第2回日本数学会賞小平邦彦賞受賞講演

特性類を巡って

森田　茂之　(東京大学名誉教授，東京工業大学名誉教授)

1　はじめに

この度受賞させていただいた理由「特性類の幾何学」にある特性類とは，図形のいろいろな曲がり具合をコホモロジーのことばで表したものだが，講演者は50年余りの長い間，多くの方々と出会ってたくさんのことを教えていただきながら，特性類を巡る旅を続けて来たような気がする．この講演では，いくつかの特性類について思い出を交えながらお話ししたい (もし興味を持たれた方は [38] も参照してください)．

2　特性類と多様体の分類

まず初めに，1950 年代に始まり 1969 年に節目を迎えた微分トポロジーの黄金時代について，多様体の構造を調べる際にとくに重要な特性類である **Pontryagin 類**

$$p_i \in H^{4i}(BGL(n,\mathbb{R}),\mathbb{Q}) \text{ あるいは } p_i(M) \in H^{4i}(M,\mathbb{Q}) \ (M\text{: } C^\infty \text{ 多様体})$$

の視点から簡単に振り返ってみる．

2.1　Thom 同境理論

二つの向き付けられた n 次元 C^∞ 閉多様体 M, N が向き付け同境 $\Leftrightarrow$ あるコンパクトで向き付けられた C^∞ 多様体 W が存在して $\partial W = M \coprod -N$（$-$ は逆の向きを表す）

$$\Omega_n = \{n \text{ 次元 } C^\infty \text{ 閉多様体 }\}/\text{向き付け同境}$$

定理 1（Thom）

$$\Omega_* \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^4, \ldots]$$

$$M^n \text{ と } N^n \text{ が } \Omega_n \otimes \mathbb{Q} \text{ で同じ} \Leftrightarrow \text{ 全ての Pontryagin 数が一致する}$$

2.2　Hirzebruch 符号数定理

定理 2（Hirzebruch）　向き付けられた C^∞ 閉多様体 M^{4k} の符号数 $\mathrm{sign}(M)$ は M の Pontryagin 数で書ける: $\mathrm{sign}(M) = \langle L_k(p_1, \ldots, p_k)(M), [M]\rangle$ (L_k：Hirzebruch 多項式)

2.3　Milnor 異種球面

7 次元球面 S^7 に通常のものとは異なる（微分同相ではない）微分構造が入ることを示した．方法：具体的な構成と Hirzebruch 符号数定理

2.4　手術理論

Novikov-Browder-Sullivan-Wall 理論：与えられた多様体とホモトピー同値な多様体を全て作る，手術と呼ばれる（切り貼りの）方法が用いられ，三つのカテゴリー（微分可

能，PL，位相の各多様体）相互の関係が詳しく調べられた．対応する接バンドルの分類空間の系列：$BO \to BPL \to BTOP$

2.5 Kirby-Siebenmann 理論

定理 3（Kirby-Siebenmann） $TOP/PL = K(\mathbb{Z}/2, 3)$: 位相多様体 M に対して Kirby-Siebenmann 類 $ks(M) \in H^4(M; \mathbb{Z}/2)$ が定義され，

$$M \text{ が } PL \text{ 三角形分割可能} \;\Leftrightarrow\; ks(M) = 0$$

全体の大きな結論: $BO, BPL, BTOP$ の差は各次元で "有限"，特に

$$H^*(BO, \mathbb{Q}) \cong H^*(BPL, \mathbb{Q}) \cong H^*(BTOP, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[p_1, p_2, ...]$$

Pontryagin 類の生成する多項式代数となる

3 葉層構造の特性類

M^n：C^∞ 多様体，$\xi \subset T(M)$: 完全積分可能な p 次元部分バンドル $\Rightarrow$ 極大積分多様体（leaf と呼ばれる）の全体が M を綺麗に埋め尽くす，このような構造 $\mathcal{F}$ を葉層構造という．$\nu(\mathcal{F}) = T(M)/\xi$ を $\mathcal{F}$ の法バンドルといい，$q = n - p$ を余次元という．

