Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

SEMINAR ON PROBABILITY

vol. 2

白尾 恒吉 ; 確率論における強法則の精密化の一般論

1 9 6 0

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

題：確率論における強法則の精密化の一般論

白尾 恒吉

目 次

§1 準 備 1

§2 Chung-Erdösの定理とその簡単な応用 8

§3 Chung-Erdös の定理のBrown運動への応用 25

参考文献 40

前書き

確率論に於て取扱われる収斂の概念としては，法則収斂，確率収斂，平均収斂，概収斂等がある。例えば有名な中心極限定理（確率変数系 $\{X_k ; k=1,2,\cdots\}$ に対し，$S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ とおき，S_n の平均値を m_n，分散を s_n^2 で表せば，適当な条件のもとで $(S_n-m_n)/s_n$ の従う分布が $n\to+\infty$ の時正規分布に近づく）は法則収斂に関して述べられたものである．また *Bernoulli* 型の大数の法則（適当な条件のもとで，$|S_n-m_n|/n$ が $\varepsilon(>0)$ より大きい確率は，$n\to+\infty$ の時 0 に収斂する）は確率収斂，大数の強法則（適当な条件があれば $(S_n-m_n)/n$ は $n\to+\infty$ の時確率 1 で 0 に収斂する）は概収斂に関して述べられたものである．平均収斂は"ノルム"の意味での収斂であって解析学で普通に使われているのと同意義である．そしてよく知られている様に次の関係が成立つ．

$$
\begin{tikzcd}
\text{平均収斂} \arrow[dr] & & \\
& \text{確率収斂} \arrow[r] & \text{法則収斂} \\
\text{概収斂} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

…く法則収斂の話よりも概収斂で結論を出すことは遥かに深い意味を持ち，同時に内容もむずかしくなるのは仕方がない．

さて本号で取扱う“強法則”とは概収斂に関する法則のことであるが，この種の問題を取扱うのに，従来使われたのは，§1で述べられている *Borel-Cantelli* の定理である．この定理は非常に簡単であり，結論も明確であって使いよく，いろいろの場合に非常に効果的であった．然し乍ら，定理の後半の部分で，取扱う事象系の独立性を仮定している為，独立事象以外のことを取扱う場合には半分しかその機能を発揮出来ない欠点があった．その為，従来強法則を取扱う場合には，個々の問題に応じて工夫を凝らし，*Borel-Cantelli* の定理が使える様な形に変形してから証明する方法が多く採用された．然し，このことは方法に統一性を欠くことになり，また理論そのものを非常に複雑化した．例えば，整数論に源を発し，確率論の立場からも，多くの人々に依って研究された重複対数の法則は，結論は *A. Kolmogorov* の定理として有名であり，その証明も *W. Feller* によって相当弛い条件のもとで与えられたのであるが，その証明の複雑さは相当興味を持っている人以外には途中で投げ出したくなる位である．そして重複対数の法則と結論的には類似の結果が得られると予想されていた *Brown* 運動の一様連続性に関する *final form* の問題は，重複対数の場合より更に多くの事象を取扱う関係上，*Borel-Cantelli* の定理が使える様に変形することが難かしく未解決の儘残されて来た．この *Brown* 運動に関する問題は多くの人々に依り，興味を持たれた問題であったが，*Borel-Cantelli* の定理の代りに *K.L. Chung* と *P. Erdös* に依って与えられた *Chung-Erdös* の定理（§2で述べられている）を使う事によって最近解決された（参考文献［ ］）。そしてこの *Chung-Erdös* の定理は強法則を論ずる場合には相当有力な手段であり（勿論未だ応用上不便な点は残っているが問題の性質上大巾な改良は困難かと思われる）重複対数の法則の証明を始め，種々の強法則の証明に応用出来るのみならず，従来余り開拓されていなかった従属確率変数系の収斂等にも使える場合が相当にある．本号は，*Chung-Erdös* の定理とその応用法を紹介し，強法則の精密化が，種々の場合に統一的に取り扱い得ることを示すのを目的としている．

§1は，全くの準備の為のものであって，大数の強法則，*arc sine law* 等を述べてある．§2では，*Chung-Erdös* の定理を述べ，その応用例として *Arc sine law* に対応する強法則を述べた．また，大数の強法則の精密化として，重複対数の法則を例にとり証明したが，こゝで取扱った重複対数の法則は余り弛い条件のもとでは述べてない．それは応用法を示すことを目的としたからであって，証明中に使用した *H. Cramér* の結果を一般化し，かつ精密化しておけばもっと弛い条件のもとで同様の結論を得ることは容易に想像がつく．このことは，中心極限定理の結果である正規分布への収斂のスピードが問題になることを意味するが，これは結論の形から考えても当然のことである（事実 *W. Feller* は *Kolmogorov* の定理の証明に際し，条件を弛めるためこの点を考慮している。然しこれを準備することは，相当に面倒な計算を必要とし，重複対数の法則に関する *final form* の証明の複雑化に一役買うことになる．*Felker : Generaligation of a probability limit*

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

theorem of Cramér. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 54, 1943)。
§3では，Chung-Erdös の定理を Brown 運動に応用して得られる結果を述べた。ここでは述べなかったが，証明の一部を変更すれば P. Lévy に依って導入された parameter 多次元の Brown 運動の場合にも定理3.3.及び定理3.4.に類似の結果が得られることがわかっている（T. Sirao; On the continuity of Brownian motion with a multidimensional parameter. Nagoya Math. Jour.，近日中に出る予定）。

結論として，従来の Borel-Cantelli の定理の後半に替るものとして Chung-Erdös の定理を使えば，従来の強法則の諸問題を統一的に論じ得るのみならず，相当多くの場合に新しい事実を導き出し得るであろう。そしてこのことは取扱われる確率変数の分布が近似的にでも計算出来る場合には更に容易になると思われる。

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

§1. 準　備

$\mathbb{W}$を任意の空間とし，$\mathbb{B}$をその上の完全加法族とする。$A\in\mathbb{B}$に対して定義された集合函数$P(A)$が次の三条件を満す時Pは$\mathbb{W}(\mathbb{B})$の上の確率分布と呼ばれる：

(1)　$0\leqq P(A)\leqq 1$,

(2)　$A=\sum_n A_n$（有限又は可附番無限直和）$\Rightarrow P(A)=\sum_n P(A_n)$,

(3)　$P(\mathbb{W})=1$.

$\mathbb{W}$, $\mathbb{B}$, Pを一まとめにして考える時に確率空間$\mathbb{W}(\mathbb{B}, P)$という．特に$\mathbb{W}=R^n$, $\mathbb{B}=\mathbb{B}^n$（R^nの中のBorel集合族）の時Pをn次元分布という．今後我々は一つの確率空間$\mathbb{W}=\mathbb{W}(\mathbb{B}, P)$を基礎において考える。

$\mathbb{W}$の上を動く変数ωのことを*probability parameter*という．

ωに関する条件$\alpha=\alpha(\omega)$を$\mathbb{W}(P)$の上の"事象"といい，$\alpha(\omega)$が成立つことを"事象αが起る"という．事象αに対し$A=\{\omega;\alpha(\omega)\}$とおくとき$A\in\mathbb{B}$ならば$\alpha$を"可測事象"という。可測事象$\alpha$に対して"$\alpha$の起る確率"を

(4)　$P(\alpha)=P(\{\omega\,;\alpha(\omega)\})$

で定義する．今後我々は可測事象のみを考えることにし，可測事象のことを単に事象ということにする。また事象αと$A=\{\omega;\alpha(\omega)\}$との対応は一対一であるから，混乱の懸念が無い限り，Aのことも事象と呼ぶことがある．

$\mathbb{W}$の上で定義された実数値可測函数を"確率変数"という。n箇の確率変数$X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $\cdots$, $X_n(\omega)$とならべて作ったベクトル函数値$X(\omega)=\langle X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)\rangle$を"確率ベクトル"又は"$n$次元確率変数"といい，各$X_i(\omega)$を$X(\omega)$の"$i$成分"という．

確率ベクトル$X(\omega)=\langle X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)\rangle$と$P$を使って$E\in\mathbb{B}^n$に対し

$$\Phi(E)=P(\{\omega\,;X(\omega)\in E\})=P(X(\omega)\in E)$$

で集合函数Φを定義すればΦはn次元分布になる．また$x=\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$の時

(5)　$\Phi(x)=P(X_1(\omega)\leqq x_1, \ \cdots, X_n(\omega)\leqq x_n)$

で定義した$\Phi(x)$をXの分布函数と呼び，Xは分布函数Φに従うという（この定義は$n=1$の時にもその侭使う）。

有限個の事象の系：

$$\alpha_i,\quad i=1, 2, \cdots, n\ （又は A_i,\ i=1, 2, \cdots, n）$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

が"独立"であるとは，任意の部分列 $\{i_1, \cdots, i_s\ ;\ 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots i_s \leqq n\}$ に対して

(6) $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_s}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_s})$

と定義する．無限事象系が独立であるとはその任意の有限部分系が独立である時，もとの事象系が独立であると定義する．但し A，B が事象を表わす時 $A \cap B$ は"A と B が同時に起る"ことを表わす．同様に $A \cup B$ は"A 又は B が起ること"，A^c は"A が起らないこと"を表わす．

次に $X_i = X_i(\omega)$，$i = 1, 2, \cdots, n$ を夫々 k_i 次元の確率ベクトルとする時，任意の $E_i \in \mathcal{B}^{k_i}$ に対して

(7) $P(X_1 \in E_1, \cdots, X_n \in E_n) = P(X_1 \in E_1) P(X_2 \in E_2) \cdots P(X_n \in E_n)$

が成り立つ時，X_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) は"独立"であるという．無限個の確率ベクトルの系が"独立"であるとは，その任意の有限部分系が独立であることで定義する．

確率変数 $X(\omega)$ の積分：

(8) $$\int_W X(\omega)\, dP(\omega)$$

が存在する時，これを $E(X)$ で表わし X の平均値という。また

(9) $$\int_W (X(\omega) - E(X))^2\, dP(\omega)$$

が存在する時，$V(X)$ で表し X の分散という。確率ベクトル $X(\omega) = \langle X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega) \rangle$ に対しては

(10) $E(X) = \langle E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n) \rangle$

を平均値ベクトルといい，(i, j) 成分が

(11) $$E(X_i X_j) = \int_W X_i(\omega) X_j(\omega)\, dP(\omega)$$

で定義される行列を分散行列という．

以上で用語の説明を終る．

さて *Borel - Cantelli* の定理から話を進めよう。

<u>定理 *1.1*</u>　(*Borel - Cantelli*)

(A) 事象系 $\{A_n\}$ が独立であってもなくても

(12) $\sum P(A_n) < +\infty \Longrightarrow P(\overline{\lim}\ A_n) = 0,\ P(\underline{\lim}\ A_n^c) = 1$

(B) 事象系 $\{A_n\}$ が独立ならば

(13) $\sum P(A_n) = +\infty \Longrightarrow P(\overline{\lim}\ A_n) = 1,\ \ P(\underline{\lim}\ A_n^c) = 0$

即ち言葉で云えば，(A) の場には事象 A_n が"無限回起る確率"は 0 であ

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

1)，(B)の場合には事象 A_n が"無限回起る確率"が 1 である。

<u>証明</u>：

(A) $P(\overline{\lim} A_n) = \lim_{k\to\infty} P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) \leqq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) = 0$ ((12)の仮定から)，

$P(\underline{\lim} A_n^c) = P((\overline{\lim} A_n)^c) = 1 - P(\overline{\lim} A_n) = 1$

(B) $\{A_n\}$ は独立であるから

$$P(\underline{\lim} A_n^c) = \lim_{k\to\infty} P(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c) = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=k}^{\infty} (1 - P(A_n)) = 0 \text{ ((12)の仮定から)},$$

$$P(\overline{\lim} A_n) = P((\underline{\lim} A_n)^c) = 1 - P(\underline{\lim} A_n^c) = 1.$$

この定理の(A)の部分は(12)の仮定のみから結論が出るので応用上非常に便利であるが，(B)の部分は(13)の仮定以外に事象系 $\{A_n\}$ の独立性を仮定している。そこで(B)を使って何かを証明する場合，本来考えていた事象系 $\{A_n\}$ が独立でない場合には，$\{A_n\}$ に類似の独立事象系 $\{B_n\}$ を作り，これに(B)を適用する必要がある。然しこの様な $\{B_n\}$ は簡単には見つからないことが屢々あるので，独立性の条件を弛めることが出来れば(B)の応用上非常に便利になる（無条件にすれば定理が成立たないことは例えば $A_n = A$, $n = 1, 2, \cdots$, $1 > P(A) > 0$ なる $\{A_n\}$ を考えれば明かである）。この点を相当程度解決したのが§2で述べる Chung - Erdös の定理である。

次に定理1.1を使って Kolmogorov の"大数の強法則"を証明する。

<u>Lemma 1.1</u>　（Kolmogorov の不等式）　独立確率変数系 $\{X_k ; k = 1, 2, \cdots, n\}$ が

(14)　$E(X_k) = 0$, $V(X_k) < +\infty$, $k = 1, 2, \cdots, n$

なる性質を持てば，$c > 0$ に対し

(15)　$$P(\max_{1\leqq k\leqq n} |X_1 + X_2 + \cdots + X_k| \geqq c) \leqq \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

<u>証明</u>：今

$$S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

とおき，確率変数 $\sigma(\omega)$ を

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} \min\{k ; |S_k| \geqq c\} ; & \max_{1\leqq k\leqq n} |S_k| \geqq c \text{ の時} \\ n+1 & \quad \text{〃} \quad < c \text{ の時} \end{cases}$$

で定義すれば，証明すべき式は

(16)　$$c^2 P(\sigma(\omega) \leqq n) \leqq \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

である。(14)と $\{X_k\}$ の独立性から

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

$$(17)\quad E(S_n^2) = E\left(\sum_{k,l=1}^{n} X_k X_l\right) = \sum_{k,l} E(X_k X_l) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) = \sum_1^n V(X_k)$$

が導かれる。一方

$$(18)\quad E(S_n^2) \geqq \sum_{k=1}^{n} E(S_n^2\,;\,\sigma=k),\ 但し\ E(S_n^2\,;\,\sigma=k) = \int_{\{\omega\,;\,\sigma(\omega)=k\}} S_n^2(\omega)\,dP(\omega)$$

であり，また再び $\{X_k\}$ の独立性から

$$\begin{aligned} E(S_n^2\,;\,\sigma=k) &= E\{(S_n-S_k+S_k)^2\,;\,\sigma=k\} = E\{(S_n-S_k)^2\,;\,\sigma=k\} \\ &\quad + 2E\{S_k(S_n-S_k)\,;\,\sigma=k\} + E\{S_k^2\,;\,\sigma=k\} \\ (19)\qquad &= E\{(S_n-S_k)^2\,;\,\sigma=k\} + E(S_k^2\,;\,\sigma=k) \\ &\geqq E(S_k^2\,;\,\sigma=k) \geqq c^2 P(\sigma=k) \end{aligned}$$

が成立つ。(17)，(18)，(19)から容易に

$$\sum_{k=1}^{n} V(X_k) \geqq c^2 \sum_{k=1}^{n} P(\sigma=k) = c^2 P(\sigma \leqq n)$$

を得るから *Lemma* が証明された。

<u>定理 1.2</u>　(*Kolmogorov* の大数の強法則)　独立確率変数系 $\{X_k; k=1,2,\cdots\}$が

$$(20)\quad E(X_k) = m_k\ は有限,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V(X_k)}{k^2} < +\infty$$

ならば

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m_k) = 0\right) = 1.$$

<u>証明</u>：$X_k - m_k$ を改めて X_k と考えることにより，最初から $m_k = 0\ (k=1,2,\cdots)$ と仮定して差支えない。

$$S_n = \sum_1^n X_k$$

とおく。さて，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$(21)\quad P\left(\overline{\lim_n} \frac{|S_n|}{n} > \varepsilon\right) = 0$$

