函数の作る Banach 空間としたとき, T_t は C_0 をそれ自身へうつし, 強連続とする。更に遷移確率がコンパクト集合上有限なある測度 m につき絶対連続で, その密度函数 $p(t,x,y)$ とし, $g_\alpha(x,y)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}p(t,x,y)\,dt$ $(\alpha \geqq 0)$ とするとき次の条件がみたされているものとする:

(G^*) $\begin{cases} \text{operator } G^*_\alpha: C_0 \ni f \longrightarrow u(x)=\int_R g_\alpha(y,x)f(y)m(dy) \text{ の値域} \\ G^*_\alpha(C_0) \text{ が } C_0 \text{ に含まれ, しかも } C_0 \text{ で dense } (\alpha \geqq 0) \\ \text{である。} \end{cases}$

このとき,

<u>Proposition 5.1</u> $\{G_n\}$ を G_n^c がコンパクトで $G_n^c \uparrow R$ $(n\uparrow+\infty)$ なる開集合列とする. コンパクト集合上で有界な excessive function e ($\alpha=0$ に対し) が $\lim_{n\to+\infty} E_x(e(x(\sigma_{G_n}(w),w)))=0$ をみたしていれば e に対し一意的に非負測度 μ が定まり,

$$e(x)=\int_R g(x,y)\,\mu(dy)。$$

([5°] では R で定義された $f(x)$ は常に $f(\infty)=0$ とする)。

この証明のために先づ Hunt による Lemma をのべる。

Lemma 5.1 (G. Hunt [54])。e を excessive とすると, $\alpha \geqq 0$ と開集合 E に対し $H_E^\alpha e(x)=E_x\{e^{-\alpha\sigma_E}e(x_{\sigma_E})\}$ は excessive $\leqq e(x)$。又 $H_E^\alpha e$ は E の外部で 0 になる函数列

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$\{f_n\}$ $(f_n \geqq 0)$ のポテンシャル列 $\int g_\alpha(x,y)f_n(y)m(dy)$ の増加極限になっている。

証明は〔[S4]；定理 6.6〕参照。

Proposition 5.1 の証明。E を closure コンパクトの開集合とする。Lemma 1 により，$f_n \geqq 0$（E の外で $=0$）があり，$H_E^\alpha e(x)$ は $\int g_\alpha(x,y)f_n(y)m(dy)$ の増加極限になっている。ψ_0 をコンパクト support の連続函数で $\psi_\alpha = G_\alpha^* \psi_0 \geqq 1/2$, $x \in E$ とする。（そのような function は (G^*) により存在する）。

$$(5.1) \qquad \frac{1}{2}\int_E f_n(y)m(dy) \leqq \int \psi_\alpha(y) f_n(y) m(dy) \leqq \int e(x)\psi_0(x)m(dx) < +\infty,$$

すなわち $\{f_n(y)m(dy),\ n \geqq 1\}$ は support が $\bar{E}$ にあり，一様有界な測度である。故に (G^*) により，$\bar{E}$ 内にある有界測度 μ_E^α があり

$$(5.2) \qquad \int\left\{\int g_\alpha(x,y)\mu_E^\alpha(dy)\right\}\varphi(x)m(dx) = \int H_E^\alpha e(x)\varphi(x)m(dx)\text{。}$$

これから殆んどすべての x（m に関し）に対し

$$(5.3) \qquad \int g_\alpha(x,y)\mu_E^\alpha(dy) = H_E^\alpha e(x),$$

であるが，両辺が共に excessive であることによりすべての x に対し等号が成立つ。又 (5.1) と同様にして $\{\mu_E^\alpha;\ \alpha > 0\}$ の全測度は一様有界（$\alpha \downarrow 0$ のとき）であるから部分列 $\alpha_k \downarrow 0$ をとり，$\bar{E}$ 上のある測度 μ_E へ弱収束させることができる。ところが $g_0(x,y) = g_\alpha(x,y) + \alpha\int g_0(x,z)m(dz)g_\alpha(z,y)$ より任意の $\varphi \in C_0$ に対し

$$\begin{aligned}
\int\varphi(x)m(dx)\int g(x,y)\mu_E(dy) &= \lim_{k\to+\infty}\int G_0^*\varphi(x)\mu_E^{\alpha_k}(dx) \\
&= \lim_{k\to+\infty}\int\varphi(x)H_E^{\alpha_k}e(x)m(dx) \\
&\quad + \lim_{k\to+\infty}\alpha^k\int G_\alpha^* G_0^*\varphi(x)\mu_E^{\alpha_k}(dx) \\
&= \int\varphi(x)H_E^0 e(x)m(dx)\text{。}
\end{aligned}$$