3.1 Godbillon-Vey 類

$\mathcal{F}$： M 上の余次元 1 の葉層構造 $\Rightarrow gv(\mathcal{F}) \in H^3(M, \mathbb{R})$： Godbillon-Vey 類，$\mathcal{F}$ の大局的な曲がり具合を表す．これについて Thurston は次の衝撃的な結果を証明した．

定理 4（Thurston [45]） Godbillon-Vey 類は連続的に変化する: S^3 上に余次元 1 の葉層構造の族 $\mathcal{F}_t$ が存在して

$$gv(\mathcal{F}_t) = t \in H^3(S^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Reeb や Haefliger が基礎を築いた葉層構造論は，これを契機に爆発的な展開を始めた．日本でも田村一郎先生のもとでの研究に拍車がかかり，坪井俊氏を始め多くの人による活発な研究が続いて今に至る．この中で坪井氏，水谷忠良氏と Godbillon-Vey 類について共同研究を行なった（[34] 参照）．

3.2 Bott 消滅定理と葉層構造の特性類

定理 5（Bott 消滅定理 [3]） $\mathcal{F}$ を C^∞ 多様体 M 上の余次元 q の葉層構造とする．このとき，$\mathcal{F}$ の法バンドル $\nu(\mathcal{F})$ の Pontryagin 類が生成する $H^*(M, \mathbb{Q})$ の部分代数において，次数が $2q$ を超える部分は 0 である：

$$\mathrm{Pont}\,(\nu(\mathcal{F}))^{>2q} = 0$$

これを基に，Godbillon-Vey 類を代表例とする葉層構造の特性類の理論が建設され，1970, 80 年代に活発に研究された．関連する理論：Chern-Simons 理論（二次特性類の理論），Gelfand-Fuchs 理論（多様体のベクトル場全体の成すリー代数のコホモロジー理論）

4　多様体バンドルの特性類の理論

多様体バンドル（与えられた C^∞ 多様体 M をファイバーとするファイバーバンドル）の特性類の理論が 1980 年代に始まって多くの人による活発な研究が行われ，様々な形での発展が続いている．

4.1　曲面バンドルの特性類

Σ_g を向き付けられた種数 g $(g \geq 2)$ の閉曲面とし，$\pi : E \to B$ を向き付けられた Σ_g バンドル（曲面バンドル）とする．このとき，次のようにして曲面バンドルの特性類 $e_i \in H^{2i}(B,\mathbb{Z})$ $(i = 1, 2, \cdots)$ を定義することができる（位相幾何の枠組みでの定義）．

ξ: π のファイバーに沿う接バンドル

$GL_+(2,\mathbb{R})$ バンドル $\Rightarrow$ Euler 類 $e(\xi) \in H^2(E,\mathbb{Z})$

$$H^{2i+2}(E,\mathbb{Z}) \ni e^{i+1} \mapsto \pi_*(e^{i+1}) = e_i \in H^{2i}(B,\mathbb{Z})$$

i-th **Mumford-M.-Miller** 類 [43][35][33] あるいは κ-類と呼ばれる (以下 MMM 類と略記)．Mumford 氏は代数幾何の枠組みで Chow 代数の元として定義した．

曲面バンドルの特性類の原点は次の二つの論文にある．

小平邦彦先生 [28]:

曲面上の曲面バンドルの構造をもつ複素曲面 S で符号数が 0 でないもの

$$\Sigma_g \to S \to \Sigma_h, \quad \mathrm{sign}(S) \neq 0$$

を初めて構成された．これはトポロジーの研究において重要な役割を果たし続けている．

M.F. Atiyah 氏 [1]:

Riemann 面のモジュライとの関連が示された:

S の複素構造 $\Rightarrow$ Σ_h 上に種数 g のリーマン面の族（モジュライが動く）

$\Rightarrow$ 非自明な写像 $\Sigma_h \to \mathbf{M}_g$ （種数 g の Riemann 面のモジュライ空間）が得られる

Σ_g バンドルの構造群:

$B\mathrm{Diff}_+\Sigma_g \overset{Earle-Eells}{\sim} K(\mathcal{M}_g, 1)$（ホモトピー同値）

$$\mathcal{M}_g = \pi_0\mathrm{Diff}_+\Sigma_g\text{: 写像類群} \Rightarrow \quad e_i \in H^{2i}(B\mathrm{Diff}_+\Sigma_g,\mathbb{Z}) \cong H^{2i}(\mathcal{M}_g,\mathbb{Z})$$

思いがけない（嬉しかった）応用：Thurston's question:

$$\text{自然な写像} \quad \mathrm{Homeo}_+\Sigma_g \to \mathcal{M}_g \quad \text{は右逆写像をもつか？}$$

[35]:　MMM 類の非自明性と Bott 消滅定理を組み合わせて次の結果を証明した:

$$\text{自然な写像} \quad \mathrm{Diff}_+\Sigma_g \to \mathcal{M}_g \quad \text{は右逆写像をもたない} \quad (g \geq 9)$$

最終解答：Markovic[31]　$\mathrm{Homeo}_+\Sigma_g \to \mathcal{M}_g$ は右逆写像をもたない

河澄響矢氏は MMM 類の重要な一般化である捻れ係数 MMM 類を定義した ([24]). これは以後の研究で重要な役割を果たしている.

定理 6（Madsen-Weiss[30]）

$$\lim_{g\to\infty} H_*(B\mathrm{Diff}_+\Sigma_g, \mathbb{Z}) \cong H_*(\Omega^\infty MTSO(2), \mathbb{Z})$$

Harer 安定ホモロジー　Madsen-Tillmann 空間

$$\Rightarrow \lim_{g\to\infty} H^*(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[e_1, e_2, ...]$$

4.2 高次元の多様体バンドルの特性類

M: 一般の C^∞ 多様体 $\pi : E \to B$ 微分可能な M バンドル
ξ: π のファイバーに沿う接バンドル

$$GL(n, \mathbb{R}) \text{ バンドル } \Rightarrow \text{ 分類写像 } \quad f : E \to BGL(n, \mathbb{R})$$

$$H^k(BGL(n, \mathbb{R}), \mathbb{Q}) \ni \alpha \overset{f^*}{\to} f^*(\alpha) \in H^k(E, \mathbb{Q})$$

$$H^k(E, \mathbb{Q}) \ni f^*(\alpha) \mapsto \pi_*(f^*(\alpha)) = \kappa_\alpha \in H^{k-n}(B, \mathbb{Q})$$

一般化された MMM 類が定義される：

$$H^*(BGL(n, \mathbb{R}), \mathbb{Q}) \ni \alpha \mapsto \kappa_\alpha \in H^{*-n}(B\mathrm{Diff}M, \mathbb{Q})$$

W: $2n$ 次元単連結 C^∞ 閉多様体，$W_g = W\sharp\, g(S^n \times S^n) \setminus D^{2n}$

定理 7（Galatius-Randal-Williams[13]）　$2n \geq 6$ の時，$H_*(B\mathrm{Diff}(W_g, \partial W_g))$ は $g \to \infty$ について安定化し，Madsen-Weiss 型の定理が成立する