が云えれば定理は証明されたことになる。*Lemma* 1.1 によれば

$$P\left(\max_{2^n < k \leqq 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}| > 2^{n-1}\varepsilon\right) \leqq \frac{1}{2^{2(n-1)}\varepsilon^2} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} V(X_k) \leqq \frac{2^4}{\varepsilon^2} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{V(X_k)}{k^2},$$

$$n = 1, 2, \cdots\cdots.$$

最後の項を $n = 1, 2, \cdots\cdots$ に対して加えたものは仮定から収斂する。従って定理 1.1，(A)により

$\widetilde{\forall}\omega$ に対して $n_0(\omega)$ が存在し，$n \geqq n_0(\omega) \Longrightarrow \max_{2^n < k \leqq 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}| \leqq 2^{n-1}\varepsilon$

従って $n \geqq n_0(\omega)$ の時

$$2^n < k \leqq 2^{n+1} \Longrightarrow |S_k - S_{2^{n_0}}| \leqq \varepsilon(2^{n_0} + 2^{n_0+1} + \cdots + 2^{n-1}) < 2^n \cdot \varepsilon .$$

即ち

$$\widehat{\forall}\omega \text{に対し} \quad \varlimsup_n \frac{|S_n|}{n} \leq \varlimsup_n \left\{ \frac{|S_{2^{n_0}}|}{2^n} + \varepsilon \right\} = \varepsilon .$$

となる．これは(20)に他ならない。[1)]

定理1.2の様に“殆んどすべてのω”について成立つ法則を我々は強法則と呼ぶ。以下に述べることは強法則ではないが証明の一部が後述の部分で使われることゝ，その内容が後述の同じ部分に関係があるので述べておく。

$\{X_k; k = 1, 2, \cdots\}$と独立確率変数系で

(22) $\quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$

とする．例によって

$$S_n = \sum_1^n X_k$$

とおき，S_1, S_2, $\cdots$ 中始めて0になるものがS_nである確率をp_n，即ち

(23) $\quad p_n = P(S_1 \neq 0,\ S_2 \neq 0, \cdots, S_{n-1} \neq 0,\ S_n = 0)$

とし，S_nが0である確率をq_n，即ち

(24) $\quad q_n = P(S_n = 0)$

とする．明らかに

$$p_{2n+1} = q_{2n+1} = 0 \qquad ; \quad n = 1, 2, \cdots$$

であり，また

(25) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} = 1, \qquad q_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$

である．更にp_n，q_nの定義から，便宜的に$p_0 = 0$, $q_0 = 1$とおくと，

(26) $\quad q_n = p_n q_0 + p_{n-1} q_1 + p_{n-2} q_2 + \cdots + p_1 q_{n-1} + p_0 q_n \qquad ; \quad n = 1, 2, \cdots$

が成立つ。右辺が$\{p_n\}$，$\{q_n\}$の convolution なることに注目すれば，$\{p_n\}$，$\{q_n\}$の generating function

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n , \qquad Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n$$

を考えれば，$P(s)$，$Q(s)$の間に

(27) $\quad Q(s) - 1 = Q(s) P(s)$

或いは

(28) $\quad P(s) = 1 - \dfrac{1}{Q(s)}$

---

1) 記号$\widehat{\forall}\omega$は“殆んどすべてのω”を表わす。

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

なる関係が成立つことがわかる（(27)左辺の -1 は(26)式が $n=0$ に対しては成り立たないことから出る）。しかるに(25)によれば

$$Q(S)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}2^{-2n}S^{2n}=(1-S^2)^{-\frac{1}{2}}$$

である。(28)に代入すれば

(29) $\quad P(S)=1-(1-S)^{\frac{1}{2}}$

となり，右辺の展開式における S^{2n} の係数が p_{2n} であるから

(30) $\quad p_{2n}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}2^{-2n+1}$

である。

次に $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 中正なるものゝ数及び負なるものゝ数を夫々 N_n^+, N_n^- で表わす。便宜上 "$S_k>0$" 又は "$S_k=0$ 且つ $S_{k-1}>0$" の何れかゞ成立つ場合に "S_k は正である" と呼ぶことにする。

"$S_k=0$ 且つ $S_{k-1}<0$" の時 "S_k は負である" と呼ぶことにすれば，

$$P(N_n^+ + N_n^- = n)=1$$

であり，明かに N_n^+ と N_n^- は同じ分布に従う。今

$$f_{m,2n}=P(N_{2n}^+=m)$$

とおくと

(31) $\quad f_{2r+1,\,2n}=0$

である。$f_{2r,2n}$ を求めてみよう。

最初に $0<r<n$ の場合を考える。$N_{2n}^+=2r$ が起り得る場合を考えると i) $X_1=1$ であり $\{S_i\,;\,1\leqq i\leqq n\}$ 中始めて0になる番号が $2k$ で，残り $(2n-2k)$ ヶの S_i の中，丁度 $(2r-2k)$ 個が正である場合，ii) $X_1=-1$ で $\{S_i\,;\,1\leqq i\leqq n\}$ 中始めて0になる番号が $2k$ で，残りの中丁度 $2r$ 個が正である場合の二通りが考えられるから(23)で定義した p_n を使えば

(32) $\quad f_{2r,2n}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}p_{2k}\,f_{2r,2n-2k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}p_{2k}\,f_{2r,2n-2k}$ 但し，$j>n\Rightarrow f_{2j,2n}=0$

$r=0$ 又は n のときを考えれば，$f_{0,2n}, f_{2n,2n}$ は共に $\{S_i\}$ 中始めて0になる番号が $2(n+1)$ より先である確率の $\frac{1}{2}$ になる。即ち

(33) $\quad f_{0,2n}=f_{2n,2n}=\frac{1}{2}\left(p_{2n+2}+p_{2n+4}+p_{2n+6}+\cdots\right)$.

である。

(34) $\quad F_{2n}(S)=\sum_{r=0}^{n}f_{2r,\,2n}S^{2r}$

とおけば(32)，(33)を使って

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

(35) $F_{2n}(s)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_{2k}F_{2n-2k}(s)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}p_{2k}s^{2k}F_{2n-2k}(s)+f_{0,2n}+f_{2n,2n}s^{2n}$

を得る。更に

$$F(s,t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_{2n}(s)t^{2n}$$

とおくと，(35)の形から $\{p_n\}$ の generating function $P(s)$ を使って

(36) $F(s,t)=\frac{1}{2}P(t)F(s,t)+\frac{1}{2}P(st)F(s,t)+\sum_{n=0}^{\infty}(1+s^{2n})(f_{0,2n}+f_{2n,2n})t^{2n}$

を得る。最後の項を計算すれば(33)を使って

(37) $\sum_{n=0}^{\infty}f_{0,2n}t^{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}p_{2k}\right)t^{2n}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{k-1}p_{2k}t^{2n}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}p_{2k}\frac{1-t^{2k}}{1-t^2}=\frac{1-P(t)}{2(1-t^2)}.$$

従って(29),(33),(36),(37)の式から

$$2F(s,t)=\{2-(1-t^2)^{\frac{1}{2}}-(1-s^2t^2)^{\frac{1}{2}}\}F(s,t)+(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}+(1-s^2t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

即ち

$$F(s,t)=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-s^2t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

を得る。$F(s,t)$ の定義に戻って考えれば $F(s,t)$ の展開式に於ける $s^{2r}t^{2n}$ の係数が $f_{2r,2n}$ であるから

(38) $f_{2r,2n}=\binom{-\frac{1}{2}}{r}\binom{-\frac{1}{2}}{n-r}(-1)^n=\binom{2r}{r}\binom{2(n-r)}{n-r}2^{-2n}$

Stirling の公式を使えば，$r\to\infty$, $n-r\to\infty$ の時

(39) $f_{2r,2n}\sim\frac{1}{\pi\sqrt{r(n-r)}}$.

を得る。これを使うと次の定理が証明される。

<u>定理 1.3</u> (Arc sine law)

$$\lim_{n\to\infty}P(N_n^+\leqq nt)=\frac{2}{\pi}\sin^{-1}t^{\frac{1}{2}}$$

<u>証明</u>: N_n^+ の定義から

(40) $f_{2r+1,2n}=0$

従って

(41) $f_{2r,2n+1}+f_{2r+1,2n+1}=P(N_{2n}^+=2r, S_{2n}=0, S_{2n+1}<0)+P(N_{2n}^+=2r, S_{2n}<0)$

$$+P(N_{2n}^+=2r, S_{2n}=0, S_{2n+1}>0)+P(N_{2n}^+=2r, S_{2n}>0)$$

$$=P(N_{2n}^+=2r)=f_{2r,2n}$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

なることに注意すれば，(39)により $0<s<t<1$ なる s, t に対し

$$\lim_{n\to\infty} P\left(s<\frac{N_n^t}{n}\leqq t\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{s<\frac{r}{n}\leqq t}\frac{1}{\pi\sqrt{\frac{r}{n}\left(1-\frac{r}{n}\right)}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_s^t\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{2}{\pi}\left(\sin^{-1}t-\sin^{-1}s\right)$$

$s=0$ の時は(39)は成立たないが上式から

$$(42)\qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n^+}{n}\leqq t\right)=\frac{2}{\pi}\sin^{-1}t+C$$

が出る．然るに N_n^+ と N_n^- が同じ分布に従うこと及び $P(N_n^++N_n^-=n)=1$ を使えば

$$P\left(\frac{N_n^+}{n}\leqq\frac{1}{2}\right)=P\left(1-\frac{N_n^-}{n}\leqq\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{N_n^-}{n}>\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{N_n^+}{n}>\frac{1}{2}\right)$$

両端を見れば明かに

$$P\left(\frac{N_n^+}{n}\leqq\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

これを(42)に代入すれば $C=0$ を得る．即ち定理が証明された。

§2 Chung-Erdös の定理とその簡単な応用

前述の大数の強法則に依れば独立確率変数系 $\{X_n; n=1,2,\cdots\}$ が(19)を満せば

$$\tilde{\forall}\omega \text{ に対し } \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_1^n(X_k-m_k)}{n}=0$$

になる．そこで分母の n の代りに $\varphi_n\ (<n)$ なる単調増大数列を考え

$$\tilde{\forall}\omega \text{ に対し } \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_1^n(X_k-m_k)}{\varphi_n}=1$$

が成立つ様に出来ないかということが問題になる。これが重複対数の理論であり，*A. Khintchine*，*A. Kolmogorov*，*P. Lévy*，*P. Erdös*，*W. Feller* 等々の人に依り論ぜられた。そして一応最終的な結果が得られたのであるがこの問題と殆ど *parallel* と考えられる *Brown* 運動の一様連続性については最近迄最終的な結果が得られなかった。それは従来この種の証明に於ては *Borel-Cantelli* の定理を使ったのであるが，同定理の(B)の部分で事象系の独立性を仮定して居り，*Feller* [7]，[8]に依る重複対数理論の最終結果の証明を見てもいろいろと工夫して(B)が使える様な形にもって来ているの

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

である。ところがBrown運動の一様連続性の場合には従来考えられた方法では，問題にされた事象系の相互の関連度合がFellerの場合に比較し強くなっている為，(B)が使える様なうまい形に持っていけなかったのである。そこで(B)の独立性の仮定をもっと弛めることが出来ないかということが問題になる。そしてこの点についてはE. Borel [1]が(B)に於て独立性が無くても

$$\sum_n P(A_n / A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c) = +\infty \quad (P(E/F)\text{は条件付確率を表す})$$

が成立てばよいことを注意して居り，P. Lévy 其の他の人々に依り非独立確率変数系を取扱う場合に使われた。その後 K. L. Chung と P. Erdös [2]が更に使いよい条件を考えたのが以下に述べる定理であり，これを使うと強法則の精密化を考える時に従来の方法より遙かに簡単になる場合が多い。

先ずLemmaから述べる。

Lemma 2.1　$\{F_k ; k=1,2,\cdots,n\}$を任意の事象系とする。このとき

(1) $$P\Big(\bigcup_{k=1}^n F_k\Big) > 0 \Rightarrow 2\sum_{1\le j<k\le n} P(F_j \cap F_k) \ge \Big[P\Big(\bigcup_{k=1}^n F_k\Big)\Big]^{-1}\Big(\sum_{k=1}^n P(F_k)\Big)^2 - \sum_{k=1}^n P(F_k)$$

が成立つ。

証明：確率変数$X_k(\omega)$を

$$X_k(\omega) = \begin{cases} 1 & F_k \text{ が成立する時} \\ 0 & \text{然らざる時} \end{cases}$$

に依って定義すると

(2) $$P(F_j \cap F_k) = E(X_j X_k), \quad P(F_k) = E(X_k) = E(X_k^2)$$

が成立つ。従って

(3) $$2\sum_{1\le j<k\le n} P(F_j \cap F_k) = E\{(X_1+X_2+\cdots+X_n)^2\} - E(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)$$

となる．またSchwartzの不等式を使えば

(4) $$[E(X_1+\cdots+X_n)]^2 \le P(X_1+X_2+\cdots+X_n>0)\,E\{(X_1+X_2+\cdots+X_n)^2\}$$
$$= P\Big(\bigcup_{k=1}^n F_k\Big) E\{(X_1+X_2+\cdots+X_n)^2\}$$

である。(2)から(4)の左辺は$\Big(\sum_{k=1}^n P(F_k)\Big)^2$に等しいから(2), (3), (4)を使って

$$\Big(\sum_{k=1}^n P(F_k)\Big)^2 \le P\Big(\bigcup_{k=1}^n F_k\Big)\Big\{2\sum_{1\le j<k\le n} P(F_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^n P(F_k)\Big\}$$

となり，(1) がいえた。

<u>定理2.1</u> （Chung-Erdös の定理） 事象系 $\{E_k, k=1,2,\cdots\}$ が次の三条件をみたすとする。

i) $\sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) = +\infty$

ii) 任意の自然数 h 及び n ($h \leqq n$) に対し，正数 $C(h)$ 及び $H(n,h)$ が定まり $k \geqq H(n,h)$ ならば不等式

$$P(E_k / E_h^c \cap E_{h+1}^c \cap \cdots \cap E_n^c) > C(h) P(E_k)$$

が成り立つ。

iii) 二つの constant c_1, c_2 を適当に選べば

α) 任意の j に対し $\{j_i ; i=1,2,\cdots,s(j)\}$ が定まり

$$\sum_{i=1}^{s(j)} P(E_j \cap E_{j_i}) < c_1 P(E_j)$$

β) $k>j$，かつ $k \neq j_i$ $(i=1,2,\cdots,s(j))$ ならば

$$P(E_j \cap E_k) < c_2 P(E_j) P(E_k)$$

が成立つ。

このとき

$$P(\overline{\lim} E_k) = 1$$

である（$\overline{\lim} E_k$ は事象 E_k が無限回起ることを意味するので "E_k i.o. と表わすことがある）。

<u>注意</u>：若し事象系 $\{E_k\}$ が独立ならば，ii) に於いて $H(n,h)=n+1$，iii) に於いて $\{j_i\}=\{j\}$，$c_1=c_2=2$ ととれば明かに ii), iii) はみたされるから i) の条件から結論が出ることになり Borel-Cantelli の定理の (B) が出る。また定理2.1は条件が多いので一見使い難い様な感じを受けるが，ii) の条件で $H(n,h)$ は必要に応じていくらでも大きく出来る点が ii) による制限の救いになっている。また iii) は与えられた j に対し E_j と関係の深い事象を α) の部分で取扱い，他の部分を β) で取扱っているのであって，結局は ii) と iii) で番号が充分離れている事象の間の関係が制限されているわけである。