故に

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$\int g(x,y)\mu_E(dy)=H_E^0 e(x)$$

となる。

次に(5.1)と同様にして$\{\mu_E\}$はEがうごくとき，コンパクト集合の上で一様有界な測度であるから適当な$E_n\uparrow R$及びコンパクト集合$F_k\uparrow R$をえらんで各F_kの上でμ_{E_n}をR上のある測度μに弱収束させることができる。そこでφをコンパクト support の連続函数，$\psi=G_0^*\varphi$をとり，

$$\int\psi(x)e(x)m(dx)=\lim_{n\to+\infty}\int\psi(x)H_{E_n}^0e(x)m(dx)=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{F_k}\psi(x)\mu_{E_n}(dx)+\int_{F_k^c}\psi(x)\mu_{E_n}(dx)\right)$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{F_k^c}\psi(x)\mu_{E_n}(dx)\right|&=\left|\int\varphi(x)m(dx)\int_{F_k^c}g(x,y)\mu_{E_n}(dx)\right|\\&=\left|\int\varphi(x)H_{F_k^c}^0H_{E_n}^0e(x)m(dx)\right|\\&\leqq\left|\int\varphi(x)H_{F_k^c}^0e(x)m(dx)\right|\to0,\ k\to+\infty\ (\text{仮定による})。\end{aligned}$$

故に　$\int\varphi(x)e(x)m(dx)=\int\varphi(x)\left\{\int g(x,y)\mu(dy)\right\}m(dx).$

これより　$e(x)=\int g(x,y)\mu(dy)$　を得る。μの一意性は(G^*)により明らか。(証明終り)。

このようにして定まった$\mu(dx)$を Newtonian ポテンシャルの場合にならって次のように呼ぶ。

<u>Definition 5.1</u>.　上の$\mu(dx)$を$e(x)$の Riesz 測度という。

[6°]　生成作用素の表現について.

1章から5章まで吾々は常に generator が D の内部ではなめらかな係数をもったある微分作用素の内拡大になっているような場合のみを取扱って来た。しかし一次元 diffusion や Brownian hitting diffusion についてはもう少し拡張された operator を持ったものが存在することは良く知られている。(伊藤・渡辺・福島[15], H. P. Mckean and H. Tanaka [24]参照)。このような事情がどう

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

なっているかを次にみる。

第2章§1のAで特に $b^i(x)\equiv 0$, $C(x)\equiv 0$, すなわち self-adjoint のような場合を考える。$\mathbb{M}^\circ=\{W, x^\circ(t,w), \mathbb{B}, P_x^\circ, x\in\overline{D}\}$ は第2章での意味でAに対応する吸収壁の diffusion とする。

次に1つの$\mathbb{M}^\circ$に対し Markov過程の1つのクラスを定義する。

<u>Definition 6.1.</u> diffusion $\mathbb{M}=\{W, x(t,w), \mathbb{B}, P_x, x\in\overline{D}\}$ が次の条件(6.1)をみたすならば，拡散過程$\mathbb{M}$は"E内で拡散過程$\mathbb{M}^\circ$と同じ hitting probability を持つ"という。

任意の $G\subset E\subset D$ なる有界なGに対し，

$$(6.1)\qquad P_x\{x(\sigma_{\partial G}(w),w)\in dy\}=P_x^\circ(x^\circ(\sigma_{\partial G}(w),w)\in dy\},\quad x\in G.$$