4.3 多様体バンドルの特性類に関する最近の進展

(I) Chan-Galatius-Payne[4]
曲面バンドルの非安定特性類の無限列が $H^{4g-6}(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q})$ に存在することを初めて示した．Payne-Willwacher の仕事等，この流れはその後も続いている．$H^{k>4g-5}(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q}) = 0$ (Harer[18]), $H^{4g-5}(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q}) = 0$ (Sakasai-Suzuki-M.[39], Church-Farb-Putman[5])
(II) Watanabe[46]
$\mathrm{Diff}_+S^4 \not\simeq SO(5)$ であることを，Kontsevich の定義した特性類が非自明であることを示すことにより証明した．引き続き進展が続いている．
(III) Weiss[47]
$2n$ 次元ベクトルバンドルの場合には，高次の Pontryagin 類 $p_{n+1}, p_{n+2}, ..$ は全て消えるが，$TOP(2n)$ バンドルの場合には，そうではないという驚くべき結果を証明した．
(IV) Konno-Lin[29]

単連結 C^∞ 多様体 M^{2n} に対して，$S^n \times S^n$ を次々と連結和をとる操作に関して，M バンドルの特性類（$B\mathrm{Diff}M$ のコホモロジー）の安定性定理が知られている：$n=1$ Harer[17]，$n \geq 3$ Galatius- Randal-Williams[13])．ところが，4 次元の場合には，安定性定理は全く成り立たないことを，ゲージ理論による $\mathbb{Z}/2$ 係数の特性類を使って示した．

(V) Galatius-Randal-Williams[14]

$TOP(n)$ $(n \geq 6)$ バンドルと Diff S^{2n-1} $(2n-1 \geq 9)$ バンドルに関しては，無限個の有理係数 Pontryagin 類 $p_1, p_2, \ldots$ と e^2 の多項式が全て代数的に独立であること，すなわち次の準同型がいずれも単射であることを示した．

$$\mathbb{Q}[e^2, p_1, p_2, \ldots] \to H^*(BTOP(2n), \mathbb{Q}) \quad (2n \geq 6)$$

$$\mathbb{Q}[e^2, p_1, p_2, \ldots] \to H^*(B\mathrm{Diff}\ S^{2n-1}, \mathbb{Q}) \ \ (2n-1 \geq 9)$$

(VI) Borinsky-Vogtmann[2]

自由群 F_n の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(F_n)$ の Euler 数 $\chi(\mathrm{Out}(F_n))$ の growth rate を決定し，奇数次のコホモロジー類が莫大な量存在することを示した．以前，逆井卓也氏，鈴木正明氏との共同研究 [40][41] において $n \leq 11$ の χ を決定し, 奇数次コホモロジー類の存在を始めて示していた．一方, 現在知られている具体的に特定された非自明類は 5 個（4 個は偶数次，1 個が奇数次）のみ！

5 特性類の消滅と出現

Bott: “It is hardly new in topological circles that if something vanishes then something else should simultaneously appear somewhere”　いわば “特性類保存の法則”

5.1 消滅と出現の連鎖

出現 1

$$\textbf{Chern 類}: c_i \in H^{2i}(BGL(n,\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

消滅 1

$$\text{平坦バンドル上 } c_i = 0 \in H^{2i}(BGL^\delta(n,\mathbb{C}), \mathbb{C}) \quad (\delta \text{ は離散位相を表す})$$

出現 2

$$\Rightarrow \textbf{Cheeger-Chern-Simons 類}:$$

$$\hat{c}_i \in H^{2i-1}(BGL^\delta(n,\mathbb{C}), \mathbb{C}/\mathbb{Z}(i)), \quad \mathbb{Z}(i) = (2\pi\sqrt{-1})^i$$

$$GL(n,\mathbb{Z}) \text{ に制限} \Rightarrow \textbf{Borel 類} \quad \beta_i \in H^{4i+1}(GL(n,\mathbb{Z}), \mathbb{R})$$

消滅 2　　　　二つの消滅定理

Igusa[19]:

$$H^{4i+1}(GL(n,\mathbb{Z}), \mathbb{R}) \ni \beta_i \longmapsto 0 \in H^{4i+1}(\mathrm{Aut}(F_n), \mathbb{R})$$