<u>証明</u>：

$$B_h = \bigcup_{k=h}^{\infty} E_k$$

とおくと

$$P(\overline{\lim} E_k) = \lim_{h\to\infty} P(B_h)$$

であるから，任意の自然数 h に対し

$$(5)\quad P(B_h)=1$$

を証明すればよい。これを背理法を使って証明する。今あるhに対し

$$(6)\quad P(B_h)=1-\delta,\quad \delta>0$$

とすると

$$(7)\quad P\left(\bigcap_{k=h}^{\infty} E_k^c\right)=P(B_h^c)=1-P(B_h)=\delta.$$

またB_hの定義と(6)から$0<\varepsilon<1-\delta$なる任意のεに対し充分大きな$n=n(\varepsilon)$をとれば

$$P\left(\bigcup_{k=h}^{n} E_k\right)>1-\delta-\varepsilon$$

となる。従って(6)と(7)から

$$(8)\quad P\left(B_h\cap\left(\bigcap_{k=h}^{n} E_k^c\right)\right)=P(B_h)-P\left(\bigcup_{k=h}^{n} E_k\right)<\varepsilon.$$

一方条件 ii)から与えられたhと$n=n(\varepsilon)$に対しHと$C>0$が定まり$h\geqq H$ならば

$$(9)\quad P(E_k\cap E_h^c\cap\cdots\cap E_n^c)>CP(E_k)P\left(\bigcap_{k=h}^{n} E_k^c\right)$$

$$>C\delta P(E_k)\qquad\text{((7)による)}.$$

故に $F_k=E_k\cap E_h^c\cap\cdots\cap E_n^c$ とおくと i)により

$$\sum_{k=H}^{\infty} P(F_k)=+\infty$$

を得るから$H'(>H)$を適当にとれば

$$(10)\quad 1<\sum_{k=H}^{H'} P(F_k)\leqq 2$$

が成立する。(9)と(10)から

$$(11)\quad \sum_{k=H}^{H'} P(E_k)<\frac{2}{C\delta}$$

を得る。iii)で定まるc_1, c_2を使えば

$$\sum_{H\leqq j<k\leqq H'} P(E_jE_k)\leqq c_1\sum_{j=H}^{H'} P(E_j)+c_2\sum_{H\leqq j<k\leqq H'} P(E_j)P(E_k)$$

故，(11)を使って

$$(12)\quad \sum_{H\leqq j<k\leqq H'} P(E_j\cap E_k)<\frac{2c_1}{C\delta}+c_2\left(\frac{2}{C\delta}\right)^2$$

を得る。

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

一方 F_k の定義から明かに

$$\bigcup_{k=H}^{H'} F_k \subset B_k \cap \left(\bigcap_{k=h}^{n} E_k^c\right)$$

が成立つから，(8)により

(13) $\quad P\left(\bigcup_{k=H}^{H'} F_k\right) < \varepsilon .$

ここで $\{F_k ; k=H, H+1, \cdots, H'\}$ に Lemma 2.1 を適用すれば (10), (13) から

(14) $\quad 2\sum_{H\leq j<k\leq H'} P(E_j\cap E_k) \geqq 2\sum_{H\leq j<k\leq H'} P(F_j\cap F_k) > \frac{1}{\varepsilon} - 2$

となり，ε は任意に小さくとり得るから (12) と (14) は両立し得ない。即ち定理が証明出来た。

定理 2.1 を random walk の問題に応用して得られる結果を述べて定理の使い方を示すことにする。

<u>定理 2.2</u>　$\{X_k ; k=1, 2, \cdots\}$ を独立確率変数系とし $P(X_k=1)=P(X_k=-1)=\frac{1}{2}$ とする。自然数の部分列 $\{n_i ; i=1, 2, \cdots\}$ が偶数のみから出来て居り，かつ

(15) $\quad n_{i+1} - n_i > A\, n_i^{\frac{1}{2}} \quad , \qquad A>0$

なる条件をみたしているとする。この時

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i^{-\frac{1}{2}} <+\infty \ (=+\infty) \Longrightarrow P(S_{n_i}=0 \quad i.o.)=0 \ (=1)\text{，但し} S_n=\sum_{1}^{n} X_k$$

<u>注意</u>：条件 (15) 若しくはそれに代る条件が無ければ定理は発散の場合に成立たない。例えば $\{n_i\}$ として $\{2n ; n=1, 2, \cdots\}$ を考えれば $\sum_{i=1}^{\infty} n_i^{-\frac{1}{2}}=+\infty$ であるが

$$P(S_{n_i}=0 \quad i.o.)=1 \ .$$

である。条件 (15) に就いては [3]，p. 1009 に述べられている。

<u>証明</u>：$S_{n_i}=0$ なる事象を E_i で表せば Stirling の公式により

(16) $\quad P(E_i)=P(S_{n_i}=0)=\binom{n_i}{\frac{n_i}{2}} 2^{-n_i} \sim \left(\frac{2}{\pi\, n_i}\right)^{\frac{1}{2}}$

となることに注意して $\sum_{i=1}^{\infty} n_i^{-\frac{1}{2}} <+\infty$ の場合は Borel-Cantelli の定理 (A) から直ちに定理の結果が導かれる。$\sum_{i=1}^{\infty} n_i^{-\frac{1}{2}}=+\infty$ の場合は定理 2.1 を使って証明する。定理 2.1 の条件中 i) は今の場合仮定により成立しているから ii) 及び iii) の成立つことを云えば定理 2.2 は証明されたことになる。

ii) が成立つこと：$\{X_k\}$ が独立確率変数系で $P(X_k=1)=P(X_k=-1)=\frac{1}{2}$ なること及び $P(|S_{n_i}|\leqq n_i)=1$ なることから $k>i>h$ の時

$$P(E_k / E_h^c\cap E_{h+1}^c\cap\cdots\cap E_i^c)=P(S_{n_k}=0 / S_{n_h}\neq 0, \cdots, S_{n_i}\neq 0)$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

$$= \frac{1}{P(S_{n_h} \neq 0, \cdots, S_{n_i} \neq 0)} \sum_{\substack{l_j \neq 0 \\ h \leq j \leq i}} P(S_{n_k}=0, S_{n_h}=l_h, \cdots, S_{n_i}=l_i)$$

$$= \frac{1}{P(S_{n_h} \neq 0, \cdots, S_{n_i} \neq 0)} \sum P(S_{n_k}=0 / S_{n_i}=l_i) P(S_{n_h}=l_h, \cdots, S_{n_i}=l_i)$$

$$\geqq \operatorname*{Min}_{|l| \leqq n_i} P(S_{n_k}=0 / S_{n_i}=l) = \operatorname*{Min}_{|l| \leqq n_i} P(S_{n_k}-S_{n_i}=-l)$$

$$= \operatorname*{Min}_{|l| \leqq n_i} P(S_{n_k-n_i}=-l).$$

今 $l^2 = o(n)$，(n. l 共に偶数とする）且つ n が充分大きければ Stirling の公式から容易に

$$P(S_n = l) = \binom{n}{\left(\frac{n-l}{2}\right)} 2^{-n} \sim \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

が導かれる．従って $n_{k_0} \geqq n_i^3$ なる k_0 をとり，$H(h, i) = k_0$ とおけば，充分大きな i に対しては $k \geq H(h, i)$ の時

$$P(E_k / E_h^c \cap \cdots \cap E_i^c) > \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi k}\right)^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{2} P(E_k)$$

番号が小さい処の事情も考慮して ii) の $C(h)$ が得られることは容易である．

iii) が成立つこと：先ずα）である部分列として何をとればよいか見当をつける為に β）が成立つ為の条件を調べてみる．j が大きければ $k > j$ の時 (15) 及び (16) から

$$\begin{aligned} P(E_j \cap E_k) &= P(S_{n_j}=0,\ S_{n_k}=0) = P(S_{n_j}=0,\ S_{n_k}-S_{n_j}=0) \\ &= P(S_{n_j}=0)\ P(S_{n_k-n_j}=0) \\ &\sim P(S_{n_j}=0)\left(\frac{2}{\pi(n_k-n_j)}\right)^{\frac{1}{2}} \sim P(S_{n_j}=0) P(S_{n_k}=0)\left(\frac{n_k}{n_k-n_j}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= P(E_j) P(E_k)\left(\frac{n_k}{n_k-n_j}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

従って j が充分大きい時には

(18) $\quad n_k > 2n_j \Rightarrow P(E_j \cap E_k) < 2P(E_j)\ P(E_k)$

が成立つ。そこで j に対し $n_{s(j)-1} \leqq 2n_j < n_{s(j)}$ なる $s(j)$ をとり $\{j_i\ ;\ i = 1, 2, \cdots, s(j)\}$ を作り α) の成立を調べる．さて，条件 (15) から

(19) $\quad n_k - n_j > (k-j) A\sqrt{n_j}$

が成り立つから，$k > \frac{\sqrt{n_j}}{A} + j$ のとき，$n_k > 2n_j$ となることに注意すれば

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

$$(20) \qquad S(j) \leqq \frac{\sqrt{n_j}}{A} + j$$

でなくてはいけない．j が大きい時には

$$\sum_{k=j+1}^{S(j)} P(E_j \cap E_k) = P(E_j) \sum_{k=j+1}^{S(j)} \left(\frac{2}{\pi(n_k - n_j)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

であるが (19), (20)により

$$\sum_{k=j+1}^{S(j)} \frac{1}{(n_k - n_j)^{\frac{1}{2}}} \leqq \left(\frac{1}{A n_j^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=j+1}^{S(j)} \frac{1}{\sqrt{k-j}}$$

$$\leqq 2A^{-\frac{1}{2}} n_j^{-\frac{1}{4}} A^{-\frac{1}{2}} n_j^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{A}.$$

が成立つ．よって適当な c_2 をとれば

$$(21) \qquad \sum_{k=j+1}^{S(j)} P(E_j \cap E_k) < c_2 P(E_j).$$

即ち ハ) が成立つ．(18), (21) は iii) の成立を示しているから定理 2.2 が証明されたことになる．

<u>定理 2.3</u>　$\{X_k ; k=1,2,\cdots\}$, $\{S_k ; k=1,2,\cdots\}$ を前定理と同じものとする．$S_1, S_2, \cdots, S_n$ 中正なるものの個数（§1 の意味で）を N_n^+ とする時，n に関する単調増大数列 $\{\phi(n)\}$ に対し

$$\sum \frac{1}{n(\phi(n))^{\frac{1}{2}}} < +\infty \ (=+\infty) \Longrightarrow P\left(N_n^+ \leqq \frac{n}{\phi(n)} \ i.o.\right) = 0 \quad (=1).$$

<u>注意</u>：これは §1 の Arcsine law に対応する強法則になっている．

<u>証明</u>：最初に $\phi(n) \leqq n^{\varepsilon}$ $(0<\varepsilon<\frac{1}{2})$ なる $\phi(n)$ に対して定理を証明する（勿論 $\lim_{n\to\infty} \phi(n) = +\infty$ のときを考えれば充分である）．

a) 収束の場合：§1 の (39), (40) 及び $x(1-x)$ が $0<x<\frac{1}{2}$ に於て単調なることを使えば，充分大きな n に対して

$$(22) \qquad P\left(N_n^+ \leqq \frac{2^{k+1}}{\phi(2^k)}\right) \sim \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{\phi(n)}} \sim \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\phi(n)}}$$

となる．従って適当な $c>0$ をとれば

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(N_{2^k}^+ \leqq \frac{2^{k+1}}{\phi(2^k)}\right) \leqq c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\phi(2^k)}}$$

$$< c \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{n\sqrt{\phi(n)}} \right) = c \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\phi(n)}} < +\infty.$$

Borel-Cantelli の定理 (A) に依り，上式から "殆んどすべての ω" に対し $k_0(\omega)$ が存在し $k \geqq k_0(\omega)$ ならば

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

(23) $$N_{2^k}^+ > \frac{2^{k+1}}{\phi(2^k)} > \frac{2^k}{\phi(2^k)}$$

となることが導かれる．一般の n に対しては $n>2^{k_0}$ ならば $2^k \leqq n < 2^{k+1}$ なる k をとると $k \geqq k_0$ 故

$$N_n^+ \geq N_{2^k}^+ > \frac{2^{k+1}}{\phi(2^k)} > \frac{n}{\phi(n)}$$

が成立つから収斂の場合が証明された。

b) 発散の場合：r を正整数とすれば

(24) $$\sum_{n=2^r+1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\phi(n)}} \leqq \int_{2^r}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\phi(x)}} - r\int_{2}^{\infty} \frac{dy}{y\sqrt{\phi(y^r)}} \leqq r\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\phi(n^r)}}$$

が成立つから

(25) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\phi(n)}} = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\phi(n^2)}} = +\infty$$

である。こゝで記述の煩わしさを避けるため，$\phi(n)$ は整数であるとする．（この仮定が一般性を失わせないことは定理自身からもまた以下の証明からも明かである）。今

(26) $$\psi(n) = \phi(n^2)$$

とおき，事象 E_k を

$$E_k:\ S_{2k}=0,\ 且つ\ S_i < 0 \quad for\ i=2k+1, 2k+2, \cdots, 2k\psi(k)$$

で定義すると，E_k が起っていれば明かに $N_{2k\phi(k)}^+ \leqq 2k$ である．最初の仮定から $\psi(k)=\phi(k^2) \leq k^{2\varepsilon}$ であるから，$2k\psi(k)=n$ とおくと

$$2k^{1+2\varepsilon} \geqq 2k\psi(k) = n$$

即ち

$$k \geqq n' \quad ,但し\ n' = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{1+2\varepsilon}} の整数部分$$

を得る．処で n が充分大きければ明かに $(n')^2 > n$ となるから $\psi(n') \geqq \phi(n)$ であり，従って

$$E_k \Longrightarrow N_n^+ \leqq 2k = n\frac{1}{\psi(k)} \leqq \frac{n}{\psi(n')} \leqq \frac{n}{\phi(n)}$$

となる．k が異れば対応する n は明かに異るから

$$P(E_k \quad i.o.) = 1 .$$

を証明すれば充分なることがわかる．

さて，§1 の (38) に依れば，n が充分大きい時は（§1 で $f_{0,2n+1} \leqq f_{0,2n}$ なることに注意して）

(27) $$P(S_i < 0\ ;\ i=1, 2, \cdots, n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

であり，また明かに

$$P(S_{2n}=0)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

である。$\{X_k\}$ が独立で各 X_k が同じ分布に従うことから $k\to+\infty$ のとき

$$(28)\quad P(E_k)=P(S_{2k}=0)P(S_i<0\ ;\ i=1,2,\cdots,2k\psi(k)-2k)\sim\frac{1}{2\pi}\frac{1}{k\sqrt{\psi(k)}}$$

となる。従って発散の仮定から $\{E_k\}$ は定理 2.1 の条件 i) をみたしている。依って ii), iii) もみたすことを証明すればよい。

条件 ii) をみたすこと：一般に S_k のとり得る値を x, y で表わすと $k>H(n)>2n\psi(n)$ の時

$$(29)\quad P(E_k/S_1=x,\cdots,S_{2n\psi(n)}=y)=P(E_k/S_{2n\psi(n)}=y)$$
$$=\sum_x P(E_k/S_{H(n)}=x)P(S_{H(n)}=x/S_{2n\psi(n)}=y)$$
$$=\sum_x P(E_k/S_{H(n)}=x)P(S_{H(n)-2n\psi(n)}=x-y).$$

$H(n)$ を充分大きくとり，$|x|<H(n)^{\frac{1}{2}+\delta}$ $(0<\delta<\frac{1}{2})$ なる処を考えれば（$|y|\leqq 2n\psi(n)$ に注意して）

$$(30)\quad P(S_{H(n)-2n\psi(n)}=x+y)\sim P(S_{H(n)}=x)\qquad(n\to\infty\ \text{のとき})$$