この定義を用いると当面の吾々の問題は次の形に定式化される。

<u>問題1°</u>。"$\overline{D}$内で$\mathbb{M}^\circ$と同じ hitting probability を持つ diffusion $\mathbb{M}$の生成作用素 $\mathcal{G}$ のD内での表現"を求めること。

<u>問題2°</u>。"$\overline{D}$内で$\mathbb{M}^\circ$と同じ hitting probability を持つ吸収壁の diffusion $\mathbb{M}$"を$\mathbb{M}^\circ$の random time change の方法で作ること

という形になる。

ところがこの2つの問題の解釈にとって本質的な役割を果たすのは，一次元及び Brownian hitting のときは，positive superharmonic function の Riesz 分解と additive functional (第4章参照)である。現在も附録[5°]でRiesz 分解をのべ additive functional については4章でのべたので問題は直ちに解釈されたように思えるが実はもう一つ問題が残っている。というのは G. Hunt [54] では excessive が T_tを用いて定義してあるので，Markov 過程一つ一つに応じて定まる概念になっている。ところが superharmonic という概念は Brownian hitting diffusion 全体という一つのクラスについて定まった概念である。従ってそれに対する Riesz 分解もそのクラスについて一通り定まる。実はこの違いが問題になって来る。この差をうめるには最近 E. B. Dynkin [50] によ

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

って証明なしに発表された結果が重要な役割を果たす。それを現在の場合に局限してのべると次のようになる。$\mathbb{C}_0(\overline{D})$ を第2章§4と同様に $\mathbb{C}_0(\overline{D}) = \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \{u(x);\ u(x)=0,\ x \in \partial D\}$ とする。

Proposition 6.1 (E. B. Dynkin [50]) $\mathbb{M} = (\overline{W}, x(t,w), \mathbb{B}, P_x^\circ, x \in D)$ を $\overline{D}$ で $\mathbb{M}^\circ$ と同じ *hitting probability* を持つ吸収壁の *diffusion* で T_t は $\mathbb{C}_0(\overline{D})$ を $\mathbb{C}_0(\overline{D})$ にうつし $\lim_{t\downarrow 0} P(t,x,U(x))=1$, $x \in D$, をみたすとする。こゝで $U(x)$ は $x \in D$ の任意の近傍とする。

そのとき，*non-negative* な函数 $e(x)$ があり，

1) コンパクト集合 $G \subset \overline{D}$ への *hitting time* σ_G に対し

$$E_x^\circ\{e(x^\circ(\sigma_G(w),w))\} \leqq e(x), \qquad x \in D,$$

2) 1)と同様な *hitting time* の系列 $\sigma_n(w)$ で $P_x^\circ\{\sigma_n(w) \downarrow 0\}=1$, $x \in D$, なるものに対し

$$\lim_{n\uparrow+\infty} E_x^\circ(e(x(\sigma_n(w),w))) = e(x), \qquad x \in D$$

ならば，$e(x)$ は（*diffusion* $\mathbb{M}$ に関し）*excessive* である。

尚 E. B Dynkin [50] Theorem 4 では一般に "standard Markov process" というクラスについてもっと一般の形でのべてある。G. Hunt [54] により $\mathbb{M}^\circ$ 及び上にのべた $\mathbb{M}$ としては "standard Markov process" になるような *version* がとれることが知られている。

この *Proposition* によって *excessive* という概念を *Proposition 6.1* の条件をみたす $\mathbb{M}$ 全体という一つのクラスに対応して定まるようにすることができたわけである。そこで問題 1°, 2° の $\mathbb{M}$ としてこの *Proposition* の性質をみたす $\mathbb{M}$ と言い換えると解決に近づくことができる。

Proposition 6.2 *Proposition 6.1* の $\mathbb{M}$ で $E_x(\sigma_{\partial D}(w)) < +\infty$, $x \in \overline{D}$, なるものを考える。そのとき，$\mathbb{M}$ の *generator* $\mathcal{G}$ は次のように表現される。

(1) 任意の $u(x) \in \mathfrak{D}(\mathcal{G})$ に対し，

$$u(x) = \int_D g^\circ(x,y)\, m_u(dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