Galatius[12]:

$$H^*(\mathrm{Aut}(F_\infty), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, \quad H^*(\mathrm{Out}(F_\infty), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

$$1 \to \mathrm{IA}_n \to \mathrm{Aut}(F_n) \to GL(n, \mathbb{Z}) \to 1$$

$$H^{4i+1}(\mathrm{Aut}(F_n), \mathbb{R}) \ni 0 \leftarrow \beta_i \in H^{4i+1}(GL(n, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$$

出現 3

Igusa's higher FR torsion 類 [19]

$$\tau_{2i}(\mathrm{IA}_n) \in H^{4i}(\mathrm{IA}_n, \mathbb{R})$$

Problem 1 $\tau_{2i}(\mathrm{IA}_n)$ の非自明性を証明せよ

つぎの群拡大の間の射がある:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{g,1} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{g,1} & \longrightarrow & Sp(2g, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 1 \\ & & \cap\big\downarrow & & \cap\big\downarrow & & \cap\big\downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{IA}_{2g} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(F_{2g}) & \longrightarrow & GL(2g, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,1} \subset \mathrm{IA}_{2g}$ に制限

出現 4

Klein-Igusa's higher FR torsion of Torelli group

$$\tau_{2i}(\mathcal{I}_{g,1}) \in H^{4i}(\mathcal{I}_{g,1}, \mathbb{R})$$

消滅 3

Borel:

$$H^{4i+1}(GL(2g, \mathbb{Z}), \mathbb{R}) \ni \beta_i \longmapsto 0 \in H^{4i+1}(Sp(2g, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$$

Borel 類は $Sp(2g, \mathbb{Z})$ 上でも消える

消滅 3+ **消滅 2**($\mathrm{Aut}(F_n)$ 上で消える) $\Rightarrow$

出現 5

Hain-Igusa-Penner[19]: **偶数次 MMM 類**が出現する

$$e_{2i} \in H^{4i}(\mathcal{M}_{g,1}, \mathbb{Q})$$

Sakasai-Suzuki-M.: [42]: 群のコホモロジー理論の枠組みで解釈した.

出現 6

Pontryagin 類が現れる：

Riemann 面の普遍族 $\pi : \mathbf{C}_g \to \mathbf{M}_g$, ξ: π の相対接バンドル

Grothendieck Riemann-Roch 定理 $\Rightarrow$ M_g および Torelli 空間 (= Teichmüller 空間/$\mathcal{I}_g$: 複素多様体) の Pontryagin 類も偶数次 MMM 類の多項式で表される.

Problem 2 偶数次 MMM 類は Torelli 群上で非自明が予想されるが，未解決．この問題は Torelli 空間 $\mathbf{T}_g$ の Pontryagin 類が非自明か？という問題と密接に関わっている．

こうして，一連の群 $GL(n,\mathbb{C})$, $GL(n,\mathbb{Z})$, $\mathrm{Aut}(F_n)$, $\mathcal{M}_g$ とそれらの部分群を巡って，Chern 類, Cheeger-Chern-Simons 類, Borel 類, Igusa torsion 類, MMM 類, Pontryagin 類などの種々の特性類の出現と消滅の連鎖が続いていくことになる．

6 特性類と低次元多様体

6.1 写像類群と Torelli 群

Johnson[23]: Torelli 群のアーベル化を決定した．

$$\tau_1 : \mathcal{I}_g \to \wedge^3 H/H \quad \text{Johnson 準同型 [20]},\ H = H_1(\Sigma_g,\mathbb{Z}), H \overset{\wedge\omega_0}{\subset} \wedge^3 H$$
$$H_1(\mathcal{I}_g) = \wedge^3 H/H \oplus 2 \text{ torsion (Birman-Craggs-Johnson)}$$

Johnson 準同型を写像類群全体に次のように拡張した [36]：

$$\tilde{\tau}_1 : \mathcal{M}_g \to \frac{1}{2} \wedge^3 H/H \rtimes \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$$

これから次の写像が得られる $\Phi : H^*(\wedge^3 H/H)^{\mathrm{Sp}} \to H^*(\mathcal{M}_g,\mathbb{Q})$
河澄氏との共同研究 [27] において