となることが容易に導かれる（中心極限定理で二項分布から正規分布を導く時の計算と同様にして）。また中心極限定理によれば，$n\to+\infty$ のとき

$$\sum_{|x|>H(n)^{\frac{1}{2}+\delta}}P(S_{H(n)-2n\psi(n)}=x-y)=o\Big(\sum_{|x|\leqq H(n)^{\frac{1}{2}+\delta}}P(S_{H(n)-2n\psi(n)}=x-y)\Big)$$

が成立つ。(29), (30) から

$$\operatorname*{Min}_{|y|\leqq 2n\psi(n)}P(E_k/S_1=x,\cdots,S_{2n\psi(n)}=y)\sim\sum_x P(E_k/S_{H(n)}=x)P(S_{H(n)}=x)=P(E_k)$$

となり，これから容易に ii) の成立が導かれる。

iii) をみたすこと：E_k の定義から

$$(31)\quad j<k\leqq j\psi(j)\Rightarrow P(E_k\frown E_j)=0$$

である。$k>j\psi(j)$ の時は $\{X_k\}$ の独立性から

$$P(E_k/E_j)=P(S_{2k}=0,\ S_i<0\ ;\ i=2k+1,\cdots,2k\psi(k)/S_{2j}=0,\ S_i<0\ ;\ i=2j+1,\cdots,2j\psi(j))$$

$$(32)\quad =P(S_{2k}=0/S_{2j}=0,\ S_i<0\ ;\ i=2j+1,\cdots,2j\psi(j))P(S_i<0\ ;\ i=2k+1,\cdots,2k\psi(k)$$
$$/S_{2k}=0,\ S_i<0\ ;\ i=2j+1,\cdots,2j\psi(j))$$
$$=P(S_{2k}=0/S_{2j}=0,\ S_i<0\ ;\ i=2j+1,\cdots,2j\psi(j))P(S_i<0\ ;\ i=2k+1,\cdots,2k\psi(k)$$
$$/S_{2k}=0)=P_1P_2\qquad(\text{とおく})$$

となる。$S_{2j\psi(j)}$ の取り得る値を x で表せば適当な定数 $b>0$ に対し明かに

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

(33) $P(S_{2k}=0/S_{2j\psi(j)}=x)=P(S_{2k-2j\psi(j)}=-x)\leqq \dfrac{b}{\sqrt{k-j\psi(j)}}$

である．P_1は (33) 左辺を条件付確率で平均したものであるから

$$P_1 \leqq \frac{b}{\sqrt{k-j\psi(j)}}\ .$$

また (27) から，kが大きい時

$$P_2 \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2k\psi(k)}}$$

である．P_1, P_2の値を (32) に代入すれば適当な $c_1>0$ に対し

(34) $P(E_j \cap E_k) \leqq c_1 P(E_j)/\sqrt{(k-j\psi(j))k\psi(k)}$.

今 E_j に対し，定理 2.1, iii), め) の $\{E_{j_i}\}$ として $\{E_k; k=j\psi(j)+1,\cdots,2j\psi(j)\}$ をとれば (34) から

$$\sum_{i=1}^{s} P(E_j \cap E_{j_i})=\sum_{k=j\psi(j)+1}^{2j\psi(j)} P(E_j \cap E_k) \leqq c_1 P(E_j)\frac{1}{\sqrt{j\psi(j)}}\sum_{1}^{j\psi(j)}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2c_1 P(E_j).$$

即ちめがいえた。また $k>2j\psi(j)$ ならば $k-j\psi(j)>\frac{k}{2}$ 故 (28), (34) から適当な $c_3>0$に対し

$$P(E_j \cap E_k) < c_3 P(E_j)P(E_k).$$

を得る。上式と (31) から (β) が成立つ．

以上で $\phi(n)\leq n^{\varepsilon}$ ($0<\varepsilon<\frac{1}{2}$) の時に定理の成立つことがわかった．一般の $\phi(n)$ に対しては

$$\hat{\phi}(n)=\min(\phi(n), n^{\varepsilon}),\quad 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$$

とおけば $\hat{\phi}(n)\leqq n^{\varepsilon}$. 従って $\hat{\phi}(n)$ に対しては定理は成立つ。また

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\phi(n)}} \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\hat{\phi}(n)}} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\phi(n)}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

であるから $\sum\frac{1}{n\sqrt{\phi(n)}}$ と $\sum\frac{1}{n\sqrt{\hat{\phi}(n)}}$は同時に収斂又は発散する．$\hat{\phi}(n)$ の定義から

$$P\left(N_n^+ \leqq \frac{n}{\phi(n)}\quad i.o.\right) \leqq P\left(N_n^+ \leqq \frac{n}{\hat{\phi}(n)}\quad i.o.\right)$$

が成立つから収斂の場合は明かである．発散の場合には既に証明した結果から

(35) $P\left(N_n^+ \leq \dfrac{n}{\hat{\phi}(n)}\quad i.o.\right)=1$

が成立っている。一方 $\xi(n)=n^2$ に対しては級数の和は収斂しているから

(36) $P(N_n^+ \leq \dfrac{n}{\xi(n)} \quad i.\ o.\ ) = 0$

である．(35), (36)から確率 1 で部分列 $\{n_i(\omega);\ i=1,2,\cdots\}$ が選べて，そこでは

(37) $\dfrac{n_i}{\xi(n_i)} < N_{n_i}^+ \leq \dfrac{n_i}{\hat{\phi}(n_i)}$.

が成立っている．(37)から $\hat{\phi}(n_i) < \xi(n_i)$ であるから $\hat{\phi}$ の定義により $\phi(n_i) = \hat{\phi}(n_i)$ が出ることに注意すれば

$$P(N_n^+ \leq \frac{n}{\phi(n)} \quad i.\ o.\ ) = 1$$

を得る．即ち定理が証明された．

次に定理 2.1 を使って独立確率変数系 $\{X_k;\ k=1,2,\cdots\}$ に関する重複対数の定理を証明する．

<u>定理 2.4</u>　$\{X_k;\ k=1,2,\cdots\}$ は独立確率変数系で各 X_k は同じ分布に従い

$E(X_k)=0,\ E(X_k^2)=1\ ,\ E(|X_k|^3)=\beta<+\infty$

とする．この時単調増大数列 $\{\phi(n);\ n=1,2,\cdots\}$ に対し，$S_n=\sum_1^n X_k$ とおけば

(38) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\phi(n)e^{-\frac{1}{2}\phi^2(n)} < +\infty\ (=+\infty) \Rightarrow P(S_n > \sqrt{n}\,\phi(n)\quad i.\ o.\ ) = 0\quad (=1)$.

証明に先立ち Lemma を挙げておく．

<u>Lemma 2.2</u>　$\{X_k;\ k=1,2,\cdots,n\}$ を独立確率変数系とし

$$S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k,\qquad S_0 = 0$$

とおく．$k = 0,1,2,\cdots,n$ に対し

(39) $P(S_n - S_k < 0) \leqq \alpha < 1$

ならば，不等式

$$P(\max_{1\leq k\leq n} S_k > c) \leqq \frac{1}{1-\alpha} P(S_n > c)$$

が成立つ．

<u>証明</u>：

$$\sigma = \begin{cases} \min\{k;\ S_k > c\} & S_k > c \text{ なる } k \text{ が存在する時} \\ n+1 & \text{然らざる時} \end{cases}$$

とおくと

$$\sigma \leqq n,\ S_n \leqq c \Longrightarrow {}^{\exists}k,\ S_{k-1} \leqq c,\ S_k > c,\ S_n - S_k < 0$$

が成立つ．$S_n - S_k$ は $\langle S_k, S_{k-1} \rangle$ と独立であるから，(39)により

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

(40) $P(\sigma \leqq n,\ S_n \leqq c) \leqq \sum_k P(S_{k-1} \leqq c,\ S_k > c) P(S_n - S_k < 0) \leqq \alpha P(\sigma \leqq n)$.
この両辺を $P(\sigma \leqq n)$ からひいて

$$P(S_n > c) = P(\sigma \leqq n,\ S_n > c) \geqq (1-\alpha) P(\sigma \leqq n)$$

を得るから Lemma が証明された。

<u>Lemma 2.3.</u> $\{X_k ; k = 1, 2, \cdots, n\}$ を定理と同じ確率変数系とする。$\frac{S_n}{n}$ の分布函数を $\mathcal{F}_n(x)$, 標準正規分布を $\Phi(x)$ で表すと定数 $C > 0$ が存在して

(41) $$|\mathcal{F}_n(x) - \Phi(x)| < C \frac{\log n}{\sqrt{n}}.$$

この Lemma は Lyapunov に依り与えられ, H. Cramér が $C = 3$ とすることを証明した。Lemma の証明は H. Cramér [5], p. 77 又は B. V. Gnedenko & A. N. Kolmogorov [9] p. 201 に譲る。

<u>Lemma 2.4.</u> 定理 2.4 は

(42) $$\sqrt{\log\log n} \leqq \phi(n) \leqq \sqrt{3\log\log n}$$

をみたす $\phi(n)$ に就て成立てば一般の $\phi(n)$ に対しても成立つ。

<u>証明</u>: (40) をみたす $\phi(n)$ に就ては定理が成立っていることゝ仮定する。

$$\phi_1(n) = \sqrt{\log\log n},\quad \phi_2(n) = \sqrt{3\log\log n},\quad \psi(n) = \min(\max(\phi_1(n), \phi(n)), \phi_2(n))$$

とおくと $\psi(n)$ は単調増大かつ (42) をみたすから, $\psi(n)$ に対しては定理は成立つ。一方 (38) の級数は $\phi(n)$, $\psi(n)$ に対し同時に収斂又は発散する。何となれば $\psi(n)$ の定義から

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n} e^{-\frac{1}{2}\phi^2(n)} \geqq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n} e^{-\frac{1}{2}(\max(\phi_1(n), \phi(n)))^2} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n} e^{-\frac{1}{2}\psi^2(n)} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\phi_2(n)}{n} e^{-\frac{1}{2}\phi_2^2(n)}$$

となり右辺の才二項は収斂するから, $\phi(n)$ に対し (38) の級数が収斂すれば $\psi(n)$ に対しても収斂する。次に $\phi(n)$ に対する級数が発散の場合を考える。$\phi(n) \leqq \phi_1(n)$ なる n が無限に多くあれば, $\psi(n)$ の単調性から

(43) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\psi(k)}{k} e^{-\frac{1}{2}\psi^2(k)} \geqq \phi_1(n) e^{-\frac{1}{2}\phi_1^2(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} > \frac{1}{2}\sqrt{\log n}$$

なる不等式が無限に多くの n に対して成立つ。$n \to \infty$ のとき $\sqrt{\log n} \to \infty$ 故級数は $\psi(n)$ に対しても発散する。一方 $n \geqq n_0$ の時 $\phi(n) > \phi_1(n)$ なる n_0 が存在したとすれば $\psi(n)$ の定義から

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n} e^{-\frac{1}{2}\psi^2(n)} \geqq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n} e^{-\frac{1}{2}\phi^2(n)} = +\infty$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

故，この場合も級数は$\psi(n)$に対して発散する。

さて$\phi(n)$, $\psi(n)$に対し級数(38)が収斂したとする．この時(43)からnが大きければ$\phi(n)>\phi_1(n)$故 $\psi(n)=\min(\phi(n),\ \phi_2(n))\leqq\phi(n)$ となり，仮定から，“殆んどすべてのω”に対し，nが充分大きければ

$$S_n(\omega)\leqq\sqrt{n}\,\psi(n)\leqq\sqrt{n}\,\phi(n)$$

を得る．また$\phi(n)$, $\psi(n)$に対し級数が発散すれば“殆んどすべてのω”に対し$\{n_i(\omega);\ i=1,2,\cdots\}$が存在して

(44) $\quad S_{n_i}(\omega)>\sqrt{n_i}\ \psi(n_i)$.

一方$\phi_2(n)$に対する級数は収斂するから“殆んどすべてのω”に対しnが大きければ

(45) $\quad S_n(\omega)\leqq\sqrt{n}\ \phi_2(n)$.

となる．(44), (45)を比較して，iが大きい時 $\psi(n_i)<\phi_2(n_i)$を得る．一方ψの定義から$\psi(n_i)=\max(\phi_1(n_i),\ \phi(n_i))\geqq\phi(n_i)$.

である．これを(44)に代入すれば“殆んどすべてのω”に対し

$$S_{n_i}>\sqrt{n_i}\ \phi(n_i)$$

が無限回成立つことがわかる。依ってLemmaが証明された。

定理の証明：Lemma 2.4に依り(42)をみたす$\phi(n)$に対し証明すればよい

a) 収斂の場合，正整数n_k及び事象E_{n_k}, F_{n_k}を

$$n_k=2^n+k\left[\frac{2^n}{\log n}\right],\qquad k=0,1,2,\cdots,[\log n],$$ $[\ ]$はGaussの記号

(46) $$E_{n_k};\ S_{n_k}>\sqrt{n_k}\ \ \phi(n_k),$$

$$F_{n_k};\ \max_{n_k\leq l\leq n_{k+1}}S_l>\sqrt{n_k}\ \ \phi(n_k)$$

で定義すれば Lemma 2.3 に依り

(47) $$\left|P(E_{n_k})-\{1-\Phi(\phi(n_k))\}\right|<C\frac{\log n_k}{\sqrt{n_k}}.$$

$n_k\to+\infty$のとき

(48) $$1-\Phi(\phi(n_k))\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\phi(n_k)}\,e^{-\frac{1}{2}\phi^2(n_k)}$$

であるから，

$$\frac{\log n_k}{\sqrt{n_k}}=o\left(\frac{1}{\phi(n_k)}\ e^{-\frac{1}{2}\phi^2(n_k)}\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

を使って

(49) $$P(E_{n_k}) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \phi(n_k)} e^{-\frac{1}{2}\phi^2(n_k)}$$

を得る．こゝで

$$P(S_n < 0) = \alpha_n$$

とおけば，$E(S_n)=0$ より $0<\alpha_n<1$ となる．Lemma 2.3. 或は中心極限定理に依れば $n\to+\infty$ の時 $\alpha_n \to \frac{1}{2}$ となるから，適当な定数 α が存在して

(50) $$P(S_n < 0) \leqq \alpha < 1$$

となる．一方

$$P(F_{n_k}) = P\left(\max_{n_k \leqq l \leq n_{k+1}} \{S_{n_k} + (S_l - S_{n_k})\} > \sqrt{n_k}\ \phi(n_k)\right)$$

(51) $$\leqq P(S_{n_k} + \max_l (S_l - S_{n_k}) > \sqrt{n_k}\ \phi(n_k))$$
$$\leqq P(S_{n_k} > \sqrt{n_k}\phi(n_k)) + P(S_{n_k} \leqq \sqrt{n_k}\phi(n_k),\ S_{n_k} + \max_l (S_l - S_{n_k}) > \sqrt{n_k}\phi(n_k))$$

であり，(50)，Lemma 2.2 及び X_k が独立で同一分布に従うことから

$$P(S_{n_k} \leq \sqrt{n_k}\phi(n_k),\ S_{n_k} + \max_l (S_l - S_{n_k}) > \sqrt{n_k}\ \phi(n_k))$$
$$= \int_{-\infty}^{\sqrt{n_k}\phi(n_k)} P(\max_l (S_l - S_{n_k}) > \sqrt{n_k}\ \phi(n_k) - x) P(S_{n_k} \in dx)$$

(52) $$\leqq \frac{1}{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\sqrt{n_k}\phi(n_k)} P\left(S_{n_{k+1}} - S_{n_k} > \sqrt{n_k}\phi(n_k) - x\right) P\left(S_{n_k} \in dx\right)$$

$$< \frac{1}{1-\alpha} P(S_{n_{k+1}} > \sqrt{n_k}\ \phi(n_k)).$$

が成立つ。然るに，定義に依り

$$\frac{n_k}{n_{k+1}} = 1 + 0\left(\frac{1}{\log n}\right)$$

であるから，再び Lemma 2.3 と (42) を使えば，適当な定数 $K>0$ に対し

(53) $$P\left(S_{n_{k+1}} > \sqrt{n_k}\ \phi(n_k)\right) \frac{C_{n_k}}{\sqrt{2\pi}\ \phi(n_k)} e^{-\frac{1}{2}\phi^2(n_k)} \leqq \frac{K}{\sqrt{2\pi}\ \phi(n_k)} e^{-\frac{1}{2}\phi^2(n_k)}$$