なる $u(x)$ に対応する signed Riesz measure $m_u(dx)$ が定まる。こゝで（以下同様）$g^0(x,y)$ は第2章で定めた $\mathbb{M}^0$ の green density である。

(2) そうして，$u(x)\in\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ に対して

$$\mathfrak{g}u(x) = -\frac{m_u(x)}{\mu(dx)},$$

こゝで $\mu(dx)$ は $E_x\{\sigma_{\partial D}(w)\}\equiv e(x)$ の Riesz measure とする。

証明．基本的に一次元や Brownian hitting の時に同じであるので，荒すじのみのべる。

$e(x)$ が Proposition 6.1 の 1), 2) をみたすことは $\mathbb{M}$ と $\mathbb{M}^0$ が同じ hitting probability を持つことから言える。故に（$\mathbb{M}^0$ に関し）excessive である。従って Riesz measure $\mu(dx)$ が一意的に定まることは $\mathbb{M}^0$ が [5°] の (G^*) をみたしていることより明らかである．

次に $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ の element $u(x)$ に対しては充分なめらかな boundary ∂E を持ち $E\cup\partial E\subsetneq D$ なる集合と E があるとき次のような分解が対応する。

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x),$$

$$\mathfrak{g}u_i(x)\geqq 0,\quad x\in E,\qquad i=1,2.$$

ところが $u_i(x)$ は連続で Dynkin formula を用いると，

$$E_x^0\{u_i(x^0(\sigma_{\partial\tilde{E}}(w),w))\}\leqq u_i(x),\ x\in E,\ \tilde{E}\subset E,$$

である。従って Proposition 6.1 により $u_i(x)$ は $\mathbb{M}^0$ を ∂E で $\sigma_{\partial E}(w)$ について killing した ∂E を吸収壁とする第2章の A に対応する diffusion $\mathbb{M}_E^0$ に関し excessive である。

$$u_i(x) - E_x^0\{u_i(x^0(\sigma_{\partial E}(w),w))\}$$

も又，そうである。従って $g^E(x,y)$ を $\mathbb{M}_E^0$ の 第2章での意味の green dencity とすれば Proposition 5.1 により，

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

$$u_i(x) - E_x^\circ\{u_i(x^\circ(\sigma_{\partial E}(w),w))\} = \int_E g^E(x,y)V_E^{(i)}(dy), \qquad i=1,2.$$

なる Riesz measure $V_E^{(i)}(dy)$, $i=1,2$, が存在する。右 $V_E^{(i)}(dy)$ が E に無関係な $V^{(i)}(dy)$ の E への restriction になっていることは $\mathbb{M}^\circ$ が [5°] の性質 (G_α^*) を持っていることに注意して Brownian-hitting の時と全く同様に示すことができる。そこで，$V(dy) = V^{(1)}(dy) - V^{(2)}(dy)$ としこの $V(dy)$ を $m_u(dy)$ とおく。Dynkin formula を用いると，

$$\int_D g^\circ(x,y)\{-\mathcal{G}u(y)\}\mu(dy) = \int_D g^\circ(x,y)m_u(dy)。$$

故に

$$\mathcal{G}u(y) = -\frac{m_u(dy)}{\mu(dy)}, \qquad y \in D。$$

（証明終り）

これで問題 1° は終ったが，問題 2° は問題 1° で定めた $\mu(dy)$ を用いれば解決できる。

$$e_D(x) = \int_D g^\circ(x,y)\mu(dy)$$

なる excessive function $e_D(x)$ に対し第4章でのべた（$\mathbb{M}^\circ$についての）additive functional $\xi(t,w)$ が対応し，

$$E_x^\circ(\xi(\sigma_{\partial E}(w),w)) = e_D(x)$$

となる。この $\xi(t,w)$ を用いて，

$$\tilde{x}(t,w) = \begin{cases} x(\xi^{-1}(t,w),w), & t < \xi^{-1}(+\infty,w) \\ \infty, & t \geq \xi^{-1}(+\infty,w) \end{cases}$$