Im Φ = MMM 類の生成する部分代数（tautological algebra）であることを示した．

一方　　$H^2(\wedge^3 H/H)^{\mathrm{Sp}} \cong \mathbb{Q}$ だが

消滅 4

$$\tau_1^* : H^2(\wedge^3 H/H)^{\mathrm{Sp}} \to H^2(\mathcal{I}_g,\mathbb{Q}) \quad \text{は 0 写像}$$

出現 7

$\mathcal{K}_g = \mathrm{Ker}\ \tau_1$:　Johnson 核　$\Rightarrow$

$$d : \mathcal{K}_g \to \mathbb{Z} \quad \text{準同型，}\mathcal{M}_g \text{ 同変，} \quad d \in H^1(\mathcal{K}_g;\mathbb{Z})^{\mathrm{Sp}} \cong \mathbb{Z} \quad \text{有理生成元}$$

Casson 不変量（ホモロジー球面の不変量）の “core”

6.2 Torelli 群と Johnson 準同型

Johnson の時代を拓く大きな仕事 ([20][21][22] 参照)⇒ [37] において Johnson 準同型を研究した．そしてつぎのような仕事に代表される，今に至る大きな流れが始まった．

Nakamura[44], Matsumoto[32] Johnson 余核に Galois 元が出現することを示した．
Hain[16] Torelli Lie 代数の表示を与えた．
Enomoto-Satoh[8] Johnson 像への強力な障害を与えた．
Conant-Kassabov-Vogtmann[6] hairy graph 理論を創った．
Kawazumi-Kuno 理論 [25][26]，新しい大きな展開: Goldman-Turaev Lie bialgebra が現れ Lie 理論 (Kashiwara-Vergne 問題) との関連 (with Alekseev-Naef) も生まれる．

6.3　4 次元多様体のある問題 C^∞ vs TOP

Garoufalidis-Levine [15] (Habiro, Goussarov 理論を基に）つぎの群を導入した

$$\mathcal{H}_{g,1} = \{(\text{ホモロジー } \Sigma_{g,1} \times I, \varphi),$$
$$\varphi : \Sigma_{g,1} \cong \Sigma_{g,1} \times \{1\}\}/\text{ホモロジー同境}$$

この群は自然に写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ を含み，言わば “ホモロジー的曲面バンドル” を統制する群．葉廣和夫氏，G. Massuyeau 氏，逆井氏,... の研究がある．

二つの versions がある:　$\mathcal{H}_{g,1}^{\text{smooth}}, \quad \mathcal{H}_{g,1}^{\text{top}}$

低次元トポロジーで極めて重要な群:

$$\mathbf{\Theta} = \{\text{ ホモロジー 3 球面 }\}/\text{ホモロジー同境}$$

Furuta[11], Fintushel-Stern[9]: 無限ランクであることを証明した．

Dai-Hom-Stoffregen-Truong[7]:　$\mathbb{Z}^\infty$ を直和因子として含むことを示した．

つぎの中心拡大がある：$0 \to \mathbf{\Theta} \to \mathcal{H}_{\mathbf{g,1}}^{\text{smooth}} \to \overline{\mathcal{H}}_{\mathbf{g,1}} \to \mathbf{1}$

消滅 5

定理 8（Freedman[10]）　任意の 3 次元ホモロジー球面はコンパクトで可縮な位相多様体の境界となる

$$\Rightarrow \quad \mathbf{\Theta} \to \mathcal{H}_{\mathbf{g,1}}^{\text{top}}\text{は 0 写像} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Theta} \to \mathcal{H}_{\mathbf{g,1}}^{\text{smooth}} \to \overline{\mathcal{H}}_{\mathbf{g,1}} \overset{\textbf{factor}}{\to} \mathcal{H}_{\mathbf{g,1}}^{\text{top}}$$