依って (51), (52), (53) を綜合すれば

(54) $$P(F_{n_k}) \leqq K_1 \frac{1}{\phi(n_k)} e^{-\frac{1}{2}\phi^2(n_k)}, \quad K_1 > 0.$$

となる．こゝで $P(F_{n_k})$ の和を考えると，(54) に依り，不等式

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\leqq\log n}P(F_{n_k})\leqq K_1\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\leqq\log n}\frac{1}{\phi(n_k)}e^{-\frac{1}{2}\phi^2(n_k)}$$

(55) $$\leqq K_2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\leqq\log n}\frac{1}{\phi(2^n)}e^{-\frac{1}{2}\phi^2(2^n)}\quad(\phi(n)\text{ の単調性から})$$

$$\leqq K_3\sum_{n=1}^{\infty}\phi(2^n)e^{-\frac{1}{2}\phi^2(2^n)}\qquad((42)\text{に依り})$$

$$\leqq K_4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\frac{1}{k}\phi(k)e^{-\frac{1}{2}\phi^2(k)}\quad(\phi(n)\text{ の単調性から})$$

$$\leqq K_5\sum_{n}\frac{1}{n}\phi(n)e^{-\frac{1}{2}\phi^2(n)}<+\infty,\quad K_1,K_2,\cdots,K_5\text{ はすべて定数}$$

を得る。Borel-Cantelli の定理 (A) に依れば (55) は F_{n_k} は ($k\leqq\log n$ の範囲で) 確率 1 で "高々有限回" しか起り得ない。換言すれば "殆んどすべての ω" に対し $N(\omega)$ が存在し

$$N\leqq n_k\Longrightarrow\max_{n_k\leqq l\leqq n_{k+1}}S_l\leqq\sqrt{n_k}\,\phi(n_k)$$

従って，n が充分大きい時は

$$n_k\leqq n<n_{k+1}$$

なる n_k ($>N$) をとれば

$$S_n\leqq\max_{n_k\leqq l\leqq n_{k+1}}\leqq\sqrt{n_k}\,\phi(n_k)\leqq\sqrt{n}\,\phi(n)$$

となる。依って収斂の場合は証明された。

b) 発散の場合，(46) の E_{n_k} を考えると，(55) の時と同様の計算から

(56) $$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\leqq\log n}P(E_{n_k})=+\infty$$

が出る． $P(\overline{\lim}\,E_{n_k})=1$ を証明すれば充分であるが，定理 2.1 の条件 i) は既に (56) に依り保証されているから，残りの条件 ii), iii) が充たされることを云えばよい。

ii) のみたされること：$\{n_k\}$ を便宜上 $\{n\}$ で表すと $h\leqq n$ なる h と n が与えられた時 $m>n$ ならば

(57) $$P\left(E_m/E_h^c\cap\cdots\cap E_n^c\right)=\frac{P(E_m\cap E_h^c\cap\cdots\cap E_n^c)}{P(E_h^c\cap\cdots\cap E_n^c)}$$

$$\geqq\frac{P(S_m>\sqrt{m}\,\phi(m),\ |S_k|\leqq\sqrt{k}\,\phi(k),\ k=h,\cdots,n)}{P(|S_k|\leqq\sqrt{k}\,\phi(k),\ k=h,\cdots,n)}.$$

独立性から次の不等式が成立つ．

$$(58)\quad \begin{aligned} &P(S_m>\sqrt{m}\phi(m),\ |S_k|\leqq\sqrt{k}\phi(k),\ k=h,\cdots,n)\\ &\geqq P(S_m-S_n>\sqrt{m}\phi(m)+\sqrt{n}\phi(n),\ |S_k|\leqq\sqrt{k}\phi(k),\ k=h,\cdots,n)\\ &=P(S_m-S_n>\sqrt{m}\phi(m)+\sqrt{n}\phi(n))P(|S_k|\leqq\sqrt{k}\phi(k),\ k=h,\cdots,n).\end{aligned}$$

一方，Lemma 2.3 に依り，$m\to\infty$ の時

$$(59)\quad P(S_m-S_n>\sqrt{n}\phi(m)+\sqrt{n}\phi(n))\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\phi(m)}e^{-\frac{1}{2}\phi^2(m)}\sim P(E_m)$$

となる。(57)，(58)，(59) から ii) の成立つことは明かである。

iii) のみたされること：n_k が与えられた時 (α) であう部分列として何をとればよいか見当をつけてみる。m_ℓ が

$$(60)\quad \frac{\sqrt{m_\ell}}{\phi(m_\ell)}>2\sqrt{n_k}\,\phi(m_\ell)$$

をみたす程大きければ

$$(61)\quad \begin{aligned} P(E_{m_\ell}\frown E_{n_k})&=P(S_{m_\ell}>\sqrt{m_\ell}\,\phi(m_\ell),\ S_{n_k}>\sqrt{n_k}\,\phi(n_k))\\ &\leqq P\left(S_{m_\ell}>\sqrt{m_\ell}\,\phi(m_\ell),\ \frac{\sqrt{m_\ell}}{\phi(m_\ell)}\geqq S_{n_k}>\sqrt{n_k}\,\phi(n_k)\right)+P\left(S_{n_k}>\frac{\sqrt{m_\ell}}{\phi(m_\ell)}\right).\end{aligned}$$

Lemma 2.3 及び (60) に依れば，n_k が大きい時右辺才二項は

$$(62)\quad P\left(S_{n_k}>\frac{\sqrt{m_\ell}}{\phi(m_\ell)}\right)\leqq P(E_{m_\ell})P(E_{n_k})$$

をみたすことが明らかである。また右辺才一項を評価すれば

$$\begin{aligned} &P\left(S_{m_\ell}>\sqrt{m_\ell}\,\phi(m_\ell),\ \frac{\sqrt{m_\ell}}{\phi(m_\ell)}\geqq S_{n_k}>\sqrt{n_k}\,\phi(n_k)\right)\\ &\leqq P\left(S_{m_\ell}-S_{n_k}>\sqrt{m_\ell}\left(\phi(m_\ell)-\frac{1}{\phi(m_\ell)}\right)\right)P(S_{n_k}>\sqrt{n_k}\,\phi(n_k))\end{aligned}$$

となる。再び Lemma 2.3 に依り適当な定数 $K>0$ に対し

$$\leqq KP(E_{m_\ell})P(E_{n_\ell})$$

が成立つから (62) と合せて，(60) が成立てば定数 $K_1>0$ に対し

$$(63)\quad P(E_{m_\ell}\frown E_{n_k})\leqq K_1P(E_{m_\ell})P(E_{n_k})$$

となる。そこで (60) が成立つために m_ℓ はどの程度大きければよいか調べてみる。(46) に依れば（記号が良くないので混乱を招く恐れがあるが m_ℓ は実は m 及び ℓ に関係して定まる整数なることに注意されたい）

$$(64)\quad 2^{m+1}\geqq m_\ell\geqq 2^m,\qquad n_k\leqq 2^{n+1}$$

である。また (60) が成立つためには，Lemma 2.4 に依り

$$\frac{m_\ell}{n_k}>6\log\log m_\ell$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

が成立てばよい。依って(64)により

$$2^{m-n-1} > 6 \log(m+1)$$

をみたせばよい。この為には（n_k が或程度大きければ）$m > n+2\log\log n$ ならば充分である。即ち n_k が与えられた時，対応する部分列として $\{m_\ell ; m_\ell \geqq n_k$ かつ $m \leqq n+2\log\log n\}$ をとると β）は確かに成立つ。

次に α）が成立つことを調べる。$m \geqq n+5$ ならば

$$P(E_{m_\ell} \frown E_{n_k}) = P(S_{m_\ell} > \sqrt{m_\ell}\,\phi(m_\ell),\ S_{n_k} > \sqrt{n_k}\,\phi(n_k))$$
$$\leqq P(S_{m_\ell} > \sqrt{m_\ell}\,\phi(m_\ell),\ 2\sqrt{n_k}\,\phi(n_k) \geqq S_{n_k} > \sqrt{n_k}\,\phi(n_k))$$
$$+ P(S_{n_k} > 2\sqrt{n_k}\,\phi(n_k))$$

で右辺才二項は Lemma 2.3 及び (42) に依り，n_k が大きいとき

$$(66) \qquad P(S_{n_k} > 2\sqrt{n_k}\,\phi(n_k)) < \frac{1}{n} P(E_{n_k}).$$

となる。(65) の右辺才一項は独立性と Lemma 2.3 に依り

$$P(S_{m_\ell} > \sqrt{m_\ell}\,\phi(m_\ell),\ 2\sqrt{n_k}\,\phi(n_k) \geqq S_{n_k} > \sqrt{n_k}\,\phi(n_k))$$
$$(67) \qquad \leqq P\left(S_{m_\ell} - S_{n_k} > \frac{1}{2}\sqrt{m_\ell}\,\phi(m_\ell)\right) P(S_{n_k} > \sqrt{n_k}\,\phi(n_k))$$
$$< \frac{1}{n^{\frac{1}{10}}} P(E_{n_k})$$

となる。

また $n \leqq m \leqq n+4$ に対しては便宜上 $m_\ell = n_h$ で表し $k < h < 16\log n$ を考えることにする。さて，

$$P(E_{m_\ell} \frown E_{n_k}) = P(S_{n_h} > \sqrt{n_h}\,\phi(n_h),\ S_{n_k} > \sqrt{n_k}\,\phi(n_k))$$
$$(68) \qquad \leqq P\left(S_{n_h} > \sqrt{n_h}\,\phi(n_h),\ \sqrt{n_k}\left(\phi(n_k) + \frac{h-k}{5\phi(n_k)}\right) \geqq S_{n_k} > \sqrt{n_k}\,\phi(n_k)\right)$$
$$+ P\left(S_{n_k} > \sqrt{n_k}\left(\phi(n_k) + \frac{h-k}{5\phi(n_k)}\right)\right)$$

であり，右辺才二項は Lemma 2.3 に依り

$$(69) \qquad P\left(S_{n_k} > \sqrt{n_k}\left(\phi(n_k) + \frac{h-k}{5\phi(n_k)}\right)\right) \leqq e^{-\frac{1}{5}(h-k)} P(E_{n_k})$$

である。(68) の右辺才一項を評価すると

$$P\left(S_{n_h} > \sqrt{n_h}\,\phi(n_h),\ \sqrt{n_k}\left(\phi(n_k) + \frac{h-k}{5\phi(n_k)}\right) \geqq S_{n_k} > \sqrt{n_k}\,\phi(n_k)\right)$$
$$(70) \qquad \leqq P\left(S_{n_h} - S_{n_k} > \sqrt{n_h}\,\phi(n_h) - \sqrt{n_k}\left(\phi(n_k) + \frac{h-k}{5\phi(n_k)}\right)\right) P(E_{n_k}).$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

一方

$$n_h - n_k = (h-k)\left[\frac{2^n}{\log n}\right]$$

を使って

$$n_h \simeq n_k\left\{1+\frac{h-k}{(\log n)+k}\right\} \geqq n_k\left\{1+\frac{h-k}{2\log n}\right\},$$

を得るから[2)], (42) に依り

$$(71)\quad \sqrt{n_h} \geqq \sqrt{n_k}\left(1+\frac{h-k}{4\log n}\right) \geqq \sqrt{n_k}\left(1+\frac{h-k}{4\phi^2(n_k)}\right)$$

を得る。(42), (71) を使って (70) の右辺を評価すると

$$P\left(S_{n_h}-S_{n_k} > \sqrt{n_h}\,\phi(n_h) - \sqrt{n_k}\left(\phi(n_k)+\frac{h-k}{5\phi(n_k)}\right)\right)$$

$$(72)\quad \begin{aligned} &\leqq P\left(S_{n_h}-S_{n_k} > \sqrt{n_k}\left(\frac{h-k}{4\phi(n_k)} - \frac{h-k}{5\phi(n_k)}\right)\right) \\ &= P\left(S_{n_h}-S_{n_k} > \sqrt{n_k}\,\frac{h-k}{20\phi(n_k)}\right) \leqq C e^{-\delta\sqrt{h-k}} \end{aligned}$$

なる $C>0$, $\delta>0$ が存在することがわかる。

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta\sqrt{k}} < +\infty$$

なることに注意すれば, $m \leqq n + 2\log\log n$ なる条件と (66), (67), (68), (69), (70), (72) を綜合して, 条件 α) が成立つことがわかる。従って発散の場合が証明出来た。

Cor. 2.1 $\{X_k\}$, S_n を定理 2.4 と同様とする。

$$\phi(n) = \left\{2\log_{(2)} n + 3\log_{(3)} n + 2\log_{(4)} n + \cdots + 2\log_{(k-1)}(n) + (2+\delta)\log_{(k)} n\right\}^{\frac{1}{2}},$$

但し $\log_{(k)} n = \underbrace{\log\log\cdots\log}_{k\text{回}} n$

とおくとき

$$\delta > 0\ (\leqq 0) \Rightarrow P(S_n > \sqrt{n}\,\phi(n)\ \ i.o.) = 0\ \ (=1).$$

§3. Chung-Erdös の定理の Brown 運動への応用

定理 2.1 を Brown 運動に応用して path に関する性質を調べて見る。最初に A. Dvoretzky と P. Erdös [5] に依って得られた結果を述べる為に必要な Lemma を述べることにする。$X_d(t)$ を d- 次元の Brown 運動, 但し

2) 記号 $\simeq$ は両者が無限大となるときの order が等しいことを表わす。

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

$P(X_d(0)=<\overbrace{0,\cdots,0}^{d\text{個}}>)=1$とする．

Lemma 3.1. $C(A,r)$を中心A，半径rの球とする．$d\geqq 3$，$r\leqq\|A\|$（原点とAとのEuclidian distance）の時

$$P\{\|X_d(t)\|\in C(A,r)\quad for\ some\quad t>0\}=\left(\frac{r}{\|A\|}\right)^{d-2}$$

証明：d次元空間のR^dの点Xに対し$U(X)=\|X-A\|^{2-d}=(dis(X,A))^{2-d}$で定義される函数は$A$以外では調和で，$U(X_d(t))$はMartingale processとなる．$X_d(t)$が$C(A,r)$又は$C(A,R)$に到達した時にstopさせたprocessを$\widetilde{X}_d(t)$，即ち$X_d(t)$の$C(A,r)\cup C(A,R)$へのfirst passage time（$X_d(t)\in C(A,r)\cup C(0,R)$なる$t$の下限）を$\sigma(\omega)$とし

$$\widetilde{X}_d(t)=\begin{cases}X_d(t) & t<\sigma\\ X_d(\sigma) & t\geqq\sigma\end{cases}$$

とすると，よくしられている様に$U(\widetilde{X}_d(t))$もMartingale processとなる。今，$R>\|A\|$とし，$X_d(t)$が$C(A,R)$より先に$C(A,r)$に到達する確率をpで表せば，$P(\overline{\lim}\ \|X_d(t)\|=+\infty)=1$に注意して，Martingale processの性質から

(1) $pr^{2-d}+(1-p)R^{2-d}=E\{U(\widetilde{X}_d(\infty))\}=E\{U(\widetilde{X}_d(0))\}=\|A\|^{2-d}$

が成立つ。$d\geqq 3$故$R\to+\infty$としてLemmaを得る。

Lemma 3.2　$T\geqq 0$，$r\geqq 0$に対し

$$Q_d(r,T)=P\{\|X_d(t)\|\leqq r\quad for\ some\quad t>T\}$$

とおくと，$d\geqq 3$ならば

(2) $q_d\left(\frac{r}{\sqrt{T}}\right)^{d-2}e^{-\frac{r^2}{2T}}\leqq Q_d(r,T)\leqq q_d\left(\frac{r}{\sqrt{T}}\right)^{d-2}$，但し$q_d=\dfrac{d}{2^{\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$