とおき

$$\tilde{P}_x(B) = P_x^\circ\{\tilde{x}(\cdot,w)\in B\}, \quad B \in \mathbb{B},$$

として作られる新たな Markov 過程 $\tilde{\mathbb{M}} = \{\hat{W}, \tilde{x}(t,w), \tilde{\mathbb{B}}, \tilde{P}_x, x\in\bar{D}\}$ は generator が

$$-\frac{m_u(dy)}{\mu(dy)}$$

となるものである。$\tilde{\mathbb{M}}$ の強 Markov 性や $G_\alpha : \mathbb{C}_0(\bar{D}) \to \mathbb{C}_0(\bar{D})$ には $\mathbb{M}^\circ$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

の解析的性質を深く用いる．例えば 第1章 *Proposition* 3.2が今は成立っているので，Maruyama [61]，*Theorem* 4 が使用できる。

尚これらに関しても，

(a) $e_D(x)$ に対応する *Riesz measure* $\mu(dx)$ としてどんなものが有り得るか？

(b) A に対応するとか言うような特殊な *hitting measure* の *system* でなく，*diffusion* というだけの制限で出て来るような広いクラスの *hitting measure* の *system* に対し問題1°又は2°はどうなるか？

というようなことは未解決のものとして残っている．(a) は *Brownian hitting* の時すら未解決である。(H.P. McKean and H. Tanaka [24] 参照。)

尚この [6°] で扱った $\mathcal{G}$ に対応する *diffusion* について第2章より第5章までの問題を考えるには 先づ A に対し第2章から5章までのいずれかで *diffusion* を構成しておき，次に原理的に言って上にのべたような方法で *random time change* が有効である．その時は一般に *generator* の *domain* の函数がなめらかでなくなるので，境界条件等に明確な数学的定式化を与えようとすると解析的な多くの困難に直面する．(但し構成したものの Markov 性だけは元のものの強 Markov 性より証明できる。) そのような困難は未解決のものも多いのでこゝではこれ以上ふれないでこの注意のみにとゞめる。

[7°] *non strong Markov* になる例．

5章で境界での *path* の行動について直観的説明の際，境界のすぐ内部での行動と境界での行動にひどい相異がある時は強 Markov 性がこわれるとのべたが，それは次のような例で解る。

5章で用いた $\{\,x(t, w^{(1)}),\ 0 \leq t < +\infty\,\}$ として，境界で $G_\alpha f$ が不連続になる次のようなものを用いるとよい。$\{\,x^{(i)}(t, w),\ i = 1, 2 \cdots\}$

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

はいづれも 1 から出発しお互に独立で，*reflecting barrier* の *Bessel process* とする．$\{\tau^{(i)}(w);\ i=1,2,\cdots\}$ はそれ自身の間でも又 $\{r^{(i)}(t,w);\ i=1,2,\cdots\}$ ともお互に独立な指数分布をする *random variable* とする．そして $t_i(t,w)$ を $r^{(i)}(t,w)$ の 1 における *local time* とする．そのとき，

$$P\{\sigma_\infty^{(i)}(w) > t / \mathbb{B}_i\} = e^{-t_i(t,w)}$$

なる *random variable* の *sequence* $\{\sigma_\infty^{(i)}(w);\ i=1,2,\cdots\}$ を新たに定義する。こゝで $\mathbb{B}_i$ は $\{r_i(t,w),\ 0\le t<+\infty\}$ より定まる *Borel field*．そうして，先づ $0\le t<\tau^{(1)}(w)$ は $r(t,w^{(1)})=1$ で $\tau^{(1)}(w)\le t<\sigma_\infty^{(1)}(w)+\tau^{(1)}(w)$ の間は $r(t,w^{(1)})=r^{(1)}(t-\tau^{(1)}(w),w)$ とし，$\sigma_\infty^{(1)}(w)+\tau^{(1)}(w)\le t<\sigma_\infty^{(1)}(w)+\tau^{(1)}(w)+\tau^{(2)}(w)$ の間は $r(t,w^{(1)})=1$ とする。