出現 8

Problem 3　**Euler 類** $e(\mathcal{H}_{g,1}^{\text{smooth}}) \in H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1}, \mathbf{\Theta})$ の非自明性を示し，その性質を研究せよ．例えば　$H^2(\mathcal{H}_{g,1}^{\text{top}}) \to H^2(\overline{\mathcal{H}}_{g,1})$ の像はどの程度の情報を持つか？

Sakasai-Suzuki-M.　$H^2(\mathcal{H}_{g,1}^{\text{top}})$ の元を無限個構成し $e(\mathcal{H}_{g,1}^{\text{smooth}})$ に関連することを期待している．

参考文献

[1] M.F. Atiyah, *The signature of fibre-bundles*, in Global Analysis. Papers in honor of K. Kodaira, University of Tokyo Press, 1969, 73–84.

[2] M. Borinsky, K. Vogtmann, *The Euler characteristic of the moduli space of graphs*, arXiv:2301.01121.

[3] R. Bott, *On a topological obstruction to integrability*, Proc. International Congess Math. Nice 1970, vol. 1, 27–36, Gauthier-Villars, Paris 1971.

[4] M. Chan, S. Galatius, S. Payne, *Tropical curves, graph complexes, and top weight cohomology of $\mathcal{M}_g$*, J. Amer. Math. Soc. 34(2) (2021), 565–594.

[5] T. Church, B. Farb, A. Putman, *The rational cohomology of the mapping class group vanishes in its virtual cohomological dimension*, Inter. Math. Res. Notices, 21 (2012), 5025–5030.

[6] J. Conant, M. Kassabov, K. Vogtmann, *Hairy graphs and the unstable homology of* $\mathrm{Mod}(g,s)$*,* $\mathrm{Out}(F_n)$ *and* $\mathrm{Aut}(F_n)$, J. Topology 6 (2013), 119–153.

[7] I. Dai, J. Hom, M. Stoffregen, L. Truong, *An infinite-rank summand of the homology cobordism group*, arXiv:1810.06145.

[8] N. Enomoto, T. Satoh, *New series in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces*, Algebr. Geom. Topol. 14 (2014), 627–669.

[9] R. Fintushel, R. Stern, *Instanton homology of Seifert fibred homology three spheres*, Proc. London Math. Soc. 61 (1990), 109–137.

[10] M. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, Jour. Diff. Geom. 17 (1982), 357–453.

[11] M. Furuta, *Homology cobordism group of homology* 3*-spheres*, Invent. Math. 100 (1990), 339–355.

[12] S. Galatius, *Stable homology of automorphism groups of free groups*, Ann. Math 173 (2011), 705–768.

[13] S. Galatius, O. Randal-Williams, *Homological stability for moduli spaces of high dimensional manifolds. I*, J. Amer. Math. Soc. 31(1) (2018), 215–264.

[14] S. Galatius, O. Randal-Williams, *Algebraic independence of topological Pontryagin classes*, arXiv:2208.11507.

[15] S. Garoufalidis, J. Levine, *Tree-level invariants of three-manifolds, Massey products and the Johnson homomorphism*, in: "Graphs and Patterns in Mathematics and Theoretical Physics", Proc. Sympos. Pure Math. 73 (2005) 173–205.

[16] R. Hain, *Infinitesimal presentations of the Torelli groups*, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997) 597– 651.

[17] J. Harer, *Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces*, Ann. of Math. (2) 121 (1985), 215–249.

[18] J. Harer, *The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. 84 (1986) 157–176.

[19] K. Igusa, "Higher Franz-Reidemeister Torsion", Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.

[20] D. Johnson, *An abelian quotient of the mapping class group* $\mathcal{I}_g$, Math. Ann. 249 (1980), 225–242.

[21] D. Johnson, *A survey of the Torelli group*, in: Low-dimensional topology (San Francisco, Calif., 1981) , Contemp. Math. **20**, 165–179. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[22] D. Johnson, *The structure of the Torelli group I: A finite set of generators for* $\mathcal{I}_g$, Ann. Math. 118 (1983), 423–442.