証明：$X_d(T)$のprobability densityが

(3) $p_d(x,T)=\left(\dfrac{1}{2\pi T}\right)^{\frac{d}{2}}e^{-\frac{\|X\|^2}{2T}}$

なることを使って，$X_d(t)$のMarkov性及びLemma 3.1から不等式

$$\int_{\|X\|>r}\left(\frac{r}{\|X\|}\right)^{d-2}p_d(x,T)\,dX\leqq Q_d(r,T)\leqq\int_{R^d}\left(\frac{r}{\|X\|}\right)^{d-2}p_d(x,T)\,dX,$$

dXはR^dに於けるvolume element

を得る．R^dに於ける単位球の表面積ω_dと(3)を使って上式を書き直せば

$$\frac{\omega_d r^{d-2}}{(2\pi T)^{\frac{d}{2}}}\int_r^\infty\rho e^{-\frac{\rho^2}{2T}}d\rho\leqq Q_d(r,T)\leqq\frac{\omega_d r^{d-2}}{(2\pi T)^{\frac{d}{2}}}\int_0^\infty\rho e^{-\frac{\rho^2}{2T}}d\rho.$$

上式に$\omega_d=d\pi^{\frac{d}{2}}/\Gamma(\frac{d}{2}+1)$を代入すればLemmaを得る．

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

Lemma 3.3. $T \geqq r > 0$, $K \geqq 4$ に対し

$$P_d(r, T, K) = P\{\|X_d(t)\| \leqq r \quad \text{for some } T \leqq t \leqq KT\}$$

とおくと, $d \geqq 3$ の時

$$P_d(r, T, K) > \frac{q_d}{10}\left(\frac{r}{\sqrt{T}}\right)^{d-2}.$$

証明: $P_d(r, T, K)$, $Q_d(r, T)$ の定義から

$$P_d(r, T, K) \geqq Q_d(r, T) - Q_d(r, TK)$$

であるから (2) を使って

$$(4) \quad P_d(r, T, K) \geqq q_d\left(\frac{r}{\sqrt{T}}\right)^{d-2}\left\{e^{-\frac{r^2}{2T}} - \left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)^{d-2}\right\}.$$

$\sqrt{T} \geqq r$, $K \geqq 4$ 及び $d \geqq 3$ 故

$$(5) \quad e^{-\frac{r^2}{2T}} - \left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)^{d-2} \geqq e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} > \frac{1}{10}$$

となり (4), (5) から Lemma を得る.

こゝで単調減少函数 $g(t)$ が Brown 運動 $X_d(t)$ に関し上級 ($\mathbb{U}_d$) 或は下級 ($\mathbb{L}_d$) に属すると云う概念を次の様に定義する。

定義 3.1. 単調減少函数 $g(t)$ に対し,

$$E(\omega) = \{t \ ; \ \|X_d(t)\| \leqq g(t)\sqrt{t}\}$$

とおくとき

$$P(E(\omega) \text{が有界}) = 0 \quad (=1)$$

ならば $g(t)$ は $X_d(t)$ に関し $\mathbb{U}_d$ ($\mathbb{L}_d$) に属するという.

上で定義した $\mathbb{U}_d$, $\mathbb{L}_d$ に対し A. Dvoretzky & P. Erdös に依り得られた次の定理が成立つ.

定理 3.1. $d \geqq 3$ の時, 単調減少函数 $g(t)$ が $\mathbb{U}_d$ ($\mathbb{L}_d$) に属する為の必要充分条件は

$$(5) \quad \int^{\infty} \frac{1}{t} g^{d-2}(t)\, dt = +\infty \quad (< +\infty)$$

である。

証明: a) 収数の場合 Lemma 3.2 と $g(t)$ の単調性を使えば

$$P\{\|X_d(t)\| \leqq g(t)\sqrt{t} \quad \text{for some } 2^n < t \leqq 2^{n+1}\}$$
$$(6) \quad \leqq P\{\|X_d(t)\| \leqq g(2^n)\sqrt{2^{n+1}} \quad \text{for some } t > 2^n\}$$
$$\leqq q_d\{\sqrt{2}\, g(2^n)\}^{d-2}$$

が成立つ。収数の仮定と (6) から

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\{\|X_d(t)\| \leqq g(t)\sqrt{t} \quad \text{for some } 2^n < t \leqq 2^{n+1}\} \leqq q_d 2^{\frac{d-2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} g(2^n)^{d-2}$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

$$< \frac{2^{\frac{d}{2}-1} q_d}{\log 2} \int_1^{\infty} \frac{1}{t} g^{d-2}(t)\, dt < +\infty$$

Borel-Cantelli の定理 (A) に依れば，(7) は積分が収斂する場合に定理の成立つことを示している。

b) 発散の場合，$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$ の場合を証明すれば充分であることは定理の形から明かである。更に §2. Lemma 2.4 の場合と同様な考察から

$$(8) \qquad \frac{1}{(\log t)^2} < g^{d-2}(t) \leqq 1$$

と仮定しても一般性を失わない。さて n_k 及び事象 E_k を

$$n_k = k\,[\log k]$$

$$(9) \qquad E_k : \|X_d(t)\| \leqq g(4^{n_k+1})\sqrt{4^{n_k}} \quad \text{for some } 4^{n_k} \leqq t \leqq 4^{n_k+1},\ k=1,2,\cdots,$$

で定義する。$g(t)$ の単調性から $P(E_k\ i.o) = 1$ が云えれば $g(t) \in \mathcal{U}_d$ となることが保証される。

Lemma 3.2. 及び 3.3 に依り

$$(10) \qquad q_d\, g^{d-2}(4^{n_k+1}) \geqq P(E_k) > \frac{q_d}{10}\, g^{d-2}(4^{n_k+1})$$

が導かれるから，

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) > \frac{q_d}{10}\sum_{k=1}^{\infty} g^{d-2}(4^{n_k+1}) \geqq \frac{q_d}{10}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\log(k+1)}\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} g^{d-2}(4^n)\right\}$$

$$\geqq \frac{q_d}{10}\int^{\infty} \frac{1}{t} g^{d-2}(t)\, dt = +\infty$$

となる。即ち定理 2.1. の i) が成り立つ。ii) の成立つことは次の様にすればよい。事象 A_k を

$$(12) \qquad A_k : \|X_d(4^{n_k+1})\| \leqq a_k$$

で表わす。但し a_k は $h < k$ が与えられた時

$$(13) \qquad P(E_h^c \cap \cdots \cap E_k^c \cap A_k) > \frac{1}{2}\, P(E_h^c \cap \cdots \cap E_k^c)$$

が成り立つ様にとるものとする。$h < k < m$ とすると，(13) に依り

$$(14) \qquad P(E_m / E_h^c \cap \cdots \cap E_k^c) = \frac{P(E_m \cap E_h^c \cap \cdots \cap E_k^c)}{P(E_h^c \cap \cdots \cap E_k^c)} > \frac{P(E_m \cap E_h^c \cap \cdots \cap E_h^c \cap A_k)}{2P(E_h^c \cap \cdots \cap E_h^c \cap A_k)}$$

$$= \frac{1}{2}(E_m / E_h^c \cap \cdots \cap E_k^c \cap A_k)$$

となる。$X_d(t)$ の Markov 性を使って

$$P(E_m \cap E_h^c \cap \cdots \cap E_k^c \cap A_k) \geqq P(\|X_d(t-4^{n_k+1})\| \leqq g(4^{n_m+1})\sqrt{4^{n_m}} - a_k$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

for some $4^{n_m} \leqq t \leqq 4^{n_m+1}$) $P(E_h^c \cap \cdots \cap E_k^c \cap A_k)$

を得るから Lemma 3.2. 及び 3.3. に依り，$m \to +\infty$ のごとき

$$(15) \quad P(E_m / E_h^c \cap \cdots \cap E_k^c \cap A_k) > \frac{q_d}{10}\left(g(4^{n_m+1}) - \frac{a_k}{\sqrt{4^{n_m}}}\right)^{d-2}$$

$$> \frac{q_d}{20}\, g^{d-2}(4^{n_m+1}) \geqq \frac{1}{20} P(E_m) .$$

が成り立つ。(14), (15) から ii) の成立つことは容易にわかる。

iii) の成り立つことは次の様にする。$\sigma_j(\omega)$ を

$$\sigma_j(\omega) = \begin{cases} \inf\{t;\ \|X_d(t)\| \leqq g(4^{n_j+1})\sqrt{4^{n_j}},\ 4^{n_j} \leqq t \leqq 4^{n_j+1}\}, & \text{条件をみたす}t\text{が存在する時} \\ 4^{n_j+1}+1 & 〃 \quad \text{存在しない時} \end{cases}$$

で定義する。$j < k$ に対し，$X_d(t)$ の強 Markov 性から

$$P(E_j \cap E_k) = P(\sigma_j \leqq 4^{n_j+1}, \sigma_k \leqq 4^{n_k+1}) = \int_{4^{n_j}}^{4^{n_j+1}} P(\|X_d(t)\| \leqq g(4^{n_k+1})\sqrt{4^{n_k}} \text{ for some}$$

$$(16) \qquad 4^{n_k} \leqq t \leqq 4^{n_k+1} / \sigma_j = s)\, P(\sigma_j \in ds)$$

$$\leqq P(\|X_d(t)\| \leqq g(4^{n_k+1})\sqrt{4^{n_k}} + g(4^{n_j+1})\sqrt{4^{n_j}} \text{ for some}$$

$$4^{n_k} - 4^{n_j+1} \leqq t)\, P(\sigma_j \leqq 4^{n_j+1})$$

が成立つ。また $k > j+5$ ならば（j が大きい時）

$$\frac{g(4^{n_j+1})\sqrt{4^{n_j}}}{\sqrt{4^{n_k} - 4^{n_j+1}}} \leqq \frac{\sqrt{4^{n_j}}}{\sqrt{4^{n_k} - 4^{n_j+1}}} < \frac{1}{(n_k+1)^{\frac{2}{d-2}}(\log 4)^{\frac{2}{d-2}}} \leqq g(4^{n_k+1})$$

が成立つから，$k > j+5$ に対しては Lemma 3.2. 及び (16) から適当な定数 $c > 0$ に対し

$$P(E_j \cap E_k) < c P(E_j) P(E_k)$$

となる。依って $\{j_i\}$ として $\{j+1, j+2, j+3, j+4, j+5\}$ をとれば (α), (β) が共に成立つ。

即ち定理 2.1 の i), ii), iii) が成立つから $P(E_t\ i.o.) = 1$ が云え，$g(t) \in \mathbb{U}_d$ が云えた。

<u>Cor. 3.1.</u> $d \geqq 3$ の時 $g(t) = \dfrac{1}{(\log t)^{\frac{2}{d-2}}} \in \mathbb{L}_d$.

<u>Cor. 3.2</u> $d \geqq 3$ の時 $P(\lim_{t \to +\infty} \|X_d(t)\| = +\infty) = 1$.

Cor. 3.1. は定理 3.1. の直接の結果であり，Cor. 3.2 は Cor. 3.1 から直ちに出る。

こゝには証明を省略するが $d=2$ に対しては定理 2.1. を使って F. Spitzer [10] が次の結果を得た。$\mathbb{U}_2$, $\mathbb{L}_2$ を $d \geqq 3$ の時と同様に定義すれば

<u>定理 3.2.</u> 単調減少函数 $g(t)$ ($\geqq 0$) に対し

$$\int^{\infty} \frac{1}{t\,|\log g(t)|}\,dt = +\infty\ (<+\infty) \Rightarrow \mathcal{U}_2\ (\mathcal{L}_2)$$

Cor. 3.3 $g(t)=\frac{1}{t}\ (t>0) \in \mathcal{U}_2$

Cor. 3.4 $P(\varliminf_{t\to\infty} \|X_2(t)\| = 0) = 1$

次に $X_d(t)$ の一様連続性の評価に定理2.1を応用しよう。先ず一様連続性に関する上級，下級の概念を定義する。$\varphi(t)$ を $t>0$ で定義された連続函数かつ $\lim_{t\to 0} \varphi(t)=0$ とするとき，$f(t)$ が (17) なる性質をもてば "$f(t)$ は $\varphi(t)$ に関する Lipschitz の条件をみたす" ということにする。

(17) $\varepsilon>0$ が存在して $|t-t'|<\varepsilon \Longrightarrow |f(t)-f(t')|<\varphi(|t-t'|)$.

定義 3.2. 単調増大函数 $\psi(t)$ に対し，$\varphi(t)=\psi(\frac{1}{t})\sqrt{t}$ とおくとき，"$X_d(t)$ ($0\leqq t\leqq 1$) が $\varphi(t)$ に関する Lipschitz の条件をみたす" 確率が1ならば $\psi(t)$ は "$X_d(t)$ の一様連続性に関する上級" に属するといゝ，確率が0ならば "下級に属する" と云う。また夫々を $\psi(t)\in\mathcal{U}_d^u$, $\psi(t)\in\mathcal{L}_d^u$ で表す。

この定義で t の変域を $[0,1]$ に限った理由は，$\psi(t)>0$ ($t>0$) ならば任意の自然数 k に対し

$$\sum_n P(\|X_d(n+\tfrac{1}{k})-X_d(n)\|>\psi(k)\sqrt{\tfrac{1}{k}}) = \infty$$

となり，$X_d(t)$ の加法性と Borel-Cantelli の定理(B)に依り "$\|X_d(n+\frac{1}{k})-X_d(n)\|>\psi(k)\sqrt{\frac{1}{k}}$" なる事象は確率1で無限の多くの n に対して起る。従って t の変域を $[0,\infty)$ とすれば

$$E_k=\{\omega;\ |t-t'|<\tfrac{1}{k} \Rightarrow \|X_d(t)-X_d(t')\|<\varphi(|t-t'|)\},$$

但し $\varphi(t)=\psi\left(\frac{1}{t}\right)\sqrt{t}$

とおく時，任意の k に対し

$$P(E_k)=0$$

となるから，$\psi(t)>0$ ($t>0$) なる函数はすべて下級に属することになる。即ち t の変域を $[0,\infty)$ にすると，上級，下級の概念が無意味となってしまうからである。

$d=1$ の時 P. Lévy [9] の次の結果はよくしられている。

$$\psi(t)=c(2\log t)^{\frac{1}{2}} \in \begin{cases}\mathcal{U}_1^u & c>1 \text{ の時} \\ \mathcal{L}_1^u & c<1 \text{ の時}.\end{cases}$$

定理2.1を使ってこの結果を d 次元の場合に拡張し，かつ精密化すれば我々は次の定理を得る。

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

定理 3.3 $\psi(t)$ を単調増大函数とするとき

$$\int^{\infty}\psi^{d+2}(t)e^{-\frac{1}{2}\psi^2(t)}dt < +\infty\ (=+\infty) \Rightarrow \psi(t) \in \mathcal{U}_d^u\quad (\mathcal{L}_d^u).$$

証明: $d>1$ の時も証明は殆んど同様に出来るのでこゝでは $d=1$ の場合だけを [4] に従って証明する。また $X_1(t)$ を単に $X(t)$ で表そう。§2 の Lemma 2.4 と同様の考えで

(18) $\quad (2\log t - 10\log\log t)^{\frac{1}{2}} \leqq \psi(t) \leqq (2\log t + 10\log\log t)^{\frac{1}{2}}$

と仮定してよいことがわかるから以後 (18) を仮定する。

a) 収斂の場合。最初に "殆んどすべての ω" に対して $\varepsilon'(\omega)$ が存在して

(19) $\quad |t-t'| < \varepsilon'(\omega) \Longrightarrow X(t,\omega)-X(t',\omega) \leqq \varphi(|t-t'|)$, 但し $\varphi(t)=\psi\left(\frac{1}{t}\right)\sqrt{t}$

となることを証明すればよいことを注意しよう。何となれば，若し上記の $\varepsilon'(\omega)$ が確率 1 で存在すれば $X(t)$ の対称性から確率 1 で $\varepsilon''(\omega)$ が存在して

$$|t-t'| < \varepsilon''(\omega) \Rightarrow -\varphi(|t-t'|) \leqq X(t,\omega) - X(t',\omega)$$

となる。$\varepsilon(\omega)=\min(\varepsilon',\varepsilon'')$ とおけば $\varepsilon(\omega)$ は確率 1 で存在し

$$|t-t'| < \varepsilon(\omega) \Longrightarrow |X(t,\omega)-X(t',\omega)| \leqq \varphi(|t-t'|)$$

が成立ち，定義から $\psi(t) \in \mathcal{U}_1^u$ が出る。従って以後 (19) を目標とする。

自然数の組 (p,k,l) に対し事象 $E_{k,l}^p$ を

(20) $\quad E_{k,l}^p:\quad X\left(\frac{k+l}{2^p}\right)-X\left(\frac{k}{2^p}\right) \geqq \varphi\left(\frac{l}{2^p}\right)$, $p=1,2,\cdots,\ k\leqq 2^p,\ l\leqq p$.