以下順次同じようなことを繰返す。次に内部から出発したのは，第5章の $r(t,\widehat{w}^{(1)})$ について，それを反射壁としてとり，1 における *local time* を $t(t,\widehat{w})$ としたとき，

$$P(\sigma_\infty^{(0)}(w) > t / \widehat{\mathbb{B}}) = e^{-t(t,\widehat{w})}$$

なるようにしておき，$\sigma_\infty^{(0)}(w)$ の后に始めて境界から出発したのと同じ行動をするとしておく。そうするとこれは *path continuous* な $(0,1)$ 上の Markov 過程の1つの *version* を定義する。これを第5章の $r(t,w^{(1)})$ のかわりに用いると，境界 ∂D から出発した場合を考えると，$\sigma_\infty^{(1)}(w)$ までは境界の上のみを動いていて

$\tau_\infty^{(1)}(w)\le t<\sigma_\infty^{(1)}(w)+\tau^{(1)}(w)$ の間は反射壁の $r(t,w^{(1)})$ のと同じ行動をしているが更に $\sigma_\infty^{(1)}(w)+\tau^{(1)}(w)$ を過ぎるとまた境界の上のみを動く。

これは明らかに第5章で構成したものより境界とそのすぐ内部での行動の差が大きい。この時は $G_\alpha f,\ f\in\mathbb{C}(\overline{D})$，さすら ∂D の近傍で不連続になる。これを強 Markov 性をみたすものと考えるには D.Ray [64] にある方法で *state* の組かえをする必要がある。それを実行すると ∂D は2枚のものがはり併わされていると考え，1枚

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

は内部からの極限として理解することになる。

D. Ray [64] の方法による state の組かえをした時に内部からの極限の点と考えられるような境界のみを考えておけば，後は原理的に言ってこゝでのべたような方法で組合せればよいだろうと思われるので，結果としてこゝにのべたような non-strong Markov のときは当面の考察対象とする必要がないことが解る。（これについては マルコフ過程について [42] を参照）。

[8°] singular case について。

singurar case としては色々なものがある。例えば

(1) ∂D がなめらかでないとき，

(2) A が ∂D まで degenerate しないという仮定がこわれたとき，

(3) (1) と (2) の両方 等々.

これらだけをみても先づ境界がどうなるかということから一般には考えなくてはならない。[4°] でものべたようにこのとき例えば Martin 境界という考え方があるが，Brownian hitting が countable state の場合を除いてまだ系統的理論は作られていない。（このシリーズの渡辺毅 [36] を参照。但し generator が特殊な微分作用素であるときは基本解の性質を用いて或る程度その構成の可能性が言える）。

又境界が構成できても A が degenerate していると，境界点の分類という問題がおきてまた困難がおこる。例えば単位円板内で

$$A = \frac{1}{m(r,\theta)} \triangle$$

で $m(r,\theta)$ が $r \uparrow 1$ の時発散する場合ですら問題は容易でない。但し $m(r,\theta) = m(r)$ であると問題が本質的に一次元 diffusion の問題に帰着され話は簡単になる。非常に荒っぽく言えば Hasiminsky [19] の取扱いの一部はこのような方向のものである。$m(r,\theta) = m(r)$ の時は $\lim_{r\uparrow 1} m(r) = +\infty$ でも一次元の時と同

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

然やはりその発散の order がおそい時はやはり第5章のようにして，反射壁のものが構成できることもある。

いづれにしろこのような singular の中では簡単なものすらまだ系統的には処理されておらず，ほとんど結果はない。

このような singular な場合も含めて，確率論の立場からみるとより興味があると思われる多くの問題が未解決のまゝであり，序文にものべた通りわれわれは“多次元拡散過程の境界問題”という表題にもかゝわらずその問題点より1つかえつを取り出して論じたに過ぎないことを最后にのべておきたい。

このプリントの作成に当り校正などで大変盡力して下さった，青木一芳，石井恵一，志村利雄，竹内順治，鶴見茂，長沢正雄，長谷川実，藤井光昭，本尾実，米倉由身子，渡辺寿夫など，東京の確率論のセミナーの方々に，深く感謝する。

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

文　　献

[1] J. L. Doob, Stochastic processes, New York-London (1953).