[23] D. Johnson, *The structure of the Torelli group III: The abelianization of* $\mathcal{I}_g$, Topology 24 (1985), 127–144.

[24] N. Kawazumi, *A generalization of the Morita-Mumford classes to extended mapping class groups for surfaces*, Invent. Math. 131 (1998), 137–149.

[25] N. Kawazumi, Y. Kuno, *Intersections of curves on surfaces and their applications to mapping class groups*, Ann. Inst. Fourier 65 (2015), 2711–2762.

[26] N. Kawazumi, Y. Kuno, *The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Johnson homomorphisms*, Handbook of Teichmüller theory volume V, edited by Papadopoulos, 98–165,

IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 26, Eur. Math. Soc., Zürich, 2016.

[27] N. Kawazumi, S. Morita, *The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and stable characteristic classes*, Math. Res. Lett. 3 (1996) 629–642.

[28] K. Kodaira, *A certain type of irregular algebraic surfaces*, Jour. Anal. Math. 19 (1967), 207–215.

[29] H. Konno, J. Lin, *Homological instability for moduli spaces of smooth 4-manifolds*, arXiv:2211.03043.

[30] I. Madsen, M. Weiss, *The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford's conjecture*, Ann. of Math. (2) 165 (2007), no. 3, 843–941.

[31] V. Markovic, *Realization of the mapping class group by homeomorphisms*, Invent. Math. 168(3) (2007), 523–566.

[32] M. Matsumoto, *Galois representations on pro finite braid groups on curves*, J. Reine Angew. Math. 474 (1996), 169–219.

[33] E.Y. Miller, *The homology of the mapping class group*, J. Diff. Geom. 24 (1986), 1–14.

[34] T. Mizutani, S. Morita, T. Tsuboi, *The Godbillon-Vey classes of codimension one foliations which are almost without holonomy*, Ann. of Math. 113 (1981), 515–527.

[35] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Bull. Amer. Math. Soc. 11 (1984), 386–388; Invent. Math. 90 (1987), 551–577.

[36] S. Morita, *The extension of Johnson's homomorphism from the Torelli group to the mapping class group*, Invent. Math. 111 (1993), 197–224.

[37] S. Morita, *Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces*, Duke Math. J. 70 (1993), 699–726.

[38] S. Morita, トポロジーの課題探訪 ∼ 特性類と不変量を中心として ∼, 中央大学における特別講義ノート（北野晃朗氏による）, https://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH/

[39] S. Morita, T. Sakasai, M. Suzuki, *Abelianizations of derivation Lie algebras of the free associative algebra and the free Lie algebra*, Duke Math. J. 162 (2013), 965–1002.

[40] S. Morita, T. Sakasai, M. Suzuki, *Computations in formal symplectic geometry and characteristic classes of moduli spaces*, Quantum Topology 6 (2015), 139–182.

[41] S. Morita, T. Sakasai, M. Suzuki, *Integral Euler characteristic of* $\mathrm{Out}\,F_{11}$. Experiment. Math. 24, (2015), 93-97.

[42] S. Morita, T. Sakasai, M. Suzuki, *Secondary characteristic classes for subgroups of automorphism groups of free groups*, arXiv:1512.0636.

[43] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, in "Arithmetic and geometry, Vol. II", Progr. Math. **36** (1983), 271–328.

[44] H. Nakamura, *Coupling of universal monodromy representations of Galois-Teichmüller modular groups*, Math. Ann. 304 (1996), 99–119.

[45] W. Thurston, *Noncobordant foliations of* S^3, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 511–514.

[46] T. Watanabe, *Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of* $\mathrm{Diff}(S^4)$, arXiv:1812.02448.

[47] M.S. Weiss, *Rational Pontryagin classes of Euclidean fiber bundles*, Geom. Topl. 25 (2022), 3351–3424.