で定義すると，$K>0$ が存在して

(21) $$P(E_{k,l}^p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\psi\left(\frac{2^p}{l}\right)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \frac{C_{p,k}}{\sqrt{2\pi}\,\psi\left(\frac{2^p}{l}\right)}e^{-\frac{1}{2}\psi^2\left(\frac{2^p}{l}\right)}$$

$$\leqq \frac{K}{\psi\left(\frac{2^p}{l}\right)}e^{-\frac{1}{2}\psi^2\left(\frac{2^p}{l}\right)}$$

が成立つ。この $P(E_{k,l}^p)$ の $p=1,2,\cdots,k=1,2,\cdots,2^p, l=\left[\frac{p}{3}\right],\left[\frac{p}{3}\right]+1,\cdots,p$ に対する和を考えよう。(21) 及び $\psi(t)$ の単調性を使えば

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^p}\sum_{l=[\frac{p}{3}]}^{p}P(E_{k,l}^p) \leqq K\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^p}\sum_{l=[\frac{p}{3}]}^{p}\frac{1}{\psi\left(\frac{2^p}{l}\right)}e^{-\frac{1}{2}\psi^2\left(\frac{2^p}{l}\right)}$$

$$\leqq K\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^p}\frac{1}{\psi\left(\frac{2^p}{p}\right)}e^{-\frac{1}{2}\psi^2\left(\frac{2^p}{p}\right)}$$

が出る。(18) を使って上式の右辺を変形すれば適当な定数 $K_1>0$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

$$(22)\quad \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^p}\sum_{\ell=[\frac{p}{3}]}^{p} P(E_{k,\ell}^p) \leqq K\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2^p}{p}\psi^3\left(\frac{2^p}{p}\right)e^{-\frac{1}{2}\psi^2\left(\frac{2^p}{p}\right)}$$

$$< K_1\int^{\infty}\psi^3(t)e^{-\frac{1}{2}\psi^2(t)}dt \quad < +\infty$$

を得る。次に事象 $F_{k,\ell}^p$ を

$$(23)\quad F_{k,\ell}^p:\ \max_{0\leqq t,s\leqq\frac{1}{2^p}}\left\{x\left(\frac{k+\ell}{2^p}+t\right)-x\left(\frac{k}{2^p}-s\right)\right\}\geqq\sqrt{\frac{\ell}{\ell+2}}\,\varphi\left(\frac{\ell+2}{2^p}\right)$$

で定義する。Brown 運動に関してはよく知られている様に任意の実数 a に対し

$$P(\max_{0\leqq s\leqq t}x(s) > a) = 2P(x(t) > a)$$

が成立つから $x(t)$ の加法性と上式を使えば

$$P(F_{k,\ell}^p) \leqq P\left\{\max_{0\leqq t\leqq\frac{1}{2^p}}\left(x\left(\frac{k+\ell}{2^p}+t\right)-x\left(\frac{k+\ell}{2^p}\right)\right)+\left(x\left(\frac{k+\ell}{2^p}\right)-x\left(\frac{k}{2^p}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\max_{0\leqq s\leqq\frac{1}{2^p}}\left(x\left(\frac{k}{2^p}\right)-x\left(\frac{k}{2^p}-s\right)\right)\geqq\sqrt{\frac{\ell}{\ell+2}}\,\varphi\left(\frac{\ell+2}{2^p}\right)\right\}$$

$$\leqq 4P\left\{\left(x\left(\frac{k+\ell+1}{2^p}\right)-x\left(\frac{k+\ell}{2^p}\right)\right)+\left(x\left(\frac{k+\ell}{2^p}\right)-x\left(\frac{k}{2^p}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\left(x\left(\frac{k}{2^p}\right)-x\left(\frac{k-1}{2^p}\right)\right)\geqq\sqrt{\frac{\ell}{\ell+2}}\,\varphi\left(\frac{\ell+2}{2^p}\right)\right\}$$

$$= 4P\left\{x\left(\frac{k+\ell+1}{2^p}\right)-x\left(\frac{k-1}{2^p}\right)\geqq\sqrt{\frac{\ell}{\ell+2}}\,\varphi\left(\frac{\ell+2}{2^p}\right)\right\}$$

となる。一方 (18) 及び $\left[\frac{p}{3}\right]\leqq\ell\leqq p$ なる条件のもとでは

$$e^{\frac{1}{\ell+2}\psi^2\left(\frac{2^p}{\ell+2}\right)} < e^{\frac{3}{p}\cdot 2^p} = e^6$$

が成立つから，p が大きい時は

$$(24)\quad P(F_{k,\ell}^p) \leqq \frac{4}{\sqrt{2\pi}\,\psi\left(\frac{2^p}{\ell+2}\right)}e^{-\frac{\ell}{2(\ell+2)}\psi^2\left(\frac{2^p}{\ell+2}\right)} \sim 4P(E_{k,\ell}^p)e^{\frac{1}{\ell+2}\psi^2\left(\frac{2^p}{\ell+2}\right)}$$

$$\leqq 4e^6P(E_{k,\ell}^p)$$

を得る。(22), (24) を合せて次式を得る。

$$(25)\quad \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^p}\sum_{\ell=[\frac{p}{3}]}^{p}P(F_{k,\ell}^p) < +\infty$$

従って Borel-Cantelli の定理 (A) に依り，(25) で考えられている $F_{k,\ell}^p$ は"高々有限回" しか起らない確率が 1 となる。換言すれば"殆んどすべての ω"

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

に対し $\varepsilon(\omega)$ が存在して

$$(26)\quad \frac{p}{2^p} < 2\varepsilon \Rightarrow \max_{0\le t,s\le \frac{1}{2^p}} \left\{X\left(\frac{k+\ell}{2^p}+t\right)-X\left(\frac{k}{2^p}-s\right)\right\} < \psi\left(\frac{2^p}{\ell+2}\right)\sqrt{\frac{\ell}{2^p}}$$

となる。

さて $|t-t'|<\varepsilon$ なる t と t' を考える。p を不等式

$$(27)\quad \frac{p+1}{2^{p+1}} < |t-t'| \le \frac{p}{2^p} < 2\varepsilon$$

に依り定義し，k と ℓ を

$$\frac{k-1}{2^p} < \min(t,t') \le \frac{k}{2^p} < \frac{k+\ell}{2^p} \le \max(t,t') < \frac{k+\ell+1}{2^p}$$

で定義すれば明かに $\left[\frac{p}{3}\right] < \ell \le p$. 従って (26) と $\psi(t)$ の単調性に依り

$$X(t)-X(t') \le \max_{0\le t,s\le \frac{1}{2^p}} \left\{X\left(\frac{k+\ell}{2^p}+t\right)-X\left(\frac{k}{2^p}-s\right)\right\} \le \sqrt{\frac{\ell}{2^p}}\,\psi\left(\frac{2^p}{\ell+2}\right) \le \varphi(|t-t'|)$$

となり (19) が証明された。

b) 発散の場合。$E_{k,\ell}^p$ を (20) で定義された事象とするとき，$P(E_{k,\ell}^p\ i.o.)=1$ が云えれば充分である。定理 2.1 を適用する為 $\{E_{k,\ell}^p;\ p=1,2,\cdots, k=0,1,\cdots,2^p$ $\ell=\left[\frac{p}{2}\right],\left[\frac{p}{2}\right]+1,\cdots,p\}$ を改めて $\{E_n\}$ で表すことにしよう。添字 n は $E_n=E_{k,\ell}^p$, $E_m=E_{k',\ell'}^{p'}$ の時，次の三条件のうち何れか一つが成立てば $n<m$ となる様にする。

α) $p<p'$, (β) $p=p'$ で $\ell>\ell'$, (γ) $p=p'$, $\ell=\ell'$ で $k<k'$.

（普通の辞書式の順序と異なる点は (β) であるが，これは後の計算の便宜の為になされたものである）

こゝで (21) と同様な計算から，定数 $L>0$ が存在して

$$(28)\quad P(E_{k,\ell}^p) \ge \frac{L}{\psi\left(\frac{2^p}{\ell}\right)}\, e^{-\frac{1}{2}\psi^2\left(\frac{2^p}{\ell}\right)}$$

となることに注意すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^p}\sum_{\ell=\left[\frac{p}{2}\right]}^{p} P(E_{k,\ell}^p) \ge L\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^p}\sum_{\ell=\left[\frac{p}{2}\right]}^{p}\frac{1}{\psi\left(\frac{2^p}{\ell}\right)}\, e^{-\frac{1}{2}\psi^2\left(\frac{2^p}{\ell}\right)}$$

を得る。$\psi(t)$ の単調性と (18) を使えば，上式の右辺は適当な定数 $L_1>0$ に対し

$$\ge \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^p}\sum_{\ell=\left[\frac{p}{2}\right]}^{p}\frac{1}{\psi\left(\frac{2^{p+1}}{p}\right)}\, e^{-\frac{1}{2}\psi^2\left(\frac{2^{p+1}}{p}\right)}$$

$$> \frac{L}{3}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2^p}{p}\psi^3\left(\frac{2^{p+1}}{p}\right) e^{-\frac{1}{2}\psi^2\left(\frac{2^{p+1}}{p}\right)} = L_1\int_1^{\infty}\psi^3(t)\, e^{-\frac{1}{2}\psi^2(t)}\,dt = +\infty$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

となるから定理2.1の条件のうちi)はみたされる。

次に $E_i = E^p_{k,l}$ に対し

$$U_i = x\left(\frac{k+l}{2^p}\right) - x\left(\frac{k}{2^p}\right)$$

とおく．h, n $(h \leqq n)$ が与えられたとき，$m \geqq n$，$E_m = E^{p'}_{k,l'}$ ならば明かに

(29) $E(U_i) = 0$ ，$i = h, h+1, \cdots, n$，　$E(U_m) = 0$

$$E(U_i U_m) \leqq \frac{l'}{2^{p'}} , \quad i = h, h+1, \cdots, n$$

が成立つ．一方事象 $E_i(a)$ を

$$E_i(a) ; \quad U_i > -a , \quad i = h, h+1, \cdots, n$$

で定義する。こゝで定数 a が充分大きくて

$$2P\left\{ \bigcap_{i=h}^{n} \left(E_i^c \cap E_i(a)\right)\right\} \geqq P(E_h^c \cap \cdots \cap E_n^c)$$

が成立っているとすれば

(30) $$P(E_m / E_h^c \cap \cdots \cap E_n^c) = \frac{P(E_m \cap E_h^c \cap \cdots \cap E_m^c)}{P(E_h^c \cap \cdots \cap E_n^c)} \geqq \frac{P\{E_m \cap (\bigcap_{i=h}^{n} (E_i^c \cap E_i(a))\}}{2P\{\bigcap_{i=h}^{m} (E_i^c \cap E_i(a))\}}$$

$$= \frac{1}{2} P\left(E_m / \bigcap_{i=h}^{n} (E_i^c \cap E_i(a))\right)$$

となる。この右辺を評価してii)をみたすことを導く為に次のLemmaを使う。

$\{X_1, X_2, \cdots, X_n, Y_m ; m \in \mathfrak{M}\}$ をGauss系とし各 X_i，Y_m は平均値0，分散1とする．$\rho_{i,m}$ を X_i と Y_m の間の相関係数 $\rho_m = \max_{1 \leqq i \leqq n} |\rho_{i,m}|$ とし，有界なボレル集合 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 及び $B_m \subset [-\rho_m^{-s}, \rho_m^{-s}]$ $(0<s<1)$ に対し $\varepsilon(m, B_m) = \varepsilon(\rho_{1,m}, \cdots, \rho_{n,m}; B_m)$ を

$$P(Y_m \in B_m / X_i \in B_i, \ i = 1, 2, \cdots, n) = (1 + \varepsilon(m, B_m)) P(Y_m \in B_m)$$

で定義する。

<u>Lemma 3.4</u>.　$\rho_m \to 0$ ならば $\varepsilon(m, B_m) \to 0$.

<u>証明</u>： $p_m(X_1, \cdots, X_n) = E(Y_m / X_1, X_2, \cdots, X_n)$

とおくと $p_m(X_1, \cdots, X_n)$ は平均値0の正規分布に従うことは明かである。確率ベクトル $\langle X_1, X_2, \cdots, X_n, Y_m \rangle$ の従う分布は分散行列だけで決まるから，Z を $\langle X_1, X_2, \cdots, X_n \rangle$ と独立で一次元の標準　正規分布に従う確率変数とし，$\alpha^2 = E\{p_m^2(X_1, \cdots, X_n)\}$ とおけば（勿論 $\alpha^2 < 1$）

(31) $$P(X_1 \in B_1, \cdots, X_n \in B_n, Y_m \in B_m) = P(X_1 \in B_1, \cdots, X_n \in B_n, \sqrt{1-\alpha^2}\, Z + p_m(X_1, \cdots, X_n) \in B_m)$$

となる。従って $\langle X_1, \cdots, X_n \rangle$ の従う確率分布を $P_{\langle X_i \rangle}$ で表せば次式が成立つ

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

$$P(X_1 \in B_1, \cdots, X_m \in B_m, Y_m \in B_m) = \int_{\substack{x_i \in B_i \\ 1 \leq i \leq n}} \left\{ \int_{z \in B_m} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\alpha^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\alpha^2)}\{z - p_n(x_1, \cdots x_n)\}^2} dz \right\} P_{\langle x_i \rangle}(dx_1, \cdots, dx_n)$$

$$(32) \qquad = \int_{\substack{x_i \in B_i \\ 1 \leq i \leq n}} \left\{ \int_{z \in B_m} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\alpha^2)}} e^{-\frac{1}{2}z^2 + \theta_m} dz \right\} P_{\langle x_i \rangle}(dx_1, \cdots, dx_n),$$

$$\text{但し}, \quad \theta_m = -\frac{\{\alpha^2 z^2 - 2z\, p_m(x_1, \cdots, x_n) + p_m^2(x_1, \cdots, x_n)\}}{2(1-\alpha^2)}$$

仮定により $B_1, \cdots, B_n$ は有界であるから，α 及び $p_m(x_1, \cdots, x_n)$ は高々 p_m の order であり，また $|z| < p_m^{-s}$ であるから $p_m \to 0$ の時 z 及び $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ に関し一様に $\theta_m \longrightarrow 0$ となる。依って (32) から Lemma の結果が導かれる。