[2] F. G. Dressel, The fundamental solution of the parabolic equation, I, Duke Math, J., 7 (1940) 186-203; II, 13, (1946), 61-70.

[3] G. F. D. Duff, Partial differential equations, Toronto, 1956.

[4] W. Feller, Zur Theorie der stochastischen Prozesse, Math. Ann., 113 (1936), 113-160.

[5] W. Feller, The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, Ann, Math., 55 (1952), 468-519.

[6] W. Feller, Boundaries induced by non-negative matrices. Trans, Amer. Math, Soc., 83 (1956), 19-54.

[7] W. Feller, On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations, Ann. Math., 65 (1957), 527-570.

[8] I. V. Girsanov, Strong Feller processes, I, Theory of Prob. and its Appl., 5 (1960), 7-28 (ロシア語).

[9] R. Z. Hasminskey, Diffusion processes and elliptic equations degenerating at the boundary of the region, Theory of Prob. and its Appl., 3 (1958), 430-451 (ロシア語)

[10] E. Hille and R. S. Phillips, Functional analysis and semi-groups, Amer. Math, Soc. Coll. Pull. 31 (1957).

[11] G. A. Hunt, Semi-groups of measures on Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., 81 (1956), 264-293.

[12] N. Ikeda, On two dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions (準備中).

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

[13] 伊藤 清, 確率論 (1953).

[14] 伊藤 清, 確率過程, 岩波応用数学講座 (1957).

[15] 伊藤 清, 渡辺信三, 福島正俊, 拡散過程, Seminar on Probability, 3 (1960)

[16] K. Ito and H.P. Mckean, Diffusion, to appear.

[17] S. Ito, The fundamental solution of the parabolic equation in a differentiable manifold, I, Osaka Math. J., 5 (1953), 75-92; II, 6 (1954), 167-185.

[18] S, Ito, A boundary value problem of partial differential equations of parabolic type, Duke Math. J. 24 (1957), 299-312.

[19] S, Ito, Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems, Jap. J. Math., 27 (1957), 55-102.

[20] S. Ito, A remark on my paper "A boundary value problem of partial differential equations of parabolic type" in Duke Math, J., Proc, Japan Acad., 34 (1958), 463-465.

[21] 伊藤清三, 拡散方程式, 数学 10巻 4号 (1959), 219-227.

[22] R. S. Martin, Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 49 (1941) 137-172.

[23] 丸山儀四郎, 十時東生, 確率過程の収束に関する位相解析的方法, Seminar on Probability, 4 (1960).

[24] H. P. Mckean and H. Tanaka, (準備中).

[25] M. Motoo, Diffusion process corresponding to $\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}+\sum b^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, Ann. of the Institute of Statistical Math., 12 (1960-61), 37-61.

[26] M. Motoo, Some properties of process correspondding to $\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}+\sum b^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, to appear.

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

[27] E. Nelson, An existence theorem for second order parabolic equations, Trans, Amer, Math. Soc. 88 (1958), 414-429.

[28] O. A. Oleinik, On properties of the solutions of some boundary value problems for elliptic equations, Mat. Sbornik, 30 (1952), 695-702 (ロシア語).

[29] K. Sato, Integration of the generalized Kolmogorov-Feller backward equations, J. Fac. Sci, Univ. Tokyo, to appear.

[30] K. Sato, Local times on the boundary for multi-dimensional diffusion (準備中).

[31] K. Sato and T. Ueno, Multi-dimensional diffusion and Markov process on the boundary (準備中).

[32] 高木貞治, 解析概論 (1943).

[33] T. Ueno, The Brownian motion satisfying Wentzell's boundary condition, Bulletin of the International Statistical Institute, to appear.

[34] T. Ueno, The diffusion satisfying Wentzell's boundary condition and the Makov process on the boundary, I, Proc. Japan Acad. 36 (1960), 533-538 ; II, to appear.

[35] M. I. Višik, Doklady Acad. Nauk, 82 (1952), No. 2.