さて $E_n = E_{k,\ell}^{p}$, $E_m = E_{k,\ell'}^{p'}$ とすれば順序附けの方法から $U_i\ (i = h, h+1, \cdots n)$ と U_m との間の相関係数 $\rho_{i,m}$ は高々 $\sqrt{\frac{p'}{2^{p'-p-1}}}$ である。従って m が充分大きければ (18) を使って

$$\varphi\left(\frac{2^{p'}}{\ell'}\right) < \left(\max_{1 \leq i \leq n} |\rho_{i,m}|\right)^{-\frac{2}{3}}$$

は確かに成立つ。また E_m に対し事象 G_m を

$$G_m : \ \varphi\left(\frac{\ell'}{2^{p'}}\right) < U_m < 2\varphi\left(\frac{\ell'}{2^{p'}}\right)$$

で定義すれば $m \to +\infty$ の時 $P(E_m) \sim P(G_m)$ となるから Lemma 3.4. に於ける X_i の代りに $\frac{U_i}{\sqrt{E(U_i^2)}}$, Y_m の代りに $\frac{U_m}{\sqrt{E(U_m^2)}}$ を考えて，m が充分大きい時，次の不等式を得る。

$$(33) \quad P\left(E_m \Big/ \bigcap_{i=h}^{n} (E_i^c \frown E_i(a))\right) > P\left(G_m \Big/ \bigcap_{i=h}^{n} (E_i^c \frown E_i(a))\right)$$

$$> \frac{1}{2} P(G_m) > \frac{1}{4} P(E_m).$$

こゝで (30), (33) を見れば ii) の成立つことは明かである。

iii) が成立つことを証明する前に簡単な事実を Lemma の形で挙げておく。

<u>Lemma 3.5.</u> 確率ベクトル $\langle U, V \rangle$ は二次元の正規分布に従い，各成分 U, V は夫々一次元の標準正規分布に従うものとする。U と V の間の相関係数を ρ とするとき，次の関係をみたす定数 c_1 が存在する。

$$(34) \quad \rho < \frac{1}{ab} \Longrightarrow P(U > a, V > b) \leq c_1 P(U > a) P(V > b).$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

証明：a又はbが小なる時は(34)は当然成立つから，a，b共に大きい時のみが問題となる。この時$\rho<0$ならば(34)は当然であるから，$\rho>0$の時のみを考える．また二次元正規分布の性質から$a\leqq b$と仮定して証明すれば充分である．さて，定義に依り

$$P(U>a,V>b)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_b^\infty\int_a^\infty e^{-\frac{(x^2-2\rho xy+y^2)}{2(1-\rho^2)}}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_b^{2b}\int_a^{2b} e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{y^2}{2}}dxdy+\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_b^\infty\int_{2b}^\infty e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{y^2}{2}}dxdy$$

$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{2b}^\infty\int_a^{2b} e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{y^2}{2}}dxdy$$

を得る。(35)の右辺オ一項は，$0<\rho<\frac{1}{ab}$なる条件から

$$\leqq\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_b^{2b}\int_a^{2b} e^{-\frac{(x-\frac{2}{a})^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{y^2}{2}}dxdy<P\left(U>a-\frac{2}{a}\right)P(V>b)$$

こゝで$a\to+\infty$の時

$$P(U>a)\sim e^2P\left(U>a-\frac{2}{a}\right)$$

なる関係が成立つことに注意すれば(35)の右辺オ一項は適当な定数$c>0$に対し

$$\leqq cP(U>a)\ P(V>b)$$

となる．(35)の右辺オ二項及びオ三項は，$a,b\to+\infty$の時

$$\leqq P(U>2b)\sim\frac{1}{2b}e^{-2b^2}<\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a}e^{-\frac{1}{2}a^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,b}e^{-\frac{1}{2}b^2}\sim P(U>a)P(V>b)$$

となるから，結局(35)と上の二つの関係からLemmaが導かれる．

Lemma 3.6　U,V,ρをLemma 3.5同じとするとき，定数$c_2>0$及び$\delta>0$が存在して，$a>0$ならば

$$P(U>a,V>a)\leqq c_2e^{-\delta(1-\rho^2)a^2}P(U>a).$$

証明：定義から

$$P(U>a,V>a)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_a^\infty\int_a^\infty e^{-\frac{(x^2-2\rho xy+y^2)}{2(1-\rho^2)}}dydx$$

を得る．座標軸を$\frac{\pi}{4}$だけ廻転すれば上式右辺は

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{\sqrt{2}a}^{\infty} \int_{-(x-\sqrt{2}a)}^{(x-\sqrt{2}a)} e^{-\frac{(1-\rho)x^2+(1+\rho)y^2}{2(1-\rho^2)}} dy\, dx$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{2}{1+\rho}}a}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a} e^{-\frac{a^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}\, e^{-\frac{1-\rho^2}{2(1+\rho)^2}a^2} \sim \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}\, e^{-\frac{1-\rho^2}{2(1+\rho)^2}a^2} P(U>a) \quad (a\to+\infty\text{の時})$$

となるから Lemma が証明されたことになる。

さて定理 2.1 の iii) が我々の $\{E_n\}$ に対して成立つことを証明しよう。$E_j = E_{k,\ell}^{p}$ が与えられているとき iii) の (β) が成立つ為には $E_m = E_{k,\ell}^{p'}$ の p' がどの位大きければよいかを考えよう。E_j, E_m の定義と Lemma 3.5. に依れば U_j と U_m の間の相関係数 ρ が $\left[\psi\left(\frac{2^p}{\ell}\right)\psi\left(\frac{2^{p'}}{\ell'}\right)\right]^{-1}$ より小であれば (β) は成立つ，E_m の順序附けの方法から U_m の分散が n と共に減少すること及び (18) に注目すれば，p が充分大きく，且つ $p' \geqq p + 5\log p$ ならば

$$\frac{1}{\psi\left(\frac{2^p}{\ell}\right)\psi\left(\frac{2^{p'}}{\ell'}\right)} > \frac{1}{3\sqrt{pp'}} > \sqrt{\frac{p'}{2^{p'-p-1}}} \geqq \rho$$

となるから，$p' \geqq p+5\log p$ に対応する $E_m = E_{k,\ell}^{p'}$ 又は E_j と独立な E_m を考えれば iii) の (β) は確かに成立つ。そこで $m \geqq j$ であって，$p' < p+5\log p$ に対応する $E_m = E_{k,\ell}^{p'}$ のうち，E_j と独立でない E_m の全体を $\{E_{j_i};\, i=1,2,\cdots,s\}$ として (α) の成立つことを確めればよい。$P(E_j \cap E_{j_i})$ の和を，対応する U_j, U_{j_i} の間の相関係数の自乗 ρ^2 が，$1-\frac{1}{\sqrt{p}}$ より大きいもの丶和とそうでないもの丶和に分けて考える。即ち，

$$(36) \quad \sum P(E_j \cap E_{j_i}) = \sum{}' P(E_j \cap E_{j_i}) + \sum{}'' P(E_j \cap E_{j_i})$$

但し，$\sum{}'$ は対応する変数間の相関係数を ρ とする時 $\rho^2 > 1-\frac{1}{\sqrt{p}}$ なるものの和
$\sum{}''$ 〃 $\leqq 1-\frac{1}{\sqrt{p}}$ 〃

$E_{j_i} = E_{k,\ell}^{p'}$ の定義，特に ℓ' の動き得る範囲を考えれば，$p' \geqq p+2$ の時は対応する ρ^2 が $\frac{1}{2}$ 以下となるから，$\sum{}'$ では高々 $p+1$ なる p' に対応する E_{j_i} だけが考慮されていることがわかる。一方 E_n の順序附けの規則から $\frac{\ell}{2^p} \geqq \frac{\ell'}{2^{p'}}$ であるから $\psi(t)$ の単調性に依り

$$(37) \quad P(E_j \cap E_{j_i}) = P\left\{U_j > \psi\left(\frac{2^p}{\ell}\right)\sqrt{\frac{\ell}{2^p}},\ U_{j_i} > \psi\left(\frac{2^{p'}}{\ell'}\right)\sqrt{\frac{\ell'}{2^{p'}}}\right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

$$\leqq P\left\{U_j > \psi\left(\frac{2^p}{l}\right)\sqrt{\frac{l}{2^p}},\ U_{j_i} > \psi\left(\frac{2^p}{l}\right)\sqrt{\frac{l'}{2^{p'}}}\right\}$$

を得る．今

$$(38)\quad \frac{k}{2^p} \leqq \frac{k'}{2^{p'}} < \frac{k+l}{2^p} \leqq \frac{k'+l'}{2^{p'}}$$

なる場合を考えると，U_j と U_{j_i} の間の相関係数 ρ は

$$1-\rho^2 \geqq 1-\left(\frac{k+l}{2^p}-\frac{k'}{2^{p'}}\right)\frac{2^p}{l} = \frac{k'-k2^{p'-p}}{l2^{p'-p}}$$

をみたすから，$l \geqq \left[\frac{p}{2}\right]$ に注意して，(18)，(37) 及び Lemma 3.6 に依り

$$(39)\quad P(E_j \frown E_{j_i}) \leqq ce^{-\delta(1-\rho^2)\psi^2\left(\frac{2^p}{l}\right)}P(E_j) \leqq ce^{-\delta'(k'-k2^{p'-p})}P(E_j)$$

を成立たせる j には無関係な定数 $c>0$, $\delta'>0$ が存在する．なお，(38) をみたす様な l' の個数は同一の p', k' に対しては高々 $(k'-k2^{p'-p})$ 個である．

同様に

$$(40)\quad \frac{k}{2^p} \leqq \frac{k'}{2^{p'}} < \frac{k'+l'}{2^{p'}} < \frac{k+l}{2^p}$$

なる場合にも，対応する確率は

$$(41)\quad P(E_j \frown E_{j_i}) \leqq ce^{-\delta'(l2^{p'-p}-l')}P(E_j)$$

であり，同一の p', l' に対応する E_{j_i} の個数は高々 $(l2^{p'-p}-l')$ である．更に $\frac{k}{2^p} > \frac{k'}{2^{p'}}$ なる場合にも同様に考え得るから，(39)，(41) を使って

$$\sum{}' P(E_j \frown E_{j_i}) < 2cP(E_j)\sum_{p'=p}^{p+1}\left\{\sum_{k'=k2^{p'-p}}^{(k+l)2^{p'-p}}(k'-k2^{p'-p})e^{-\delta'(k'-k2^{p'-p})}\right.$$

$$(42)\qquad \left. + \sum_{l'=1}^{l2^{p'-p}}(l2^{p'-p}-l')e^{-\delta'(l2^{p'-p}-l')}\right\}$$

$$\leqq 8cP(E_j)\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\delta' n} = \alpha P(E_j),\ 但し\ \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\delta' n}$$

を得る．

次に $\sum''$ を評価する．$\sum''$ で考えられる E_{j_i} では対応する U_j と U_{j_i} の間の相関係数が $1-\rho^2 > \frac{1}{\sqrt{p}}$ なることに注意して，(18) と Lemma 3.6. から

$$(43)\quad P(E_j \frown E_{j_i}) \leqq ce^{-\delta(1-\rho^2)\psi\left(\frac{2^p}{l}\right)}P(E_j) \leqq ce^{-\delta'\sqrt{p'}}P(E_j),$$

但し $p' < p + 5\log p$

をみたす定数 $c>0$, $\delta'>0$ の存在が導かれる。同一の p' に対応し、かつ E_j と独立でない E_{j_i} の個数は高々 $2^{p'-p}p'^3$ であるから、結局

$$(44)\quad \sum{}'' P(E_j \cap E_{j_i}) \leqq c P(E_j) \sum_{p'=p}^{p+5\log p} 2^{p'-p} p'^3 e^{-\delta'\sqrt{p'}}$$

$$< C P(E_j) \sum_{p'=p}^{p+5\log p} p'^8 e^{-\delta'\sqrt{p'}} < c p^9 e^{-\delta'\sqrt{p}}\, P(E_j)$$

が成立つ。

(36), (40), (41) から定理 2.1. の iii), iv) は確かに成立ち従って発散の場合が証明されたことになる。

Cor. 3.5. 函数

$$\varphi(t) = \{2\log t + (d+4)\log_{(2)} t + 2\log_{(3)} t + \cdots + 2\log_{(n-1)} t + (2+\delta)\log_{(n)} t\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{但し}\ \log_{(k)} t = \underbrace{\log \cdots \log}_{k\text{回}} t$$

は $\delta>0$ の時 $\mathcal{U}_d^u$ に属し、$\delta \leqq 0$ の時 $\mathcal{L}_d^u$ に属する。

定理 3.3. と同様な方法で有名な Kolmogorov の結果が証明されるが、ここでは結果だけを挙げておく。

定義 3.3. 単調増大函数 $\varphi(t)$ に対し

$$E(\omega) = \{t\ ;\ \|X_d(t)\| > \sqrt{t}\,\varphi(t)\}$$

とおく。

$$P(E(\omega)\text{ が有界}) = 1 \quad (=0)$$

のとき $\varphi(t)$ は上級 $\mathcal{U}_d^\infty$(下級 $\mathcal{L}_d^\infty$)に属するという。

定理 3.4. $\varphi(t)$ を単調増大函数とするとき

$$\int^\infty \frac{1}{t}\varphi^d(t)\, e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}\,dt < +\infty\ (=+\infty) \Longrightarrow \varphi(t) \in \mathcal{U}_d^\infty\ (\mathcal{L}_d^\infty)$$

定義 3.4. 単調増大函数 $\varphi(t)$ に対し

$$F(\omega) = \{t\ ;\ \|X_d(t,\omega)\| > \sqrt{t}\,\varphi(\tfrac{1}{t})\}$$

とおく。

$$P(\inf_{t\in F(\omega)} t > 0) = 1 \quad (=0)$$

のとき $\varphi(t)$ は上級 $\mathcal{U}_d^0$(下級 $\mathcal{L}_d^0$)に属するという。

定理 3.5. $\varphi(t)$ を単調増大函数とするとき

$$\int^\infty \frac{1}{t}\varphi^d(t)\, e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}\,dt < +\infty\ (=+\infty) \Longrightarrow \varphi(t) \in \mathcal{U}_d^0\ (\mathcal{L}_d^0)$$

Cor. 3.6.

$$\varphi(t) = \{2\log_{(2)} t + (d+2)\log_{(3)} t + 2\log_{(4)} t + \cdots + 2\log_{(n-1)} t + (2+\delta)\log_{(n)} t\}$$

は $\delta>0$ の時 $\mathcal{U}_d^\infty$ 及び $\mathcal{U}_d^0$ に属し、$\delta \leqq 0$ の時 $\mathcal{L}_d^\infty$ 及び $\mathcal{L}_d^0$ に属する。

Sem. on Probab.
Vol.2 1960年
P1-40

参 考 文 献

[1] E. Borel: Traité du calcul des probabilités et de ses applications, vol. 2, no. 1, Applications à l'arthmatique et la theorie des fonctions, Paris, Gauthier-Villars, 1926.

[2] K. L. Chung & P. Erdös: On the application of the Borel-Cantelli's Lemma. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 72, 1952.

[3] 〃 : On the lower limit of sums of independent random variables, Ann. of Math. vol. 48, 1947.

[4] K. L. Chung, P. Erdös & T. Sirao: On Lipschitz condition for Brownian motion, Jour. Math. Soc. of Japan. vol. 11, No. 4, 1959.

[5] A. Dvoretzky & P. Erdös: Some problems on random walk in space, Second Berkley Symposium, 1950.

[6] W. Feller: The general form of the so-called law of interated logarithm. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 54, 1943.

[7] 〃 : The law of the iterated logarithm for identically distributed random variables, Ann. of Math. vol. 47, No. 4 1946.

[8] B. V. Gnedenko & A. N. Kolmogorov: Limit distributions for sums of independent random variables (Translated by K. L. Chung), Cambridge, Addison-Wesley, Pub. Com. 1954.

[9] P. Lévy: Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, Gauthier-Villars, 1937.

[10] F. Spitzer: Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 87, 1958.