[36] 渡辺 毅, 可附番空間の上の Markov 過程から導かれる Martin 境界とその応用, Seminar on Probability, 1 (1959).

[37] A. D. Wentzell, On lateral conditions for multi-dimensional diffusion processes, Theory of Prob. and its Appl. 4 (1959), 172-185 (ロシア語).

[38] K. Yosida, On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators, J. Math, Soc. Japan, 1 (1948), 15-21.

[39] 吉田耕作, 位相解析 I (1951).

[40] 吉田耕作, 位相解析, 岩波応用数学講座 (1957).

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

[41] 吉田耕作, 発展方程式に関連して, 数学 10巻 4号 (1959), 205-211.

[42] マルコフ過程について, 確率論シンポジウム講演アブストラクト, 1959年5月, 日本数学会.

[43] S. Bernstein, Equations differentielles stochastiques, Act. Sci. et Ind., 738 (1938).

[44] L. Bers, Theory of pseudo-analytic functions, Mimeographed lecture notes, New-York Univ. (1953).

[45] L. Bers, Function theoretical properties of solutions of partial differential equations of elliptic type, Ann. Math. Stud. No. 33 (1954), 69-94.

[46] J. L. Doob, Semi-martingales and subharmonic functions, Trans. Amer. Math, Soc. 77 (1954), 86-121.

[47] J. L. Doob, Probability methods applied to the first boundary value problem, Proc. 3rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, II. (1956), 49-80.

[48] E. B. Dynkin, Infinitesimal operators of Markov processes, Theory of prob. and its Appl. 1 (1956), 38-59.

[49] E. B. Dynkin, One-dimensional continuous strong Markov processes, Theory of Prob. and its Appl. 4 (1959). 3-54.

[50] E. B. Dynkin, Natural topology and excessive functions connected to Markov process, Doklady Akad. Nauk, 127 (1959), 17-19.

[51] W. Feller, The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one-dimension, Ann. Math., 60 (1954), 417-436.

[52] W. Feller, On second order differential operators,

Ann. Math. 61 (1955), 90-105.

[53] W. Feller, On the intrinsic form for second order differential operators, Illinois J. Math. 2 (1958), 1-18.

[54] G. A. Hunt, Markoff processes and potentials, I, Illinois J. Math. 1 (1957) 44-93.

[55] K. Ito, Stochastic differential equations in a differentiable manifold, Nagoya Math. J. 1 (1950), 35-47.

[56] K. Ito, On stochastic differential equations, Memoirs of the Amer. Math. Soc. 4 (1951).

[57] K. Ito, Stochastic processes, Tata Institute Note, to appear.

[58] A. N. Kolmogorov, Über die analytische Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., 104 (1931), 415-458.

[59] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris (1937).

[60] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Paris (1948).

[61] G. Maruyama, On the strong Markov property, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 13 (1959), 17-29.

[62] G. Maruyama and H. Tanaka, Some properties of one-dimensional diffusion processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 11 (1957), 117-141.

[63] D. Ray, Stationary Markov processes with continuous paths, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), 452-493.

[64] D. Ray, Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes, Ann. Math, 70 (1959), 43-78.

[65] F. Spitzer, Some theorems concerning two-diversional Brownian motions, Trans, Amer. Math. Soc. 87 (1958), 187-197.

[66] H. F. Trotter, On the product of semi-group of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 10, 545-551.

[67] M. I. Višik and O. A. Ladyženskaya, Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of operator equations, Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, Vol. 10, 223-281.

[68] V. A. Volkonskі, Random substitution of time in strong Markov processes, Theory of Prob. and its Appl., 3 (1958), 332-350.

[69] V. A. Volkonski, Additive functionals of Markov processes, Doklady Akad. Nauk, 127 (1959), 735-738.

[70] V. A. Volkonski, Additive functionals of Markov processes, Trudy Moskov. Mat. Obš., 9 (1960).

[71] T. Watanabe, Some general properties of Markov processes, J. Inst. Polytech., Osaka City Univ., 10 (1959), 9-29.

Sem. on Probab.
Vol.6 1961年
P1-131

1961年1月発行　　　　確率論セミナー